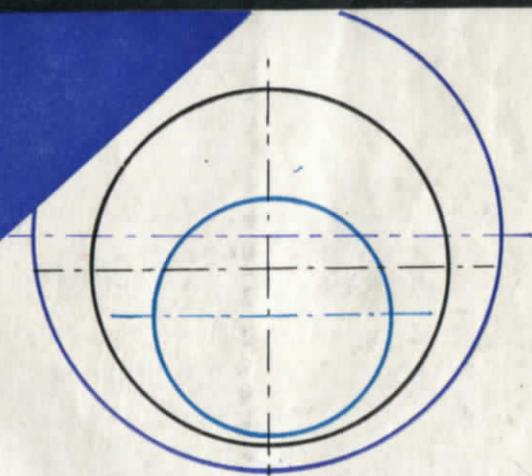


МЕТОДЫ
ОПТИМИЗАЦИИ
ПРИ ДОВОДКЕ
И ПРОЕКТИРОВАНИИ
ГАЗОТУРБИННЫХ
ДВИГАТЕЛЕЙ

А. П. ТУНАКОВ



А. П. ТУНАКОВ

ББК 39
Т84 учителя,
фессора
Утевича
'аю.

МЕТОДЫ
ОПТИМИЗАЦИИ
ПРИ ДОВОДКЕ
И ПРОЕКТИРОВАНИИ
ГАЗОТУРБИННЫХ
ДВИГАТЕЛЕЙ



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
- 1979

ББК 39.55
Т84
УДК 629.7.036.3.001

Светлой памяти учителя,
профессора
Жирицкого Георгия Сергеевича
посвящаю..

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рецензент д-р техн. наук *И. Ф. Флоров*

Тунаков А. П.
Т84 Методы оптимизации при доводке и проектировании газотурбинных двигателей. — М.: Машиностроение, 1979.— 184 с., ил.

65 к.

В книге изложены методы оптимизации параметров авиационных газотурбинных двигателей, а также их применение в системе автоматизированного проектирования (САПР-Д). Приведена универсальная математическая модель ГТД, которая обеспечивает выполнение многокритериальной оптимизации при различных программах регулирования. Книга предназначена для инженеров, занимающихся вопросами расчета, проектирования, испытаний и доводки газотурбинных двигателей.

Т 31808-350 350-79 3606030000
038(01)-79

ББК 39.55
6Т5.1

ИБ № 1099

Алексей Павлович Тунаков

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ДОВОДКЕ И ПРОЕКТИРОВАНИИ ГАЗОТУРБИНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Редактор *Г. Д. Журавлева*
Обложка художника *Е. В. Бекетова*

Технические редакторы *В. И. Орешкина, Л. Т. Зубко*
Корректор *В. Е. Блохин*

Сдано в набор 24.11.78
Формат набора 60×90^{1/16}
Печать высокая
Тираж 1400 экз.

Подписано в печать 31.01.79.
Бумага типографская № 3
Усл. печ. л. 11,5
Заказ 1339.

Т-01055
Гарнитура литературная
Уч.-изд. л. 12,4
Цена 65 к.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва, ГСП-6, 1-й Басманный пер., д. 3.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7.

© Издательство «Машиностроение», 1979

Стремительное развитие науки и техники является одной из основных черт современной эпохи. Непрерывно повышаются требования к техническим характеристикам любых изделий, в том числе самолетов и двигателей. Используемые методы проектирования оказывают существенное влияние на технические характеристики и конкурентоспособность. Традиционные методы проектирования часто оказываются уже недостаточными, поэтому в последние годы начали широко применяться различные методы оптимизации двигателей и их узлов на математических моделях.

При традиционных методах проектирования для каждого изделия обычно разрабатываются несколько вариантов и конструктор выбирает один из них, наилучший со всех точек зрения, т. е. он решает сложную логическую задачу выбора. При использовании методов оптимизации выбор варианта осуществляется в процессе расчета на ЭЦВМ. При этом все основные характеристики проектируемого изделия для каждого из его вариантов должны быть рассчитаны по математической модели. Из этих характеристик формируется критерий оптимизации, который позволяет оценить проектируемое изделие со всех точек зрения и выбрать компромиссный вариант. Надежность выбора оптимального варианта существенно зависит от точности математических моделей. Большое значение имеет организация работ и последовательность решения различных задач оптимизации.

Подобные работы выполняют во многих организациях. В Казанском авиационном институте они ведутся с 1962 г. Накопленный опыт составления математических моделей и решения различных задач оптимизации изложен в данной книге. Основное внимание уделяется математическим моделям газотурбинных двигателей и повышению их точности. Для компактности изложения опущены выводы сложных формул, отсутствуют доказательства сходимости процессов последовательных приближений. Она проверялась только в процессе расчетов.

Все описанные программы для ЭЦВМ составлены в Казанском авиационном институте. Большинство из них записаны в двух вариантах, т. е. на алгоритмических языках Алгол-60 и Фортран-IV. Расчеты выполнялись в основном на ЭЦВМ типа М-220М, М-222, БЭСМ-4 и ЕС-1022. Автор выражает глубокую благодарность проф. А. Я. Черкезу за ценные советы, а также всем сотрудникам лаборатории и кафедры, выполнявшим расчеты на ЭЦВМ и принимавшим участие в оформлении книги.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — матрица;
A⁻¹ — обратная матрица;
a — элемент матрицы **A**;
a_r — горловина межлопаточного канала в турбине и в компрессоре;
B — матрица;
b — хорда лопатки, элемент матрицы **B**;
b_ш — ширина лопатки;
C — содержание углерода в топливе;
C — матрица;
C_{уд} — удельный расход топлива;
cov — ковариация;
c — скорость газа в абсолютном движении, коэффициенты аппроксимации;
c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении;
D — матрица коэффициентов влияния;
D̃ — эмпирическая дисперсия;
d — средний диаметр проточной части, коэффициент влияния;
E — кинетическая энергия, модуль упругости;
F — площадь проходного сечения, функция;
Fi — критерий Фишера;
F — матрица;
f — функция, число степеней свободы;
G — массовый расход газа или воздуха;
G — матрица весов;
G̃ — приведенный расход;
g — вес варьируемого параметра;
H — содержание водорода в топливе;
H — высота полета;
H_н — низшая теплотворная способность;
J — момент инерции;
i — номер варьируемого или измеряемого параметра, энтальпия, угол атаки;
j — номер границы II рода, номер экспериментальной точки;
K — ковариационная матрица;
K_y — коэффициент устойчивости компрессора;
k — показатель адиабаты для воздуха или газа, коэффициент корреляции;
L — длина изделия;
L — обозначение матрицы;
l — высота лопатки, элемент матрицы **L**;
M — момент на валу, момент количества движения;
M — число **M**;
m — масса, число границ II рода, число условных уравнений, степень двухконтурности, отношение диаметров;
N — содержание азота в топливе;
N̄ — мощность;
N̄ — приведенная мощность;
n — число переменных, число компонент различных векторов, число варьируемых параметров, частота вращения ротора;

n — приведенная частота вращения;
O — содержание кислорода в топливе;
P — уровень существенности, доверительная вероятность;
p — статическое давление, порядок реплики;
p* — давление торможения;
q — газодинамическая функция расхода;
q_т — относительный расход топлива;
R — газовая постоянная, реактивная тяга;
R — вектор геометрических размеров проточной части;
Re — число Рейнольдса;
r — радиус компонента вектора **R**, объемные доли;
S — энтропия;
T — статическая температура;
T* — температура торможения в абсолютном движении;
T_{кр} — критическая температура;
T_{w*} — температура торможения в относительном движении;
t — температура масштабированная, шаг решетки;
U — вектор внешних условий (режимных параметров);
u — окружная скорость, компонента вектора **U**;
v — скорость полета;
w — скорость в относительном движении;
X — вектор параметров схемы, вектор варьируемых параметров;
x — координата, варьируемый параметр, компонента вектора **X**;
Y — вектор констант, вектор-столбец, исследуемая функция (векторная);
y — компонента вектора **Y**, координата, константа;
Z — вектор параметров;
z — компонента вектора **Z**, число лопаток, число контуров ГТД, число уравнений, координата, номер сечения или венца;
z — взвешенное измерение;
α — углы входа и выхода газа для решетки в абсолютном движении, коэффициент избытка воздуха в камере сгорания;
β — углы входа и выхода газа для решетки в относительном движении;
γ — угол между вектором скорости и ее проекцией на плоскость;
Δ — обозначение приращения или разности;
δ — относительная погрешность или невязка, относительная утечка или отбор, радиальный зазор;
ε — невязка, заданная точность расчета;
ε — взвешенная невязка;
η — коэффициент полезного действия;
η_r — коэффициент полноты сгорания;
φ — отношение среднего диаметра к длине лопатки в турбине, угол установки профиля;
θ — угловая координата (при использовании полярных координат);
κ — коэффициент утечки;
λ — приведенная скорость;
λ* — приведенная скорость на выходе из турбинной решетки, соответствующая моменту заклинивания в дей;
λ_н — приведенная окружная скорость;
μ — молекулярная масса, центральные моменты случайной величины;
ν — нецентральные моменты случайной величины;
ξ — коэффициент потерь;
Π — исследуемый параметр, признак;
π — степень повышения или понижения давления;
ρ — степень реактивности, плотность;
σ — средняя квадратичная погрешность, коэффициент восстановления давления, нормальные напряжения;
σ₀ — средняя квадратичная погрешность на единицу веса;
τ — газодинамическая функция температуры, время;
φ — скоростной коэффициент реактивного сопла или соплового аппарата в турбине;
ψ — скоростной коэффициент рабочего колеса в турбине;

Ω — область поиска;
 ω — угловая скорость вращения.

Индексы верхние

* — параметры торможения;
~ — эмпирические оценки;
— — приведенные, относительные или взвешенные параметры;
= — отношение приведенных параметров.

Индексы нижние

0 — параметры за входным патрубком или диффузором, параметры перед входным направляющим аппаратом компрессора (ВНА), параметры перед сопловым аппаратом турбины;
1 — параметры и размеры перед рабочими колесами компрессора и турбины;
2 — параметры и размеры за рабочими колесами компрессора и турбины;
3 — параметры и размеры за спрямляющим аппаратом компрессора;
I — внутренний контур ТРДД;
II — наружный контур ТРДД;
a — осевая составляющая;
H — невозмущенный поток на высоте H;
i — порядковый номер измеряемого параметра, порядковый номер строки матрицы;
j — порядковый номер экспериментальной точки, порядковый номер столбца матрицы;
n — порядковый номер;
S — для энтропии;
u — окружная составляющая;
w — в относительном движении;
ад — адиабатный, адекватный;
в — для воздуха, сечение на входе в компрессор, внутренний;
г — для горла решетки, сечение за камерой сгорания;
г — для газа;
зад — заданный;
изм — измеренный;
исх — исходный;
к — для компрессора;
л — лопаточный (геометрический или расчетный);
н — наружный;
ном — номинальный;
оср — осредненный;
отб — отбора;
п — помпажа, при полном расширении;
р — соответствующий расчетным условиям;
расч — расчетный;
с — выходное сечение реактивного сопла;
см — после смешения потоков;
ср — средний арифметический или на средней поверхности тока (ставится только при возможности путаницы, в остальных случаях опускается);
т — табличный, сечение за турбиной;
топл — для топлива;
тр — траверсирования;
уд — удельный;
ф — форсажа;

Принятые сокращения

ВД — высокого давления;
ВНА — входной направляющий аппарат компрессора;

ВСА — выходной спрямляющий аппарат компрессора;
ГТД — газотурбинный двигатель;
ДФЭ — дробный факторный эксперимент;
КС — камера сгорания;
НД — низкого давления;
ПРТУ — процедура решения трансцендентных уравнений;
ПФЭ — полный факторный эксперимент;
РК — рабочее колесо;
РУД — рычаг управления двигателем;
СА — спрямляющий или сопловой аппарат;
ЭЦВМ — электронная цифровая вычислительная машина.

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Постановка задачи оптимизации

При создании газотурбинного двигателя одной из наиболее серьезных проблем является выбор оптимальных параметров двигателя и его узлов. Они должны удовлетворять нескольким обычно противоречивым требованиям, обеспечивая минимум или максимум некоторых из них. Задача всегда является неоднозначной и количество возможных вариантов может быть очень большим. Если на ЭЦВМ рассчитываются только характеристики сравниваемых вариантов, а выбор их ведется вручную, то приходится рассматривать только часть вариантов, которые считаются наиболее перспективными, и вводить различные упрощения. После такого анализа никогда нет уверенности, что выбранный вариант действительно является оптимальным со всех точек зрения. Возможностей человека просто недостаточно для решения столь сложной логической задачи. Современные ЭЦВМ более успешно справляются с подобными задачами, хотя при этом требуются сложные методы и программы. Они имеют общее название «методы машинной оптимизации». Можно утверждать, что в настоящее время проблема оптимизации является одной из основных в науке и технике. Она интенсивно разрабатывается, поэтому появляется большое количество работ как теоретического, так и прикладного характера.

Оптимизация начинается с выбора критерия оптимальности, который должен быть согласован с вышестоящей моделью (в ГТД с моделью самолета). Он может быть скалярным или векторным, т. е. это параметр или совокупность параметров, которые позволяют оценить степень совершенства спроектированного изделия. В литературе применяется большое количество терминов для обозначения этого понятия, в том числе функция цели (или целевая функция), функция качества, выгоды, функция (или поверхность) отклика, критерий предпочтения, эффективности, качества, оптимальности, параметр оптимизации и др. Наиболее распространенный из них функция цели. Он и будет применяться в дальнейшем. При геометрической интерпретации задачи будет еще применяться термин «поверхность отклика», которая является геометрическим изображением функции цели в многомерном пространстве. Векторная функция цели часто свертывается тем или иным методом в скалярную (см. подразд. 2.1.6). Максимум или минимум скалярной функции цели должен соответствовать оптимальному решению, т. е. оптимальному

варианту проектируемого изделия. Процесс поиска этого оптимума и есть оптимизация. В газотурбинном двигателе выражение для функции цели может быть получено при анализе математической модели самолета. В него должны входить такие параметры, как расход топлива (удельный или суммарный), масса двигателя, габаритные размеры, тяга на взлетном и форсажном режимах и т. д. При оптимизации профиля отдельных деталей, например, дисков турбины, функцией цели является обычно их масса. Ее нужно минимизировать при заданных ограничениях.

Выбираются n варьируемых параметров, которые можно изменять в процессе оптимизации. Они образуют вектор $X \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В газотурбинном двигателе компоненты вектора — степень двухконтурности, степени повышения давления в компрессорах, температура газа перед турбиной и т. д. При проектировании узлов двигателя без использования близкого прототипа и готовых деталей варьируемыми параметрами будут все основные размеры прочной части. При наличии близкого прототипа часть размеров может быть взята с него. Для каждого варьируемого параметра назначаются разумные пределы изменения. Они называются границами I рода: $x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Границы II рода или функциональные ограничения — это значения параметров, не являющихся варьируемыми, но однозначно с ними связанными, которые гарантируют, что любой удовлетворяющий всем им одновременно вариант изделия является приемлемым, хотя и не оптимальным. Они могут быть самыми различными. Это, например, запасы устойчивости на разных режимах, тяга на второстепенных режимах, которые не входят в функцию цели, запасы прочности в различных деталях и т. д. Границы II рода обычно приводятся к одинаковому виду: $f_j(X) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Вместе с границами I рода они выделяют в n -мерном пространстве область приемлемых решений Ω (область поиска).

Оптимум находится в результате решения задачи нелинейной оптимизации*, под которой понимается «любая процедура для обнаружения максимума или минимума функции переменных, которые подчиняются ограничениям, в случае если функция или ограничения, или оба вместе нелинейны» [5]. В случае поиска минимума эта задача записывается так:

$$F(X_{\text{opt}}) = \min_{X \in \Omega} F(X), \quad (0.1)$$

Иногда используется другая запись:

$$\min \{F(X) / X \in \Omega\}, \quad (0.2)$$
$$\Omega = \{X / f_j(X) \geq 0 \text{ для всех } j\}.$$

* Более распространенный термин — «нелинейное программирование» — искажает смысл задачи и очень неудобен. Он возник из-за небрежного перевода английского термина «mathematical programming», предложенного Робертом Дорфманом приблизительно в 1950 г. Правильный перевод «математическое планирование» не получил распространения, поэтому используется термин «нелинейная оптимизация» рекомендуемый в международном словаре терминов [5].

Совокупность зависимостей, связывающих функцию цели F и границы Π рода f_j с варьируемыми параметрами X , называется математической моделью * данного изделия. В сложных изделиях модели получаются очень громоздкими. Они содержат большое количество формул, уравнений, логических условий. Обычно в них имеются итерационные циклы, т. е. расчет ведется последовательными приближениями.

Предложено большое количество методов решения задач нелинейной оптимизации. Большинство из них запрограммировано. Некоторые из программ входят в математическое обеспечение ЭЦВМ. Если математическая модель получается несложной, а количество варьируемых параметров умеренным ($n < 10 \dots 15$), то решение задачи нелинейной оптимизации обычно не вызывает трудностей. Если же попытаться использовать эти методы при реальном проектировании газотурбинных двигателей, то возникают значительные трудности. Причины их следующие: сложность математических моделей, которые с трудом размещаются в оперативном запоминающем устройстве современных ЭЦВМ; нереально большое время счета, которое значительно увеличивается из-за необходимости частого обращения к внешним запоминающим устройствам; большое количество варьируемых параметров; векторная функция цели; сложная система ограничений, включающая и трудно формализуемые условия, а следовательно, сложная область поиска, вплоть до многосвязной; опасность появления участков области поиска, в которых математическая модель становится некорректной и непросчитывается; опасность появления пустой области поиска (см. сноску на стр. 66); недостаточная точность существующих математических моделей.

Аналогичные осложнения возникают не только в газотурбинных двигателях, но и при проектировании других сложных изделий. Приходится разрабатывать специальные методы для решения задач оптимизации в процессе проектирования. Изложение этих методов, позволяющих преодолеть перечисленные выше трудности, составляет основное содержание книги. Следует отметить, что современные методы оптимального проектирования имеют три основные особенности **:

1) иерархичность, т. е. вместо математической модели используется иерархическая система моделей; 2) декомпозиционность, т. е. возможность разложения одной сложной задачи на несколько более простых и оптимизации каждой из них по отдельности; 3) многокритериальность, т. е. применение векторной функции цели.

0.2. Классификация математических моделей

Понятие модели широко обсуждается в работах философского характера. Для него даны различные определения. Наиболее удач-

ное из них предложено, по нашему мнению, К. Е. Морозовым *. Согласно этому определению «под моделью понимается объект любой природы, который способен замещать исследуемый объект так, что его изучение дает новую информацию об этом объекте», а «моделированием называется построение (или выбор) и изучение моделей с целью получения новых знаний об объектах». Модели могут быть различной природы, но для оптимизации нужны математические модели цифровые или реже аналоговые.

В некоторых работах под математической моделью понимается любая формула или методика расчета. Такое расплывчатое понятие неудобно. Поэтому целесообразно дать более четкое определение. Цифровой математической моделью для оптимизации называется совокупность констант и соотношений, т. е. формул, уравнений, неравенств и логических условий, которая однозначно связывает вектор параметров, включающий функцию цели и функциональные ограничения, с варьируемыми параметрами, внешними и начальными условиями. Начальные условия используются только в динамических задачах, которые выходят за рамки данной работы. Это определение справедливо для мысленной модели, а материальная модель представляет собой универсальную ЭЦВМ, в запоминающем устройстве которой находится программа, составленная по соответствующей мысленной модели.

При оптимизации более удобными оказываются обычно такие модели, у которых входная и выходная информации максимально приближены к той, которая получается или в принципе может быть получена при испытаниях двигателя на стенде или в детающей лаборатории. В этом случае удается сформировать функцию цели, функциональные ограничения и варьируемые параметры из более привычных параметров, имеющих ясный физический смысл.

Разработка математической модели сложного изделия и ее программирование являются очень трудоемкой работой, поэтому модели, чтобы уменьшить их количество, должны быть универсальными. Универсальная модель, конечно, является более сложной, чем обычная, но дополнительные затраты времени и средств всегда меньше, чем затраты при создании нескольких простых моделей.

Математические модели газотурбинного двигателя и его узлов можно разделить на два класса: однорежимных и многорежимных моделей. В однорежимных варьируемыми параметрами являются критерии подобия, различные газодинамические параметры и их комплексы. В этом случае при изменении режима геометрические размеры будут изменяться и невозможно или очень трудно производить оптимизацию одновременно на нескольких режимах. Приходится рассматривать только один наиболее важный режим. Функция цели и все функциональные ограничения рассчитываются на этом режиме. Фактически в однорежимных моделях решается прямая задача проектирования, т. е. по газодинамическим парамет-

* Морозов К. Е. Математическое моделирование в научном познании. М., Мысль, 1969. 212 с.

* Более строгое определение математической модели дано в разд. 0.2.

** Эти особенности были сформулированы проф. Л. А. Расстригиным.

рам находятся геометрические размеры и характеристики изделия. Такие модели значительно проще и получили широкое распространение.

В многорежимных моделях варьируемыми параметрами являются непосредственно основные геометрические размеры или другие параметры, независимые от режима работы, например, степень двухконтурности и степени повышения давления компрессоров на расчетном режиме. В этом случае можно производить оптимизацию одновременно на нескольких заданных режимах. Функция цели и функциональные ограничения могут рассчитываться на каждом из них. Это не вызывает дополнительных трудностей, а только увеличивает время счета. Многорежимные модели соответствуют обратной задаче проектирования, в которой по заданным геометрическим размерам находятся характеристики изделия. Они обычно близки к методикам поверочного расчета соответствующих изделий и часто разрабатываются на базе этих методик. Основное отличие моделей от методик расчета заключается в большей универсальности, в объеме и структуре входной и выходной информации. Универсальность достигается за счет модульной организации модели и внутренней достигаемой за счет модульной организации модели и внутренней программы — диспетчер, которая настраивает модель на решение заданной задачи и подготавливает входную информацию для расчета. Например, для расчета номинального режима двигателя, его высотно-скоростных и дроссельных характеристик, массы, габаритных размеров, приемистости, коэффициентов влияния нужны различные методики расчета, но все они могут быть заменены одной универсальной моделью. Она, конечно, значительно сложнее, чем любая из этих методик, но проще чем все они вместе взятые. Полная математическая модель должна обеспечивать определение с какой-то степенью точности всех параметров изделия, которые в принципе можно получить при его испытаниях, т. е. полная модель должна быть информационным аналогом изделия. Создание полных моделей дело отдаленного будущего. Сложные математические модели часто не удается реализовать в одной программе для ЭЦВМ, а приходится использовать целую совокупность взаимно увязанных программ. Иногда ее называют циклом. Она должна обеспечивать расчет любых параметров, которые могут повлиять на выбор оптимального варианта изделия.

Многорежимные модели значительно сложнее одnoreжимных и разработка их оправдана только для тех изделий, которые длительное время работают на частичных режимах и не могут быть оптимизированы на каком-то одном режиме.

Модели газотурбинного двигателя можно разделить по сложности на четыре уровня, выделив отдельно прочностные модели. При этой классификации приходится использовать термин «черный ящик», под которым понимается объект исследования, внутреннее устройство которого неизвестно или не рассматривается. Изучается только входная и выходная информация. Примеры моделей разного уровня сложности рассмотрены на двигателе, принципиальная схема которого показана на рис. 0.1.

В моделях I уровня сложности двигатель рассматривается как черный ящик. Выходной информацией являются характеристики двигателя, а входной — параметры, определяющие режим работы, которые включают в себя закон регулирования, положение РУД и внешние условия. Зависимости между ними аппроксимируются полиномами или более сложными функциями. В общем виде

$$Z = f(U, Y), \quad (0.3)$$

где $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n_z})$ — вектор основных параметров газотурбинного двигателя; $U = (u_1, u_2, \dots, u_{n_u})$ — вектор параметров, задающих режим работы; $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$ — вектор констант.

Схема модели I уровня сложности показана на рис. 0.2. Полиномы, входящие в модель, не зависят друг от друга, число их поэтому может легко изменяться в зависимости от назначения модели. Например, при аппроксимации высотно-скоростных характеристик получается модель вида $R = f(M, H)$, $C_{уд} = f(M, H)$.

Модели II уровня сложности представляют собой систему черных ящиков, каждый из которых описывает один из основных узлов двигателя. Пример схемы модели приведен на рис. 0.3 для двигателя, показанного на рис. 0.1. В нем среди внешних условий фигурируют химические (термодинамические) свойства воздуха и топлива, которые представляют собой зависимости энтальпии и энтропии от температуры. Характеристики компрессора, турбины и коэффи-



Рис. 0.1. Схема одновального газотурбинного двигателя

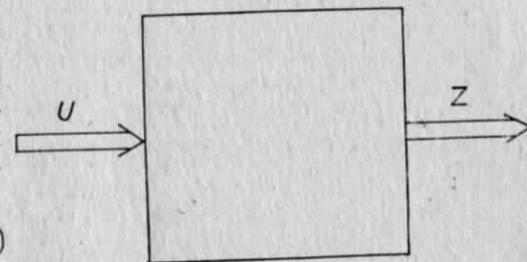


Рис. 0.2. Схема математической модели I уровня сложности для двигателя

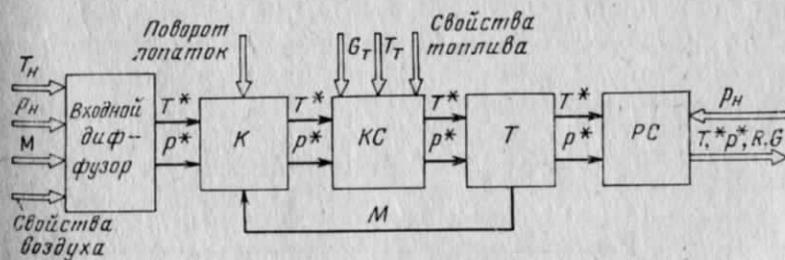


Рис. 0.3. Схема математической модели II уровня сложности для одновального двигателя (см. рис. 0.1)

цененты потерь в остальных узлах предполагаются известными. Они входят в математические модели соответствующих узлов. В общем виде

$$Z = f(U, X, Y), \quad (0.4)$$

где $X \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{n_x})$ — вектор параметров схемы, компонентами которого являются степень двухконтурности, степени повышения давления компрессоров на номинальном режиме и т. п. Остальные вектора имеют тот же смысл, что и в моделях I уровня, но иное содержание. Эти модели могут быть использованы для выбора оптимальных параметров двигателя.

В моделях III уровня сложности используются непосредственно основные геометрические размеры проточной части, но только на среднем диаметре или приведенные к среднему диаметру. Модель в общем виде

$$Z = f(R, U, Y), \quad (0.5)$$

где $R \equiv (r_1, r_2, \dots, r_{n_r})$ — вектор геометрических размеров. Эти модели записываются для каждого из узлов. Они могут использоваться самостоятельно или объединяются в модель двигателя. При значительной длине лопаток в модели вводятся поправки на пространственный характер течения. В нагруженных деталях проточной части рассчитываются запасы прочности, но по сильно упрощенным формулам для сокращения объема модели. Возникающие ошибки компенсируются поправочными коэффициентами, которые в первом приближении равны единице, а перед последующими уточняются по прочностным моделям. Пример схемы модели для многоступенчатого осевого компрессора приведен на рис. 0.4. Модели III уровня могут быть использованы для определения оптимальных размеров проточной части.

В моделях IV уровня сложности рассчитывается пространственный поток в лопаточных венцах. Математическая запись в общем виде совпадает с моделями III уровня [см. формулу (0.5)], но в векторе геометрических размеров компонентами являются размеры лопаток на нескольких радиусах. Существующие методики расчета пространственного потока разработаны только для отдельных ступеней или групп ступеней компрессора или турбины, поэтому и модели IV уровня могут быть составлены только для них, а не в

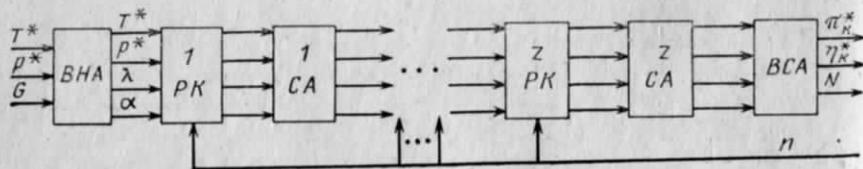


Рис. 0.4. Схема математической модели III уровня сложности для многоступенчатого компрессора

целом для двигателя при современных возможностях ЭЦВМ. Эти модели могут быть использованы для выбора оптимальной закрутки лопаток и их профилирования. Прочностные расчеты выполняются также, как и в моделях III уровня.

По трудоемкости модели соседних уровней отличаются в десятки раз, поэтому по возможности надо использовать модели более низких уровней. Прочностные модели не вошли в данную классификацию, так как они сильно зависят от рассчитываемой детали. Результаты расчета по ним используются не только для расчета запасов прочности, но и для уточнения поправочных коэффициентов в моделях III и IV уровня.

0.3. Структура программного обеспечения

В соответствии с современными тенденциями все составленные программы должны быть оформлены в виде отдельных модулей и храниться в банке программ на ЭЦВМ. Информация постоянного характера, необходимая для работы программ, хранится в банке данных. Перед решением очередной задачи программа-диспетчер (супервизор) формирует из модулей программу нужной структуры. Вводится информация переменного характера (называемая исходной), которая контролируется и преобразуется к виду, пригодному для соответствующих модулей. В процессе расчета в зависимости от сложившейся ситуации некоторые модули могут заменяться. Какие же основные модули нужны при оптимизации газотурбинного двигателя и его узлов?

Прежде всего, конечно, группа модулей математических моделей, классификация которых описана в разд. 0.2. Нужны модели всех четырех уровней сложности, желательно многорежимные, и прочностные модели для основных деталей. Количество их будет со временем увеличиваться. Эта возможность должна быть предусмотрена в банке программ. Для решения задач нелинейной оптимизации необходим модуль оптимизации (см. разд. 2.1). Желательно иметь два-три варианта для оптимизации моделей разной сложности. При оптимизации даже по многорежимным моделям стремятся использовать для экономии машинного времени минимальное число режимов, а на каждом из них рассчитывать минимально необходимое количество параметров. Поэтому необходима группа модулей характеристик. В них организуется расчет всех представляющих интерес параметров, которые затем печатаются в виде таблиц, удобных для анализа. Удобно когда характеристики не только печатаются, но и вычерчиваются на графопостроителе. Иногда в модулях характеристик организуется еще расчет таблиц коэффициентов влияния. Модули многофакторного эксперимента нужны для аппроксимации результатов расчета по сложным моделям простыми зависимостями: линейными или квадратичными.

Надежность выбора оптимальных параметров изделия в основном зависит от точности его математической модели. Обычно точность недостаточна, поэтому применяются различные методы для

ее повышения. Они оформляются как отдельные модули — модули идентификации. Наиболее многочисленны модули конструирования, в которых осуществляется выбор нерассчитываемых размеров, выбор конструктивного оформления элементов и организуется изготовление чертежей на графопостроителе.

Возможности современных ЭЦВМ еще недостаточны для того, чтобы одновременно хранить в банке программ все перечисленные выше модули и составлять из них требуемые программы. Многие модули еще не разработаны или имеются только в отдельных организациях и недоступны для широкого использования. Поэтому в системах проектирования обычно используется только часть необходимых модулей.

1.1. МОДЕЛЬ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ
II УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

Выбор оптимальных параметров газотурбинных двигателей производится в основном по математическим моделям II уровня сложности. При современном уровне требований к точности расчетов в этих моделях необходимо учитывать влияние температуры * на термодинамические свойства газов, влияние режима работы на к. п. д. и степени повышения или понижения давления компрессоров и турбин. Модели должны быть многорежимными. Из-за этих особенностей модели получаются очень сложными и громоздкими. Составленные по ним программы должны быть экономичными и качественными, иначе возникает опасность нехватки объема запоминающего устройства ЭЦВМ. Создание моделей и программ требует больших затрат, поэтому нецелесообразно разрабатывать модели для каждой схемы ГТД. Предпочтительнее универсальные модели, пригодные как для различных схем, так и для расчетов, преследующих различные цели.

Модуль универсальной математической модели ГТД представляет собой совокупность модулей отдельных узлов, как показано, например, на рис. 0.3. Каждый узел описывается на уровне черного ящика, поэтому векторное уравнение для них в общем виде

$$Z = f(U, Y), \quad (1.1)$$

совпадает с аналогичным уравнением для моделей ГТД I уровня сложности.

Структура входной и выходной информации в каждом из модулей для обеспечения универсальности сделана одинаковой и максимально приближена к измеряемой при испытаниях: $z_{1i} = u_{1, i+1} = T^*$ — температура торможения газа; $z_{2i} = u_{2, i+1} = p^*$ — давление торможения; $z_{3i} = u_{3, i+1} = G$ — массовый расход газа через расчетное сечение; $z_{4i} = u_{4, i+1} = n$ — частота вращения (вала компрессора и турбины); $z_{5i} = u_{5, i+1} = N$ — мощность на валу, развиваемая или потребная; $z_{6i} = u_{6, i+1} = q_T$ — относительный расход топлива в камере сгорания.

Остальные параметры имеют вспомогательное назначение. В многовальных ГТД используются частоты вращения n_1, n_2, n_3 и

* Влиянием давления на термодинамические свойства газов в газотурбинных двигателях обычных схем можно пренебречь [12, 19].

мощности N_1, N_2, N_3 на каждом из валов, а в двух- или трехконтурных — массовые расходы G_1, G_2, G_3 , которые задаются для каждого контура.

Для обеспечения универсальности и упрощения расчетов модель составлена для условного закона регулирования, при котором считаются заданными параметры $T_H^*, p_H^*, G_1, G_2, n_1, n_2, n_3, T_T^*$, являющиеся компонентами вектора U . Значения температуры T_H^* и давления p_H^* рассчитываются вне модели двигателя по заданным значениям высоты и скорости полета. При произвольном выборе перечисленных параметров заданный режим не будет реализоваться в двигателе, так как возникнет рассогласование параметров. Суммарные мощности компрессоров и турбин, установленных на одном валу, не будут равны между собой. Будут отличаться друг от друга статические давления в контурах на входе в камеру смешения, а также давления за реактивным соплом, рассчитанное и барометрическое. Эти расхождения называются невязками и число их равно числу произвольно заданных параметров. В реальном двигателе при наличии таких рассогласований изменяется частота вращения валов, расходы воздуха через контуры и установится реальный режим работы. В математической модели для сведения невязок к нулю приходится решать систему трансцендентных уравнений, каждое из которых приравнивает нулю одну из невязок, а неизвестными являются произвольно заданные параметры. При таком подходе удается обеспечить наибольшую универсальность модели.

В математической модели ГТД используются модули восьми различных узлов и вспомогательные процедуры. Некоторые из них имеют несколько вариантов. Модули резко отличаются по сложности, так как для большей универсальности пришлось ввести наряду со сложными и очень простые модули. Каждый из них имеет свою структуру вектора констант Y . Большинство используемых формул общеизвестны и даются без вывода. В необходимых случаях даются ссылки на литературу. При разработке модулей узлов использовались общепринятые допущения. Для удобства каждый модуль имеет условный номер. В большинстве модулей возникает необходимость определения термодинамических свойств воздуха или газа, состоящего из продуктов сгорания и воздуха. Эти свойства рассчитываются при помощи вспомогательной процедуры P0500*.

1.1.1. Термодинамические свойства газов (P0500)

Термодинамические свойства газа зависят в основном от его состава и температуры. Необходимо эти зависимости преобразовать к виду, удобному для использования в математической модели, т. е. надо получить сравнительно простые расчетные формулы, в которых используется небольшой объем вспомогательной информации.

* Здесь и далее используется нумерация процедур, принятая в языке Алгол-60.

Все формулы выводятся для газа, получающегося при сгорании нормального топлива, содержащего углерода $C=0,85$, водорода $H=0,15$ и кислорода $O=0$. Кажущаяся молекулярная масса сухого воздуха μ_n принята равной 28,966, а атмосферного азота — $\mu_a=28,162$. Состав газа зависит в основном от коэффициента избытка воздуха α , но в расчетных формулах удобнее использовать относительный расход топлива: $q_T = G_{\text{топл}}/G_n$. Связаны эти величины между собой однозначно:

$$\alpha = \frac{1}{q_T} \frac{(r_{O_2})_n}{\mu_n \left(\frac{C}{12,01} - \frac{H}{4 \cdot 1,008} - \frac{O}{2 \cdot 16} \right)},$$

где $(r_{O_2})_n = 0,2095$ — объемная доля кислорода в воздухе.

Для нормального топлива

$$\alpha = 0,0669/q_T. \quad (1.2)$$

Число молей продуктов сгорания, приходящихся на 1 кг топлива, равно*

$$K_{CO_2} = \frac{C}{12,01}; \quad K_{H_2O} = \frac{H}{2 \cdot 1,008}; \quad K_{N_{2\text{атм}}} = \frac{(r_{N_2})_n}{\mu_n q_T};$$

$$K_{O_2} = \frac{(r_{O_2})_n}{\mu_n q_T} - \left(\frac{C}{12,01} + \frac{H}{4 \cdot 1,008} - \frac{O}{32} \right).$$

Суммарное число молей продуктов сгорания $K_{п.с} = \frac{1}{\mu_n q_T} + \frac{H}{4 \cdot 1,008} + \frac{O}{32}$, так

как $(r_{N_2})_n + (r_{O_2})_n = 1$.

Для нормального топлива

$$K_{п.с} = \frac{0,9280 + q_T}{26,88 q_T}. \quad (1.3)$$

Объемный состав продуктов сгорания вычисляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} r_{CO_2} &= \frac{C}{12,01 K_{п.с}} = \frac{1,9 q_T}{0,9280 + q_T}; \\ r_{H_2O} &= \frac{H}{2 \cdot 1,008 K_{п.с}} = \frac{2 q_T}{0,9280 + q_T}; \\ r_{O_2} &= \frac{1}{K_{п.с}} \left(\frac{(r_{O_2})_n}{\mu_n q_T} - \frac{C}{12,01} - \frac{H}{4 \cdot 1,008} + \frac{O}{32} \right) = \frac{0,1944 - 2,902 q_T}{0,9280 + q_T}; \\ r_{N_{2\text{атм}}} &= \frac{(r_{N_2})_n}{\mu_n q_T K_{п.с}} = \frac{0,7336}{0,9280 + q_T}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Кажущаяся молекулярная масса продуктов сгорания

$$\mu_{п.с} = \mu_{CO_2} r_{CO_2} + \mu_{H_2O} r_{H_2O} + \mu_{O_2} r_{O_2} + \mu_{N_{2\text{атм}}} r_{N_2} = \frac{26,88(1 + q_T)}{0,9280 + q_T}. \quad (1.5)$$

Истинная теплоемкость продуктов сгорания

$$c_{pн} = \frac{1}{\mu_{п.с}} [r_{CO_2} (\mu c_p)_{CO_2} + r_{H_2O} (\mu c_p)_{H_2O} + r_{O_2} (\mu c_p)_{O_2} + r_{N_2} (\mu c_p)_{N_{2\text{атм}}}]$$

* Идея вывода формул (1.2) ... (1.11) заимствована из работы [12].

или, подставляя выражения (1.4) и (1.5),

$$c_{pH} = \frac{1}{1+q_T} \{ b'_{O_2} (\mu c_p)_{O_2} + b_{N_2} (\mu c_p)_{N_{2атм}} + [b_{CO_2} (\mu c_p)_{CO_2} + b_{H_2O} (\mu c_p)_{H_2O} + b_{O_2}^* (\mu c_p)_{O_2}] q_T \}, \quad (1.6)$$

где $b_{CO_2} = 7,0684524 \cdot 10^{-2}$; $b_{H_2O} = 7,4404762 \cdot 10^{-2}$; $b'_{O_2} = 7,2321420 \cdot 10^{-3}$;
 $b_{O_2}^* = -0,796131 \cdot 10^{-1}$; $b_{N_2} = 2,7291666 \cdot 10^{-2}$.

Для определения теплоемкостей газов использовались полиномы следующего вида:

$$\mu c_p = \sum_{i=-1}^7 a_i t^i, \quad (1.7)$$

полученные С. Л. Ривкиным [19], где $t = T/1000$ — температура (в К) с масштабным множителем (1/1000); коэффициенты полиномов a_i для используемых газов приведены в табл. 1.1. После подстановки выражения (1.7) в равенство (1.6) получим

$$c_{pH} = \frac{1}{1+q_T} \left[b'_{O_2} \sum a_{iO_2} t^i + b_{N_2} \sum a_{iN_2} t^i + (b_{CO_2} \sum a_{iCO_2} t^i + b_{H_2O} \sum a_{iH_2O} t^i + b_{O_2}^* \sum a_{iO_2} t^i) q_T \right],$$

или, изменяя порядок суммирования,

$$c_{pH} = \frac{1}{1+q_T} \left[\sum t^i (a_{iO_2} b'_{O_2} + a_{iN_2} b_{N_2}) + q_T \sum t^i (a_{iCO_2} b_{CO_2} + a_{iH_2O} b_{H_2O} + a_{iO_2} b_{O_2}^*) \right] = \frac{1}{1+q_T} \sum_{i=-1}^7 t^i [a_{iO_2} b'_{O_2} + a_{iN_2} b_{N_2} + q_T (a_{iCO_2} b_{CO_2} + a_{iH_2O} b_{H_2O} + a_{iO_2} b_{O_2}^*)],$$

или, полагая $a_{iв} = a_{iO_2} b'_{O_2} + a_{iN_2} b_{N_2}$; $a_{i2} = a_{iCO_2} b_{CO_2} + a_{iH_2O} b_{H_2O} + a_{iO_2} b_{O_2}^*$,

$$c_{pH} = \frac{1}{1+q_T} \sum_{i=-1}^7 t^i (a_{iв} + a_{i2} q_T). \quad (1.8)$$

Значения коэффициентов $a_{iв}$, a_{i2} приведены в табл. 1.1. Размерность истинной теплоемкости c_{pH} в этом выражении в кДж/(кг·К).

Энтальпия (в кДж/кг) и энтропия (в кДж/(кг·К)) определяются в результате интегрирования выражения (1.8) по следующим формулам:

$$i = \int_{T_H}^T c_{pH} dT = \frac{1000}{1+q_T} \int_{t_H}^t \sum_{i=-1}^7 t^i (a_{iв} + a_{i2} q_T) dt = \\ = A_i + \frac{1000}{1+q_T} \sum_{i=-1}^7 (a_{iв} + a_{i2} q_T) \frac{t^{i+1}}{i+1} \left(\text{где условно обозначено } \ln t = \frac{t^0}{0} \right); \quad (1.9)$$

Таблица 1.1

a_i	$a_{iв}$	a_{i2}	$N_{2атм}$	O_2	H_2O	CO_2
a_{-1}	0	0	0	0	0	0
a_0	+1,0161638	+2,8151964 · 10	+2,8151964 · 10	+3,3051759 · 10	+7,31476000 · 10 ⁻¹	+1,7640049 · 10
a_1	-5,5603000 · 10 ⁻²	+1,3197123 · 10	+1,3197123 · 10	-4,1834166 · 10	+2,7885805 · 10	+9,3726944 · 10
a_2	-4,1393600 · 10 ⁻¹	-7,4482113 · 10	-7,4482113 · 10	+1,4802410 · 10 ²	+1,1985297 · 10	-1,3037466 · 10 ²
a_3	+2,3785800	+1,8998363 · 10 ²	+1,8998363 · 10 ²	-2,0502229 · 10 ²	-1,6092233 · 10	+1,5397055 · 10 ²
a_4	-3,3910900	-2,2661680 · 10 ²	-2,2661680 · 10 ²	+1,4536800 · 10 ²	+1,3636273 · 10	-1,3999603 · 10 ²
a_5	+2,2396791	+1,4204175 · 10 ²	+1,4204175 · 10 ²	-5,2290720 · 10	-6,4729000	+8,3151862 · 10
a_6	-7,2175972 · 10 ⁻¹	-4,5640429 · 10	-4,5640429 · 10	+7,5770768	+1,1891256	-2,7578508 · 10
a_7	+9,2012734 · 10 ⁻²	+5,9487537	+5,9487537	0	0	+3,8298136
	$A_S = +7,9453384$			$A_I = -1,8725837$		

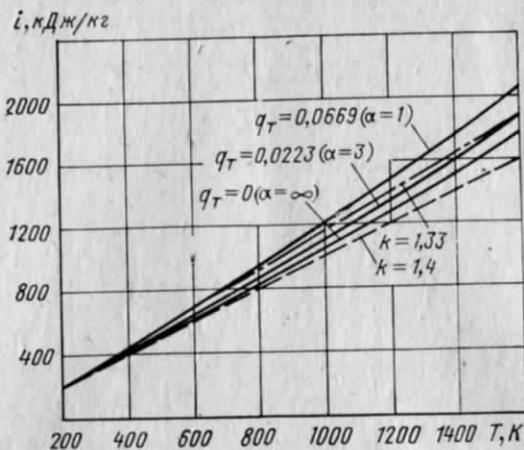


Рис. 1.1. Зависимость энтальпии газа от температуры

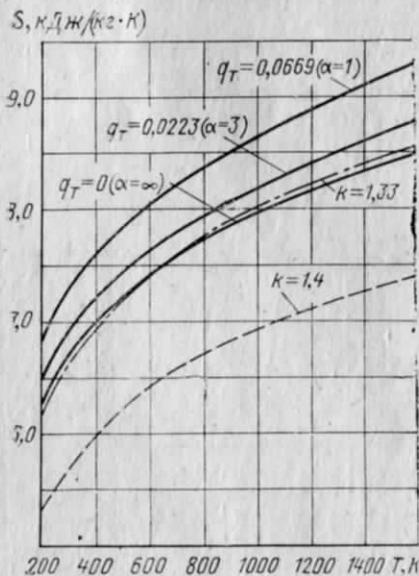


Рис. 1.2. Зависимость энтропии газа от температуры

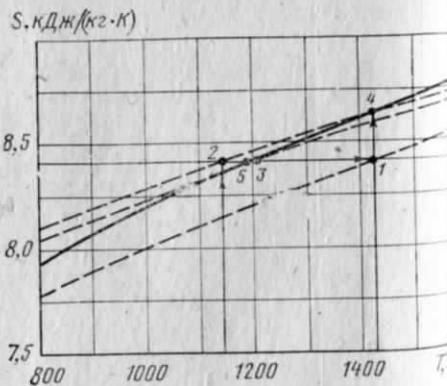


Рис. 1.3. Процесс последовательных приближений при вычислении температуры заданному значению энтропии

$$S = \int_{T_H}^T \frac{c_{pH}}{T} dt = \frac{1}{1+q_T} \int_{T_H}^T \sum_{i=-1}^7 t^{i-1} (a_{iH} + a_{i2} q_T) dt =$$

$$= A_S + \frac{1}{1+q_T} \sum_{i=-1}^7 (a_{iH} + a_{i2} q_T) \frac{t^i}{i}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты A_i и A_S приведены в табл. 1.1, а рассчитанные по уравнениям (1.9) и (1.10) графики со значениями энтальпии и энтропии — на рис. 1.1 и 1.2. Там же приведены приближенные значения энтропии и энтропии, полученные при допущении $c_p = \text{const}$ по формулам

$$i = \frac{k}{k-1} \frac{RT}{1000}, \quad S = \frac{k}{k-1} \frac{R \ln T}{1000}.$$

В процедуре предусмотрена возможность расчета свойств сгоревшего топлива $i_{\text{топл}}$, $S_{\text{топл}}$. При этом полагается $a_{iH} = 0$ и $q_T = 1$.

Универсальная газовая постоянная принята равной $\mu R = 8314,2$ Дж/(кмоль · К).

Отсюда

$$R_{\text{п.с}} = \frac{\mu R}{\mu_{\text{п.с}}} = \frac{0,3090(0,9280 + q_T)}{1 + q_T} \text{ кДж/(кг · К)}. \quad (1.11)$$

Два последних столбца в табл. 1.1 хранятся в банке данных. Их достаточно для вычисления основных термодинамических свойств продуктов сгорания и воздуха (при $q_T = 0$) по сравнительно несложным формулам (1.9), (1.10), (1.11). Эти формулы обеспечивают прямой расчет свойств, а в модели нужен еще и обратный, т. е. зависимости $T = f(i)$, $T = f(S)$.

Они вычисляются методом последовательных приближений. Для ускорения сходимости полиномы были аппроксимированы парабололами вида

$$t = A_i + B_i i + C_i i^2, \quad (1.12)$$

$$t = A_S + B_S S + C_S S^2, \quad (1.13)$$

коэффициенты которых включены в программу. Процесс последовательных приближений при вычислении температуры по энтропии изображен на рис. 1.3. В нем используются формулы

$$t_1 = A_S + B_S S_{\text{зад}} + C_S S_{\text{зад}}^2;$$

$$S_n = f(t_n) \text{ по формуле (1.10);}$$

$$t_{n+1} = t_n + (S_{\text{зад}} - S_n) [B_S + C_S (S_{\text{зад}} + S_n)]; \quad (1.14)$$

$$S_{n+1} = f(t_{n+1}) \text{ и т. д.,}$$

где n — номер приближения.

Формула (1.14) обеспечивает смещение параболы, рассчитанной по формуле (1.13), вдоль оси абсцисс за счет изменения свободного члена $A_S = x$. Смещенная парабола должна проходить через две точки (t_n, S_n) и $(t_{n+1}, S_{\text{зад}})$, т. е.

$$t_n = x + B_S S_n + C_S S_n^2; \quad t_{n+1} = x + B_S S_{\text{зад}} + C_S S_{\text{зад}}^2.$$

После исключения x получается формула (1.14). Температура по энтальпии рассчитывается аналогично. При заданной точности расчета $10^{-4}\%$ число последовательных приближений обычно равняется 3...6.

В модулях математической модели используются также значения критической температуры $T_{кр}$, которая должна вычисляться в зависимости от температуры

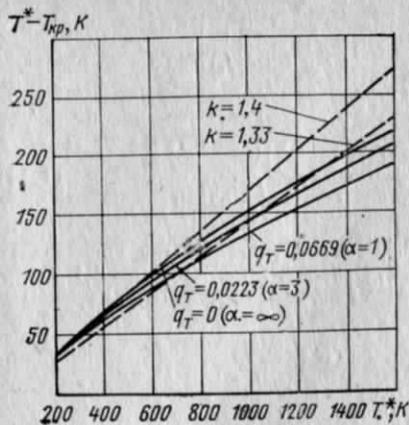


Рис. 1.4. Зависимость критической температуры от температуры торможения

сти критической температуры от температуры торможения для разных составов газа приведены на рис. 1.4.

Все формулы расчета термодинамических свойств продуктов сгорания объединены в одну процедуру P0500, которая позволяет рассчитывать следующие параметры: $i = f(T, q_{\tau})$, $S = f(T, q_{\tau})$, $R_{x.c} = f(q_{\tau})$, $T = f(i, q_{\tau})$, $T = f(S, q_{\tau})$, $T_{кр} = f(i^*, q_{\tau})$. Для экономии машинного времени вычисляются не все параметры, а только требуемые. Рассчитанные параметры могут использоваться в качестве аргументов при вычислении других параметров без повторного обращения к процедуре. Все определяется системой признаков, задаваемых при обращении к процедуре. Если потребуется рассчитать двигатели на других топливах, то можно аналогичным способом рассчитать коэффициенты полинома (1.8) и включить их в банк данных.

1.1.2. Входной диффузор (P0511)

Во входном диффузоре при сверхзвуковой скорости полета происходит торможение потока воздуха в системе скачков уплотнения. Возникающие при этом потери существенно зависят от скорости

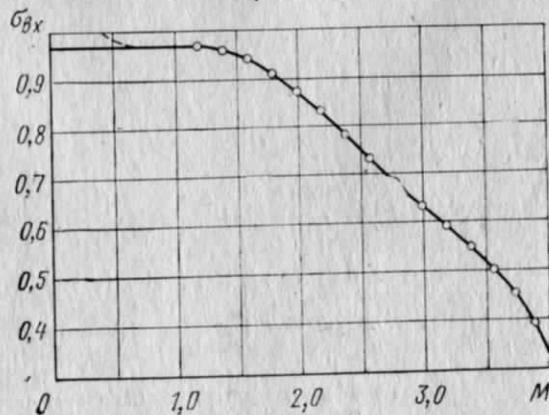


Рис. 1.5. Зависимость коэффициента восстановления давления во входном диффузоре от числа M

или энтальпии торможения. Значение критической температуры в нулевом приближении определяется по приближенной параболе: $t_{кр} \approx A_{кр} + B_{кр} i_{зад}^* + C_{кр} i_{зад}^{*2}$. Соответствующие ей значения теплоемкости и энтальпии рассчитываются по формулам (1.8), (1.9). По ним определяется энтальпия торможения:

$$i^* = i + \frac{c_{pH}}{c_{pH} - R} R t_{кр} \cdot 1000. \quad (1.15)$$

Если она не совпала с заданной, то критическая температура уточняется по формуле аналогичной (1.14):

$$t_{кр2} = t_{кр1} + (i_{зад}^* - i^*) [B_{кр} + C_{кр} (i_{зад}^* + i^*)].$$

Следующее приближение начинается с формулы (1.15). Если задана температура торможения, то предварительно по формуле (1.9) рассчитывается энтальпия. Зависимость

критической температуры от температуры торможения для разных составов газа приведены на рис. 1.4.

Все формулы расчета термодинамических свойств продуктов сгорания объединены в одну процедуру P0500, которая позволяет рассчитывать следующие параметры: $i = f(T, q_{\tau})$, $S = f(T, q_{\tau})$, $R_{x.c} = f(q_{\tau})$, $T = f(i, q_{\tau})$, $T = f(S, q_{\tau})$, $T_{кр} = f(i^*, q_{\tau})$. Для экономии машинного времени вычисляются не все параметры, а только требуемые. Рассчитанные параметры могут использоваться в качестве аргументов при вычислении других параметров без повторного обращения к процедуре. Все определяется системой признаков, задаваемых при обращении к процедуре. Если потребуется рассчитать двигатели на других топливах, то можно аналогичным способом рассчитать коэффициенты полинома (1.8) и включить их в банк данных.

полета. Они оцениваются обычно коэффициентом восстановления давления $\sigma_{вх}$. При дозвуковых скоростях полета величину его можно принимать постоянной. В любом случае изменяется только давление торможения $p_{вх}^* = p_H^* \sigma_{вх}$. Коэффициент восстановления давления либо задается непосредственно в векторе констант Y , либо берется с кривых, хранящихся в банке данных. Одна из них [34] показана на рис. 1.5.

Она аппроксимирована полиномом

$$\sigma_{вх} = 0,97 - 0,02241(M-1)^2 - 0,14561(M-1)^3 + 0,086282(M-1)^4 - 0,014342(M-1)^5. \quad (1.16)$$

1.1.3. Компрессор (P0512)

По модулю компрессора можно рассчитать вентилятор, компрессор низкого давления и компрессор высокого давления. Только используются разные типовые характеристики. Они табулированы после замены переменных [27] для уменьшения объема таблиц без снижения точности. Табулирование выполняется по специальной программе на ЭЦВМ. При расчете двигателей с известными характеристиками они используются вместо типовых и вводятся с исходной информацией после табулирования или аппроксимации.

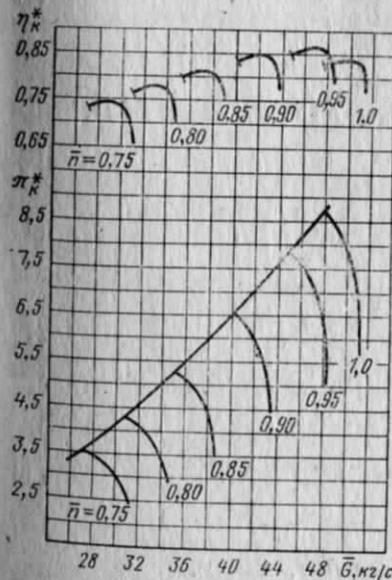


Рис. 1.6. Исходные характеристики компрессора

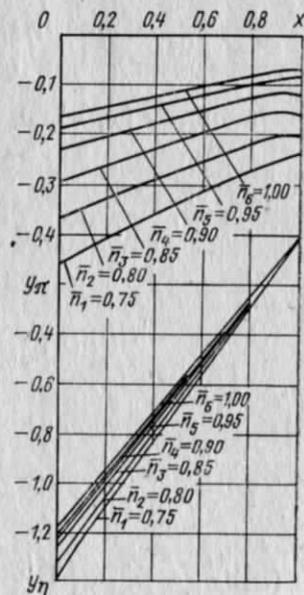


Рис. 1.7. Характеристики компрессора после замены переменных

Если они были получены при постоянной теплоемкости воздуха, то их надо предварительно пересчитать на переменную теплоемкость [12]. Все характеристики предварительно перестраиваются в относительные координаты, т. е. на характеристике выбирается точка номинального режима (например точка, в которой к. п. д. максимален), ее параметры входят в исходную информацию и на них делаются параметры во всех остальных точках. На рис. 1.6 приведен пример характеристики компрессора в относительных координатах. Она же после замены переменных приведена на рис. 1.7. По характеру кривых видно, что выборка из таблицы с линейной интерполяцией не внесет существенных погрешностей.

Расчет начинается с вычисления приведенного расхода и приведенной частоты вращения:

$$\bar{G} = G \frac{0,101325}{p^*} \sqrt{\frac{T^*}{288,16}},$$

$$\bar{n} = n \sqrt{\frac{288,16}{T^*}}.$$

Если используются табулированные характеристики компрессора то по ним определяются с линейной интерполяцией значения $\bar{G}_{\min} = f(\bar{n})$, $\bar{G}_{\max} - \bar{G}_{\min} = f(\bar{n})$, необходимые для вычисления переменной x , в функции от которой построены таблицы:

$$x = \frac{\bar{G} - \bar{G}_{\min}}{\bar{G}_{\max} - \bar{G}_{\min}}.$$

По этим же таблицам с линейной интерполяцией определяются

$$y_{\pi} = f(x, \bar{n}), a_{\pi} = f(\bar{n}), y_{\eta} = f(x, \bar{n}), a_{\eta} = f(\bar{n}),$$

а по ним: значения степени повышения давления

$$\pi_k^* = \pi_{k,ном}^* \left(1 + \frac{x + a_{\pi}}{y_{\pi}} \right)$$

к. п. д.

$$\eta_k^* = \eta_{k,ном}^* \left(1 + \frac{x + a_{\eta}}{y_{\eta}} \right)$$

и коэффициент устойчивости компрессора

$$K_y = \frac{(\pi_k^*)_{\sigma_{\min}}}{\pi_k^*} \frac{\bar{G}}{\bar{G}_{\min}},$$

где $(\pi_k^*)_{\sigma_{\min}} = \pi_{k,ном}^* \left(1 + \frac{a_{\pi}}{y_{\pi}} \right)$, $y_{\pi} = f(\bar{n}, x=0)$.

Энтальпия и энтропия торможения на входе в компрессор определяются при $q_T = 0$; $i_B^* = f(T_B^*, q_T)$, $S_B^* = f(T_B^*, q_T)$, $R_B = f(q_T)$.

Энтропия на выходе из компрессора при адиабатном сжатии

$$S_{к.ад}^* = S_B^* + R_B \ln \pi_k^*, \quad (1.23)$$

и находятся

$$T_{к.ад}^* = f(S_{к.ад}^*), \quad i_{к.ад}^* = f(T_{к.ад}^*).$$

Действительная энтальпия на выходе из компрессора

$$i_k^* = i_B^* + \frac{i_B^* - i_{к.ад}^*}{\eta_k^*}.$$

Отсюда $T_k^* = f(i_k^*)$, $p_k^* = p_B^* \pi_k^*$, $N_k = -(i_k^* - i_B^*) G_B$, $G_k = G_B (1 - \delta_{отб})$. Знак минус в формуле для определения мощности показывает, что в компрессоре она потребляется. С учетом знаков удобнее умножить мощности нескольких компрессоров и турбин, расположенных на одном валу.

1.1.4. Разделение потоков (P0513)

Этот модуль обычно работает после вентилятора и осуществляет разделение потоков на два или три контура. Иногда бывает задана не одна характеристика вентилятора, а две разные, т. е. своя характеристика для каждого контура. В этом случае модуль «разделение потоков» включается перед вентилятором. В исходной информации (вектор X) задаются степени двухконтурности m и трехконтурности m_T , поправочные коэффициенты, учитывающие различие в температуре K_{T1} , K_{T2} , K_{T3} и в давлении K_{p1} , K_{p2} , K_{p3} воздуха, поступающего в разные контура. В двухконтурных двигателях $m_T = 0$. Массовый расход воздуха, поступающего в контура, вычисляется по формулам

$$G_1 = G_H / (1 + m + m_T), \quad G_2 = G_1 m, \quad G_3 = G_1 m_T. \quad (1.24)$$

Температура и давление уточняются по формулам

$$\left. \begin{aligned} T_{1,i+1}^* &= T_i^* K_{T1}, & p_{1,i+1}^* &= p_i^* K_{p1}, \\ T_{2,i+1}^* &= T_i^* K_{T2}, & p_{2,i+1}^* &= p_i^* K_{p2}, \\ T_{3,i+1}^* &= T_i^* K_{T3}, & p_{3,i+1}^* &= p_i^* K_{p3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Эти параметры хранятся в массиве промежуточных результатов и переписываются в рабочий массив при переходе с одного контура на другой.

1.1.5. Камера сгорания (P0514)

В этом модуле используется значение температуры торможения на выходе из камеры сгорания T_T^* , входящее в вектор режима двигателя U . Его использовать удобнее, чем значение количества

подведенного топлива. В векторе констант Y задаются: $H_u = 10250$ ккал/кг = 42940 кДж/кг — низшая теплотворная способность стандартного топлива, $\eta_{\Gamma} \approx 0,97 \dots 0,98$ — коэффициент полноты сгорания; $\sigma_{\text{КС}}$ — коэффициент восстановления давления. Относительный расход топлива определяется по приближенной формуле, приведенной в работе [12]:

$$q_{\Gamma} = \frac{i_{\text{в.Г}}^* - i_{\text{в.К}}^*}{H_u \eta_{\Gamma} - i_{\text{топл}}^* + i_0}, \quad (1.26)$$

где $i_0 = 55,41$ ккал/кг = 232,0 кДж/кг.

Отсюда расход топлива (в кг/с) $G_{\text{топл}} = G_{\text{в}} q_{\Gamma}$, расход газа $G_{\Gamma} = G_{\text{в}}(1 + q_{\Gamma})$ и его давление $p_{\Gamma}^* = p_{\text{к}}^* \sigma_{\text{КС}}$.

1.1.6. Турбина (P0515)

Для удобства построения математической модели двигателя в целом турбина рассчитывается при заданной степени расширения газа, а не заданной мощности. Предусмотрено три способа представления характеристик турбины. Они могут быть табулированы, аппроксимированы полиномами или просто могут быть заданы постоянными значениями степени понижения давления π_{Γ}^* и к. п. д. турбины η_{Γ}^* . Все характеристики используются в относительных координатах, отнесенных к номинальному режиму. В банке данных хранятся типовые характеристики, но они могут быть заданы и с исходной информацией. Пример характеристик турбин приведен на рис. 1.8. Для расчета турбины должны быть заданы температура T_{Γ}^* и давление p_{Γ}^* торможения перед турбиной, частота вращения n и степень понижения давления π_{Γ}^* .

Поскольку параметры газа между ступенями турбины не рассматриваются, то условно считается, что весь охлаждающий

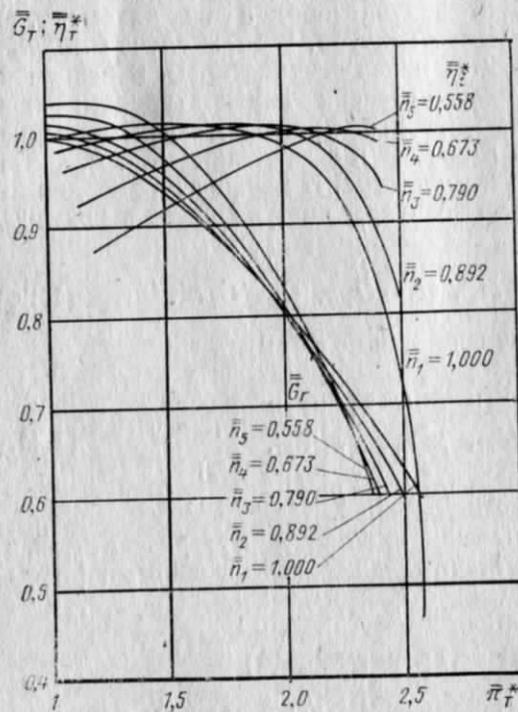


Рис. 1.8. Характеристики турбины в относительных координатах

воздух подводится перед турбиной и учитывается влияние этого воздуха на ее характеристики.

Относительная приведенная частота вращения определяется по следующей формуле:

$$\bar{n} = \frac{n}{\bar{n}_{\text{ном}} \sqrt{T_{\Gamma}^*}}. \quad (1.27)$$

По характеристикам турбины определяются $\bar{G}_{\Gamma} = f(\pi_{\Gamma}^*, \bar{n}, \delta_{\text{охл}})$; $\bar{\eta}_{\Gamma}^* = f(\pi_{\Gamma}^*, n, \delta_{\text{охл}})$;

$$G_{\Gamma} = G_{\Gamma, \text{ном}} \bar{G}_{\Gamma} \frac{p_{\Gamma}^*}{\sqrt{T_{\Gamma}^*}}. \quad (1.28)$$

При таком подходе к расчету возникает невязка по расходу

$$\Delta \bar{G} = \frac{G_{\Gamma} - G_{\Gamma}}{G_{\Gamma}} \neq 0.$$

Энтальпия и энтропия на входе $i_{\Gamma}^* = f(T_{\Gamma}^*, q_{\Gamma})$; $S_{\Gamma}^* = f(T_{\Gamma}^*, q_{\Gamma})$.

Энтропия газа на выходе из турбины при адиабатном расширении

$$S_{\Gamma, \text{ад}}^* = S_{\Gamma}^* + R_2 \ln \pi_{\Gamma}^*, \quad (1.29)$$

по ней находят $T_{\Gamma, \text{ад}}^* = f(S_{\Gamma, \text{ад}}^*, q_{\Gamma})$; $i_{\Gamma, \text{ад}}^* = f(T_{\Gamma, \text{ад}}^*, q_{\Gamma})$.

Действительная энтальпия на выходе из турбины

$$i_{\Gamma}^* = i_{\Gamma}^* - \eta_{\Gamma}^* (i_{\Gamma}^* - i_{\Gamma, \text{ад}}^*). \quad (1.30)$$

Отсюда $T_{\Gamma}^* = f(i_{\Gamma}^*, q_{\Gamma})$; $p_{\Gamma}^* = p_{\Gamma}^* \pi_{\Gamma}^*$; $N_{\Gamma} = (i_{\Gamma}^* - i_{\Gamma}^*) G_{\Gamma} \eta_{\Gamma}^*$.

Мощность турбины в общем случае не будет совпадать с мощностью компрессора и возникает невязка

$$\Delta \bar{N} = \frac{N_{\text{к}} - N_{\Gamma}}{N_{\text{к, ном}}} \neq 0.$$

1.1.7. Переходный канал (P0521)

Это канал внешнего контура, по которому воздух от вентилятора поступает в камеру смешения или в реактивное сопло внешнего контура. Температура торможения в переходном канале принимается постоянной, а давление торможения уменьшается:

$$p_{\text{II}}^* = p_{\text{вн}}^* \sigma_{\text{II}}. \quad (1.31)$$

Чаще вместо этого модуля коэффициент σ_{II} просто учитывается в модуле вентилятора, но его наличие обязательно, если предусмотрены перепуск воздуха из внутреннего контура в переходный канал или размещение в нем радиатора для охлаждения воздуха, отбираемого в компрессоре.

1.1.8. Камера смешения (P0516)

Камера смешения двухконтурного двигателя рассматривается при условии равенства статического давления в потоках контуров перед смешением. Это давление p_{cp} должно быть задано в нулевом приближении, а затем оно уточняется в процессе расчета. Кроме того, должны быть заданы расходы, температуры и давления торможения газа, площади проходных сечений в обоих контурах и коэффициент восстановления давления камеры смешения $\sigma_{см}$.

Проверяется приемлемость выбранного давления p_{cp} :

$$p_{cp} < p_T^*; p_{cp} < p_{II}^*; p_{cp} > p_H^*.$$

Затем рассчитываются $i_T^* = f(T_T^*, q_T)$, $i_{II}^* = f(T_{II}^*, q_T = 0)$, $S_T^* = f(T_T^*, q_T)$, $S_{II}^* = f(T_{II}^*, q_T = 0)$, $R_2 = f(q_T)$, $R_B = f(q_T = 0)$. Значения энтропий перед смешением равны $S_T = S_T^* - R_2 \times \ln(p_T^*/p_{cp})$, $S_{II} = S_{II}^* - R_B \ln(p_{II}^*/p_{cp})$, по ним рассчитываются $T_T = f(S_T)$, $T_{II} = f(S_{II})$, $i_T = f(T_T)$, $i_{II} = f(T_{II})$.

Скорости течения газа на входе в камеру смешения $c_T = \sqrt{2(i_T^* - i_T)}$, $c_{II} = \sqrt{2(i_{II}^* - i_{II})}$.

Соответствующие им расходы газа $G_T' = \frac{p_T c_T F_T}{R_2 T_T}$, $G_{II}' = \frac{p_{II} c_{II} F_{II}}{R_B T_{II}}$.

Они не равны действительным расходам газа, поэтому вычисляются невязки $\Delta \bar{G}_T = \frac{G_T - G_T'}{G_T}$; $\Delta \bar{G}_{II} = \frac{G_{II} - G_{II}'}{G_{II}}$,

которые впоследствии сводятся к нулю. Суммируются значения расходов воздуха и газа $G_B = G_{B,T} + G_{II}$, $G_{см} = G_B + G_{топл}$, площадей $F_{см} = F_T + F_{II}$, полной энергии

$$G_{см} i_{см}^* = G_T i_T^* + G_{II} i_{II}^*, \quad (1.32)$$

импульсов потоков

$$G_{см} c_{см} + p_{см} F_{см} = G_T c_T + p_T F_T + G_{II} c_{II} + p_{II} F_{II}. \quad (1.33)$$

Отсюда находятся основные параметры газа после смешения:

$$i_{см}^* = \frac{G_{см} i_{см}^*}{G_{см}}; p_{см} = \frac{R_2 T_{см} G_{см}}{c_{см} F_{см}};$$

$$c_{см} = \frac{(G_{см} c_{см} + p_{см} F_{см}) - p_{см} F_{см}}{G_{см}};$$

$$i_{см} = i_{см}^* - c_{см}^2 / 2.$$

Относительный расход топлива пересчитывается по формуле

$$q_T' = G_{топл} / G_B. \quad (1.34)$$

По нему определяются $R_2 = f(q_T')$; $T_{см}^* = f(i_{см}^*, q_T')$; $S_{см}^* = f(T_{см}^*, q_T')$; $T_{см} = f(i_{см}, q_T')$; $S_{см} = f(T_{см}, q_T')$.

Давление торможения на выходе из камеры смешения

$$p_{св}^* = \sigma_{см} p_{см} e^{\frac{S_{см}^* - S_{см}}{R_2}}. \quad (1.35)$$

1.1.9. Форсажная камера (P0520)

В этом модуле используется значение температуры форсажа $T_{ф}^*$ из вектора режимных параметров двигателя U , по которой определяется относительное количество подведенного топлива $q_{ф} = G_{ф} / G_B$. Как и в основной камере сгорания задаются значения нижней теплотворной способности топлива, коэффициента полноты сгорания $\eta_{ф}$ и коэффициенты восстановления давления в диффузоре σ_1 , тепловых σ_2 и гидравлических потерь σ_3 . Параметры газового потока получаются в результате расчета предыдущего элемента.

Относительный расход топлива определяется по приближенной формуле Я. Т. Ильичева [12]:

$$q_{топл.ф} = \frac{q_T (i_{2ф}^* - i_{2T}^*) + i_{н.ф}^* - i_{н.т}^*}{\eta_{ф} H_u - i_{топл.ф}^* + i_0}, \quad (1.36)$$

где $q_T = G_{топл} / G_B$; $G_{топл.ф} = G_B q_{топл.ф}$ и расход газа $G_{ф} = G_B + G_{топл} + G_{топл.ф}$. Определяется давление газа

$$p_{ф}^* = p_{см}^* \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad (1.37)$$

где $p_{см}^*$ — давление торможения на выходе из предыдущего элемента, т. е. за камерой смешения или за турбиной низкого давления.

1.1.10. Реактивное сопло (P0517)

Выходные устройства газотурбинных двигателей разнообразны по конструкции. Они могут быть регулируемы и нерегулируемы, сужающимися и соплами Лавала. Перепад в них может быть докритическим и сверхкритическим. Модуль реактивного сопла должен обеспечивать расчет во всех этих вариантах с минимальным повторением формул. При расчете реактивного сопла должны быть заданы массовый расход газа через сопло G_T , температура T_T^* и давление p_T^* торможения на входе в сопло*, скоростные коэффициенты сопла полный ϕ_c и только для сужающейся части ϕ_c' , а также статическое давление в атмосфере p_H .

Сначала проверяется возможность истечения газа из сопла $p_T^* > p_H$, а затем рассчитывается полное расширение в сопле. Для этого определяются

$$i_T^* = f(T_T^*, q_T); S_T^* = f(T_T^*, q_T); \\ S_c = S_T^* - R_2 \ln(p_T^*/p_H). \quad (1.38)$$

* Индекс «т» используется для простейшего случая, когда сопло установлено непосредственно за турбиной, но это могут быть параметры на выходе из форсажной камеры или камеры смешения.

Отсюда $T_c = f(S_c, q_T)$; $i_c = f(T_c, q_T)$. Скорость выхода газа из сопла при полном расширении

$$c_c = \varphi_c \sqrt{2(i_T^* - i_c)}. \quad (1.39)$$

Она запоминается для использования в заключительном модуле

$$c_{c,п} = c_c. \quad (1.40)$$

Определяются параметры критического расширения в сопле. При отсутствии потерь $T_{кр.ад} = f(T_T^*, q_T)$; $i_{кр.ад} = f(T_{кр.ад}, q_T)$. Критическая скорость

$$c_{кр} = \sqrt{2(i_T^* - i_{кр.ад})}. \quad (1.41)$$

Действительная энтальпия в критическом сечении

$$i_{кр} = i_T^* - \frac{1}{\varphi_c^2} (i_T^* - i_{кр.ад}). \quad (1.42)$$

Ей соответствуют: критическая температура $T_{кр} = f(i_{кр}, q_T)$, энтропия $S_{кр} = f(T_{кр}, q_T)$ и критическое давление

$$p_{кр} = \frac{p_T^*}{e^{\frac{S_T^* - S_{кр}}{R_z}}}. \quad (1.43)$$

При сверхкритическом истечении, определяемом по условию $c_c \geq c_{кр}$, рассчитываются по отдельности два варианта.

Первый вариант. Регулируемая площадь критического сечения. Определяется потребная величина этой площади:

$$F_{кр} = \frac{G_T R_z T_{кр}}{p_{кр} c_{кр}}. \quad (1.44)$$

и проверяется, что она не вышла из заданных пределов регулирования:

$$F_{кр \min} \leq F_{кр} \leq F_{кр \max}.$$

Иначе принимается граничное значение площади и сопло рассчитывается как нерегулируемое.

Второй вариант. Нерегулируемая площадь критического сечения. Определяется расход газа G_c , который может пройти через эту площадь при заданном перепаде давлений:

$$G_c = \frac{p_{кр} c_{кр} F_{кр}}{R_z T_{кр}}. \quad (1.45)$$

Этот расход не совпадает с заданным расходом газа через двигатель, поэтому вычисляется невязка

$$\Delta \bar{G} = \frac{G_c - G_T}{G_T},$$

которая впоследствии сводится к нулю.

При докритическом истечении, определяемом по условию $c_c < c_{кр}$, расчет выполняется аналогично по обоим вариантам, только вместо критических параметров используются параметры в выходном сечении, полученные выше при расчете полного расширения.

Если критическое сечение является выходным сечением сужающегося сопла, то полученные критические параметры совпадают с выходными и остается только в заключительном модуле рассчитать тягу двигателя и связанные с ней параметры по формуле (1.49). Если же критическое сечение является частью сопла Лавала, то выполняется расчет по следующим двум вариантам (третьему и четвертому).

Третий вариант. Выходная часть сопла Лавала регулируемая. Тогда определяется площадь выхода по формуле, аналогичной (1.44):

$$F_c = \frac{G_T R_z T_c}{p_H c_c}. \quad (1.46)$$

т. е. предполагается, что регулирование ведется так, чтобы всегда обеспечивалось полное расширение в сопле. Проверяется достаточность заданных пределов регулирования площади: $F_{c \min} \leq F_c \leq F_{c \max}$, если они недостаточны, то принимается граничное значение площади и она считается нерегулируемой.

Четвертый вариант. Выходная часть сопла Лавала нерегулируемая. В этом случае методом итерации определяется давление на срезе сопла. Первое приближение соответствует полному расширению, параметры которого рассчитаны выше по формуле (1.39). По ним определяется давление

$$p_c = \frac{G_{кр} R_z T_c}{F_c c_c}. \quad (1.47)$$

и энтропия

$$S_c = S_{кр}^* - R_z \ln(p_{кр}^*/p_c), \quad (1.48)$$

уточняются $T_c = f(S_c, q_T)$, $i_c = f(T_c, q_T)$. Определяется скорость выхода газа во втором приближении $c_c = \varphi_c \sqrt{2(i_T^* - i_c)}$ и соответствующая ей площадь

$$F_c' = \frac{G_{кр} R_z T_c}{p_c c_c}.$$

Проверяется совпадение этой площади с заданной

$$\left| \frac{F_c' - F_c}{F_c} \right| \leq \varepsilon.$$

Если точность еще недостаточна, то продолжается следующее приближение с формулы (1.47).

На режимах перерасширения при $p_c < p_H$ необходимо учитывать дополнительные потери, возникающие в скачках уплотнения, когда

прямой скачок входит внутрь сопла и скорость в выходном сечении становится дозвуковой. Такие режимы работы сопла для авиационных двигателей нехарактерны [25]. Дополнительные потери можно учитывать разными способами. Проще всего использовать эмпирические зависимости скоростного коэффициента сопла φ_c от степени перерасширения. В них часто используются коэффициент тяги или относительный импульс вместо скоростного коэффициента. В этом случае немного изменяется вид формулы для расчета тяги двигателя.

В двигателях с отдельными контурами (без смещения потоков) сопло внешнего контура рассчитывается аналогично, только при вычислении термодинамических свойств газа принимается $q_T=0$.

1.1.11. Заключительный модуль

В заключительном модуле рассчитываются основные параметры газотурбинного двигателя. В исходную информацию для него входят параметры газового потока на выходе из реактивного сопла p_c , c_c , G_c , его площадь F_c , условная скорость при полном расширении $c_{c,п}$, расход воздуха на входе в двигатель G_H и скорость полета v_H .

Условная тяга при полном расширении газа определяется по формуле $R_{п} = G_c c_{c,п} - G_H v_H$, а в случае ТРДД с отдельными контурами

$R_{п} = \sum_1^z G_c c_{c,п} - G_H v_H$. Действительная тяга двигателя рассчитывается по формуле

$$R = \sum_1^z [G_c c_c + (p_c - p_H) F_c] - G_H v_H. \quad (1.49)$$

Удельная тяга равна

$$R_{уд} = R / G_H, \quad (1.50)$$

удельный расход топлива

$$C_{уд} = \frac{G_{топл} + G_{топл,ф}}{R}. \quad (1.51)$$

1.1.12. Двигатель

Модуль для расчета двигателей в целом синтезируется автоматически из описанных выше модулей узлов по заданному шифру, который представляет собой компактную запись схемы двигателя. В шифре перечисляются в порядке расчета все условные номера узлов, входящих в данную схему, с дополнительной информацией, которая содержит номера контуров, валов. Для компрессоров и турбин условный номер содержит и номер используемой характеристики, если она не задана в исходной информации. Для невращающихся узлов номер вала задается равным нулю. Порядок расчета контуров безразличен. Такую универсальность расчета удалось

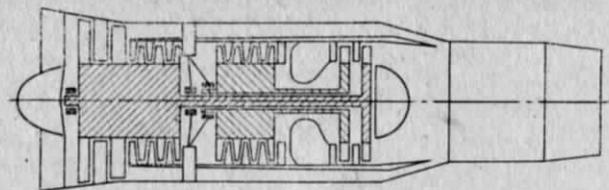


Рис. 1.9. Схема двухконтурного двигателя и ее шифр:

Шифр схемы

1	25	100	0	300	1	220	11	230	21	400	0	510	21	530	1
		1000	0	211	12	1100	0	600	110	711	1				

обеспечить в результате того, что каждый контур имеет свой массив (вектор) режимных параметров U , включающий расходы воздуха, топлива, температуру и давление торможения газа. Они формируются в модуле «разделение потоков» и изменяются после расчета каждого узла, принадлежащего данному контуру. Например, суммируется количество топлива, подведенного в камерах сгорания основной и форсажной, корректируется расход воздуха из-за утечек, отборов и возвращения охлаждающего воздуха и т. д.

Модуль двигателя получился полностью универсальным. Он пригоден для любой реальной схемы, которую можно составить из описанных узлов. Примеры нескольких схем двигателей с их шифрами приведены на рис. 1.9—1.11. При переходе от схемы к схеме изменяется только исходная информация, а сама программа остается неизменной.

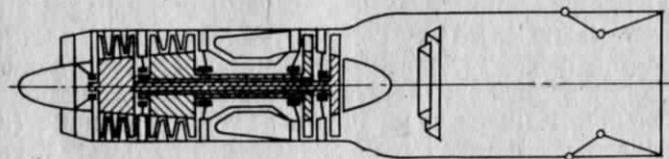


Рис. 1.10. Схема двухвального двигателя с форсажем и ее шифр:

Шифр схемы

4	17	100	0	220	11	230	21	400	0	510	21	530	11
		800	0	700	1								

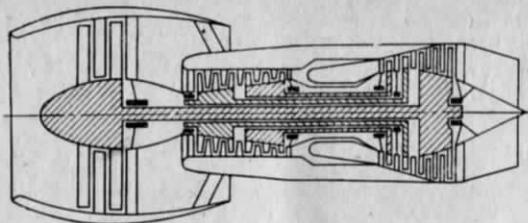


Рис. 1.11. Схема трехвального двигателя и ее шифр:

Шифр схемы

10	27	100	0	300	0	211	11	220	21	230	31	400	0	510	31
		520	21	530	11	700	1	1000	0	211	12	700	2		

1.1.13. Законы и программы регулирования

Под законом регулирования понимается заданная совокупность зависимостей параметров двигателя, которые должны обеспечиваться системой регулирования при изменении режима его работы, например, вследствие изменения высоты и скорости полета. Число заданных зависимостей равно числу степеней свободы двигателя. Оно увеличивается с ростом числа регулируемых элементов. Обычный вид зависимостей $y=f(x)$, но чаще просто выдерживается постоянным какой-то параметр, т. е. $y=const$.

Программа регулирования включает все применяемые на данном двигателе законы регулирования, условия перехода от одного закона к другому и ограничения рабочих режимов двигателя. В модели предусмотрена возможность расчета при различных программах регулирования. Они задаются условными шифрами, в которых указывается, какие параметры нужно выдерживать постоянными, если удовлетворяются заданные неравенства. По этим данным формируется для каждого закона регулирования система трансцендентных уравнений. Каждое уравнение в ней — это разница (невязка) между полученным и требуемым значениями параметра. Неизвестные — это варьируемые параметры, значения которых были заданы ориентировочно и нуждаются в уточнении.

Выше указывалось, что для упрощения математической модели двигателя она составлена для условных законов регулирования, в которых предполагаются заданными такие параметры, как расход воздуха через двигатель, степень двухконтурности, частоты вращения роторов, статическое давление в камере смешения и т. д. Из-за этого получаются несогласованными другие параметры двигателя. Например, не совпадают суммарные мощности компрессоров и турбин, расположенных на одном валу. Расходы газа через реак-

тивные сопла и входные сечения камеры смешения, рассчитанные по площадям и перепадам давлений, не совпадают с расходами, рассчитанными по степени двухконтурности и по расходу воздуха через входное сечение с учетом отборов воздуха и подвода топлива. Эти невязки включаются в общую систему трансцендентных уравнений. Такой расширенный закон регулирования называется законом невязок. Он формируется автоматически. При решении системы трансцендентных уравнений все невязки сводятся к нулю и обеспечивается заданный закон регулирования.

1.1.14. Решение систем трансцендентных уравнений

Для сведения к нулю невязок, полученных при расчете двигателя с условным законом регулирования, приходится решать систему трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2; \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n; \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

где $x_1, 2, \dots, n$ — варьируемые параметры; $y_1, 2, \dots, n$ — невязки, которые нужно свести к нулю.

В данном случае функции f очень сложные и не могут быть записаны в явном виде. При решении таких задач наиболее распространенным является метод Ньютона, но опыт его применения показал, что встречаются трудности при вычислении и обращении якобиана F :

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (1.53)$$

являющегося основной частью метода Ньютона. Якобиан часто бывает вырожденным или плохо обусловленным. Поэтому в ряде случаев метод Ньютона не приводит к решению. Были разработаны другие методы. Хорошие результаты показал, например метод, основанный на дробном факторном эксперименте (см. разд. 1.5), который отличается от метода Ньютона только способом получения якобиана. В обоих случаях производные определяются численным методом, но в первом малые приращения даются поочередно каждому фактору, а во втором — одновременно всем в соответствии с матрицей планирования эксперимента. Величина приращения (интервал варьирования) задается для каждого фактора. По результатам расчетов определяется линейная математическая модель, после дифференцирования которой получают производные, входящие в якобиан. При неблагоприятном ходе поиска решения или при ошибках в программе регулирования якобиан может быть вырожденным. Поэтому предусмотрена проверка его на отсутствие нулевых строк и столбцов. В противном случае понижается порядок якобиана. На следующем приближении он уже не будет вырожденным, если нет ошибок в исходной информации. Если якобиан остается вырожденным на нескольких приближениях, то расчет прекращается.

Для ускорения сходимости применяется одномерный поиск на прямой, соединяющей точки двух последовательных приближений. Он выполняется при помощи метода Фибоначчи* (см. разд. 2.1) или путем аппроксимации трех точек, распо-

* Название этого метода является условным, так как Фибоначчи предложил только последовательность чисел, использованную в этом методе.

ются только в случае необходимости. Такая организация модуля позволяет уменьшить машинное время и занятый объем оперативного запоминающего устройства ЭЦВМ.

1.3. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИ КОМПРЕССОРА III УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

Модуль математической модели компрессора III уровня сложности организован так же, как и модуль турбины. Геометрические размеры многоступенчатого компрессора задаются в виде матрицы, каждая строка которой соответствует одному из венцов и называется вектором геометрических размеров R . Его компоненты, большинство из которых берется на среднегеометрическом диаметре, имеют следующий смысл: $r_1 = a_4$ — признак вращения ($a_4 = 1$ — для рабочего колеса, $a_4 = 0$ — для спрямляющего аппарата); $r_2 = d_2(d_3)$ — наружные диаметры на выходе из венцов; $r_3 = \bar{d}_2(\bar{d}_3)$ — относительные диаметры втулки; $r_4 = \beta_{1л}(a_{2л})$ — геометрические (лопаточные) углы входа лопаток; $r_5 = \beta_{2л}(a_{3л})$ — геометрические (лопаточные) углы выхода лопаток; $r_6 = \theta_1(\theta_2)$ — углы установки профиля; $r_7 = z_1(z_2)$ — числа лопаток в венцах; $r_8 = b_1(b_2)$ — хорды профиля; $r_9 = a_{r1}(a_{r2})$ — диаметры минимальных вписанных окружностей в горловине межлопаточного канала; $r_{10} = N_{r1}(N_{r2})$ — расстояния от фронта решеток до центра этой окружности, измеренные вдоль оси компрессора; $r_{11} = \bar{C}_{1max л}(\bar{C}_{2max л})$ — относительные максимальные толщины профилей.

Все расчеты ведутся на среднегеометрическом диаметре. Учитывается влияние угла атаки, режима обтекания и радиального зазора на потери. Учитывается переменность угла отставания потока. Алгоритм пригоден для расчета многоступенчатых осевых компрессоров с возможностью «запирания» в любом сечении проточной части. После завершения расчета каждого венца формируется вектор результатов Z , имеющий 10 следующих компонент: $z_1 = i_1(i_2)$ — углы атаки на входе в лопаточный венец; $z_2 = G$ — расход воздуха, который может изменяться по венцам из-за перепуска или отбора; $z_3 = T_2^*(T_3^*)$ — температуры торможения на выходе из венца; $z_4 = p_2^*(p_3^*)$ — давления торможения на выходе из венца; $z_5 = p_2(p_3)$ — статические давления; $z_6 = \alpha_2(\alpha_3)$ — углы выхода потока из решетки в абсолютном движении; $z_7 = c_2(c_3)$ — скорости потока в абсолютном движении; $z_8 = c_{2a}(c_{3a})$ — осевые составляющие скорости; $z_9 = c_{2u}(c_{3u})$ — окружные составляющие; $z_{10} = \omega_2(\omega_3)$ — скорости потоков в относительном движении.

Совокупность векторов Z для всех венцов образует матрицу результатов, по которой рассчитываются параметры характеристик ступеней и компрессора в целом. Печать результатов организована так же, как и в турбине.

1.4. РАСЧЕТ ГАЗОВОЗДУШНОГО ТРАКТА ПРИ ЗАПИРАНИИ СЕЧЕНИЯ

В большинстве современных газотурбинных двигателей скорость газа в каком-либо из сечений газоздушного тракта (ГВТ) достигает критической, т. е. происходит запирание сечения. Любые изменения в газовом потоке за таким сечением не влияют на расход газа через двигатель. При изменениях перед таким сечением расход газа изменяется пропорционально плотности газа в этом сечении. Таким образом, наличие запертых сечений существенно влияет на характеристики двигателя и методику их расчета.

В описанной выше модели II уровня сложности предусмотрены варианты алгоритма реактивного сопла, учитывающие запирание в критическом и выходном сечении сопла. При запирании в компрессоре и турбине изменяются их характеристики. В моделях II уровня сложности они являются заданными, вид их безразличен для модели, поэтому изменения в алгоритме модели не нужны.

В моделях III и IV уровней сложности характеристики компрессора и турбины рассчитываются по размерам проточной части и дело обстоит сложнее. На произвольно взятом режиме работы двигателя нельзя априорно сказать, в каком из сечений компрессора или турбины будет запирание и будет ли оно вообще. Следовательно, в математических моделях III и IV уровней сложности должны быть алгоритмы обнаружения запертых сечений и расчета при их наличии. Разработаны два варианта таких алгоритмов. Оба алгоритма являются составной частью моделей и не могут быть выделены в отдельные модули. Поэтому в блок-схемы алгоритмов включены модули расчета компрессора и турбины, разделенные на две части. Для удобства объяснения в них не показан целый ряд блоков вспомогательного назначения, ненужных для понимания алгоритма.

1.4.1. Последовательная проверка сечений на запирание

Блок-схема этого варианта алгоритма показана на рис. 1.13. После необходимых подготовительных операций (6.1) поочередно выбираются и переписываются вектора R для всех венцов (6.2). Для экономии объема оперативного запоминающего устройства в ЭЦВМ всегда находится только один модуль. Смена их производится по признаку, являющемуся одной из дополнительных компонент вектора R (6.3 и 6.4). Выполняется расчет по I части модуля компрессора или турбины до проверки расхода газа через сечение горла лопаток (6.5). Максимально возможный расход через горло определяется по формуле

$$G_{max} = \frac{p_{кр} \epsilon_{кр} F_r}{RT_{кр}} \quad \text{или} \quad G_{max} = \frac{mp^* F_r}{\sqrt{T^*}} \quad (1.54)$$

Входящие в нее параметры рассчитываются по формулам (1.41) ... (1.43) или по более простым формулам с постоянной теплоемкостью. Отсюда невязка, по которой проверяется пропускная способность венца:

$$\Delta \bar{G} = \frac{\kappa G - G_{max}}{G} \quad (1.55)$$

где κ — коэффициент утечек через радиальный зазор.

Если $\Delta \bar{G} > 0$, то заданный расход газа не может пройти через сечение горла и необходимо рассчитывать режим запирания, т. е. надо свести эту невязку к нулю: $\Delta \bar{G} = 0$. Если $\Delta \bar{G} < 0$, то пропускная способность венца достаточна. В этом случае нельзя невязку сводить к нулю, т. е. обязательно $\Delta \bar{G} \neq 0$. Если в данном венце еще не начато решение уравнения запирания (6.6), то проверяется пропускная способность венца (6.8) по формуле (1.55). Если она достаточна, т. е. $\Delta \bar{G} < 0$, то данный венец не может быть запертым и выполняются расчеты по II части модуля (6.15). Так поочередно

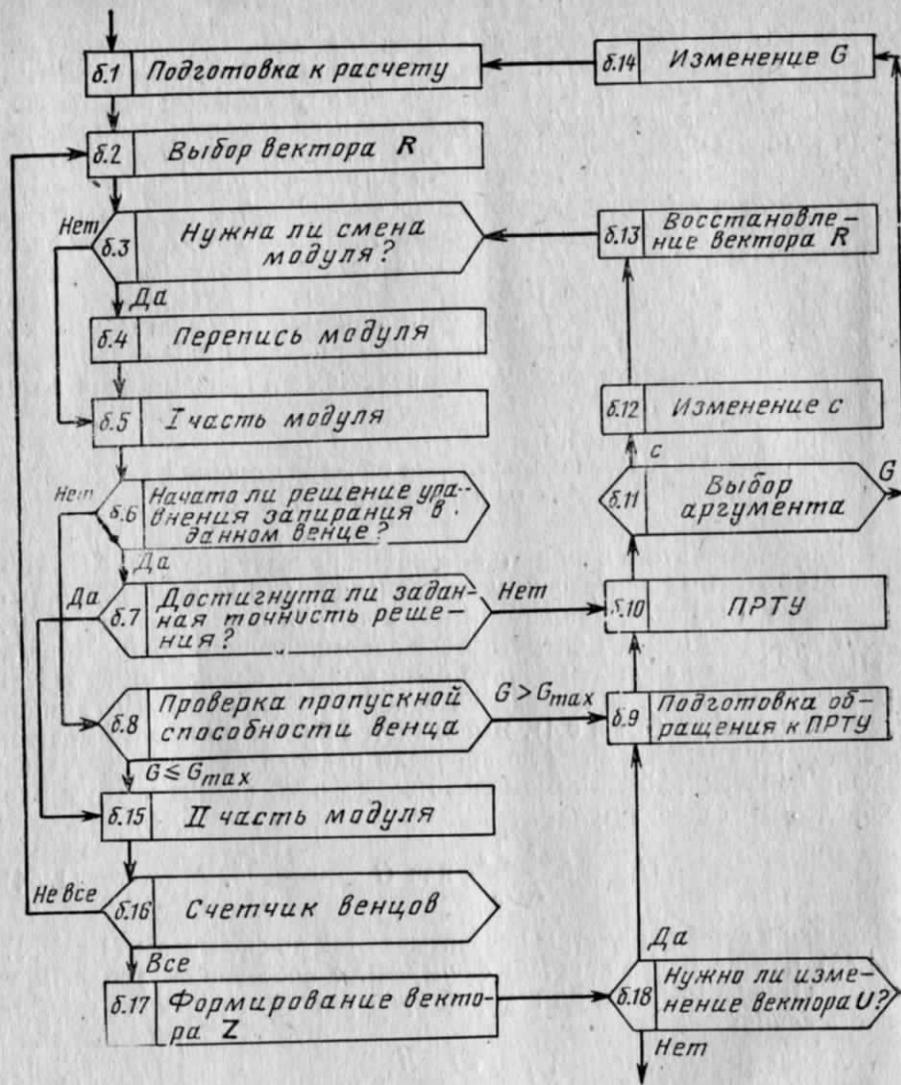


Рис. 1.13. Блок-схема алгоритма последовательной проверки сечений на запирание

(6.16) просчитываются все венцы многоступенчатого компрессора или турбины, а в случае необходимости и всего двигателя, если нет запирания. После окончания счета результаты формируются в вектор основных параметров Z (6.17) и, если (6.18) в векторе U были заданы окончательные значения всех параметров (одна из компонент может быть задана в нулевом приближении), то расчет по модели заканчивается.

При наличии хотя бы одного запорного венца, т. е. при $\Delta \bar{G} > 0$ практически невозможно угадать и правильно задать расход газа

через компрессор или турбину. Поэтому задают заведомо больший расход, который она не может пропустить, что выявляется в (6.8) при расчете того из венцов, который первым не сможет пропустить весь газ. Расход газа определяется из решения трансцендентного уравнения

$$\Delta \bar{G} = f(G) = 0. \quad (1.56)$$

Максимально возможный расход изменяется в зависимости от G из-за изменения углов атаки, скоростей, а следовательно, и потерь в предыдущих венцах. Невязки в уравнении (1.56) поэтому рассчитываются на каждом шаге поиска в (6.5) по формуле (1.55). Ни один из опубликованных в литературе методов решения трансцендентных уравнений не оказался достаточно экономичным и надежным, поэтому было разработано несколько новых методов. Лучшие результаты дал метод, использующий аппроксимацию действительной зависимости дробно-линейной функцией (см. подразд. 1.4.3). Этот метод был реализован в подпрограмме решения трансцендентных уравнений (ПРТУ), которая используется в (6.10). Использовались и другие методы. При первом обращении к ПРТУ необходима некоторая подготовка (6.9). Так как при решении уравнения (1.56) изменяется расход газа G (6.11 и 6.14), то расчет приходится повторять с самого начала. Расчет с измененным расходом газа ведется только до того венца (6.6), в котором было начато решение уравнения (1.56). Если заданная точность его решения еще не достигнута (6.7), то вновь происходит обращение к ПРТУ (6.10), в которой рассчитывается необходимое изменение расхода газа и цикл повторяется. Обычно число приближений не превышает 4...6. После достижения заданной точности (6.7) расчет продолжается со II части модуля данного венца (6.15). Номер обнаруженного запорного венца запоминается и если еще какой-то последующий венец не сможет пропустить уже уменьшенный расход газа, то будет изменяться не расход, а скорость выхода газа из предыдущего запорного венца (в турбине учитывается отклонение потока из-за расширения газа в косом срезе решетки). Для определения угла отклонения потока и скорости выхода c решается уравнение

$$\Delta G = f(c) = 0. \quad (1.57)$$

Оно аналогично уравнению (1.56) и решается при помощи той же ПРТУ (6.10). Только изменяется скорость c (6.11 и 6.12). В этом случае расчет повторяется со второй части предыдущего запорного венца, для которого необходимо найти и переписать в оперативное запоминающее устройство геометрию (6.13). В остальном алгоритм работает точно так же, как и при изменении расхода газа. Если приведенная скорость на выходе из венца станет меньше скорости $c_{кр}$, гарантирующей запирание, то оно аннулируется и опять изменится расход газа, т. е. решается уравнение (1.56).

Для уменьшения времени счета уравнение (1.56) начинает решаться не для первого венца, который не может пропустить заданный расход газа, а с одного из последующих, в котором максимальный

но возможный расход является наименьшим. В блок-схеме на рис. 1.13 это не отражено.

Выше было указано, что одна из компонент вектора U , чаще всего расход газа G , может быть задана ориентировочно в нулевом приближении, а вместо нее задана любая из компонент вектора Z , например, давление на выходе. Обозначим эту компоненту через Π . Тогда необходимо (б.18) решить уравнение

$$\Delta \Pi = \frac{\Pi(G)}{\Pi_{\text{зад}}} - 1 = f(G) = 0, \quad (1.58)$$

которое решается точно так же, как и уравнения (1.56) и (1.57) той же программе. Точно так же при наличии запертых венцов вместо G изменяется скорость c в последнем из них. Время счета при этом увеличивается в 5...8 раз.

1.4.2. Одновременная проверка сечений на запирание

В этом варианте алгоритма, блок-схема которого показана на рис. 1.14, в отличие от предыдущего при обнаружении недостаточной пропускной способности венца не сразу изменяется расход газа, а сначала рассчитываются все оставшиеся венцы и в каждом из них вычисляется невязка. Таким образом, проверка на запирание проводится одновременно во всех венцах при каждом расчете по модулю компрессора или турбины.

Различия с предыдущим алгоритмом начинаются с (б.8), из которого теперь нет выхода в (б.9), а в любом случае счет передается второй части модуля (б.16). При недостаточной пропускной способности венца расход газа уменьшается до максимально возможного (б.15) и рассчитывается невязка по формуле (1.55). Таким образом, в отличие от предыдущего алгоритма расчет выполняется при разных расходах газа в венцах до и после запертого сечения. Так поочередно рассчитываются все венцы (б.17). Если еще в каких-то венцах пропускная способность окажется недостаточной, то расход может уменьшаться несколько раз (б.15). После окончания расчета последнего венца, если не было обнаружено запирание ни в одном венце (б.18), или оно было обнаружено ошибочно (б.19), то расчет заканчивается, если не нужно изменение вектора U .

Если в одном или в нескольких венцах обнаружено запирание (б.8), то выбирается наибольшая суммарная невязка по расходу ΔG (б.20), которая сводится к нулю при помощи подпрограммы решения трансцендентных уравнений (б.9 и б.10) за счет изменения расхода газа G во входном сечении (б.14). Если начала работать ПРТУ в каком-то венце, то расчет производится только до этого венца (б.6). После окончания решения (б.7) не будет ни одной отрицательной невязки, а минимум одна будет равна нулю. Венцы с нулевыми невязками ($G = G_{\text{max}}$) являются запертыми.

Если необходимо уточнить значение какой-то из компонент вектора U , т. е. решить уравнение (1.58), то опять используется

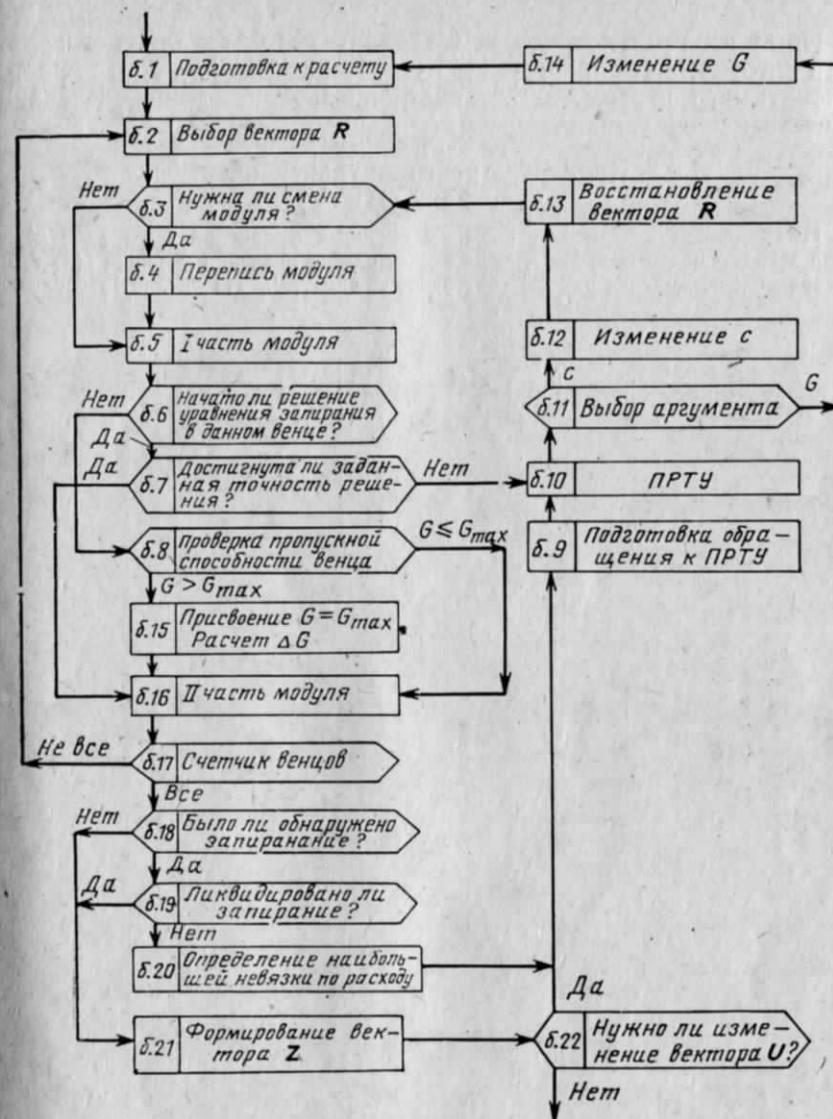


Рис. 1.14. Блок-схема алгоритма одновременной проверки сечений на запирание

ПРТУ. В этом случае варьируется скорость c за последним запертым венцом (б.11 и б.12), а если они отсутствуют, то варьируется по-прежнему расход газа (б.14). Если после окончания решения скорость c окажется меньше $c_{\text{кр}}$, гарантирующей запирание, то в данном венце оно ликвидируется (б.19) и варьируется скорость c в предыдущем запертом венце. Если запертых венцов больше нет, то, как обычно, варьируется расход газа.

При расчетах компрессора и турбины использовались оба варианта алгоритма (см. рис. 1.13 и 1.14). Первый из них более простой и понятный, а второй более экономичный. При его использовании существенно сокращаются затраты машинного времени.

1.4.3. Процедура решения трансцендентных уравнений (ПРТУ)

ПРТУ предназначена для решения сложных уравнений вида $y=f(x)=0$, когда затраты машинного времени на расчет одного значения функции $f(x)$ существенно больше времени работы собственно процедуры. На рис. 1.15 показана

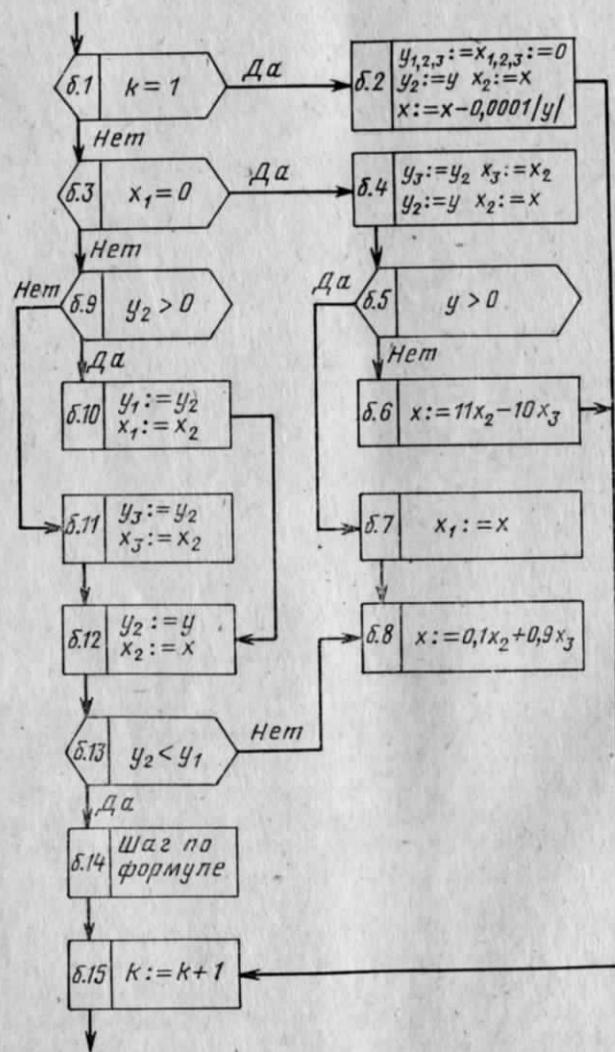


Рис. 1.15. Блок-схема процедуры решения трансцендентных уравнений (ПРТУ)

блок-схема одного из вариантов алгоритма, предназначенного для расчета запираания. Характер функции в окрестностях корня в этом случае очевиден. При первом обращении к процедуре $y < 0$, а при уменьшении x величина функции y увеличивается. Это следует из формул (1.55), (1.56). При увеличении x , наоборот, $y \rightarrow -\infty$. Зависимость напоминает дробно-линейную функцию: $y = \frac{a + bx}{1 + cx}$, ко-

торую можно использовать для аппроксимации действительной зависимости при решении. Процесс решения является шаговым, т. е. последовательно для каждого рассчитанного в алгоритме значения x по модели вычисляется y . Постоянно хранятся, кроме рассчитываемой точки $x_i y_i$, координаты еще трех точек. Точка $x_1 y_1$ является лучшей из найденных с положительным значением y , а точка $x_3 y_3$ лучшей с отрицательным значением y . В точке $x_2 y_2$ результаты хранятся перед переписыванием в две другие.

При первом обращении к процедуре ($k=1$) после подготовительных операций (6.2) уменьшается значение x , причем коэффициент 0,0001 подобран так, чтобы в решаемых задачах отделение корня происходило на втором шаге примерно в половине случаев. До получения хотя бы одной точки с $y > 0$, т. е. до отделения корня, значение $x_1 = 0$, поэтому результаты переписываются только в третью точку (6.4) и делается новый шаг в десять раз больше, чем предыдущий (6.6). После отделения корня (6.5) значение $x \neq 0$ (6.7) и шаг делается внутри отрезка (6.8). При характере функции, напоминающей дробно-линейную, деление отрезка на десять частей выгоднее, чем пополам. При последующих обращениях к процедуре результаты переписываются уже в три точки (6.9...6.12). Проверяется целесообразность аппроксимации дробно-линейной функцией (6.13) и делается шаг по формуле, полученной аппроксимацией (6.14):

$$x = \frac{y_1 y_2 x_3 (x_2 - x_1) - y_1 y_3 x_2 (x_3 - x_1) + y_2 y_3 x_1 (x_3 - x_2)}{y_1 y_2 (x_2 - x_1) - y_1 y_3 (x_3 - x_1) + y_2 y_3 (x_3 - x_2)} \quad (1.59)$$

Эти шаги повторяются при всех последующих обращениях к процедуре, пока не будет получена заданная точность. Она проверяется вне процедуры. В блок-схемах на рис. 1.13 и 1.14 эта проверка точности осуществляется в (6.7).

В качестве тестовой задачи использовалась сумма дробно-линейной и линейной функций:

$$y = 3,1735 \frac{1 - 0,510992x}{1 - 0,509957x} + 0,20333x - 2,6125.$$

Ее корень находился через три шага с заданной точностью 10^{-9} . В задачах расчета запираания этот алгоритм оказался более экономичным, чем любые из алгоритмов, опубликованных в литературе. Другие, более сложные варианты алгоритма позволяют находить решение при произвольном характере функции.

1.5. РАСЧЕТ МАССЫ И ГАБАРИТНЫХ РАЗМЕРОВ

При оптимизации любого изделия, а в особенности ГТД, необходимо учитывать его массу и габаритные размеры. Следовательно, в математической модели должен быть модуль для их расчета при любых сочетаниях варьируемых параметров. В существующих методах расчета обычно используются статистические зависимости. Предложено большое количество таких зависимостей как для газотурбинных двигателей, так и для их узлов. Каждая из них позволяет рассчитывать массу или габаритные размеры изделия определенного класса в зависимости от основных параметров. Все зависимости, полученные статистической обработкой результатов измерений габаритных размеров и массы существующих изделий, имеют ряд принципиальных недостатков.

1. Статистические зависимости описывают только прошлый опыт и быстро стареют.

2. Характер изменения массы и габаритных размеров по году закладки или выпуска изделия обычно немонотонный, поэтому имеющиеся попытки учесть влияние временного фактора, хотя и увеличивают точность результатов, но не являются радикальным решением вопроса.

3. Невозможно получить статистические зависимости для изделий новых схем, не имевших прототипов в прошлом.

Из-за перечисленных недостатков статистические зависимости могут быть использованы только при предварительном выборе параметров на этапе предэскизного проектирования. При окончательном выборе параметров и в особенности на этапе эскизного проектирования точность их уже становится недостаточной и может привести к неправильному выбору параметров. Для повышения точности необходимо совмещение процессов оптимизации и конструирования. При использовании ЭЦВМ третьего или четвертого поколения с достаточным набором терминалов (с дисплеями и графопостроителями) можно в принципе вычерчивать изделие на каждом шаге оптимизации и определять по чертежу его массу и габаритные размеры. Этот процесс очень трудоемок, так как при оптимизации параметров сложных изделий потребное число шагов нередко достигает нескольких сот, а то и тысяч. Кроме того, требуется очень четкая организация взаимной работы большого коллектива высококвалифицированных специалистов и всегда есть опасность непредвиденных срывов и задержек.

Удобнее и проще поставить заранее полный или дробный факторный эксперимент по конструированию данного изделия. Он позволит получить математические зависимости массы и габаритных размеров от основных параметров уже не статистические, а для данного изделия с учетом всех его индивидуальных особенностей. Эти зависимости включаются в математическую модель изделия и используются при оптимизации. Они называются передаточными моделями (см. гл. 4). Использование современных ЭЦВМ при факторном эксперименте очень желательно, но не обязательно. В крайнем случае можно использовать и ручное конструирование. Можно рекомендовать следующую последовательность работ.

1. Факторный эксперимент начинается с выбора варьируемых параметров (факторов), т. е. параметров, которые будут изменяться при последующей оптимизации. При увеличении их числа резко возрастает трудоемкость эксперимента, поэтому оно должно быть минимально необходимым. Обозначим его через n , а соответствующие факторы через $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n$. При оптимизации газотурбинных двигателей это будет степень двухконтурности, степени повышения давления компрессоров, температура газа перед турбиной и т. п.

2. Для каждого фактора выбирается начальный уровень r_{i0} и интервал варьирования Δr_i (обязательно симметричный). Начальный уровень факторов всегда известен из предыдущих проработок или

из технического предложения. При выборе интервала варьирования следует учитывать, что чем он меньше, тем выше точность получаемых зависимостей, но меньше область их применимости. Они справедливы в пределах интервалов варьирования с небольшой экстраполяцией. При оптимизации параметры не должны выходить из этой области. Иначе придется ставить новый факторный эксперимент со смещенным начальным уровнем. Верхние и нижние значения факторов определяются по формулам $r_{i\text{в}} = r_{i0} + \Delta r_i$; $r_{i\text{н}} = r_{i0} - \Delta r_i$, а после кодирования по формуле

$$x_i = \frac{r_i - r_{i0}}{\Delta r_i} \quad (1.60)$$

они становятся равными $+1$ и -1 .

3. Составляется матрица планирования, в которой указываются уровни факторов для каждого эксперимента. При полном факторном эксперименте предусматриваются все возможные сочетания уровней факторов. Применяются различные способы составления матрицы планирования, но проще всего уровни первого фактора изменять после каждого эксперимента, второго — через два эксперимента, третьего — через четыре, четвертого — через восемь и т. д. Пример матрицы планирования для трех факторов приведен в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ по пор.	x_1	x_2	x_3	№ по пор.	x_1	x_2	x_3
1	+1	+1	+1	5	+1	+1	-1
2	-1	+1	+1	6	-1	+1	-1
3	+1	-1	+1	7	+1	-1	-1
4	-1	-1	+1	8	-1	-1	-1

Аналогично можно построить матрицу планирования для любого числа факторов. Число опытов определяется по формуле

$$z = 2^n. \quad (1.61)$$

Для сокращения записей обычно вместо $+1$ и -1 указываются только «+» и «-». В сводной табл. 1.3 приведены матрицы планирования* для числа факторов от 2 до 5. Каждая последующая матрица включает все предыдущие. Матрицы планирования для дробного факторного эксперимента значительно меньше по объему. Они рассмотрены отдельно.

4. Матрица планирования декодируется по формуле

$$r_i = r_{i0} + x_i \Delta r_i, \quad (1.62)$$

* Матрицы планирования взяты из книги: Бондарь А. Г., Статюх Г. А. Планирование эксперимента в химической технологии. Киев, Вища школа, 1976. с. 59.

Таблица 1.3

№ по пор.	Тип эксперимента		Факторы					
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	23	22	+	+	+	+	+	
2			-	+	+	+	+	
3			+	-	+	+	+	
4			-	-	+	+	+	
5		24	22	+	+	-	+	+
6				-	+	-	+	+
7				+	-	-	+	+
8				-	-	-	+	+
9	25		22	+	+	+	-	+
10				-	+	+	-	+
11				+	-	+	-	+
12				-	-	+	-	+
13		+	+	-	-	+		
14		-	+	-	-	+		
15		+	-	-	-	+		
16		-	-	-	-	+		
17	25		+	+	+	+	-	
18			+	+	+	+	-	
19			+	-	+	+	-	
20			-	-	+	+	-	
21			+	+	-	+	-	
22			-	+	-	+	-	
23			+	-	-	+	-	
24			-	-	-	+	-	
25			+	+	+	-	-	
26			+	-	+	-	-	
27			-	-	+	-	-	
28			+	+	-	-	-	
29			-	+	-	-	-	
30			+	-	-	-	-	
31			+	-	-	-	-	
32			-	-	-	-	-	

для каждого варианта просчитываются необходимые размеры на ЭЦВМ и выдаются задания на конструирование. Для повышения надежности результатов желательно каждый эксперимент повторить минимум два раза и рандомизировать их, т. е. сделать так, чтобы распределение экспериментов по исполнителям и по времени было случайным. Для этого можно использовать таблицы случайных чисел или просто написать номера всех экспериментов на отдельных бумажках, свернуть их, тщательно перемешать и вытаскивать поочередно. Если эксперимент предполагается повторять несколько раз, то каждый номер должен быть записан на нескольких бумажках. Каждый конструктор вычерчивает изделие по размерам, соответствующим номеру его варианта. Если на каждого конструктора приходится несколько вариантов, то они выполняют их не как им удобнее, а в порядке выпавших номеров. Если конструкторов немного, то кому-то из них может выпасть дважды один и тот же

номер опыта. Это нежелательно. Лучше тогда разделить конструкторов на группы по числу повторяющихся опытов и проводить жеребьевку отдельно для каждой группы. Такая рандомизация экспериментов позволяет существенно уменьшить систематические ошибки, вызванные различной квалификацией конструкторов и накоплением опыта в процессе экспериментов.

5. По чертежам изделия определяются габаритные размеры, рассчитывается масса, и результаты, т. е. отклики заносятся в расширенную матрицу планирования, пример которой для трех факторов приведен в табл. 1.4. Для упрощения расчетов в нее добавлен фиктивный фактор x_0 , тождественно равный +1. Количество габаритных размеров зависит от вида изделия, его схемы и может быть различным. Обработка для каждого из откликов ведется независимо и одинаково, поэтому они и обозначены одинаково.

Таблица 1.4

№ по пор.	x_0	Матрица планирования			Взаимодействия			Масса		Габаритные размеры					
		x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	m		L		D		D_2	
								y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
1	+	+	+	+	+	+	+	y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	y_{51}	y_{61}	y_{71}	y_{81}
2	+	-	+	+	-	-	+	y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	y_{52}	y_{62}	y_{72}	y_{82}
3	+	+	-	+	-	+	-	y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	y_{53}	y_{63}	y_{73}	y_{83}
4	+	-	-	+	+	-	-	y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	y_{54}	y_{64}	y_{74}	y_{84}
5	+	+	+	-	+	-	-	y_{15}	y_{25}	y_{35}	y_{45}	y_{55}	y_{65}	y_{75}	y_{85}
6	+	-	+	-	-	+	-	y_{16}	y_{26}	y_{36}	y_{46}	y_{56}	y_{66}	y_{76}	y_{86}
7	+	+	-	-	-	-	+	y_{17}	y_{27}	y_{37}	y_{47}	y_{57}	y_{67}	y_{77}	y_{87}
8	+	-	-	-	+	+	+	y_{18}	y_{28}	y_{38}	y_{48}	y_{58}	y_{68}	y_{78}	y_{88}
b	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	-	-	-	-	-	-	-	-

6. Благодаря ортогональности матриц планирования обработка результатов очень несложная. В большинстве случаев можно учитывать только парные взаимодействия, тогда уравнение регрессии (математическая модель) ищется в виде полуквадратичной зависимости:

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

или

$$y = b_0x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij}x_ix_j \quad (1.63)$$

Коэффициенты модели определяются по формулам

$$b_i = \frac{1}{pz} \sum_{u=1}^z \left(x_{iu} \sum_{k=1}^p y_{ku} \right) \quad (1.64)$$

или

$$b_{ij} = \frac{1}{pz} \sum_{u=1}^z \left[(x_i x_j)_u \sum_{k=1}^p y_{ku} \right], \quad (1.65)$$

где p — число повторений измерений в каждом эксперименте (в табл. 1.4 $p=2$).

В обоих случаях просто суммируются отклики в данном опыте, умножаются на значение соответствующего фактора или произведения факторов (см. табл. 1.4) и суммируются для всех опытов. Полученные результаты записываются в последнюю строку таблицы.

7. Необходимо проверить достоверность математических моделей. Дисперсию воспроизводимости можно проверить, если каждый опыт повторялся не менее двух раз. Тогда математическое ожидание u -го опыта равно

$$\tilde{y}_u = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{ku}, \quad (1.66)$$

а эмпирическая оценка соответствующей дисперсии

$$\tilde{D}_u = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p (y_{ku} - \tilde{y}_u)^2. \quad (1.67)$$

Вычисляется критерий Кохрена

$$G = \frac{\tilde{D}_{u \max}}{\sum_{k=1}^z \tilde{D}_u}. \quad (1.68)$$

Если его значение меньше табличного* G_T , то можно сделать вывод, что все дисперсии однородны, т. е. среди опытов нет грубых ошибок. В противном случае необходимо улучшить проработку конструкций, уточнить расчет массы или увеличить число опытов. До получения удовлетворительного значения числа Кохрена ис-

пользовать полученные результаты нельзя. Дисперсия воспроизводимости определяется по формуле

$$\tilde{D}_0 = \frac{1}{z} \sum_{u=1}^z \tilde{D}_u. \quad (1.69)$$

По ней оценивается ошибка опыта

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\tilde{D}_0}. \quad (1.70)$$

Для проверки значимости коэффициентов регрессии выбирается табличное значение критерия Стьюдента t_T при числе степеней свободы $f_0 = z(p-1)$ и 5%-ном уровне значимости. Рассчитывается доверительный интервал

$$\Delta b = \pm t_T \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sqrt{z}}. \quad (1.71)$$

Он получается одинаковым для всех коэффициентов. Значимость проверяется по условиям $|b_i| > |\Delta b|$; $|b_{ij}| > |\Delta b|$. Если условие не выполняется, то данный фактор x_i или взаимодействие факторов $x_i x_j$ являются незначимыми. Следовательно, при выбранных интервалах варьирования влияние их можно не учитывать.

Остается проверить адекватность полученного уравнения регрессии. Сначала по нему рассчитывают значения откликов, соответствующие условиям всех опытов $y_{u \text{ расч}}$. Затем сравнивают с математическими ожиданиями

$$\tilde{D}_{\text{ад}} = \frac{p}{z-l} \sum_{u=1}^z (\tilde{y}_u - y_{u \text{ расч}})^2, \quad (1.72)$$

где l — число членов в уравнении регрессии, оставшихся после оценки значимости коэффициентов.

Рассчитывается критерий Фишера

$$F_i = \tilde{D}_{\text{ад}} / \tilde{D}_0, \quad (1.73)$$

и сравнивается с табличным F_{iT} при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы $f_{\text{ад}} = z-l$; $f_0 = z(p-1)$. Если расчетное значение критерия Фишера меньше табличного

$$F_i < F_{iT},$$

то уравнение регрессии признается адекватным. Это означает, что рассеяние экспериментальных данных относительно уравнения регрессии имеет тот же порядок, что и рассеяние, вызванное ошибками опыта.

Неадекватность модели означает, что при выбранных интервалах варьирования нельзя действительные зависимости описать полуквадратичной моделью. Необходимо либо уменьшить интервалы варьирования, либо перейти к планам второго порядка, которые

* Таблицы имеются во многих книгах (например, К. Хартман и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М., Мир, 1977. 552 с.). Уровень значимости обычно выбирается равным 5%, числа степеней свободы равны $f_1 = p-1$, а $f_2 = z$.

Таблица 1.5

позволяют получать квадратичные модели. Обычно необходимости в этом не бывает.

8. Факторы в уравнении регрессии декодируются по формуле $r_i = r_{i0} + x_i \Delta r_i$ и делается приведение подобных членов. Окончательное уравнение регрессии удобно записать в следующем виде:

$$z = b'_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n b'_{ij} r_i r_j. \quad (1.74)$$

В таком виде уравнения для массы и габаритных размеров включаются в математическую модель изделия. Иногда их тоже называют не уравнениями, а математическими моделями соответственно массы или габаритных размеров.

9. Число опытов при полном факторном эксперименте довольно велико и не всегда возможно все их выполнить как по времени, так и по числу конструкторов, в особенности если нет возможности использовать дисплеи и графопостроители. Для уменьшения числа опытов используется дробный факторный эксперимент. Он позволяет получать модели с учетом меньшего количества взаимодействий или вообще без их учета, т. е. линейные модели:

$$z = \sum_{j=0}^n b'_j r_j, \quad (1.75)$$

которые в принципе обеспечивают меньшую точность, с чем приходится мириться. Иногда априорно известно, что в аналогичных задачах коэффициенты у членов с взаимодействиями являются незначимыми, тогда применение дробного факторного эксперимента не снизит точности, а существенно уменьшит объем экспериментов. Разница между дробным и полным факторным экспериментом заключается только в составлении матрицы планирования. Все остальные операции выполняются одинаково.

За основу берется матрица планирования для меньшего числа факторов, а столбцы для остальных факторов получаются перемножением существующих столбцов. Формулы для черемножения называются генерирующими соотношениями, например, $x_4 = x_1 x_2$, $x_5 = x_1 x_3$ и т. д. Выбор их имеет большое значение. Важно выбрать те произведения, эффект взаимодействия которых является минимальным. Для этого желательно иметь априорную информацию.

Планы дробного факторного эксперимента обозначаются в виде 2^{n-p} , где p — порядок реплики.

По этой формуле рассчитывается число опытов и выбирается полный факторный эксперимент, включаемый в матрицу планирования. Число опытов не может быть меньше числа коэффициентов линейной модели. Это ограничивает дробность реплик. Минимально возможное число опытов для дробного факторного эксперимента приведено в табл. 1.5. Дробные реплики показывают во сколько раз сократилось число опытов по сравнению с полным факторным экспериментом. Если априорно известно, что все взаимодействия

Число		План ДФЭ	Используемый план ПФЭ	Дробная реплика
факторов	опытов			
3	4	2 ³⁻¹	2 ²	1/2 от 2 ³
4	8	2 ⁴⁻¹	2 ³	1/2 от 2 ⁴
5	8	2 ⁵⁻²	2 ³	1/4 от 2 ⁵
6	8	2 ⁶⁻³	2 ³	1/8 от 2 ⁶
7	8	2 ⁷⁻⁴	2 ³	1/16 от 2 ⁷
8	16	2 ⁸⁻⁴	2 ⁴	1/16 от 2 ⁸
9	16	2 ⁹⁻⁵	2 ⁴	1/32 от 2 ⁹
10	16	2 ¹⁰⁻⁶	2 ⁴	1/64 от 2 ¹⁰
11	16	2 ¹¹⁻⁷	2 ⁴	1/128 от 2 ¹¹
12	16	2 ¹²⁻⁸	2 ⁴	1/256 от 2 ¹²
13	16	2 ¹³⁻⁹	2 ⁴	1/512 от 2 ¹³
14	16	2 ¹⁴⁻¹⁰	2 ⁴	1/1024 от 2 ¹⁴
15	16	2 ¹⁵⁻¹¹	2 ⁴	1/2048 от 2 ¹⁵
16	32	2 ¹⁶⁻¹¹	2 ⁵	1/2048 от 2 ¹⁶
17	32	2 ¹⁷⁻¹²	2 ⁵	1/4096 от 2 ¹⁷
18	32	2 ¹⁸⁻¹³	2 ⁵	1/8192 от 2 ¹⁸

Таблица 1.6

№ по пор.	Факторы и генерирующие соотношения						
	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_2$	$x_5 = x_1 x_3$	$x_6 = x_2 x_3$	$x_7 = x_1 x_2 x_3$
1	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	+	-	-	+	-
3	+	-	+	-	+	-	-
4	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	-	+	-	-	-
6	-	+	-	-	+	-	+
7	+	-	-	-	-	+	+
8	-	-	-	+	+	+	-
Тип плана	2 ³						
	2 ⁴⁻¹						
	2 ⁵⁻²						
	2 ⁶⁻³						2 ⁷⁻⁴

Таблица 1.7

1.6. ТЕХНОЛОГИЧНОСТЬ ПРОЕКТИРУЕМОГО ИЗДЕЛИЯ

№ по пор.	Факторы и генерирующие соотношения														
	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_5 = x_1 x_2$	$x_6 = x_1 x_3$	$x_7 = x_1 x_4$	$x_8 = x_2 x_3$	$x_9 = x_2 x_4$	$x_{10} = x_3 x_4$	$x_{11} = x_1 x_2 x_3$	$x_{12} = x_2 x_3 x_4$	$x_{13} = x_1 x_3 x_4$	$x_{14} = x_1 x_2 x_4$	$x_{15} = x_1 x_2 x_3 x_4$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-
3	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-
4	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
5	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	-
6	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
7	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	-	+
8	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-
9	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
10	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+
11	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+
12	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	-	-
13	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	+	+	-	+
14	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
15	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	+	-
16	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
Т	24														
и					28-4										
п					29-5										
п					210-6										
л					211-7										
а					212-8										
н					213-9										
а					214-10										
					215-11										

отсутствуют, то выбор генерирующих соотношений не имеет существенного значения и можно матрицы планирования брать из сводных табл. 1.6, 1.7, где использован простейший вариант генерирующих соотношений. Пример определения уравнения регрессии для массы и габаритных размеров диска турбины, полученного при помощи дробного факторного эксперимента, приведен в разд. 4.7.

При оптимизации любого изделия необходимо возможно более полно учитывать все факторы, влияющие на его качество. Одним из таких факторов является технологичность. Заведомо нетехнологичный вариант изделия не может быть признан оптимальным даже при самом благоприятном сочетании других параметров. Следовательно, в математические модели изделий необходимо включать вычисление параметров, оценивающих технологичность. К сожалению, приходится вводить целый ряд параметров. Основные из них два: себестоимость производства; стоимость подготовки производства. Кроме того, иногда применяются: трудоемкость; коэффициент использования металла; коэффициент загрузки станочного парка предприятия; коэффициент загрузки уникального оборудования; сроки подготовки производства.

Для точного определения этих параметров необходимо на каждом шаге оптимизации или для каждого опыта дробного факторного эксперимента (см. разд. 1.5) разрабатывать полный технологический процесс изготовления изделия. Эти разработки слишком трудоемки, хотя при использовании автоматизированной системы технологической подготовки производства (АСТПП) применение их возможно.

Обычно при оптимизации не требуется высокой точности определения параметров технологичности, а для их приближенной оценки можно использовать метод экспертных оценок. Он значительно проще. Точность получаемых результатов существенно зависит от правильной организации опроса экспертов. Необходима большая подготовительная работа. Прежде всего формируется группа экспертов из числа высококвалифицированных специалистов, имеющих опыт производства изделий того же класса, что и проектируемое. Оптимальный состав группы от 10 до 20 человек. Назначается специалист для обработки результатов опроса, хорошо знакомый с методом экспертных оценок и не входящий в группу экспертов. Размножаются чертежи сравниваемых вариантов изделия. Целесообразно использовать те же чертежи, по которым в разд. 1.5 производилось определение массы и габаритных размеров.

Эксперты работают независимо друг от друга и по возможности одновременно. Каждому из них вручается комплект чертежей и перечень параметров технологичности, которые он должен оценить численно. Ответы экспертов записываются в матрицу опроса, образец которой приведен в табл. 1.8. Для каждого параметра составляется своя матрица. Непосредственное осреднение результатов опроса обычно дает неудовлетворительные результаты. Нужна предварительная обработка с заменой параметров их рангами. Ранжирование по величине параметра делается отдельно для каждого эксперта. Ранги a_1, a_2, \dots, a_z — это просто порядковые номера 1, 2, ..., z. Оценки A располагаются в порядке возрастания для каждого эксперта. Эта таблица устанавливает соответствие между оценками и их рангами. Полученные ранги переписываются в мат-

Таблица 1.8

Эксперт №	Вариант изделия						
	1	2	3	4	5	6	7
1	12	25	18	9	2,5	11	16
2	6	15	12	9	3	9	9
3	8,5	15	16	9,8	3	10	10
4	11,2	14,1	16,3	9,8	4,1	8,3	7,9
5	6	9	9,5	7,5	3	8	8,1
6	7	12	10	6	3	9	8
7	4,5	12	12,5	9	3	8,5	6,5
8	6	10	10	6	2,5	6	5
9	6	12	9,9	8,6	4	10	6
10	7	10	12	6	3	5	7
11	9	20	15	9	4	9	10
12	11	17	15	9	3	11	12
13	9,8	25	26	8,7	4,5	9,5	9,6
14	12	40	35	12	5	7,5	30
15	9,5	18	24	10	4	9	11
16	12	20	15	8,5	5	8,5	10,5

рицу рангов, аналогичную по форме табл. 1.8. Образец матрицы приведен в табл. 1.9. Ранги суммируются для каждого варианта изделия и определяется отклонение сумм Δa от средней суммы:

$$a_{\text{ср}} = \frac{1}{2} m(z+1), \quad (1.76)$$

где m — число экспертов. Вычисляется сумма квадратов отклонений $s = \sum_{j=1}^z (\Delta a_j)^2$ и коэффициент конкордации (без учета связанных рангов)

$$w = \frac{s}{\frac{1}{12} m^2 (z^3 - z)}, \quad (1.77)$$

по величине которого можно судить о согласованности мнений экспертов. Достаточность этой величины при числе * вариантов изделия $z \geq 7$ оценивается по выполнению неравенства

$$\chi^2 = m(z-1)w > \chi_{\tau}^2, \quad (1.78)$$

* При меньшем числе вариантов используются более сложные методы [13].

Таблица 1.9

Эксперт №	Вариант изделия							Σ
	1	2	3	4	5	6	7	
1	4	7	6	2	1	3	5	—
2	2	7	6	4	1	4	4	—
3	2	6	7	3	1	4,5	4,5	—
4	5	6	7	4	1	3	2	—
5	2	6	7	3	1	4	5	—
6	3	7	6	2	1	5	4	—
7	2	6	7	5	1	4	3	—
8	4	6,5	6,5	4	1	4	2	—
9	2,5	7	5	4	1	6	2,5	—
10	4,5	6	7	3	1	2	4,5	—
11	3	7	6	3	1	3	5	—
12	3,5	7	6	2	1	3,5	5	—
13	5	6	7	2	1	3	4	—
14	3,5	7	6	3,5	1	2	5	—
15	3	6	7	4	1	2	5	—
16	5	7	6	2,5	1	2,5	4	—
Σa _i	54	104,5	102,5	51	16	55,5	64,5	448
Δa _i	-10	40,5	38,5	-13	-48	-8,5	0,5	0
(Δa _i) ²	100	1640,25	1482,25	169	2304	72,25	0,25	5768

где χ_{τ}^2 — определяется по таблицам [13] для числа степеней свободы $f = z - 1$ и заданного уровня существенности (обычно 1...5%). Если неравенство (1.78) не выполняется, то, следовательно, мнения экспертов не согласуются между собой. Тогда необходимо либо увеличить число экспертов, либо применить более совершенные методы опроса в несколько туров, например, дельфийский метод [4], метод последовательных сопоставлений [4], метод парных сравнений [4, 13] и т. д.

После того, как получены согласованные мнения экспертов, их необходимо осреднить. Закон распределения оценок обычно получается резко отличным от нормального, поэтому надо использовать не средние арифметические значения, а медианы. Для их получения в табл. 1.9 ранжируются по величине параметра столбцы, как показано в табл. 1.10, т. е. для каждого варианта изделия оценки экспертов располагаются в порядке возрастания. При нечетном числе экспертов медианой будет оценка эксперта, оказавшаяся в середине ряда. При четном числе берется среднее арифметическое

Таблица 1.10

	Вариант изделия						
	1	2	3	4	5	6	7
Оценки экспертов после ранжирования	4,5	9	9,5	6	2,5	5	5
	6	10	9,9	6	2,5	6	6
	6	10	10	6	3	7,5	6,5
	6	12	10	7,5	3	8	7
	6	12	12	8,5	3	8,3	7,9
	7	12	12	8,6	3	8,5	8
	7	14,1	12,5	8,7	3	8,5	8,1
	8,5	15	15	9	3	9	9
	9	15	15	9	3	9	9,6
	9,5	17	15	9	4	9	10
	9,8	18	16	9	4	9	10
	11	20	16,3	9	4	9,5	10,5
	11,2	20	18	9,8	4,1	10	11
	12	25	24	9,8	4,5	10	12
	12	25	26	10	5	11	16
	12	40	35	12	5	11	30
Оценка по медиане	8,75	15	15	9	3	9	9,3
Средняя арифметическая оценка	8,6	17,1	16	8,7	3,5	8,7	9,9

значение двух оценок из середины ряда. Полученное значение медианы принимается за наиболее вероятную оценку параметра и используется в дальнейших расчетах.

Если исследуемые варианты изделия отличались значениями одного из варьируемых параметров, то зависимость, связывающая его с параметром технологичности, определяется обычным регрессионным анализом. Если варианты изделия были получены при полном или дробном факторном эксперименте (см. разд. 1.5), то значения медиан считаются результатами опытов. Они заносятся в расширенную матрицу планирования (см. табл. 1.4) и дальнейшая обработка ведется как обычно. Если каждый опыт надо повторять два или три раза, то соответственно нужны две или три группы экспертов. Несмотря на простоту метода, при хорошо подобранной

группе экспертов зависимости получаются достаточно точными, и они пригодны для включения в математическую модель изделия.

В тех случаях, когда не удастся подобрать группу экспертов примерно равной квалификации, можно использовать весовые коэффициенты, оценивающие компетентность экспертов. Разработаны соответствующие таблицы [4].

Аналогичным путем можно получить зависимости (передаточные модели), оценивающие влияние и других трудно формализуемых факторов, таких например, как внешний вид изделия и т. п.

Пример получения математической модели по экспертным оценкам выполнен для изделия, имевшего семь различных вариантов конструкции. Группа экспертов состояла из 16 человек. Оценки технологичности вариантов изделия в условных единицах приведены в табл. 1.8, а ранги оценок — в табл. 1.9. Средняя сумма рангов по формуле (1.76)

$$a_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \cdot 16(7+1) = 64.$$

Сумма квадратов отклонения $s = \sum_{j=1}^7 \Delta a_j^2 = 5768$. Коэффициент конкордации по формуле (1.77) $w = \frac{5768}{\frac{1}{12} \cdot 16^2 (7^3 - 7)} = 0,805$, а с уче-

том связанных рангов $w = 0,818$. По формуле (1.78) $\chi^2 = 16(7-1) \times 0,805 = 77,28$. Табличное значение [13] при числе степеней свободы $f = 6$ и уровнях существенности $P = 0,05$ и $P = 0,01$ $\chi_{7,0,05}^2 = 12,592 < \chi^2$; $\chi_{7,0,01}^2 = 16,812 < \chi^2$. Следовательно, степень согласованности мнений экспертов можно считать вполне достаточной.

В табл. 1.10 приведены оценки экспертов из табл. 1.8, ранжированные для каждого варианта. В середине выделены две средние оценки (так как число экспертов четное), по которым определяется значение медианы. Для сравнения приведены средние арифметические значения оценок. Как указывалось выше, они менее надежны, чем оценки по медиане.

Все семь сравниваемых вариантов изделия отличались в основном по значению одного параметра x : $x_1 = 32$, $y_1 = 8,75$; $x_2 = 8$, $y_2 = 15$; $x_3 = 12$, $y_3 = 15$; $x_4 = 28$, $y_4 = 9$; $x_5 = 36$, $y_5 = 3$; $x_6 = 30$, $y_6 = 9$; $x_7 = 26$, $y_7 = 9,3$.

Зависимость оценки y от параметра x хорошо аппроксимируется квадратной параболой $y = 14,03 + 0,249x - 0,0147x^2$. Она связывает стоимость производства изделия y с одним из параметров конструкции x и может быть включена в математическую модель изделия.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТИРУЕМОГО ИЗДЕЛИЯ

2.1. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

Предложено большое количество методов решения задачи нелинейной оптимизации (см. разд. 0.1), но лишь немногие из них работоспособны при очень сложном характере функции цели и области поиска, которые обычно встречаются при оптимизации газотурбинных двигателей и их узлов. Хорошие результаты дало применение методов статистического (случайного) поиска. В сравнительно простых случаях они уступают в быстродействии градиентным методам, но лучшие из них более надежны и позволяют получить решение в самых сложных ситуациях.

Рассмотрим один из наиболее сложных алгоритмов статистического поиска. В нем предусмотрено 14 способов получения очередной точки для вычисления функции цели. Каждый из способов фактически является самостоятельным алгоритмом. Переход от одного алгоритма к другому осуществляется автоматически в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе поиска. Он выполняется программой-диспетчером с помощью системы признаков.

При поиске постоянно хранится и используется информация о пяти точках, которые имеют условные названия: текущая, лучшая, старая, запасная и оптимальная. Информация содержит координаты точки, т. е. искомые переменные, значения всех функциональных ограничений (границ II рода) и значение функции цели в этой точке. В «текущей» точке хранится информация, рассчитываемая на данном шаге поиска. В «лучшую» точку переписывается информация из «текущей» после каждого удачного шага, т. е. шага, при котором значение функции цели получилось меньше, чем в «лучшей» точке (при поиске минимума). Предварительно информация из «лучшей» переписывается в «старую» точку. При неудачном шаге, т. е. когда значение функции цели ухудшилось, информация из «текущей» переписывается в «старую» точку. Перед каждой записью в «старую» точку находящаяся в ней информация сравнивается с содержанием «запасной» точки и, если значение функции цели в «старой» оказывается лучше, то вся информация переписывается в «запасную» точку. В «оптимальной» точке хранится информация о лучшей из точек, найденных на предыдущем этапе поиска. Новый этап начинается после каждого овражного шага. Такая система точек является довольно компактной и дает достаточное представление о характере поверхности отклика в исследуемом участке обла-

сти поиска. Она позволила разработать достаточно простые и эффективные алгоритмы.

Настройка алгоритмов производится при помощи констант поиска $B_1 \dots B_{11}$, задаваемых в исходной информации.

2.1.1. Начальная точка (алгоритмы 1 и 2)

Предусмотрены два способа получения границ I рода ($x_{i \max}$ и $x_{i \min}$) и индивидуальных масштабов m_i . Они либо вводятся с исходной информацией перед началом работы программы, либо рассчитываются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_{i \max} &= x_{Ti} (1 + B_5); \\ x_{i \min} &= x_{Ti} (1 - B_5); \\ m_i &= 0,1, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где B_5 — константа поиска. Обычно $B_5 = 0,05 \dots 0,3$. Формулы (2.1) удобно использовать при повторных оптимизациях, выполняемых для уточнения значений оптимальных параметров, которые в данном случае являются заданной точкой. Уменьшая коэффициент B_5 , можно сузить область поиска до желаемого предела.

При использовании алгоритма 1 вводятся координаты x_{Ti} ($i = 1, 2, \dots, n$) заданной начальной точки поиска, которые находятся в массиве исходной информации. Они переписываются в массив «текущей» точки, для которой рассчитываются значения функции цели и границ II рода. Вся полученная информация переписывается в массив «лучшей» точки, из которой начинается поиск. Если «лучшая» точка оказалась внутри области поиска, то координаты «текущей» точки для следующего шага рассчитываются по алгоритму 9, а если вне ее, то по алгоритму 3.

При использовании алгоритма 2 координаты заданной начальной точки не используются, а поиск начинается из случайной точки, рассчитываемой по формуле

$$x_{Ti} = x_{i \min} + \xi_{pi} (x_{i \max} - x_{i \min}), \quad (2.2)$$

где ξ_{pi} ($i = 1, 2, \dots, n$) — случайное число с равномерным законом распределения. В обоих алгоритмах предусмотрена проверка введенных массивов. Если начальная точка окажется вне границ I рода или нижняя граница окажется больше верхней, то признаку Π_{10} присваивается значение 2. Это признак аварийного останова. В различных неприемлемых ситуациях ему присваиваются разные значения и после завершения очередного шага поиска, если $\Pi_{10} \neq 0$, печатается информация о сложившейся ситуации поиска в запрограммированном объеме и расчет прекращается.

При многоэкстремальном характере функции цели оптимизация повторяется многократно из различных случайных точек, получаемых по алгоритму 2. Число повторений задается константой поиска B_{11} .

2.1.2. Поиск приемлемого решения (алгоритмы 3, 4 и 5)

Расчеты при отсутствии известной точки внутри области поиска всегда начинаются с алгоритма 3 «Случайный шаг вне области». Он выполняется по формуле

$$x_{\tau i} = x_{\pi i} + M_0 m_i (x_{i \max} - x_{i \min}) \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \Delta_l^2}}, \quad (2.3)$$

где M_0 — масштаб поиска общий, первоначально равный единице; Δ_i — приведенное приращение i -й координаты, определяемое по формуле

$$\Delta_i = K_{\pi} x_{\pi i} + (1 - K_{\pi}) \cos(\pi \xi_i), \quad (2.4)$$

где $x_{\pi i}$ — координаты вектора памяти, первоначально равные нулю; K_{π} — коэффициент поиска. Его значение в нулевом приближении определяется по формуле $K_{\pi 0} = \frac{1}{2} (K_{\pi \max} + K_{\pi \min})$.

В процессе поиска оно изменяется. Одновременно с ним или при достижении предельных значений коэффициента поиска изменяется общий масштаб поиска M_0 . Фактически эти параметры самонастраиваются в зависимости от хода поиска по формулам $K_{\pi z+1} = K_{\pi z} + B_3$; $M_{0, z+1} = M_{0z} B_1$ при удачном шаге, $K_{\pi z+1} = K_{\pi z} B_4$, $M_{0, z+1} = M_{0z} / B_2$ при неудачном шаге. Для коэффициента поиска задаются предельные значения $K_{\pi \min} = 0,3 \dots 0,5 \approx 0,4$; $K_{\pi \max} = 0,8 \dots 0,99 \approx 0,85$.

Для остальных констант рекомендуются следующие значения: $B_1 = 1,2 \dots 1,8 \approx 1,4$; $B_2 = 1,2 \dots 1,8 \approx 1,6$; $B_3 = 0,1 \dots 0,4 \approx 0,15$; $B_4 = 0,7 \dots 0,9 \approx 0,85$.

Вектор памяти служит для запоминания удачного направления поиска*. Его координаты уточняются после каждого шага z по формуле

$$(x_{\pi i})_{z+1} = a_6 (x_{\pi i})_z + (1 - a_6) \frac{x_{\pi i} - x_{c i}}{x_{i \max} - x_{i \min}}, \quad (2.5)$$

где a_6 — константа памяти, которая может задаваться в исходной информации или подсчитываться в процессе поиска. Она определяет скорость перестроения вектора памяти.

Формула (2.5) получилась одинаковой для удачного и неудачного шагов, так как при неудачном шаге информация записывается не в «лучшую», а в «старую» точку. После нескольких шагов поиска вектор памяти получает направление, близкое к направлению градиента. Комплекс $\cos(\pi \xi_i)$ введен вместо случайного числа ξ_i для того, чтобы изменить пределы его изменения: $\xi_i = 0 \dots 1$; $\cos(\pi \xi_i) = -1 \dots +1$ и обеспечить равномерный характер распре-

* Эта идея заимствована из работы А. Л. Гайдукова. «Применение случайного поиска при оптимальном проектировании». В сб.: «Прикладные задачи технической кибернетики». М., Сов. радио, 1966, с. 420—434.

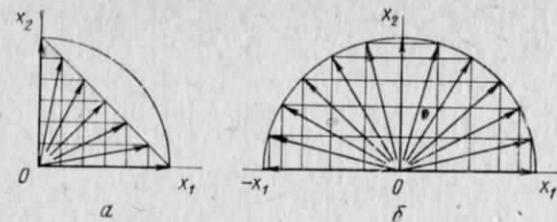


Рис. 2.1. Примеры векторов с координатами (а) — ξ и (б) — $\cos(\pi \xi_i)$

деления углов, определяющих направление вектора поиска. Это хорошо видно на рис. 2.1, где приведены примеры векторов, компоненты которых равны соответственно ξ и $\cos(\pi \xi_i)$.

Алгоритм 3 работает поочередно с алгоритмом 4 «Экстраполяция в область». В нем используются значения функциональных ограничений номера j_* в «лучшей» и «старой» точках. В данном случае j_* — это номер того ограничения, на котором был прерван расчет в модели из-за невыполнения неравенства для одной из границ II рода. Линейная экстраполяция ведется по формуле

$$x_{\tau i} = x_{\pi i} + \frac{B_7 |f_{\pi i} - f_{j_*}|}{f_{\pi j_*} - f_{c j_*}} (x_{\pi i} - x_{c i}), \quad (2.6)$$

где $B_7 = 0,1 \dots 0,3 \approx 0,2$ — константа, заданная в исходной информации для компенсации возможной погрешности линеаризации. Для экономии машинного времени расчет по модели ведется до первого неудовлетворившегося ограничения II рода j .

Если «лучшая» и «старая» точки расположены примерно на одинаковом расстоянии от границы II рода, то шаг по формуле (2.6) может оказаться очень большим. В этом случае вместо алгоритма 4 используется описанный ниже алгоритм 10 «Шаг в перпендикулярной плоскости». При использовании алгоритмов 3, 4, 10 шаг считается удачным, если он привел к увеличению номера j_* первого неудовлетворившегося ограничения в «текущей» точке по сравнению с «лучшей». При равенстве номеров сравниваются сами значения ограничений номера j_* . Если величина его уменьшилась (см. разд. 0.1), то шаг считается удачным.

В сложных ситуациях поиск по алгоритмам 3 и 4 может не привести к цели, поэтому число неудачных шагов ограничено константой B_{10} . Обычно $B_{10} \leq 10$. После этого расчет ведется методом штрафных функций (алгоритм 5). Признаку Π_1 присваивается значение, равное единице. Это означает, что расчет по математической модели на каждом шаге будет выполняться до конца независимо от невыполняющихся ограничений, из которых формируется новая функция цели:

$$F = \sum_{j=1}^m a_j f_j^2, \quad (2.7)$$

где $a_j=0$ при $f_j \geq 0$; $a_j=1$ при $f_j < 0$. Старая функция цели в формулу (2.7) не входит, так как алгоритм 5 используется только при поиске приемлемого решения, т. е. пока $F > 0$. Постоянное использование алгоритма 5 нецелесообразно, так как он менее эффективен, чем совокупность остальных алгоритмов. Поиск по вновь сформированной функции цели (2.7) ведется по алгоритмам 8 и 9, описанным ниже. Он прекращается при $F=0$. Это означает, что найдена точка в области поиска. Тогда признаку Π_1 присваивается значение нуль. Модель рассчитывается вновь со старой функцией цели. Полученная информация записывается в «лучшую» точку и начинают работать алгоритмы 8 и 9 «Поиск в области». В случае «пустой области» * поиск прекращается при уменьшении общего масштаба M_0 до заданной величины. Обычно $M_{0 \min} = \varepsilon = 10^{-4} \dots 10^{-6}$. Расчет прекращается и печатается строка «пустая область».

2.1.3. Поиск в области (алгоритмы 8 и 9)

После получения первой точки внутри области поиска засылаются нули в вектор памяти, чтобы опыт, накопленный вне области, не мешал поиску внутри области и начинает работать алгоритм 9 «случайный шаг в области». Он использует те же формулы (2.3), (2.4), (2.5), что и алгоритм 3, но организация вычислений другая и его пришлось выделить в отдельный алгоритм. Каждый шаг [см. формулу (2.4)] образуется из двух составляющих: детерминированной $K_n x_{pi}$, которая пропорциональна компонентам вектора памяти, и небольшой случайной $(1-K_n) \cos(\pi \xi_i)$. При удачных шагах уменьшается доля случайной составляющей и увеличивается общий масштаб поиска. При неудачных шагах наоборот. Благодаря этому алгоритм получился самонастраивающимся или, как чаще говорят, адаптивным. Известно, что адаптивные алгоритмы более эффективны при недостаточной априорной информации о характере поверхности отклика, что обычно наблюдается при оптимизации реальных изделий.

Если шаги удачные, то постоянно используется алгоритм 9, который является наиболее употребительным. После неудачного шага используется алгоритм 8 «Обратный шаг». Перед обратным шагом остается неизменным вектор памяти и восстанавливается датчик случайных чисел так, чтобы получить те же самые случайные числа, что и при предыдущем прямом шаге. Детерминированная составляющая шага остается неизменной, а в случайной знаке изменяются на обратные, т. е.

$$\Delta_i = K_n x_{pi} - (1 - K_n) \cos(\pi \xi_i). \quad (2.8)$$

* Область поиска называется пустой, если она не содержит ни одной точки, т. е. если невозможно подобрать значения переменных, удовлетворяющих одновременно всем ограничениям.

Независимо от результатов обратного шага следующий шаг делается по алгоритму 9. При большом числе следующих один за другим неудачных шагов есть основание подозревать овражную ситуацию, поэтому если оно превысит константу $B_9 = \sqrt{n}$, то начинают работать овражные алгоритмы.

При выходе очередной точки за границы I рода координаты ее пересчитываются так, чтобы она оказалась внутри области с некоторым запасом, а направление вектора поиска не изменилось. Используются формулы линейной интерполяции

$$\lambda'_i = (1 - B_7) \frac{x_{l \min} - x_{li}}{x_{\tau i} - x_{li}}; \quad \lambda''_i = (1 - B_7) \frac{x_{l \max} - x_{li}}{x_{\tau i} - x_{li}}; \\ x_{\tau i} := x_{li} - (1 - \lambda_{\min})(x_{\tau i} - x_{li}), \quad (2.9)$$

где $\lambda_{\min} = \min(\lambda'_i \vee \lambda''_i \forall i)$.

При выходе точки за границы II рода начинают работать алгоритмы «Поиск вдоль границы».

2.1.4. Поиск вдоль границы (алгоритмы 6, 7 и 10)

Если «лучшая» точка находится в области поиска, а «текущая» на одном из шагов вышла за границу II рода (номер j_*), то начинает работать алгоритм 6 «Интерполяция в область». Она осуществляется с запасом, определяемым константой $B_7 = 0,1 \dots 0,3 \approx 0,2$, по формуле линейной интерполяции

$$x_{\tau i} = x_{li} + \frac{B_7 f_{l \min} - f_{lj_*}}{f_{\tau j_*} - f_{lj_*}}, \quad (2.10)$$

где $f_{\min} = f_{\tau j_*}$ при $|f_{\tau j_*}| \leq |f_{lj_*}|$; $f_{\min} = f_{lj_*}$ при $|f_{\tau j_*}| > |f_{lj_*}|$.

При существенной нелинейности ограничения j_* может оказаться, что новая точка тоже будет за границей II рода. Повторные расчеты по алгоритму 6 в этом случае мало эффективны и шаг уменьшается по алгоритму 7 «Деление шага пополам»:

$$x_{\tau i} = \frac{1}{2} (x_{li} - x_{ci}). \quad (2.11)$$

Это деление может повторяться неоднократно вплоть до получения «текущей» точки внутри области.

После получения такой точки по алгоритму 5 или 7 работает алгоритм 10 «Шаг в перпендикулярной плоскости». Это случайный шаг в плоскости, проходящей через «лучшую» точку перпендикулярно вектору, соединяющему «лучшую» и «старую» точки. Он вы-

полняется по формулам

$$x'_{\tau i} = x_{\lambda i} + M_0 m_i (x_{i \max} - x_{i \min}) \cos(\pi \xi_i),$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{\lambda i} - x_{c i})(x_{\tau i} - x_{\lambda i})}{\sum_{i=1}^n (x_{\lambda i} - x_{c i})^2};$$

$$x_{\tau i} = x'_{\tau i} - \lambda (x_{\lambda i} - x_{c i}). \quad (2.12)$$

В результате последовательного применения алгоритмов 6, 7 и 10 формируется вектор памяти, обеспечивающий поиск, направленный примерно вдоль границы. При очень крутых склонах поверхности отклика вблизи границы траекторию поиска будет все время прижимать к границе области поиска, большинство точек будет получаться за границей II рода и движение вдоль нее будет затруднено. В этом случае начинают работать алгоритмы «Овражного поиска».

2.1.5. Овражный поиск (алгоритмы 11, 12 и 13)

Овражный поиск начинается со «Спуска на дно оврага», * который осуществляется вдоль прямой, проходящей через «лучшую» и «запасную» точки. Этот одномерный поиск выполняется по методу Фибоначчи, рассчитанному на пять шагов. Так как обе точки могут быть расположены на одном склоне «оврага», то первый шаг одномерного поиска делается вне отрезка прямой за «лучшую» точку по алгоритму 11:

$$x_{\tau i} = x_{\lambda i} - \frac{3 + \varepsilon}{5 - \varepsilon} (x_{\lambda i} - x_{\lambda i}), \quad (2.13)$$

где ε — заданная точность поиска.

Если этот шаг окажется удачным, то значит, что имеется возможность улучшения функции цели и обращение к «овражным» алгоритмам было преждевременным. Поиск продолжается по алгоритму 9. В овражной ситуации шаг по алгоритму II получается неудачным и остальные четыре шага метода Фибоначчи выполняются по алгоритму 12:

$$x_{\tau i} = x_{c i} - x_{\lambda i} + x_{\lambda i}. \quad (2.14)$$

После каждого шага полученная информация записывается в «лучшую», «старую» и «запасную» точки. После завершения всех четырех шагов «лучшая» точка оказывается на дне оврага. В результате пяти шагов по методу Фибоначчи интервал неопределенности, оценивающий точность нахождения дна оврага, уменьшается примерно в восемь раз.

Информация о точке, найденной на дне оврага, записывается в «оптимальную» точку, делается случайный шаг по алгоритму 9, по-

лученная точка независимо от результатов шага записывается в «лучшую» и поиск продолжается, как обычно. После второго обращения к овражным алгоритмам и получения второй точки на дне оврага она сравнивается с «оптимальной» и наилучшая из них записывается в «оптимальную», а вторая в «лучшую». Через эти две точки проводится вектор памяти и делается шаг * по алгоритму 13 «овражный шаг»:

$$x_{\tau i} = x_{o i} + a_7 x_{n i} (x_{i \max} - x_{i \min}). \quad (2.15)$$

Константа a_7 определяет длину овражного шага. При первом овражном шаге она подбирается так, чтобы шаг был равен расстоянию между точками на дне оврага. Удачные овражные шаги ведут к увеличению этой константы по формуле $a_{7, z+1} = a_{7z} B_1$, а следовательно, к увеличению длины последующих овражных шагов. Неудачные приводят к уменьшению ее величины $a_{7, z+1} = a_{7z} / B_2$. После каждого овражного шага производится пересчет индивидуальных масштабов m_i , которые увеличиваются для сильно изменяющихся переменных и уменьшаются для слабо изменяющихся. Неоднократное применение пересчета позволяет ликвидировать «овраги», направленные примерно вдоль осей координат. Такие овраги являются наиболее распространенными в реальных задачах.

2.1.6. Смена функции цели (алгоритм 14)

Этот алгоритм используется при наличии векторной функции цели для того, чтобы минимизировать (максимизировать) одновременно несколько параметров. Например, при оптимизации проточной части осевого компрессора желательно максимизировать на основных режимах к. п. д. и запас по помпажу, а также минимизировать массу и габаритные размеры компрессора. Каждый из этих параметров рассматривается в качестве частной (скалярной) функции цели, а все вместе они образуют векторную функцию цели:

$$F(X) = \{F_1(X), F_2(X), \dots, F_l(X)\}. \quad (2.16)$$

Такие задачи называются многокритериальными (см. разд. 0.1). Решение их сводится к последовательности задач со скалярной функцией цели.

Предварительно компоненты вектора функции цели $F(X)$ ранжируются по степени важности, т. е. первой ставится наиболее важная, затем вторая по значению и т. д. Последняя $F_l(X)$ является наименее важной. Задаются допустимые отклонения каждой компоненты вектора по оптимуму (уступки **). В алгоритме 14 организуется повторение оптимизации l раз с разными функциями цели от $F_1(X)$ до $F_l(X)$. После завершения каждой k -й оптимизации

* Эти идеи заимствованы из работы: И. М. Гельфанд и др. Метод оврагов в задачах рентгеноструктурного анализа. М., Наука, 1966. 76 с.

** Метод смены функции цели поэтому часто называют методом последовательных уступок.

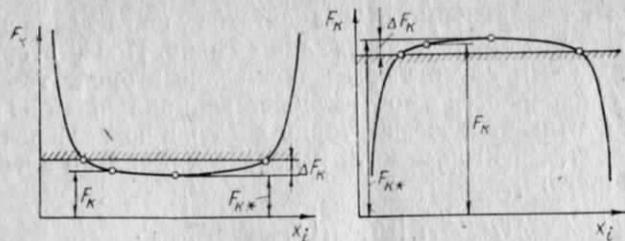


Рис. 2.2. Схема образования дополнительных ограничений II рода при смене функции цели

формируется (рис. 2.2) дополнительное ограничение II рода по формуле

$$f_{m+k}(X) = (F_{k*} + \Delta F_k) - F_k(X) \geq 0 \quad (2.17)$$

при поиске минимума, или

$$f_{m+k}(X) = F_k(X) - (F_{k*} - \Delta F_k) \geq 0 \quad (2.18)$$

при поиске максимума, где F_{k*} — найденное значение оптимума по k -й функции цели; ΔF_k — заданное для нее значение уступки.

Все последующие оптимизации ведутся с этими дополнительными ограничениями. Перед каждой из них информация из «оптимальной» точки переписывается в «текущую».

Этот алгоритм можно применять при небольшом числе компонент в векторной функции цели ($l \leq 3 \dots 4$), существенно различающихся по степени важности. В остальных случаях следует использовать различные методы свертки векторной функции цели [8, 27]. Дополнительные алгоритмы для этого не нужны. Изменения вносятся только в математическую модель. При расчете вектора результатов Z добавляется одна из формул свертки, которая обеспечивает переход от векторной к скалярной функции цели. Оптимизация по ней ведется обычным порядком.

2.1.7. Тестовые задачи

Работоспособность алгоритма для наглядности проверялась на функции двух переменных (тест № 1), представляющей собой зависимость к.п.д. радиально-осевой газовой турбины от основных параметров проточной части при постоянных скоростных коэффициентах:

$$\left. \begin{aligned} F &= 2a_1 x_1 x_4 \sqrt{1-x_2} - 2x_1^2 x_3^2 + 2a_2 x_1 x_3 \sqrt{1-f}; \\ f &= x_2 + x_1^2 x_3^2 - 2a_1 x_1 x_4 \sqrt{1-x_2} + a_1^2 (1-x_2) \left(1 - \frac{1-x_4^2}{a_2^2 a_3^2}\right) \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где $F = \eta_u$ — окружной к. п. д. турбины; $a_1 = \varphi$ — скоростной коэффициент соплового аппарата; $a_2 = \psi$ — скоростной коэффициент рабочего колеса; $a_3 = c_{1a}/c_{2a}$ — отношение осевых скоростей; $x_1 = u_1/c_{ад}$ — отношение окружной скорости к адиа-

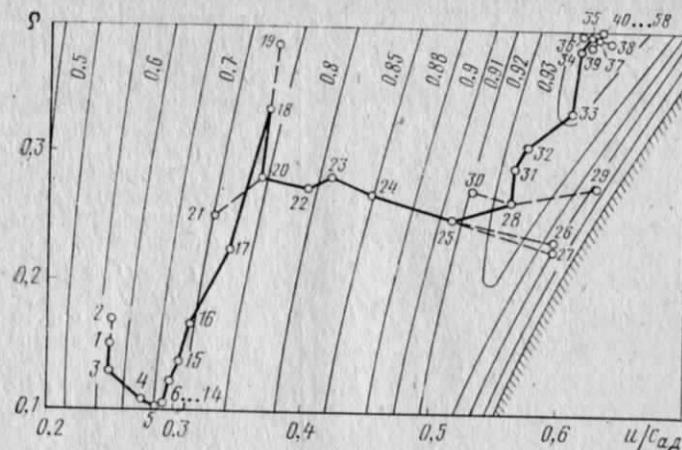


Рис. 2.3. Траектория поиска для тестовой задачи «К. п. д. турбины»

батической; $x_2 = \rho$ — степень реактивности; $x_3 = \mu = 0.5$ — степень радиальности, т. е. отношение среднего диаметра на выходе из рабочего колеса к среднему диаметру на входе в него; $x_4 = \cos \alpha_1$ — косинус выходного угла соплового аппарата.

Варирировались две переменные x_1 и x_2 в пределах $0.1 < \rho < 0.4$, $0.2 < u_1/c_{ад} < 0.7$. Ограничение II рода $f > 0$. Максимум к. п. д. устойчиво обнаруживался через 15...60 шагов поиска. На рис. 2.3 показана траектория поиска для одного из самых неблагоприятных случаев, который вызван случайными обстоятельствами. Начальная точка (1) была взята далеко от оптимума. Первый случайный шаг (шаг 1—2) оказался направленным примерно вдоль линии уровня. Граница I рода ($\rho = 0.1$) помешала развороту траектории поиска (шаги 4...14) в направлении градиента. Тем не менее оптимум (точка 58) найден с заданной точностью через 58 шагов. Пунктиром показаны неудачные шаги. Оптимум получился равным 0,9355 в точке с координатами $x_1 = 0,6408$ и $x_2 = 0,4000$.

Работоспособность алгоритма при большом числе переменных проверялась на тесте № 2 «Гиперпараболоид»:

$$F(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - 0,01i - 10)^2, \quad (2.20)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Границы I рода $0 < x_i < 20$ $i=1, 2, \dots, n$. Границы II рода отсутствовали. Начальная точка поиска задана: $x_i = 14$ $i=1, 2, \dots, n$. Положение точки минимума $F(X) = 0$ очевидно, $x_i = 10 + 0,01i$ $i=1, 2, \dots, n$. Линия равного уровня — гиперокружности. Этот тест удобен тем, что ось симметрии гиперпараболоида не проходит через начало координат и значения переменных x_i в точке оптимума различны. Известное решение позволяет выявлять случаи преждевременного прекращения поиска, которые довольно часто встречаются при использовании статистических методов. Точность решения была задана: $\epsilon = 0,0001$. Траектория поиска при двух переменных показана на рис. 2.4. Решалась серия задач, в каждой из которых число переменных n было в два раза больше, чем в предыдущей. На ЭЦВМ типа * ЕС-1022 удалось решить задачи с $n=2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512$. При попытке решения с $n=1024$ оказалось, что машинное время становится нереальным. Объем оперативного запоминающего устройства в ЭЦВМ

* На ЭЦВМ типа М-222 удалось решить эту задачу только с $n=128$ из-за нехватки объема оперативного запоминающего устройства.

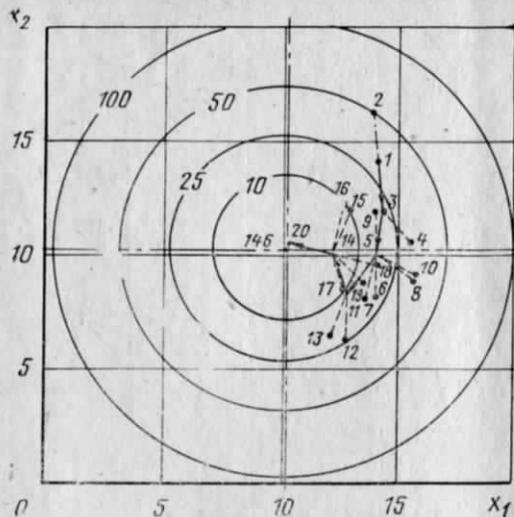


Рис. 2.4. Траектория поиска для тестовой задачи «Гиперпараболоид» при $n=2$

Границы I рода: $-2 < x_1 < 2; -1 < x_2 < 3.5$. Начальная точка поиска $x_1 = -1.2; x_2 = 1$. Минимум $F(X) = 0$ находится в точке с координатами $x_1 = x_2 = 1$. Траектория поиска изображена на рис. 2.7, а число шагов поиска приведено в табл. 2.1., где для сравнения даны числа шагов, необходимых при поиске другими наиболее распространенными алгоритмами, взятые из работы В. В. Захарова*. Для данной тестовой функции предлагаемый алгоритм оказался на уровне лучших алгоритмов других авторов, хотя он и является более универсальным.

Работоспособность алгоритма при оптимизации с многоэкстремальной функцией цели проверялась на общепринятом тесте № 4:

$$F(X) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(18x_1) - \cos(18x_2) \quad (2.23)$$

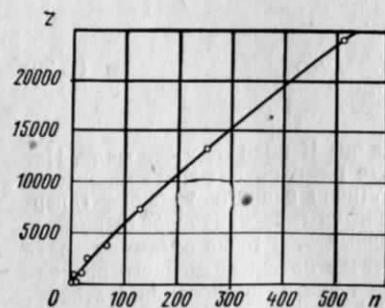


Рис. 2.5. Зависимость числа шагов поиска от числа переменных при оптимизации тестовой задачи «Гиперпараболоид»

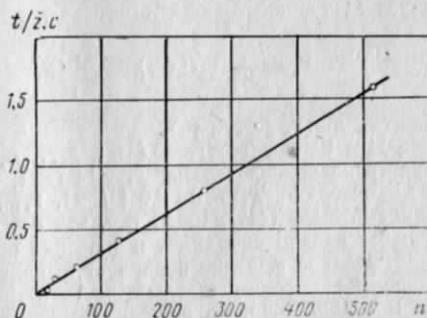


Рис. 2.6. Удельное время работы алгоритма поиска на ЭЦВМ типа ЕС-1022, т. е. время, приходящееся на один шаг поиска, от числа переменных

минимального комплекта (128 кбайт) был достаточен для размещения задачи с $n=2190$. Потребное число шагов поиска в этих задачах показано на рис. 2.5. Зависимость плавная и укладывается в пределы $z = (45 \dots 70)n$. Машинное время, необходимое для решения задач подобного типа, можно примерно оценить по формуле

$$t = z(t_a/z + t_m), \quad (2.21)$$

где t_m — время одного просчета модели; t_a — время работы алгоритма.

Зависимость t_a/z от числа переменных линейная, как показано на рис. 2.6.

Работоспособность алгоритма в овражной ситуации (тест № 3) проверялась на функции Розенброка:

$$F(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2. \quad (2.22)$$

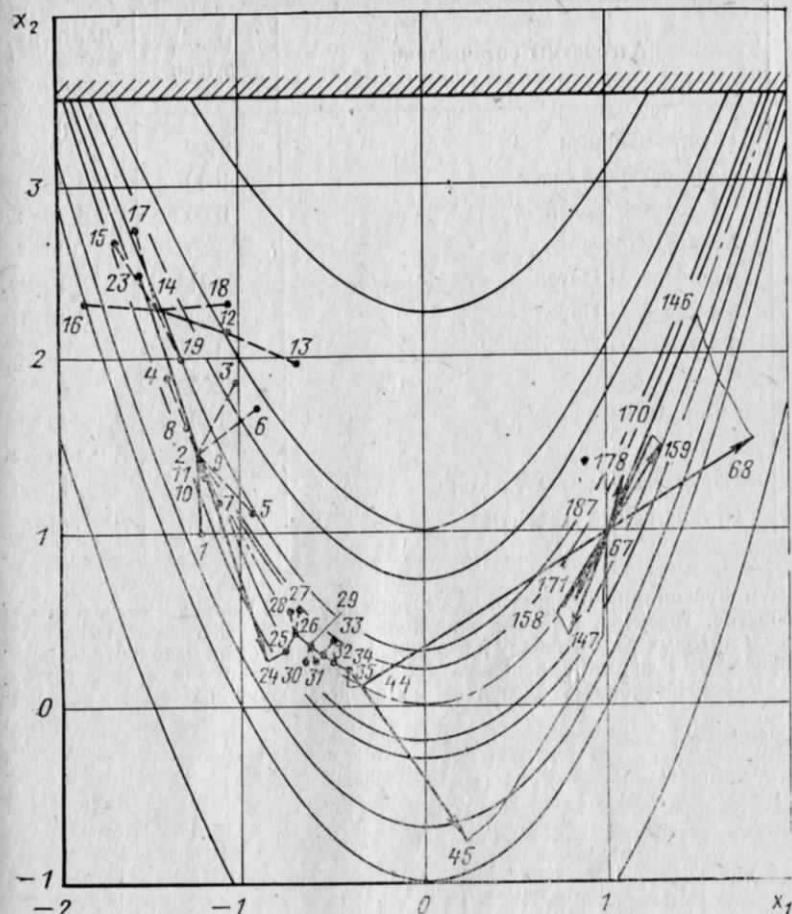


Рис. 2.7. Траектория поиска для тестовой задачи «Функция Розенброка»

Глобальный минимум этой функции находится в точке с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. Поиск осуществлялся в области, определяемой ограничениями только I рода: $-1 < x_1 < 1; -1 < x_2 < 1$. Внутри нее поверхность отклика имеет 24 локальных минимума (кроме глобального) и 10 пересекающихся оврагов. Константа поиска B_{11} была задана равной 9, т. е. поиск начинался из девяти различных случайных точек. Этого оказалось достаточно, чтобы глобальный минимум находился устойчиво. Число шагов поиска равнялось 1461.

Работоспособность алгоритма при сложном характере области поиска проверялась (тест № 5) на функции № 4, которая приведена в книге Д. Химмельблау [28]. Область поиска определяется границами I и II рода:

$$\begin{aligned} f_5 &= x_1 x_2 - 700 > 0; & f_6 &= 75 - x_1 > 0; \\ f_7 &= 65 - x_2 > 0; & f_8 &= x_2 - 0,008 x_1^2 > 0; \\ f_9 &= (x_2 - 50)^2 - 5(x_1 - 55) > 0; \\ f_{10} &= x_1 - 54 > 0. \end{aligned}$$

* Захаров В. В. Десять распространенных тестовых функций для методов оптимизации. Рига, Автоматика и вычислительная техника, 1974, № 6, с. 41—45.

Таблица 2.1

№ по пор.	Алгоритмы оптимизации	Число шагов	Достигнутые значения функции цели
1	Гаусса—Зейделя	2400	$3 \cdot 10^{-2}$
2	Наискорейший спуск	1800	$5 \cdot 10^{-2}$
3	Случайный поиск	1800	$6 \cdot 10^{-4}$
4	Хука—Дживза	250	10^{-8}
5	Флетчера — Пауэлла	231	10^{-12}
6	Флетчера — Пауэлла	208	10^{-11}
7	Флетчера — Пауэлла	108	10^{-8}
8	Розенброка	200	10^{-5}
9	Симплекс-метод	200	10^{-8}
10	Стьюарта	163	10^{-12}
11	Параллельных касательных	151	10^{-10}
12	Предлагаемый алгоритм	187	$7 \cdot 10^{-5}$

Максимум функции, находящийся на пересечении двух границ I рода, был найден за 217 шагов. Траектория поиска показана на рис. 2.8. Интересно отметить, что из 8 рассмотренных Химмельблау алгоритмов, которые были разработаны ведущими зарубежными фирмами половина оказалась неработоспособной в этих задачах. Работоспособность алгоритма со сменой функции цели проверялась

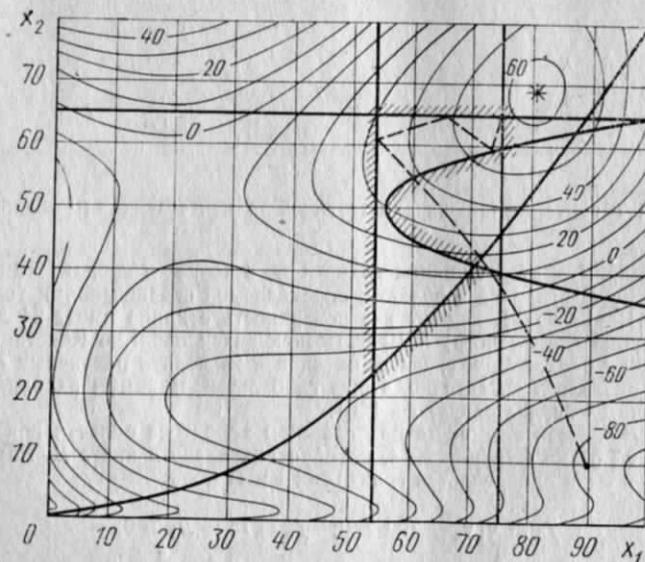


Рис. 2.8. Траектория поиска для тестовой задачи «Функция Химмельблау»

из той же задачи «гиперпараболоид» [см. формулу (2.20)], но при векторной функции цели [см. формулу (2.16)], в которой $n=2$, $l=3$ (тест № 6),

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^2 (x_i - 0,01i - 10)^2;$$

$$F_2(X) = x_2; \quad F_3(X) = x_1.$$

Причем $F_1(X_{opt}) = \min F_1(X)$; $F_2(X_{opt}) = \min F_2(X)$;

$$F_3(X_{opt}) = \max F_3(X).$$

Поверхность отклика с найденными точками оптимума показана на рис. 2.9. Поиск при первой оптимизации ($k=1$) начинался в точке с координатами $x_1=14$ и $x_2=14$ за пределами показанной поверхности отклика. На одном из промежуточных шагов он попадал в точку 0, а от нее продолжался до минимума по $F(X)$ в точке 1, где $x_1=9,99987$, $x_2=9,99969$ и $F_1(X)=F_{1*}=0,000001$. Была назначена уступка $\Delta F_1=4$, по которой определялась граница II рода $f_{m+k}(X)=f_1(X)=4-F_1(X) > 0$. При второй оптимизации ($k=2$) минимизировалась $F_2(X)$. Оптимум был найден на границе II рода в точке 2, где $x_1=10,00290$, $x_2=8,00002$, $F_1(X)=3,99994$, $F_2(X)=-F_{2*}=-8,00002$. Уступка по этой функции цели была назначена равной $\Delta F_2=1$. Соответствующая граница II рода

$$f_2(X) = 9,00002 - F_2(X) > 0.$$

Область поиска с границами $f_1(X)$ и $f_2(X)$ выделена на рис. 2.9 жирными линиями. В ней искался максимум по $F_3(X)$ и был найден в точке 3, где $x_1=11,73105$, $x_2=8,99996$, $F_1(X)=3,99928$, $F_2(X)=8,99996$, $F_3(X)=F_{3*}=11,73105$. На все три оптимизации было израсходовано 1336 шагов. Формирование границ II рода и смена функций цели осуществлялись автоматически без вмешательства оператора. Величины уступок были заданы априорно в исходной информации. Эти 6 тестовых задач соответствуют наиболее часто встречающимся поверхностям отклика при реальной оптимизации, поэтому есть надежда, что данный алгоритм окажется работоспособным при решении любых задач оптимизации.

2.2. ГАЗОТУРБИННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ

Авиационный газотурбинный двигатель нельзя оптимизировать в отрыве от самолета, но совместное использование математических моделей двигателя и самолета при оптимизации вызывает значительные трудности из-за их сложности и громоздкости. Возможный подход к такой оптимизации описан в гл. 4. При предварительной оптимизации можно использовать более простые методы, в которых влияние самолета обычно в той или иной мере учитывается при выборе функции цели. Например, могут быть использованы следующие функции цели:

- 1) суммарная масса двигателей и запаса топлива на самолете;
- 2) эффективная удельная масса;
- 3) взлетная масса самолета;
- 4) себестоимость тоннокилометра;

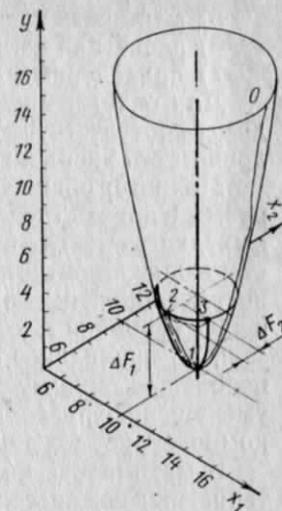


Рис. 2.9. Поверхность отклика тестовой задачи «Гиперпараболоид» с границами II рода при смене функций цели

- 5) стоимость часа эксплуатации;
- 6) расчетная дальность полета;
- 7) приведенные затраты за период эксплуатации и т. д.

Для оптимизации параметров с этими функциями цели необходимы соответствующие данные по проектируемому самолету и условиям его эксплуатации.

Можно в общих чертах наметить целесообразный набор варьируемых параметров и ограничений. При оптимизации двухконтурных двигателей обязательным варьируемым параметром является степень двухконтурности, которая существенно влияет на экономичность, габаритные размеры и массу двигателя. Температура газа перед турбиной часто принимается равной максимально допустимой, но правильнее ее варьировать, так как может оказаться, что небольшое снижение температуры газа приведет к существенному уменьшению расхода охлаждающего воздуха, которое с избытком компенсирует ухудшение параметров двигателя.

В математической модели ГТД используются эталонные характеристики компрессоров и турбин, отнесенные к номинальному режиму, поэтому надо варьировать его параметрами. Для каждого из компрессоров, кроме вентилятора, варьируется степень повышения давления на номинальном режиме $\pi_{к.ном}^*$, для каждого из валов — частота вращения $n_{ном}$ и в целом для двигателя варьируется расход воздуха через входное сечение на номинальном режиме $G_{ном}$. Остальные параметры определяются из условия нормальной работы камеры смешения ($\pi_{к.ном}^*$ — вентилятора) и необходимой мощности для привода компрессоров ($\pi_{твд}^*$ и $\pi_{тнд}^*$). Необходимо учитывать влияние параметров номинального режима на характеристики и в первую очередь $\pi_{к.ном}^*$ в компрессорах. Удобно использовать формулы для поправочных коэффициентов к характеристикам:

$$K_{\pi} = 1 + (b_{11} + b_{12}\pi_{к.ном}^*)(1 - \bar{G}) + (b_{13} + b_{14}\pi_{к.ном}^*)(1 - n) + (b_{15} + b_{16}\pi_{к.ном}^*)(1 - \bar{G}n), \quad (2.24)$$

$$K_{\eta} = 1 + (b_{21} + b_{22}\pi_{к.ном}^*)(1 - \bar{G}) + (b_{23} + b_{24}\pi_{к.ном}^*)(1 - n) + (b_{25} + b_{26}\pi_{к.ном}^*)(1 - \bar{G}n). \quad (2.25)$$

Коэффициенты этих формул определяются при проектировании компрессоров на разные степени повышения давления или при обработке статистических данных по характеристикам существующих компрессоров. Окончательные значения параметров компрессора определяются по формулам

$$\pi_k^* = \pi_{к.ном}^* \bar{\pi} K_{\pi}, \quad (2.26)$$

$$\eta_k^* = \eta_{к.ном}^* \bar{\eta} K_{\eta}. \quad (2.27)$$

В более совершенных методах оптимизации при формировании функции цели используются параметры двигателя на нескольких

режимах (z), поэтому можно варьировать параметрами этих режимов. Вариация сводится к выбору различных точек на линиях совместной работы турбины и компрессора. Следовательно, надо варьировать частотами вращения $\bar{n}_{нд1}, \bar{n}_{нд2}, \dots, \bar{n}_{ндz}$ и $\bar{n}_{вд1}, \bar{n}_{вд2}, \dots, \bar{n}_{вдz}$. В частном случае значения их могут быть взяты с прототипа и не варьироваться.

Основные ограничения при оптимизации накладываются на запасы устойчивой работы. Вся информация, необходимая для расчета значений функции цели и ограничений, содержится в массиве результатов. Наиболее интересные параметры из него выводятся на печать. Пример печати дроссельной характеристики для двухвального ГТД приведен в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ режима	$\bar{n}_{нд}$, МИН ⁻¹	$\bar{n}_{вд}$, МИН ⁻¹	R , кН	C_{y1} , кг/(Н·с)	F_c , м ²	m	$G_{вз}$, кг/с	$\pi_{кз}^*$	$\pi_{в}^*$	$\eta_{в}^*$	$\eta_{кнд}^*$	$\eta_{квд}^*$	$T_{г}^*$, К	$K_{y \text{ min}}$
1	5191,1	7060,0	85,57	57,84	0,67	1,05	206,88	10,12	1,85	0,797	0,848	0,846	1102,1	1,28
2	4949,9	6680,0	71,28	56,76	0,67	1,09	192,29	8,90	1,71	0,768	0,866	0,860	1027,4	1,31
3	4854,5	6480,0	65,52	56,64	0,67	1,13	185,22	8,32	1,66	0,758	0,871	0,863	1003,2	1,29

2.3. ГАЗОВАЯ ТУРБИНА

При использовании универсальной математической модели газовой турбины (см. разд. 1.2) для оптимизации параметров в нее должен быть добавлен подготовительный модуль. Необходимость его объясняется следующим. В многоступенчатой газовой турбине варьирование диаметрами проточной части и высотами лопаток при оптимизации без соответствующих ограничений приводит к ступенчатой проточной части. В реальной турбине каждая ступенька в проточной части вызывает существенное увеличение потерь, а в математической модели турбины потери из-за них не увеличиваются. Можно добавить в модель эмпирические формулы, учитывающие дополнительные потери, но проще аппроксимировать обводы проточной части плавными кривыми, например параболами. Схема проточной части турбины показана на рис. 2.10. Ее длина определяется по формуле

$$L = \sum_1^z (b_{шса} + \Delta b_{са} + b_{шрк} + \Delta b_{рк}),$$

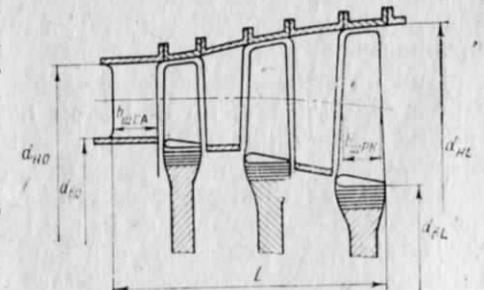


Рис. 2.10. Схема проточной части многоступенчатой газовой турбины

где $\Delta b_{СА}$, $\Delta b_{РК}$ — осевые зазоры за сопловым аппаратом и рабочим колесом.

Наружный и внутренний диаметры проточной части аппроксимируются параболлами:

$$d_n = d_{n0} + \gamma_{n0}x + \frac{\gamma_{nL} - \gamma_{n0}}{2L} x^2, \quad (2.28)$$

$$d_b = d_{b0} + \gamma_{b0}x + \frac{\gamma_{bL} - \gamma_{b0}}{2L} x^2, \quad (2.29)$$

где x — координата, направленная вдоль оси турбины. В уже изготовленных турбинах не всегда удается выполнить аппроксимацию с достаточной точностью, но во вновь проектируемой турбине это не вызывает трудностей.

Коэффициенты парабол подобраны так, чтобы они равнялись тангенсам углов наклона касательных в начале и конце проточной части:

$$\left[\frac{d(d_n)}{dx} \right]_{x=0} = \gamma_{n0}; \quad \left[\frac{d(d_n)}{dx} \right]_{x=L} = \gamma_{nL};$$

$$\left[\frac{d(d_b)}{dx} \right]_{x=0} = \gamma_{b0}; \quad \left[\frac{d(d_b)}{dx} \right]_{x=L} = \gamma_{bL}.$$

Эти коэффициенты, а также диаметры d_{n0} и d_{b0} являются варьируемыми параметрами при оптимизации. Они наглядны и для них нетрудно задать возможные пределы варьирования. Если желательно, чтобы один из диаметров изменялся по линейному закону, то надо задать $\gamma_{nL} = \gamma_{n0}$ или $\gamma_{bL} = \gamma_{b0}$. Если желательно выдержать один из диаметров постоянным, то задается $\gamma_{nL} = \gamma_{n0} = 0$ или $\gamma_{bL} = \gamma_{b0} = 0$. Значения среднего диаметра и высоты лопаток, необходимые для работы универсальной математической модели, рассчитываются по очевидным формулам:

$$d_{cp} = (d_n + d_b)/2, \quad (2.30)$$

$$l = (d_n - d_b)/2. \quad (2.31)$$

При оптимизации одноступенчатой турбины нет необходимости применять формулы (2.28) и (2.29), а можно непосредственно варьировать размерами лопаток ступени.

При оптимизации обычно варьируются углы профиля лопаток в разных ступенях, но при этом изменяются характер обтекания профиля и профильные потери. Изменение этих потерь можно учесть, если использовать одну из известных зависимостей скоростных коэффициентов φ и ψ от угла поворота потока. Пример такой зависимости [29] показан на рис. 2.11. После аппроксимации эти зависимости тоже включаются в подготовительный модуль. Эти и другие формулы подготовительного модуля нельзя включить непосредственно в универсальную математическую модель, так как они используются только при оптимизации и не нужны при других видах расчетов.

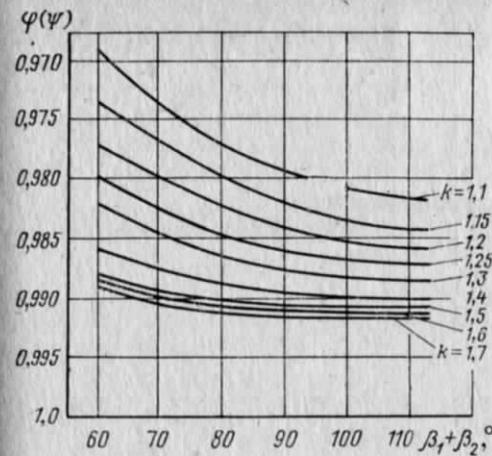


Рис. 2.11. Зависимость коэффициентов потерь от поворота потока в решетке

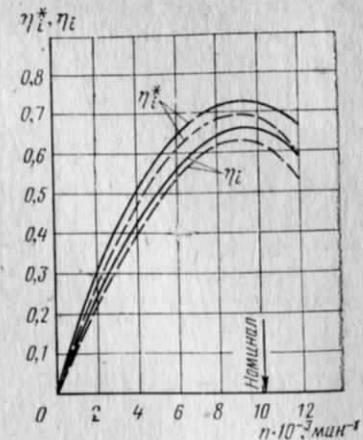


Рис. 2.12. Характеристики одноступенчатой турбины до (пунктирные линии) и после (сплошные линии) оптимизации ($\Delta\eta_i = 4,03\%$, $\Delta\eta_i^* = 4,24\%$)

Пример оптимизации проточной части был выполнен для одноступенчатой экспериментальной турбины. В качестве функции цели был выбран к. п. д. в параметрах торможения на номинальном режиме. Режим работы задавался пятью параметрами: T_0^* , ρ_0^* , p_2 , G , n (в соответствии с числом степеней свободы). При расчетах характеристик — четыре степени свободы, так как геометрические размеры проточной части остаются неизменными. При оптимизации появляется пятая степень свободы. Для универсальности математической модели она составлена для четырех режимных параметров, а пятый вводится в виде ограничения. В примере это был расход газа G . Кроме него в качестве границ II рода были заданы предельные значения степени реактивности и габаритных размеров. Варьировались семь основных размеров проточной части, которые приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Размеры	d_1 , м	d_2 , м	l_1 , мм	l_2 , мм	$\alpha_{1л}$, °	$\beta_{2л}$, °	$\beta_{1л}$, °
Исходные	0,2605	0,2575	37,6	40,5	23,2	31,2	43,6
Оптимальные	0,2675	0,2655	38,4	40,9	23,3	29,0	42,7

При оптимизации использовался старый вариант программы, описанной в разд. 2.1. Всего было сделано 227 шагов, т. е. просчетов модели. Результаты оптимизации приведены в табл. 2.3. Они показывают, что изменения размеров невелики, а характеристик,

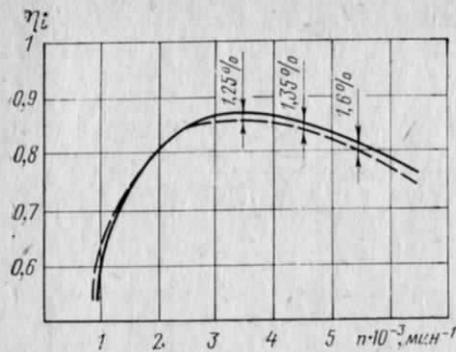


Рис. 2.13. Характеристики четырехступенчатой турбины до (пунктирная линия) и после (сплошная линия) оптимизации

В исходной турбине режим, соответствующий нулевому углу атаки на входе в лопатки рабочего колеса, а следовательно, минимуму профильных потерь, не совпадал с режимом, соответствующим минимуму выходных потерь. В результате оптимизации эти режимы сблизились. Кроме того, уменьшились потери в сопловом аппарате вследствие уменьшения скорости при неизменном значении скоростного коэффициента. Низкие значения к. п. д. турбины объясняются малыми размерами и невысоким качеством профилей лопаток, но это не имеет существенного значения для примера.

показанных на рис. 2.12, значительны. Оба к. п. д. в параметрах торможения и в статических параметрах увеличились на номинальном режиме более чем на 4%. Улучшилась и вся характеристика.

В исходной турбине режим, соответствующий нулевому углу атаки на входе в лопатки рабочего колеса, а следовательно, минимуму профильных потерь, не совпадал с режимом, соответствующим минимуму выходных потерь. В результате оптимизации эти режимы сблизились. Кроме того, уменьшились потери в сопловом аппарате вследствие уменьшения скорости при неизменном значении скоростного коэффициента. Низкие значения к. п. д. турбины объясняются малыми размерами и невысоким качеством профилей лопаток, но это не имеет существенного значения для примера.

Таблица 2.4

Размеры		d_1 , м	d_2 , м	l_1 , мм	l_2 , мм	$\alpha_{1л}$, °	$\beta_{2л}$, °	
Номера ступеней	I	Исходные	1,06	1,06	168,5	170	19,0	21,6
		Оптимальные	1,049	1,053	167	170	18,4	22,4
	II	Исходные	1,06	1,06	172	172	22,0	25,0
		Оптимальные	1,067	1,043	172	176	22,8	23,1
	III	Исходные	1,06	1,06	178	182	24,4	25,0
		Оптимальные	1,067	1,063	179	183	24,9	24,2
	IV	Исходные	1,06	1,06	186	190	26,5	27,0
		Оптимальные	1,06	1,055	185	190	25,8	26,1

Пример многорежимной оптимизации был выполнен на четырехступенчатой турбине. В качестве функции цели было выбрано среднее значение к. п. д. в статических параметрах на трех режимах для того, чтобы обеспечить пологость характеристики турбины на больших частотах вращения. Три параметра T_0^* , p_0^* и p_2 были одинаковыми на всех режимах. Частоты вращения n были заданы разными, как показано на рис. 2.13, а расход газа G был задан в виде границы II рода на номинальном режиме. Другие границы II рода — степени реактивности во всех ступенях, крутящий момент, наружный диаметр и высоты лопаток. Варьировались по шесть основных геометрических размеров проточной части в каждой ступени.

При оптимизации использовался тот же вариант программы, что и в предыдущем примере. Ее результаты приведены в табл. 2.4. Изменения размеров тоже небольшие, а характеристики — значительные, как показано на рис. 2.13. Средний к. п. д. турбины повысился на 1,4%, причем изменения к. п. д. меньше в районе оптимальных режимов и больше при максимальных частотах вращения. Этот пример наглядно показывает, что математическая модель турбины действительно является многорежимной.

2.4. ОСЕВОЙ КОМПРЕССОР

Подготовительный модуль, добавляемый в универсальную математическую модель компрессора для использования ее при оптимизации, содержит в основном те же формулы, что и подготовительный модуль турбины. Длина компрессора, наружный или внутренний диаметр, средний диаметр и высота лопаток определяются по формулам (2.28) ... (2.31). Формулы, учитывающие влияние геометрических размеров на потери в лопаточных решетках включены непосредственно в математическую модель компрессора.

Пример оптимизации проточной части был выполнен на восьмиступенчатом компрессоре с выходным спрямляющим аппаратом, т. е. компрессор имел 17 лопаточных венцов. Расчетная характеристика компрессора с исходным вариантом проточной части показана на рис. 2.14. Треугольником отмечен режим, на котором производилась оптимизация. Он расположен правее линии максимальных к. п. д., поэтому некоторое улучшение параметров компрессора на этом режиме возможно. В качестве функции цели использовался адиабатический к. п. д. в параметрах торможения. Границы II рода использовались для ограничения пределов изменения степеней реактивности во всех восьми ступенях и для исключения режимов с запиранием в каком-либо из венцов. Кроме того, было поставлено условие, чтобы степень повышения давления в параметрах торможения не уменьшалась по сравнению с исходным вариантом. Таким образом, всего использовалось 34 границы II рода. Варьируемыми параметрами были углы установки лопаток рабочего колеса и спрямляющего аппарата, так как они чаще всего изменяются при доводке проточной части компрессора. Для удобства вычис-

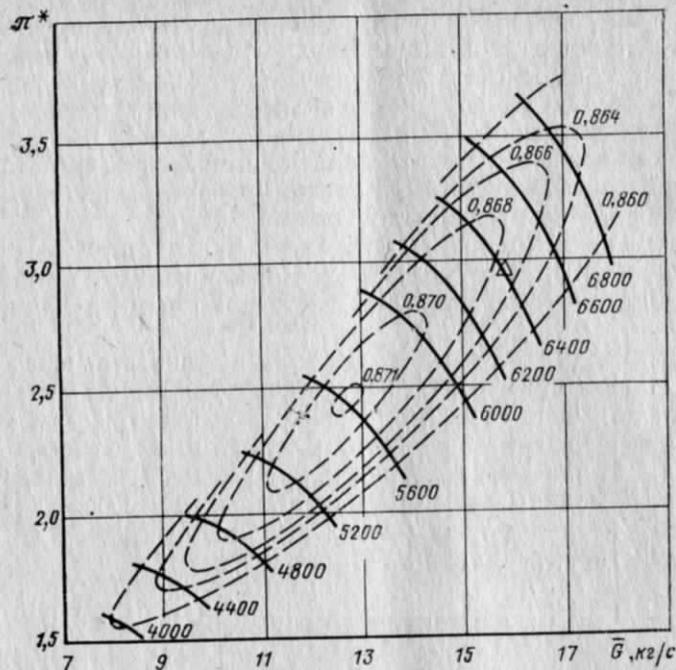


Рис. 2.14. Расчетная характеристика восьмиступенчатого компрессора до оптимизации

лений число варьируемых параметров при всех вариантах оптимизации равнялось восьми. Границы I рода были выбраны достаточно широкими, чтобы в процессе поиска не было случаев выхода на эти границы.

Всего было исследовано пять различных вариантов проточной части. Полученные значения углов выхода лопаток, соответствующих оптимальным углам установки, показаны на рис. 2.15 и 2.16, а характеристики компрессора, соответствующие этим вариантам проточной части, на рис. 2.17 и 2.18 только для расчетной частоты вращения. Стрелкой обозначено значение расхода воздуха на расчетном режиме. Вариант 1 соответствует исходной проточной части. Вариант 2 получен в результате оптимизации углов установки лопаток только спрямляющих аппаратов. Максимальное значение к. п. д. не изменилось, но вся характеристика сместилась в сторону больших расходов воздуха. Степень повышения давления поэтому повысилась на расчетном режиме. Вариант 3 получен при оптимизации углов установки лопаток только в рабочих колесах. Значение максимального к. п. д. немного повысилось, а вся характеристика сместилась вправо на большую величину, чем в варианте 2. Вариант 4 получен путем формального объединения лопаток спрямляющих аппаратов из варианта 2 и рабочих колес из варианта 3. Это привело к наибольшему смещению характеристики и незначитель-

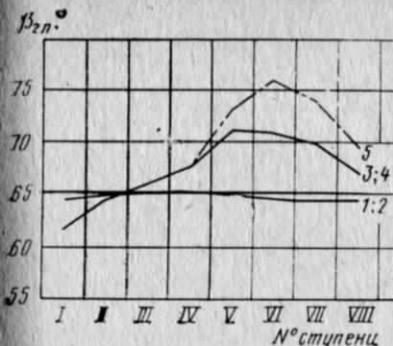


Рис. 2.15. Выходные углы лопаток рабочих колес компрессора при разных вариантах оптимизации: 1...5—варианты

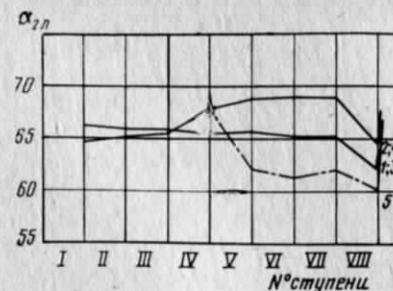


Рис. 2.16. Выходные углы лопаток спрямляющих аппаратов компрессора при различных вариантах оптимизации: 1...5—варианты

ному снижению к. п. д. на расчетном режиме. Вариант 5 получен одновременной оптимизацией углов лопаток в спрямляющем аппарате и в рабочем колесе, но только для четырех последних ступеней. В остальных ступенях углы были взяты с варианта 4. Вариант 5 дал наилучшие результаты, но разница с вариантом 3 незначительна. Сравнение вариантов показывает, что поворот лопаток рабочего колеса является более эффективным, чем спрямляющего

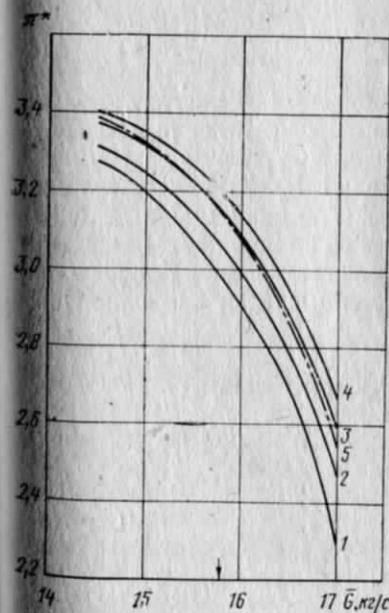


Рис. 2.17. Зависимость степени повышения давления в компрессоре от приведенного расхода воздуха

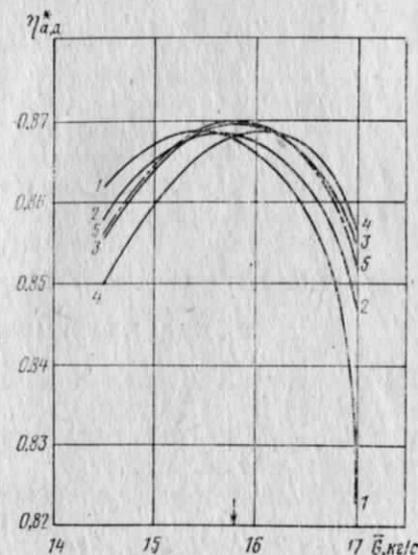


Рис. 2.18. Зависимость к. п. д. компрессора от приведенного расхода воздуха

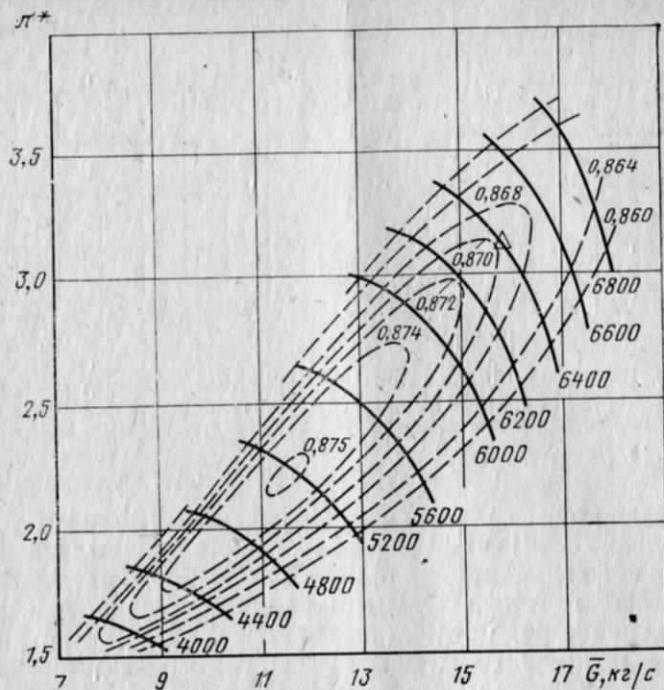


Рис. 2.19. Расчетная характеристика восьмиступенчатого компрессора после оптимизации

аппарата. В результате оптимизации проточной части удалось повысить к. п. д. только на 0,25% (вариант 5), но степень повышения давления увеличилась на 5,2%. Расчетное значение границы помпажа не изменилось. Характеристика компрессора с оптимальной проточной частью показана на рис. 2.19. Значения к. п. д. немного увеличились по всей характеристике и она сместилась так, что линия максимальных к. п. д. прошла через точку расчетного режима. Эти примеры показывают, что оптимизация проточной части компрессора вполне возможна.

2.5. ДИСКИ ТУРБИНЫ И КОМПРЕССОРА

При оптимизации турбин и компрессоров необходимо учитывать изменение их массы, которая существенно зависит от массы дисков, следовательно, желательно ее минимизировать. Это выполняется в отдельном модуле.

Оптимизация профиля вращающегося диска является сравнительно легко формализуемой задачей и она рассмотрена в большом числе работ, например [7]. Задача в них ставится по-разному. При проектировании наиболее распространен случай, когда заданы частота вращения диска n (в с^{-1}), контурная нагрузка от лопаток на ободе диска σ_{ra} (в МН/м^2) и температурное поле диска

$t=f(r)$. Эта зависимость может быть задана таблично или аппроксимирована формулой. Необходимо для выбранного материала так спроектировать диск, чтобы он имел минимальную массу, а все запасы прочности были бы не менее заданных.

Математическая многомерная модель диска составлена на основе известного метода расчета дисков произвольного профиля [9]. В соответствии с изложенными выше (см. разд. 0.2) принципами модель предназначена для поверочного расчета диска. По ней рассчитываются запасы прочности, радиальное удлинение, масса и момент инерции диска заданной геометрии. При составлении расчетной схемы диск разбивается на ряд участков постоянной толщины. Радиальная протяженность их различна и зависит от характера изменения толщины диска. Они нумеруются от центра к периферии. Средние напряжения на n -м участке (радиальные и экваториальные) определяются по формулам [9]

$$\sigma_{rz}^{cp} = \frac{A_z + A'_z}{2} \sigma_{t1} - \frac{B_z + B'_z}{2}, \quad (2.32)$$

$$\sigma_{tz}^{cp} = \frac{M_z + M'_z}{2} \sigma_{t1} - \frac{N_z + N'_z}{2}, \quad (2.33)$$

где коэффициенты связаны рекуррентными формулами:

$$A'_z = \alpha_{rz} A_z + \alpha_{tz} M_z; \quad B'_z = \alpha_{rz} B_z + \alpha_{tz} N_z + \alpha_{Cz} C_z;$$

$$M'_z = \beta_{rz} A_z + \beta_{tz} M_z;$$

$$N'_z = \beta_{rz} B_z + \beta_{tz} N_z + \beta_{Cz} C_z;$$

$$A_z = \frac{y_{z-1}}{y_z} A'_{z-1}; \quad B_z = \frac{y_{z-1}}{y_z} B'_{z-1};$$

$$M_z = \frac{E_z}{E_{z-1}} M'_{z-1} + \mu \left(\frac{y_{z-1}}{y_z} - \frac{E_z}{E_{z-1}} \right) A'_{z-1};$$

$$N_z = \frac{E_z}{E_{z-1}} N'_{z-1} + \mu \left(\frac{y_{z-1}}{y_z} - \frac{E_z}{E_{z-1}} \right) B'_{z-1} + (\alpha_z t_z - \alpha_{z-1} t_{z-1}) E_z.$$

Входящие в них коэффициенты зависят в основном от m — отношения внутреннего радиуса данного участка к наружному:

$$\alpha_r = \beta_t = \frac{1+m^2}{2}; \quad \alpha_t = \beta_r = \frac{1-m^2}{2}; \quad \alpha_C =$$

$$= \frac{3 + \mu - 2(1+\mu)m^2 - (1-\mu)m^4}{8};$$

$$\beta_C = \frac{1 + 3\mu - 2(1+\mu)m^2 + (1-m)m^4}{8}; \quad C = \rho \omega^2 r_z^2 \cdot 10^{-6} \text{ МН/м}^2,$$

t_z, t_{z-1} — средние температуры участков; α_z, α_{z-1} — коэффициенты линейного расширения материала при этих температурах.

Коэффициенты для первого участка, т. е. в центре диска, зависят от наличия центрального отверстия и характера посадки диска

на вал. Они приведены в табл. 2.5. Экваториальное напряжение в центре диска σ_{z1} определяется по величине контурной нагрузки на ободе σ_{ra} и коэффициентов последнего участка

$$\sigma_{z1} = \frac{\sigma_{ra} + B'_a}{A'_a} \quad (2.34)$$

Оно подставляется в формулы (2.32) ... (2.33), по которым находят напряжения на всех участках диска. Радиальное удлинение

Таблица 2.5

Тип диска	A_1	B_1	M_1	N_1
Сплошной диск без центрального отверстия	1	0	1	0
Диск со свободным центральным отверстием	0	0	1	0
Диск, напрессованный на вал	0	$ \sigma_{r1} $	1	0

ξ_a на внешнем радиусе диска r_a выражается через напряжения на этом радиусе

$$\xi_a = \frac{r_a}{E} (\sigma_{ta} - \mu \sigma_{ra}) + \alpha t_a r_a \quad (2.35)$$

Масса и момент инерции диска получаются путем суммирования по участкам:

$$m = \pi Q \sum_{z=1}^{z_{\max}} y_z (r_z^2 - r_{z-1}^2) \quad (2.36)$$

$$J = \frac{\pi}{2} Q \sum_{z=1}^{z_{\max}} y_z (r_z^4 - r_{z-1}^4) \quad (2.37)$$

Запасы прочности равны $K_r = \frac{\sigma_K}{\sigma_{cp}}_{rz}$ и $K_t = \frac{\sigma_K}{\sigma_{cp}}_{tz}$,

где σ_K — критерий прочности.

При кратковременном режиме работы — это предел прочности σ_{bt} , а при длительном — предел длительной прочности для заданного ресурса при средней температуре участка $\sigma_{b,t,\tau}$. Зависимости $\sigma_{bt} = f(t)$ и $\sigma_{b,t,\tau} = f(t, \tau)$ берутся из таблиц, которые хранятся в банке данных для различных материалов.

Кроме того, используются запасы по разрушающей частоте вращения при разрушении по меридиональному

$$K_M = \sqrt{\frac{\sum_{z=1}^{z_{\max}} \sigma_K y_z (r_z - r_{z-1})}{\sigma_{ra} r_a y_a + Q \omega^2 \sum_{z=1}^{z_{\max}} y_z r_z^2 (r_z - r_{z-1})}} \quad (2.38)$$

и цилиндрическому сечениям [7, 9, 26]

$$K_{\omega} = \sqrt{\frac{\sum_{z^*}^{z_{\max}} \sigma_K y_z (r_z - r_{z-1}) + \sigma_K^* y_z^* \left(r^* - \frac{nd}{2\pi} \right)}{\sigma_{ra} r_a y_a + Q \omega^2 \sum_{z^*}^{z_{\max}} y_z r_z^2 (r_z - r_{z-1})}} \quad (2.39)$$

где n, d — число и диаметр отверстий, расположенных на радиусе r^* . При их отсутствии принимается $d=0$. Разрушение по меридиональному сечению чаще бывает в дисках, не имеющих резких изменений толщины, а по цилиндрическому — в дисках, имеющих такие изменения на радиусе r^* . Например, они могут быть вызваны наличием отверстий. В формуле (2.39) все величины, соответствующие радиусу r^* , обозначены звездочкой. При оптимизации используется минимальное из значений K_M и K_{ω} .

В дисках авиационных газотурбинных двигателей часто наблюдаются области пластических деформаций. При расчете таких упругопластических дисков можно применить описанную выше математическую модель, если применить «метод переменных параметров упругости», т. е. вместо действительного использовать секущий модуль упругости E_c [26]. Он определяется, как обычно, по диаграмме деформирования $\sigma = f(\epsilon)$ при чистом растяжении и численно равен тангенсу угла наклона прямой, соединяющей соответствующую точку на диаграмме с началом координат. Диаграмма деформирования линейна только до предела упругости, поэтому условный модуль упругости зависит не только от температуры и материала, но и от величины деформации или интенсивности деформации σ_i при объемном напряженном состоянии. Для дисков

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2} - \sigma_r \sigma_t \quad (2.40)$$

Секущий модуль упругости уточняется на каждом приближении по диаграмме деформирования, перестроенной в более удобные координаты:

$$E_c = f(\sigma_c, t) \quad (2.41)$$

где σ_c — условные напряжения при расчете упругого диска.

При перестроении диаграммы экстраполируются прямые упругих деформаций для заданных температур, как показано на рис. 2.20. Проводятся горизонтальные линии для выбранных значений σ_c , а из точек пересечения опускаются вертикальные линии на кривые деформирования. Полученные точки соединяются с началом координат и по тангенсам углов наклона этих линий определяются значения секущих модулей упругости. Полученные зависимости (2.41) табулируются и хранятся для разных материалов в банке данных. Пример массива, полученного по рис. 2.20, приведен в табл. 2.6. Условные напряжения σ_c пропорциональны интенсивности напряжения σ_i и определяются на каждом приближении по секущему модулю упругости предыдущего приближения:

$$\sigma_c = \sigma_i E / E_c \quad (2.42)$$

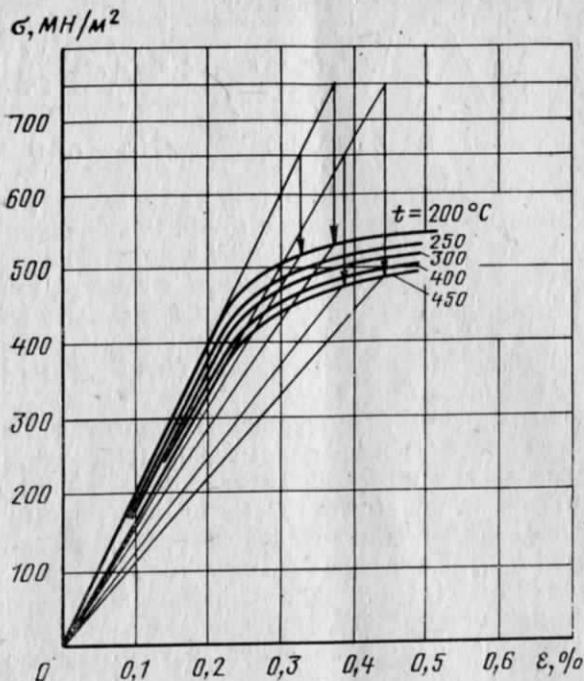


Рис. 2.20. Диаграмма деформирования для стали 37X12H8Г8МФБ с линиями перестроения

При пластических деформациях материал считается несжимаемым, поэтому приходится принимать, что коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$.

Математическая модель диска сделана универсальной и оформлена в виде отдельного модуля. Она пригодна как при упругих, так и при упругопластических деформациях. По ней можно выполнить поверочный расчет или оптимальное профилирование диска, используя модуль оптимизации (см. разд. 2.1). Структура программы такова, что в нее легко могут быть внесены различные дополнения и уточнения математической модели. Объем модуля диска составляет 15 кбайт. Исходная информация содержит частоту вращения диска, напряжение на внешнем радиусе диска σ_{ra} (контурную нагрузку), коэффициенты граничных условий A_1, B_1, M_1, N_1 (см. табл. 2.5), температурное поле диска в виде массива $t=f(r)$ и его материал, который может выбираться в процессе расчета. При поверочном расчете еще задается двумерный массив толщин диска на различных радиусах. При оптимизации большинство толщин диска варьируются и в этот массив включаются их значения в нулевом приближении. Отдельным массивом задаются возможные пределы изменения толщин.

Таблица 2.6

$\sigma_c, \text{MN/m}^2$	$E \cdot 10^5, \text{MN/m}^2$				
	$t=200^\circ \text{C}$	$t=250^\circ \text{C}$	$t=300^\circ \text{C}$	$t=400^\circ \text{C}$	$t=450^\circ \text{C}$
0	1,56	1,51	1,48	1,38	1,34
400	1,56	1,51	1,48	1,37	1,32
440	1,56	1,49	1,44	1,32	1,26
480	1,515	1,43	1,38	1,27	1,20
520	1,47	1,37	1,31	1,21	1,15
560	1,40	1,38	1,265	1,16	1,09
600	1,34	1,25	1,21	1,095	1,03
640	1,27	1,20	1,15	1,04	0,98
680	1,22	1,13	1,09	0,98	0,92
720	1,16	1,07	1,03	0,925	0,86
800	1,04	0,95	0,92	0,82	0,75

Таблица 2.7

№ сечения диска	r_{cp}	y	T	σ_r	σ_t	K_r	K_t
0	0,050	—	200	0,0	574,1	9999,999	1,446
1	0,052	6,000	200	19,5	553,1	42,591	1,501
2	0,058	6,000	200	70,4	560,8	11,791	1,480
3	0,069	3,600	200	200,5	573,9	4,140	1,446
4	0,100	2,400	250	342,6	427,1	2,282	1,831
5	0,150	2,000	300	355,5	267,7	2,065	2,742
6	0,200	1,600	400	295,6	-7,1	2,165	89,625
7	0,232	1,700	450	173,8	-156,2	3,394	3,778
8	0,238	—	450	150,0	-154,2	3,933	3,826

$m=27,824$ $\xi=1,7349$; $J=0,717$; $K_M=1,416$; $n=10500$; $\sigma_{ra}=150,0$; $\rho=8000$

При расчете из банка данных выбираются массивы, характеризующие свойства данного материала и их зависимости от температуры, ресурса и условного напряжения: $E, \alpha=f(t)$; $\sigma_{v,\tau}^t=f(t, \tau)$; $E_c=f(t, \sigma_c)$. Кроме этих массивов используются значения плотности материала и коэффициента Пуассона.

После окончания поверочного расчета по математической модели диска печатается таблица результатов (табл. 2.7). Первая и

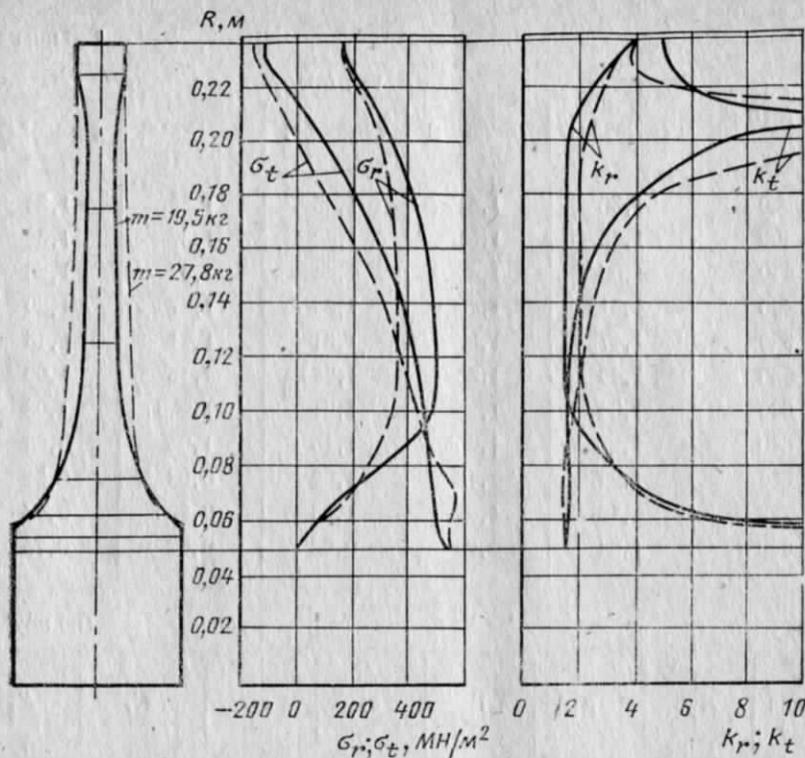


Рис. 2.21. Схема профиля диска турбины, графики напряжения и запаса прочности в нем до и после оптимизации

последняя строка в ней соответствуют внутреннему и наружному радиусам диска, остальные — серединам выбранных участков. Печатаются средние для участка значения толщины, температуры, радиального и экваториального напряжений и запасов прочности по этим напряжениям. Внизу таблицы печатаются значения массы диска, радиального удлинения на внешнем радиусе, момента инерции, запаса по разрушающей частоте вращения, а также основные из исходных данных — частота вращения, контурная нагрузка σ_{ra} и плотность материала. При расчете упругопластического диска эта таблица печатается на каждом приближении, а при оптимизации ее печать отключается.

Пример диска, взятый из работы [9], показан на рис. 2.21. Диск неравномерно нагретый, упругопластический. Материал — сталь 37X12H8Г8МФБ, частота вращения — 10500 мин⁻¹, контурная нагрузка $\sigma_{ra} = 150$ МН/м². Результаты расчета в последнем приближении приведены в табл. 2.7 и пунктиром на рис. 2.21.

При оптимизации функцией цели обычно является масса диска, варьируются в пределах границ I рода толщины диска, кроме тех

участков, где это нецелесообразно по конструктивным соображениям. Границы I рода:

$$\left. \begin{aligned} y_{1\min} &\leq y_1 \leq y_{1\max}; \\ y_{2\min} &\leq y_2 \leq y_{2\max}; \\ &\dots \\ y_{n\min} &\leq y_n \leq y_{n\max}. \end{aligned} \right\}$$

Границами II рода в диске являются запасы прочности:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= K_{r1} - K_{\text{зад}} \geq 0; \\ f_2 &= K_{r2} - K_{\text{зад}} \geq 0; \\ &\dots \\ f_z &= K_{rz} - K_{\text{зад}} \geq 0; \\ f_{z+1} &= K_{t1} - K_{\text{зад}} \geq 0; \\ f_{z+2} &= K_{t2} - K_{\text{зад}} \geq 0; \\ &\dots \\ f_{2z} &= K_{tz} - K_{\text{зад}} \geq 0; \\ f_{2z+1} &= K_m - K_{m\text{-зад}} \geq 0; \\ f_{2z+2} &= K_{\text{ц}} - K_{\text{ц-зад}} \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Иногда приходится использовать дополнительное ограничение на радиальное удлинение диска: $f_{2z+3} = \xi_{\text{зад}} - \xi_a \geq 0$, так как в дисках с оптимальным профилем радиальное удлинение увеличивается. Обычно варьируются толщины не всех участков, поэтому $n \leq z$, где z — общее число участков в диске.

Таблица 2.8

№ сечения диска	$r_{\text{ср}}$	y	T	σ_r	σ_t	K_r	K_t
0	0,050	—	200	0,0	545,8	9999,999	1,521
1	0,052	6,000	200	18,5	525,8	44,915	1,578
2	0,058	5,831	200	66,2	509,0	12,542	1,631
3	0,069	3,944	200	165,0	482,4	5,030	1,721
4	0,100	1,450	250	484,4	443,7	1,614	1,762
5	0,150	1,219	300	477,5	338,6	1,537	2,168
6	0,200	0,988	400	426,8	89,1	1,500	7,185
7	0,232	1,700	450	172,8	-122,5	3,414	4,817
8	0,238	—	450	150,0	-121,5	3,933	4,857

$$m=19,528; \zeta=1,7930; J=0,717; K_m=1,373; n=10500; \sigma_{ra}=150,0; \rho=8000$$

Оптимизация ведется по алгоритму из разд. 2.1. Потребное количество шагов зависит от числа переменных и от размеров области поиска.

Результаты оптимизации примера с табл. 2.7 приведены в табл. 2.8 и сплошными линиями на рис. 2.21. Не варьировались толщины первого и последнего участков, чтобы не изменять крепление диска к валу и лопаток к диску. После оптимизации запасы прочности выровнялись и на большей части диска равны минимальным запасам до оптимизации, которые использовались в качестве заданных. Масса диска уменьшилась на 30%. Это уменьшение зависит от качества профилирования исходного диска.

Даже небольшое уменьшение массы каждого диска при оптимизации имеет большое значение, так как позволяет: сэкономить дорогостоящий материал; уменьшить общую массу двигателя; снизить нагрузку на подшипники; увеличить критическую частоту вращения ротора. Применение метода оптимизации диска в общей системе проектирования двигателя описано в гл. 4.

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Цель любой оптимизации — нахождение оптимума математической модели. Модель всегда является приближенной и рассчитанные по ней параметры отличаются от действительных. Оптимальные параметры изделия отличаются от оптимума, найденного по модели. В некоторых случаях при неблагоприятном характере поверхности отклика эти отличия могут значительно превышать погрешности математической модели. При их уменьшении отличия всегда уменьшаются, поэтому проблема, увеличения точности математических моделей является одной из важнейших при оптимизации.

Известны два пути повышения точности моделей. Первый из них заключается в более тщательном исследовании и математическом описании всех особенностей рабочего процесса в изделии. Это традиционный путь. Он используется при уточнении существующих методик расчета. Чем совершеннее методика, тем труднее дается дальнейшее повышение точности, причем оно всегда сопровождается значительным увеличением сложности математических моделей. Этот путь, конечно, является более обоснованным и в перспективе более эффективным, но быстрые и радикальные успехи на этом пути маловероятны.

Второй путь повышения точности — идентификация математической модели по результатам испытаний. Проектирование в этом случае ведется, как обычно, по исходной (априорной) математической модели, имеющей недостаточную точность. Результаты первых испытаний изготовленного двигателя или его узлов используются для идентификации, т. е. для уточнения параметров модели по результатам испытаний. По уточненной (апостериорной) математической модели производится повторная оптимизация, в процессе которой варьируются только те размеры, изменение которых в уже изготовленном двигателе является реальным. Апостериорная модель учитывает все особенности проектируемого двигателя и обычно имеет достаточную точность. При повторной оптимизации изменения размеров обычно бывают небольшими и мало снижают точность модели, поэтому оптимум, найденный по апостериорной модели, достаточно хорошо совпадает с оптимумом на изделии.

При идентификации варьируются различные параметры математической модели и уточнение ее получается только за счет изме-

нения их величины без увеличения сложности модели. Это является большим преимуществом второго пути. Фактически он автоматизирует расчетные работы при доводке двигателя и регламентирует их последовательность. Применение автоматизации при доводке из-за ее большой стоимости и продолжительности является более актуальным, чем даже при проектировании.

3.2. ПРИНЦИПЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ

Цель идентификации — уменьшение расхождений между результатами испытаний изделия* и расчета по модели без изменения ее структуры, а только за счет уточнения значений ряда параметров. Они называются варьируемыми параметрами или факторами и выбираются из числа наименее достоверных параметров математической модели. В газотурбинном двигателе, это, в основном, коэффициенты потерь в различных элементах, поправки к углам выхода потока из лопаточных венцов и к коэффициентам эмпирических формул. Испытания изделия проводятся на различных режимах с измерением возможно большего количества параметров. Они называются по аналогии с теорией планирования многофакторного эксперимента откликами. На этих же режимах производится расчет по модели. Разница между экспериментальным и расчетным значениями параметра называется невязкой. Она должна быть минимальной во всех измерениях. Поэтому минимизируется сумма квадратов взвешенных невязок с помощью изменения поправок к варьируемым параметрам. При решении используется линеаризация, поэтому поправки должны быть малыми. Обычно они не получаются малыми и приходится делать несколько последовательных приближений. В результате получается апостериорная математическая модель изделия.

Основу идентификации составляет метод наименьших квадратов (МНК), так как минимизируются суммы квадратов невязок.

В алгоритме идентификации кроме МНК используется еще целый ряд методов вспомогательного назначения, которые обеспечивают:

- расчет весов измерений, который обычно выделяется в отдельную программу;
- автоматическое выявление и отбраковку измерений, содержащих грубые ошибки;
- предварительную обработку результатов испытаний;
- работоспособность алгоритма при наложенных ограничениях на пределы изменения варьируемых параметров, без которых нельзя гарантировать однозначность решения;
- улучшение сходимости процесса последовательных приближений;

* Вместо результатов испытаний могут быть использованы и расчетные данные, полученные на достаточно точных, но сложных математических моделях. Применение идентификации в этом случае позволит уточнить параметры более простых моделей и использовать их вместо сложных без потери точности.

— автоматическое выявление и исключение ошибочно выбранных варьируемых параметров, приводящих к мультиколлинеарности*.

3.3. ПОДГОТОВКА ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

3.3.1. Предварительная обработка результатов измерений

Идентификация математических моделей производится по предварительно обработанным результатам испытаний изделия. Обработка мало отличается от обычной и не вызывает трудностей, но при большом объеме испытаний она занимает много времени, поэтому ее автоматизация весьма актуальна.

В последние годы получили распространение информационно-измерительные системы, автоматизирующие обработку результатов испытаний. В этих системах датчики, измеряющие параметры двигателя, преобразуют их в унифицированные электрические сигналы и направляют в ЭЦВМ. По заданной программе система автоматически устанавливает нужные режимы работы двигателя, на каждом из них производит опрос датчиков в заданной последовательности и накапливает получаемые от них сигналы в запоминающем устройстве. Некоторые датчики могут опрашиваться по нескольку раз на каждом режиме с последующим осреднением сигналов. В наиболее совершенных системах каждый сигнал измеряется непрерывно в течение заданного промежутка времени, а затем определяется среднее интегральное значение. После завершения испытаний на данном режиме результаты обрабатываются непосредственно на ЭЦВМ и печатаются сразу или после окончания испытаний в удобном для анализа виде. Часто они печатаются в виде таблиц, пригодных для включения непосредственно в отчеты по испытаниям. Иногда результаты выдаются дополнительно в виде графиков.

При обработке результатов для последующей идентификации удобнее получать результаты на перфокартах или на других машинных носителях информации. Результаты печати используются только для контроля. При использовании машинных носителей можно накапливать, длительно хранить, группировать и вводить вновь в ЭЦВМ всю информацию без опасности возникновения дополнительных ошибок. Выполнение идентификации непосредственно при испытаниях двигателя, т. е. в реальном масштабе времени, по-видимому, пока нецелесообразно по следующим причинам.

1. При наличии даже одной незамеченной грубой ошибки в результатах измерений все результаты идентификации становятся непригодными. Следовательно, необходим тщательный контроль информации, который приводит к увеличению затрат машинного времени. Мощность ЭЦВМ, используемых в информационно-измерительных системах, в этом случае может оказаться недостаточной и

* Мультиколлинеарность — это сильная корреляция коэффициентов влияния для нескольких варьируемых параметров. Она приводит к плохой обусловленности матрицы нормальных уравнений.

придется увеличивать время испытаний, что экономически нецелесообразно.

2. Контроль информации получается более надежным при увеличении ее объема, поэтому лучше производить его по окончании испытаний, а тогда уже нетрудно передать информацию на другую более мощную ЭЦВМ.

3. При идентификации желательно использование ранее накопленной информации, а следовательно, она должна длительно храниться и вводиться в ЭЦВМ перед началом идентификации.

Результаты испытаний получаются более надежными и более информативными, если программа испытаний составлена на основе методов планирования многофакторного эксперимента, а не только на основании интуиции инженеров. Это проще осуществить при испытаниях исследовательского характера, которые менее связаны действующими нормами.

Обязательным этапом обычной обработки результатов является их приведение к нормальным условиям. При идентификации лучше использовать неприведенные результаты, так как для нее не требуется построение определенных зависимостей и увеличенный разброс экспериментальных точек не имеет большого значения. Результаты каждой экспериментальной точки обрабатываются отдельно, поэтому соответствующие им расчетные значения могут быть получены на каждом режиме по действительным значениям атмосферных параметров. Это не усложняет расчета, но зато позволяет исключить неизбежные погрешности приведения. Они хоть и невелики, но исключение их, конечно, целесообразно.

Идентификация организуется таким образом, что в ней могут быть использованы результаты измерений любых параметров двигателя, но для некоторых из них нужен пересчет. В основном это параметры газового потока. Например, результаты измерений статического давления на стенке в различных каналах могут быть непосредственно использованы только в математических моделях IV уровня сложности. В моделях других уровней эти результаты нужно пересчитывать на средний диаметр канала. Погрешность их при этом, конечно, возрастает. Измерения параметров газового потока между ступенями компрессора или турбины могут быть использованы в моделях III и IV уровней, а измерения между узлами двигателя еще и в моделях II уровня.

При измерении полей параметров газового потока (температур, давлений, скоростей или углов потока) они осредняются и находятся средненнтегральные значения. В моделях II и III уровней сложности их надо еще приводить к среднему диаметру. Погрешности при осреднении неизбежны, но величина их зависит от способа осреднения.

3.3.2. Осреднение неравномерных потоков

Измерения в неравномерных газовых потоках производятся дискретно, т. е. в отдельных точках измерительного сечения. В общем случае осесимметричного потока можно измерить в каждой

точке пять параметров: T^* — температуру торможения; p^* — давление торможения; $p(\lambda)$ — статическое давление или приведенную скорость; α — угол между вектором скорости и окружным направлением; γ — угол между вектором скорости и осевым направлением (рис. 3.1). В плоских и цилиндрических потоках $\gamma=0$.

Изменение температуры в пределах измерительного сечения обычно невелико и можно не учитывать переменность теплоемкости, т. е. можно считать постоянным показателем адиабаты k в этом сечении.

Измерения потока осуществляются пневмометрическими приборами различной конструкции. В большинстве из них предусмотрена возможность измерения не всех пяти параметров, а только части из них. Изменения остальных в пределах измерительного сечения приходится пренебрегать. Пневмометрические приборы обычно тарируются в специальных малогабаритных аэродинамических трубах при различных числах M , изменяющихся в пределах, ожидаемых при испытаниях. Тарировочные кривые строятся в различных координатах. Для использования при идентификации они должны быть аппроксимированы аналитическими зависимостями. При небольших скоростях потока можно использовать координаты $\pi = p/p^*$; $\pi_{тр} = p_{тр}/p_{ср}$, где p^* и p — истинные давления в потоке; $p_{ср}$ — давление в средней трубке пневмометрического приемника; $p_{тр}$ — давление в одной из его боковых трубок.

Тарировочная зависимость хорошо аппроксимируется квадратной параболой вида

$$\pi = a + b\pi_{тр} + c\pi_{тр}^2 \quad (3.1)$$

При условии $a + b + c = 1$ аппроксимация производилась методом наименьших квадратов по специальной программе. В ней была предусмотрена автоматическая отбраковка экспериментальных точек, оказавшихся по какой-либо причине ошибочными. Она производится по известному правилу 3σ . При наличии хотя бы одной ошибочной точки, она исключалась, и аппроксимация повторялась без остановки ЭЦВМ. Кроме значений коэффициентов a, b, c рассчитывались и их погрешности. По сути дела формулу (3.1) можно рассматривать как элементарную математическую модель и производить ее идентификацию по результатам тарировки (см. разд. 3.4). Варьируемыми параметрами будут коэффициенты a, b, c . Фактически программа обработки тарировки является упрощенной программой идентификации. Приведенная скорость в каждой точке измерительного сечения после измерения давления в трубках приемника определяется по формулам (3.1) и (3.2)

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \pi^{\frac{k-1}{k}}\right)} \quad (3.2)$$

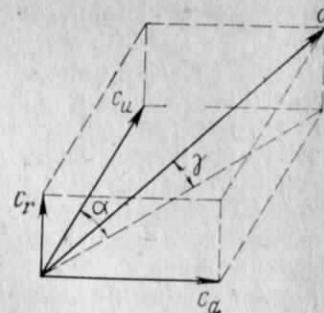


Рис. 3.1. Проекция скорости газа на оси координат

Для других измеряемых параметров тарировочные зависимости получаются аналогично.

Измеренные параметры осредняются по сечению. Предложено много различных способов осреднения. В лучших из них производится интегрирование каких-либо параметров по сечению. Выбор этих параметров производится так, чтобы возможно более полно сохранились все свойства потока, существенные при расчете происходящих в нем процессов. Важно, чтобы эти параметры обладали свойством аддитивности, т. е. чтобы соответствующий параметр потока равнялся сумме этих же параметров в отдельных струйках потока. Такими параметрами являются [21] поток массы (расход газа), поток энтальпии, поток энтропии, поток момента количества движения, поток импульса, поток кинетической энергии. В некоторых способах осреднения интегрируют давление или скорость потока. Эти параметры не обладают свойством аддитивности и использование их приводит к погрешностям, величина которых зависит от степени неравномерности потока.

Количество параметров, для которых можно обеспечить равенство значений в неравномерном и осредненном потоках, равно числу степеней свободы. Например, в цилиндрическом осесимметричном потоке три степени свободы при отсутствии закрутки, а при ее наличии — четыре. Следовательно, для интегрирования надо выбрать три или четыре основных параметра, а все остальные будут определяться по ним однозначно без интегрирования. Значения их в неравномерном и осредненном потоках не будут совпадать и разница может быть существенной. Это объясняется тем, что при осреднении потока часть его свойств неизбежно утрачивается. Обычно считается, что «нельзя указать способ осреднения, применение которого не встретило бы возражений в том или ином случае» [21]. Важно только следить за тем, чтобы наибольшее искажение получалось в параметрах, мало влияющих на решаемую задачу. Тогда систематическая ошибка метода осреднения, с которой приходится мириться, будет меньше.

В работе [21] предлагается в качестве четырех основных параметров, подлежащих осреднению в осесимметричных закрученных потоках, использовать потоки массы, энтальпии торможения, энтропии и момента количества движения, так как они отражают основные свойства газового потока: снижение его энергии, потери в потоке и силовое взаимодействие с рабочим колесом лопаточной машины. Осредненные параметры определяются по формулам

$$G_{\text{оср}} = \int_G dG; \quad i_{\text{оср}}^* = \frac{1}{G} \int_G i dG; \quad S_{\text{оср}}^* = \frac{1}{G} \int_G S dG; \quad M_{\text{оср}} = \frac{1}{G} \int_G M dG.$$

Среди этих параметров нет скорости газа, а она оказывает существенное влияние на рабочий процесс. Ее величина и направление определяют треугольники скоростей, а следовательно, и углы атаки на входе в решетки лопаток. При расчете потерь в решетках они принимаются пропорциональными квадрату скорости. Следовательно

но, один из четырех основных параметров должен объективно оценивать осредненные скорости. В качестве такого параметра надо использовать кинетическую энергию, а не саму скорость, так как она не обладает свойством аддитивности. Таким образом, осреднению подлежат потоки энтальпии торможения i^* , энтропии S^* , кинетической энергии E и момента количества движения M . Большее число параметров нельзя выдержать одинаковыми в неравномерном и осредненном потоках, так как в цилиндрическом осесимметричном закрученном потоке только четыре степени свободы.

Если в измерительном сечении, перпендикулярном оси канала, выделить элементарную площадку dF , то расход газа через нее (поток массы), если скорость нормальна к поверхности, будет равен

$$dG = m \frac{p^* q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} dF,$$

где

$$m = \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R}};$$

$q(\lambda)$ — приведенный расход газа. В дальнейшем он обозначается упрощенно q .

В закрученных потоках скорость направлена под углом к поверхности сечения, поэтому

$$dG = m \frac{p^* q \sin \alpha \cos \gamma}{\sqrt{T^*}} dF.$$

Поток энтальпии через эту площадку

$di^* = \frac{k}{k-1} RT^* dG$, поток энтропии $dS^* = R \ln \frac{T^{*\frac{k}{k-1}}}{p^*} dG$, поток кинетической энергии $dE = \frac{c^2}{2} dG = \frac{k}{k+1} RT^* \lambda^2 dG$, поток момента количества движения $dM = rc \cos \alpha \cos \gamma dG = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} RT^* r \lambda \cos \alpha \times \cos \gamma dG$. Если ввести обозначения интегралов расхода

$$\bar{G} = \iint_F \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} q \sin \alpha \cos \gamma dF, \quad (3.3)$$

энтальпии

$$\bar{i}^* = \iint_F p^* \sqrt{T^*} q \sin \alpha \cos \gamma dF, \quad (3.4)$$

энтропии

$$\bar{S}^* = \iint_F \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} \ln \left(\frac{T^{*\frac{k}{k-1}}}{p^*} \right) q \sin \alpha \cos \gamma dF, \quad (3.5)$$

кинетической энергии

$$\bar{E} = \int_F \lambda^2 p^* \sqrt{T^*} q \sin \alpha \cos \gamma dF \quad (3.6)$$

и момента количества движения

$$\bar{M} = \int_F r \lambda p^* q \sin 2\alpha \cos^2 \gamma dF, \quad (3.7)$$

то для среднелинейных параметров в осредненном потоке получатся следующие выражения:

$$G = m\bar{G}; \quad i^* = \frac{k}{k-1} R \frac{\bar{i}^*}{\bar{G}}; \quad S^* = R \frac{\bar{S}}{\bar{G}}; \quad E = \frac{k}{k+1} R \frac{\bar{E}}{\bar{G}};$$

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{2 \frac{k}{k+1} R \frac{\bar{M}}{\bar{G}}}.$$

Предполагается, что в осредненном потоке $\gamma_{\text{оср}} = 0$. Отсюда температура торможения

$$T_{\text{оср}}^* = \bar{i}^* / \bar{G}, \quad (3.8)$$

давление торможения

$$p_{\text{оср}}^* = \frac{T_{\text{оср}}^{*\frac{k}{k-1}}}{\exp \bar{S} / \bar{G}}, \quad (3.9)$$

приведенная скорость

$$\lambda_{\text{оср}} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{T_{\text{оср}}^* \bar{G}}}, \quad (3.10)$$

угол выхода потока

$$\alpha_{\text{оср}} = \arccos \frac{\bar{M}}{2r_{\text{оср}} \lambda_{\text{оср}} \bar{G} \sqrt{T_{\text{оср}}^*}}. \quad (3.11)$$

Эти параметры являются основными характеристиками потока и могут быть использованы при идентификации в качестве осредненных измеренных параметров.

Для вывода формулы осредненного радиуса надо применить формулу (3.11) для равномерного потока, все параметры которого равны осредненным:

$$\alpha_{\text{оср}} = \arccos \frac{\int_F r \lambda_{\text{оср}} p_{\text{оср}}^* q_{\text{оср}} \sin 2\alpha_{\text{оср}} dF}{2r_{\text{оср}} \lambda_{\text{оср}} \sqrt{T_{\text{оср}}^*} \int_F \frac{p_{\text{оср}}^*}{\sqrt{T_{\text{оср}}^*}} q_{\text{оср}} \sin \alpha_{\text{оср}} dF},$$

или вынося постоянные параметры за знак интеграла и сокращая

$$r_{\text{оср}} = \frac{\int_F r dF}{\int_F dF}.$$

Для обычного в ГТД кольцевого канала (см. рис. 3.3.)

$$r_{\text{оср}} = \frac{2}{3} \frac{r_{\text{н}}^3 - r_{\text{в}}^3}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2}. \quad (3.12)$$

Этот радиус можно назвать среднимпульсным. Он применялся и ранее. Интересно сопоставить формулу (3.12) с другими способами осреднения радиусов. Для удобства сравнения все радиусы отнесены к среднеарифметическому, т. е. $\bar{r} = 2r / (r_{\text{н}} + r_{\text{в}})$, и выражены через отношение среднеарифметического диаметра к высоте лопаток θ . Для среднимпульсного радиуса получилась формула

$$\bar{r} = 1 + \frac{1}{3\theta^2}, \quad (3.13)$$

для среднегеометрического

$$\bar{r} = \sqrt{1 + \frac{1}{\theta^2}}, \quad (3.14)$$

для среднего радиуса, предложенного П. К. Казанджаном:

$$\bar{r} = \frac{2}{r_{\text{н}} + r_{\text{в}}} \sqrt{\frac{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2}{2 \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{в}}}}} = \sqrt{\frac{2}{\theta \ln \frac{\theta + 1}{\theta - 1}}}, \quad (3.15)$$

для среднего радиуса, предложенного М. К. Максutowой:

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{r}_{\text{в}} \bar{r}_{\text{н}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\theta^2}}. \quad (3.16)$$

Кривые на рис. 3.2 наглядно показывают, что в осевых турбинах с малой относительной длиной ($\theta > 6 \dots 7$) разница в радиусах пренебрежимо мала. Но при большой относительной длине лопаток, а в особенности для радиально-осевых турбин, разница между ними становится существенной и замена среднимпульсного радиуса другими приводит уже к заметным погрешностям.

При необходимости по четырем основным параметрам осредненного потока ($T_{\text{оср}}^*$, $p_{\text{оср}}^*$, $\lambda_{\text{оср}}$, $\alpha_{\text{оср}}$) могут быть определены и все остальные параметры потока, но погрешности их будут

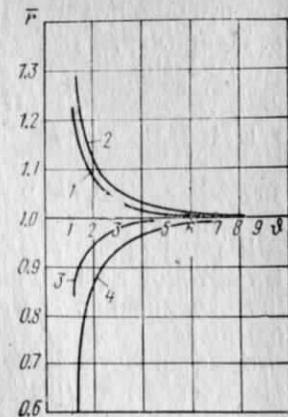


Рис. 3.2. Кривые влияния способов осреднения на величину среднего радиуса ($r=1$ — для среднеарифметического):

1 — для среднимпульсного; 2 — для среднегеометрического; 3 — для радиуса, предложенного П. К. Казанджаном; 4 — для радиуса, предложенного М. К. Максutowой

существенно больше. При точных расчетах пренебрегать ими нельзя. Например,

$$G_{\text{оср}} \neq m \frac{p_{\text{оср}}^* q (\lambda_{\text{оср}}) \sin \alpha_{\text{оср}} F}{\sqrt{T_{\text{оср}}^*}} \quad (3.17)$$

или

$$p_{\text{оср}} \neq p_{\text{оср}}^* \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{оср}}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (3.18)$$

В ряде работ предлагается использовать несколько осредненных потоков с различным выбором основных параметров, подлежащих осреднению. Это вызывает усложнение расчетов. Удобнее использовать предложенные ранее коэффициенты неравномерности, которые представляют собой отношения параметров в неравномерном и осредненных потоках. Для энтальпии, энтропии, кинетической энергии и момента количества движения они очевидно будут равны единице, а для расхода газа

$$K_G = \frac{\bar{g} \sqrt{T_{\text{оср}}^*}}{p_{\text{оср}}^* q_{\text{оср}} \sin \alpha_{\text{оср}} F}. \quad (3.19)$$

Аналогично определяются и другие коэффициенты неравномерности. Они непосредственно включаются в соответствующие формулы математической модели. Например, вместо формулы (3.17) получится

$$G_{\text{оср}} = m K_G \frac{p_{\text{оср}}^* q (\lambda_{\text{оср}}) \sin \alpha_{\text{оср}} F}{\sqrt{T_{\text{оср}}^*}}. \quad (3.20)$$

Коэффициенты неравномерности имеют еще одно важное назначение. Они связывают математические модели III и IV уровней сложности. Обычно расчет сначала выполняется по более простым моделям III уровня, т. е. на среднем диаметре, и определяются все параметры лопаточной машины. Позднее производится поверочный расчет пространственного потока по моделям IV уровня сложности. Полученные параметры всегда отличаются друг от друга. Это очень мешает при организации систем автоматизированного проектирования. Расхождение параметров можно компенсировать введением коэффициентов неравномерности, уточняемых при последовательных приближениях. В этом случае коэффициенты неравномерности удобнее относить не к осредненным, а к параметрам на среднем диаметре. Поэтому все они будут отличными от единицы и могут быть определены по формулам

$$K_G = \frac{\bar{g} \sqrt{T_{\text{ср}}^*}}{p_{\text{ср}}^* q_{\text{ср}} \sin \alpha_{\text{ср}} \cos \gamma_{\text{ср}} F}, \quad (3.21)$$

$$K_I = \frac{i^*}{p_{\text{ср}}^* \sqrt{T_{\text{ср}}^*} q_{\text{ср}} \sin \alpha_{\text{ср}} \cos \gamma_{\text{ср}} F}, \quad (3.22)$$

$$K_S = \frac{\bar{S}^* \sqrt{T_{\text{ср}}^*}}{p_{\text{ср}}^* \ln \left(T_{\text{ср}}^{*k} / p_{\text{ср}}^* \right) q_{\text{ср}} \sin \alpha_{\text{ср}} \cos \gamma_{\text{ср}} F}, \quad (3.23)$$

$$K_E = \frac{\bar{E}}{\lambda_{\text{ср}}^2 p_{\text{ср}}^* \sqrt{T_{\text{ср}}^*} q_{\text{ср}} \sin \alpha_{\text{ср}} \cos \gamma_{\text{ср}} F}, \quad (3.24)$$

$$K_M = \frac{\bar{M}}{r_{\text{ср}} \lambda_{\text{ср}} p_{\text{ср}}^* q_{\text{ср}} \sin 2\alpha_{\text{ср}} \cos^2 \gamma_{\text{ср}} F} \quad (3.25)$$

Входящие в эти формулы интегралы определяются по формулам (3.3) ... (3.7), в которых используются параметры, рассчитанные по моделям IV уровня сложности. В отличие от экспериментальных эти параметры будут заданы не дискретно, поэтому формулы (3.3) ... (3.7) могут быть упрощены, но их вид будет зависеть от применяемой модели IV уровня.

Можно получить простые зависимости между параметрами на среднем диаметре и осредненными, если использовать коэффициенты неравномерности

$$T_{\text{оср}}^* = T_{\text{ср}}^* \frac{K_I}{K_G}, \quad (3.26)$$

$$p_{\text{оср}}^* = p_{\text{ср}}^* \frac{K_S / K_G}{\left[\frac{K_I}{K_G} T_{\text{ср}}^{*(1-K_S/K_G)} \right]^{\frac{k}{k-1}}}, \quad (3.27)$$

$$\lambda_{\text{оср}} = \lambda_{\text{ср}} \sqrt{\frac{K_E}{K_I}}, \quad (3.28)$$

$$\cos \alpha_{\text{оср}} = \cos \alpha_{\text{ср}} \frac{K_M}{\sqrt{K_E K_G}}; \quad (3.29)$$

$$G_{\text{оср}} = G_{\text{ср}} K_G. \quad (3.30)$$

Предполагается, что в качестве среднего радиуса используется среднечастотный и $\gamma_{\text{оср}} = \gamma_{\text{ср}}$. При использовании других средних радиусов в формулу (3.29) войдет отношение радиусов.

Коэффициенты неравномерности в основном зависят от относительной длины лопаток, способа их закрутки и режима работы. При малой относительной длине лопаток ($\theta > 6 \dots 10$), когда параметры на среднем радиусе хорошо совпадают с осредненными по всему сечению, все коэффициенты неравномерности будут примерно равны единице. В остальных случаях формулы (3.26) ... (3.30) включаются непосредственно в математическую модель III уровня сложности. Если предположить, что при небольших изменениях в проточной части коэффициенты неравномерности остаются постоянными, то их можно рассчитать один раз по модели IV уровня, а затем оптимизировать проточную часть по более простой модели

III уровня с этими коэффициентами. Такой подход существенно сокращает потребное машинное время и позволяет решать многие задачи оптимизации, которые без него были бы нереальными.

3.3.3. Погрешности и веса измерений

Измеряемые параметры газотурбинного двигателя имеют различную физическую природу, измеряются различными способами и, конечно, не с одинаковой точностью. Она существенно влияет на результаты идентификации, поэтому все измерения надо приводить к равноточным. Если пренебречь коррелированием погрешностей измерений, то для этого достаточно просто умножить результаты измерений на корни квадратные из весов измерений, т. е.

$$\bar{z}_{ij \text{ изм}} = z_{ij \text{ изм}} \sqrt{g_i} \quad (3.31)$$

Можно умножать не результаты измерений, а рассчитанные по ним невязки:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \sqrt{g_i} \quad (3.32)$$

Веса измерений* считаются независимыми от режима и определяются по формуле

$$g_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2 \quad (3.33)$$

где σ_i — средняя квадратичная погрешность i -го измерения; σ_0 — средняя квадратичная погрешность на единицу веса.

Можно показать, что умножение σ_0 на произвольный коэффициент эквивалентно умножению системы нормальных уравнений на этот же коэффициент, что конечно не влияет на результаты решения системы. Следовательно, величина σ_0 не влияет на результаты идентификации и ее можно выбирать произвольно. Например, часто используют $\sigma_0 = 1$. Но опыт работы показал, что лучше ее выбирать так, чтобы среднее значение взвешенных невязок $\bar{\varepsilon}_{ij}$, подсчитываемых по формуле (3.32), отличалось от единицы не больше, чем на один-два порядка. При больших величинах σ_0 были отмечены случаи переполнения разрядной сетки ЭЦВМ при решении системы нормальных уравнений, а при малых — случаи искажения результатов из-за «шумов» ЭВЦМ, т. е. некоторые промежуточные цифры в процессе расчета становились соизмеримыми с точностью ЭЦВМ. В практике расчетов подобные случаи встречаются очень редко, но идентификация является исключением, так как матрица нормальных уравнений часто имеет плохую обусловленность, при которой резко возрастают погрешности расчета.

Если при идентификации используются достаточно точные результаты измерений, то целесообразно учитывать корреляцию по-

* Более правильный термин — вес невязки, но он не получил распространения.

решностей. В этом случае составляется ковариационная матрица K

$$K = \begin{vmatrix} \tilde{D}[y_1] & \text{cov}[y_1 y_2] & \text{cov}[y_1 y_3] & \dots & \text{cov}[y_1 y_n] \\ \text{cov}[y_2 y_1] & \tilde{D}[y_2] & \text{cov}[y_2 y_3] & \dots & \text{cov}[y_2 y_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}[y_n y_1] & \text{cov}[y_n y_2] & \text{cov}[y_n y_3] & \dots & \tilde{D}[y_n] \end{vmatrix}, \quad (3.34)$$

где $\tilde{D}[y_1, 2, \dots, n] = \sigma_y^2$ — эмпирические дисперсии погрешностей измеряемых параметров; $\text{cov}[y_1 y_2] \dots \text{cov}[y_n y_{n-1}]$ — эмпирические ковариации погрешностей.

Ковариации учитывают взаимное влияние погрешностей (корреляции) и определяются по формуле

$$\text{cov}[y_i y_j] = \frac{1}{z-1} \sum_1^z (y_i - \tilde{y}_i)(y_j - \tilde{y}_j), \quad (3.35)$$

где \tilde{y}_i, \tilde{y}_j — средние арифметические значения соответствующих погрешностей; z — количество повторяющихся измерений. Если измерения не повторяются, то составление ковариационной матрицы (3.34) затруднительно.

После обращения ковариационной матрицы $G = K^{-1}$ получается матрица весов G , которая используется при идентификации вместо весов (см. подразд. 3.4.6). Для ряда параметров, таких как частота вращения, расход газа, расход топлива, атмосферные условия, крутящий момент и т. д., можно априорно утверждать, что их погрешности будут некоррелированы, так как эти параметры измеряются независимо друг от друга. Следовательно, ковариации для них будут равны нулю. Другие параметры, измеряемые одновременно в неравномерном поле, такие как среднее в сечении давление, температура, угол потока, приведенная скорость и т. д., должны иметь коррелированные погрешности. К сожалению, способы определения ковариаций, пригодные для использования, в данной методике отсутствуют. Поэтому впредь до разработки таких способов приходится эти ковариации принимать равными нулю. Аналогичное допущение используется в большинстве работ. Если ковариации пренебрежимо малы или их невозможно рассчитать и приходится принимать равными нулю, то формула (3.34) упрощается:

$$K = \begin{vmatrix} \tilde{D}[y_1] & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \tilde{D}[y_2] & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \tilde{D}[y_n] \end{vmatrix}$$

и матрица весов будет иметь следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1/\sigma_1^2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Результаты расчетов с использованием этой матрицы и отдельных весов по формуле (3.33) будут совершенно одинаковыми, но использование формулы (3.33) предпочтительнее, так как при этом уменьшается объем оперативного запоминающего устройства ЭЦВМ, занятый громоздкими матрицами.

В любом случае для расчета весов нужны средние квадратичные погрешности измерений σ_y . При многократно повторяющихся измерениях они определяются по формуле

$$\sigma_y = \sqrt{\bar{D}[y]} = \sqrt{\frac{1}{z-1} \sum_1^z (y - \bar{y})^2}.$$

При испытаниях газотурбинных двигателей и их узлов (компрессоров, турбин и т. п.) далеко не всегда удается многократно повторять каждое измерение. Следовательно, нужны упрощенные методы расчета погрешностей, использующие результаты только однократных измерений. Опыт работы показал, что погрешности определения весов мало влияют на результаты идентификации, поэтому значения весов можно оценивать приближенно.

При однократных измерениях, используя анализ точности применяемых приборов, можно оценить только предельную погрешность. Но на основании центральной предельной теоремы погрешности измерения подчиняются нормальному закону распределения, поэтому средняя квадратичная погрешность равна приблизительно одной трети предельной. Такой способ рекомендуется в ряде работ.

Способы определения предельных погрешностей зависят от типов используемых приборов и от условий измерений. В большинстве случаев не удается организовать непосредственные измерения и приходится использовать косвенные, т. е. определять параметр по формуле $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Его средняя квадратичная погрешность может быть вычислена по общепринятой формуле

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}, \quad (3.37)$$

но удобнее для каждого параметра записать свою расчетную формулу, полученную из выражения (3.37). В качестве примера такие формулы приводятся с учетом конкретных условий измерения для нескольких параметров, которые измерялись при испытаниях экспериментальных турбин и компрессоров.

Частота вращения n определялась при помощи электрического секундомера, счетчика импульсов и индуктивного датчика, который

давал два импульса за оборот. Включение секундомера и счетчика производилось от одного тумблера. Расчетные формулы для этого параметра:

$$n = \frac{i}{2\tau}; \quad \sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)^2 \sigma_\tau^2} = n \sqrt{\left(\frac{\sigma_i}{i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\tau}{\tau}\right)^2},$$

где $\sigma_i = 2/3$ импульса, так как при включении и выключении секундомера возможна ошибка в один импульс; σ_τ — погрешность секундомера, которая зависит от используемой шкалы.

При измерении расхода газа по разрежению во входном патрубке его погрешность определялась по погрешностям непосредственно измеряемых параметров с помощью формулы (3.37). Температура T измерялась батареей термопар, преимущественно хромель-копелевых. Термопары тарировались в термостатах. Результаты тарировок обрабатывались на ЭЦВМ при помощи специальной программы, которая давала коэффициенты формулы $T = 273,16 + bt + ct^2$ и их средние квадратичные погрешности σ_b и σ_c . Погрешность температуры определялась по формуле

$$\sigma_T = \sqrt{t^2 \sigma_b^2 + t^4 \sigma_c^2 + (b + 2ct)^2 \sigma_t^2},$$

где σ_t — погрешность измерения температуры в мВ. Она складывается из погрешностей холодного спая и самого потенциометра. Влияние температуры помещения не учитывалось, так как вводилась поправка на температуру нормального элемента.

Крутящий момент M_e измерялся на качающемся корпусе тормоза. Расчетная формула $M_e = a_\theta \theta$ и погрешность коэффициента a_θ получались путем тарировки. Момент механических потерь M_r определялся путем прокрутки, которая проводилась дважды перед началом испытаний и после их окончания при рабочих частотах вращения и температурах масла. Зависимость момента M_r от числа оборотов получалась линейной. Температура при тарировке и при испытаниях изменялась в очень небольших пределах, поэтому для нее также принималась линейная зависимость. Таким образом, расчетная формула для момента

$$M_r = a_0 + a_n \Delta n + a_t \Delta t. \quad (3.38)$$

При расчете на ЭЦВМ коэффициентов этой формулы одновременно определялись и их погрешности. Внутренний момент M_i для турбин рассчитывался по формуле $M_i = M_e + M_r$. Одна из турбин имела плавающую втулку, поэтому определялся непосредственно внутренний момент M_i . В общем случае погрешность момента вычислялась по формуле

$$\sigma_{M_i} = \sqrt{\theta^2 \sigma_{a_\theta}^2 + a_\theta^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_{a_0}^2 + \Delta n^2 \sigma_{a_n}^2 + a_n^2 \sigma_{\Delta n}^2 + \Delta t^2 \sigma_{a_t}^2 + a_t^2 \sigma_{\Delta t}^2}.$$

Давления, измеряемые пьезометрами, и их средняя квадратичная погрешность подсчитывались по формулам $p = B + \rho p_{\text{изм}}$;

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_B^2 + \rho^2 \sigma_{p_{\text{изм}}}^2 + p_{\text{изм}}^2 \sigma_\rho^2}$$

где σ_B — погрешность барометрического давления, которая определялась по паспорту ртутно-чашечного барометра с учетом температуры в помещении; $\sigma_{p_{\text{изм}}}$ — погрешность измерения столба жидкости в пьезометре. В соответствии с известными рекомендациями она принималась равной 0,67 мм, т. е. предельная погрешность равнялась 2 мм. σ_ρ — погрешность плотности жидкости. Для воды и ртути она принималась равной нулю, так как их плотность определялась с учетом температуры в помещении и вода использовалась только дистиллированная. Для заливки пьезометров часто использовался в виду большей плотности ($\rho \approx 1,8 \dots 1,9 \text{ г/см}^3$) раствор хлористого цинка. Погрешности плотности для него и сама величина плотности определялись по результатам тарировки, которая производилась по водяному пьезометру большой длины.

При использовании электрического двигателя большой мощности трудно сделать его корпус качающимся и приходится определять крутящий момент по измерению электрических параметров. Расчетная формула для двигателя постоянного тока должна учитывать потери холостого хода, потери в дополнительных полюсах и сопротивление якоря:

$$M_e = \frac{A}{n} (UI - BI^2 - CI) - M_r,$$

где U — напряжение на клеммах электродвигателя; I — ток в цепи якоря; A, B, C — эмпирические коэффициенты, значения которых зависят от измерительной аппаратуры; M_r — момент холостого хода, определяемый по формуле (3.38). Отсюда формула для расчета погрешности:

$$\sigma_{M_e} = \frac{A}{n} \sqrt{I^2 (U - BI - C)^2 \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{n^2} \right) (\sigma_A^2 + \sigma_n^2) + I^2 (\sigma_U^2 + I^2 \sigma_B^2 + \sigma_C^2) + (U - 2BI - C)^2 \sigma_I^2 + \frac{n^2}{A^2} \sigma_{M_r}^2},$$

где $\sigma_{M_r} = \sqrt{\sigma_{a_0}^2 + \Delta n^2 \sigma_{a_n}^2 + \Delta I^2 \sigma_{a_I}^2 + a_n^2 \sigma_{\Delta n}^2 + a_I^2 \sigma_{\Delta I}^2}$.

Наиболее сложным является определение погрешностей при измерениях в неравномерных полях. Обычно каждый исследуемый параметр (давление, температура, приведенная скорость, ее направление и т. д.) измеряется в целом ряде точек поля и осредняется. При расчетах используется его среднеарифметическое или среднее интегральное значение. В литературе не удалось обнаружить каких-либо приемлемых рекомендаций по расчету погрешностей таких параметров. Поэтому был разработан приближенный способ оценки. Он заключается в том, что исследуемое сечение разбива-

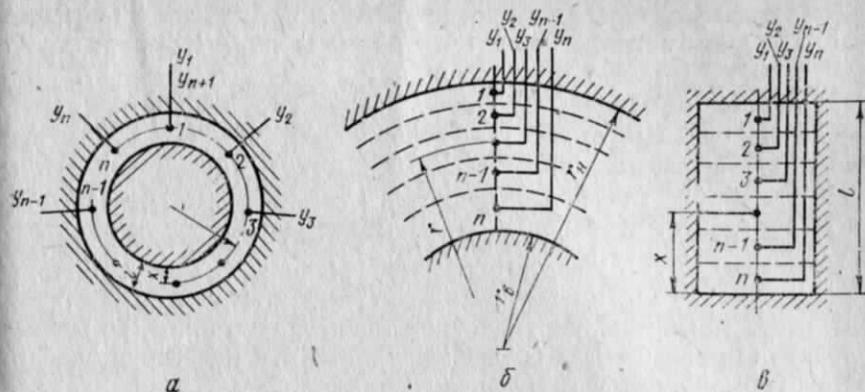


Рис. 3.3. Типы сечений при траверсировании потока

ется на n равновеликих участков так, чтобы в центре каждого из них производилось измерение. Для трех типичных сечений это показано на рис. 3.3. В каждой точке может помещаться не только один приемник, но и многоточечная гребенка. Осреднение измеряемого параметра y будет более правильным, если взять определенный интеграл по площади сечения, т. е.

$$y_{\text{ср}} = \frac{\iint y dF}{F}.$$

Без учета переменности параметра по второму направлению формула для сечений, изображенных на рис. 3.3, примет следующий вид:

$$y_{\text{ср}}^a = \frac{1}{2\pi r l} \int_0^l r d\theta \int_0^l y dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\theta; \quad (3.39)$$

$$y_{\text{ср}}^b = \frac{1}{\pi (r_n^2 - r_b^2)} \int_{r_b}^{r_n} r dr \int_0^{2\pi} y d\theta = \frac{1}{r_n - r_b} \int_{r_b}^{r_n} \frac{y r dr}{r_{\text{ср}}}; \quad (3.40)$$

$$y_{\text{ср}}^c = \frac{1}{bl} \int_0^l b y dx = \frac{1}{l} \int_0^l y dx. \quad (3.41)$$

После интегрирования по формуле трапеций все три формулы примут одинаковый вид

$$y_{\text{ср}} \approx \frac{1}{n} \left(\frac{y_1}{2} + y_2 + \dots + y_n + \frac{y_{n+1}}{2} \right).$$

Для сечения, изображенного на рис. 3.3, а, $y_{n+1} = y_1$. Это условие приближенно можно принять и для других сечений, если значения

параметров на границах являются близкими. Тогда $y_{cp} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$,

т. е. в данном случае среднее арифметическое значение эквивалентно интегрированию по формуле трапеций. Для нее известна точная формула с остаточным членом, согласно которой

$$y_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi).$$

Если взять максимальное значение второй производной, то можно получить выражение для средней квадратичной погрешности, равной, как обычно, одной трети предельной:

$$\sigma_{y_{cp}} = \frac{(b-a)^2}{36n^2} f''_{max}(x). \quad (3.42)$$

Для сечений, показанных на рис. 3.3, эта формула принимает следующий вид:

$$\sigma_{y_{cp}^a} = \frac{\pi^2}{9n^2} f''_{max}(\theta); \quad (3.43)$$

$$\sigma_{y_{cp}^r} = \frac{(r_n - r_n)^2}{36n^2} f''_{max}(r); \quad (3.44)$$

$$\sigma_{y_{cp}^s} = \frac{l^2}{36n^2} f''_{max}(x). \quad (3.45)$$

Значения вторых производных можно определять при специальных методических испытаниях или приближенно по измеренным значениям параметров. В обоих случаях удобно использовать безразностные формулы численного дифференцирования. Определение погрешности из-за неравномерности по второму направлению делается по тем же формулам (3.43) ... (3.45), только значения y берутся уже осредненными по первому направлению. Суммарная погрешность для сечения на рис. 3.2, a определяется по формуле

$$\sigma_{y_{cp}} = \sqrt{\sigma_y^2 + (\sigma_{y_{cp}})_\theta^2 + (\sigma_{y_{cp}})_r^2}. \quad (3.46)$$

Для остальных сечений формулы будут аналогичными. Предложенный способ позволяет решать и обратную задачу, т. е. определять необходимое количество точек измерения в данном сечении по известной предельно допустимой погрешности.

Формулы для оценки погрешностей параметров, определяемых по результатам траверсирования потока с интегрированием, получены дифференцированием применяемых зависимостей с использованием формулы (3.37). Сначала определяются погрешности всех параметров, входящих в подынтегральные выражения. Например,

для отношения давлений π [см. формулу (3.1)] выражение погрешности имеет следующий вид:

$$\sigma_\pi = \sqrt{(1 - \pi_{tr})^2 \sigma_b^2 + (1 - \pi_{tr}^2) \sigma_c^2 + (b + 2c\pi_{tr})^2 \sigma_{\pi_{tr}}^2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\sigma_\tau = \frac{k-1}{k} \frac{1}{\pi^{1/k}} \sigma_\pi; \quad \sigma_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \frac{1}{1-\tau}} \sigma_\tau$$

и т. д. Если принять допущение, что погрешности подынтегральных функций одинаковы во всех точках данного сечения, и пренебречь остаточным членом в формуле Симпсона, который очень мал, то можно получить простую формулу для средней квадратичной погрешности интеграла:

$$\sigma_y = \frac{2}{9} \Delta r \Delta \theta \sqrt{(10n_r - 1)(10n_\theta - 1)} \cdot \sigma_i, \quad (3.47)$$

где Δr и $\Delta \theta$ — шаги траверсирования; $(2n_{r,\theta} + 1)$ — число точек траверсирования; σ_i — погрешность подынтегрального выражения. Дальнейшее вычисление погрешностей ведется по обычным формулам.

3.3.4. Контроль результатов измерений

Выше указывалось, что при наличии даже одной грубой ошибки в результатах измерений, оставшейся незамеченной, апостериорная модель, полученная при помощи идентификации, становится непригодной. Грубые ошибки при измерениях встречаются сравнительно редко, чаще они возникают при подготовке исходной информации для ЭЦВМ, в особенности при ручной перфорации*. Исходная информация после перфорации и печати всегда контролируется визуально, но при больших массивах информации такой контроль недостаточно надежен и очень трудоемок. Необходима автоматизация контроля. Ее можно выполнить путем статистического анализа взвешенных невязок.

Взвешенные абсолютные невязки определяются по формуле

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (z_{ij \text{ расч}} - z_{ij \text{ изм}}) \sqrt{g_i g_j}, \quad (3.48)$$

где $z_{ij \text{ изм}}$ — измеренный параметр; $z_{ij \text{ расч}}$ — соответствующая ему компонента вектора Z ; g_i — вес измерения, определяемый по формуле (3.33); g_j — вес данной экспериментальной точки, который обычно принимается равным единице. Но можно его уменьшать для второстепенных точек, например, для точек, находящихся на краях

* Если испытания автоматизированы, а информация передается на другую ЭЦВМ для идентификации непосредственно на машинных носителях, то вероятность появления грубых ошибок резко уменьшается, но все равно отказаться от контроля нельзя.

характеристик. Взвешенные относительные невязки определяются по формуле

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{z_{ij\text{расч}} - z_{ij\text{изм}}}{z_{ij\text{изм}}} \sqrt{g_i g_j}, \quad (3.49)$$

где g_i — вес относительной невязки (безразмерный).

Применение относительных невязок снижает требования к точности определения весов невязок, но абсолютные значения остаточных невязок после идентификации становятся зависящими от режимных параметров.

Все взвешенные невязки являются равноценными и безразмерными, поэтому можно не обращать внимания на то, по каким параметрам они получены. Каждую взвешенную невязку следует рассматривать как непрерывную случайную величину, а все вместе как выборку из существующей генеральной совокупности, только часть которой удалось обнаружить измерениями. Исследование выборки начинается с вычисления начальных и центральных моментов первых четырех порядков. Для удобства программирования используется формула

$$v_n = \frac{\sum_i^l \sum_j^j (\bar{\varepsilon}_{ij} - a_i)^n}{\sum_i^l j} \quad n = 1, 2, 3 \text{ и } 4. \quad (3.50)$$

При вычислении нецентральных моментов v (I вариант) $a_i = 0$, а центральных μ (III вариант) $a_i = \bar{M}[\bar{\varepsilon}_{ij}]$. Кроме того, используются математические ожидания для каждого типа измеренных параметров i (II вариант) $a_i = \bar{M}_i[\bar{\varepsilon}_{ij}]$. Известные соотношения между моментами использовались только для контроля. Во всех трех вариантах кроме общих моментов, рассчитываемых по формуле (3.50), вычисляются еще аналогичные моменты для каждого типа измеренных параметров i по отдельности. Формула та же (3.50), но в ней отсутствует только суммирование по i . Полученные значения моментов позволяют определить математическое ожидание, дисперсию, асимметрию, эксцесс и среднее квадратичное отклонение по формулам

$$\begin{aligned} \bar{M}[\bar{\varepsilon}_{ij}] &= v_1; \quad \bar{D}[\bar{\varepsilon}_{ij}] = \mu_2; \quad \bar{A}[\bar{\varepsilon}_{ij}] = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}; \\ \bar{E}[\bar{\varepsilon}_{ij}] &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3; \quad \sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{v_2 - v_1^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

После окончания расчета I варианта статистического анализа производится выявление грубых ошибок и отбраковка соответствующих невязок. Ошибка считается грубой, если соответствующая невязка не удовлетворяет условию

$$4\sigma - |\bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{M}[\bar{\varepsilon}_{ij}]| \geq 0. \quad (3.52)$$

Большинство авторов для отбраковки результатов измерений используют правило «трех сигм», а не четырех, как в неравенстве (3.52). Однако при неудачном выборе нулевого приближения варьируемых коэффициентов правило «трех сигм» приводило иногда к отбраковке доброкачественных измерений. Поэтому пришлось повысить требования к надежности вывода о наличии грубой ошибки и перейти на правило «четырёх сигм», которое иногда рекомендуется в литературе. Надежность вывода при этом увеличилась с 0,99 до 0,999 при 18 невязках. Во всех решенных задачах число невязок было больше 18, а следовательно, надежность вывода была больше 0,999, т. е. исключились ошибки, вероятность появления которых менее 0,001. При выявлении грубой ошибки вместо соответствующей невязки и измеренного значения параметра записываются нули в матрицах. Выводятся на печать надпись «Замер вычеркнут», номер экспериментальной точки, номер измерения, величина невязки, расчетное и измеренное значения параметра. После выявления всех ошибок повторяется I вариант статистического анализа. Он может повторяться несколько раз до тех пор, пока не перестанут выявляться грубые ошибки и только после этого рассчитываются II и III варианты. В большинстве случаев последующая визуальная проверка позволяла найти причину грубой ошибки и исправить ее при повторных расчетах.

Матрица измеренных параметров рассчитана на одинаковое число измерений в каждой экспериментальной точке, хотя это не всегда возможно. Поэтому вместо отсутствующих измерений и соответствующих им невязок записываются нули. Кроме того, нулевые невязки возникают при выявлении грубых ошибок и изредка у некоторых режимных параметров. За счет «шумов» ЭЦВМ невязки могут равняться нулю не точно, а приближенно. Поэтому для всех невязок вводится проверка $\bar{\varepsilon}_{ij} > 10^{-8}$. Если невязка не удовлетворяет этому неравенству, то она исключается из статистического анализа и уменьшается число невязок j для соответствующего измеренного параметра.

По данному алгоритму статистического анализа была составлена программа в виде отдельного модуля, которая входит в программу идентификации. Она используется не только для статистического анализа невязок перед процессом идентификации, но и, главным образом, после него для аналогичного анализа остаточных невязок. Так как грубые ошибки были исключены до идентификации и не могли возникнуть вновь, то блоки программы, организующие выявление грубых ошибок после идентификации, не используются.

3.4. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

3.4.1. Основные расчетные формулы

Варьируемые параметры, уточняемые при идентификации, выбираются из числа наименее достоверных компонент векторов Y в моделях I уровня сложности, X и Y в моделях II уровня и R, Y

в моделях III и IV уровней (см. разд. 0.2). Выбор ведется в соответствии с рекомендациями, изложенными в подразд. 3.4.5. Величина варьируемых параметров и диапазон ее изменения могут быть самыми различными, а это замедляет скорость сходимости процесса последовательных приближений. Поэтому вводится масштабирование всех варьируемых параметров по формуле

$$\bar{y}_n = \frac{y_n - y_{n,\min}}{y_{n,\max} - y_{n,\min}}, \quad (3.53)$$

где y_{\max} и y_{\min} — максимально и минимально возможные значения варьируемых параметров, которые задаются ориентировочно. Все параметры после масштабирования изменяются примерно в пределах от нуля до единицы. Обратный переход осуществляется по формуле

$$y_n = y_{n,\min} + \bar{y}_n (y_{n,\max} - y_{n,\min}). \quad (3.54)$$

Всегда представляется возможным задать какие-то значения варьируемых параметров в качестве нулевого приближения, тогда можно искать не сами значения \bar{y} , а только приращения к ним \bar{x} , связанные формулой $\bar{y}_n = \bar{y}_{0n} + \bar{x}_n$. Если приращения достаточно малы, то можно, используя разложение в ряд Тэйлора, линеаризовать математическую модель относительно этих приращений и получить линейную систему:

$$z_{ij\text{расч}} = (z_{ij})_0 + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_1}\right)_0 \bar{x}_1 + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_2}\right)_0 \bar{x}_2 + \dots + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_n}\right)_0 \bar{x}_n, \quad (3.55)$$

из которой получается система условных уравнений:

$$\left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_1}\right)_0 \bar{x}_1 + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_2}\right)_0 \bar{x}_2 + \dots + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_n}\right)_0 \bar{x}_n + (z_{ij})_0 - (z_{ij})_{\text{изм}} = \xi_{ij}, \quad (3.56)$$

где i — номер компоненты вектора (нумеруются только компоненты, соответствующие измеренным параметрам); j — номер режима, т. е. номер экспериментальной точки. Система условных уравнений всегда переопределенная (т. е. число уравнений больше числа неизвестных) и несовместная из-за неизбежных погрешностей измерений. Если подставить в эту систему найденные после решения параметры $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, то уравнения будут равняться остаточным невязкам ξ_{ij} . Как указывалось выше, необходимо минимизировать взвешенную сумму их квадратов:

$$s = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} (\xi_{ij} \sqrt{g_i g_j})^2 \quad \text{или} \quad (3.57)$$

$$s = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \left[\left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_1}\right)_0 \bar{x}_1 + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_2}\right)_0 \bar{x}_2 + \dots + \left(\frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{y}_n}\right)_0 \bar{x}_n + \bar{\xi}_{ij} \right]^2.$$

Частные производные этой системы образуют матрицу условных уравнений \mathbf{C} , которая фактически является якобианом, а невязки — вектор-столбец свободных членов \mathbf{F} . Система нормальных уравнений получается после дифференцирования формулы (3.57), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_1} &= 0; \\ \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_2} &= 0; \\ &\dots \\ \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Эта система всегда определенная и совместная. Она решается обычными способами.

3.4.2. Методика вычислений

Производные, входящие в якобиан \mathbf{C} , определяются численным методом. Для этого каждому варьируемому параметру даются приращения по формуле

$$\bar{y}_+ = (1 + m) \bar{y}_0, \quad (3.59)$$

где m — масштаб вариации, обычно равный 0,001. После этого просчитывается модель, находится вектор параметров \mathbf{Z}_+ , соответствующий данному приращению, и производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = \frac{z_+ - z_0}{m \bar{y}_0} \sqrt{g_i g_j}; \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = \frac{z_+ - z_0}{z_{\text{изм}} m \bar{y}_0} \sqrt{g_i g_j} \quad (3.61)$$

при использовании соответственно абсолютных и относительных невязок. Иногда применяется двухсторонняя вариация. В этом случае варьируемому коэффициенту дается еще одно приращение по формуле

$$\bar{y}_- = (1 - m) \bar{y}_0. \quad (3.62)$$

Рассчитывается вектор \mathbf{Z}_- и производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = \frac{z_+ - z_-}{2m \bar{y}_0} \sqrt{g_i g_j}; \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = \frac{z_+ - z_-}{z_{\text{изм}} 2m \bar{y}_0} \sqrt{g_i g_j}. \quad (3.64)$$

Применение двухсторонней вариации улучшает сходимость процесса последовательных приближений, но увеличивает затраты машинного времени на каждое приближение. При медленной сходимости она дает выигрыш в машинном времени, а при быстрой — проигрыш.

Таблица 3.1

n	z			n	z		
	Односторонняя вариация	Двухсторонняя вариация	ДФЭ		Односторонняя вариация	Двухсторонняя вариация	ДФЭ
2	3	5	4	7	8	15	8
3	4	7	4	8	9	17	16
4	5	9	8	9	10	19	16
5	6	11	8	10	11	21	16
6	7	13	8				

Возможен еще один способ получения производных — дробный факторный эксперимент (см. разд. 1.5). Он отличается тем, что приращения факторам даются не по формулам (3.59) и (3.62), а в соответствии с матрицей планирования эксперимента при ДФЭ. После расчетов по математической модели строится линейная модель, коэффициенты которой и будут искомыми производными. Количество просчетов модели z в этом способе получается промежуточным. Оно приведено в табл. 3.1 для всех трех способов. При односторонней вариации оно определяется по формуле $z=n+1$, а при двухсторонней — $z=2n+1$. По экономичности ДФЭ немного уступает односторонней вариации, но при сложном характере поверхности отклика рассчитанные по нему значения производных получаются более надежными и процесс последовательных приближений сходится быстрее, поэтому ДФЭ предпочтительнее в сложных случаях.

Для экономии объема запоминающего устройства ЭЦВМ веса задаются не в виде диагональной матрицы [см. формулу (3.36)], а в виде векторов. По формулам (3.60), (3.61), (3.63) или (3.64) после каждого приращения вычисляются i производных в соответствии с числом измеренных параметров, т. е. сразу получается столбец в матрице C . Поскольку все стандартные подпрограммы составлены для матриц, записанных по строкам, то матрица C хранится в запоминающем устройстве в транспонированном виде, т. е. для j

экспериментальной точки она имеет следующий вид:

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}_{1j}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \bar{z}_{2j}}{\partial \bar{y}_1} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \\ \frac{\partial \bar{z}_{1j}}{\partial \bar{y}_2} & \frac{\partial \bar{z}_{2j}}{\partial \bar{y}_2} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar{z}_{1j}}{\partial \bar{y}_n} & \frac{\partial \bar{z}_{2j}}{\partial \bar{y}_n} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Вектор-столбец взвешенных невязок, вычисленных по формуле (3.48) или (3.49), тоже хранится в транспонированном виде:

$$F^T = \|\bar{\varepsilon}_{1j} \bar{\varepsilon}_{2j} \dots \bar{\varepsilon}_{ij}\|. \quad (3.66)$$

Для борьбы с «шумами» ЭЦВМ при составлении матрицы (3.65) введена проверка условия $\partial \bar{z} / \partial \bar{y} > 10^{-8}$, иначе принимается $\partial \bar{z} / \partial \bar{y} = 0$.

Для экономии объема запоминающего устройства ЭЦВМ сразу же после расчета матрицы условных уравнений C для очередной экспериментальной точки она преобразуется в матрицу нормальных уравнений, являющуюся составной частью системы (3.58):

$$B = \begin{pmatrix} \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \right)^2 & \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \right) & \dots & \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \right) \\ \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \right) & \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \right)^2 & \dots & \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \right) & \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \right) & \dots & \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Освободившееся место используется для следующей экспериментальной точки. Матрица нормальных уравнений B симметрична относительно главной диагонали, поэтому в программах, составленных на машинном языке, можно хранить и использовать только нижнюю половину матрицы. Вместе с матрицей B хранится в транспонированном виде вектор-столбец свободных членов:

$$A^T = \left\| \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \bar{\varepsilon}_{ij} \right) \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \bar{\varepsilon}_{ij} \right) \dots \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \bar{\varepsilon}_{ij} \right) \right\| \quad (3.68)$$

и сумма квадратов взвешенных невязок

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (\bar{\varepsilon}_{ij})^2.$$

Если каждый элемент матрицы \mathbf{B} умножить на соответствующую неизвестную ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$), то она вместе с вектор-столбцом \mathbf{A} образует систему линейных уравнений (3.58). После решения системы искомые значения варьируемых коэффициентов определяются по формуле вида

$$y_{k+1} = y_k + \bar{x}_k (y_{\max} - y_{\min}), \quad (3.69)$$

где k — номер приближения. После подстановки в модель уменьшаются величины подавляющего большинства невязок. Остаточные невязки (или остатки) представляют большой интерес. Их можно определить по формулам (3.48) или (3.49), но для этого надо снова просчитывать модель для всех экспериментальных точек с новыми варьируемыми параметрами. Поэтому лучше предварительно определить сумму квадратов остаточных невязок по приближенной формуле

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \bar{\varepsilon}_{ij}^2 \approx & \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{x}_1 \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_1} \bar{\varepsilon}_{ij} \right) - \\ & - \bar{x}_2 \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_2} \bar{\varepsilon}_{ij} \right) - \dots - \bar{x}_n \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\partial \bar{z}_{ij}}{\partial \bar{y}_n} \bar{\varepsilon}_{ij} \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Все входящие в эту формулу суммы уже подсчитаны, поэтому расчет по ней несложен. Формула (3.70) является точной для линейных моделей, поэтому ее погрешность определяется только погрешностями линеаризации. В следующем приближении рассчитывается точное значение суммы квадратов невязок. Сопоставляя его с подсчитанным по формуле (3.70), можно судить о погрешностях линеаризации.

В большинстве случаев не удастся задать достаточно точно нулевое приближение, поэтому поправки \bar{x} оказываются немалыми и линеаризация дает большие погрешности. Их можно избежать при повторении идентификации. Причем, каждый раз берутся новые значения варьируемых параметров, получаемые по формуле (3.69), т. е. осуществляется процесс последовательных приближений.

Если необходимо учесть результаты ранее проведенных испытаний данного изделия, то нет необходимости включать в исходную информацию при идентификации результаты старых измерений с соответствующим увеличением времени счета. Необходимо только сохранить старую матрицу нормальных уравнений и прибавить ее к вновь полученной.

3.4.3. Ускорение сходимости процесса последовательных приближений

При недостаточном количестве измерений в каждой экспериментальной точке, а также при неудачном выборе варьируемых параметров и при низком качестве математической модели процесс последовательных приближений [см. формулу (3.69)] сходится очень медленно. Приходится использовать различные методы ускорения сходимости.

При большой величине поправок $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ становятся значительными погрешности, вызванные линеаризацией, поэтому величины поправок определяются грубо. Если умножить все поправки на коэффициент λ и просчитать по математической модели сумму квадратов невязок при разных значениях λ , то можно выбрать оптимальное значение λ . На этом принципе основаны методы ускорения сходимости.

При использовании метода Хартли* после каждого приближения рассчитываются суммы квадратов невязок не только с полными поправками Σ_1 , т. е. с варьируемыми параметрами, определенными по формуле (3.69), но и с поправками, уменьшенными в два раза $\Sigma_{0,5}$. Из предыдущего приближения известна сумма квадратов невязок без этих поправок Σ_0 . Зависимость суммы квадратов невязок от коэффициента λ аппроксимируется квадратной параболой. Ее минимум определяется по формуле

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{4} \frac{3\Sigma_0 - 4\Sigma_{0,5} + \Sigma_1}{\Sigma_0 - 2\Sigma_{0,5} + \Sigma_1}. \quad (3.71)$$

Он соответствует минимальному значению суммы квадратов невязок. Окончательные значения варьируемых параметров определяются по формуле

$$y_{k+1} = y_k + \lambda_{\text{opt}} \bar{x}_k (y_{\max} - y_{\min}), \quad (3.72)$$

которая заменяет формулу (3.69).

Найденные значения варьируемых параметров сравниваются с предельно возможными, т. е. проверяются неравенства

$$\left. \begin{aligned} y_{1,\min} &\leq y_{1,k+1} \leq y_{1,\max}; \\ y_{2,\min} &\leq y_{2,k+1} \leq y_{2,\max}; \\ &\dots \dots \dots \\ y_{n,\min} &\leq y_{n,k+1} \leq y_{n,\max}. \end{aligned} \right\}$$

Если не удовлетворяется хотя бы одно из них, то уменьшается величина λ_{opt} так, чтобы все неравенства удовлетворялись. После повторного расчета варьируемых параметров начинается следующее приближение.

Применение метода Хартли оказывается эффективным при плавном характере поверхности отклика, когда она в любом нап-

* Худсон Д. Статистика для физиков. М., Мир, 1970. 296 с.

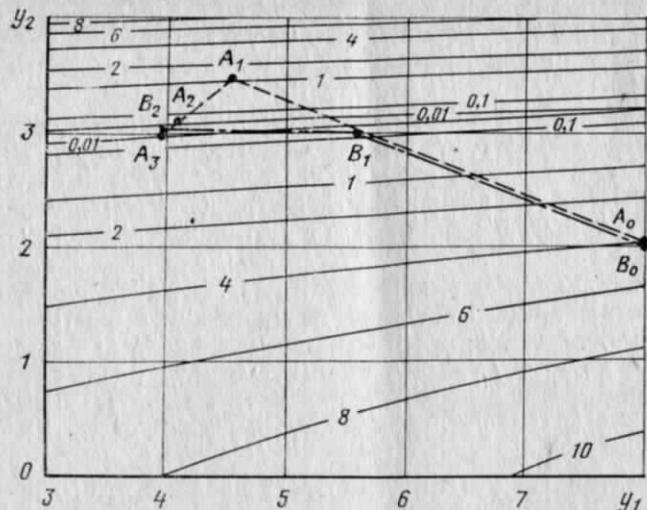


Рис. 3.4. Траектория поиска с ускорением сходимости (—) и без нее (---)

равлении хорошо аппроксимируется квадратной параболой. При более сложном характере поверхности отклика его эффективность существенно уменьшается. В особо неблагоприятных случаях сходимость процесса последовательных приближений может даже ухудшаться. Эти случаи легко выявляются, так как рассчитанное по модели значение суммы квадратов в точке, соответствующей λ_{opt} , существенно отличается от предсказанного по параболе. Для уточнения положения минимума действительной кривой можно повторять аппроксимацию параболой уже по другим точкам, ближе расположенным к минимуму. Для уменьшения машинного времени надо стремиться при этом к минимально возможному числу просчетов модели. При этих расчетах парабола проводится через неравностоящие точки по формуле

$$\lambda_{opt} = \frac{1}{2} \left(\lambda_0 + \lambda_1 - \frac{\Sigma_0 - \Sigma_1}{\lambda_0 - \lambda_1} \frac{\lambda_0 - \lambda_2}{\frac{\Sigma_0 - \Sigma_1}{\lambda_0 - \lambda_1} - \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{\lambda_1}} \right). \quad (3.73)$$

При неблагоприятном характере поверхности отклика алгоритм ускорения сходимости получается более простым и эффективным, если вместо квадратных парабол использовать числа Фибоначчи, организуя поиск примерно так же, как и в алгоритме оптимизации (см. подразд. 2.1.5). Пример траектории поиска с использованием ускорения сходимости и без нее показан на рис. 3.4. Хорошо видно, что величина шага без ускорения сходимости является избыточной. Это вызвано погрешностями линеаризации. Эффективность способов ускорения сходимости объясняется тем, что они позволяют существенно уменьшить влияние погрешностей, вызванных линеари-

зацией модели и округлением чисел при обращении матриц. А известно, что при обращении плохо обусловленных матриц высоких порядков округления существенно искажают результаты. Кроме того, Хартли удалось доказать, что при использовании его способа процесс приближений является сходящимся.

3.4.4. Погрешности идентификации

Если процесс последовательных приближений является сходящимся, то быстро уменьшаются величины поправок \bar{x} , погрешности линеаризации и, следовательно, погрешность формулы (3.70). На последнем приближении она уже пренебрежимо мала, поэтому формула (3.70) дает действительное значение суммы квадратов остаточных невязок. Оно используется при вычислении эмпирической средней квадратичной погрешности на единицу веса по формуле

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_1^{j_{max}} \sum_1^{i_{max}} \epsilon_{ij}^2}{\sum_1^{j_{max}} j_i - n}}. \quad (3.74)$$

Веса варьируемых параметров g_x равны обратным величинам диагональных элементов матрицы B^{-1} , обратной по отношению к матрице нормальных уравнений B . Они позволяют рассчитать погрешности определения варьируемых параметров

$$\sigma_{y_n} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_{x_n}}} (y_{n,max} - y_{n,min}), \quad (3.75)$$

которые представляют собой точечную оценку. Но правильнее оценивать погрешности варьируемых параметров при помощи доверительных интервалов, т. е.

$$y_n \pm t \sigma_{y_n}, \quad (3.76)$$

где множитель $t = f \left[P, \left(\sum_1^j j - n \right) \right]$ определяется по таблицам распределения Стюдента. Доверительная вероятность P принимается обычно равной 0,95.

3.4.5. Выбор варьируемых параметров

Наиболее сложной и ответственной задачей в процессе идентификации математической модели является выбор варьируемых параметров. Если число их выбрано недостаточным или среди выбранных отсутствуют необходимые в данной задаче, то в процессе идентификации улучшение модели будет несущественным. Если же число варьируемых коэффициентов выбрано недопустимо большим

или среди выбранных имеются недопустимые комбинации коэффициентов, то задача идентификации становится некорректной. Практически это выражается обычно в том, что перестает сходиться процесс последовательных приближений [см. формулы (3.69) или (3.72)]. На основании опыта работы были составлены правила выбора варьируемых параметров.

1. В качестве варьируемых параметров выбираются наименее достоверные параметры математической модели, которые остаются постоянными по своей величине во всех точках характеристики. Число их должно быть минимально возможным.

2. Нельзя выбирать варьируемые параметры, которые существенно влияют только на параметры, неизмеряемые при данных испытаниях. Несоблюдение этого правила приводит к образованию нулевых строк и столбцов в матрице \mathbf{B} и она становится вырожденной или плохо обусловленной, если строки и столбцы близки к нулевым.

3. Среди выбранных параметров не должно быть двух, одинаково влияющих на все основные измеренные параметры. Несоблюдение этого правила приводит к пропорциональности строк той же матрицы \mathbf{B} , т. е. она опять становится вырожденной или плохо обусловленной.

4. Варьируемые параметры не должны иметь больших коэффициентов взаимной корреляции. Это также приводит к плохой обусловленности матрицы нормальных уравнений \mathbf{B} .

5. Число варьируемых параметров необходимо соразмерять с объемом экспериментальной информации. В хорошо препарированных машинах с большим количеством измеряемых параметров оно может быть больше. Увеличение числа экспериментальных точек не может компенсировать уменьшение числа измерений на каждой из них.

6. Число варьируемых параметров необходимо соразмерять с качеством математической модели. При использовании в модели довольно грубых допущений число параметров должно быть меньше и наоборот оно может быть больше, если модель достаточно точно описывает все особенности рабочего процесса в изделии.

7. Если известны основные неточности в математической модели, то варьируемые параметры необходимо выбирать так, чтобы они, хотя бы частично, могли компенсировать эти неточности.

8. Предварительный выбор варьируемых коэффициентов удобно производить при помощи таблиц коэффициентов влияния (см. разд. 4.5), которые показывают, как влияют варьируемые параметры на измеряемые, а главное на сумму квадратов взвешенных невязок. Это позволяет сразу исключить несущественно влияющие параметры.

9. Наиболее надежным источником информации о целесообразном выборе варьируемых параметров является опыт, накопленный при решении аналогичных задач.

Эти правила облегчают выбор варьируемых параметров, но тем не менее при отсутствии достаточного опыта приходится повторять

процесс идентификации по несколько раз с различными комбинациями варьируемых параметров. На это расходуется много времени и средств. Автоматизировать выбор варьируемых параметров в принципе невозможно, но была разработана методика, которая позволяет выявить неверно выбранные варьируемые параметры. Как указывалось выше, неправильный выбор приводит к плохой обусловленности матрицы. Вырожденной она быть практически не может из-за наличия «шумов» ЭЦВМ. Обусловленность матриц оценивается различными числами обусловленности, например, числами Тюринга. Используются два различных числа N и M . Для их вычисления надо знать N -норму и M -норму матрицы \mathbf{B} :

$$N(\mathbf{B}) = \sqrt{\sum_1^{\max} \sum_1^{\max} (b_{ij})^2}; \quad M(\mathbf{B}) = n \max |b_{ij}|,$$

где n — порядок матрицы, т. е. число варьируемых параметров. Числа обусловленности определяются по формулам

$$N\text{-число} = \frac{1}{n} N(\mathbf{B}) \cdot N(\mathbf{B}^{-1}); \quad (3.77)$$

$$M\text{-число} = \frac{1}{n} M(\mathbf{B}) \cdot M(\mathbf{B}^{-1}). \quad (3.78)$$

Опыт работы показал, что при неверном выборе варьируемых параметров оба числа обусловленности Тюринга возрастают до значений $10^9 \dots 10^{12}$ и более. Процесс последовательных приближений при этом не сходится. Для выявления неверно выбранных варьируемых параметров они поочередно исключаются из рассмотрения. Это нетрудно сделать, так как каждому из них соответствует своя строка и столбец в матрице \mathbf{B} , т. е. надо просто в уже готовой матрице поочередно исключать все строки одновременно со столбцами тех же номеров. После очередного исключения матрица снова обращается и определяются числа обусловленности. После того, как закончено исключение всех n строк, среди них выбирается наименее худшая, т. е. та, при вычеркивании которой получено минимальное значение числа Тюринга. Эта строка вместе со столбцом исключается окончательно и порядок матрицы уменьшается на единицу. В уменьшенной матрице снова производится поочередное вычеркивание строк и выбирается наименее худшая. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не останется матрица второго порядка. После каждого исключения печатается необходимая информация. Она дает полную картину влияния варьируемых параметров на числа обусловленности. Ее можно изобразить очень наглядно при помощи графа обусловленности. Примеры графов приведены на рис. 3.5 и 3.6. По ним можно уже довольно просто выбрать наиболее целесообразную комбинацию варьируемых параметров. Для получения более полного графа необходимо выбирать первоначально заведомо большее число варьируемых параметров.

Опыт работы показал, что результаты выбора получаются одинаковыми при использовании обоих чисел обусловленности, но

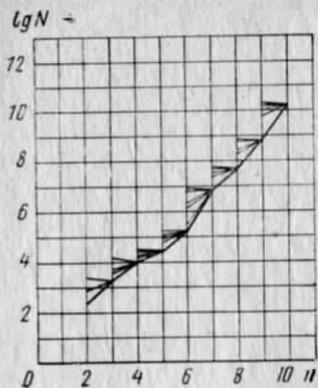


Рис. 3.5. Граф обусловленности, построенный по N -числам обусловленности Тюринга

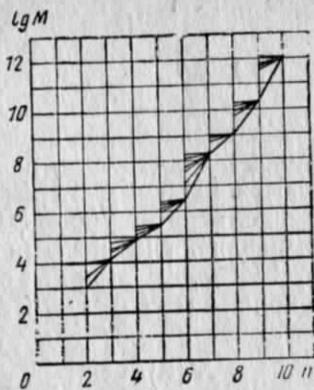


Рис. 3.6. Граф обусловленности, построенный по M -числам обусловленности Тюринга

N -число дает более ясную картину и, кроме того, оно имеет четкий физический смысл. Оно показывает, во сколько раз отношение среднего квадратичного ошибок неизвестных к среднему квадратичному самих неизвестных превосходит отношение среднего квадратичного ошибок коэффициентов системы к среднему квадратичному самих коэффициентов. Поэтому чаще используется только N -число обусловленности Тюринга. Для него можно рекомендовать допустимый предел:

$$N\text{-число} \leq 10^2 \dots 10^3, \quad (3.79)$$

который гарантирует хорошую сходимость процесса последовательных приближений и приемлемость погрешностей, с которыми определяются варьируемые параметры. Если используется ускорение сходимости (см. рис. 3.4), то допустимый предел можно увеличить N -число $\leq 10^3 \dots 10^4$.

При грубых ошибках в выборе варьируемых параметров может возникнуть переполнение разрядной сетки ЭЦВМ во время расчета чисел обусловленности. Аварийный останов ЭЦВМ нежелателен, а ошибку лучше искать по результатам расчета, поэтому вместо чисел обусловленности рассчитываются их логарифмы по формуле

$$\lg N = \frac{0,4343}{2} \left[\ln \sum_1^{j_{\max}} \sum_1^{i_{\max}} \left(\frac{b_{ij}}{m} \right)^2 + \ln \sum_1^{j_{\max}} \sum_1^{i_{\max}} \left(\frac{\bar{b}_{ij}}{m} \right)^2 \right] + \ln m - \ln n,$$

где \bar{b}_{ij} — элементы обратной матрицы \mathbf{B}^{-1} ; $m = \frac{1}{n^2} \sum_1^{j_{\max}} \sum_1^{i_{\max}} \|b_{ij}\|$ — масштабный множитель.

Наиболее распространенные ошибки в выборе варьируемых параметров — это большие коэффициенты взаимной корреляции, которые не всегда можно установить априорно по физическому смыслу задачи. Применение графов обусловленности позволяет выявить эти ошибки, но при использовании корреляционных матриц это получается удобнее и нагляднее.

Если два или несколько варьируемых параметров одинаково или почти одинаково влияют на все измеряемые параметры, то важно не только выявить этот факт, но и оценить степень влияния, чтобы отбраковку их вести не формально по графам обусловленности, а с использованием физического смысла параметров. Для этого рассчитывается матрица коэффициентов корреляции между производными в якобиане \mathbf{C} [см. формулу (3.65)]. Каждый коэффициент рассчитывается по формуле

$$K_{kn} = \frac{\sum_1^{j_{\max}} \sum_1^{i_{\max}} (x_k - \bar{m}_{xk})(x_n - \bar{m}_{xn})}{\sqrt{\sum_1^{j_{\max}} \sum_1^{i_{\max}} (x_k - \bar{m}_{xk})^2 \sum_1^{j_{\max}} \sum_1^{i_{\max}} (x_n - \bar{m}_{xn})^2}}, \quad (3.80)$$

где x_k, x_n — элементы якобиана \mathbf{C} . Корреляционная матрица получается симметричной относительно главной диагонали, поэтому можно рассчитывать только половину матрицы. Если коэффициенты парной корреляции близки к единице, то в соответствующих парах варьируемых параметров один из них должен быть удален. Какой из двух удалять, надо решать с учетом физического смысла параметра, а также в зависимости от величин остальных коэффициентов корреляции для данного параметра. При использовании матриц коэффициентов корреляции выбор варьируемых параметров получается более наглядным.

3.4.6. Матричный вариант алгоритма

В математическом обеспечении современных ЭЦВМ имеются все основные операции с матрицами, поэтому можно вести решение непосредственно в матричном виде. Исходной является линеаризованная математическая модель [см. формулу (3.55)]. Она же в матричной записи:

$$\mathbf{Z}_{\text{расч}} = \mathbf{Z}_0 + \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (3.81)$$

а система условных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_{\text{расч}} - \mathbf{Z}_{\text{изм}} &= 0; \\ \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_{\text{изм}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{F} = 0. \quad (3.82)$$

Для получения минимума суммы квадратов взвешенных невязок необходимо минимизировать функцию $s = (\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{F})^T \mathbf{G} (\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{F}) \rightarrow \min$. Она достигает минимума, если все частные производные об-

рашаются в нуль одновременно, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial s}{\partial x_2} &= 0; \\ \dots & \\ \frac{\partial s}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $2C^T G(CX + F) = 0$, и окончательная расчетная формула

$$X = -(C^T G C)^{-1} (C^T G F), \quad (3.83)$$

или, вводя упрощенные обозначения, $X = B^{-1}A$. Таким образом, для решения уравнения необходимо произвести обращение матрицы B и несколько умножений матриц. Умножение возможно всегда, а обращение только в том случае, если матрица B является невырожденной и хорошо обусловленной.

Для обращения матрицы B были использованы различные методы, в том числе метод Гаусса, метод главных элементов, метод пополнения и метод Жордана. Но наиболее удобным оказался метод окаймления. В работе В. В. Воеводина * показано, что процедура обращения наименее чувствительна к плохой обусловленности матрицы, если ее сводить к треугольной при помощи матриц отражения, а затем обращать методом окаймления. Выше было показано, что плохая обусловленность возможна в задачах идентификации, поэтому использование метода окаймления является наиболее целесообразным. Сведение матрицы B к треугольной не нужно, так как она всегда является симметричной относительно главной диагонали.

В формуле (3.83) предполагается, что вектор-столбец F и якобиан C используют невзвешенные невязки, так как умножение на матрицу весов G происходит в процессе решения. Если предположить, что погрешности измерений не коррелированы, то в матрице G будут отличными от нуля только элементы главной диагонали. В этом случае можно взвешенные невязки и производные предварительно рассчитать по формулам (3.48), (3.49), (3.60) ... (3.64), тогда в формуле (3.83) будет отсутствовать матрица весов G , т. е.

$$X = -(C^T C)^{-1} (C^T F). \quad (3.84)$$

В результате решения необходимо получить не только значение векторов X , но и ковариационную матрицу для него $K(X)$. Это можно сделать по известной формуле

$$K(X) = (C^T G C)^{-1}. \quad (3.85)$$

* Воеводин В. В. Численные методы алгебры. М., Наука, 1966. 248 с.

Матрица $K(X)$ дает полную информацию о точности результатов и их корреляционной связи. Корни квадратные из диагональных элементов матрицы $K(X)$ можно рассматривать как погрешности определения неизвестных поправок x_1, x_2, \dots, x_n , полученных косвенными измерениями.

Если рассчитать вектор остаточных невязок F , то качество идентификации можно оценивать по величине $s = F^T G F$. При нормальном законе распределения погрешностей измерения эта величина подчиняется закону распределения χ^2 . Число степеней свободы $f = i_{\max} j_{\max} - n$. При других законах распределения погрешностей s не будет подчиняться χ^2 -распределению, но все равно качество идентификации можно оценивать по неравенству

$$s < f \chi_{\tau}^2, \quad (3.86)$$

где χ_{τ}^2 — табличное значение при заданной степени достоверности.

При несоблюдении неравенства (3.86) результаты идентификации считаются неудовлетворительными и не могут быть использованы. Это может случиться по одной из следующих причин:

- 1) используемая математическая модель является слишком грубой;
- 2) допущена ошибка при выборе варьируемых параметров;
- 3) какой-то из параметров модели, не являющийся варьируемым, задан неверно, с большой ошибкой;
- 4) начальное приближение варьируемых параметров задано слишком грубо, поэтому вместо глобального найден локальный минимум суммы квадратов невязок;
- 5) ковариационная матрица погрешностей измерений неверна.

После анализа этих причин и исправления ошибок можно надеяться, что метод наименьших квадратов приведет к успеху.

3.5. ПРИМЕРЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

3.5.1. Одноступенчатая экспериментальная турбина

Отладку вновь разработанных методов всегда удобнее производить на экспериментальных машинах, исследуемых на стендах, которые лучше препарированы и, как правило, имеют более высокую точность измерения параметров. Поэтому идентификация математической модели газовой турбины III уровня, сложности производилась по результатам испытаний одноступенчатой воздушной турбины. Они проводились при трех постоянных степенях понижения давления и переменной частоте вращения. Температура торможения на входе и статическое давление на выходе были постоянными. Таким образом, вектор внешних условий U состоял из четырех параметров: n, T_v^*, p_v^*, p_c . На всех режимах измерялись четыре параметра: G — расход газа; M_i — крутящий момент на валу (в него не входят потери в подшипниках, так как они расположены в плавающей втулке); p_1 — статическое давление за сопловым аппаратом; p_2 — статическое давление за рабочим колесом (оно отличалось от p_c из-за потерь в выходном патрубке).

При максимальной степени понижения давления на пяти режимах было произведено траверсирование потока, которое после осреднения дало еще шесть параметров: p_1^* — давление торможения за сопловым аппаратом; λ_1 — приведенная скорость за сопловым аппаратом; α_1 — угол выхода потока; p_2^* — давление тор-

Таблица 3.2

№ по пор.	Параметр	Размерность	Погрешность, %			$\sqrt{g_1}$
			абсолютная	относительная	условная	
1	G	кг/с	0,0207	0,74	6,00	1,02
2	M	Н·м	0,406	0,60	4,56	1,36
3	p_1^*	Н/м ²	881	0,50	0,54	11
4	p_1	Н/м ²	4328	4,0	5,40	1,1
5	λ_1	—	0,0036	0,8	8,00	0,77
6	α_1	рад	0,0038	0,5	0,30	12
7	p_2^*	Н/м ²	618	0,6	3,78	1,6
8	p_2	Н/м ²	5100	5,0	6,50	0,95
9	λ_2	—	0,004	2,0	8,30	0,75
10	α_2	рад	0,0148	0,6	10	0,61
11	n	мин ⁻¹	40	0,5	—	—
12	T_n^*	К	1,36	0,4	—	—
13	p_n^*	Н/м ²	93,1	0,07	—	—
14	p_c	Н/м ²	4040	4,0	—	—

можения за рабочим колесом; λ_2 — приведенная скорость за рабочим колесом; α_2 — угол выхода потока.

Всего для идентификации было использовано 224 измерения, не считая режимных. Абсолютные и относительные погрешности измерений, приведены в табл. 3.2. Они получены для одного из типичных режимов. Погрешности статических давлений больше обычных, так как учтена неравномерность полей давлений. В условных погрешностях дополнительно учтено влияние погрешностей режимных параметров. По ним рассчитаны веса измерений, но для упрощения счета в таблицу включены корни квадратные из весов.

Скоростные коэффициенты решеток и угол выхода потока из сопловой решетки были рассчитаны по результатам испытаний и округлены. Остальные параметры в математической модели взяты по литературным данным. Характеристики турбины, рассчитанные по априорной математической модели (т. е. до идентификации), показаны на рис. 3.7...3.12 пунктиром и для наглядности в естественных координатах. Они довольно далеко отстоят от экспериментальных данных, показанных значками. При идентификации варьировались семь параметров: скоростные коэффициенты ϕ и ψ при нулевом угле атаки, коэффициенты B и C в формуле, учитывающей влияние угла атаки на эти скоростные коэффициенты, коэффициент m_{11} из формулы разделения потерь в решетке, поправки на углы выхода потока m_{13} и поправка в формуле для расчета утечки m_{21} . При идентификации было сделано три приближения. Сходимость процесса последовательных приближений иллюстрируется зависимостью средней квадратичной остаточной невязки σ_0 от номера приближения, показанной на рис. 3.13. Величина σ_0 уменьшилась примерно на два порядка. Полученные значения варьируемых параметров приведены в табл. 3.3. Рассчитанные по апостериорной модели характеристики турбины приведены на рис. 3.7...3.12 сплошными линиями. Они уже хорошо совпадают с экспериментальными данными. Расхождения не превышают погрешностей эксперимента. Это доказывает, что в результате идентификации существенно повышается точность математической модели. Следовательно, се

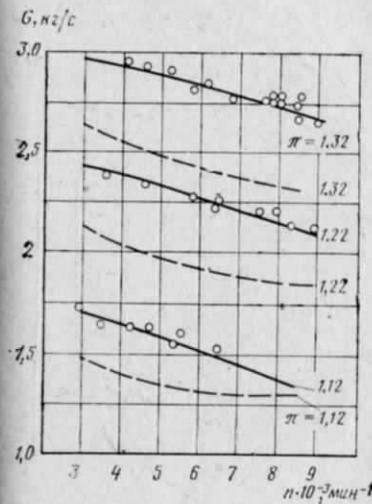


Рис. 3.7. Зависимость расхода газа через турбину от частоты вращения до (—) и после (---) идентификации (○ — экспериментальные точки)

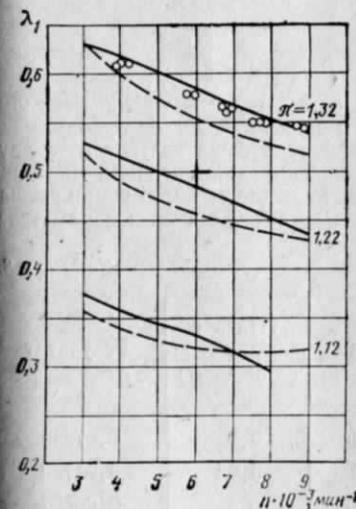


Рис. 3.9. Зависимость приведенной скорости на выходе из соплового аппарата от частоты вращения до (—) и после (---) идентификации (○ — экспериментальные точки)

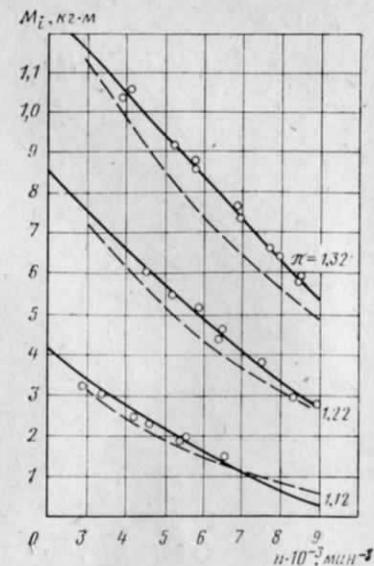


Рис. 3.8. Зависимость момента на валу от частоты вращения до (—) и после (---) идентификации (○ — экспериментальные точки)

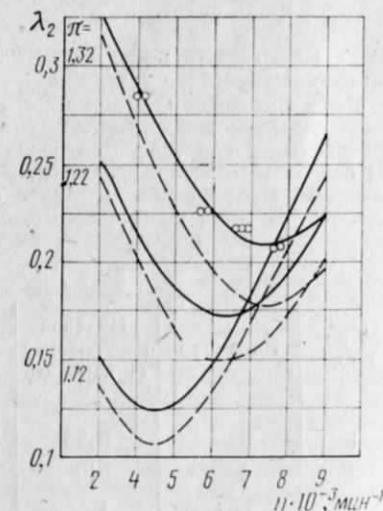


Рис. 3.10. Зависимость приведенной скорости на выходе из рабочего колеса (в абсолютном движении) от частоты вращения до (—) и после (---) идентификации (○ — экспериментальные точки)

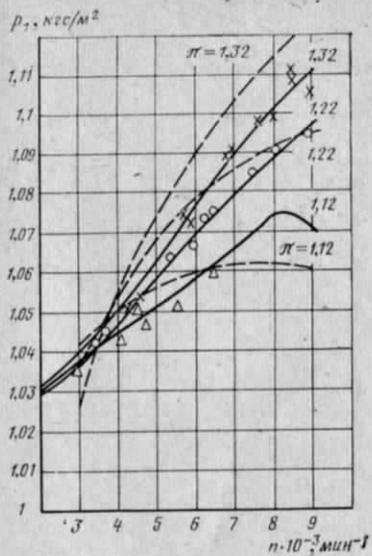


Рис. 3.11. Зависимость статического давления за сопловым аппаратом от частоты вращения до (---) и после (—) идентификации (X, O, Δ—экспериментальные точки)

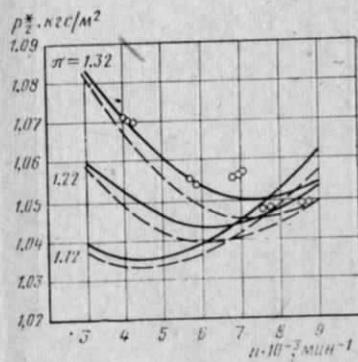


Рис. 3.12. Зависимость давления торможения за рабочим колесом от частоты вращения до (---) и после (—) идентификации (O—экспериментальные точки)

можно использовать после идентификации для математического эксперимента, частично заменяющего натурный.

Были проведены некоторые исследования процесса идентификации. Выказывалось опасение, не повлияет ли на ее результаты выбор начального приближения варьируемых параметров. Для проверки идентификация была повторена с другим начальным приближением, существенно отличавшимся от первого. Значения варьируемых параметров приведены в табл. 3.3. Результаты практически совпадают. Расхождения меньше погрешностей определения варьируемых параметров.

Таблица 3.3

№ по пор.	Параметр	Нулевое приближение (1 вариант)	Результат	Нулевое приближение (2 вариант)	Результат
1	φ	0,95	0,97248	0,9	0,97249
2	ψ	0,9	0,91762	0,85	0,91753
3	m_{11}	1	0,69406	0,4	0,69697
4	b	0,058	0,23444	0,5	0,23348
5	c	0,265	0,72369	0,5	0,72246
6	m_{13}	1	1,09959	1,2	1,09965
7	m_{21}	0,01	0,06945	0,013	0,069248

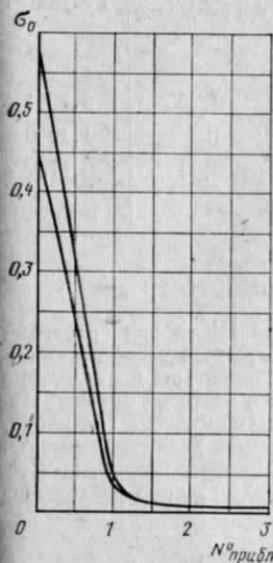


Рис. 3.13. Зависимость средней квадратичной остаточной невязки от номера приближения при разных начальных приближениях

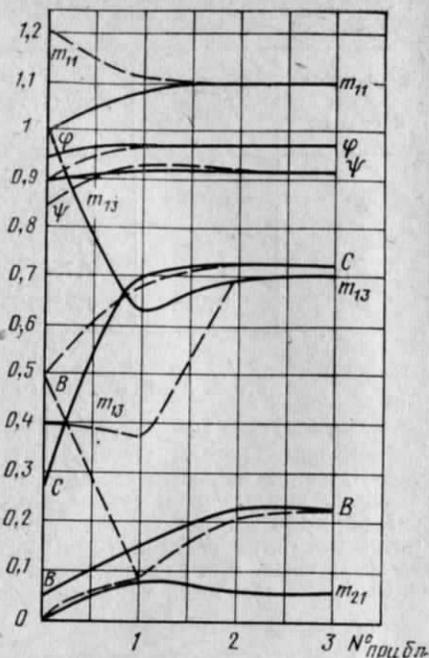


Рис. 3.14. Зависимости значений варьируемых параметров от номера приближения при разных начальных приближениях:

--- первый вариант; — второй вариант

Еще более наглядной является их зависимость от номера приближения, показанная на рис. 3.14. Большинство линий совпадает полностью уже на втором приближении. Зависимость для средней квадратичной остаточной невязки с новым начальным приближением нанесена на рис. 3.13. Эти результаты наглядно показывают, что выбор начального приближения не имеет существенного значения.

Траверсирование проточной части очень сложный и трудоемкий процесс, требующий изменения конструкции турбины. Поэтому он обычно проводится только на специально спроектированных экспериментальных турбинах. В реальных турбинах, входящих в состав газотурбинного двигателя, траверсирование затруднено. Обычно параметры газового потока за рабочим колесом, а в особенности за сопловым аппаратом измеряются в небольшом количестве точек. Надежность этих измерений всегда вызывает сомнения из-за большой неравномерности полей давлений, температур и скоростей. Возникает естественное желание отказаться от этих измерений, а все необходимые параметры, в первую очередь скоростные коэффициенты, скорости и углы выхода потока, получать по результатам идентификации. Важно проверить их надежность. Для этого идентификация была повторена без использования результатов траверсирования, при прочих равных условиях. Полученные значения варьируемых параметров приведены в табл. 3.4.

Они мало отличаются от основных результатов из табл. 3.3. Следовательно, идентификация вполне заменяет трудоемкий процесс траверсирования. Необходимо только, чтобы остальные параметры были тщательно измерены. Все представляющие интерес параметры после идентификации легко рассчитываются по математической модели. Рассчитанные характеристики практически совпали с результатами основной идентификации. Были проведены идентификации математической модели и по результатам испытаний других турбин различного назначения.

Таблица 3.4

Варьируемый параметр	Нулевое приближение	Результат	Варьируемый параметр	Нулевое приближение	Результат
φ	0,95	0,9745	C	0,265	0,7311
ψ	0,9	0,9210	m_{13}	1	1,1000
m_{11}	1	0,7564	m_{21}	0,01	0,0750
B	0,058	0,2286			

3.5.2. Многоступенчатый осевой компрессор

Идентификация математической модели компрессора III уровня сложности была выполнена по результатам испытаний восьмиступенчатого осевого компрессора. При его испытаниях производились измерения температуры и давления за каждой ступенью. Режим работы, как обычно, задавался частотой вращения ротора, расходом воздуха, его температурой и давлением торможения на входе в компрессор. Погрешности всех измерений были получены при анализе экспериментального стенда. Для идентификации были отобраны 64 экспериментальные точки. Расчет по априорной математической модели дал существенные расхождения

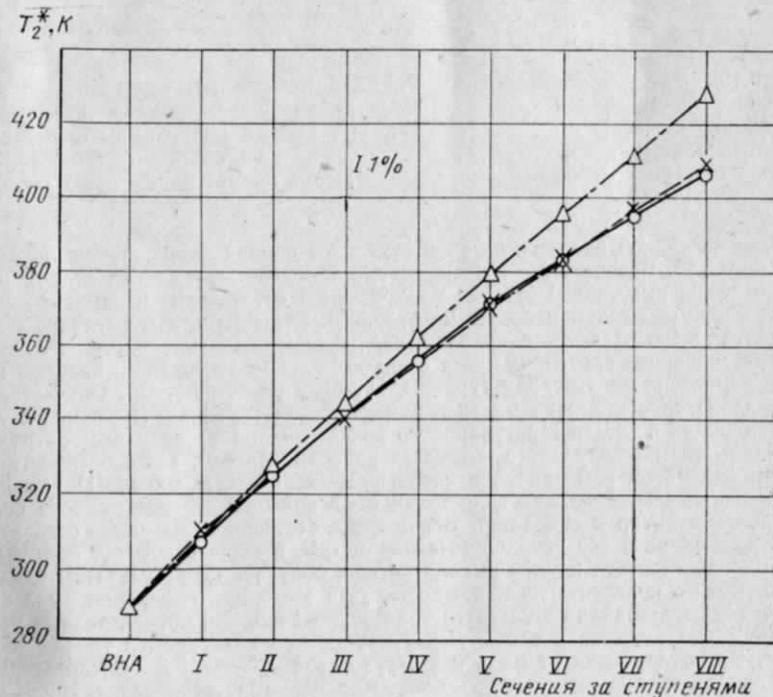


Рис. 3.15. График температуры торможения за ступенями восьмиступенчатого компрессора:

—•— до идентификации; —○— после идентификации; —×— эксперимент

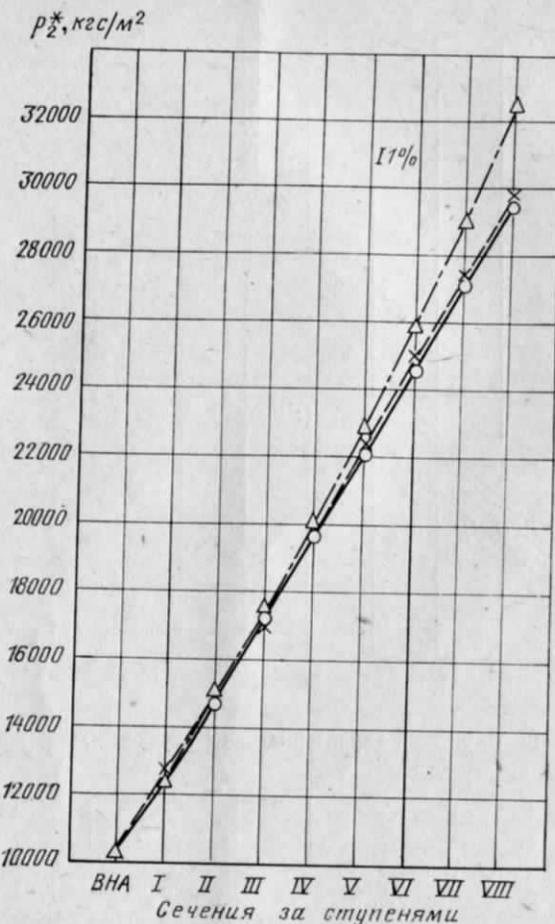


Рис. 3.16. График давления торможения за ступенями восьмиступенчатого компрессора:

—•— до идентификации; —○— после идентификации; —×— эксперимент

с экспериментом. Это видно на рис. 3.15 и 3.16, где показано изменение температуры и давления торможения по ступеням компрессора на одном из режимов, близких к расчетному. Варьировались параметры, учитывающие влияние пограничного слоя в проточной части, поправки на углы поворота потока в ступенях и на потери в решетках. Характер изменения этих коэффициентов по номеру ступени был принят линейным. Углы наклона линий тоже варьировались. Кроме того, варьировались коэффициенты полиномов, аппроксимирующих зависимости коэффициента лобового сопротивления и угла поворота потока от угла атаки (относительного). Количество варьируемых параметров было большим, поэтому они варьировались по группам, что значительно увеличило машинное время.

После идентификации невязки значительно уменьшились. Результаты расчета по апостериорной модели нанесены на рис. 3.15 и 3.16. Они хорошо совпадают с результатами эксперимента. Примерно такое же совпадение было и на остальных режимах. Это доказывает, что апостериорную модель вполне можно использовать для различных математических экспериментов в процессе доводки проточ-

ной части. Например, для выбора оптимальных значений некоторых размеров, для расчета коэффициентов влияния, для расчета характеристик компрессора при внесенных изменениях в проточную часть и т. д.

Расчет по апостериорной математической модели является одним из возможных способов получения характеристик отдельных ступеней. Непосредственная обработка результатов измерения параметров воздуха в зазорах между ступенями в системе многоступенчатого компрессора редко приводит, как известно, к успешному результату из-за погрешностей измерений. Необходимо предварительное сглаживание результатов. В процессе идентификации оно выполняется автоматически и достаточно объективно. Поэтому характеристики, получаемые по апостериорной модели, являются более надежными, но они включают две дополнительные погрешности: остаточную погрешность идентификации и методическую погрешность математической модели. По мере совершенствования моделей обе они уменьшаются. Характеристики можно получать еще при испытаниях изолированных ступеней на специальных стендах, но они не учитывают взаимного влияния ступеней, которое может быть значительным. Кроме того, обычно являются большими стоимость создания и эксплуатации специальных стендов. Следовательно, характеристики, получаемые по апостериорной модели, вполне могут быть использованы, а погрешности их соизмеримы с погрешностями характеристик, получаемых другими способами.

Пример характеристик для двух ступеней, первой и шестой, описанного выше компрессора приведен на рис. 3.17 и 3.18. Характеристики неполные, так как на них нанесены только те режимы, которые реализуются в системе многоступенчатого компрессора. Для удобства сопоставления характеристик, приведенные расход воздуха и частота вращения во всех ступенях брались по входу в I ступень. На графиках хорошо видно, что максимальные значения к. п. д. у обеих ступеней находятся в нерабочей зоне. Следовательно, еще имеются некоторые возможности для улучшения характеристик данного компрессора.

3.5.3. Одновалный газотурбинный двигатель

Идентификация математической модели газотурбинного двигателя III уровня сложности производилась по результатам испытаний каскада высокого давления одного из двухвалных двигателей. Характеристики каскада снимались при трех различных диаметрах сменного сопла. Режим работы изменялся подачей топлива, что при данном диаметре сопла однозначно определяло частоту вращения и расход воздуха через каскад. Поэтому все последующие характеристики построены в зависимости от приведенного расхода воздуха. Полезная мощность с вала высокого давления не снималась, поэтому избыточный момент на валу определялся только потерями на трение в подшипниках и на привод агрегатов. Он был принят ориентировочно равным 3 кгс·м и использовался при идентификации в качестве одного из измеряемых параметров. Веса измерений были получены также, как и при испытаниях компрессора. Все геометрические размеры турбины и камеры сгорания взяты по чертежам. Пересчитать их на «горячие» не представлялось возможным, так как термометрирование турбины не производилось. Это должно исказить последующие результаты, но не намного, так как температура газа была сравнительно низкой.

Для идентификации были отобраны 18 экспериментальных точек, которые были получены без перепуска воздуха в камеру сгорания и компрессоре. Кроме того, для оценки возможности использования математической модели при работе с открытым перепуском были взяты еще шесть точек: пять с перепуском воздуха в камеру сгорания и для контроля повторена одна из точек без перепуска. В идентификации дополнительные шесть точек не участвовали, но они нанесены на все графики. Параметры, задающие режим, были обычными: T_n^* , p_n^* , n , $G_{\text{топл}}$, $T_{\text{топл}}^*$ и p_t^* . Таким образом, для идентификации получилось семь измерений в каждой точке, а в 18 точках — 121 измерение (температура за турбиной T_t^* при большом сопле по техническим причинам не измерялась).

Коэффициенты математической модели компрессора были приняты по результатам идентификации, описанной в подразд. 3.5.2. Для турбины и камеры сгорания они были взяты по литературным данным. Статистический анализ, проведенный до идентификации, позволил проверить отсутствие ошибок. Из-за небольшого объема экспериментальной информации было выбрано только четыре

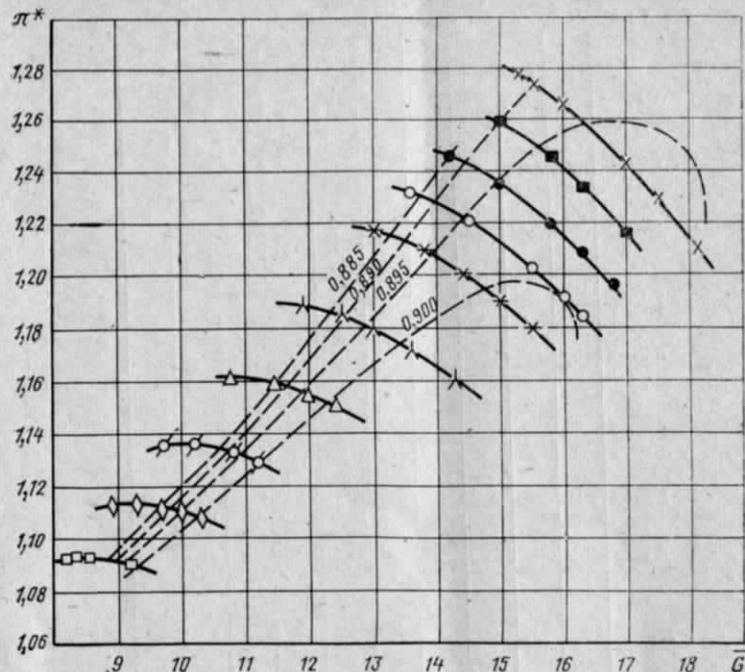


Рис. 3.17. Расчетная характеристика I ступени компрессора

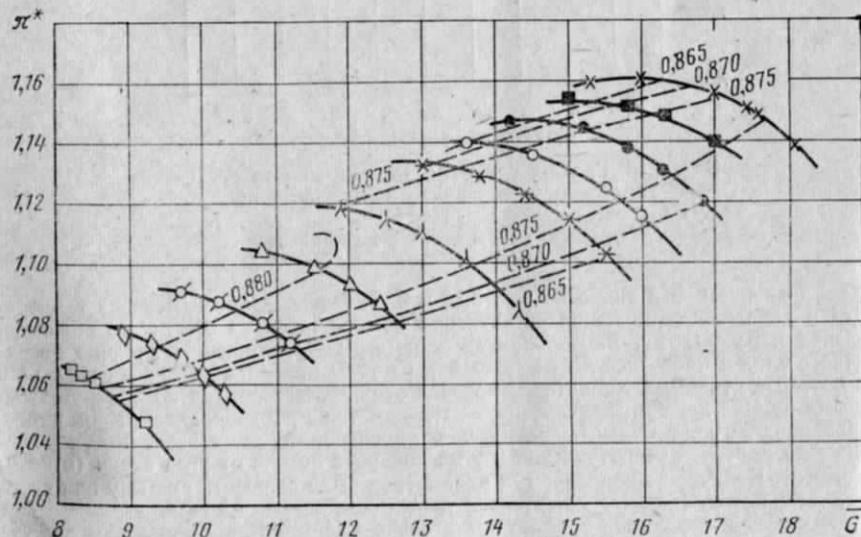


Рис. 3.18. Расчетная характеристика VI ступени компрессора

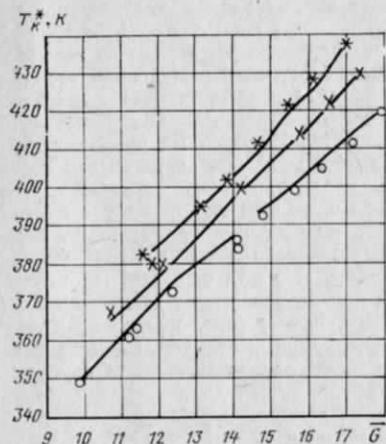


Рис. 3.19. Зависимость температуры торможения за компрессором от приведенного расхода воздуха через каскад:
* — малое; X — среднее; O — большое сопло

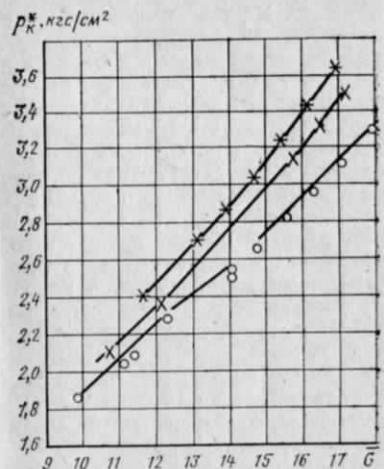


Рис. 3.20. Зависимость давления торможения за компрессором от приведенного расхода воздуха через каскад:
* — малое; X — среднее; O — большое сопло

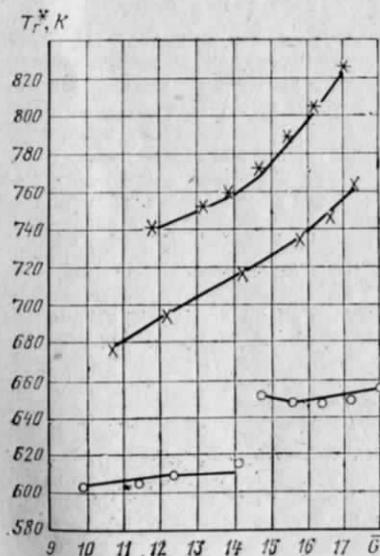


Рис. 3.21. Зависимость температуры торможения перед турбиной от приведенного расхода воздуха через каскад:
* — малое; X — среднее; O — большое сопло

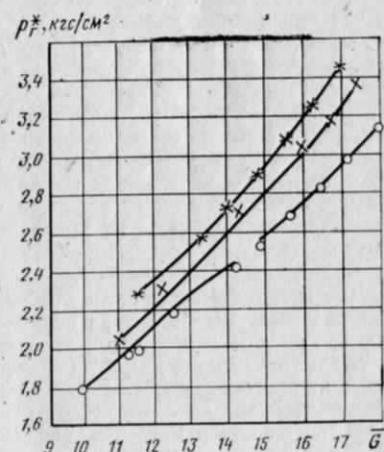


Рис. 3.22. Зависимость давления торможения перед турбиной от приведенного расхода воздуха через каскад:
* — малое; X — среднее; O — большое сопло

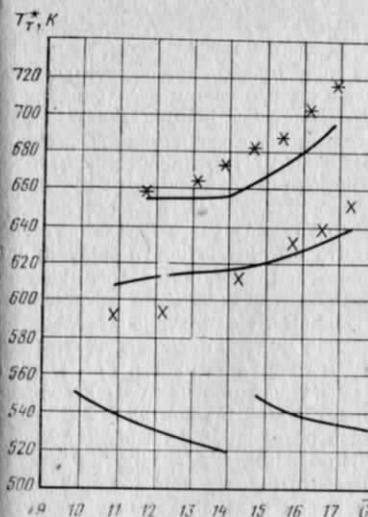


Рис. 3.23. Зависимость температуры торможения за турбиной от приведенного расхода воздуха через каскад:
* — малое; X — среднее сопло

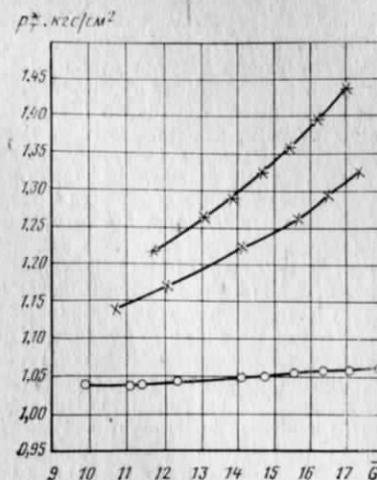


Рис. 3.24. Зависимость давления торможения за турбиной от приведенного расхода воздуха через каскад:
* — малое; X — среднее; O — большое сопло

варьируемых параметра. Поскольку адекватная модель компрессора уже была создана, то для нее варьируемые параметры можно было бы не брать. Но при переходе от полного к частичному препарированию уменьшилось загромождение проточной части приборами и пришлось взять коэффициент K_G в качестве варьируемого. Загромождение во всех ступенях изменялось пропорционально K_G . Ранее было показано, что формула, учитывающая влияние угла атаки на потери в решетках, дает большую погрешность. Поэтому основной коэффициент C из этой формулы был также принят в качестве варьируемого. Третий варьируемый коэффициент m_{13} дает поправку на угол выхода потока из решеток. Он был выбран потому, что даже малые погрешности в величине угла существенно сказываются на характеристике турбины. Четвертый варьируемый параметр m_{21} учитывает уменьшение полезной работы из-за наличия радиального зазора. Значения варьируемых параметров приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

№ по пор.	Обозначение	Параметр		Ошибка поправки последнего приближения	
		до идентификации	после идентификации	абсолютная	относительная, %
1	K_G	1,0825	1,0716	0,00157	0,147
2	C	0,205	0,022034	0,0189	7,1
3	m_{13}	1	0,985874	0,0275	2,8
4	m_{21}	0,0264	0,148557	0,01754	11,8

После нескольких приближений была получена адекватная модель каскада высокого давления. Как и следовало ожидать, коэффициент K_G немного уменьшился (на 1,02%). Коэффициент C уменьшился значительно. Следовательно, зависимость потерь от угла атаки получилась более пологой, чем это следует из формулы. Коэффициент m_{13} немного уменьшился (на 1,4%). Это означает, что синусы углов выхода потока в среднем уменьшились на эту величину. Коэффициент m_{21} увеличился, вследствие того, что «горячие» зазоры в турбине отличаются от «холодных» и потери на утечку значительные. Ошибки в определении варьируемых параметров зависят от величины их изменения. Полученную апостериорную модель можно использовать для различных целей. Прежде всего были получены характеристики каскада, по которым можно судить об адекватности модели; построенные непосредственно в измеряемых параметрах они приведены на рис. 3.19...3.24. Для более наглядного сопоставления они рассчитаны по измеренным режимным параметрам и проведены ломаными линиями. Совпадение результатов расчета характеристик по адекватной математической модели с экспериментом является очень хорошим за исключением температуры газа за турбиной T_1^* . В трех точках расхождение достигает 2,9...3,3%, а в остальных оно несколько меньше. Для других параметров расхождение не превышает одной процента. В пяти точках, имевших перепуск, совпадение не хуже, чем в остальных, а последняя точка хорошо ложится на кривую без перепуска. Таким образом, апостериорная модель каскада достаточно хорошо совпадает с экспериментом даже при наличии перепуска. Совпадение было оценено количественно путем статистического анализа остаточных невязок, результаты которого приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

№ по пор.	Величина	Значение на номинальном режиме	Математическое ожидание остаточной невязки		Средняя квадратичная остаточная невязка	
			абсолютное значение	%	абсолютное значение	%
1	G , кг/с	15,71	0	0	0	0
2	M , кгс·м	460,7	4,36	0,95	6,08	1,32
3	$T_{кв}^*$, К	414	-0,189	-0,0456	1,43	0,345
4	$P_{кв}^*$, кгс/м ²	31410	33	0,105	278	0,885
5	$T_{г}^*$, К	735,2	-0,79	-0,108	2,35	0,322
6	$P_{г}^*$, кгс/м ²	29870	5,65	0,019	187	0,63
7	$T_{ч}^*$, К	633,2	-6,9	-1,085	12,8	2,62
8	$P_{ч}^*$, кгс/м ²	12690	-0,0017	-0,00001	0,003	0,0000236

3.6. ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ДОВОДКЕ ГТД

Доводка является неотъемлемой частью процесса создания двигателя. Ее цель — получение параметров двигателя, соответствующих техническому заданию. Пути доводки могут быть различными и важно выбрать среди них оптимальный. Далеко не безразлично, какой ценой даются изменения параметров, не удовлетворяющих заданию, поэтому применение методов оптимизации в процессе доводки имеет не меньшее значение, чем при проектировании. Эффективность их значительно увеличивается вследствие повышения точности моделей при идентификации.

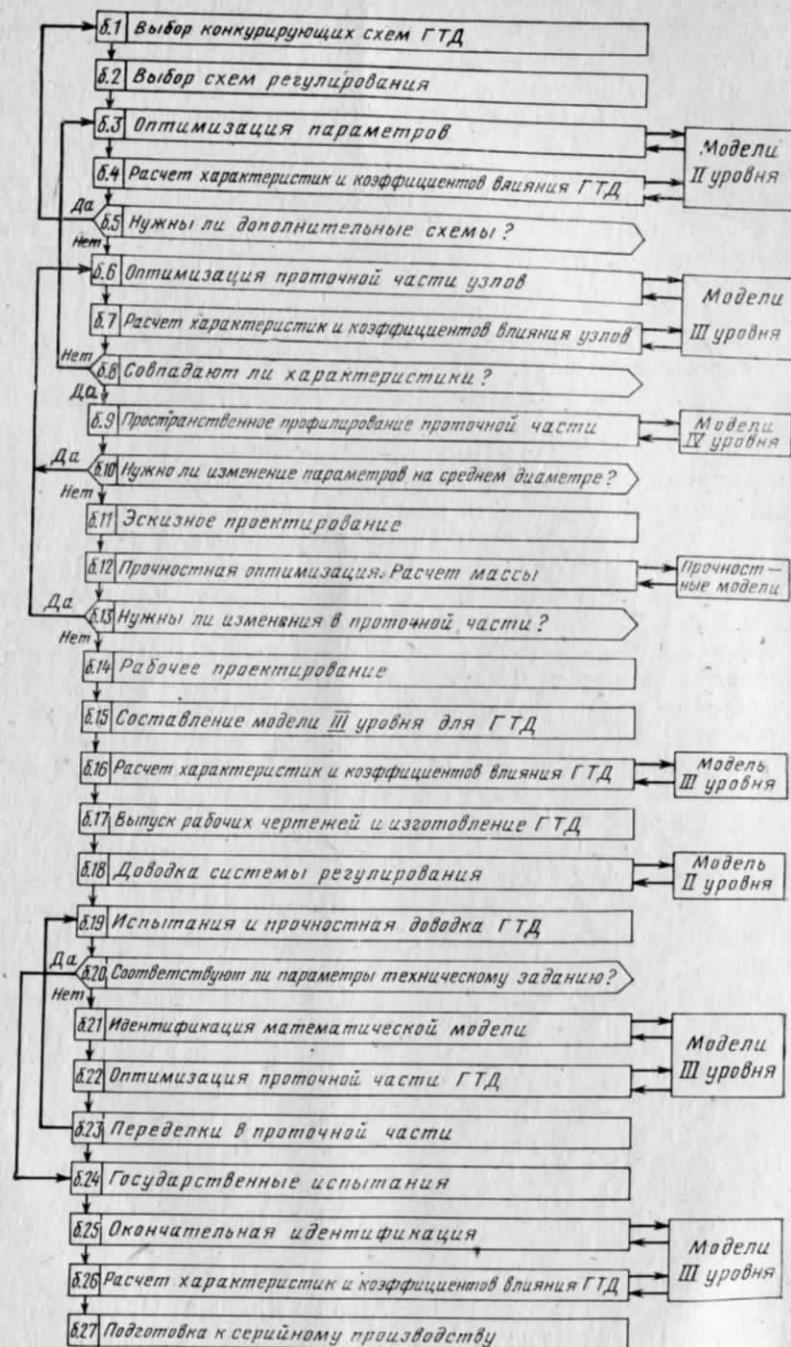


Рис. 3.25. Схема использования методов оптимизации и идентификации при создании ГТД

Бессистемное отрывочное использование методов идентификации и оптимизации для решения отдельных задач не дает должного эффекта. Важно применять их целенаправленно, начиная с самых ранних стадий проектирования и до сдачи двигателя в серийное производство. Последовательность работ при этом, конечно, может быть самой различной в зависимости от конкретных условий, но в самых общих чертах ее все-таки можно наметить.

В блок-схеме на рис. 3.25 основной упор сделан на этапы, требующие сложных и громоздких расчетов, в которых целесообразно применение математических моделей. Некоторые очевидные этапы работ, не требующие сложных расчетов, в блок-схему для упрощения не включены. Предполагается, что все модели и другие модули разработаны до начала проектирования и находятся в банке программ и данных ЭЦВМ, используемой при проектировании и доводке ГТД.

Первым этапом работы (б.1) является выбор одной или нескольких конкурирующих схем ГТД в зависимости от технического задания на проектирование. Для каждой схемы выбираются одна или несколько конкурирующих программ регулирования и составляется скелетная схема регулирования (б.2). Полученная информация для каждой из схем закладывается в математическую модель II уровня сложности. Характеристики компрессоров, турбин и других узлов берутся средние статические и в относительных координатах. Выбираются варьируемые параметры. Это обычно степени повышения давления компрессоров и вентилятора, степень двухконтурности, температура газа перед турбиной и другие параметры на расчетном режиме. Для них задаются границы I рода. Эти же параметры на других режимах могут быть границами II рода. Выражение для функции цели должно быть получено при анализе математической модели самолета. В процессе оптимизации находятся оптимальные значения варьируемых параметров для каждой из схем при выбранной программе регулирования, т. е. оптимальные варианты двигателей (б.3). Используются модели II уровня сложности. Для них рассчитываются полные характеристики и таблицы коэффициентов влияния (б.4). В результате этих расчетов получается значительный объем информации, который позволяет обоснованно выбрать лучшую из конкурирующих схем и проанализировать возможность дальнейшего улучшения параметров за счет изменения ограничений или компонент функции цели. Можно оптимизировать и программы регулирования. Иногда оказывается, что ни одна из рассмотренных схем не обеспечивает достаточно хороших параметров (б.5), тогда приходится выбирать и рассматривать еще другие схемы или программы регулирования, т. е. начинать вновь с (б.1).

Для оптимального варианта двигателя производится оптимизация проточной части каждого из узлов по моделям III уровня сложности (б.6). При этом используются выражения для функций цели, полученные на предыдущих моделях II уровня сложности (см. разд. 4.2). Варьируемыми параметрами являются размеры проточ-

ной части. Некоторые из размеров могут быть взяты с прототипов и не варьироваться. Границы II рода определяются «запираем» в лопаточных венцах, предельными значениями запасов прочности, степени реактивности, запасов устойчивости, допустимыми габаритными размерами и т. д. По тем же моделям рассчитываются характеристики узлов и таблицы коэффициентов влияния (б.7). Характеристики сопоставляются с типовыми, заложенными в модели II уровня, и при значительном отличии (б.8) приходится повторять оптимизацию параметров двигателя (б.3) по уточненным характеристикам узлов.

Правильнее, конечно, было бы оптимизировать размеры проточной части сразу для всего двигателя в целом по моделям III уровня сложности, но для этого необходимы ЭЦВМ со значительно большим быстродействием и объемом оперативного запоминающего устройства, чем в современных ЭЦВМ. По ориентировочным оценкам необходимо быстродействие около 100 млн. операций в секунду.

Расчет и профилирование лопаток на различных радиусах осуществляется по моделям IV уровня сложности по отдельности для каждого венца (б.9). Иногда при этом приходится корректировать и размеры на среднем диаметре (б.10). Корректировку целесообразно производить путем повторной оптимизации (б.6) с измененными значениями границ.

Большинство существующих методов расчета на прочность являются поверочными, поэтому они выполняются после эскизного проектирования (б.11) по обычным методикам на ЭЦВМ. Для наиболее ответственных деталей (дисков, лопаток, цапф и т. д.) разрабатываются математические модели, по которым можно производить оптимизацию (б.12). Функцией цели в этом случае является чаще всего масса детали, которая минимизируется при различных ограничениях, в том числе запасы прочности во всех опасных сечениях должны быть не менее заданных. Задача значительно усложняется из-за необходимости обеспечивать технологичность деталей. Чаще всего при оптимизации ее не учитывают, а затем просто корректируют оптимальный вариант, но лучшие результаты получаются, если система ограничений гарантирует получение только технологичных конструкций. По результатам прочностных расчетов иногда приходится вносить изменения в проточную часть (б.13), так как в моделях III уровня сложности запасы прочности рассчитываются по приближенным формулам, а значения входящих в них поправочных коэффициентов были неизвестными. Эти коэффициенты определяются по результатам прочностных расчетов и оптимизация повторяется (б.6).

Одновременно с рабочим проектированием (б.14) целесообразно составить окончательную модель III уровня сложности (б.15). По готовым моделям узлов это сделать уже нетрудно. Важно обеспечить компактность и быстродействие этой модели, чтобы облегчить последующие расчеты. Ради этого можно отказаться от излишней универсальности модели. По ней рассчитываются уточненные

характеристики и таблицы коэффициентов влияния для двигателя (6.16). Они нужны только для уточнения и не могут существенно отличаться от ранее рассчитанных.

После выпуска рабочих чертежей и изготовления (6.17) двигатель устанавливается на стенд и начинается его доводка. По результатам первых испытаний производится идентификация математической модели двигателя (6.21). Апостериорная модель имеет достаточную точность и пригодна для любых математических экспериментов. По ней производится оптимизация проточной части двигателя (6.22). При этом варьируются только те размеры, изменение которых в опытном двигателе не вызывает чрезмерных трудностей. Проточная часть переделывается на оптимальные размеры (6.23) и повторяются испытания (6.19). При больших переделках в проточной части может оказаться недостаточной точность апостериорной модели, т. е. оптимальные размеры модели будут существенно отличаться от оптимальных для двигателя. В этом случае параметры могут опять не соответствовать техническому заданию (6.20). Тогда повторяются идентификация, оптимизация модели и ее переделки (6.21, 22, 23). Есть основания полагать, что потребность в таких последовательных приближениях будет возникать сравнительно редко. После того, как удастся получить параметры двигателя, соответствующие техническому заданию (6.20), и после государственных испытаний (6.24) производится окончательная идентификация математической модели двигателя по результатам чистовых испытаний (6.25). По окончательной апостериорной модели рассчитываются все необходимые характеристики двигателя и таблицы коэффициентов влияния. Они полезны при подготовке двигателя к серийному производству (6.27), а также для решения многочисленных задач, возникающих в процессе эксплуатации.

3.7. ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ ГТД

Техническая диагностика является одним из разделов теории вероятностей. В отличие от теории надежности, в которой изучаются средневероятностные, статистические показатели работоспособности изделий, в технической диагностике разрабатываются методы определения действительного состояния каждого из диагностируемых изделий, обнаружения в них различных дефектов. В зависимости от характера дефектов изделия принято подразделять на классы состояний, каждый из которых характеризуется совокупностью параметров состояния. Один из классов состояния — бездефектное изделие. Например, при короблении лопаток соплового аппарата турбины (дефект) снижается ее к.п.д. (параметр состояния), при обрыве лопаток компрессора (дефект) снижается степень повышения давления компрессора и его к.п.д. (параметры состояния).

В газотурбинных двигателях при технической диагностике по газодинамическим параметрам не представляется возможным организовать непосредственное измерение параметров состояния. Они могут быть определены только косвенно, через измеряемые параметры, которые в данном случае называются признаками состояния. Это, например, частоты вращения роторов, расход топлива, температуры и давления в различных сечениях газозоудушного тракта. Следовательно, определение классов состояния приходится производить не по параметрам, а по признакам состояния. При изменении различных параметров состояния меняются значения одних и тех же признаков и величины изменений могут быть близкими.

Например, при снижении к.п.д. и в компрессоре, и в турбине будет увеличиваться температура газа за турбиной, если выдерживается постоянная частота вращения соединяющего их вала. Таким образом, связь между параметрами и признаками состояния является сложной и ее можно описать с достаточной точностью только при помощи математической модели.

Возможны два пути построения математических моделей. Первый путь — эмпирический, т. е. модель получается в результате статистической обработки результатов испытаний. По приведенной выше (см. разд. 0.2) классификации такие модели относятся к моделям I уровня сложности. Этим путем можно достаточно быстро и просто получать модели двигателей бездефектных или с легко имитируемыми дефектами. Но, к сожалению, есть дефекты, которые трудно имитировать, для введения каждого из них приходится производить переборку двигателя с последующими испытаниями, что приводит к большим затратам времени и средств. Поэтому обычно исследуют влияние не всех возможных, а только некоторых наиболее вероятных дефектов. Это снижает надежность диагностики.

Второй путь получения моделей — это теоретическое описание рабочих процессов в двигателе с последующей идентификацией полученной модели по результатам испытаний. При диагностике газотурбинного двигателя удобнее использовать модели II уровня сложности, а отдельно испытываемые компрессора или турбины — модели III уровня. Эти модели единые для дефектных и бездефектных двигателей. Наличие дефектов влияет только на величину параметров состояния. Идентификация модели производится по результатам испытаний соответственно дефектных или бездефектных двигателей. Влияние многих дефектов может быть в этом случае оценено расчетным путем, поэтому объем потребных испытаний существенно сокращается. Большую часть подготовительных работ можно провести еще до окончания доводки двигателя.

Последовательность работ при технической диагностике газотурбинного двигателя по газодинамическим параметрам с использованием метода идентификации должна быть примерно следующей.

1. Результаты испытаний нескольких бездефектных двигателей, не имеющих различий в конструкции, подготавливаются для идентификации с учетом погрешностей измерения параметров (см. разд. 3.3).

2. Производится идентификация математической модели II уровня сложности (см. гл. 1) по результатам испытаний каждого из двигателей по отдельности.

3. Полученные значения варьируемых параметров рассматриваются как случайная выборка из генеральной совокупности. Для них вычисляются математическое ожидание, дисперсия и другие статистические оценки параметров распределения. Анализ результатов позволяет выявить грубые ошибки и оценить возможные пределы изменения варьируемых параметров, в данном случае параметров состояния.

4. Формируется массив исходной информации для эталонной среднестатистической модели бездефектного двигателя.

5. С помощью эталонной модели производится многофакторный эксперимент в пространстве параметров состояния. По результатам этих экспериментов строятся линейные или квадратичные модели, отражающие зависимость признаков состояния от параметров состояния. Модели используются для определения границ признаков состояния бездефектного двигателя, соответствующих границам параметров состояния. Сопоставление граничных значений признаков с соответствующими их значениями, принятыми в производстве, позволяет судить об отсутствии грубых ошибок.

6. Производится классификация возможных дефектов двигателей данного типа и соответствующих им параметров состояния. Для каждого из параметров намечаются границы, означающие появление дефекта. При этом для анализа влияния дефектов на параметры состояния используются расчеты на моделях, в основном III уровня сложности. Для большинства параметров границы будут зависеть от режима работы двигателя.

7. На математической модели имитируются различные дефекты, полученные изменением значений параметров состояния, и производятся многочисленные расчеты признаков состояния. Определяется информационная ценность признаков и делается заключение о целесообразности увеличения числа штатных измеряемых параметров для целей диагностики.

8. Подготавливаются для идентификации результаты испытаний нескольких двигателей с различными дефектами.

9. Выбираются варьируемые параметры в эталонной модели. Это — параметры состояния, соответствующие ожидаемым дефектам. Производится идентификация модели по результатам испытаний каждого из дефектных двигателей.

10. Полученные значения параметров состояния (варьируемых) сравниваются с границами для них и делается заключение о достоверности заданных границ. В случае необходимости значения границ корректируются. Принимается решение о необходимости дополнительной проверки границ по результатам испытаний других дефектных двигателей.

11. Полученная информация приводится к виду, удобному для технической диагностики. На этом все подготовительные работы, возможные до начала испытаний диагностируемого двигателя, заканчиваются.

12. Производится идентификация математической модели по результатам испытаний диагностируемого двигателя. Полученные значения варьируемых параметров сравниваются с границами параметров состояния. Если они находятся в пределах границ, то двигатель не имеет дефектов, определяемых данным методом диагностики. При выходе одного или нескольких параметров за границы делаются заключения о наличии соответствующих дефектов.

Таким образом, можно использовать метод идентификации, описанный в разд. 3.4 при технической диагностике газотурбинных двигателей по газодинамическим параметрам. Ее применение возможно и при других методах диагностики, если они сопровождаются измерением каких-либо параметров.

Для повышения точности диагноза можно предложить два усовершенствования. Во-первых, среднестатистическую эталонную модель можно заменить индивидуальной, т. е. для каждого экземпляра двигателя корректировать эталонную модель путем идентификации по результатам сдаточных испытаний. Это позволит задать индивидуальные границы параметров состояния, которые, конечно, будут более узкими и более надежными. Полученная информация должна храниться в паспорте двигателя и в запоминающем устройстве бортовой ЭЦВМ. Во-вторых, можно вместо постоянных границ параметров состояния использовать переменные, учитывая влияние износа и старения двигателя. Например, можно использовать формулы, связывающие эти границы с наработкой двигателя. Для получения таких формул надо проводить идентификацию (см. п. 2) модели по результатам испытаний двигателей с разной наработкой. Потребное количество испытаний будет меньше, если несколько раз испытывать один и тот же экземпляр двигателя по мере увеличения его наработки.

Предложенный метод диагностики является довольно трудоемким и возможным только при достаточной мощности используемых ЭЦВМ. Поэтому его целесообразно использовать в основном при испытаниях двигателя на стенде или в летающей лаборатории. При диагностике двигателей на серийных самолетах возможности бортовых ЭЦВМ будут явно недостаточны, но метод можно существенно упростить без большой потери точности. Для этого на эталонной модели среднестатистической или индивидуальной ставится факторный эксперимент (см. разд. 1.5), при котором откликами являются признаки, а факторами — параметры состояния. Полученная линейная (при ДФЭ) или квадратичная (при ПФЭ или планах II порядка) модель* будет уже достаточно компактной и быстровычисляемой. Она вполне доступна для бортовых ЭЦВМ. В остальном процедура диагностики не изменится.

Оба пути построения математических моделей для диагностики не являются взаимоисключающими. Во-первых, при использовании эмпирического пути тоже можно применять метод идентификации, что приведет к повышению точности модели. Процедура идентификации не изменится, только будет использоваться другая модель. Даже программа расчета на ЭЦВМ может быть использована одна и та же, если она составлена по модульному принципу. Во-вторых, можно для вновь разрабатываемых двигателей, пока мало результатов испытаний, использовать путь теоретического построения модели. Факторный эксперимент на эталонной модели для преемственности в этом случае надо ставить таким образом, что-

бы полученная модель по своей структуре совпадала с эмпирической. По мере накопления результатов испытаний дефектных двигателей ее коэффициенты будут корректироваться и она в конце концов ничем не будет отличаться от обычной эмпирической модели. Такой комбинированный путь построения модели будет, пожалуй, наиболее эффективным.

3.8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.8.1. Метод максимального правдоподобия

Этот метод* был разработан значительно позднее метода наименьших квадратов. Теоретически он наиболее обоснован и в прикладных задачах дает наилучшие результаты. В этом методе варьируемые параметры вычисляются таким образом, чтобы полученные значения измеренных параметров были «наиболее вероятны». Вычисления сводятся к поиску максимума функции правдоподобия: $L(\varepsilon_i, x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\varepsilon_1, x_1, x_2, \dots, x_n) P(\varepsilon_2, x_1, x_2, \dots, x_n) \dots P(\varepsilon_i, x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_1, x_2, \dots, x_n — варьируемые параметры; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ — взвешенные невязки, являющиеся случайными величинами в каждой из j экспериментальных точек; $P(\varepsilon_i, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность вероятности для i -й невязки.

Для упрощения формул обычно ищут максимум логарифма L , т. е. задача сводится к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial x_2} &= 0; \\ &\dots \\ \frac{\partial \ln L}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Практическое использование метода максимального правдоподобия для идентификации математических моделей по результатам испытаний затруднительно, а иногда и вообще невозможно. Дело в том, что трудно получить зависимости для плотностей вероятности P . Необходимо производить исследование закона распределения невязок или выбирать один из теоретических законов распределения. В частном случае нормального закона распределения метод максимального правдоподобия превращается в описанный выше метод наименьших квадратов. Широко распространено мнение, что метод наименьших квадратов вообще является частным случаем метода максимального правдоподобия. Но он является самостоятельным методом, который широко применяется и при других законах распределения невязок, а не только при нормальном.

* В гл. 4 такие модели называются передаточными.

* В современном виде он был предложен Р. Фишером в 1912 г.

Метод максимального правдоподобия можно рекомендовать для идентификации математических моделей в тех случаях, когда известны или могут быть выявлены законы распределения невязок и они существенно отличаются от нормального закона. В других случаях предпочтительнее метод наименьших квадратов.

3.8.2. Метод уравнивания

Этот метод является разновидностью метода наименьших квадратов и отличается от него использованием одного дополнительного условия. Оно заключается в том, что минимизируются не только сумма квадратов невязок, но и сумма квадратов отклонений варьируемых параметров от их значений в нулевом приближении, т. е.

$$s = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \bar{\varepsilon}_{ij}^2 + \sum_1^{n_{\max}} (x_{n0} - x_n)^2 \rightarrow \min.$$

Система нормальных уравнений получается, как обычно, дифференцированием суммы s по варьируемым параметрам x_n . Иногда в число варьируемых параметров вводят поправки к измеряемым величинам, тогда после идентификации они получаются равными систематическим погрешностям соответствующих измерений.

Метод уравнивания широко применяется в геодезии, но там он практически совпадает с методом наименьших квадратов, так как варьируются только поправки к измеряемым параметрам, которые одновременно являются и невязками.

Из-за введения дополнительного условия резко уменьшается минимально необходимое количество измеряемых параметров. Это является большим преимуществом метода уравнивания. Его можно применять при очень малом количестве измеряемых параметров, когда невозможно применение метода наименьших квадратов. Во всех случаях можно обеспечить хорошее совпадение результатов расчета по модели с экспериментом, но оно является в значительной мере формальным. Если один из варьируемых параметров будет задан в нулевом приближении с большой ошибкой, то она не будет обнаружена в процессе расчета, а ее влияние будет корректироваться за счет изменения всех варьируемых параметров в равной мере. В методе наименьших квадратов, как указывалось выше, такие ошибки легко выявляются. Именно на этом основано его применение при технической диагностике двигателей. Метод уравнивания нельзя использовать для технической диагностики, так как каждый дефект будет, как бы «размазываться» по всем варьируемым параметрам и его нельзя будет локализовать и выявить.

Из-за этих особенностей метода уравнивания его можно рекомендовать для использования в тех случаях, когда априорно известно, что математическая модель должна хорошо описать результаты данных испытаний (т. е. дефекты в двигателе отсутствуют) и известно достаточно хорошее начальное приближение варьируемых параметров, а количество измеряемых параметров недостаточно для применения метода наименьших квадратов.

3.8.3. Метод группового учета аргументов (МГУА)

Метод группового учета аргументов [11] является эвристическим в отличие от описанных выше детерминированных методов. В нем производится многорядная селекция* по различным критериям селекции, задаваемым исследователем. В процессе селекции выбирается оптимальная математическая модель, но не произвольная, а из заданного перечня опорных функций. Во всех предыдущих методах структура математической модели была заданной, а определялись только коэффициенты модели по условию минимизации одного, вполне определенного критерия. Таким образом, в МГУА используется минимум априорной информации. Это является большим преимуществом при отсутствии надежной априорной информации, так как исключается влияние субъективизма исследователя. Но если такая информация имеется, например, когда модель может быть составлена на основе теоретических соображений и в процессе идентификации надо только уточнить ее параметры, то отказ от априорной информации является большим недостатком метода.

В МГУА вся имеющаяся для построения модели экспериментальная информация делится минимум на две части: обучающую и проверочную. Первая используется для определения коэффициентов каждой из сравниваемых моделей, а вторая — для контроля полученных моделей. Считается целесообразным пожертвовать точностью определения коэффициентов модели для того, чтобы придать ей большую регулярность (прогнозирующую силу). При нерегулярности моделей они слишком чувствительны к изменению исходных данных.

Полное описание математической модели представляет собой, как обычно, зависимость отклика y от n факторов (варьируемых параметров): $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Оно заменяется несколькими рядами частных описаний (моделей). В первом ряду селекции $y_{11} = f(x_1, x_2)$; $y_{12} = f(x_1, x_3)$; ...; $y_{1s} = f(x_{n-1}, x_n)$. Число таких уравнений очевидно равно числу сочетаний из n по 2, т. е.

$$s = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Во втором ряду селекции факторами являются отклики из первого ряда $y_{21} = f(y_{11}, y_{12})$; $y_{22} = f(y_{11}, y_{13})$; ...; $y_{2p} = f(y_{1, s-1}, y_{1s})$, где $p = C_s^2 = \frac{s(s-1)}{2}$. Последующие ряды селекции строятся аналогично.

Различные алгоритмы МГУА различаются выбором функции f . В основном алгоритме используются квадратичные полиномы, т. е. $y = b_0 + b_1x_i + b_2x_j + b_{12}x_ix_j + b_{11}x_i^2 + b_{22}x_j^2$ во всех рядах селекции. Из ряда в следующий ряд селекции пропускаются только наиболее эффективные переменные (регулярные и несмещенные).

* Алгоритмы МГУА фактически воспроизводят схему массовой селекции, применяемой при выведении новых сортов растений, поэтому используется термин селекция.

К ВОПРОСУ О СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

4.1. ЦЕЛИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Идентификация начинается с разделения экспериментальных точек на обучающую и проверочную последовательность. Например, в одну из них можно включить все четные точки, а в другую нечетные, но чаще в проверочную последовательность включают меньшее количество точек. По точкам обучающей последовательности рассчитываются независимо друг от друга все s частных моделей первого уровня селекции при помощи обычного метода наименьших квадратов. Из них отбирается заданное количество лучших частных моделей по одному из критериев селекции. Например, критерий регулярности представляет собой среднюю квадратичную невязку между экспериментальными значениями откликов из проверочной последовательности и расчетными по частной модели. Критерием селекции могут быть коэффициенты корреляции между прогнозируемыми и действительными значениями отклика. Для получения критерия несмещенности частные модели получают дважды; сначала по обучающей последовательности, а затем точно так же по проверочной. Одноименные коэффициенты частных моделей (b_i' и b_i'') сравниваются и вычисляется показатель смещенности

$$n_{см} = \frac{(b_i' - b_i'')^2}{b_i^2} 100\%.$$

Качество частной модели оценивается по среднему арифметическому значению показателя смещенности. В следующих рядах селекции процесс повторяется, причем критерии селекции могут быть разными. Процесс прекращается, когда критерий селекции перестанет уменьшаться. В окончательной математической модели по возможности исключаются промежуточные переменные.

Вместо квадратичных полиномов могут использоваться формулы Бейеса, вероятностные графы, формулы удельного риска. Алгоритмы МГУА могут использоваться для идентификации самых сложных объектов. Число варьируемых переменных (факторов) может достигать до 1000 при реальных затратах машинного времени и сравнительно небольшом количестве экспериментальной информации. Правда, в этом случае приходится отказаться от полного перебора пар факторов, а заменить его случайным выбором пар. В газотурбинных двигателях алгоритмы МГУА можно рекомендовать для получения математических моделей I уровня сложности, так как только в них можно отказаться от использования априорной информации и изменять структуру математической модели. Весьма перспективно применение методов МГУА при технической диагностике двигателей.

По ориентировочным оценкам, собранным А. И. Половинкиным*, сложность изделий, измеряемая средним числом узлов, входящих в изделие, удваивается примерно через каждые 15 лет. В то же время из-за увеличения темпов научно-технического прогресса время на проектирование изделия сокращается примерно в два раза через каждые 25 лет. Остро стоит проблема повышения качества изделий, их конкурентоспособности. В этих условиях ручные методы проектирования стали серьезным препятствием на пути научно-технического прогресса. Появились методы автоматизированного проектирования, но в зависимости от вида изделий цели их разные. В сравнительно простых изделиях объем графических работ составляет не менее 30...40% от общей трудоемкости, иногда он доходит до 70...80% [10], а качество изделия обычно мало зависит от метода расчета и проектирования. Существующие методы расчета не являются препятствием на пути повышения их качества. Для таких изделий основная цель — ускорение проектирования, т. е. автоматизация графических работ. Она дает большой экономический эффект и существенно сокращает сроки создания изделия даже при использовании отдельных методов, а не системы автоматизированного проектирования.

В сложных изделиях, таких, например, как авиационный газотурбинный двигатель, дело обстоит иначе. Имеются данные**, что на проектирование, включающее и графические, и расчетные работы, приходится только около 2% от затрат на создание двигателя. По другим данным*** на доводку двигателя в общем процессе его создания в среднем тратится около 80% времени. Следовательно, на все остальные работы, включая графические, остается 20%. Для получения этих данных были использованы сведения по 59 двигателям зарубежных фирм, созданных за период 1944...1973 гг. Под

* Половинкин А. И. ЭВМ: поиск новых технических решений. М., Наука и жизнь, 1976, с. 54—61.

** Кузнецов Н. Д. Обеспечение надежности двигателей для гражданской авиации. — В сб. Основн. вопр. теории и практики надежности. М., Сов. радио, 1975, с. 27—42.

*** Березкина А. А. Среднестатистические показатели процесса доводки зарубежных авиационных газотурбинных двигателей. — В сб.: Испытания авиац. двигателей. Уфа, 1975, вып. 3, с. 50—64.

общей продолжительностью доводки понимается время от первого стендового испытания опытного образца до начала эксплуатации серийных двигателей. Средняя арифметическая продолжительность в 1944...1963 гг. составляла 61 месяц, а в 1963—1972 гг. — 57 месяцев, т. е. примерно пять лет. Для сравнения можно указать, что продолжительность проектирования за те же периоды составляла 20 и 18 месяцев. В последние годы широкое распространение получила практика предварительной доводки отдельных узлов и элементов двигателя, например, компрессора, генератора газа и т. д. Это позволяет существенно сократить продолжительность доводки, но не ее стоимость. Эти цифры показывают что применение только машинной графики, само по себе, конечно, полезное и экономически эффективное, не может существенно повлиять на затраты времени и средств, расходуемых на создание двигателя. В то же время качество спроектированного двигателя, т. е. достигнутый уровень удельных параметров, существенно зависит от используемого метода проектирования, от близости выбранных параметров к оптимальным. Следовательно, нужна автоматизация работ на всех основных этапах создания двигателя, т. е. нужны системы автоматизированного проектирования. Теория систем автоматизированного проектирования машин в настоящее время еще окончательно не сформировалась, поэтому основные черты таких систем можно сформулировать только ориентировочно.

1. Системный подход к созданию изделия, т. е. исследование его свойств совместно с другими, тесно с ним связанными изделиями, рассмотрение их как единого целого, единой системы с прослеживанием возможно большего числа связей — не только внутренних, но и внешних.

2. Применение иерархических математических моделей, описывающих всю проектируемую систему, с передачей информации между математическими моделями на машинных носителях.

3. Оптимизация параметров на разных ступенях иерархии по взаимно увязанным функциям цели и ограничениям.

4. Широкое и целенаправленное применение ЭЦВМ с вводом и выводом графической информации, желательнее в режиме диалога (интерактивном режиме).

Применение систем автоматизированного проектирования позволит существенно повысить качество проектируемого изделия, в частности, улучшить тактико-технические характеристики газотурбинного двигателя. Улучшение происходит за счет: 1) более полного учета внутренних и внешних связей системы, в особенности на ранних стадиях проектирования изделия; 2) оптимизации параметров на разных уровнях иерархической модели по взаимно согласованным функциям цели, при которой анализируется большое количество вариантов изделия; 3) использования передового опыта различных проектных организаций, объединенного в единой системе автоматизированного проектирования; 4) сокращения сроков проектирования и доводки изделия, а следовательно, меньшей степени морального старения заложенных в него идей.

Следует различать автоматические и автоматизированные системы проектирования. В автоматических участие человека сводится к подготовке исходной информации и анализу полученных результатов. Все расчеты ведутся в режиме пакетной обработки без оперативного вмешательства человека в процессе решения. В автоматизированных системах человек является обязательным и активным элементом системы. Решение ведется в режиме оперативного диалога между человеком и ЭЦВМ. Оба режима имеют свои преимущества и недостатки, свои области применения. Если решаемую задачу удалось полностью формализовать вплоть до принятия необходимого решения на всех этапах расчета, то, конечно, целесообразнее пакетная обработка. При ее применении меньше затраты машинного времени, использования высококвалифицированного персонала и значительно проще сервисное математическое обеспечение. Если же в задаче имеются моменты, которые невозможно или трудно формализовать, то применение режима диалога является мощным средством повышения эффективности расчетов. Оперативное вмешательство человека позволяет принять в нужный момент правильное решение, скорректировать исходную информацию и т. д.

В настоящее время и в обозримом будущем, видимо, не удастся полностью формализовать все задачи машинного проектирования. Поэтому система машинного проектирования в целом должна быть автоматизированной, но среди входящих в нее автономных подсистем могут быть и автоматические. По мере развития методов расчета и принятия решения процент автоматических подсистем будет возрастать, но довольно медленно, так как одновременно будут возрастать требования к качеству проектирования, т. е. будет требоваться все более высокий уровень совершенства изделий.

4.2. ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ВНУТРИ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

При оптимизации двигателя в системе автоматизированного проектирования необходим взаимно согласованный выбор функций цели на всех уровнях иерархической модели. Наиболее правильно и объективно они могут быть выбраны на самых верхних уровнях иерархии. Разумные пределы продолжения ступеней иерархической модели зависят от типа двигателя.

Модель газотурбинного двигателя для пассажирского самолета входит в иерархическую модель, часть блок-схемы которой показана на рис. 4.1. Верхняя ступень — «Аэрофлот», т. е. должна использоваться экономическая модель аэрофлота, а функция цели — экономические показатели его деятельности. Ведь именно они являются конечной целью обновления парка самолетов и двигателей.

На нижних уровнях иерархических систем моделей не удается обычно использовать те же функции цели, но при правильной постановке оптимизации применяемые функции цели должны быть увязаны с первоначальными. Следовательно, необходима передача

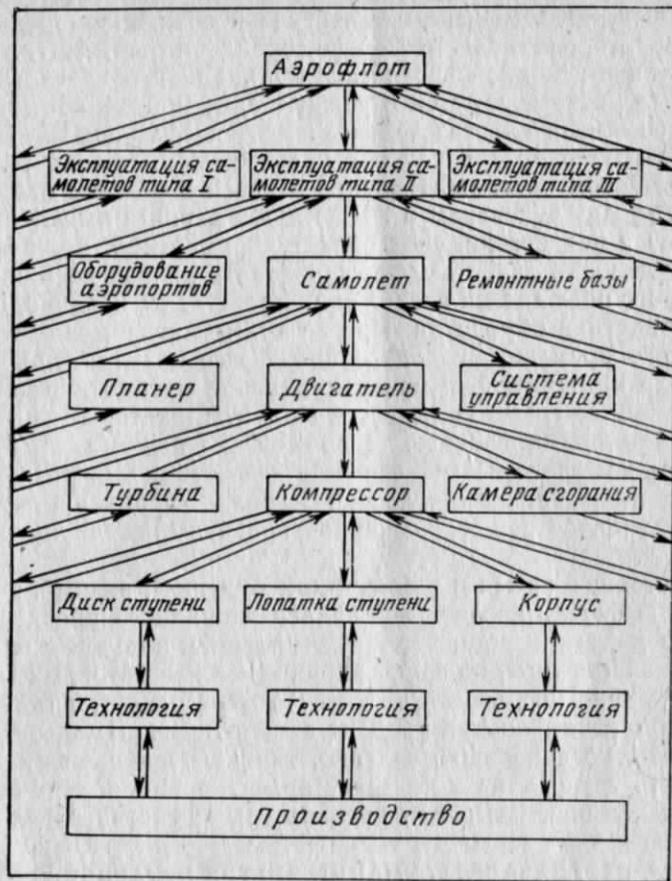


Рис. 4.1. Фрагмент блок-схемы иерархической модели

информации по всем ступеням иерархической модели как сверху вниз, так и в обратном порядке. Организация этого потока информации является непростой задачей. При передаче сверху вниз информация должна преобразовываться к виду, приемлемому для моделей нижнего уровня. При движении снизу вверх важно сжатие информации, т. е. максимальное уменьшение ее объема при минимальном уменьшении информативности. Без сжатия моделям верхнего уровня будет трудно или невозможно справиться с чрезмерным объемом информации.

Самым простым решением проблемы была бы прямая оптимизация, т. е. если бы удалось разместить всю иерархическую модель вместе с программой оптимизации в запоминающем устройстве ЭЦВМ, то можно было бы оптимизировать сразу всю модель по единой векторной функции цели. К сожалению, возможности сов-

ременных ЭЦВМ для этого явно недостаточны и в ближайшем будущем положение, по-видимому, не изменится. Такая проблема возникает не только в газотурбинных двигателях, но и еще во многих системах самого различного назначения. Все такие системы, для которых невозможна прямая оптимизация «в лоб», называются «большими системами». Для них разрабатываются различные обходные пути. В случае газотурбинного двигателя их может быть несколько.

Метод статистических моделей. Все частные математические модели, входящие в иерархическую модель, рассматриваются изолированно. Примыкающие нижестоящие модели заменяются имитационными, которые получают статистической обработкой информации, полученной в результате анализа существующих изделий аналогичных типов. Влияния вышестоящих моделей игнорируются, а функции цели и ограничения для каждой модели выбираются по физическому смыслу из числа параметров, наиболее сильно влияющих на вышестоящие модели. Применение статистических моделей наиболее распространено, но оно имеет целый ряд недостатков, описанных в разд. 1.5.

Для повышения надежности статистических моделей иногда учитывают год закладки или завершения доводки изделия. К сожалению, эти зависимости обычно оказываются немонотонными и плохо аппроксимируются.

Часто оптимизируют не одну модель, а две или три соседних совместно. Это, конечно, улучшает положение дел, в особенности для средней модели, но существенно возрастает трудоемкость решения задачи. Становится затруднительным размещение их в запоминающем устройстве ЭЦВМ. Несмотря на указанные недостатки, такой подход вполне применим на этапах технического предложения и предэскизного проектирования.

Метод быстроисчисляемых моделей. Все частные модели существенно упрощаются и очень тщательно обрабатываются. Все уточнения, подробности отбрасываются. Многие точные решения заменяются приближенными. Широко применяется идентификация параметров простых моделей по результатам расчетов на более сложных, аппроксимация действительных сложных зависимостей более простыми. Точность результатов каждой модели при этом, конечно, снижается, но медленнее, чем сложность. Вся иерархическая модель становится более компактной и при искусном программировании становится возможной прямая оптимизация на самых мощных из современных ЭЦВМ, объединенных в систему, на всей системе или большей ее части. Недостатком такого подхода является необходимость в использовании систем мощных ЭЦВМ и в существенном повышении качества программ. Тем не менее он является весьма перспективным, так как отказ от статистических имитационных моделей, от недостаточно обоснованных функций цели на нижних уровнях иерархии позволяет с избытком компенсировать снижение точности частных математических моделей.

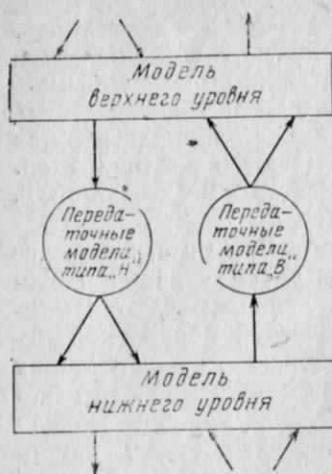


Рис. 4.2. Схема связи математических моделей верхнего и нижнего уровней через передаточные модели

Можно предложить третий путь — метод передаточных моделей, получаемых методами факторного эксперимента на соседних моделях. Рассмотрим этот подход подробнее.

Назначение передаточных моделей — передача информации от модели к модели в компактном виде, удобном для использования при движении и вверх и вниз по иерархической лестнице. На рис. 4.2 показаны две соседние модели и находящиеся между ними передаточные модели типа «Н» и «В», т. е. обеспечивающие движение вниз и вверх. Число параметров в них должно быть минимальным, чтобы обеспечить сжатие информации. Эти параметры, входящие в обе модели, можно разбить по назначению на пять групп.

Первая группа — вектор определяющих параметров, которые определяют влияние модели верхнего уровня

на модель нижнего уровня и входят в техническое задание на проектирование изделия, описываемого моделью нижнего уровня. В математических — моделях, описанных в гл. 1, они входят в векторы режимных параметров U [см. формулы (0.1), (0.2)] модели нижнего уровня. Вторая группа — вектор передаточных параметров, которые передают информацию от нижней модели к верхней. В математических моделях [см. формулы (0.1), (0.2)] они входят в вектор результатов Z нижней модели и в вектор констант Y верхней модели. В эту группу должны входить все параметры, которые влияют на результаты расчета по верхней модели и в то же время зависят от нижней. Третья группа — функции цели для верхней модели, а если она векторная, то и весовые коэффициенты ее компонент. В зависимости от применяемого метода векторной оптимизации вместо весовых коэффициентов могут использоваться другие параметры (см. подразд. 2.1.6). Четвертая группа — вектор ограничений, которые накладываются исходя из физического смысла задачи, а также, моделью верхнего уровня на нижнюю и учитываются при ее оптимизации. Пятая группа — дополнительная информация. Она зависит от рассматриваемых моделей и наличие ее не обязательно.

Обе передаточные модели получают путем факторного эксперимента (полного или дробного) на модели верхнего уровня при движении сверху вниз, т. е. для модели типа «Н», или нижнего уровня при движении снизу вверх, т. е. для модели типа «В». В первом случае отклик — это функция цели модели верхнего уровня, а факторы — передаточные параметры. Передаточная математическая модель типа «Н», полученная в результате эксперимента,

имитирует модель верхнего уровня и используется при оптимизации модели нижнего уровня в качестве выражения для функции цели. При эксперименте на модели нижнего уровня откликами являются все передаточные параметры, а факторами — определяющие параметры. В результате получается совокупность передаточных моделей типа «В», которые имитируют влияние модели нижнего уровня в некотором диапазоне изменения определяющих параметров и используются при оптимизации модели верхнего уровня.

Организация проектирования при таком подходе описана в разд. 4.4. Она имеет следующие преимущества по сравнению с двумя первыми.

1. Каждая частная модель оптимизируется самостоятельно, но с полной имитацией влияния выше- и нижестоящих моделей. Точность оптимизации при этом не снижается, но могут быть использованы существующие ЭЦВМ различных типов.

2. Для каждой частной модели получается наиболее правильное и точное выражение для функции цели, полностью увязанное с глобальной функцией цели, применяемой на верхнем уровне иерархической модели (см. разд. 4.4).

3. При проектировании и оптимизации используется информация только для проектируемого изделия, т. е. наиболее достоверная. Никакие среднестатистические зависимости не нужны.

4. Отпадает необходимость в разработке многих моделей и программ, так как могут быть использованы многие из существующих после небольшой переделки. Можно даже использовать программы, составленные на различных алгоритмических языках для ЭЦВМ разных типов.

5. Отпадает технический предел усложнения математических моделей, так как каждую из них можно при необходимости разделить на две, связанные передаточными моделями, но разумеется остается экономический предел усложнения.

Основным недостатком является увеличение затрат машинного времени, поэтому такой подход более целесообразен уже на этапе эскизного, рабочего проектирования или последнего предэскизного. Этот недостаток частично компенсируется тем, что значительно увеличивается число однообразных расчетов по одним и тем же программам, а следовательно, их можно поручать менее квалифицированному персоналу и проводить в менее дефицитное ночное время.

4.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Наиболее подходящие способы получения передаточных моделей, т. е. зависимостей откликов y от факторов x , как уже указывалось, — полный и дробный факторный эксперимент, но возможны и другие способы.

Передаточная модель аппроксимирует действительную зависимость $y=f(x)$, показанную на рис. 4.3 жирной линией, в окрестности точки начального уровня x_0 . При заданной погрешности аппроксимации диапазон применимости передаточной модели тем

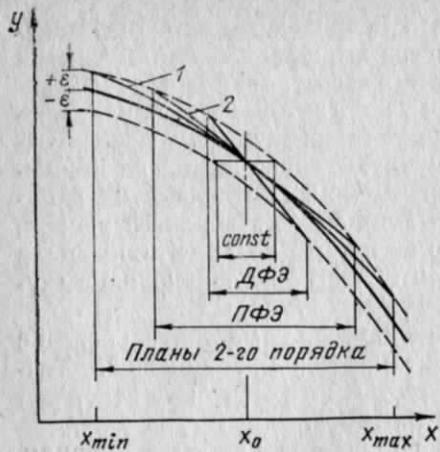


Рис. 4.3 Диапазоны возможного изменения факторов при разных способах получения передаточных моделей (ϵ — допустимая погрешность):
1 — парабола; 2 — касательная

факторном эксперименте (ПФЭ) в формуле (4.1) отсутствуют квадратичные члены, т. е. при $i=j \neq 0$ $b_{ij}=0$, и получается линейчатая поверхность. По каждому фактору — это прямая касательная к действительной зависимости. Диапазон ее применимости в общем случае конечно меньше, но обычно он бывает вполне достаточным. При использовании дробного факторного эксперимента получается линейная модель

$$y = \sum_{j=0}^n b_j x_j, \quad (4.2)$$

т. е. гиперплоскость, касательная к действительной зависимости в начальной точке. По каждому фактору получается при неизменных и отличных от нуля значениях остальных — прямая, которая не является касательной. Линейную модель [см. формулу (4.2)] можно также получить методом малых отклонений (см. разд. 4.5). Если по тем или иным причинам не удалось поставить факторный эксперимент, то задается постоянное значение отклика. Значение погрешности при этом остается приемлемым в некотором диапазоне изменения каждого фактора, как показано на рис. 4.3. В зависимости от конкретных условий может быть использован любой из этих видов передаточных моделей.

Факторный эксперимент ставится на математической модели, т. е. просто выполняются расчеты на ЭЦВМ. Каждый эксперимент — это оптимизация при новых условиях, которые соответствуют изменившимся значениям факторов. Если оптимум при начальном уровне факторов (рис. 4.4) соответствует точке x_{j0} , то при рас-

чете по математической модели получится кривая 1. При факторных экспериментах результаты расчета изменятся и будут соответствовать кривым 2. В результате оптимизации будут найдены оптимумы x_{j1} и x_{j2} . Передаточная модель, полученная при ПФЭ, — это прямая 4, а действительная зависимость, которую она аппроксимирует, — 3.

Для ее получения факторным экспериментом необходимо применять планы II порядка, например, ортогональные, рототабельные, А-оптимальные, планы Хартли или другие. Как показано на рис. 4.3, диапазон применимости этой формулы наибольший из рассмотренных. По каждому из факторов при неизменном значении остальных получается параболическая зависимость. При полном

факторном эксперименте (ПФЭ) в формуле (4.1) отсутствуют квадратичные члены, т. е. при $i=j \neq 0$ $b_{ij}=0$, и получается линейчатая поверхность. По каждому фактору — это прямая касательная к действительной зависимости. Диапазон ее применимости в общем случае конечно меньше, но обычно он бывает вполне достаточным. При использовании дробного факторного эксперимента получается линейная модель

$$y = \sum_{j=0}^n b_j x_j, \quad (4.2)$$

т. е. гиперплоскость, касательная к действительной зависимости в начальной точке. По каждому фактору получается при неизменных и отличных от нуля значениях остальных — прямая, которая не является касательной. Линейную модель [см. формулу (4.2)] можно также получить методом малых отклонений (см. разд. 4.5). Если по тем или иным причинам не удалось поставить факторный эксперимент, то задается постоянное значение отклика. Значение погрешности при этом остается приемлемым в некотором диапазоне изменения каждого фактора, как показано на рис. 4.3. В зависимости от конкретных условий может быть использован любой из этих видов передаточных моделей.

Факторный эксперимент ставится на математической модели, т. е. просто выполняются расчеты на ЭЦВМ. Каждый эксперимент — это оптимизация при новых условиях, которые соответствуют изменившимся значениям факторов. Если оптимум при начальном уровне факторов (рис. 4.4) соответствует точке x_{j0} , то при рас-

чете по математической модели получится кривая 1. При факторных экспериментах результаты расчета изменятся и будут соответствовать кривым 2. В результате оптимизации будут найдены оптимумы x_{j1} и x_{j2} . Передаточная модель, полученная при ПФЭ, — это прямая 4, а действительная зависимость, которую она аппроксимирует, — 3.

Большое значение имеет оптимальное выделение частных моделей из иерархической, которое следует производить, исходя из следующих соображений.

1. Размер каждой частной модели должен быть таким, чтобы она легко размещалась в запоминающем устройстве используемой ЭЦВМ вместе с обслуживающими программами, и время всех необходимых расчетов на ней было реальным.

2. Число частных моделей должно быть минимально возможным, так как это уменьшит число передаточных моделей и потребное машинное время.

3. Число параметров передаточных моделей во всех пяти группах (см. разд. 4.2) должно быть минимально возможным и с минимальной корреляцией между ними.

4. По возможности частные модели следует выбирать таким образом, чтобы они совпадали с уже существующими моделями, имеющими отлаженные программы.

5. Информация не должна по возможности передаваться между моделями одинакового уровня в иерархии, иначе увеличивается число передаточных моделей.

6. Следует сразу разделять автоматические и автоматизированные модели, т. е. оценивать будущий режим работы — пакетный или диалоговый.

Деление иерархической модели на частные удобно изображать в виде блок-схемы, например такой, как на рис. 4.1. Целесообразно рассмотреть попарно входящие в нее частные модели, чтобы предварительно наметить и проанализировать параметры передаточных моделей. Верхняя часть иерархической модели выходит за пределы тематики данной книги.

Отметим только, что передаточные параметры для модели «Самолет» могут быть, например, следующими: приведенные затраты за период эксплуатации; взлетная масса самолета; себестоимость тонно-километра.

В передаточной модели типа «Н», примыкающей сверху к модели «Самолет», откликом будет сводный экономический показатель, полученный на моделях верхнего уровня, а факторами — перечис-

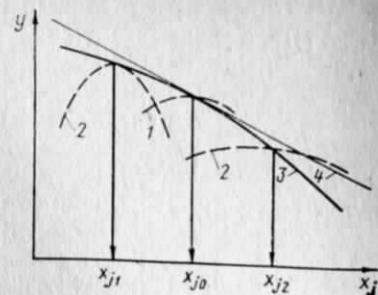


Рис. 4.4. Зависимость отклика от одного из факторов x_j :
1 — расчет по модели при нулевом уровне факторов; 2 — расчеты по модели в процессе факторного эксперимента; 3 — оптимальная зависимость; 4 — передаточная модель

ленные выше передаточные параметры. По этой передаточной модели при оптимизации самолета вычисляется значение функции цели.

4.3.1. Модели «Самолет» — «Двигатель»

Определяющие параметры для этих же передаточных моделей могут быть, например, следующие:

- тяга двигателя на режиме «номинал»;
- тяга двигателя на режиме «форсаж полный»;
- высота полета расчетная;
- число M расчетное.

Передаточные параметры, которые отражают основное влияние двигателя на самолет могут быть следующие:

- удельный расход топлива на режиме «номинал»;
- удельный расход топлива на режиме «0,8 номинала»;
- удельный расход топлива на режиме «0,5 номинала»;
- удельный расход топлива на режиме «малый газ»;
- удельный расход топлива на режиме «взлет»;
- удельный расход топлива на режиме «форсаж полный»;
- масса двигателя;
- длина двигателя;
- диаметр вентилятора;
- диаметр двигателя;
- себестоимость двигателя;
- стоимость подготовки производства.

Эти параметры являются, как указывалось выше, факторами при постановке факторного эксперимента на модели «Самолет».

Ограничения:

- запасы по помпажу на различных режимах;
- тяга на некоторых второстепенных режимах;
- ресурс двигателя;
- степень двухконтурности;
- уровень шума;
- токсичность выходящих газов и т. п.

Дополнительная информация:

— характеристики компрессоров и турбин в относительных координатах, если они существенно отличаются от типовых.

4.3.2. Модели «Двигатель» — «Компрессор»

Определяющие параметры:

- степень повышения давления компрессора на режиме «номинал»;
- частота вращения на режиме «номинал»;
- расход воздуха через компрессор на режиме «номинал»;
- температура торможения на входе в компрессор на режиме «номинал»;

- давление торможения на режиме «номинал»;
- количество отбираемого воздуха;
- давление отбираемого воздуха.

Передаточные параметры:

- к. п. д. компрессора на режиме «номинал»;
- масса компрессора;
- габаритные размеры;
- поправочные коэффициенты к типовой характеристике компрессора, заложенной в модель двигателя;
- температура отбираемого воздуха;
- себестоимость компрессора;
- стоимость подготовки производства.

Ограничения:

- требуемый ресурс;
- запасы по помпажу на различных режимах;
- запасы прочности;
- габаритные размеры;
- степень повышения давления на некоторых режимах;
- к. п. д. компрессора на некоторых режимах.

Дополнительная информация:

- наличие поворотных лопаток;
- коэффициенты потерь в лопаточных решетках компрессора.

4.3.3. Модели «Двигатель» — «Турбина»

Определяющие параметры:

- мощность турбины на режиме «номинал»;
- частота вращения на режиме «номинал»;
- расход газа через турбину на режиме «номинал»;
- температура торможения газа на входе на режиме «номинал»;
- давление торможения газа на входе на режиме «номинал»;

- количество охлаждающего воздуха;
- температура охлаждающего воздуха;
- давление охлаждающего воздуха.

Передаточные параметры:

- к. п. д. турбины на режиме «номинал»;
- масса турбины;
- габаритные размеры;
- поправочные коэффициенты к типовой характеристике турбины, заложенной в модель двигателя;
- себестоимость турбины;
- стоимость подготовки производства.

Ограничения:

- требуемый ресурс;
- запасы прочности;
- габаритные размеры;

— степени реактивности (они не нужны, если в модели учитывается через какие-либо параметры влияние степени реактивности на потери);

— мощность на некоторых режимах;

— к. п. д. на некоторых режимах.

Дополнительная информация:

— коэффициенты потерь в лопаточных решетках турбины.

4.3.4. Модели «Двигатель» — «Камера сгорания»

Определяющие параметры:

— температура газа на выходе из камеры сгорания;

— температура воздуха на входе;

— давление на входе;

— расход воздуха через камеру;

— низшая теплотворная способность топлива;

— химический состав топлива, если оно отличается от нормального.

Передаточные параметры:

— коэффициент восстановления давления;

— коэффициент полноты сгорания;

— часовой расход топлива;

— коэффициент неравномерности поля температур на выходе из камеры;

— масса;

— габаритные размеры;

— себестоимость камеры сгорания;

— стоимость подготовки производства.

Ограничения:

— максимальная температура жаровых труб;

— максимально допустимая скорость воздуха.

Дополнительная информация:

— желательный тип камеры сгорания.

4.3.5. Модели «Двигатель» — «Входное устройство»

Наличие модели «Входное устройство» не обязательно. Она чаще полностью входит в модель «Двигатель» и рассчитывается вместе с ним. Иногда, в особенности при больших скоростях полета, ее целесообразно рассматривать отдельно.

Определяющие параметры:

— высота полета расчетная;

— число M расчетное;

— расход воздуха.

Передаточные параметры:

— коэффициент восстановления давления на расчетном режиме;

— масса;

— габаритные размеры;

— поправочные коэффициенты к типовой характеристике входного устройства, заложенной в модель двигателя.

Ограничения:

— габаритные размеры.

Дополнительная информация:

— требуемый диапазон чисел M и высот полета;

— возможность применения регулируемого входного устройства.

4.3.6. Модели «Компрессор» — «Лопатка ступени №» или «Турбина» — «Лопатка ступени №»

Вид информации для моделей лопаток всех ступеней, конечно, будет одинаковым.

Определяющие параметры:

— размеры проточной части;

— параметры треугольников скоростей на среднем диаметре, необходимые для профилирования лопаток;

— частота вращения ротора.

Передаточные параметры:

— коэффициенты неравномерности в расчетных сечениях (см. подразд. 3.3.2);

— масса лопаток;

— центробежная сила лопатки;

— ширина ступени.

Ограничения:

— минимально допустимые запасы прочности.

Дополнительная информация:

— поля температур, давлений и скоростей на входе в ступень.

4.3.7. Модели «Компрессор» — «Диск ступени №» или «Турбина» — «Диск ступени №»

Предполагается, что расчет узла крепления лопатки включен в модель диска.

Определяющие параметры:

— внутренний диаметр проточной части;

— ширина обода;

— центробежная сила лопатки;

— частота вращения диска;

— максимальная температура диска.

Передаточные параметры:

— масса диска (включая хвостовики лопаток);

— момент инерции;

— максимальная толщина;

— радиальное удлинение на внешнем радиусе;

— себестоимость диска;

— стоимость подготовки производства.

Ограничения:

— допустимые запасы прочности.

Дополнительная информация:

— поле относительных температур по радиусу диска, отнесенных к максимальной.

Модель диска целесообразно сделать автоматизированной, чтобы посадочные места диска проектировал конструктор, а оптимизировался только профиль диска вне этих мест.

4.3.8. Модели «Компрессор» — «Корпус» или «Турбина» — «Корпус»

Определяющие параметры:

- наружные диаметры проточной части;
- длина корпуса;
- среднее давление воздуха;
- максимальная температура воздуха.

Передаточные параметры:

- масса корпуса;
- габаритные размеры;
- себестоимость корпуса;
- стоимость подготовки производства.

Ограничения:

— допустимые запасы прочности.

Дополнительная информация:

— законы изменения температур и давлений по длине корпуса.

4.3.9. Модели «Диск» — «Технология», «Лопатка» — «Технология», «Корпус» — «Технология» и другие аналогичные

Технологические модели входят уже не в системы автоматизированного проектирования, а в системы автоматизации технологической подготовки производства (АСТПП) и выходят из рамки тематики данной книги. Следует только отметить, что при переходе к технологии определяющими параметрами будут чертежи деталей в закодированном виде, а **передачными** — параметры, определяющие технологичность, в первую очередь — себестоимость соответствующей детали и стоимость подготовки производства.

4.4. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

В зависимости от конкретных условий организация работ будет, конечно, различной: могут изменяться количество и вид математических моделей, параметры передаточных моделей и т. п. Поэтому организацию можно наметить только в самых общих чертах.

1. Для начала работ необходимы ориентировочные значения определяющих и передаточных параметров для всех частных моделей, которые используются на данном этапе проектирования. Их можно

взять с прототипа, а если сравнительно близкие прототипы отсутствуют, то рассчитать обычными методами с использованием статистических имитационных моделей (см. разд. 4.2), но точность результатов при этом может быть значительно ниже, чем обычно.

2. Выбираются передаточные модели типа «В» с прототипов для всех уровней иерархической модели. Получение их не вызовет трудностей, так как начинать использование передаточных моделей, целесообразнее не с проектирования нового изделия, а с исследования уже существующего. Это позволит проверить работоспособность всех моделей и программ, а также получить передаточные модели типа «Н» и «В». Это изделие может служить прототипом и не важно, что он будет очень отдаленным.

3. Формируется выражение для расчета функции цели в математической модели самого верхнего уровня в иерархии. Обычно функция цели векторная и включает в себя несколько экономических показателей.

4. Выбираются варьируемые параметры, ограничения. Производится оптимизация по модели верхнего уровня. В результате получают оптимальные значения параметров. Среди них должны быть и некоторые из передаточных параметров.

5. По этой, уже оптимизированной модели, рассчитываются передаточные модели типа «Н» для всех моделей следующего уровня в иерархии. Каждый раз ставится факторный эксперимент по плану выбранного типа (лучше ДФЭ или ПФЭ).

6. Производится оптимизация по математическим моделям следующего уровня иерархии (для каждой по отдельности). В каждой из них выбираются свои варьируемые параметры, ограничения и дополнительная информация, а функции цели рассчитываются по передаточным моделям типа «Н», полученным в предыдущем приближении (см. п. 5). На разных уровнях иерархии приходится использовать математические модели разного уровня сложности. Например, для двигателя нужно использовать модель II, а для его узлов — III уровня сложности. В каждом конкретном случае выбор модели определяется набором определяющих и передаточных параметров. Желательно, в особенности на нижних уровнях иерархии, оптимизацию вести в интерактивном режиме, чтобы проектировщик мог оперативно учитывать влияние неформализуемых критериев и выбирать разумный компромисс.

7. На каждой из оптимизированных моделей ставится факторный эксперимент; один раз для получения передаточной модели типа «В» (отклики — передаточные параметры, а факторы — определяющие параметры для пары связываемых ею моделей) и несколько раз для получения моделей типа «Н» (отклик — функция цели, а факторы — передаточные параметры, связывающие оптимизированную модель с нижестоящими), обеспечивающих переход к каждой из моделей следующего уровня иерархии. Интервалы варьирования, учитывая, что рассчитывается первое приближение, желательно брать пошире, чтобы обеспечить возможность большего изменения параметров на следующем приближении. Модели типа

«В» будут использованы при оптимизации в следующем приближении вместо взятых первоначально с прототипа, поэтому их целесообразно сохранить непосредственно на машинных носителях. Это уменьшит возможность ошибок и трудоемкость подготовки исходной информации.

8. Оптимизация и факторный эксперимент, описанные, в пп. 6 и 7, производятся для моделей следующего уровня и т. д. Этот процесс продолжается до той глубины проработки, которая будет сочтена целесообразной при расчетах первого приближения. Оно обычно соответствует этапам предэскизного проектирования или технического предложения.

9. Все расчеты повторяются во втором приближении по тем же самым математическим моделям, но с использованием передаточных моделей типа «В», полученных в предыдущем приближении. Предэскизное проектирование можно закончить, если окажется, что вновь полученные передаточные модели типа «В» на всех уровнях иерархии не отличаются очень резко от использованных при оптимизации, т. е. от полученных в предыдущем приближении.

Полученные параметры полностью выявляют облик проектируемого самолета и двигателя. Они должны быть проанализированы на совещаниях всех заинтересованных специалистов. При этом могут быть учтены неформализуемые критерии качества и при необходимости внесены коррективы в систему ограничений соответствующих моделей.

10. При эскизном проектировании оптимизация и факторный эксперимент повторяются, но уже на всех уровнях иерархии. При этом целесообразно взять более узкие интервалы варьирования, так как большие изменения параметров в дальнейшем маловероятны, а точность передаточных моделей при этом повысится. Конечно, для предэскизного, эскизного и затем рабочего проектирования можно иметь разные программы для математических моделей, существенно отличающиеся по сложности. Это позволит существенно сократить машинное время на оптимизацию, но увеличит число программ. Отладка новых программ — вещь очень трудоемкая, требующая больших затрат машинного времени. Они могут быть больше, чем экономия машинного времени при расчетах, поэтому целесообразность разработки большого числа программ разной сложности нуждается в исследовании. В некоторых случаях использование программ разной сложности совершенно необходимо. Например, в математические модели самолета, двигателя и их узлов входят программы расчета массы и габаритных размеров, которые должны быть разными. На стадиях предэскизного проектирования в них могут быть использованы только статистические зависимости, а на стадиях эскизного и рабочего проектирования может быть использован метод факторного эксперимента (см. разд. 1.5).

Как уже указывалось выше, оптимизация на каждой модели ведется изолированно, поэтому могут использоваться разные типы ЭЦВМ, разные языки программирования. Появляется только незначительная дополнительная работа по переводу передаточных моде-

лей с одних машинных носителей на другие, например с перфокарт на перфоленту и т. д. После каждого приближения возникшие изменения в облике самолета, двигателя и других элементах системы должны быть обсуждены и необходимые коррективы внесены в систему ограничений.

11. Как указывалось выше (см. гл. 3), при современном уровне развития науки еще не удается создать достаточно точные математические модели газотурбинных двигателей, поэтому широкое распространение получили исследования отдельных узлов двигателей на специальных стендах. Чаще других исследуются отдельно компрессоры, каскады высокого или низкого давления, иногда турбины. Числовые результаты этих исследований можно использовать для идентификаций математических моделей (см. гл. 3). Если узлы отдельно не испытываются, то для этих же целей можно использовать первые результаты испытаний самих изделий.

12. Полученные апостериорные модели будут отличаться от априорных, по которым производилась оптимизация, поэтому ее целесообразно повторить по всем уровням иерархии. При этой последней оптимизации можно варьировать только те размеры и параметры, изменение которых является реальным в уже изготовленном изделии. Передаточные модели, полученные при последней оптимизации, могут быть использованы для решения многочисленных задач, возникающих при подготовке к серийному производству и в эксплуатации.

4.5. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЛИЯНИЯ

Коэффициенты влияния могут использоваться в качестве одного из типов передаточных моделей (см. разд. 4.3), поэтому они заслуживают подробного рассмотрения.

Каждый элемент таблиц коэффициентов влияния представляет собой число, которое показывает, на сколько процентов изменится один из основных эксплуатационных параметров изделия (отклик) при изменении исследуемого параметра (фактора) на один процент. Таблицы коэффициентов влияния D являются основной частью линейных моделей изделия, которые в матричной форме имеют следующий вид:

$$Y = DX, \quad (4.3)$$

где Y — вектор малых отклонений откликов Z ; X — вектор малых отклонений факторов R .

Компоненты этих векторов связаны формулами

$$y_i = \delta_{z_i} = \frac{z_i - z_{i0}}{z_{i0}}; \quad x_j = \delta_{r_j} = \frac{r_j - r_{j0}}{r_{j0}}.$$

Эти модели в общем случае не совпадают с линейными моделями, полученными при дробном факторном эксперименте. В частном случае, когда действительная зависимость является квадратичной, они совпадают полностью. Это трудно доказать. При использовании метода малых отклонений исследуется поочередно влияние каждого параметра (фактора) по отдельности. Это эквивалентно однофакторному эксперименту. Дробный факторный эксперимент является, как известно, многофакторным, а следовательно, более надежным. Вследствие этого при использовании передаточных моделей, получаемых при дробном факторном эксперименте, погрешности должны быть меньше. Но эта разница может быть не-

большой, если действительная зависимость в окрестности точки нулевого уровня близка к квадратичной. При уменьшении интервала варьирования разница уменьшается. Кроме того, метод малых отклонений значительно проще, поэтому таблицы коэффициентов влияния получили широкое применение для самых различных целей [30].

Используются два способа линеаризации в методе малых отклонений; аналитический и численный. Первый более распространен. Для газотурбинных двигателей он описан в работе [30], для многоступенчатой газовой турбины в [27] и др. Аналитический способ линеаризации имеет три основных недостатка. Во-первых, приходится существенно упрощать математическую модель, чтобы выражения для производных не были чрезмерно громоздкими. Из-за этого не удается исследовать влияние многих параметров, которые просто приходится исключать из модели. Возникают дополнительные погрешности, приходится анализировать соизмеримость их с погрешностями линеаризации. Во-вторых, требуется большая подготовительная работа для получения уравнений линейной модели, которую можно выполнить только вручную. В-третьих, получаемая линейная модель является не универсальной. Для каждой схемы двигателя, для каждого закона регулирования нужна своя модель. Аналитический способ имеет и существенное преимущество: при отсутствии запрограммированных на ЭЦВМ нелинейных математических моделей — это единственный способ получения коэффициентов влияния и отказываться от него нецелесообразно. Второе преимущество: возможность расчетов без применения ЭЦВМ, но в настоящее время оно уже не имеет большого значения.

Для численной линеаризации нужна нелинейная математическая модель изделия, запрограммированная на ЭЦВМ, например такая, как описана в гл. 1. Факторами в ней могут быть любые параметры r_j из исходной информации, т. е. компоненты векторов R, U, X, Y , а откликами — любые параметры z_i из массива результатов, т. е. компоненты вектора Z . В нелинейной математической модели все они связаны неявными функциональными зависимостями, т. е. $z_i = f(r_j)$. Формула для коэффициента влияния общеизвестна:

$$d_{ij} = \frac{r_{j0}}{z_{i0}} \left(\frac{dz_i}{dr_j} \right)_0, \quad (4.4)$$

где x_{j0} и z_{i0} — значения фактора и отклика в точке нулевого уровня, т. е. на том режиме, на котором производится расчет коэффициентов влияния.

Обычно при расчете дается малое приращение фактору, но лучше использовать формулу Стирлинга, которая является более целесообразной при малых приращениях:

$$\left(\frac{dz_i}{dr_j} \right) = \frac{1}{\Delta r} \left(\frac{\Delta z_{i+} + \Delta z_{i-}}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 z_{i+} + \Delta^3 z_{i-}}{2} + \dots \right).$$

Если пренебречь разностями третьего и более высоких порядков, то эта формула в наших обозначениях примет следующий вид:

$$\left(\frac{dz_i}{dr_j} \right)_0 = \frac{z_{i+} - z_{i-}}{2\Delta r}.$$

Отсюда

$$d_{ij} = \frac{z_{i+} - z_{i-}}{2z_{i0}m}, \quad (4.5)$$

где m — масштаб вариации, обычно равный 0,01 или 0,001; z_{i+} и z_{i-} — значения отклика, полученные расчетом по модели, при вариации фактора соответственно «в плюс» и «в минус» по формулам

$$r_{j+} = (1 + m) r_{j0}; \quad (4.6)$$

$$r_{j-} = (1 - m) r_{j0}. \quad (4.7)$$

В отличие от обычной односторонней вариации, расчет по формулам (4.5) ... (4.7) целесообразно называть двусторонней вариацией. Погрешности ее при равных мас-

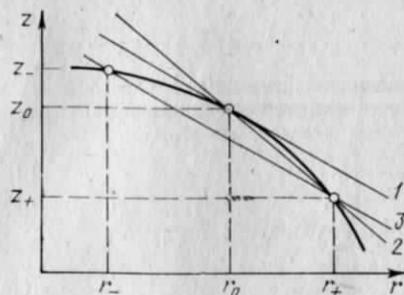


Рис. 4.5. Кривые влияния способа вариации на величину производной:

1 — касательная; 2 — секущая при односторонней вариации; 3 — секущая при двусторонней вариации

	$R =$	x_1	x_2	...	x_j	...	x_m
Z		δr_1	δr_2		δr_j		δr_m
y_1	δz_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1m}
y_2	δz_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2m}
\vdots							
y_i	δz_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{im}
\vdots							
y_n	δz_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nj}		a_{nm}

Рис. 4.6. Схема размещения коэффициентов влияния в таблице

штабах вариации существенно меньше, чем у односторонней, как это видно на рис. 4.5. Если нелинейная модель в окрестности точки нулевого уровня является квадратичной, то погрешность при двусторонней вариации вообще равна нулю. При значительном уменьшении масштаба вариации разница в погрешностях станет несущественной, но тогда изменение некоторых откликов может стать соизмеримым с точностью расчета на ЭЦВМ и получатся ошибочные значения коэффициентов влияния. При двусторонней вариации такой опасности нет, так как масштаб вариации больше, и вообще выбор его величины имеет меньшее значение. Схема размещения коэффициентов влияния в таблице показана на рис. 4.6.

Программа расчета таблиц коэффициентов влияния способом численной линеаризации оформлена в виде универсального модуля, который может быть соотнесен с любой математической моделью. В исходной информации дополнительно задаются число и номера параметров, которые будут использованы в качестве факторов и откликов, а также режим работы, на котором надо получить коэффициенты влияния. При первом просчете модели все факторы устанавливаются на нулевом уровне и полученные значения откликов запоминаются. Затем поочередно всем факторам даются приращения сначала «в плюс» [см. формулу (4.6)], а затем «в минус» [см. формулу (4.7)]. Каждый раз просчитывается модель по формуле (4.5) рассчитываются коэффициенты влияния и записываются в массив, который после окончания расчета выдается на перфокартах. В отдельной программе организована печать этого массива в виде таблиц, пригодных для непосредственного включения в отчеты. Предусмотрена возможность автоматической перестановки или вычеркивания любых столбцов и строк.

При использовании численной линеаризации с двусторонней вариацией можно оценить ее погрешность. Вывод формул получается более наглядным, если применить герметическую интерпретацию (см. рис. 4.5). В расчете по формуле (4.5) используются фактически координаты трех точек (z_{i0}, r_{j0}) , (z_{i+}, r_{j+}) и (z_{i-}, r_{j-}) . Через первую из них проводится прямая, параллельная прямой, проходящей через две другие точки:

$$z_i = z_{i0} + (r_j - r_{j0}) \frac{z_{i+} - z_{i-}}{2mr_{j0}}. \quad (4.8)$$

Для оценки погрешностей через эти же три точки проводится квадратная парабола:

$$z_{in} = \frac{1}{2m^2 r_{j0}^2} [(r_j - r_{j+})(r_j - r_{j0})z_{i-} - 2(r_j - r_{j+}) \times (r_j - r_{j-})z_{i0} + (r_j - r_{j0})(r_j - r_{j-})z_{i+}], \quad (4.9)$$

которая лучше аппроксимирует действительную зависимость. Погрешность при использовании коэффициента влияния, в соответствии с общепринятым допущением [30], равна относительной разнице между прямой и параболой:

$$\Delta \delta z_i \approx \frac{z_{in} - z_i}{z_{i0}}$$

Величина ее будет зависеть от относительного приращения фактора

$$\delta r_j = \frac{r_j - r_{j0}}{r_{j0}} = x_j. \quad (4.10)$$

После несложных, но громоздких преобразований:

$$\Delta \delta z_{ij} \approx \frac{z_{i+} - 2z_{i0} + z_{i-}}{2z_{i0}m^2} \delta r_j^2. \quad (4.11)$$

Удобнее использовать допустимый диапазон изменения фактора, соответствующий погрешности отклика, не превышающей заданную:

$$\delta r_{j\max} \approx \pm m \sqrt{\frac{2z_{i0} \Delta \delta z_{\max}}{z_{i+} - 2z_{i0} + z_{i-}}}. \quad (4.12)$$

Формулу (4.11) в принципе можно использовать для уменьшения погрешности при использовании коэффициента влияния, но это нецелесообразно, так как пропадает главное преимущество метода — простота применения. Надо только контролировать, чтобы отклонения факторов от нулевого уровня не превышали рассчитанных по формуле (4.12).

При одновременном изменении нескольких факторов погрешности будут складываться и допустимые пределы изменения будут меньше. Суммарную погрешность можно оценить, сложив отдельные погрешности, рассчитанные по формуле (4.11).

При сравнительно простых математических моделях удобнее использовать аналитическую линеаризацию. Техника ее подробно описана в работе [30]. Там же приведены линеаризованные уравнения для основных схем газотурбинных двигателей. Для каждой схемы они образуют неопределенную систему линейных уравнений, неизвестными в которой являются малые отклонения факторов x_j и откликов z_i . Система преобразуется таким образом, чтобы найти в явном виде зависимости $y_i = f(x_j)$ при $i=1, 2, \dots, n$ и $j=1, 2, \dots, m$. Коэффициенты при x_j образуют искомую таблицу коэффициентов влияния.

Эту процедуру можно упростить при использовании ЭЦВМ [27]. В исходной линейной системе уравнений все члены с y_i переносятся в левую часть, а с x_j — в правую. Коэффициенты в левой и правой частях системы образуют матрицы B и A , а вся система принимает в матричной форме следующий вид:

$$BY = AX, \quad (4.13)$$

где Y и X — вектора малых отклонений откликов и факторов. Отсюда

$$Y = (B^{-1}A)X \quad (4.14)$$

и матрица коэффициентов влияния

$$D = B^{-1}A. \quad (4.15)$$

Для вычислений по матричной формуле (4.15) составлена отдельная программа. В исходной информации для нее задаются только отличные от нуля элементы матриц B и A , записанные в произвольном порядке, и массив адресов этих эле-

Таблица 4.1

№ попор.	δПВД	δС _{УА}	δR	δG _r	δT _r	δT _к ВД	δT _к НД	δG _в	δT _с	δT _r НД	δT _r ВД	δT _к ВД	δT _к НД	δПВД
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	A _n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	B _L	0	0	0	0	0	0	0	0
4	A _m	0	0	0	0	-1	-B ₁₀	0	0	0	0	0	0	0
5	A _m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	-A ₂ A _n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	-B ₂ B _L	0	0	0	0	0	0	0	0
10	-A _m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

№ по пор.	$\delta\sigma_{\text{нл}}$	$\delta\sigma_{\text{н.к}}$	$\delta\sigma_{\text{г}}$	$\delta\sigma_{\text{с}}$	$\delta\eta_{\text{к}} \text{ нд}$	$\delta\eta_{\text{к}} \text{ вл}$	$\delta\eta_{\text{г}} \text{ вл}$	$\delta\eta_{\text{г}} \text{ нд}$	$\delta F_{\text{с}}$	$\delta F_{\text{савд}}$	$\delta F_{\text{санд}}$	$\delta \text{лвд}$	Примечание*
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	стр. 277
2	0	0	0	0	1	0	$-A_4$	1	0	0	0	0	.
3	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	$-B_{\text{н}}$.
4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.
5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$B_{\text{м}}$.
6	0	0	0	0	0	0	$0,5A_4$	0	0	1	-1	0	.
7	0	0	0	1	0	0	0	$0,5B_4$	1	-1	0	0	.
8	0	0	0	0	$-A_2$	0	с	0	0	0	0	0	.
9	0	0	0	0	0	$-B_2$	0	0	0	0	0	0	(4.31)
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(4.34)
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	(4.29)
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(1.49)
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(1.23)
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	(1.35)

* В этой колонке указаны страницы и номера формул работы [30], содержащие коэффициенты, записанные в этих строках.

Таблица 4.2

	$\delta\sigma_{\text{н}}$	$\delta\sigma_{\text{н.к}}$	$\delta\sigma_{\text{г}}$	$\delta\sigma_{\text{с}}$	$\delta\eta_{\text{к}} \text{ нд}$	$\delta\eta_{\text{к}} \text{ вл}$	$\delta\eta_{\text{г}} \text{ вл}$	$\delta\eta_{\text{г}} \text{ нд}$	$\delta F_{\text{с}}$	$\delta F_{\text{санд}}$	$\delta F_{\text{савд}}$	$\delta \text{лвд}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\delta \text{л нд}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\delta \text{л вл}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\delta \text{л н.к}$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$\delta \text{л г}$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$\delta \text{л с}$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$\delta \text{л н.к}$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
$\delta \text{л г}$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$\delta \text{л с}$	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
$\delta \text{л н.к}$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
$\delta \text{л г}$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$\delta \text{л с}$	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
$\delta \text{л н.к}$	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
$\delta \text{л г}$	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
$\delta \text{л с}$	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

ментов. Это значительно упрощает подготовку исходных данных, среди которых много нулей. Кроме того, в систему уравнений приходится довольно часто вносить изменения, а при такой организации программы не нужно набивать заново на перфокарты все исходные данные, достаточно набить только изменившиеся элементы матриц и поместить их в конце массива. Результаты печатаются в виде готовой таблицы, в которую надо только вписать от руки обозначения факторов и откликов.

В качестве примера рассчитаны коэффициенты влияния двухвального одно-контурного двигателя, показанного на рис. 1.10. Все исходные данные для него и система линейных уравнений заимствованы из работы [30]. Матрицы **B** и **A** в буквенном виде приведены в табл. 4.1. Коэффициенты их имели следующие значения:

$$\begin{aligned} A_2 &= 0,355; & B_2 &= 0,297; & K_5 &= 2,4; \\ A_3 &= 1,23; & B_3 &= 1,23; & K_6 &= 0; \\ A_4 &= 0,175; & B_4 &= 0,174; & K_9 &= 1; \\ A_{10} &= -0,8; & B_{10} &= -0,9; & K_R &= 1,47. \\ A_m &= 3,064; & B_m &= 2,67; \\ A_n &= 0,338; & B_n &= 0,507; \\ A_L &= 0,775; & B_L &= 0,88; \end{aligned}$$

Дополнительно были введены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_{13} &= 1 - 0,5A_3A_4 = 0,8924; & B_{15} &= 1 - 0,5B_3B_4 = 0,8930; \\ A_{14} &= 1 - A_{10} = 1,8; & B_{16} &= 1 - 0,5B_2B_n = 0,9247; \\ B_{13} &= 1 - 0,5B_n = 0,7465; & K_{10} &= K_5 - 1 = 1,4; \\ B_{14} &= 0,5(1 + B_m) = 1,835; & K_{11} &= K_9 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Рассчитанная матрица коэффициентов влияния для закона регулирования $\bar{Y} = \text{const}$ приведена в табл. 4.2. Расхождение цифр с табл. 4.4 из работы [30] не превышает погрешностей ручного расчета. Аналогичные таблицы для других законов регулирования приведены в разд. 4.6. Приведенный пример наглядно показывает, насколько уменьшается трудоемкость получения коэффициентов влияния при использовании ЭЦВМ.

4.6. ПЕРЕСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ НА РАЗЛИЧНЫЕ ЗАКОНЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

При использовании дробного факторного эксперимента или численной линеаризации необходимо, чтобы все факторы присутствовали в исходной информации, а отклики — в результатах. Часто приходится использовать математические модели, в которых некоторые факторы не входят в исходную информацию. Это бывает, если в нелинейной модели предусмотрен один закон регулирования изделия, например, условный (см. разд. 1.1), а линейную надо получить для другого закона. В этом случае надо выбрать те факторы, по которым удобнее рассчитать линейную модель, как обычно, а затем пересчитать ее на нужные факторы. Недостающие факторы должны присутствовать в массиве результатов, т. е. в нелинейной модели они являются откликами.

Пересчет линейной модели можно выполнить в матричном виде. Вектор отклонений фактически используемых факторов делится на два: вектор для дополнительно введенных факторов \bar{X} и для всех остальных X . Каждый из этих векторов имеет свои матрицы коэффициентов влияния соответственно **C** и **D**. Таким образом, линейная модель будет иметь следующий вид:

$$Y = C\bar{X} + DX. \quad (4.16)$$

Фактически она совпадает с формулой (4.3), так как при неизменном законе регулирования дополнительные факторы не используются и приращения их равны нулю, т. е. $\bar{X} = 0$. Аналогично вектор приращений откликов \bar{Y} тоже делится на два: вектор для откликов, которые после пересчета должны стать факторами \bar{Y} , и вектор для остальных откликов Y . Все отклики равноправны, поэтому вид линейных моделей для обоих векторов должен быть одинаковым, т. е.

$$\bar{Y} = B\bar{X} + AX. \quad (4.17)$$

Матрицы **B** и **A** эквивалентны матрицам **C** и **D**. Схема деления исходной матрицы линейной модели показана в табл. 4.3. Столбцы матрицы соответствуют факторам, а строки — откликам. Матрицы **A**, **B** и **C** являются вспомогательными.

Линейная модель в малых отклонениях показывает, как изменяются приращения всех откликов при малых изменениях каждого из факторов. Остальные факторы должны быть при этом постоянными. Следовательно, при изменении закона регулирования приращения откликов, переходящих в факторы, должны быть тождественно равны нулю при любых изменениях других факторов, т. е. $\bar{Y} = 0$. Отсюда $B\bar{X} + AX = 0$; $B\bar{X} = -AX$:

$$\bar{X} = -B^{-1}AX, \quad (4.18)$$

где B^{-1} — матрица, обратная **B**.

Обращение матрицы **B** всегда возможно, так как она квадратная, вследствие равенства числа дополнительно введенных и необходимых факторов, и невырожденная при правильном выборе факторов. Обращение ведется методом Жордана или окаймления. Из формулы (4.16) следует, что при изменении закона регулирования $\bar{X} \neq 0$, а имеет вполне определенное значение. После подстановки формулы (4.18) в выражение (4.16)

$$Y = C(-B^{-1}AX) + DX = (D - CB^{-1}A)X.$$

При изменении закона регулирования линейная модель [см. формулу (4.3)] должна сохранить свой вид, т. е. $Y = D_n X$, где D_n — пересчитанная (новая) матрица коэффициентов влияния.

Окончательная расчетная формула

$$D_n = D - CB^{-1}A. \quad (4.19)$$

Для расчетов по ней составлена отдельная программа. Исходная информация для нее задается в виде единой матрицы, которую еще нужно разделить на матрицы **A**, **B**, **C** и **D**. Обычно она получается непосредственно на перфокартах при расчетах по другим программам, поэтому расположение столбцов и строк в ней может не соответствовать требуемому.

Перед расчетом по формуле (4.19) необходимо переставить строки и столбцы в заданном порядке. Работа это несложная, но очень трудоемкая. Поэтому в программе предусмотрена автоматическая перестановка строк и столбцов в зависимости от содержимого задаваемых массивов, обозначенных СТР и СТЛ, подготовка которых не вызывает затруднений. Кроме этих массивов и исходной матрицы **D** для работы программы необходима еще следующая информация: m — число столбцов в матрице **D; n — число строк в ней; s — порядок матрицы **B**; L — признак, свидетельствующий о необходимости перестановки строк и столбцов в матрице **D**. Если она нужна, то $L = 1$ и только в этом случае вводятся массивы СТР и СТЛ. Если $L \neq 1$, то вводится только матрица **D**.**

Если задано $s = 0$, то расчет по формуле (4.19) не производится, а принимается $D_n = D$. Это используется, когда только надо отпечатать матрицу по заданной форме с перестановкой строк и столбцов или без нее. Печать производится в виде таблиц, максимальный размер которых не превышает стандартного листа, чтобы их можно было непосредственно вшивать в отчеты. Если матрица не помещается в одной таблице, то она автоматически делится на части, которые печатаются в отдельных таблицах одинаковой формы. Нумерация строк и столбцов в них сквозная.

Таблица 4.3

C	D
B	A

Таблица 4.4

	$\delta\sigma_B$	$\delta\sigma_{п.к}$	$\delta\sigma_T$	$\delta\sigma_c$	$\delta\eta_{к НД}$	$\delta\eta_{к ВД}$	$\delta\eta_{Т ВД}$	$\delta\eta_{Т НД}$	δF_c	$\delta F_{САНД}$	$\delta F_{САВД}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	-0,000	-0,539	-0,457	0,284	0,087	-0,435	-0,528	0,231	-0,284	-0,933	0,192
1	0,000	-0,238	-0,355	-1,090	-0,553	0,614	0,843	-0,886	-1,090	2,128	-1,392
2	0,000	-0,000	0,000	0,000	0,000	-0,000	0,098	0,000	0,000	1,121	-1,121
3	0,000	0,000	0,000	1,120	-0,000	-0,000	-0,000	0,097	1,120	-1,120	0,000
4	1,000	0,223	0,188	-0,926	-0,515	0,179	0,218	-0,753	-1,926	1,194	-0,079
5	1,000	0,432	0,366	-0,227	-0,030	0,348	0,422	-0,185	-0,227	0,747	-0,154
6	0,000	-0,148	-0,126	0,078	-0,345	-0,120	-0,145	0,064	0,078	-0,257	0,055
7	0,000	-0,229	-0,194	-0,289	-0,531	-0,184	0,168	-0,235	-0,289	0,495	-0,400
8	-0,000	-0,418	-0,354	-1,157	-0,971	-0,337	-0,213	-0,941	-1,157	0,895	-0,092
9	1,000	-0,252	-0,213	-2,600	-1,617	-0,203	-0,323	-2,114	-2,600	2,203	0,184
10	1,470	0,327	0,277	-1,361	-0,758	0,264	0,320	-1,106	-1,831	1,754	-0,117
11	-0,470	-0,579	-0,490	-1,239	-0,860	-0,467	-0,643	-1,008	-0,769	0,448	0,301
12	0,000	-0,119	0,165	-0,544	-0,276	0,478	0,613	-0,443	-0,544	1,298	-0,589
13											

В качестве примера была пересчитана табл. 4.2 на закон регулирования $n_{НД} = \text{const}$. Исходные данные вновь не подготавливались, а были использованы перфокарты, полученные на ЭЦВМ одновременно с табл. 4.2. Необходимый фактор $n_{НД}$, поэтому соответствующая ему строка $\delta n_{НД}$ была поставлена последней и образовывала матрицу А. Он вводился вместо исключаемого фактора $n_{ВД}$, поэтому соответствующий столбец $\delta n_{ВД}$ был поставлен первым и образовывал матрицу С. Матрица В выродилась в одно число в левом нижнем углу матрицы. Все эти перестановки были сделаны непосредственно на ЭЦВМ. Получившаяся в результате матрица приведена в табл. 4.4. Сопоставление ее с табл. 4.2 показывает, как влияет изменение закона регулирования.

4.7. ПРИМЕРЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Первая передаточная модель типа «В» была получена для диска турбины, описанного в разд. 2.5. В соответствии с изложенным в разд. 4.2, факторами в этом случае являются определяющие параметры, а откликами — передаточные. Для наглядности можно проанализировать целесообразность использования параметров, выбранных в подразд. 4.3.7. При оптимизации проточной части турбины и пера лопатки могут изменяться значения внутреннего диаметра проточной части, однозначно определяющего наружный радиус диска x_1 при выбранной конструкции узла крепления лопаток, ширина обода диска x_2 , суммарная центробежная сила лопаток и выступов диска x_3 , частота вращения ротора x_4 и температурное поле диска. Все эти параметры оказывают существенное влияние на конструкцию оптимального диска и должны быть заданы при его проектировании. Температурное поле не может быть использовано в качестве фактора, поэтому делается допущение, что при изменении максимальной температуры, которая является фактором x_5 , температурное поле остается подобным.

При создании передаточной модели необходимо спроектировать не один, а целую серию оптимальных дисков при различных значениях определяющих параметров (факторов). Начальный уровень факторов и выбранные интервалы варьирования приведены в табл. 4.5. Использовался дробный факторный эксперимент типа 2^{5-2} . Матрица планирования для него в кодированном виде взята из табл. 1.6, а в декодированном она приведена в табл. 4.6. Каждый из восьми запланированных экспериментов заключался в оптимизации профиля диска на одном режиме при заданных значе-

Таблица 4.5

Факторы	Размерность	Начальный уровень	Интервал варьирования
x_1	R	м	0,238
x_2	b_a	см	1,7
x_3	P	МН	3,81
x_4	n	мин ⁻¹	10500
x_5	T_{\max}	°C	450

Таблица 4.6

№ по пор.	Фактор					Отклик			
	R	b_a	P	n	T_{\max}	m	J	b_{\max}	ξ_a
1	0,250	2,0	4,21	11000	500	46,283	1,167	11,910	2,157
2	0,226	2,0	4,21	10000	400	16,483	0,352	6,000	1,430
3	0,250	1,4	4,21	10000	500	23,531	0,637	6,000	2,180
4	0,226	1,4	4,21	11000	400	12,710	0,269	6,000	1,416
5	0,250	2,0	3,41	11000	400	31,214	0,818	6,000	1,649
6	0,226	2,0	3,41	10000	500	15,678	0,334	6,000	1,896
7	0,250	1,4	3,41	10000	400	15,973	0,491	6,000	1,702
8	0,226	1,4	3,41	11000	500	13,889	0,265	6,000	1,871

ниях факторов. Варьировались толщины диска на всех радиусах, кроме наружного, чтобы не изменялись размеры хвостовика лопатки. Минимизировалась масса диска при ограничениях на запасы прочности, т. е. так же, как и в разд. 2.5. Оптимизация велась в автоматическом режиме, поэтому узлы крепления диска не разрабатывались.

Среди результатов расчетов оптимальных дисков были отобраны отклики (передаточные параметры), т. е. параметры, значения которых должны быть известны при оптимизации турбины. В первую очередь — это масса диска m , которая существенно влияет на общую массу турбины. Некоторый интерес представляют и другие параметры. Момент инерции диска J нужен при расчете приемистости двигателя. Максимальная толщина диска b_{\max} может повлиять на конструкцию турбины, а радиальное удлинение диска на внешнем радиусе ξ_a необходимо знать при назначении радиальных зазоров в турбине. Может оказаться целесообразным введение ограничения на это удлинение, но оно, конечно, приведет к увеличению массы диска. Тогда необходимо искать оптимальное значение границы для удлинения. В этом случае оно должно быть не откли-

Таблица 4.7

Отклики		Коэффициенты при факторах					
		b_0	$b_1(R)$	$b_2(b_a)$	$b_3(P)$	$b_4(n)$	$b_5(T_{\max})$
ψ_1	m	21,9701	7,2801	5,4444	2,7816	4,0539	2,8751
ψ_2	J	0,5416	0,2366	0,1261	0,0646	0,0881	0,0591
ψ_3	b_{\max}	6,000	0	0	0	0	0
ψ_4	ξ_a	1,7876	0,1344	-0,0046	0,0081	-0,0144	0,2384

ком, а фактором. Из-за небольших значений интервалов варьирования технологичность всех восьми вариантов дисков оказалась примерно одинаковой, но при больших значениях может потребоваться переход на другой материал, тогда себестоимость диска и стоимость подготовки производства могут существенно изменяться.

Полученные значения откликов приведены в той же табл. 4.6. После обработки результатов факторного эксперимента по методике, описанной в разд. 1.5, были получены передаточные модели линейного вида [см. формулу (4.2)], коэффициенты которых приведены в табл. 4.7. Аналогичные модели могут быть получены для дисков других ступеней турбины. Все они должны быть включены в математическую модель турбины для имитации влияния дисков при оптимизации турбины.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. ТАБЛИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ ДВУХКОНТУРНОГО ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Коэффициенты влияния рассчитаны на взлетном режиме для двигателя, схема которого показана на рис. 1.9. Для экономии машинного времени расчет производился по формулам (4.5) ... (4.7) при условном законе регулирования, как это рекомендовано в разд. 1.1. Были заданы пять режимных параметров $n_{нд}$, $n_{вд}$, G_v , m , T_g^* . Параметры воздуха на входе в двигатель принимались по САУ. При вариациях возникали четыре невязки из-за излишнего количества режимных параметров, которые тоже включены в табл. П.1.1*. Это невязки по мощности на валах низкого и высокого давления и по расходу в камере смешения и в реактивном сопле. При любом из действительных законов регулирования необходимо так подобрать изменения четырех из пяти режимных параметров, чтобы все невязки были равны нулю. Этот расчет выполнялся по формуле (4.19). Полученные коэффициенты влияния приведены в табл. П.1.2.

2. ТАБЛИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ ГАЗОВОЙ ТУРБИНЫ

Коэффициенты влияния рассчитаны для двухступенчатой газовой турбины двухконтурного газотурбинного двигателя на двух режимах. В первом варианте режим работы турбины был задан параметрами n , T_g^* , p_g^* , G_g , которые оставались постоянными при вариации других параметров. Расчет выполнялся по формулам (4.5) ... (4.7). Результаты для взлетного режима приведены в табл. П.2.1, а для крейсерского (0,85 номинала) в табл. П.2.2. Во втором варианте (табл. П.2.3 и П.2.4) режимные параметры n , T_g^* , p_g^* , p_t . Расчет выполнялся по формуле (4.19), т. е. коэффициенты влияния первого варианта пересчитывались на новый закон регулирования. Новый режимный параметр p_t поэтому не варьировался и коэффициенты влияния для него отсутствуют.

* Все таблицы коэффициентов влияния в приложениях приводятся в сокращенном виде.

Таблица П.1.1

Условный закон регулирования

Отклики	Факторы										
	$\delta n_{нд}$	$\delta n_{вд}$	δT_g^*	δp_g^*	δm	δG_v	$\delta n_{нд}$	$\delta n_{вд}$	δT_g^*	δp_g^*	
δR	5,170	-0,023	0,402	-0,418	-0,418	0,408	0,081	-0,075	0,080	-0,070	0,000
$\delta R_{уд}$	5,170	-0,023	-0,598	-0,418	-0,418	0,408	0,081	-0,075	0,080	-0,070	0,000
$\delta C_{уд}$	-15,695	-1,664	3,102	-1,371	-1,371	1,905	-0,081	0,075	-0,080	0,070	0,000
$\delta G_{топл}$	-10,415	-1,687	3,504	-1,788	-1,788	2,313	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\delta p_{кв}^*$	46,115	6,071	-11,917	5,959	5,959	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\delta \Delta N_{нд}$	-37,076	-0,064	17,044	5,251	5,251	1,780	0,363	-0,336	-1,856	1,612	0,000
$\delta \Delta N_{вд}$	-173,056	-35,900	44,869	-22,861	-22,861	8,389	-8,553	7,910	0,000	0,000	0,000
$\delta \Delta G_{II}$	-6,713	-1,918	-0,949	-4,239	-4,239	0,036	-0,309	-0,004	-0,308	-0,006	0,000
$\delta \Delta G_c$	-13,890	-1,528	4,857	-0,814	-0,814	0,102	-0,229	-0,020	-0,229	-0,020	-0,359

Таблица П.1.2

Действительный закон регулирования ($T_r^* = \text{const}$)

Отклики	Факторы					
	δT_r^*	$\delta \pi_{г\text{ВД}}$	$\delta \eta_{г\text{ВД}}$	$\delta \pi_{г\text{НД}}$	$\delta \eta_{г\text{НД}}$	$\delta F_{\text{с.кр}}$
δR	2,722	0,092	0,516	-1,241	1,647	1,568
$\delta R_{\text{уд}}$	1,886	0,121	0,235	-0,846	1,063	0,945
$\delta C_{\text{уд}}$	0,168	0,183	-0,359	1,077	-1,116	-0,845
$\delta G_{\text{топл}}$	2,925	0,276	0,163	-0,188	0,559	0,746
$\delta \pi_{\text{кш}}$	1,514	-0,969	0,336	-1,489	0,764	-0,163

Таблица П.2.1

Взлетный режим ($G_r = \text{const}$)

Отклики	Факторы						
	δG_r	δl	$\delta \alpha_{1\text{ I}}$	$\delta \beta_{2\text{ I}}$	$\delta \alpha_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{2\text{ II}}$
δQ_{I}	0,978	0,166	0,948	-2,387	0	0	0
$\delta \eta_{\text{I I}}$	-0,081	0,042	0,029	0,013	0	0	0
δQ_{II}	1,776	0,372	-0,599	-0,417	1,278	-0,047	-2,600
$\delta \eta_{\text{I II}}$	-0,129	0,026	0,041	0,051	-0,028	0,020	0,015
$\delta \alpha_{\text{т}}$	-4,222	0,701	1,382	1,007	0,653	0,010	1,676
δN_{I}	6,294	0,372	-2,285	-1,658	-1,125	-0,004	-0,729
$\delta \pi_{\text{т}}$	-4,881	-0,279	2,017	1,469	0,964	0,012	0,662

Таблица П.2.2

Крейсерский режим ($G_r = \text{const}$)

Отклики	Факторы						
	δG_r	δl	$\delta \alpha_{1\text{ I}}$	$\delta \beta_{2\text{ I}}$	$\delta \alpha_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{2\text{ II}}$
δQ_{I}	1,013	0,259	1,103	2,576	0	0	0
$\delta \eta_{\text{I I}}$	-0,147	0,076	0,098	0,018	0	0	0
δQ_{II}	1,891	0,563	-0,632	-0,392	1,509	0,039	-2,920
$\delta \eta_{\text{I II}}$	-0,395	0,095	0,127	0,180	0,062	-0,015	0,013
$\delta \alpha_{\text{т}}$	-4,235	0,559	1,386	1,031	0,669	-0,007	1,790
δN_{I}	6,134	0,599	-2,186	-1,608	-1,089	0,003	-0,693
$\delta \pi_{\text{т}}$	-5,394	-0,428	2,178	1,616	1,060	-0,010	0,758

Взлетный режим ($p_{\text{т}} = \text{const}$)

Таблица П.2.3

Отклики	Факторы					
	δl	$\delta \alpha_{1\text{ I}}$	$\delta \beta_{2\text{ I}}$	$\delta \alpha_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{2\text{ II}}$
δQ_{I}	0,110	1,352	-2,092	0,193	0,002	0,133
$\delta \eta_{\text{I I}}$	0,046	-0,005	-0,012	-0,016	-0,000	-0,011
δQ_{II}	0,271	0,135	0,118	1,629	-0,043	-2,359
$\delta \eta_{\text{I II}}$	0,033	-0,012	0,012	-0,054	0,019	-0,003
$\delta \alpha_{\text{т}}$	0,943	-0,363	-0,264	-0,181	-0,001	1,103
δN_{I}	0,012	0,316	0,236	0,119	0,011	0,125

Таблица П.2.4

Крейсерский режим ($p_{\text{т}} = \text{const}$)

Отклики	Факторы					
	δl	$\delta \alpha_{1\text{ I}}$	$\delta \beta_{2\text{ I}}$	$\delta \alpha_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{1\text{ II}}$	$\delta \beta_{2\text{ II}}$
δQ_{I}	0,178	1,512	-2,272	0,199	-0,002	0,142
$\delta \eta_{\text{I I}}$	0,088	0,039	-0,026	-0,029	0,000	-0,021
δQ_{II}	0,412	0,131	0,174	1,881	0,035	-2,654
$\delta \eta_{\text{I II}}$	0,127	-0,033	0,061	-0,016	-0,014	-0,042
$\delta \alpha_{\text{т}}$	0,895	-0,324	-0,238	0,063	0,000	1,195
δN_{I}	0,112	0,290	0,230	0,116	-0,008	0,170

3. ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ ОСЕВОГО КОМПРЕССОРА

Коэффициенты влияния (табл. П.3.1) рассчитаны для шестиступенчатого компрессора высокого давления двухконтурного газотурбинного двигателя. Режим работы был задан обычными параметрами $\pi_{\text{ВД}}$, T^* , p^* , $G_{\text{в}}$. Для уменьшения объема таблиц факторы приведены только для первой и последней ступеней.

Таблица П.3.1

Крейсерский режим ($G_n = \text{const}$)

Отклики	Факторы I степени				Факторы VI степени			
	$\beta_{1л}$	$\beta_{2л}$	$\alpha_{2л}$	$\alpha_{3л}$	$\beta_{1л}$	$\beta_{2л}$	$\alpha_{2л}$	$\alpha_{3л}$
Q_I	-0,089	0,352	-0,166	-0,228	0,000	0,000	0,000	0,000
Q_{II}	0,043	-0,405	-0,070	0,467	0,000	0,000	0,000	0,000
Q_{III}	0,026	-0,138	0,045	-0,058	0,000	0,000	0,000	0,000
Q_{IV}	0,018	-0,132	0,033	-0,048	0,000	0,000	0,000	0,000
Q_V	0,029	-0,726	0,040	-0,046	0,000	0,000	0,002	0,006
Q_{VI}	-0,011	0,026	-0,016	0,013	-0,011	-0,216	0,002	-0,006
π_k^*	-0,052	0,305	-0,076	0,162	0,039	0,332	0,002	-0,005
η_k^*	-0,030	0,002	0,013	-0,150	0,001	-0,003	0,000	0,000
N	-0,019	0,273	-0,080	0,297	0,033	0,304	0,000	0,000

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абидиц В. Х. Теория газовых турбин реактивных двигателей. М. Машиностроение, 1965. 310 с.
2. Автоматизация проектно-конструкторских работ и технологической подготовки производства в машиностроении. Под общ. ред. И. О. Семенкова. Т. I, Минск, Высшая школа, 1976. 352 с.
3. Аронов Б. М. Автоматизация конструирования лопаток авиационных турбомашин. М., Машиностроение, 1978. 168 с.
4. Бешелев С. Д., Гурвиц Ф. Г. Экспертные оценки. М., Наука, 1973. 79 с.
5. Вычислительная техника. Обработка информации. Словарь терминов. М., Изд. стандартов, 1970. 247 с.
6. Гличев А. В. Экономическая эффективность технических систем. М., Экономика, 1971. 270 с.
7. Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М., Машиностроение, 1978. 247 с.
8. Емельянов С. В. и др. Модели и методы векторной оптимизации. — В сб.: Техническая кибернетика. М., т. 5 ВИНТИ, Итоги науки и техники, 1973, с. 386—448.
9. Жирницкий Г. С. и др. Газовые турбины двигателей летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1971. 620 с.
10. Зозулевич Д. М. Машинная графика в автоматизированном проектировании. М., Машиностроение, 1976. 240 с.
11. Иващенко А. Г., Зайченко Ю. П., Димитров В. Д. Принятие решений на основе самоорганизации. М., Сов. радио, 1976. 280 с.
12. Ильичев Я. Т. Термодинамический расчет воздушно-реактивных двигателей. Тр. ЦИАМ № 677, 1975. 126 с.
13. Кендэл М. Ранговые корреляции. М., Статистика, 1975. 216 с.
14. Колодочкин В. П. Воздушно-реактивные двигатели сверхзвуковых многорежимных самолетов. М., Машиностроение, 1975. 132 с.
15. Любановский Е. В. Развитие газотурбинных двигателей самолетов гражданской авиации. М., Машиностроение, 1975. 264 с.
16. Ньюмен У., Спруэл Р. Основы интерактивной машинной графики. М., Мир, 1976. 573 с.
17. Принс М. Д. Машинная графика и автоматизация проектирования. М., Сов. радио, 1975. 232 с.
18. Растрини Л. А. Системы экстремального управления. М., Наука, 1974. 632 с.
19. Ривкин С. Л. Термодинамические свойства газов. М., Энергия, 1973. 287 с.
20. Сгилевский В. А. Машинное проектирование двигательных установок на этапах предварительной разработки. — В сб.: Авиационное проектирование. Сер. Итоги науки и техники, М., ВИНТИ, 1977, т. 4, с. 10—102.
21. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1972. 440 с.
22. Скубачевский Г. С. Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. М., Машиностроение, 1974. 520 с.
23. Сосунов В. А., Литвинов Ю. А. Неуставившиеся режимы работы авиационных газотурбинных двигателей. М., Машиностроение, 1975. 216 с.
24. Тарасов Е. В. Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата. М., Машиностроение, 1970. 364 с.
25. Теория воздушно-реактивных двигателей. Под ред. С. М. Шляхтенко. М., Машиностроение, 1975. 568 с.
26. Термопрочность деталей машин. Под ред. И. А. Биргера и Б. Ф. Шорра. М., Машиностроение, 1975. 455 с.
27. Тунаков А. П. Машинное проектирование элементов газотурбинных двигателей. — В сб.: Авиационное проектирование. Сер. Итоги науки и техники, М., ВИНТИ, 1977, т. 4, с. 103—220.
28. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., Мир, 1975. 534 с.
29. Холщевников К. В. Теория и расчет авиационных лопаточных машин. М., Машиностроение, 1970. 609 с.
30. Черкез А. Я. Инженерные расчеты газотурбинных двигателей методом малых отклонений. М., Машиностроение, 1975. 380 с.
31. Шац Я. Ю. Основы оптимизации и автоматизации проектно-конструкторских работ с помощью ЭВМ. М., Машиностроение, 1969. 400 с.
32. Щиголов Б. М. Математическая обработка наблюдений. М., Наука, 1969. 344 с.
33. Югов О. К., Селиванов О. Д. Согласование характеристик самолета и двигателя. М., Машиностроение, 1975. 204 с.
34. Янкин В. И. Система программ для расчета характеристик ВРД на ЭЦВМ. М., Машиностроение, 1976. 168 с.
35. Showalter James E., Sears David V. Systematic approach to integrated design. SAE Prepr. s. a. N 710245, 1971. 7 p.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Условные обозначения	4
Введение	8
Глава 1. Математические модели	17
1.1. Модель газотурбинного двигателя II уровня сложности	17
1.2. Особенности модели турбины III уровня сложности	39
1.3. Особенности модели компрессора III уровня сложности	40
1.4. Расчет газоздушного тракта при зашировании сечения	40
1.5. Расчет массы и габаритных размеров	47
1.6. Технологичность проектируемого изделия	57
Глава 2. Оптимизация параметров проектируемого изделия	62
2.1. Метод оптимизации	62
2.2. Газотурбинный двигатель	75
2.3. Газовая турбина	77
2.4. Осевой компрессор	81
2.5. Диски турбины и компрессора	84
Глава 3. Повышение точности математических моделей	93
3.1. Пути повышения точности математических моделей	93
3.2. Принципы идентификации моделей	94
3.3. Подготовка исходной информации	95
3.4. Алгоритм идентификации методом наименьших квадратов	113
3.5. Примеры идентификации математических моделей по результатам испытаний	127
3.6. Применение идентификации и оптимизации при доводке ГТД	138
3.7. Применение идентификации при технической диагностике ГТД	142
3.8. Дополнительные методы идентификации математических моделей	145
Глава 4. К вопросу о системах автоматизированного проектирования	149
4.1. Цели автоматизированного проектирования	149
4.2. Передача информации внутри иерархической модели	151
4.3. Передаточные математические модели	155
4.4. Организация проектирования при использовании передаточных моделей	162
4.5. Коэффициенты влияния	165
4.6. Пересчет линейных передаточных моделей на различные законы регулирования	172
4.7. Примеры передаточных моделей	175
Приложения	
1. Таблицы коэффициентов влияния двухконтурного газотурбинного двигателя	178
2. Таблицы коэффициентов влияния газовой турбины	178
3. Таблица коэффициентов влияния осевого компрессора	181
Список литературы	183