



МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)

Г.О. ТРИФОНОВА, В.В. БУРЕНИН,  
О.И. ТРИФОНОВА

# **УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

*УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)»

Г.О. ТРИФОНОВА, В.В. БУРЕНИН,  
О.И. ТРИФОНОВА

# УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

*Допущено Федеральным УМО по укрупненной группе специальностей  
и направлений подготовки 23.00.00 – «Техника и технологии наземного  
транспорта» в качестве учебного пособия для обучающихся  
по направлению подготовки 23.05.02 – «Транспортные средства  
специального назначения», уровень образования – «специалитет»*

МОСКВА  
МАДИ  
2019

УДК 681.5  
ББК 32.965  
Т691

*Рецензенты:*

заведующий кафедрой «Технология машиностроения»  
ФГБОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН" д-р техн. наук, проф. *Кутин А.А.*;  
декан конструкторско-механического факультета МАДИ  
д-р техн. наук, проф. *Борисевич В.Б.*

**Трифонова, Г.О.**

Т691 Управление техническими системами: учеб. пособие /  
Г.О. Трифонова, В.В. Буренин, О.И. Трифонова. – М.: МАДИ,  
2019. – 192 с.

ISBN 978-5-7962-0238-8

Учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой дисциплины «Управление техническими системами» по специальностям «Многоцелевые гусеничные и колесные машины», «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика». В нем рассмотрены темы синтеза и анализа систем автоматического управления, обеспечивающих заданную точность и динамические свойства. Изложены методы расчета и проектирования линейных и нелинейных систем автоматического управления. Основные положения теории подкреплены численными примерами расчета динамики систем. Пособие предназначено для студентов механических специальностей очного и заочного обучения.

УДК 681.5  
ББК 32.965

ISBN 978-5-7962-0238-8

© МАДИ, 2019

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Управление техническими системами» по направлению подготовки 23.05.02 «Транспортные средства специального назначения». Пособие также может быть использовано студентами направлений подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» по дисциплине «Математические основы теории автоматического управления». Пособие отражает основные вопросы теории систем автоматического управления, которые необходимы специалистам, работающим в области автоматизации производственных процессов.

Управление техническими системами, или теория автоматического управления, – это область науки и техники, охватывающая теорию и принципы построения систем управления, действующих без непосредственного участия человека.

Управление техническими системами является одним из разделов технической кибернетики. Кибернетика – (с греч. *kybernetike* – искусство управления) – наука об управлении, получении, передаче и преобразовании информации в кибернетических системах. Кибернетические системы – это системы любой природы, т.е. технические, биологические, экономические, социальные и т.д.

Техническая кибернетика – направление кибернетики, в котором на основе единых для кибернетики в целом научных идей и методов изучаются технические системы управления.

Автоматические системы применяются во многих областях деятельности человека – в промышленности, на транспорте, в устройствах связи. Применение автоматизации в управлении часто определяет дальнейшее развитие техники. Например, автоматизация дала толчок развитию пилотируемых, беспилотных, космических летательных аппаратов, современных химических и металлургических производств.

В различных технологических процессах величины, характеризующие их работу, должны удовлетворять определённым требованиям, например, управлять движением летательных аппаратов, т.е. аппарат должен перемещаться по заранее заданной траектории, с заданной скоростью и точностью.

Создание условий, обеспечивающих требуемое протекание любого процесса, называется управлением. Механизм или система, которая обеспечивает заданный процесс, называется объектом управления. В управлении техническими системами, или теории автоматического управления, не рассматриваются конструкции систем. Работа системы заменена математической моделью. В данном пособии рассматриваются методы исследования математических моделей с целью проверки поведения системы, обеспечения её устойчивости.

## **Раздел 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Управление техническими системами (УТС) не изучает физические процессы или конструктивные особенности систем. Вместо реальных объектов в УТС рассматриваются их адекватные (тождественные) математические модели.

Система автоматического управления (САУ) – комплекс устройств, предназначенный для автоматического изменения одной или нескольких координат объекта управления для поддержания желаемого режима работы.

Взаимодействие элементов в цепи системы автоматического регулирования наиболее наглядно иллюстрирует структурная схема. Для единого графического изображения структуры отдельные элементы системы принято обозначать прямоугольниками, в поле которых указывается назначение элемента или его математическое описание. Воздействие одного элемента на другой показывают стрелками по направлению воздействия. Элемент, сравнивающий сигналы одной физической природы, обозначают кругом.

В качестве примера рассмотрим автомобиль – это будет объект регулирования (рис. 1.1, а). Поворот руля – входное воздействие. Реакцией системы на входное воздействие будет поворот колес, т.е. выходное воздействие. А вот качество дороги, т.е. проселочная дорога после дождя или асфальтовое полотно дороги, – возмущающее воздействие. Другими словами, входным воздействием управляем мы, а возмущающее воздействие от нас не зависит.



Рис. 1.1. Структурная схема рулевого управления автомобилем:  
а – развернутая схема; б – схема в условных обозначениях

### 1.1. Классификация систем управления

Системы управления различают по принципу управления – замкнутые и разомкнутые.

*Разомкнутая система* управления состоит из последовательно или параллельно включённых звеньев (рис. 1.2). Управляющее воздействие не сравнивается с текущим значением регулируемой или выходной величины. Закон управляющего воздействия выбирается исходя из цели управления и предполагаемого характера возмущения. Входное воздействие может сразу поступать на объект регулирования или оно проходит несколько звеньев ОП1, ОП2, ОП3, и только после этого на выходе будет сигнал. Один входной сигнал может управлять несколькими объектами регулирования. И тогда на выходе будут два разных выходных сигнала.

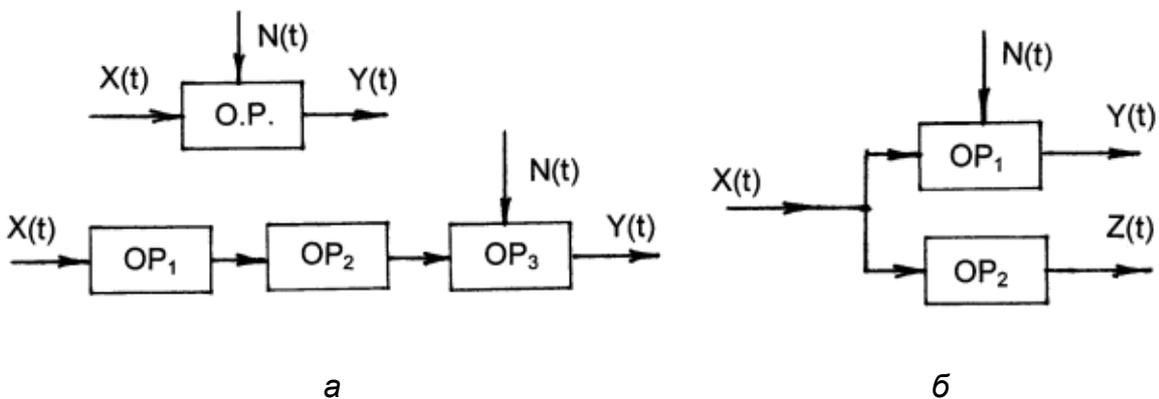


Рис. 1.2. Структурные схемы: а – с последовательными звеньями;  
б – с параллельными звеньями

*Замкнутая система* автоматического управления использует принцип управления по отклонению – регулируемая или выходная величина сравнивается с задающим воздействием, определяется отклонение (ошибка), и эта ошибка подаётся на объект регулирования (рис. 1.3).

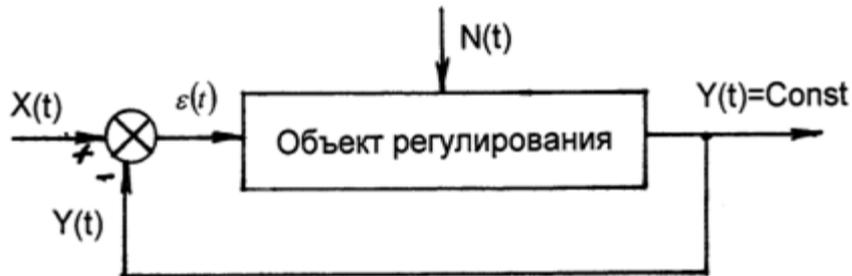


Рис. 1.3. Структурная схема замкнутой системы управления

Ошибки в системах автоматического регулирования возникают из-за возмущающих воздействий (возмущений)  $N(t)$  на регулируемый объект или в результате изменения задающего воздействия  $X(t)$ .

Преимуществом автоматического управления является сведение к минимуму человеческого фактора при работе системы, а именно: инерционность мышления человека, самочувствие, настроение; при быстро протекающих процессах человек просто не успевает среагировать; могут быть опасные для жизни человека процессы.

Кроме того, при замене реальной системы её математической моделью описать математически человеческий фактор трудно.

По характеру формирования и виду передаваемых сигналов системы автоматического регулирования и управления разделяют на непрерывные и дискретные, показанные в табл. 1.

По количеству управляемых величин системы автоматического управления подразделяется на:

- одномерные – один сигнал на выходе;
- многомерные – несколько сигналов на выходе.

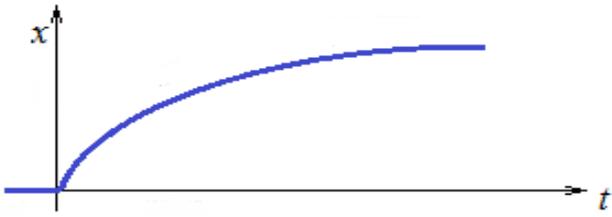
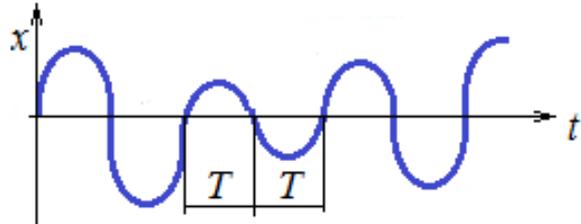
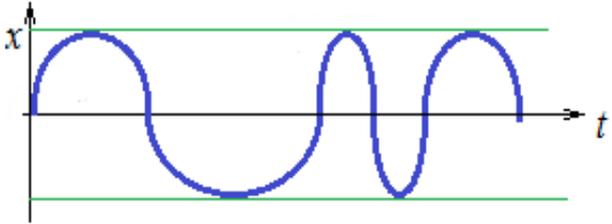
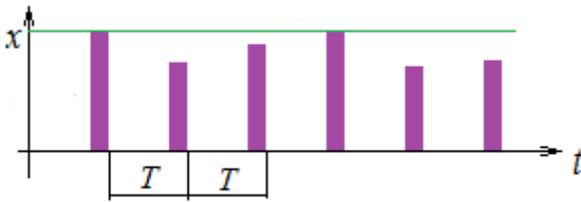
## **1.2. Задачи исследования и расчета систем автоматического регулирования и управления**

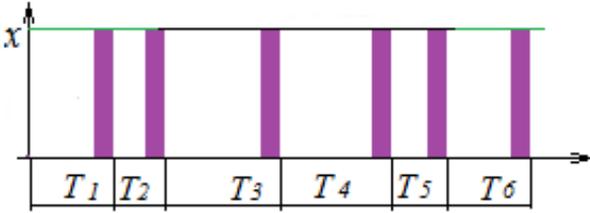
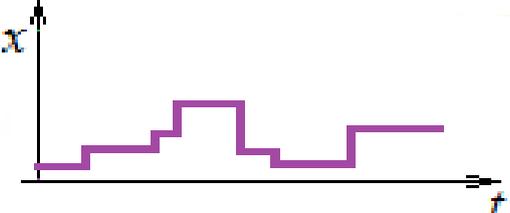
Основное требование для систем автоматического управления заключается в обеспечении заданного режима работы объекта. Устойчивая система та, которая работает по заданному режиму. Например, система движется по заданной траектории.

В какие-то моменты времени из-за изменения возмущающего или задающего воздействий на систему нарушается установившийся режим работы системы. При восстановлении или смене состояний в системе возникают переходные процессы, которые влекут изменение выходных величин во времени. Графики некоторых сигналов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Графики некоторых сигналов системы  
автоматического регулирования и управления

Непрерывные системы	
Сигналы являются непрерывными функциями времени	
Сигнал с гармонической модуляцией. Моделируют (изменяют) амплитуду Частота $f = \frac{1}{T} = \text{const}$	
Сигнал частотной модуляции (амплитуда) $A = \text{const}$	
Дискретные системы	
Сигнал подаётся порциями с амплитудно-импульсной модуляцией (период и продолжительность сигнала постоянная)	
Сигналы с широтно-импульсной модуляцией (период постоянный, продолжительность сигнала разная)	

Сигналы с частотно-импульсной модуляцией (период переменный)	
Сигналы релейных систем	

Эти изменения должны находиться в допустимых пределах. Ограничивается продолжительность переходного процесса.

Система автоматического регулирования может быть неустойчивая. После любого случайного возмущения возникают или незапланированные незатухающие колебания, или колебания с возрастающей амплитудой, или система не приближается к заданной траектории, а наоборот, отдаляется.

Выделяют три основные задачи, которые необходимо решать при исследовании системы автоматического управления:

- 1) определение условий, при которых система будет устойчивой;
- 2) продолжительность переходного процесса и нахождение отклонений выходных величин при переходных процессах;
- 3) определение ошибок системы при работе в установившемся режиме работы.

Три перечисленные задачи сводятся к обеспечению: *устойчивости, качества и точности регулирования.*

Если система уже изготовлена, натурные испытания дадут самый точный результат, но они трудоёмки, и не всегда известно, какие именно факторы необходимо проверять.

При создании новых систем на стадии проектирования можно оценить свойства системы с помощью математических моделей.

Математические модели с некоторой степенью приближения отражают реальные явления, возникающие в изучаемых системах.

В общем случае процессы в системах автоматического управления описываются нелинейными дифференциальными, интегральными, алгебраическими уравнениями.

Нелинейной системой считается такая, в которой хотя бы один элемент нелинейный. Например, в редком механизме отсутствует сила трения, а она – нелинейная (рис. 1.4).

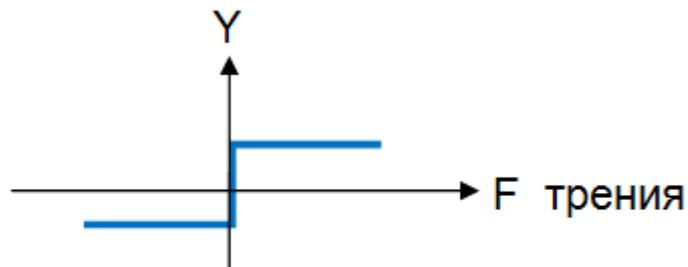


Рис. 1.4. Зависимость перемещения  $Y$  и силы трения  $F$

Если ограничиться рассмотрением малых отклонений переменных величин относительно установившегося состояния системы, то часто линеаризация нелинейных уравнений с последующей их заменой на приближённые линейные уравнения дают приемлемые результаты. В математике хорошо разработана общая теория линейных уравнений.

Если нельзя линеаризовать уравнения, то применяют различные приближённые методы.

### **Контрольные вопросы и задания по разделу 1**

1. Что такое объект управления и каковы различия его технологических регулируемых параметров?
2. Чем отличается система автоматического управления от системы точного регулирования?
3. Что такое возмущающее воздействие, входные и выходные сигналы систем автоматического управления?
4. Поясните схему и назначение основных устройств замкнутой системы автоматического управления.
5. В чём состоит различие между замкнутой и разомкнутой системами автоматического управления?
6. На какие виды подразделяются системы автоматического управления по характеру формирования и виду передаваемых сигналов?
7. Каковы задачи исследования и расчета систем автоматического регулирования?

## Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 2.1. Составление математической модели системы

Для расчета любой системы прежде всего необходимо составить математическое описание протекающих в ней физических процессов. Уравнения всех звеньев образуют единую систему, которую, преобразовывая, приводят к одному уравнению путём исключения промежуточных переменных.

До тех пор пока величины, определяющие состояние системы, не изменяются во времени, система находится в равновесии. В теории автоматического управления и регулирования уравнениями *статики* называются соотношения, связывающие между собой входные и выходные величины при различных состояниях равновесия (устойчивости) системы.

Само время изменяется всегда, но если время не влияет на величины (например, скорость есть, но она постоянная), то система находится в равновесии.

Уравнения статики системы имеют вид  $F(X, Y) = 0$ , где  $X$  – входная величина,  $Y$  – выходная. График, построенный по этому уравнению, является *статической* характеристикой.

Когда статическая характеристика близка к линейной, она может быть представлена уравнением прямой  $Y = KX$ , где  $K$  – коэффициент передачи. Если  $X$  и  $Y$  имеют одинаковую размерность, тогда  $K$  называют *коэффициентом усиления*.

Уравнениями *динамики* называют уравнения, описывающие состояние системы, изменяющееся во времени.

Уравнения динамики имеют вид  $F(X, Y, t) = \frac{dY}{dt}$ .

Для анализа системы применяются различные математические модели систем. Рассмотрим дифференциальную форму, когда система описывается дифференциальными уравнениями, например, принципиальную схему электрогидравлической следящей системы астатической второго порядка с гидроприводом объёмного регулирования, показанную на рис. 2.1.

В этой системе производительность насоса (Н) изменяется электродвигателем постоянного тока (ЭД), питаемым электромашинным усилителем (ЭМУ).

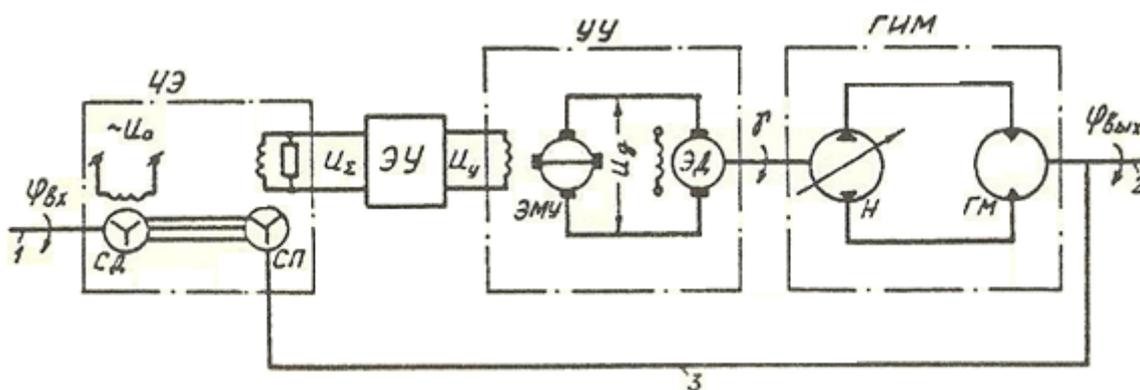


Рис. 2.1. Принципиальная схема электрогидравлической следящей системы:  $\varphi_{вх}$  – угол поворота входного вала, являющийся входным, управляющим сигналом системы;  $\varphi_{вых}$  – угол поворота выходного вала, являющийся выходным сигналом системы, т.е. управляемой величиной; ЧЭ – чувствительный элемент; ЭУ – электронный усилитель; УУ – управляющее устройство, ГИМ – гидравлический исполнительный механизм

В качестве чувствительного элемента (ЧЭ), являющегося измерителем рассогласования переменного тока, здесь применено устройство трансформаторной синхронной передачи на электрических индукционных микромашинах типа сельсинов. Чувствительный элемент состоит из двух сельсинов: сельсина-датчика (СД), обмотка возбуждения которого подключена к источнику питания переменного тока  $U_0$ , и сельсина-приёмника (СП), возбуждаемого создаваемым фазными напряжениями СД переменным магнитным током. Сигнал рассогласования  $U_2$  вырабатывается однофазной обмоткой СП, ротор которого связан с выходным валом 2 системы посредством механической отрицательной обратной связи 3. Ротор СД связан с входом вала 1.

Сигнал рассогласования с ЧЭ поступает на вход электронного усилителя (ЭУ), к выходу которого  $U_y$  подключены обмотки ЭМУ с поперечным возбуждением. Конструктивно ЭМУ представляет собой генератор постоянного тока с явно выраженными полюсами, имеющий на якоре дополнительную пару щеток, поперечных, замкнутых накоротко и усиливающих ток. Выходное напряжение ЭМУ снимается со щёток продольной оси якоря. Напряжение  $U_g$  с выхода ЭМУ подаётся к электродвигателю (ЭД) постоянного тока. ЭД изменяет угол

наклона  $\gamma$  регулируемого насоса (Н), тем самым изменяя производительность насоса и соответственно скорость гидромотора (ГМ), вращающего выходной вал.

Математическая модель электрогидравлической следящей системы (ЭГСС):

$$\varepsilon = \varphi_{\text{вх}} - \varphi_{\text{вых}}, \quad (2.1)$$

$$U_{\Sigma} = K_{\text{чэ}} \cdot \varepsilon, \quad (2.2)$$

$$U_y = K_{\text{эу}} \cdot U_{\Sigma}, \quad (2.3)$$

$$T_{\text{эму}} \cdot \frac{dU_g}{dt} + U_g = K_{\text{эму}} \cdot U_y, \quad (2.4)$$

$$T_g \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt} = K_g \cdot U_g, \quad (2.5)$$

$$\frac{d\varphi_{\text{вых}}}{dt} = K_v \cdot \gamma, \quad (2.6)$$

где  $\varphi_{\text{вх}}$  – угол поворота входного вала, являющийся входным, управляющим сигналом системы;  $\varphi_{\text{вых}}$  – угол поворота выходного вала, являющийся выходным сигналом системы, т.е. управляемой величиной;  $K_{\text{чэ}}$  – коэффициент преобразования чувствительного элемента (ЧЭ);  $\varepsilon$  – рассогласование, являющееся ошибкой сложения;  $K_{\text{эу}}$  – коэффициент усиления ЭМУ;  $T_{\text{эму}}$  – электромеханическая постоянная времени ЭМУ;  $K_g$  – коэффициент передачи ЭД;  $T_g$  – электромеханическая постоянная времени ЭД;  $K_v$  – коэффициент усиления ГИМ по скорости.

Функциональная схема электрогидравлической следящей системы с гидроприводом объёмного регулирования скорости движения выходного звена показана на рис. 2.2.

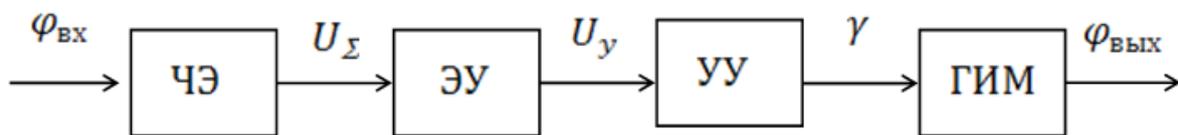


Рис. 2.2. Функциональная схема электрогидравлической следящей системы

Несмотря на принятые допущения, общее уравнение системы будет нелинейным.

*Нелинейностью является – произведение переменных или их производных (корень, квадрат), или степень, неравная 1, релейная зависимость переменных или любая другая непрямая линия.*

Составление математической модели к теории автоматического управления, или управления техническими системами, не относится. Управление техническими системами показывает методы и способы исследования поведения системы по математической модели.

## 2.2. Линеаризация уравнений динамики

При линеаризации исходные нелинейные уравнения динамики заменяются приближёнными линейными уравнениями.

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные  $x$  и  $y$  изменяются так, что их отклонения от установившихся значений  $x_0$  и  $y_0$  остаются всё время достаточно малыми. Точки линеаризации  $x_0$  и  $y_0$  мы выбираем сами (рис. 2.3), поэтому её координаты известны. Считаем, что вблизи этой точки кривую можно заменить прямой линией.

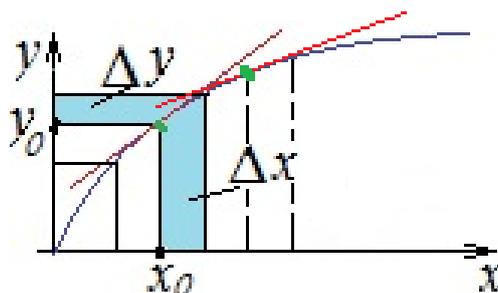


Рис. 2.3. Замена кривой линии прямой на участке вблизи координат  $X_0, Y_0$

Часто для упрощения расчетов нелинейные уравнения линеаризуют, т.е. заменяют кривую линию прямой линией, считая, что на небольшом (малом) участке такая замена существенного влияния не оказывает. Существуют пять способов линеаризации непрерывных функций: соединяют концы кривой линии прямой (рис. 2.4, а); прямую линию проводят по середине кривой (рис. 2.4, б) (отклонение поровну); прямая линия идет от начала кривой линии (рис. 2.4, в); прямая линия идёт от конца кривой линии (рис. 2.4, г); проводится касательная к кривой в точке линеаризации (рис. 2.4, д).

Внешнее воздействие не зависит от работы автоматической системы, его изменение может быть произвольным и обычно линеаризации не подлежит.

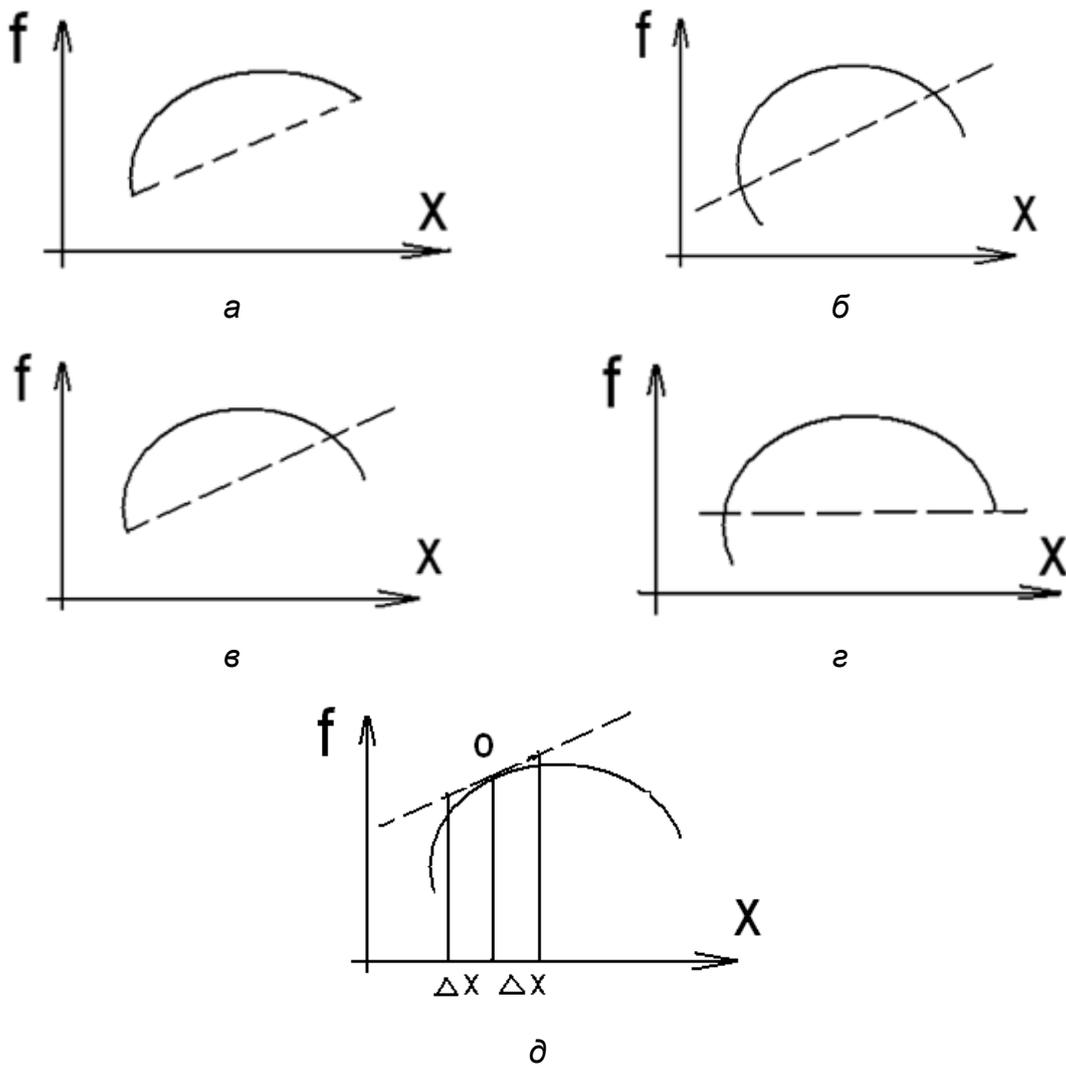


Рис. 2.4. Методы линеаризации

Линеаризовать можно только непрерывные зависимости. Зависимости со скачком или разрывные зависимости не линеаризуются. Зависимости, показанные на рис. 2.5, нельзя линеаризовать.

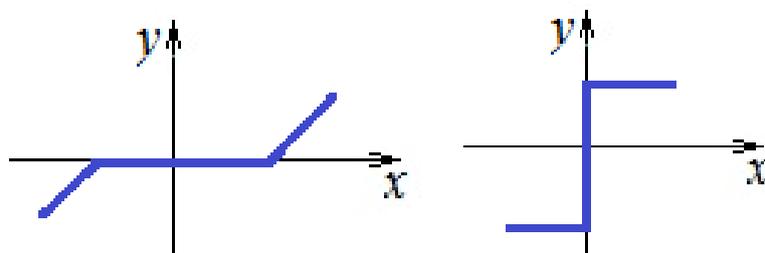


Рис. 2.5. Кусочно-линейные функции не линеаризуются

Основным недостатком линеаризации является то, что полученный результат не обязательно будет отвечать действительности.

Только эксперимент может подтвердить правильность любых теоретических расчетов.

Предположим, что выходная и входная величины  $x$  и  $y$  связаны нелинейным уравнением  $F(x, y, t) = \frac{dy}{dt}$ .

Малые отклонения от значений точки линеаризации показаны на рис. 2.6.

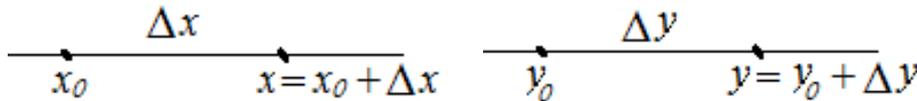


Рис. 2.6. Линеаризация в окрестностях координат  $x_0$  и  $y_0$

В каждый момент времени  $x = x_0 + x'$ ;  $y = y_0 + y'$  или  $y - y_0 = y'$ .

Если невозмущённое состояние представлено динамическим процессом, то  $x_0$  и  $y_0$  могут быть функциями времени, тогда

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}, \text{ отсюда } \frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt} = \frac{dy'}{dt}. \quad (2.7)$$

Разложив нелинейную функцию  $F(x, y, t)$  в ряд Тейлора в окрестностях значений  $x_0$  и  $y_0$ , получим (формула взята из справочника)

$$F(x, y, t) = F(x_0, y_0, t) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot x' + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot y' + R(x', y', t), \quad (2.8)$$

где  $R(x', y', t)$  – совокупность членов, содержащих отклонение  $x'$ ,  $y'$  в степени выше первой. При малых отклонениях ими пренебрегают.

Преобразуем функцию  $F(x, y, t) = \frac{dy}{dt}$ ; подставив эту функцию в уравнение (2.8), получаем выражение (2.9)

$$\frac{dy}{dt} = F(x_0, y_0, t) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot x' + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot y'. \quad (2.9)$$

При невозмущённом состоянии системы  $x' = 0$  и  $y' = 0$ , значит

$$\frac{dy_0}{dt} = F(x_0, y_0, t). \quad (2.10)$$

Подставив в уравнение (2.8) уравнения (2.9) и (2.10), получаем линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy'}{dt} = F(x_0, y_0, t) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot x' + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot y' - F(x_0, y_0, t)$$

или

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot x' - \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot y'. \quad (2.11)$$

**Пример.** Необходимо линеаризовать линейность. Расход рабочей среды (масла), протекающей через постоянный дроссель, показан на рис. 2.7.

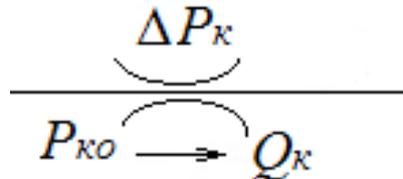


Рис. 2.7. Схема постоянного дросселя

Рассмотрим поведение системы вблизи точки линеаризации (рис. 2.8).

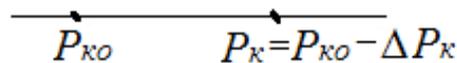


Рис. 2.8. Точка линеаризации давления

На рис. 2.8  $P_{к0}$  – давление перед постоянным дросселем, установившийся режим задан произвольно.

Расход через постоянный дроссель выражается формулой

$$Q_k = \mu \cdot f_{щ} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{P_k}.$$

Обозначим постоянные величины  $T = \mu \cdot f_{щ} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ , тогда

$$Q_k = T \cdot \sqrt{P_k}. \quad (2.12)$$

Нелинейная функция  $\sqrt{P_k}$  – с одной нелинейной величиной, значит формула (2.8) принимает вид:

$$F(x, t) = F(x_0, t) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \cdot x'.$$

Функция, которую необходимо линеаризовать, –  $F\left(P_k^{\frac{1}{2}}\right)$ :

$$F\left(P_K^{\frac{1}{2}}\right) = F\left(P_{КО}^{\frac{1}{2}}\right) + \left. \frac{\partial F\left(P_K^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial P_K} \right|_{P_K=P_{КО}} \cdot P'_K.$$

$$\text{Здесь } P_K - P_{КО} = P_K = P'_K, \left(P_K^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot P_K^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial P_K,$$

$$\left. \frac{\partial F\left(P_K^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial P_K} \right|_{P_K=P_{КО}} = \frac{1}{2} \cdot P_K^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial P_K}{\partial P_K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{P_{КО}}},$$

получаем 
$$P_K^{\frac{1}{2}} = P_{КО}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{P_{КО}}} \cdot (P_K - P_{КО}). \quad (2.13)$$

Возвращаемся к формуле (2.12) и подставляем в неё линеаризованную функцию (2.13)

$$Q_K = T \left[ P_{КО}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{P_{КО}}} \cdot (P_K - P_{КО}) \right]$$

или 
$$Q_K = T \cdot P_{КО}^{\frac{1}{2}} + \frac{T}{2\sqrt{P_{КО}}} \cdot (P_K - P_{КО}) = T \cdot P_{КО}^{\frac{1}{2}} - \frac{T \cdot P_{КО}}{2\sqrt{P_{КО}}} + \frac{T}{2\sqrt{P_{КО}}} \cdot P_K.$$

Если принять расход, проходящий через дроссель  $Q_K = X$ , а давление перед дросселем  $P_K = Y$  и обозначить постоянные величины за  $a$  и  $b$ , получим уравнение прямой линии  $X = a + bY$ .

### 2.3. Дифференциальная и операторная формы представления математической модели

Линеаризованное дифференциальное уравнение при постоянных значениях коэффициентов обычно приводят к стандартному виду. Для этого все члены уравнения делят на коэффициент при выходной величине и записывают:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x.$$

Постоянный коэффициент  $T$  имеет размерность времени и называется постоянной времени. Коэффициент  $K$  называется коэффициентом передачи, преобразования, или коэффициентом усиления.

В общем виде линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 \cdot x.$$

Дифференциальные уравнения можно заменить алгебраическими и записать в операторной форме или в изображениях Лапласа. Переходят к алгебраической форме записи для того, чтобы получить уравнение, связывающее входное воздействие  $x$  с  $y$ .



Пьер-Симон Лаплас (1749–1827)

### 1 способ. Операторная форма.

Применяются символы операторов дифференцирования или интегрирования:

$$S = \frac{d}{dt}; S^2 = \frac{d^2}{dt^2}; \frac{1}{S} = \int_0^t dt.$$

Алгебраические уравнения не должны быть выше второго порядка:

$$S \cdot P = \frac{dP}{dt}; S \cdot v = \frac{dv}{dt}; \frac{dy}{dt} = S \cdot y.$$

При операторной форме записи в дифференциальных уравнениях заменяются только символы дифференцирования.

**Пример.**  $T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x \rightarrow T \cdot S \cdot y + y = K \cdot x.$

## 2 способ. Алгебраизация.

Применяют преобразование Лапласа, при котором вместо действительного переменного сигнала (времени)  $t$  рассматривают функцию комплексного переменного  $S$ .

$f(t) \bullet \text{---} \bullet F(S)$  – оригинал соответствует изображению.

Этот метод основан на использовании интеграла Лапласа.

*Прямое преобразование Лапласа*  $F(S) = \int_0^{\infty} e^{-St} \cdot f(t) \cdot dt.$

*Обратное преобразование Лапласа*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(S) \cdot e^{St} \cdot dS.$$

Изображение функции времени является некоторой комплексной величиной  $S = C + j\omega$ .

Для большинства систем, с которыми приходится иметь дело в теории управления,  $C = 0$ . Поэтому для этих функций  $S = j\omega$ , где

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1.$$

Для упрощения инженерной работы наиболее часто используемые интегралы приводятся в справочниках, некоторые из них приведены в табл. 2.

Если в уравнении будут  $\sin$  или  $\cos$ , то преобразования по Лапласу и в операторной форме разные.

Изображения производных по времени от переменных величин будут похожи на символьное (операторное) преобразование только при нулевых начальных условиях. Нулевые начальные условия упрощают расчёты, но не всегда приемлемы.

Функции-оригиналов и функции-изображений отличаются не только независимыми переменными, но и видом, и должны быть обозначены по-разному. Например, прописными и строчными буквами  $f(t) \bullet \text{---} \bullet F(S)$ .

Но такое обозначение не всегда удобно, так как в математическом описании большое число постоянных и переменных величин, и поэтому букв греческого и латинского алфавитов не всегда хватает.

## Часто используемые интегралы

Наименование	Оригинал	Изображение Лапласа
Правило дифференцирования при нулевых начальных условиях	$f^{(n)}(t)$	$S^n \cdot F(S)$
Правило интегрирования при нулевых начальных условиях	$\int \int \int \dots f(t) \cdot dt^n$	$\frac{F(S)}{S^n}$
Единичная ступенчатая функция	$1(t)$ или $A \cdot 1(t)$	$\frac{1}{S}$ или $\frac{A}{S}$
Степенная функция	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{S^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{S+a}$
Синусоида	$\sin \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{\lambda}{S^2 + \lambda^2}$
Косинусоида	$\cos \lambda t \cdot 1(t)$	$\frac{S}{S^2 + \lambda^2}$

В операционном исчислении доказывается ряд теорем, которыми определяются *свойства преобразования Лапласа*. Познакомимся с некоторыми из них без доказательств.

1. Умножение аргумента оригинала (изображения) на некоторое число приводит к делению аргумента изображения (оригинала) и изображения (оригинала) на это же число:

$$f(a \cdot t) \bullet \longrightarrow \bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{S}{a}\right), \quad \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right) \bullet \longrightarrow \bullet F(a \cdot S).$$

2. Изображение суммы конечного числа оригиналов равно сумме их изображений, если  $f_1(t) \bullet \longrightarrow \bullet F_1(S)$  и  $f_2(t) \bullet \longrightarrow \bullet F_2(S)$ , то

$$f_1(t) + f_2(t) \bullet \longrightarrow \bullet F_1(S) + F_2(S).$$

3. Произведение оригинала на постоянную величину равно произведению изображения на эту постоянную

$$a \cdot f(t) \bullet \longrightarrow \bullet a \cdot F(S).$$

4. Теорема о предельном значении приводит к условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot F(S).$$

5. Теорема о начальном значении даёт

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{S \rightarrow \infty} S \cdot F(S).$$

Любое дифференциальное уравнение, имеющее вид

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (2.14)$$

через преобразования Лапласа можно превратить в алгебраическое уравнение вида

$$\begin{aligned} a_3 \cdot S^3 \cdot y(S) + a_2 \cdot S^2 \cdot y(S) + a_1 \cdot S^1 \cdot y(S) + a_0 \cdot S^0 \cdot y(S) = \\ = b_1 \cdot S^1 \cdot x(S) + b_0 \cdot S^0 \cdot x(S). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В теории автоматического управления все временные уравнения записываются с помощью алгебраических, вводя переменную  $S$ . Например, имеется некая система автоматического управления: на входе сигнал управления  $X$ , на выходе –  $Y$  (рис. 2.9).

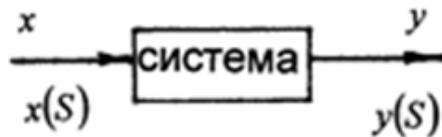


Рис. 2.9. Структурная схема системы автоматического управления

Запишем уравнение (2.15) в стандартной форме в виде

$$[a_3 \cdot S^3 + a_2 \cdot S^2 + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0] \cdot y(S) = [b_1 \cdot S^1 + b_0 \cdot S^0] \cdot x(S).$$

Отношение изображения  $y(S)$  выходной величины к изображению  $x(S)$  входной величины, взятой при нулевых начальных условиях, называется *передаточной функцией* и обозначается  $W(S)$

$$W(S) = \frac{y(S)}{x(S)} = \frac{b_1 \cdot S^1 + b_0 \cdot S^0}{a_3 \cdot S^3 + a_2 \cdot S^2 + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0}.$$

**Пример.** Вернёмся к математической модели электрогидравлической следящей системы (ЭГСС), показанной на рис. 2.1, и преобразуем её в алгебраическую форму в изображениях по Лапласу. Преобразование приведено в табл. 3. По каждому уравнению построим структурную схему. Затем структурные схемы отдельных звеньев соберем и получим структурную схему всей системы.

Рассмотрим подробно каждое уравнение системы (табл. 3).

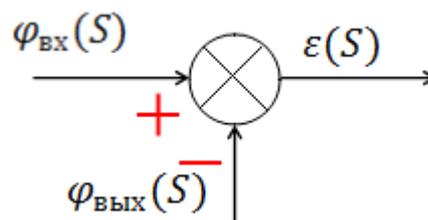
Таблица 3

	Уравнения в дифференциальной форме	Уравнения в изображениях Лапласа
1	$\varepsilon = \varphi_{\text{ВХ}} - \varphi_{\text{ВЫХ}}$	$\varepsilon(S) = \varphi_{\text{ВХ}}(S) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(S)$
2	$U_{\Sigma} = K_{\text{чэ}} \cdot \varepsilon$	$U_{\Sigma}(S) = K_{\text{чэ}} \cdot \varepsilon(S)$
3	$U_y = K_{\text{эу}} \cdot U_{\Sigma}$	$U_y(S) = K_{\text{эу}} \cdot U_{\Sigma}(S)$
4	$T_{\text{эму}} \cdot \frac{dU_g}{dt} + U_g = K_{\text{эму}} \cdot U_y$	$T_{\text{эму}} \cdot S \cdot U_g(S) + U_g(S) = K_{\text{эму}} \cdot U_y(S),$ $(T_{\text{эму}} \cdot S + 1) \cdot U_g(S) = K_{\text{эму}} \cdot U_y(S)$
5	$T_g \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt} = K_g \cdot U_g$	$T_g \cdot S^2 \cdot \gamma(S) + S \cdot \gamma(S) = K_g \cdot U_g(S),$ $(T_g \cdot S^2 + S) \cdot \gamma(S) = K_g \cdot U_g(S)$
6	$\frac{d\varphi_{\text{ВЫХ}}}{dt} = K_v \cdot \gamma$	$S \cdot \varphi_{\text{ВЫХ}}(S) = K_v \cdot \gamma(S)$

Из табл. 3, первое уравнение в дифференциальной форме  $\varepsilon = \varphi_{\text{ВХ}} - \varphi_{\text{ВЫХ}}$ . Его записываем в изображениях по Лапласу

$$\varepsilon(S) = \varphi_{\text{ВХ}}(S) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(S);$$

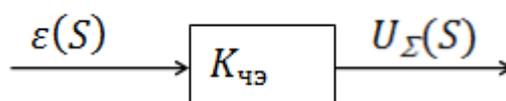
этому уравнению будет соответствовать структурная схема



Второе уравнение (табл. 3) в дифференциальной форме  $U_{\Sigma} = K_{\text{чэ}} \cdot \varepsilon$ . Запишем это уравнение в изображениях по Лапласу  $U_{\Sigma}(S) = K_{\text{чэ}} \cdot \varepsilon(S)$ . Из этого уравнения получается передаточная функция –

$$W(S) = \frac{U_{\Sigma}(S)}{\varepsilon(S)} = K_{\text{чэ}}.$$

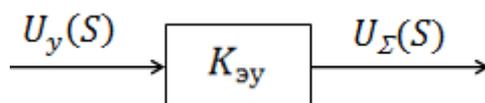
По этой передаточной функции строим структурную схему



Третье уравнение (табл. 3) в дифференциальной форме  $U_y = K_{\text{эу}} \cdot U_{\Sigma}$ . Запишем это уравнение в изображениях по Лапласу  $U_y(S) = K_{\text{эу}} \cdot U_{\Sigma}(S)$ . Из этого уравнения записывается передаточная

$$\text{функция} - W(S) = \frac{U_y(S)}{U_{\Sigma}(S)} = K_{\text{эу}}.$$

По этой передаточной функции строим структурную схему



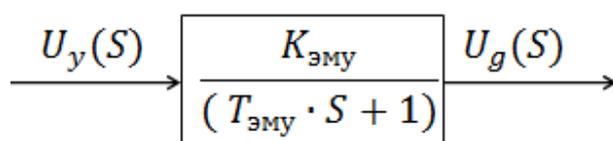
Четвертое уравнение (табл. 3) в дифференциальной форме  $T_{\text{эму}} \cdot \frac{dU_g}{dt} + U_g = K_{\text{эму}} \cdot U_y$ . Запишем это уравнение в изображениях по Лапласу  $T_{\text{эму}} \cdot S \cdot U_g(S) + U_g(S) = K_{\text{эму}} \cdot U_y(S)$  или

$$(T_{\text{эму}} \cdot S + 1) \cdot U_g(S) = K_{\text{эму}} \cdot U_y(S).$$

Из последнего уравнения запишем передаточную функцию

$$W(S) = \frac{U_g(S)}{U_y(S)} = \frac{K_{\text{эму}}}{(T_{\text{эму}} \cdot S + 1)}.$$

По этой передаточной функции строим структурную схему



Пятое уравнение (табл. 3) в дифференциальной форме

$$T_g \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt} = K_g \cdot U_g.$$

Запишем это уравнение в изображениях по Лапласу

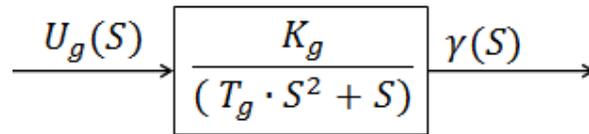
$$T_g \cdot S^2 \cdot \gamma(S) + S \cdot \gamma(S) = K_g \cdot U_g(S) \text{ или}$$

$$(T_g \cdot S^2 + S) \cdot \gamma(S) = K_g \cdot U_g(S).$$

Из этого уравнения записывается передаточная функция

$$W(S) = \frac{\gamma(S)}{U_g(S)} = \frac{K_g}{(T_g \cdot S^2 + S)}.$$

По этой передаточной функции строим структурную схему



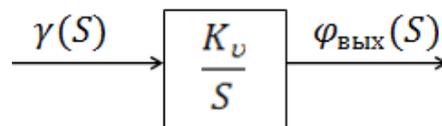
Шестое уравнение (табл. 3) в дифференциальной форме  $\frac{d\varphi_{\text{ВЫХ}}}{dt} = K_v \cdot \gamma$ . Запишем это уравнение в изображениях по Лапласу

$$S \cdot \varphi_{\text{ВЫХ}}(S) = K_v \cdot \gamma(S).$$

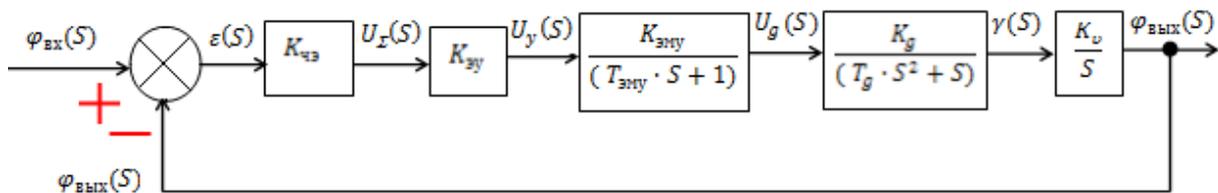
Из этого уравнения записывается передаточная функция

$$W(S) = \frac{\varphi_{\text{ВЫХ}}(S)}{\gamma(S)} = \frac{K_v}{S}.$$

По этой передаточной функции строим структурную схему



Из полученных структурных схем построим структурную схему в целом



### Контрольные вопросы и задания по разделу 2

1. В чём различие между динамическими и статическими уравнениями?
2. Какие признаки нелинейности Вы знаете?
3. Какие способы линеаризации кривых Вы знаете?
4. Как выбрать точку линеаризации?
5. Можно ли линеаризовать кусочно-линейное звено?
6. Для чего переходят от дифференциальных уравнений к уравнениям в алгебраической форме?
7. Как записать дифференциальное уравнение в изображениях Лапласа?
8. Запишите уравнение в дифференциальной форме по уравнению в изображениях Лапласа.

## Раздел 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ

### 3.1. Режимы работы системы автоматического управления

Динамическими характеристиками системы, структурная схема которой показана на рис. 3.1, называют характеристики, показывающие изменение выходных параметров во времени (рис. 3.2). Выходные параметры связываются со входными уравнением

$$\varepsilon(t) = X(t) - Y(t) = 0, \text{ при } X(t) = \text{const.}$$

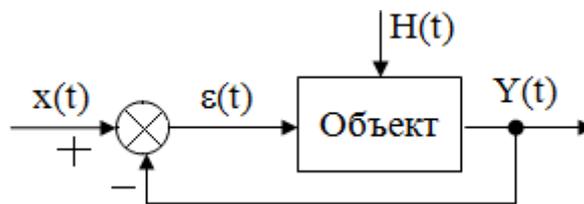


Рис. 3.1. Схема динамической системы с замкнутой обратной связью

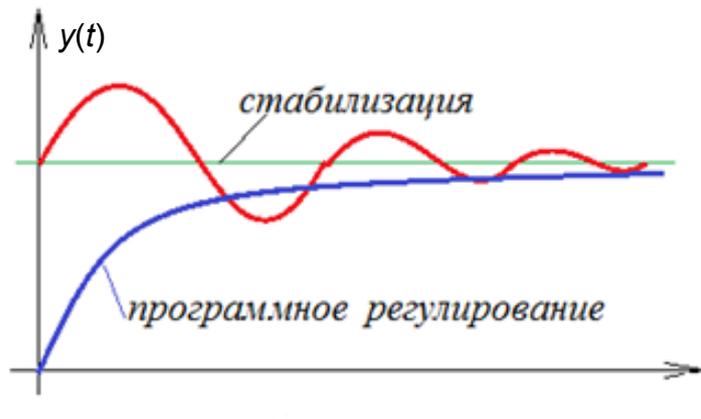


Рис. 3.2. Возможное изменение выходных параметров во времени

Динамические характеристики зависят от воздействия. Рабочее воздействие определяется программой регулирования. Воздействие, связанное с эксплуатацией, называется возмущающим воздействием. Динамические характеристики могут быть временные и частотные.

Для того чтобы проанализировать поведение системы (рис. 3.1), оценить её динамику, надо задать начальные условия, произвести расчёты, построить переходный процесс, посмотреть, как поведёт себя система при одних начальных условиях, затем при других начальных условиях. Это путь очень трудоёмкий.

### 3.2. Типовые внешние воздействия

Для того чтобы получить реакцию системы, показанной на рис. 3.1, необходимо задать внешнее управляющее воздействие. Современная вычислительная техника позволяет имитировать любой сигнал на входе в систему. Правильность теоретических расчетов можно подтвердить только экспериментально. При этом на вход реальной системы надо подать такой же сигнал, какой подавали в теоретическом расчете. Часто это бывает затруднительно.

Разработаны четыре типовых внешних воздействия, которые достаточно просто реализуются на практике.

1. *Ступенчатое воздействие.* На вход системы подается ступенька (рис. 3.3), где  $x(t)$  – входное воздействие,  $\varepsilon(t)$  – ошибка обработки входного воздействия,  $y(t)$  – выходной сигнал. Входное воздействие задается в виде  $x_{\text{вх}}(t) = A \cdot 1(t)$ , где  $t = 0$  – скачок сигнала в момент времени  $t$ ,  $A$  – постоянная,  $1(t)$  – единичная ступенчатая функция. Входное воздействие в изображениях Лапласа имеет вид

$$x(S) = A \cdot \frac{1}{S}.$$

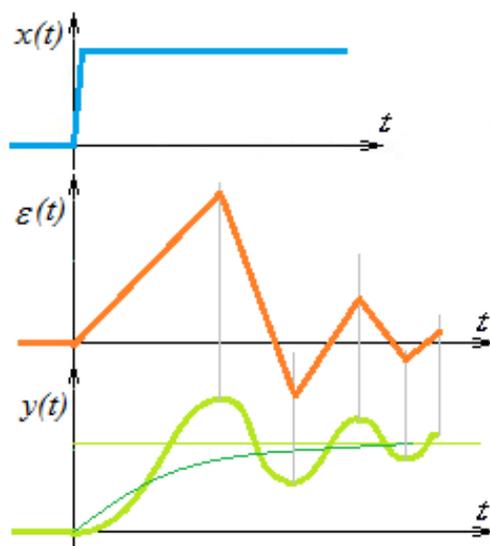


Рис. 3.3. Графики переходных процессов при ступенчатом входном воздействии

К такому виду сводятся: мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу двигателя, мгновенное смещение затвора распределителя.

2. *Импульсное воздействие.* На вход системы подается сигнал, краткий по времени, но большой величины (рис. 3.4), где  $x(t)$  – входной сигнал,  $y(t)$  – выходной сигнал. Входное воздействие задается в виде  $x_{\text{вх}}(t) = A \cdot 1'(t)$ , где  $A$  – постоянная,  $A \cdot 1'(t)$  – импульсный сигнал.

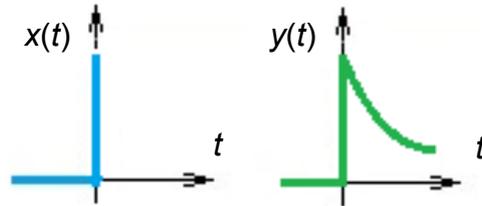


Рис. 3.4. Графики переходных процессов при импульсном воздействии

К такому виду можно отнести: кратковременный удар нагрузки на валу двигателя; кратковременный ток короткого замыкания генератора, отключаемого плавкими предохранителями.

3. *Линейное воздействие.* На вход системы подается линейный сигнал (рис. 3.5), где  $x(t)$  – входное воздействие,  $\varepsilon(t)$  – ошибка обработки входного воздействия,  $y(t)$  – выходной сигнал. Входное воздействие задается в виде  $x(t) = A \cdot 1(t)$ , а в изображениях Лапласа –

$$x(S) = \frac{A}{S^2}.$$

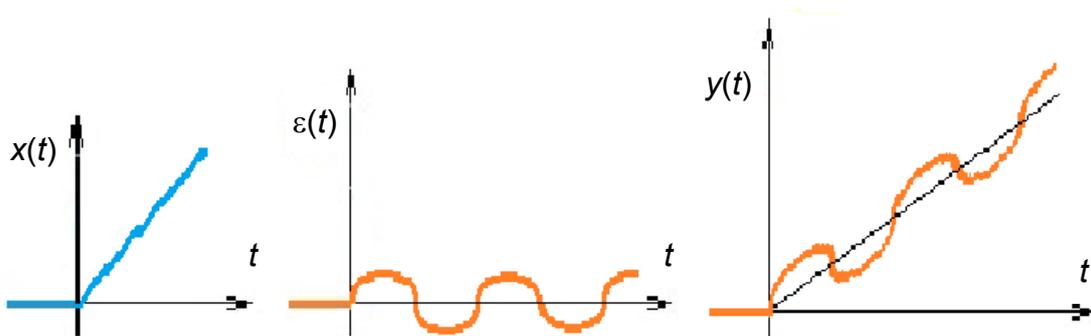


Рис. 3.5. Графики переходных процессов при линейном входном воздействии

К такому виду можно отнести сигнал постоянной скорости. Например, включили гидромотор и он вращается с постоянной скоростью.

4. *Гармоническое воздействие.* На вход подается любой гармонический сигнал, обычно синусоидальный (рис. 3.6) или косинусоидальный. Входное воздействие задается в виде

$$x(t) = A_{\text{вх}} \cdot \sin(\omega t),$$

где  $A_{\text{вх}}$  – амплитуда колебаний; частота колебаний  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $T$  – период колебаний. При этом входное воздействие в изображениях Лапласа имеет вид  $x(S) = A_{\text{вх}} \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$ .

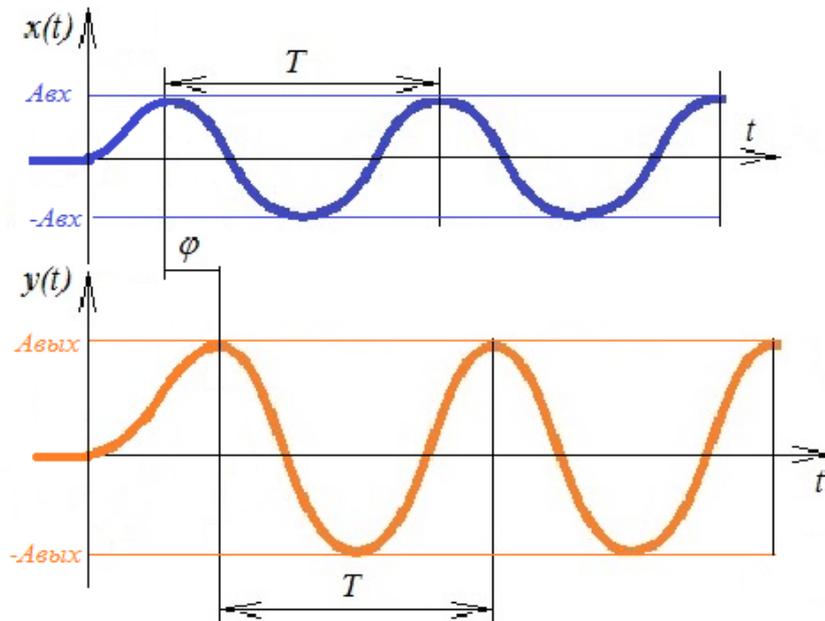


Рис. 3.6. Графики переходных процессов при гармоническом входном сигнале

В линейных или линеаризованных системах период колебаний  $T$  одинаковый у входных и выходных воздействиях и не меняется с течением времени, но имеется сдвиг по фазе  $\varphi$ . При входном воздействии  $x(t) = A_x \cdot \sin(\omega t)$  реакция системы на выходе будет

$$y(t) = A_y \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $\varphi$  – сдвиг по фазе относительно входного воздействия.

### 3.3. Временные характеристики

При ступенчатом входном сигнале  $x(t) = A \cdot 1(t)$  путём решения уравнения системы изучается процесс перехода системы из одного равновесного состояния в другое (переходная функция). Полученная переходная функция или полученный график переходного процесса отвечает на вопрос, устойчива система или нет. Если нет, то на вопрос, в каком направлении двигаться, чтобы система стала устойчивой, временные характеристики ответа не дают.

При гармоническом сигнале  $x(t) = A \cdot e^{j\omega t}$  на основе решения уравнения представляется возможность исследовать характер и качество воспроизведения данной системой меняющегося входного сигнала.

При заданном входном воздействии изменение выходной величины  $y(t)$  во времени представляет собой решение уравнения

$$y(t) = y_c(t) + y_B(t),$$

где  $y_c(t)$  – свободная или собственная (образуется самой системой) составляющая процесса;  $y_B(t)$  – вынужденная (ответ на входное воздействие) составляющая процесса.

На рис. 3.7 показаны собственная и вынужденная составляющие реакции системы на входное воздействие, где период колебаний сигналов  $T_B \neq T_C$  и амплитуда колебаний  $A_B \neq A_C$  разные.

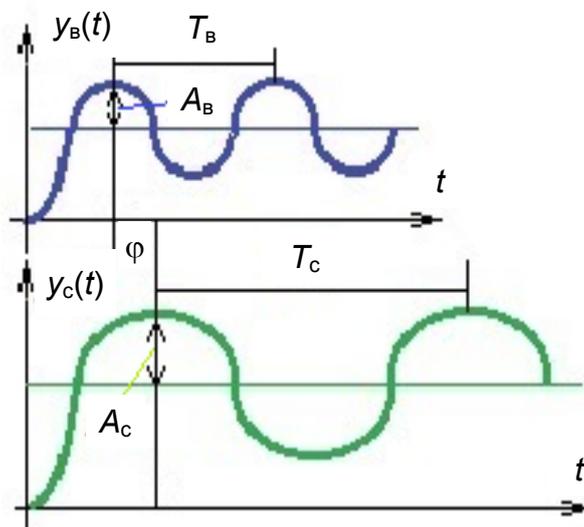


Рис. 3.7. Графики вынужденных  $y_B$  и собственных  $y_c$  колебаний системы

Вынужденная и собственная составляющие выходного воздействия зависят от динамических свойств системы и закона изменения входного воздействия. При разных амплитудах и частотах входного воздействия эти величины тоже будут разными. При каких-то частотах можно попасть в зону резонанса, т.е. амплитуды, складываясь, могут значительно возрасти (рис. 3.8). Задача проектировщика – не попасть в зону резонанса.

При гармоническом входном воздействии согласно решению общего уравнения

$$\begin{aligned} [a_n \cdot S^n + \dots + a_2 \cdot S^2 + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0] \cdot y(S) = \\ = [b_m \cdot S^m + \dots + b_1 \cdot S^1 + b_0 \cdot S^0] \cdot x(S) \end{aligned} \quad (3.1)$$

в отклике системы составляющая  $y_c(t)$  определяется общим решением однородного дифференциального уравнения; она описывает свободное движение, возникающее в звене или в системе после приложения гармонического входного воздействия. Другая составляющая,  $y_b(t)$ , описывает вынужденное движение системы, которое определяется частным решением уравнения (3.1), и вследствие линейности уравнения это будет гармонический сигнал, но отличающийся от входного гармонического сигнала по амплитуде и фазе:

$$x(t) = A_x \cdot \sin(\omega t), \quad y(t) = A_y \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

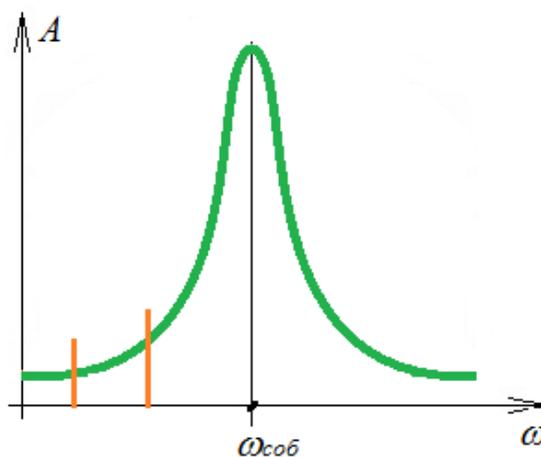


Рис. 3.8. График зависимости амплитуды от частоты колебаний

Если на вход стационарной линейной системы продолжительное время (бесконечно долго) действует гармонический сигнал частоты  $\omega$ , то наблюдаемый выходной сигнал будет тоже гармонический с той же частотой, но с другой амплитудой и со сдвигом по фазе.

Частотные характеристики описывают отношения установившихся вынужденных колебаний на выходе звена, вызванных гармоническим воздействием на входе (рис. 3.9).

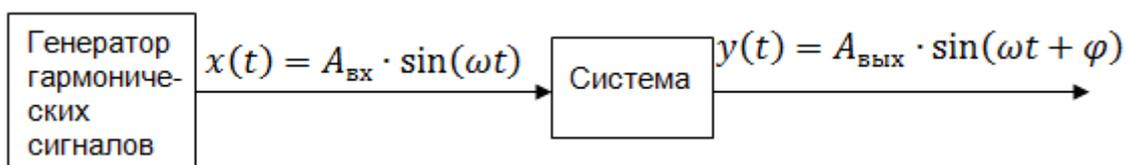


Рис. 3.9. Структурная схема получения гармонических сигналов

Реакция системы на внешнее воздействие (процесс перехода из одного равновесного состояния в другое) называется переходной

функцией и обозначается:  $y(t)$  – переходная функция в размерном виде;  $h(t)$  – переходная функция в безразмерном виде.

Предполагается, что  $x(t)$  имеет ту же размерность, что и выходная физическая величина  $y(t)$ .

**Пример.** Найти реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением вида  $T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x$ , при  $T > 0$ , если на вход системы подается единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях.

Дифференциальное уравнение заданной системы в изображении по Лапласу имеет вид

$$TS \cdot y(S) + y(S) = K \cdot x(S) \text{ или } [TS + 1] \cdot y(S) = K \cdot x(S).$$

Передаточная функция системы  $W(S) = \frac{y(S)}{x(S)} = \frac{K}{TS + 1}$ . Обозначим:  $K \cdot S^0 = M(S)$  – полином числителя;  $T \cdot S^1 + 1 \cdot S^0 = D(S)$  – полином знаменателя.

Характеристическим уравнением называется полином знаменателя передаточной функции, приравненной к нулю.

Если изображение является дробно-рациональной функцией, причём степень полинома числителя  $M(S)$  меньше степени полинома знаменателя  $D(S)$  и характеристическое уравнение  $D(S) = 0$  имеет отличные от «0» простые корни, т.е.  $TS + 1 = 0$  или  $TS = -1$ , где  $S_1 = -\frac{1}{T}$ ,

то по теореме разложения Хевисайда имеем:

$$h(t) = \frac{M(0)}{D(0)} + \sum_{K=1}^n \frac{M(S_K)}{S_K \cdot D'(S_K)} \cdot e^{S_K \cdot t},$$

где  $S_K$  – корни характеристического уравнения.

Полином числителя передаточной функции  $M(S) = K$ , при  $S = 0$  получим  $M(0) = K$ . Какое бы значение ни задавали  $S$ ,  $M(S_1) = K$ . Полином знаменателя  $D(S) = TS + 1$ ; при  $S = 0$  получим  $D(0) = 1$ . Если задать значение равным  $S = S_1 = -\frac{1}{T}$ , то  $D(S) = TS + 1$ , после дифференцирования получим  $D'(S) = T$ .

Подставив полученные выражения в уравнение Хевисайда, получим:

$$h(t) = \frac{K}{1} + \frac{K}{-\frac{1}{T} \cdot T} \cdot e^{-\frac{1}{T}t} \text{ или } h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right).$$

Задаём ступенчатое входное воздействие и строим график переходного процесса, показанный на рис. 3.10.

Входное воздействие  $x(t) = 1(t)$ ; ему соответствует в изображениях Лапласа  $x(S) = \frac{1}{S}$ , тогда выходное воздействие в изображениях Лапласа будет  $y(S) = W(S) \cdot \frac{1}{S}$ . Уравнение в дифференциальной форме имеет вид

$$y(t) = h(t) \cdot 1(t), \quad y(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) \cdot 1(t).$$

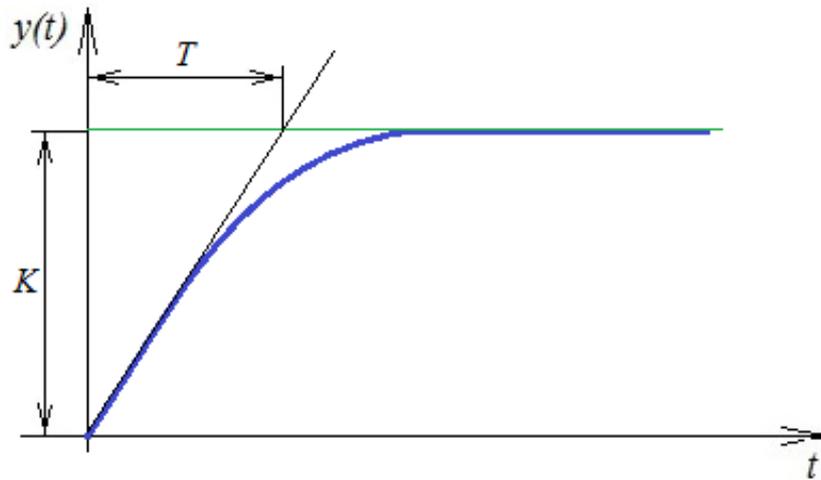


Рис. 3.10. График переходного процесса

Время переходного процесса считается равным  $t_{\text{пер}} \sim 3T$ . Для определения  $T$  проводится касательная к кривой из начала координат.

### 3.4. Частотные характеристики

Частотные характеристики позволяют косвенно оценить поведение и динамические свойства системы, оценить, в каком направлении надо двигаться, чтобы система стала устойчивой, увеличить или

уменьшить её быстродействие, проанализировать реакцию системы на внешнее воздействие. Рассчитать частотные характеристики по алгебраическим выражениям значительно проще, чем определять временные характеристики. Частотные характеристики получаются, если на вход системы подается гармоническое воздействие.

Зависимости от частоты отношения  $A = \frac{A_y}{A_x}$  амплитуд выходной

и входной величин и сдвига по фазе  $\varphi$  дают полную карту динамических свойств системы. Математические операции, связанные с определением частотных характеристик, существенно упрощаются, если применить форму описания гармонических сигналов в виде:

$$x = A_x \cdot \sin \omega t, \quad y = y_B + y_C,$$

где  $y_B = A_y \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$  или  $y_B = A_y \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ .

Если система установившаяся, то при  $t \rightarrow 0$  собственные колебания системы  $y_C \rightarrow 0$ .

Известно, что выражению  $(a \cdot e^{j\omega t})$  на комплексной плоскости соответствует точка, положение которой определяется радиус-вектором, имеющим длину « $a$ » и угол, равный углу « $\omega t$ » наклона к оси абсцисс. При изменении времени  $t$  от 0 до  $\infty$  точка перемещается по окружности.

Представление гармонического сигнала в комплексной форме показано на рис. 3.11.

Комплексную функцию  $(a \cdot e^{j\omega t})$  по формуле Эйлера можно представить в виде

$$a \cdot e^{j\omega t} = a \cdot \cos \omega t + j \cdot a \cdot \sin \omega t.$$

Из этой формулы видно, что  $(a \cdot \cos \omega t)$  и  $(j \cdot a \cdot \sin \omega t)$  являются соответственно вещественной  $\text{Re}(a \cdot e^{j\omega t})$  и мнимой  $\text{Im}(a \cdot e^{j\omega t})$  частями комплексной функции  $(a \cdot e^{j\omega t})$ . Поэтому, задавая входное воздействие комплексной функцией  $x = A_x \cdot e^{j\omega t}$ , ко входу системы приложена сумма двух гармонических воздействий (косинусного и синусного). При этом в соответствии с принципом суперпозиции, применимым к линейным системам, выходная величина есть также сумма двух гармонических сигналов, отличающихся от входных сигналов амплитудой и фазой.

В комплексной форме закон изменения выходной величины для этого случая имеет вид  $y_B = A_y \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

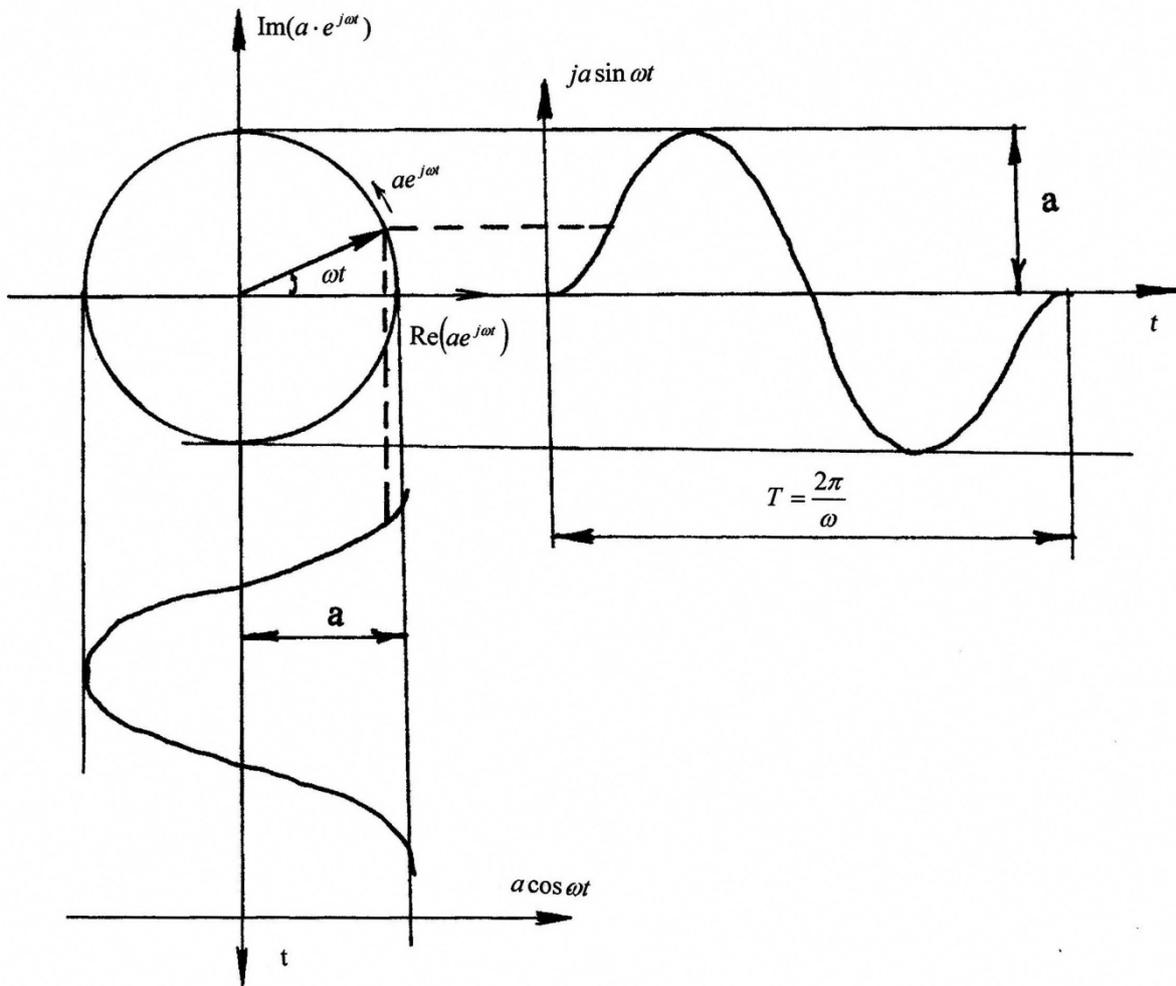


Рис. 3.11. Представление гармонического сигнала в комплексной форме

Динамические свойства системы проявляются в изменении амплитуды  $A_y$  выходной величины и в сдвиге по фазе  $\varphi$  между этими величинами в зависимости от частоты  $\omega$ . Эти зависимости можно найти и не выделяя синусную и косинусную составляющие входной и выходной величин. Здесь  $\omega = \frac{1}{T}$ , где  $T$  – период колебаний на входе.

Рассмотрим пример для нахождения соотношения между входной и выходной гармоническими величинами звена. Возьмём дифференциальное уравнение звена



$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = K \cdot \left( T \frac{dy}{dt} + x \right). \quad (3.2)$$

Входной и выходной сигналы записаны в виде дифференциального уравнения. Преобразовав по Лапласу дифференциальное уравнение, получим передаточную функцию звена:

$$W(S) = \frac{y(S)}{x(S)} = \frac{K \cdot (TS + 1)}{T_2^2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + 1}.$$

Входной сигнал «x» является гармоническим, поэтому можно записать

$x = A_x \cdot \sin \omega t;$	или в показательной форме	$\bar{x} = a \cdot e^{j\omega t};$
$y = A_y \cdot \sin(\omega t - \varphi);$		$\bar{y} = b \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}.$

Продифференцируем x и y во времени

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{y}' &= b \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} \cdot (j\omega); & d\bar{x} &= a \cdot e^{j\omega t} \cdot d(j\omega t); \\ \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \bar{y}'' &= b \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} \cdot (j\omega)^2; & d\bar{x} &= a \cdot e^{j\omega t} \cdot j\omega \cdot dt; \\ \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}' &= a \cdot e^{j\omega t} \cdot (j\omega) \end{aligned}$$

и, подставив в дифференциальное уравнение (3.2), получим:

$$[T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1] \cdot b \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = K \cdot [T (j\omega) + 1] \cdot a \cdot e^{j\omega t}.$$

Частотная передаточная функция может быть представлена как отношение изображений Фурье (частотных изображений) выходной и входной величин.

$$W(j\omega) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{b \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}}{a \cdot e^{j\omega t}} = \frac{K \cdot (T(j\omega) + 1)}{T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1}.$$

Частотная передаточная функция легко получается из обычной передаточной функции подстановкой вместо S переменной (jω).

$$W(S) = \frac{H(S)}{Q(S)}; \quad W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{Q(j\omega)}; \quad W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = W(S) \Big|_{S=j\omega}.$$

Функцию  $W(j\omega)$  называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ), или частотной передаточной функцией:

$$H(j\omega) = A_1(\omega) + jB_1(\omega); \quad W(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega);$$

$$Q(j\omega) = A_2(\omega) + jB_2(\omega);$$

где  $A_1(\omega)$  и  $A_2(\omega)$  – вещественные части;  $B_1(\omega)$  и  $B_2(\omega)$  – мнимые части частотной передаточной функции.

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо освободиться от мнимости знаменателя путём умножения числителя и знаменателя на комплексную величину и затем произвести разделение на вещественную и мнимую части.

**Пример 1.** Пусть задано дифференциальное уравнение  $T \frac{dy}{dt} = K \cdot x$ , уравнение в изображениях Лапласа  $\rightarrow T \cdot S \cdot y(S) = K \cdot x(S)$ ,

передаточная функция  $\frac{y(S)}{x(S)} = W(S) = \frac{K}{TS}$ ; частотная передаточная

функция  $W(j\omega) = \frac{K}{T \cdot j\omega}$ . Освобождаемся от мнимости в знаменателе

$W(j\omega) = \frac{K \cdot j}{T \cdot j \cdot \omega \cdot j} = -\frac{K}{T\omega} \cdot j$  и получаем  $A(\omega) = 0$  – вещественная часть

частотной передаточной функции;  $B(\omega) = -\frac{K}{T\omega}$  – мнимая часть частотной

передаточной функции.

**Пример 2.** По заданному дифференциальному уравнению надо получить вещественную и мнимую части частотной передаточной функции.

Если задано дифференциальное уравнение в виде

$$T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x,$$

уравнение в изображениях Лапласа будет иметь вид

$$(TS + 1) \cdot y(S) = K \cdot x(S);$$

передаточная функция  $\frac{y(S)}{x(S)} = W(S) = \frac{K}{TS + 1}$ ; частотная передаточная

функция

$$W(j\omega) = \frac{K}{[1 + T \cdot j\omega]} \cdot \frac{[1 - T \cdot j\omega]}{[1 - T \cdot j\omega]} = \frac{K - T \cdot j\omega}{1^2 - T^2 \cdot j^2 \cdot \omega^2}; \text{ или } W(j\omega) = \frac{K - T \cdot \omega \cdot j}{1 + T^2 \cdot \omega^2},$$

здесь  $A(\omega) = \frac{K}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$  – вещественная часть;  $B(\omega) = -\frac{T \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$  –

мнимая часть.

Функции  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  называют соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками.

Для наглядности представления частотных свойств системы используются частотные характеристики.

### **Амплитудно-фазовая частотная характеристика**

Амплитудно-фазовую частотную характеристику можно представить годографом, прочерченным на комплексной плоскости концом радиус-вектора при изменении частоты от « $-\infty$ » до « $+\infty$ ».

Обычно рассматривают амплитудно-фазовые частотные характеристики, полученные при положительных значениях частот в диапазоне от «0» до « $+\infty$ ». Длина радиус-вектора (модуль  $\text{mod } W(j\omega) = |W(j\omega)| = \frac{A_y}{A_x}$ ) равна отношению  $W(\omega) = \frac{A_y}{A_x}$  амплитуд выходной и входной величин, а угол между радиус-вектором и положительной частью вещественной оси равен сдвигу  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ .

Амплитудно-фазовая частотная характеристика системы (АФЧХ) для системы третьего порядка показана на рис. 3.12.

АФЧХ может быть построена как для положительных, так и для отрицательных частот. При замене в частотной передаточной функции  $+\omega$  на  $-\omega$  получится сопряженная комплексная величина.

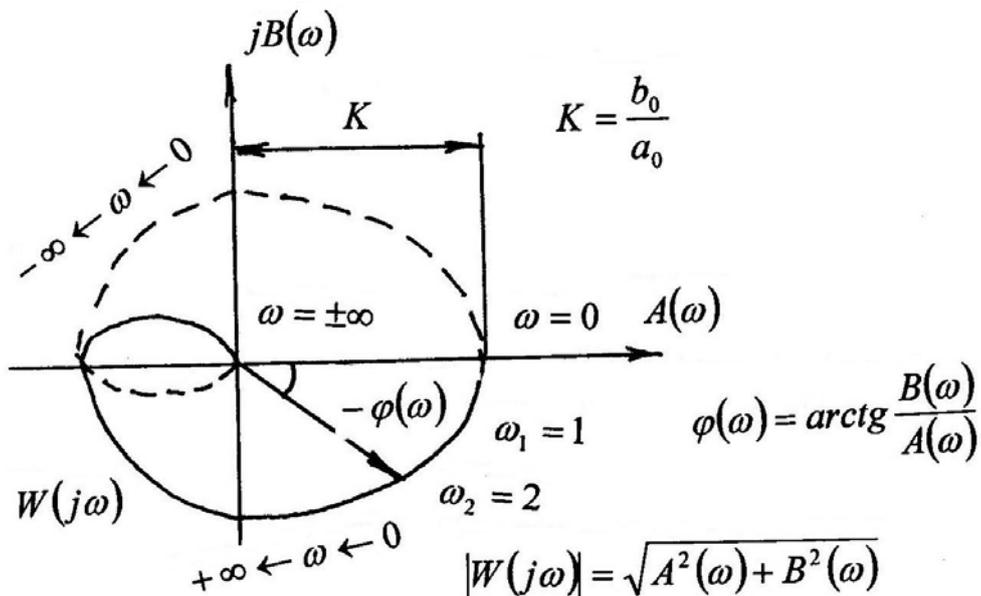


Рис. 3.12. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Построение АФЧХ по вещественной и мнимой частям частотной передаточной функции является трудоёмкой работой, так как умножение частотной передаточной функции на комплексную величину, сопряжённую со знаменателем, повышает в два раза степень частоты в знаменателе.

Вместо АФЧХ можно построить отдельно амплитудную частотную характеристику (АЧХ) и фазовую частотную характеристику (ФЧХ).

Амплитудная частотная характеристика показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты. Оценка пропуска делается по отношению амплитуд выходной и входной величин (рис. 3.13).

$$W(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}.$$

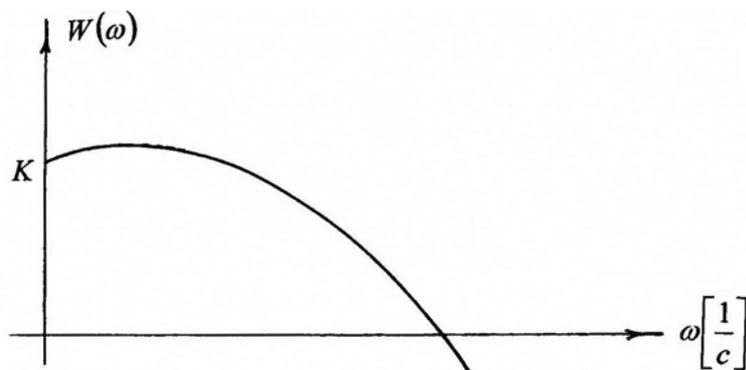


Рис. 3.13. Амплитудно-частотная характеристика

Фазовая частотная характеристика показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах (рис. 3.14).

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

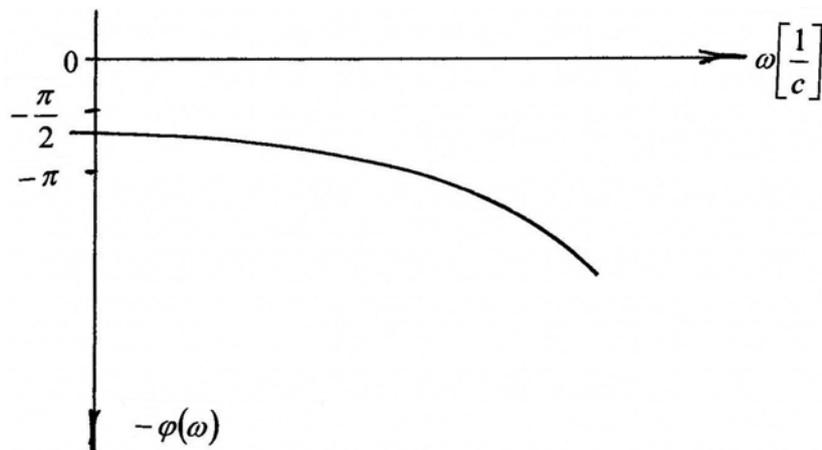


Рис. 3.14. Фазочастотная характеристика

При фиксированной амплитуде входного сигнала изменяем частоту входного сигнала, при этом будет меняться амплитуда выходного сигнала и фазовый сдвиг между выходным и входным гармоническими сигналами.

### 3.5. Логарифмические частотные характеристики

Удобной формой представления частотных характеристик являются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно логарифмическую амплитудную характеристику (ЛАХ) и логарифмическую фазовую характеристику (ЛФХ).

Задаём входной сигнал  $x = A_x \cdot e^{j\omega t}$ , на выходе ожидаем сигнал  $y = A_y \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

Частотная передаточная функция  $W(j\omega) = \frac{A_y}{A_x} \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{e^{j\omega t}}$ , где

$\frac{A_y}{A_x} = W(\omega) = |W(j\omega)|$ , тогда частотная передаточная функция приобретает вид  $W(j\omega) = W(\omega) \cdot e^{j\varphi}$ .

Логарифмируя левую и правую части уравнения АФЧХ, можно записать

$$\ln W(j\omega) = \ln W(\omega) + j\varphi(\omega).$$

←

Логарифмическая амплитудно-  
частотная характеристика

←

Логарифмическая фазочастотная  
характеристика

Для оценки отношения двух однородных величин принято использовать логарифмическую единицу децибел (дБ). Бел (по имени американского изобретателя А. Bell) представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности: 1 Бел соответствует увеличению мощности в 10 раз; 2 Бела – в 100 раз; 3 Бела – в 1000 раз.

Один децибел соответствует изменению амплитуды в  $\sqrt[20]{10}$  раз, т.е. представляет собой сравнительно малую величину.

Строго говоря, логарифмируя модуль частотной передаточной функции, приходим к тому, что ЛАХ может быть построена только для функций с безразмерной величиной, если размерность входной и вы-

ходной величин (перемещение и перемещение) одинаковая. Если размерность разная, то принимается за единицу (1 (кг·м)/град или 1 В/рад или 1 сек<sup>-1</sup>). Под значением  $L(\omega)$  понимается отношение модуля  $|W(j\omega)|$  к исходной единице.

Для построения ЛАХ находится величина  $L(\omega) = 20 \lg W(\omega)$ .

Один децибел соответствует изменению амплитуд

$$1 \text{ дБ} \bullet \text{---} \bullet \frac{A_y}{A_x} \cdot \sqrt[20]{10},$$

или  $1 \text{ дБ} = 20 \cdot \lg W(\omega)$ , где  $W(\omega) \cong 1,12 \text{ дБ}$ , тогда  $1 \text{ дБ} = 0,1 \text{ Бел}$ .

По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе, а по оси ординат откладываются значения амплитуд ЛАХ в децибелах в равномерном масштабе (рис. 3.15).

Ось  $L(\omega)$  может пересекать ось  $\omega$  (ось частот) в произвольном месте. Точка  $\omega = 0$  лежит на оси частот слева в бесконечности, так как  $\lg 0 = -\infty$ . Поэтому ось ординат проводят так, чтобы справа от неё можно было показать весь ход ЛАХ, т.е. левее самой малой сопряжённой частоты ЛАХ.

Прологарифмируем выражение  $W(j\omega) = W(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ .

$$\ln W(j\omega) = \ln W(\omega) + j\varphi(\omega).$$

Главное значение логарифма

Периодическую функцию мы не рассматриваем

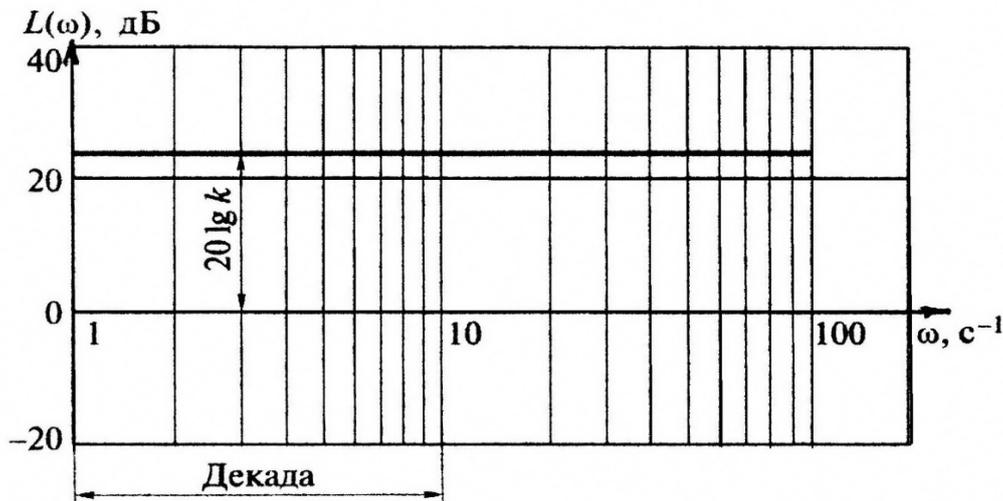


Рис. 3.15. Амплитудно-частотная характеристика пропорционального звена

Взамен  $\ln W(\omega)$  рассматривается функция  $L(\omega) = 20 \lg W(\omega)$ , которая показывает ЛАХ усилением или затуханием звена.

Иногда по оси частот указывается не сама частота, а её десятичный логарифм. Единица приращения логарифма соответствует одной декаде, т.е. удешатерению частоты.  $\lg \omega$  – одинаковые отрезки, соответствующие 10-кратному изменению  $\omega$

$$1 \text{ декада} = \lg 10\omega - \lg \omega = \lg \frac{10 \cdot \omega}{\omega} = \lg 10 = 1,$$

поэтому откладывают по оси абсцисс просто  $\omega$ .

Достоинством логарифмических амплитудно-частотных характеристик является возможность построения их практически без вычислений.

1. Строить АЧХ в логарифмических координатах понадобилось, потому что такой график позволяет строить величины в большом диапазоне при компактном изображении.

2. В логарифмических координатах удобно производить умножение АЧХ  $W(\omega) = W_1(\omega) \cdot W_2(\omega) \cdot W_3(\omega)$ , т.е. складывать фазочастотные характеристики  $L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$ , например, три последовательно соединенных звена (рис. 3.16).

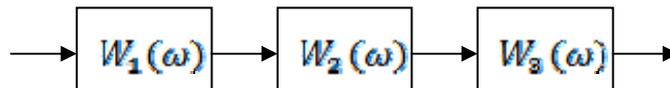


Рис. 3.16. Структурная схема последовательно соединенных звеньев

3. Логарифмические АЧХ могут быть аппроксимированы в виде отрезков прямых линий по участкам.

Частотой среза называется частота, при которой ЛАХ пересекает ось  $\omega$ , т.е.  $L(\omega) = 0$  при  $A(\omega) = 1$ .

При построении логарифмической фазовой характеристики (ЛФХ) по оси ординат откладываются значения углов в градусах или в радианах в равномерном масштабе.

### **Контрольные вопросы по разделу 3**

1. Какие существуют типовые возмущающие воздействия?
2. Какие характеристики называют частотными?
3. Как построить амплитудно-фазовую частотную характеристику?
4. Как построить амплитудно-частотную характеристику?
5. Как построить фазочастотную характеристику?
6. Для чего при построении логарифмических характеристик ось абсцисс откладывают в декадах?
7. Где проходит частота среза?

## Раздел 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под динамическим звеном понимают устройство любого физического вида и конструктивного оформления, но описываемое определённым дифференциальным уравнением.

Под типовым звеном понимается такое звено, которое описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Классификация звеньев производится по виду дифференциального уравнения или по виду передаточной функции.

Одним и тем же уравнением может быть описана любая система, будь то механическая, гидравлическая или электрическая. Для УТС – это один и тот же тип звена.

### 4.1. Пропорциональное звено (безынерционное, усилительное)

Типовым уравнением взаимосвязи выходного и входного сигналов (рис. 4.1) звена является уравнение  $Y = KX$ , которое передает сигналы от входа к выходу без сдвига по фазе.

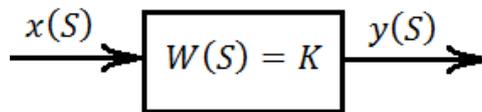


Рис. 4.1. Структурная схема типового звена

Временная характеристика: если на вход подаём ступенчатое воздействие при  $x(t) = 1(t)$ , то на выходе ожидаем  $y = K \cdot x$  (рис. 4.2), т.е.  $y(t) = K \cdot 1(t)$ .

Передаточная функция звена  $W(S) = \frac{y(S)}{x(S)} = K$ ; частотная пере-

даточная функция имеет вид  $W(j\omega) = K + j \cdot 0$ , где  $A(\omega) = K$  и  $B(\omega) = 0$ . Поскольку АФЧХ пропорционального звена не зависит от изменения частоты  $\omega$ , годограф вектора АФЧХ этого звена превращается в точку, находящуюся на действительной положительной полуоси комплексной плоскости на расстоянии  $K$  от начала координат (рис. 4.3).

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) строится по выражению  $W(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \sqrt{K^2 + 0} = K$ . Это прямая, параллель-

ная оси  $\omega$ , поднятая на расстояние  $K$ , показана на рис. 4.4. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) проходит по оси  $\omega$ , поскольку фазовые сдвиги отсутствуют при любой частоте (рис. 4.4).

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{0}{K} = 0.$$

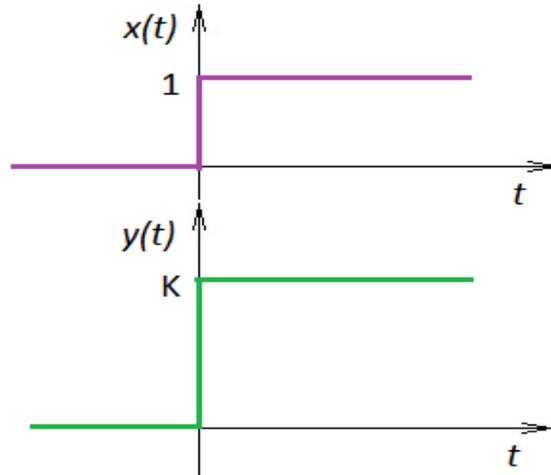


Рис. 4.2. Временные характеристики пропорционального звена

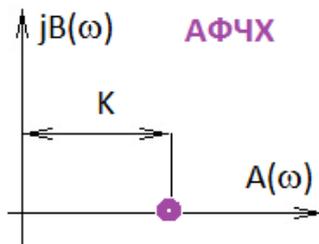


Рис. 4.3. Амплитудно-фазочастотная характеристика пропорционального звена

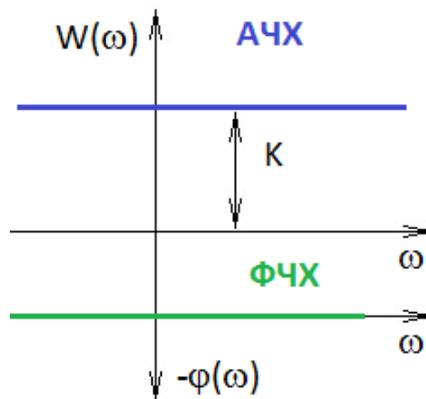


Рис. 4.4. АЧХ и ФЧХ пропорционального звена

Логарифмируя АФЧХ этого звена, получим

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg W(\omega) = 20 \cdot \lg \sqrt{K^2} = 20 \cdot \lg K.$$

Так как  $K$  от частоты не зависит, ЛАХ пропорционального звена представляет прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 4.5).

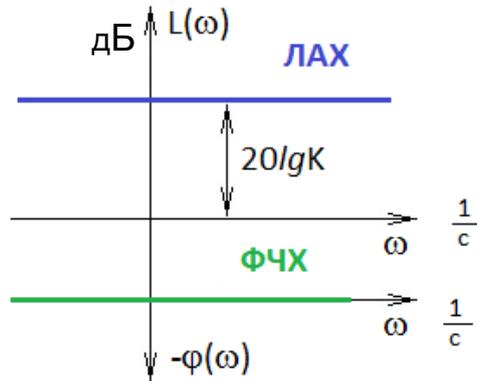


Рис. 4.5. Логарифмические амплитудная и фазочастотная характеристики пропорционального звена

Примеры пропорционального звена: рычажные механизмы, дифференциальные зубчатые механизмы (редуктор), электрический потенциометр.

## 4.2. Интегрирующее (астатическое) звено

Типовое дифференциальное уравнение интегрирующего звена:

$$T \frac{dY}{dt} = X. \text{ Это уравнение можно решить в общем виде, т.е. взять ин-}$$

теграл левой и правой части уравнения  $\int T dY = \int X dt$  или  $TY = X$ .

Используя преобразования Лапласа, получаем передаточную функцию интегрирующего звена  $TSY(S) = X(S)$

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{TS}.$$

Частотная передаточная функция получается подстановкой  $S = j\omega$ , далее избавляемся от  $j$  в знаменателе

$$W(j\omega) = \frac{1 \cdot j}{T \cdot j\omega \cdot j} = \frac{j}{T(-1)\omega} = 0 - j \frac{1}{T\omega}, \text{ где } A(\omega) = 0 \text{ и } B(\omega) = -\frac{1}{T\omega}.$$

Конец вектора АФЧХ перемещается по отрицательной мнимой полуоси комплексной плоскости, которая является графиком АФЧХ для интегрирующего звена (рис. 4.6).

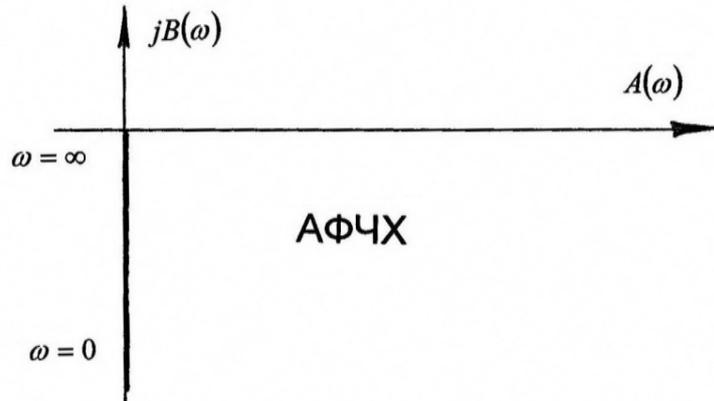


Рис. 4.6. Амплитудно-фазочастотная характеристика интегрирующего звена

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) строится по выражению

$$W(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \sqrt{\left(-\frac{1}{T\omega}\right)^2} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

При  $\omega = 1$   $W(\omega) = \frac{1}{T}$ . При  $\omega = 2$   $W(\omega) = \frac{1}{2T}$ ; характеристика показана на рис. 4.7.

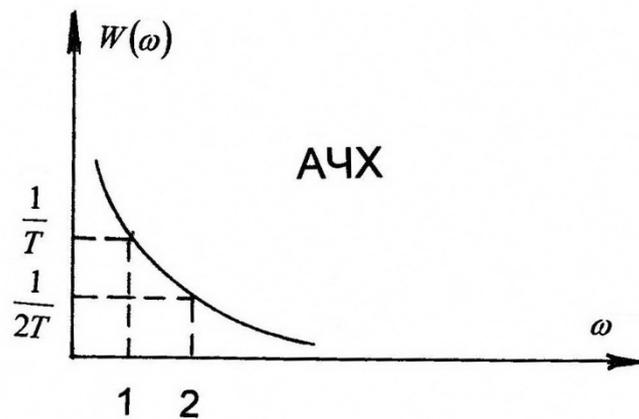


Рис. 4.7. Амплитудно-частотная характеристика интегрирующего звена

Фазочастотная характеристика строится по выражению  $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{-B(\omega)}{0} = -\frac{\pi}{2}$ , поскольку  $\operatorname{tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ . Это будет прямая, параллельная оси  $\omega$  (рис. 4.8).

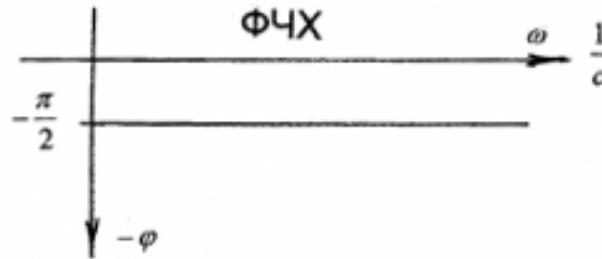


Рис. 4.8. Фазочастотная характеристика интегрирующего звена

Переходная функция интегрирующего звена находится непосредственным интегрированием уравнения, где производная постоянная равна «0», так как началом отсчёта принято её значение до ступенчатого единичного сигнала. Временные характеристики показаны на рис. 4.9.

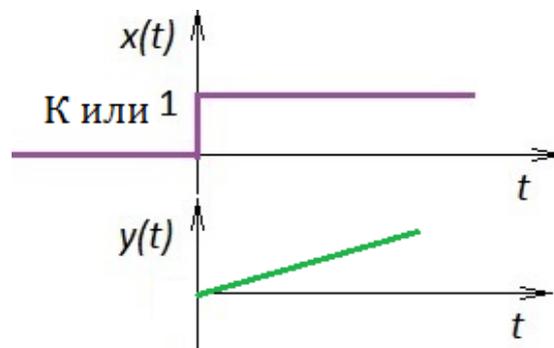


Рис. 4.9. Временные характеристики интегрирующего звена

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика интегрирующего звена строится по уравнению  $L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{1}{\omega} \right) = 20 \lg 1 - 20 \lg \omega$ , но  $20 \lg 1 = 0$ . Тогда  $L(\omega) = -20 \lg \omega$ .

Построим по точкам ЛАХ, задавая значения частоты:

- при  $\omega = 1$   $L(\omega) = -20 \lg 1 = 0$ ;
- при  $\omega = 10$   $L(\omega) = -20 \lg 10 = -20$ ;
- при  $\omega = 0,1$   $L(\omega) = -20 \lg 0,1 = 20$ .

Проводим прямую линию под наклоном  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$  (рис. 4.10).

Примеры интегрирующих звеньев:

1) операционный усилитель (рис. 4.11) в режиме интегрирования. Входной сигнал – напряжение  $X = U_1$ , выходной сигнал – тоже напряжение, равное  $Y = K \int U_1 dt = U_2$ ;

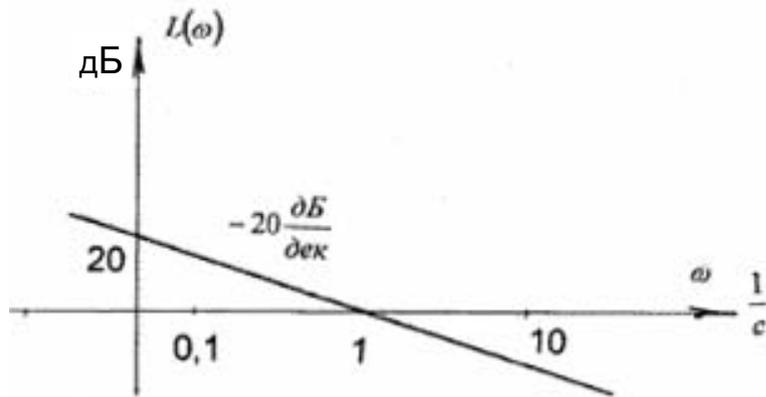


Рис. 4.10. Логарифмическая амплитудная характеристика интегрирующего звена

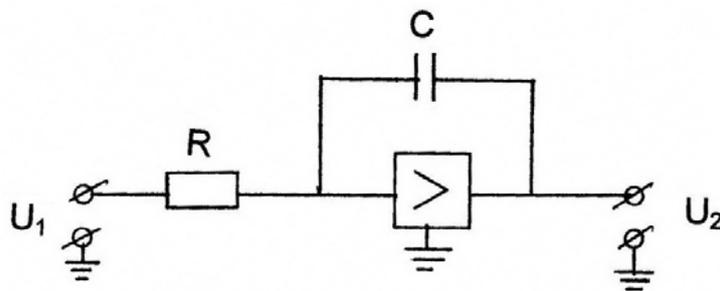


Рис. 4.11. Схема операционного усилителя

2) гидравлический демпфер (для сглаживания колебаний). Входное воздействие  $X$  – сила, действующая на поршень, выходное воздействие  $Y$  – перемещение поршня,  $T$  – коэффициент скоростного сопротивления.

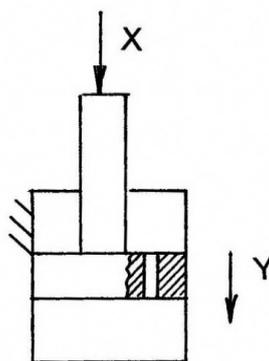


Рис. 4.12. Схема гидравлического демпфера

$$V = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{x}{T} \text{ – скорость перемещения поршня прямо пропорциональна силе, действующей на него, и обратно пропорциональна сопротивлению.}$$

циональна силе, действующей на него, и обратно пропорциональна сопротивлению.

$dy = \frac{1}{T} \cdot x \cdot dt$  – из предыдущего уравнения выразили  $dy$ .

$\int dy = \frac{1}{T} \int x \cdot dt$  – и, проинтегрировав, получим  $y = \frac{1}{T} \int x \cdot dt$ .

### 4.3. Дифференцирующее звено

Если задано дифференциальное уравнение в виде  $y = K \cdot \frac{dx}{dt}$ , уравнение в изображениях Лапласа будет иметь вид  $y(S) = K \cdot S \cdot x(S)$ ; передаточная функция  $W(S) = K \cdot S$ .

Временная характеристика при ступенчатом входном воздействии –  $x(t) = 1 \cdot (t)$ , выходной сигнал –  $y(t) = K \cdot \delta(t)$ , где  $\delta(t) = \frac{dx}{dt}$ . Переходная функция ступенчатого входного воздействия показана на рис. 4.13.

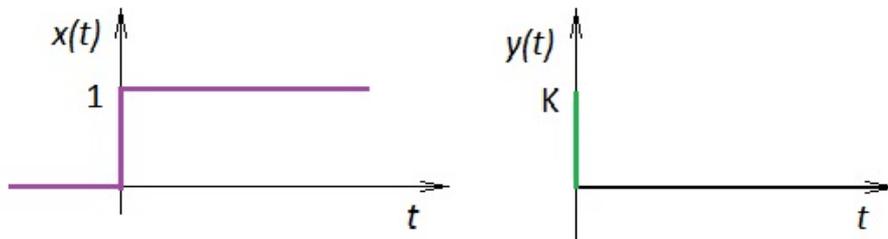


Рис. 4.13. Временные характеристики дифференцирующего звена

Частотная передаточная функция дифференцирующего звена

$$W(j\omega) = K \cdot j\omega,$$

которую при гармоническом входном воздействии разделяем на вещественную и мнимую части

$$W(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = 0 + j \cdot K\omega,$$

где  $A(\omega) = 0$ ,  $B(\omega) = K \cdot \omega$ . Амплитудно-фазовая частотная характеристика показана на рис. 4.14.

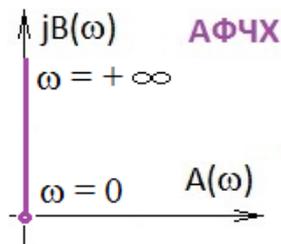


Рис. 4.14. График амплитудно-фазовой характеристики дифференцирующего звена

Амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего звена  $W(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \sqrt{K^2 \cdot \omega^2} = K \cdot \omega$  показана на рис. 4.15.

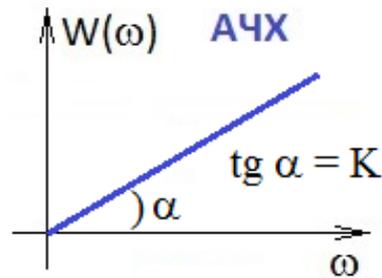


Рис. 4.15. График амплитудно-частотной характеристики дифференцирующего звена

Фазочастотная характеристика дифференцирующего звена описана уравнением  $\varphi(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \arctg \frac{K \cdot \omega}{0} = \arctg \infty = +\frac{\pi}{2}$  и показана на рис. 4.16.

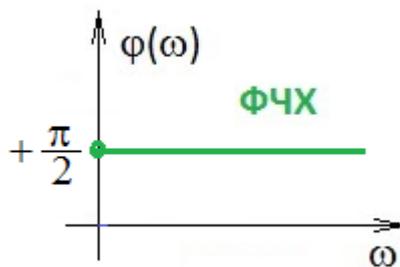


Рис. 4.16. Фазочастотная характеристика дифференцирующего звена

Логарифмическую амплитудно-частотную характеристику рассмотрим при  $K = 1$  и при  $K > 1$ .

Если  $K = 1$ , то  $W(S) = S$ ,  $W(\omega) = \omega$ ,  $L(\omega) = 20 \lg \omega$ .

При  $\omega = 1$   $L(\omega = 1) = 0$ ; при  $\omega = 10$   $L(\omega = 10) = 20$ .

Если  $K \neq 0$  и  $K \neq 1$ , то  $W(S) = KS$ ;  $W(\omega) = K\omega$ ,  $L(\omega) = 20 \cdot \lg K\omega = 20 \cdot \lg K + 20 \cdot \lg \omega$ , т.е.  $L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega)$ .

При  $\omega = 1$   $L(\omega) = 20 \lg 1 + 20 \lg K = 20 \lg K$ .

При  $\omega = 10$   $L(\omega) = 20 \lg 10 + 20 \lg K = 20 + 20 \lg K$ .

Логарифмические характеристики показаны на рис. 4.17.

Пример дифференцирующего звена – тахогенератор постоянного тока, в котором в качестве входного сигнала – угол поворота ротора

$\alpha$ , а выходного – ЭДС (электродвижущая сила) в якоре  $U$ . В тахогенераторе постоянного тока при неизменном потоке возбуждения ЭДС в якоре пропорциональна скорости вращения, а скорость вращения – это производная по времени от угла поворота (рис. 4.18).

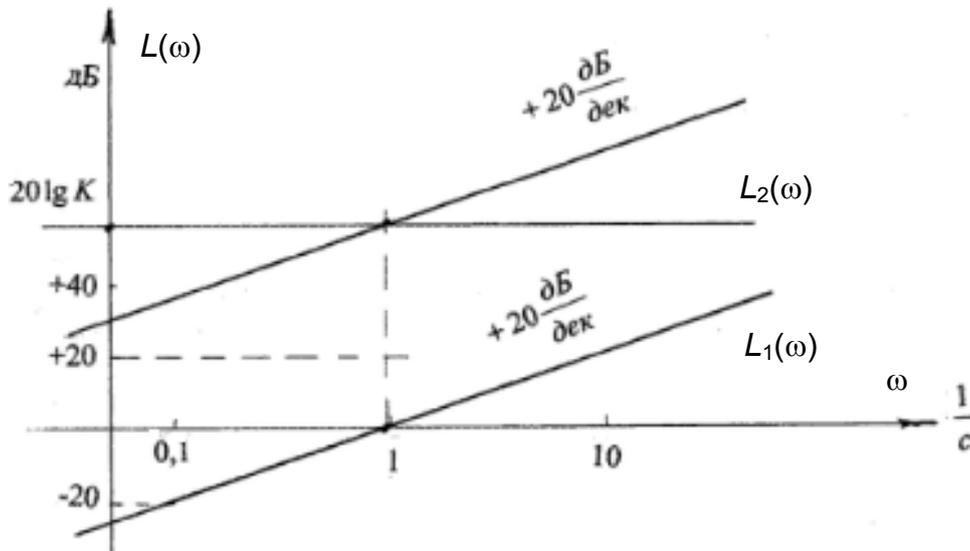


Рис. 4.17. Логарифмические характеристики дифференцирующего звена

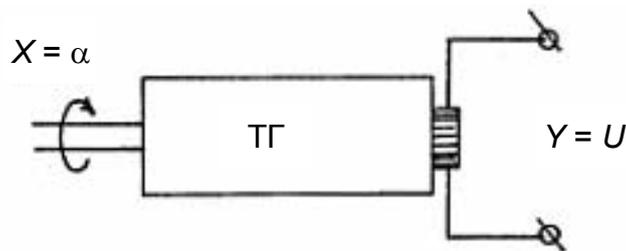


Рис. 4.18. Схема тахогенератора

Приблизённо в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться операционный усилитель в режиме дифференцирования (рис. 4.19).

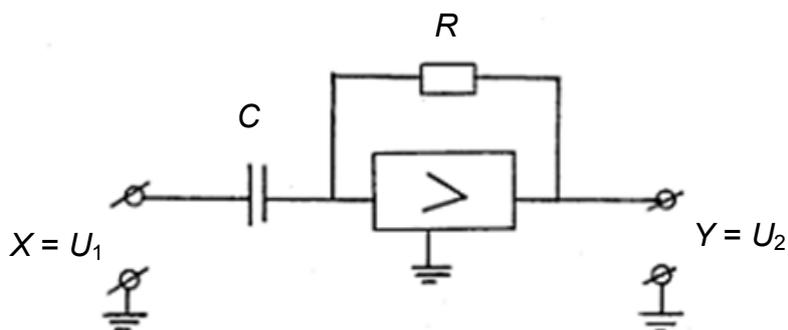


Рис. 4.19. Схема операционного усилителя

#### 4.4. Аperiodическое звено первого порядка

Аperiodическое звено первого порядка описывается дифференциальным уравнением  $T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x$ .

В изображениях по Лапласу звено имеет вид

$$(TS + 1) \cdot y(S) = K \cdot x(S).$$

Передаточная функция аperiodического звена  $W(S) = \frac{K}{TS + 1}$ .

Частотная передаточная функция аperiodического звена первого порядка представляет собой следующее выражение

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1} = \frac{K(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2},$$

где  $A(\omega) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2}$ ;  $B(\omega) = -\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}$ .

Модуль частотной передаточной функции является амплитудно-частотной характеристикой

$$W(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \frac{K \cdot \sqrt{1 - T^2\omega^2}}{1 + T^2\omega^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}.$$

Временные характеристики аperiodического звена первого порядка при ступенчатом входном воздействии показаны на рис. 4.20.

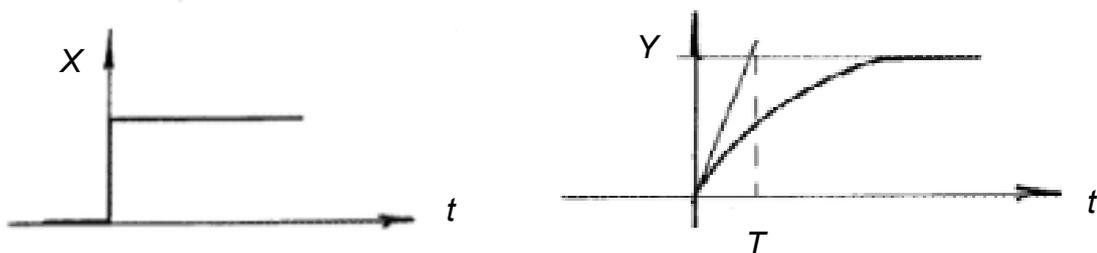


Рис. 4.20. Временные характеристики аperiodического звена первого порядка

Переходная функция представляет собой экспоненту. Отрезок, отсекаемый на асимптоте касательной, проведённой к экспоненте от начала координат, равен постоянной времени  $T$ . Чем больше постоянная времени звена, тем дольше длится переходный процесс, т.е. медленнее устанавливается значение  $y = K \cdot x$ . Экспонента приближается к значению « $y$ » в бесконечности. Практически переходный про-

цесс считается закончившимся через промежутки времени  $t_{\text{пер}} = 3T$ . Постоянная времени характеризует «инерционность», или «инерционное запаздывание», апериодического звена.

Частотные характеристики апериодического звена первого порядка показаны на рисунках АФЧХ (рис. 4.21), АЧХ и ФЧХ (рис. 4.22).

Вещественная часть передаточной функции  $A(\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2}$ .

Мнимая часть передаточной функции  $B(\omega) = -\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}$ .

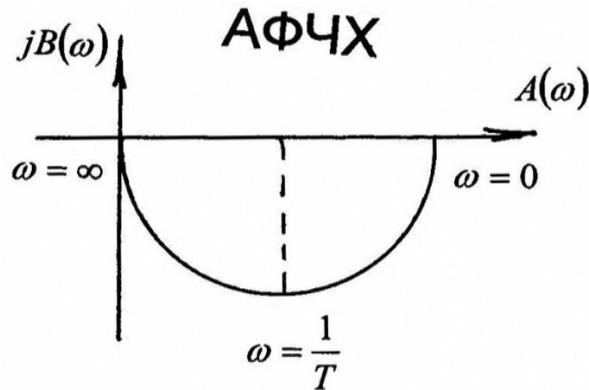


Рис. 4.21. Амплитудно-фазочастотная характеристика апериодического звена первого порядка

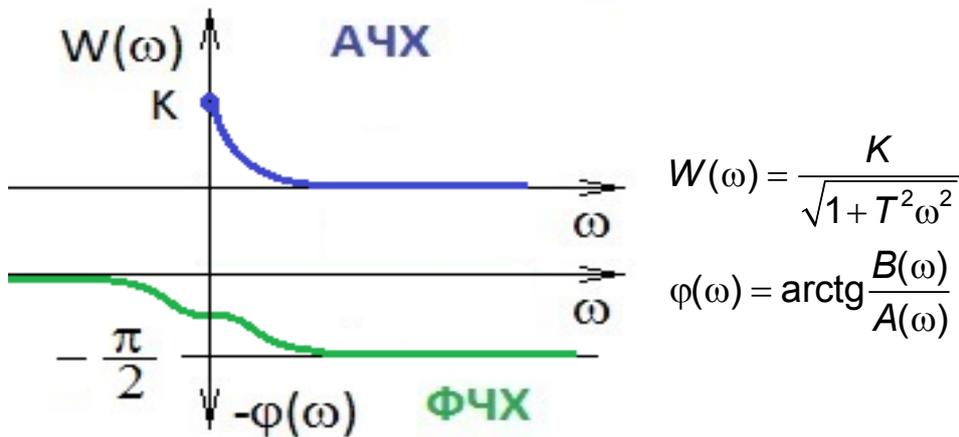


Рис. 4.22 Амплитудно-частотная и фазочастотные характеристики апериодического звена первого порядка

Фазочастотная характеристика с оси вдоль « $\omega$ » опускается до  $-\frac{\pi}{2}$ .

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{-KT\omega \cdot (1+T^2\omega^2)}{(1+T^2\omega^2) \cdot K} = -\text{arctg} T\omega.$$

### Построение логарифмической амплитудно-частотной характеристики

Для начала рассмотрим передаточную функцию  $W(\omega) = \frac{K}{TS+1}$ , тогда при  $K = 1$

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$

$$L(\omega) = 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2} = -20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

Если принять  $\omega = \frac{1}{T}$ , тогда  $\omega^2 = \frac{1}{T^2}$ ; подставив в предыдущее уравнение  $L(\omega)$ , получим

$$\begin{aligned} L(\omega) &= -20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2} = -20 \lg \sqrt{1+\frac{1}{T^2} \cdot T^2} = -20 \lg \sqrt{1+1} = \\ &= -20 \lg \sqrt{2} = -20 \lg 1,41. \end{aligned}$$

Если принять  $1,41 \approx 1$ , то  $L(\omega) = -20 \lg 1 = 0$ . При малых частотах  $\omega < \frac{1}{T}$  величина  $L(\omega)$  малая и ею пренебрегают. Если  $\omega \geq \frac{1}{T}$ , тогда пренебрегают 1 под корнем

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T^2\omega^2} = -20 \lg \omega T.$$

Логарифмическая характеристика апериодического звена первого порядка показана на рис. 4.23.

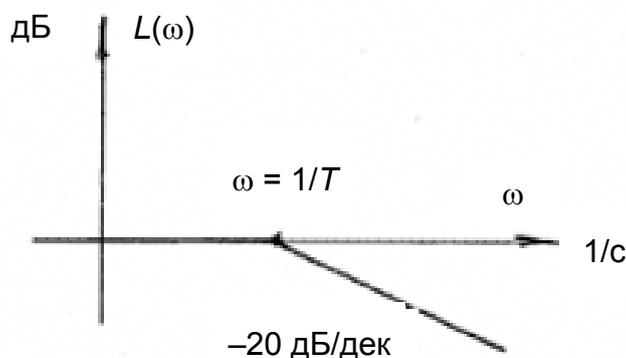


Рис. 4.23. Логарифмическая амплитудная характеристика апериодического звена первого порядка

При передаточной функции  $W(S) = \frac{K}{TS+1}$  получаем ЛАХ аналогично, только поднятой на величину  $20 \cdot \lg K$  (рис. 4.24).

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}.$$

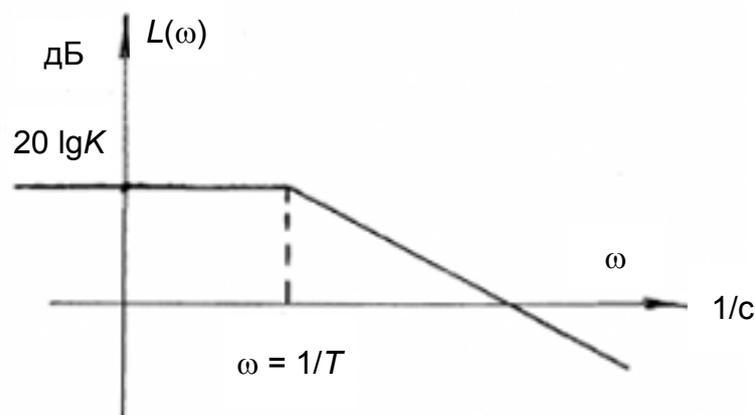


Рис. 4.24. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена с передаточной функцией  $W(S) = \frac{K}{TS+1}$

Примеры апериодического звена первого порядка

1. Двигатель любого типа – электрический, гидравлический, пневматический, механическая характеристика которого (зависимость вращающего момента  $M$  от скорости  $\Omega$ ) может быть представлена в виде параллельных прямых (рис. 4.25).

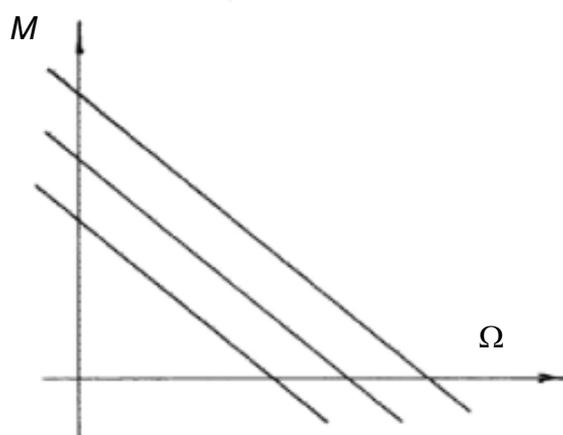


Рис. 4.25. Механическая характеристика двигателя

2. Входной величиной является управляющее воздействие в двигателе, где  $x$  – подводимое напряжение или расход жидкости в

гидродвигателе. Выходной величиной является скорость вращения или перемещения  $Y = \Omega$  (рис. 4.26).

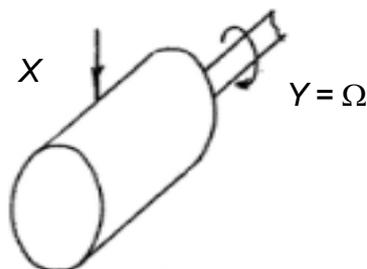


Рис. 4.26. Схема двигателя

3. Примером апериодического звена первого порядка может служить гидропривод, показанный на рис. 4.27.

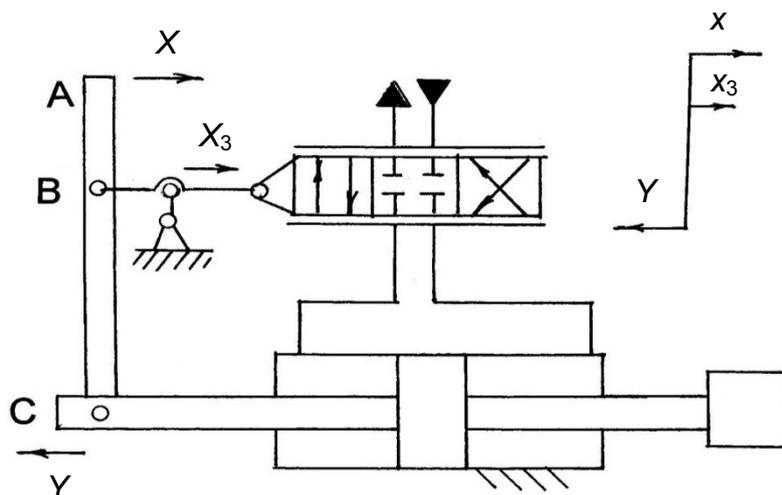


Рис. 4.27. Схема гидродвигателя с обратной связью по перемещению

Перемещение затвора распределителя  $x_3 = x - y$ , где  $X$  — входное воздействие — перемещение рычага у распределителя;  $y$  — выходной сигнал — перемещение поршня гидроцилиндра.

Расход по определению —  $Q = FV = F \frac{dy}{dt}$ , где  $F$  — площадь поршня,  $V$  — скорость перемещения поршня.

Уравнение расхода через дроссель  $Q = \mu \pi d_3 x_3 \sqrt{\frac{2}{\rho} P}$ , где  $\mu$  — коэффициент расхода,  $(\pi d_3 x_3)$  — площадь проходного сечения щели распределителя,  $\rho$  — плотность рабочей жидкости,  $P$  — перепад да-

ления на щели распределителя. Расход, протекающий через распределитель, равен расходу жидкости, поступающей к гидроцилиндру

$$F \frac{dy}{dt} = \mu \cdot \pi \cdot d_3 \cdot x_3 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot P}.$$

Или  $\frac{dy}{dt} = K \cdot x_3$ , где  $K = \frac{1}{F} \cdot \mu \cdot \pi \cdot d_3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot P}$ , откуда  $x_3 = \frac{1}{K} \cdot \frac{dy}{dt}$ , но

$x_3 = x - y$ ; после подстановки получаем  $x = \frac{1}{K} \frac{dy}{dt} + y$  или, обозначив

$T = \frac{1}{K}$ , имеем уравнение аperiodического звена первого порядка

$$T \frac{dy}{dt} + y = x.$$

#### 4.5. Форсирующее звено первого порядка

Форсирующее звено первого порядка описывается дифференциальным уравнением  $y = K \cdot \left( T \cdot \frac{dx}{dt} + x \right)$ .

Передаточная функция звена –  $W(S) = K(TS + 1)$ , частотная передаточная функция имеет вид  $W(j\omega) = KT\omega j + K$ , откуда  $A(\omega) = K$  и  $B(\omega) = KT\omega$ . При  $K = 1$   $W(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2}$  и  $\varphi(\omega) = \text{arctg}(T\omega)$ . Частотные характеристики показаны на рис. 4.28 и 4.29.

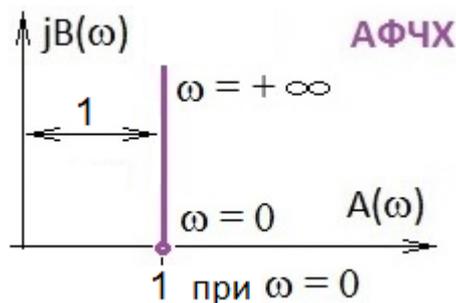


Рис. 4.28. Амплитудно-фазочастотная характеристика форсирующего звена

Переходную характеристику находят как сумму соответствующих функций дифференцирующего  $y(t) = KT \cdot \delta(t)$  и пропорционального  $y(t) = K \cdot 1(t)$  звеньев (рис. 4.30).

$$y(t) = K \cdot [T \cdot \delta(t) + 1(t)].$$

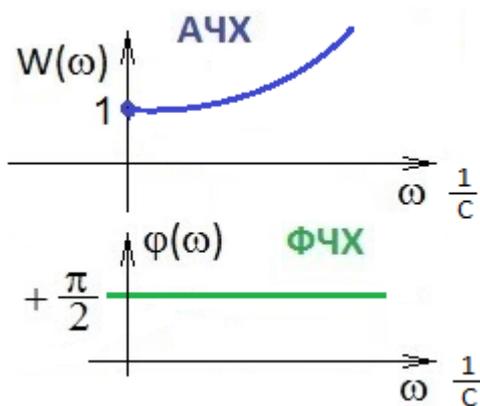


Рис. 4.29. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики форсирующего звена



Рис. 4.30. Переходная функция форсирующего звена

Если  $x(t) = 1(t)$ , тогда  $\frac{dx}{dt} = \frac{d \cdot 1(t)}{dt} = \delta(t)$ .

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика форсирующего звена показана на рис. 4.31.

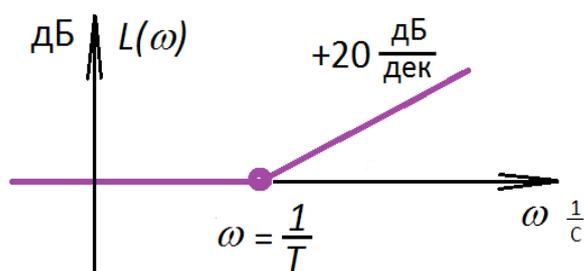


Рис. 4.31. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика форсирующего звена

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2},$$

при  $T\omega < 1$  пренебрегаем  $T^2\omega^2$  в виду малости, тогда  $L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1} = 20 \lg 1 = 0$ ; при  $T\omega > 1$  пренебрегаем 1 под корнем  $L(\omega) = 20 \cdot \lg T\omega$ .

#### 4.6. Звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение звеньев второго порядка имеет вид  $a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bx$ .

Примером звеньев второго порядка могут быть элементы, которые описываются уравнениями второго порядка, например жёсткость, упругость, сжимаемость, трение и т.д.

Апериодические звенья второго порядка подразделяются на колебательные звенья и звенья второго порядка.

Рассмотрим *апериодическое звено второго порядка*, для этого представим дифференциальное уравнение в виде

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \text{ где } T_2^2 = \frac{a_2}{a_0}, T_1 = \frac{a_1}{a_0}, K = \frac{b}{a_0}.$$

Передающая функция апериодического звена второго порядка

имеет вид  $W(S) = \frac{K}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1}$ .

Корни характеристического уравнения  $T_2^2 S^2 + T_1 S + 1 = 0$  должны быть вещественными, что выполняется при условии  $T_2^2 \geq 4T_1$ . Находим корни характеристического уравнения  $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ , тогда

полином знаменателя передающей функции апериодического звена второго порядка принимает вид

$$T_2^2 S^2 + T_1 S + 1 = (T_3 S + 1)(T_4 S + 1).$$

В изображениях Лапласа исходное дифференциальное уравнение апериодического звена второго порядка имеет вид

$$(T_3 S + 1)(T_4 S + 1)Y(S) = KX(S).$$

Передающая функция

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{K}{(T_3 S + 1)(T_4 S + 1)}.$$

В случае, когда характеристическое уравнение имеет вещественные корни, апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум апериодическим звеньям первого порядка, включённым после-

довательно друг за другом с общим коэффициентом передачи  $K$  и постоянными времени  $T_3$  и  $T_4$ .

В звене нет колебаний, переходный процесс апериодического звена второго порядка имеет вид, показанный на рис. 4.32.

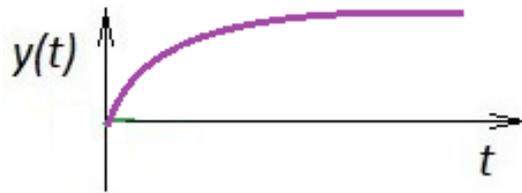


Рис. 4.32. График переходного процесса апериодического звена второго порядка

### **Колебательное звено**

Колебательное звено описывается тем же дифференциальным уравнением, но корни характеристического уравнения – комплексные, что выполняется при  $T_2^2 \leq 4T_1$ . Примером реализации колебательного звена может служить механическая система (подвес колесной пары вагона).

Передаточная функция приводится к виду

$$W(S) = \frac{K}{T_2^2 S^2 + 2T_2 \xi S + 1},$$

где  $\xi$  – коэффициент демпфирования  $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$ .

Переходная характеристика апериодического звена второго порядка при единичном ступенчатом воздействии  $x(t) = 1(t)$ . На выходе

ожидаем  $Y(t) = K \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega_c} \sin \omega t \right) \right]$ , где  $\alpha$  – коэффициент

затухания. Рассмотрим некоторые случаи переходного процесса в зависимости от значения коэффициента демпфирования.

При  $\xi = 1$  или  $\xi = \frac{T_1}{2T_2} = 1$   $\omega_c = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$  – собственная частота

свободных колебаний (при отсутствии затухания). График переходного процесса показан на рис. 4.33.

$$h(t) = K[1 - e^{-\alpha t}].$$

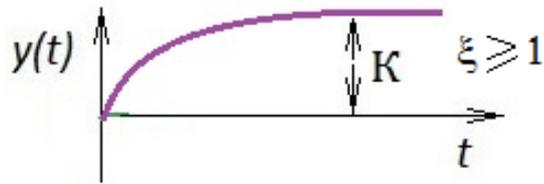


Рис. 4.33. График переходного процесса при  $\xi \geq 1$

При  $\xi = 0$ , когда нет демпфирования,  $\omega_c = \frac{1}{T}$ ,  $Y(t) = K[1 - e^{-\alpha T}]$ , система выходит на незатухающие колебания с частотой  $\omega = \frac{1}{T}$  (рис. 4.34).

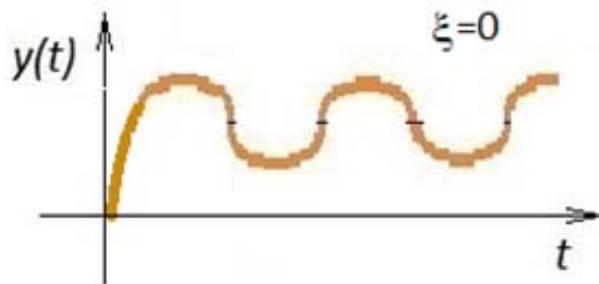


Рис. 4.34. График переходного процесса при  $\xi = 0$

При  $\xi < 1$  переходный процесс имеет затухающие колебания (рис. 4.35).

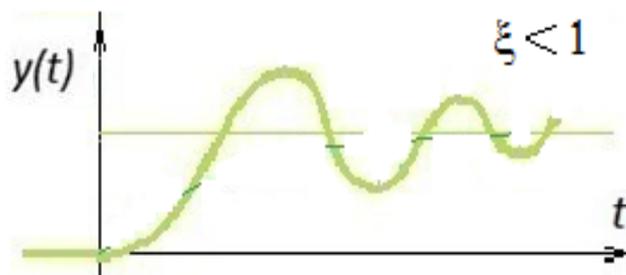


Рис. 4.35. График переходного процесса при  $\xi < 1$

### **Частотные характеристики апериодического звена**

Амплитудно-фазовая частотная характеристика показана на рис. 4.36.

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}$$

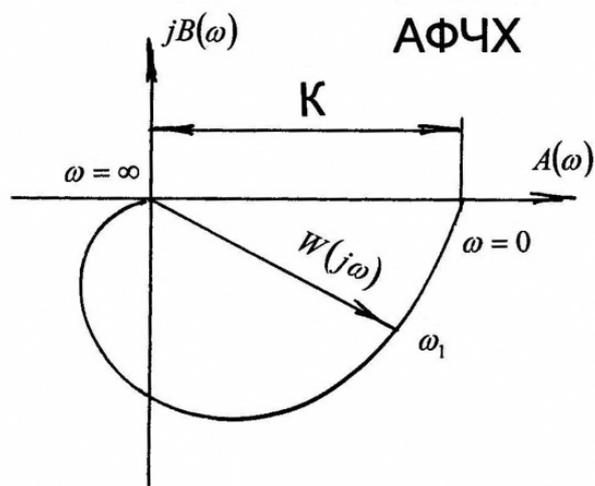


Рис. 4.36. Амплитудно-фазовая частотная характеристика аperiodического звена

Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена второго порядка показана на рис. 4.37.

$$W(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}.$$

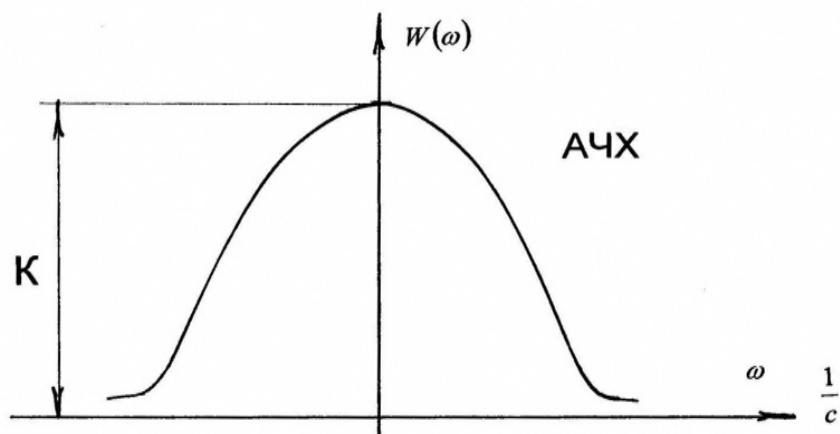


Рис. 4.37. Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена второго порядка

Фазочастотная характеристика аperiodического звена второго порядка показана на рис. 4.38.

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4.$$

Если звено колебательное, то амплитудно-частотная характеристика имеет вид, показанный на рис. 4.39, а фазочастотная характеристика – на рис. 4.40.

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 2T\xi\omega j + 1}, \quad W(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2}};$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2T^2}.$$

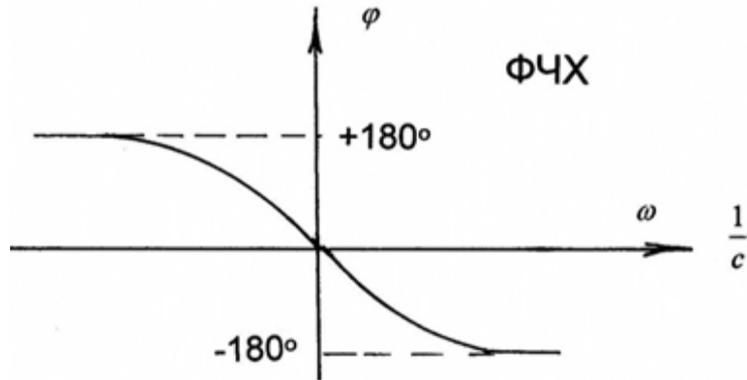


Рис. 4.38. График фазочастотной характеристики аperiodического звена второго порядка

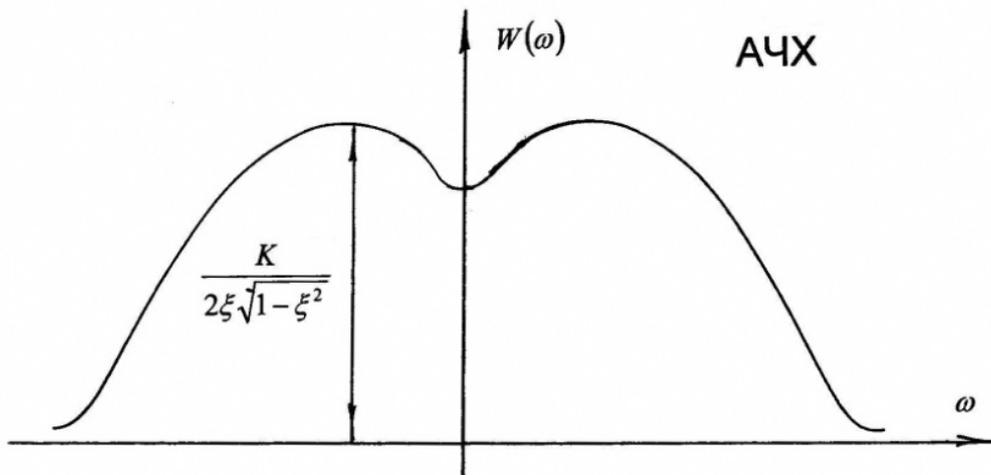


Рис. 4.39. График амплитудно-частотной характеристики колебательного звена

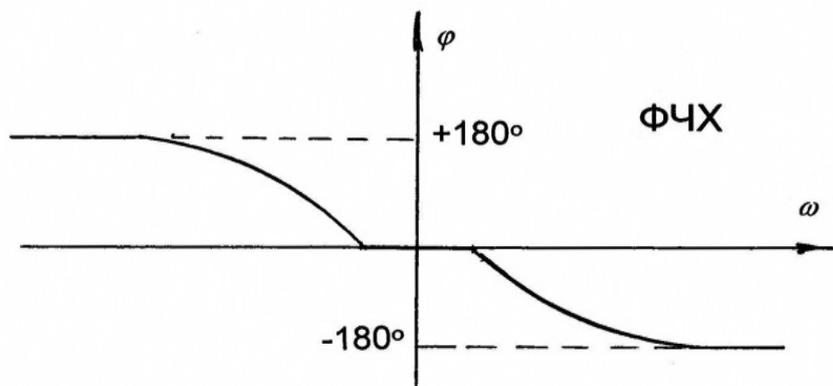


Рис. 4.40. График фазочастотной характеристики колебательного звена

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика колебательного звена строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}},$$

при этом рассматривается поведение звена до сопрягаемой частоты  $\omega = \frac{1}{T}$  и после неё (рис. 4.41).

При  $\omega \leq \frac{1}{T}$  в знаменателе под корнем получаем

$$\left(1 - \frac{T}{T}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{T^2}{T^2} = 4\xi^2,$$

тогда  $L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{4\xi^2}} = 20 \lg \frac{K}{2\xi} \approx 20 \lg K$ .

При  $\omega > \frac{1}{T}$  пренебрегаем 1 под корнем, получаем

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg (\omega T)^2.$$

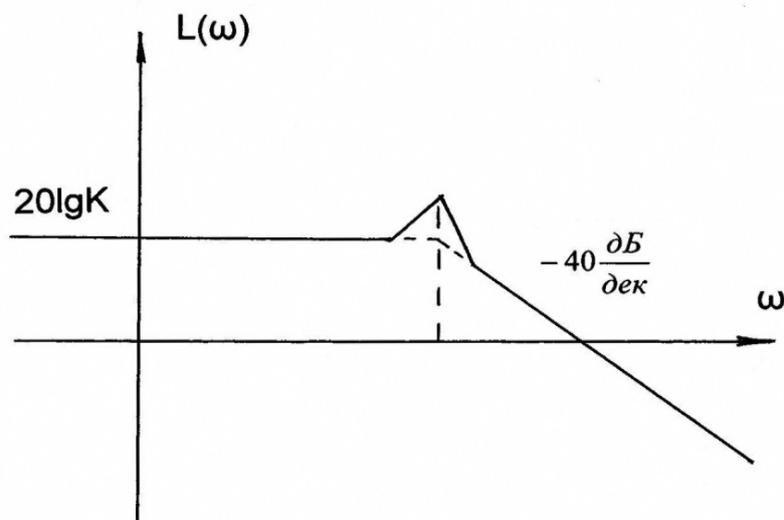


Рис. 4.41. График логарифмической амплитудно-частотной характеристики колебательного звена

#### Контрольные вопросы и задания по разделу 4

1. Что представляет собой АФЧХ и типовая переходная функция аperiodического звена?
2. Какие объекты можно представить в виде интегрирующего звена и какова передаточная функция интегрирующего звена?

3. Что представляют собой АФЧХ и типовая передаточная функция интегрирующего звена?
4. Приведите примеры реализации колебательного звена. Какова передаточная функция колебательного звена?
5. Что представляет собой АФЧХ колебательного звена?
6. Что представляют собой типовые переходные функции колебательного и апериодического звеньев 2-го порядка?
7. Приведите примеры реализации пропорционального звена. Какова АФЧХ и типовая переходная функция этого звена?
8. Приведите примеры идеального дифференцирующего звена. Какова его передаточная функция?
9. Что представляют собой логарифмические частотные характеристики динамических звеньев?
10. Поясните ЛАХ и ЛФХ безынерционного и апериодического звеньев.

## **Раздел 5. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

### **5.1. Построение структурных схем**

Системы автоматического регулирования в большинстве случаев являются сложными устройствами, динамика которых описывается совокупностью дифференциальных уравнений.

Задача анализа систем автоматического регулирования – определение зависимости между выходным параметром « $Y$ » и регулирующим (управляющим) параметром « $X$ ». Для этого необходимо решать систему уравнений, что достаточно сложно. В настоящее время имеются программы, позволяющие, не решая систему уравнений, по структурной схеме построить график переходного процесса.

Различают следующие схемы изображения:

- 1) *функциональные* – в условных обозначениях отображают связи между отдельными элементами (кинематические, электрические, гидравлические, электронные схемы);
- 2) *конструктивные* – чертежи с подробной проработкой устройств и геометрическими размерами (сборочные чертежи и детализировка);
- 3) *алгоритмические* – структурные схемы в теории управления.

Математические модели систем автоматического регулирования и управления для наглядности можно представить структурными схемами.

*Структурная схема* – графическое изображение математической модели, показывающая взаимодействие между отдельными элементами и направлениями потока энергии или информации.

В этих схемах динамические звенья изображают прямоугольниками (рис. 5.1), в поле которых записывают соответствующие передаточные функции. Связи между звеньями показывают стрелками. Операции сложения или вычитания величин выносят в узлы алгебраического суммирования (рис. 5.2).

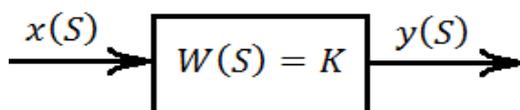


Рис. 5.1. Структурная схема звена

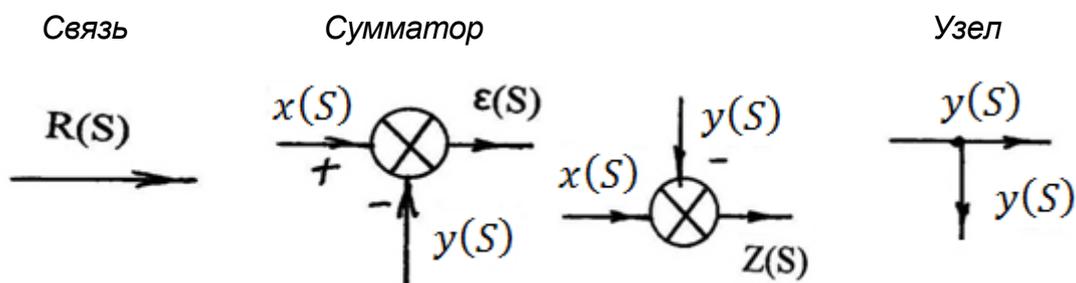


Рис. 5.2. Структурные схемы сумматора, узла связи

Структурная схема позволяет без решения дифференциальных уравнений, описывающих конкретную систему автоматического регулирования, определить передаточную функцию, связывающую все или несколько переменных.

В математической модели системы каждое уравнение записывается в форме преобразования Лапласа  $\frac{d}{dt} := S$ . Затем по уравнению в изображениях Лапласа строится структурная схема уравнения. Далее из фрагментов схем, составленных для каждого уравнения, составляется одна структурная схема (по типу домино). Сложная структурная схема свёртывается и преобразуется к одному квадрату (рис. 5.1). Преобразовав структурную схему, получают зависимость, связывающую входной и выходной сигналы.

Рассмотрим построение структурных схем на примере математического описания следящего гидропривода исполнительного механизма (гидроусилителя) (рис. 5.3, 5.4).

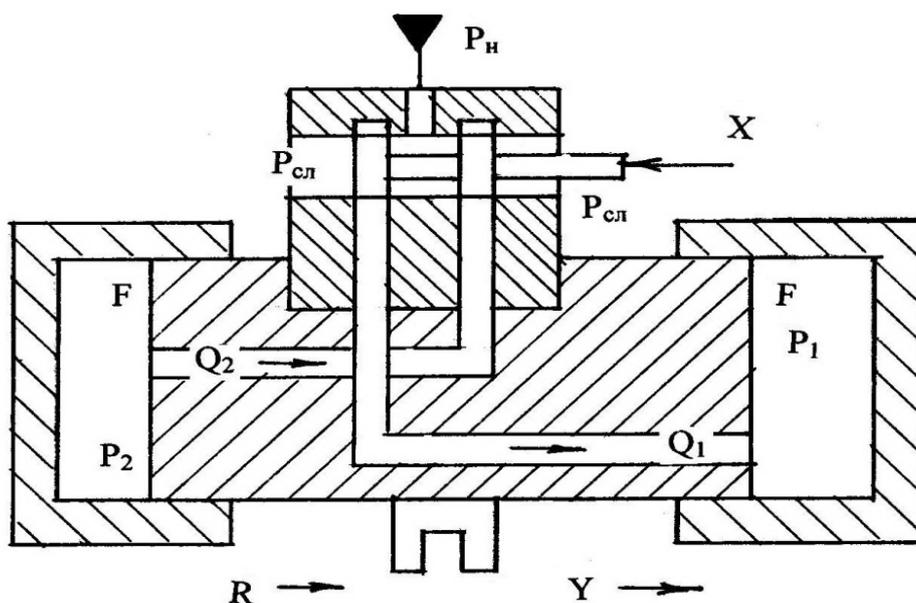


Рис. 5.3. Полукопструктивная схема гидроусилителя

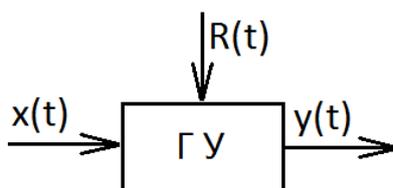


Рис. 5.4. Краткая структурная схема гидроусилителя

Данная система описывается следующей математической моделью: уравнение сил

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = F(P_1 - P_2) - R, \quad (5.1)$$

где  $Y$  – перемещение поршня,  $P_1$  и  $P_2$  – давление в полостях гидроцилиндра,  $R$  – возмущающее воздействие (внешняя нагрузка),  $m$  – масса перемещающихся деталей.

Уравнения расходов через дросселирующие щели

$$Q_1 = \mu \pi d \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{P_n - P_1} \quad \text{и} \quad Q_2 = \mu \pi d \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{P_2} \quad \text{при} \quad P_{\text{сл}} = 0.$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент расхода,  $d$  – диаметр затвора распределителя,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\varepsilon$  – ширина дросселирующей щели (ошибка отработки входного воздействия  $X$ ).

Из равенства расходов, проходящих через щели  $Q_1 = Q_2$ , получаем, что  $P_n - P_1 = P_2$  или  $P_1 = P_n - P_2$ . Подставив полученные значения давлений в уравнение сил (5.1), получаем

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = F(P_H - 2P_2) - R. \quad (5.2)$$

Расход, проходящий через дросселирующие щели равен расходу, поступающему к гидроцилиндру

$$F \frac{dY}{dt} = \mu \pi d \varepsilon \sqrt{P_2}. \quad (5.3)$$

Уравнение обратной связи

$$\varepsilon = X - Y, \quad (5.4)$$

где  $X$  – управляющее воздействие (перемещение затвора распределителя),  $\varepsilon$  – ошибка между управляющим воздействием и перемещением поршня (ширина щели между кромкой корпуса и кромкой затвора распределителя).

Данная математическая модель имеет нелинейность  $\varepsilon \sqrt{P_2}$ . Выбираем точку линеаризации. Пусть это будет  $\varepsilon_0$  – ширина дросселирующей щели, при которой гидроцилиндр стоит на месте и давление  $P_{2.0}$ . После линеаризации с помощью разложения в ряд Тейлора получаем

$$\varepsilon \sqrt{P_2} = \sqrt{P_{2.0}} \cdot \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{P_{2.0}}} \cdot P_2 - \frac{\varepsilon_0 \sqrt{P_{2.0}}}{2}. \quad (5.5)$$

После подстановки уравнения (5.5) в уравнение расходов (5.3) оно принимает вид

$$F \frac{dy}{dt} = G \cdot \pi \cdot d_{\text{зол}} \cdot \sqrt{P_{2.0}} \cdot \varepsilon + G \cdot \pi \cdot d_{\text{зол}} \cdot \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{P_{2.0}}} \cdot P_2 - G \cdot \pi \cdot d_{\text{зол}} \cdot \frac{\varepsilon_0 \sqrt{P_{2.0}}}{2},$$

или

$$F \frac{dy}{dt} = a \cdot \varepsilon + b \cdot P_2 - C, \quad (5.6)$$

где обозначили для краткости постоянные величины коэффициентами:

$$a = G \cdot \pi \cdot d_{\text{зол}} \cdot \sqrt{P_{2.0}}; \quad b = G \cdot \pi \cdot d_{\text{зол}} \cdot \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{P_{2.0}}}; \quad C = G \cdot \pi \cdot d_{\text{зол}} \cdot \frac{\varepsilon_0 \sqrt{P_{2.0}}}{2}.$$

Заменим дифференциальные уравнения алгебраическими, применяя преобразования по Лапласу, когда функция-оригинал заменяется на соответствующую ей функцию-изображение

$$f(t) \bullet \text{---} \bullet f(S)$$

Преобразуем по Лапласу изображение функции времени при нулевых начальных условиях.

Постоянные величины можно для краткости обозначить «K» с соответствующим индексом. И для каждого уравнения составим структурную схему.

Уравнение сил (5.2) в изображениях Лапласа имеет вид

$$m \cdot S^2 \cdot y(S) = FP_H - 2FP_2(S) - R(S),$$

откуда

$$y(S) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{S^2} \cdot [FP_H - 2FP_2(S) - R(S)]. \quad (5.7)$$

По данному уравнению строим структурную схему, показанную на рис. 5.5.

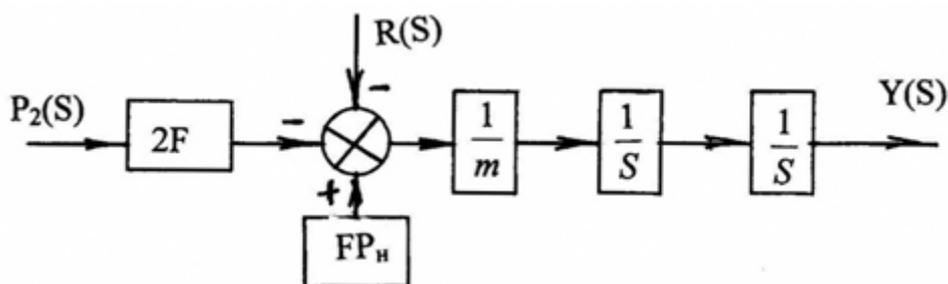


Рис. 5.5. Структурная схема уравнения (5.7)

Уравнение обратной связи (5.4) в изображениях Лапласа имеет вид  $\varepsilon(S) = X(S) - Y(S)$ , структурная схема этого уравнения показана на рис. 5.6.

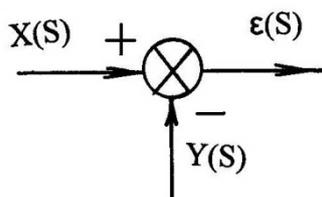


Рис. 5.6. Структурная схема уравнения (5.4)

Уравнение расходов (5.6) в изображениях Лапласа имеет вид  $FSY(S) = a\varepsilon(S) + bP_2(S) - C$ . Выделяем изображение давления  $P_2(S)$

$$P_2(S) = \frac{1}{b} [FSY(S) + C - a\varepsilon(S)].$$

Структурная схема уравнения имеет вид, показанный на рис. 5.7.

Составим общую структурную схему для всей системы в целом, используя структурные схемы каждого уравнения (рис. 5.8).

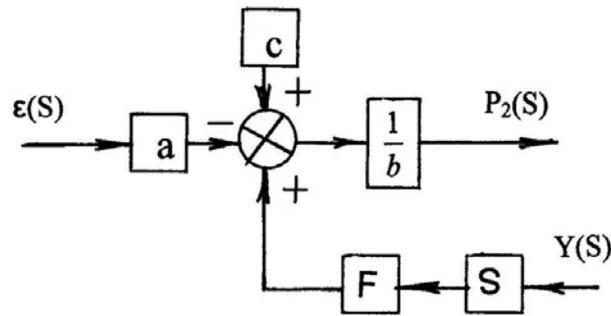


Рис. 5.7. Структурная схема уравнения (5.7)

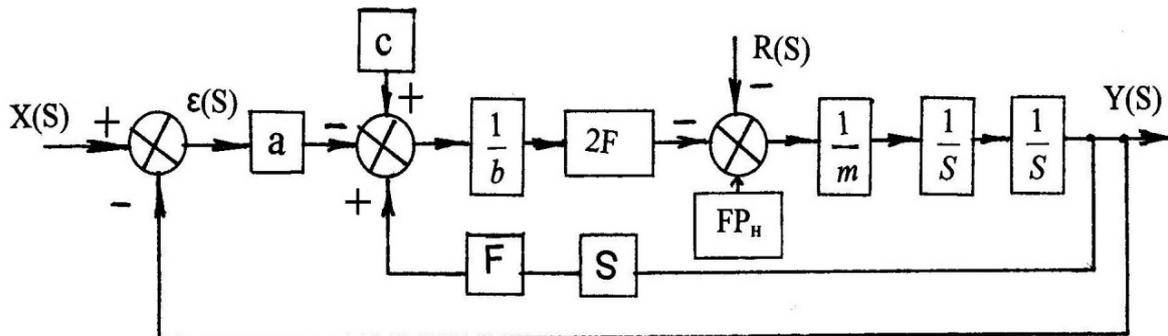


Рис. 5.8. Структурная схема всей системы гидроусилителя

Структурная схема нужна для диагностического анализа математической модели системы. Динамический анализ базируется на вычислении передаточных функций по входным воздействиям. В нашем случае два входных воздействия: это  $X(t)$  – управляющее воздействие (перемещение затвора распределителя) и  $R(t)$  – возмущающее воздействие (сопротивление колёс), значит, две передаточные функции и две структурные схемы.

Структурная схема системы по управляющему воздействию (при этом нагрузочное или возмущающее воздействие отсутствует, т.е.  $R(t) = 0$ ), показана на рис. 5.9.

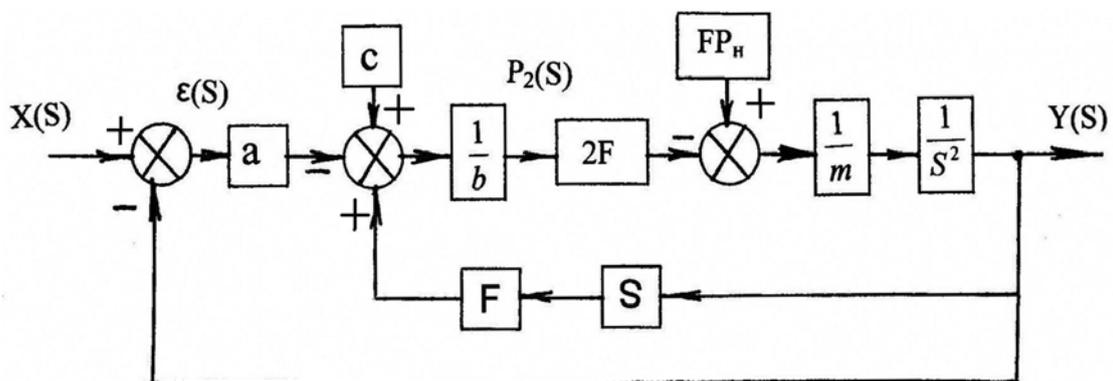


Рис. 5.9. Структурная схема по управляющему воздействию

Структурная схема по возмущающему воздействию (при этом нет управляющего воздействия, т.е.  $x(t) = 0$ ), показано на рис. 5.10.

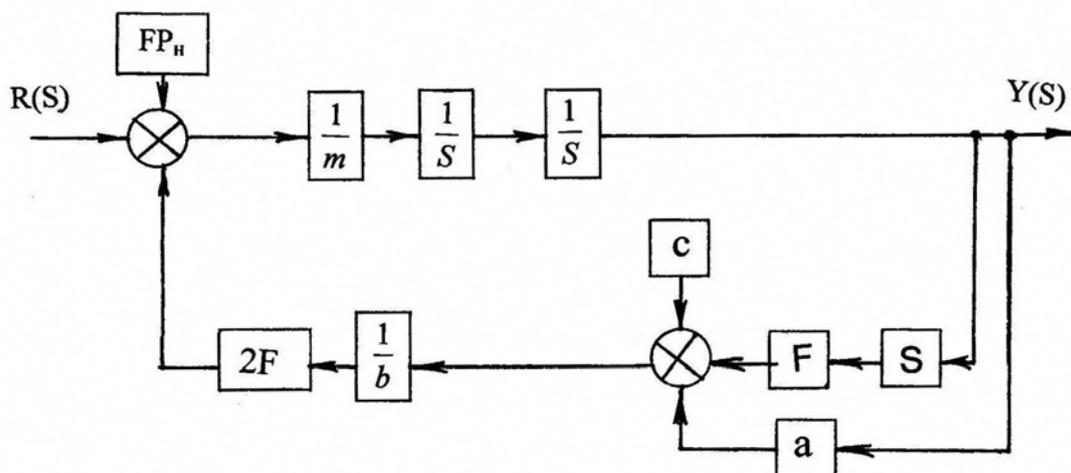


Рис. 5.10. Структурная схема по возмущающему воздействию

## 5.2. Преобразование структурных схем

Систему автоматического регулирования можно рассматривать как комбинацию динамических звеньев с определёнными типовыми передаточными функциями. Эти звенья могут сочетаться друг с другом различным образом. При исследованиях и расчётах систем может возникнуть необходимость в переходе от одной структурной схемы к другой.

Этот переход должен быть выполнен так, чтобы исходная и преобразованная структурные схемы оказались эквивалентными, т.е. одинаковым образом отражали динамические свойства системы.

Динамические звенья в структурных схемах соединяются последовательно, параллельно, с обратной связью.

**Передаточная функция** – это коэффициент передачи звена между выходной и входной величинами в изображениях по Лапласу

(рис. 5.11) 
$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$$

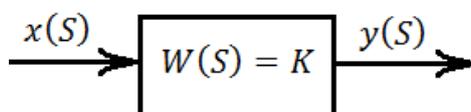


Рис. 5.11. Структурная схема с передаточной функцией

Структурную схему необходимо привести или к виду, показанному на рис. 5.11, или к контуру с обратной связью, при этом в обратной связи могут быть звенья со своими передаточными функциями, а также обратная связь может быть единичной (рис. 5.12).

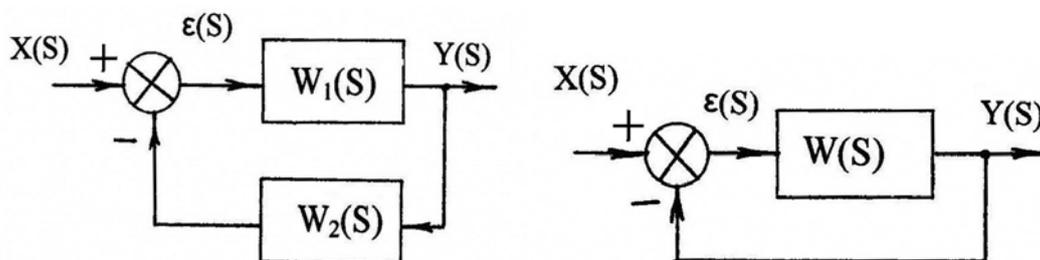


Рис. 5.12. Схемы контуров, охваченных обратной связью

Звенья в системе могут быть соединены последовательно (рис. 5.13).

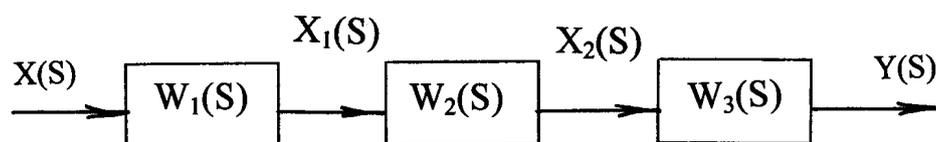


Рис. 5.13. Структурная схема с последовательно соединенными звеньями

Выведем формулу преобразования звеньев при последовательном соединении:

$$W_1(S) = \frac{X_1(S)}{X(S)}, \text{ откуда } X_1(S) = W_1(S) \cdot X(S);$$

$$W_2(S) = \frac{X_2(S)}{X_1(S)}, \text{ откуда } X_2(S) = W_2(S) \cdot X_1(S) = W_2(S) \cdot W_1(S) \cdot X(S);$$

$$W_3(S) = \frac{Y(S)}{X_2(S)}, \text{ откуда } Y(S) = W_3(S) \cdot X_2(S) = W_3(S) \cdot W_2(S) \cdot W_1(S) \cdot X(S).$$

Чтобы получить общую передаточную функцию системы, состоящей из нескольких последовательно соединенных звеньев, необходимо перемножить передаточные функции отдельных звеньев

$$W(S) = W_1(S) \cdot W_2(S) \cdot W_3(S).$$

**Параллельное соединение** звеньев (рис. 5.14). Для этого типового соединения принимается условие, по которому входной сигнал не уменьшается при разделении его на параллельные ветви, а выходной сигнал равен сумме выходных сигналов всех звеньев:

$$X_1(S) = W_1(S) \cdot X(S), \quad X_2(S) = W_2(S) \cdot X(S), \quad X_3(S) = W_3(S) \cdot X(S).$$

Тогда  $Y(S) = X_1(S) + X_2(S) + X_3(S) = [W_1(S) + W_2(S) + W_3(S)]X(S)$   
или передаточная функция цепи параллельных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев этой цепи, взятой со своими знаками  $W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = W_1(S) + W_2(S) + W_3(S)$ .

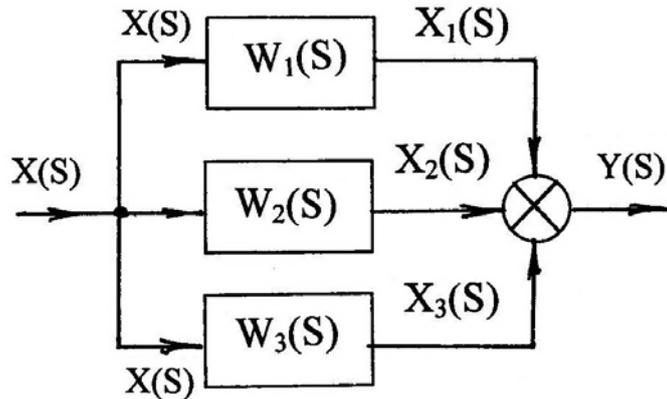


Рис. 5.14. Структурная схема параллельно соединенных звеньев

**Контур, охваченный обратной связью.** Обратная связь может быть отрицательной или положительной.

Передаточная функция обратной связи может быть:

$W_2(S) = K$  – жесткая;

$W_2(S) = 1$  – единичная;

$W_2(S) = \frac{M(S)}{D(S)}$  – гибкая обратная связь.

$\varepsilon(S) = x(S) - y(S)$  – ошибка регулирования должна стремиться к нулю.

Отрицательная обратная связь показана на рис. 5.15.

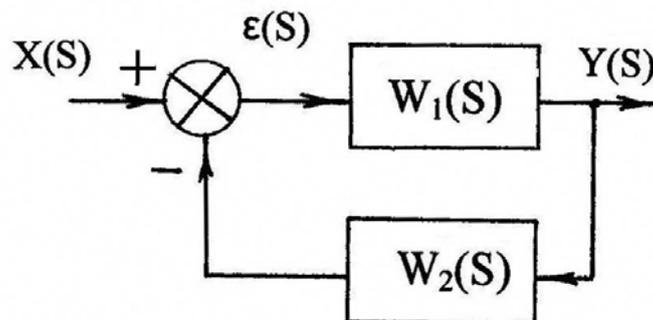


Рис. 5.15. Структурная схема с обратной связью

Сигнал, выходящий с сумматора, определяется как

$$\varepsilon(S) = X(S) - Y(S) = X(S) - W_2(S) \cdot Y(S),$$

с другой стороны,  $\varepsilon(S) = \frac{1}{W_1(S)} Y(S)$  или

$$X(S) - W_2(S) \cdot Y(S) = \frac{1}{W_1(S)} Y(S),$$

$$X(S) = \frac{1 + W_1(S)W_2(S)}{W_1(S)} Y(S).$$

Таким образом, передаточная функция цепи контура, охваченного отрицательной обратной связью, имеет вид

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}.$$

Используя предыдущие рассуждения, получаем передаточную функцию цепи контура, охваченного положительной обратной связью,

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_1(S)}{1 - W_1(S)W_2(S)}.$$

Если  $W_2(S) = 1$ , т.е. обратная связь единичная, как показано на рис. 5.16, формула упрощения принимает вид

$$W(S) = \frac{W_1(S)}{1 \pm W_1(S)}.$$

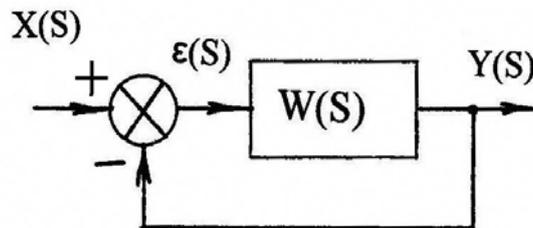


Рис. 5.16. Структурная схема с единичной обратной связью

### 5.3. Преобразование структурных связей

Преобразование структурных связей линейных систем делается на основе некоторых правил.

Перестановка звеньев показана на рис. 5.17. От перестановки звеньев произведение не меняется.

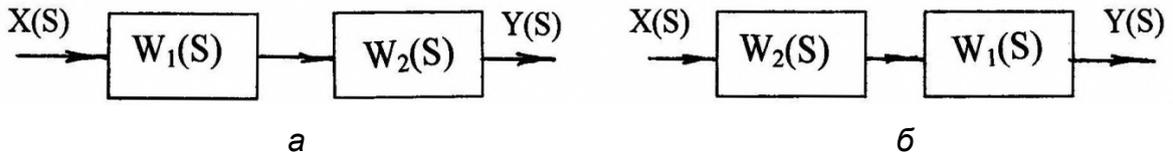


Рис. 5.17. Структурные схемы звеньев при перестановке местами:  
а – исходная схема; б – эквивалентная схема

#### 5.4. Преобразование структурной схемы с непересекающимися связями

Преобразование структурной схемы сложной системы автоматического управления с непересекающимися связями рассмотрим на примере (рис. 5.18, 5.19).

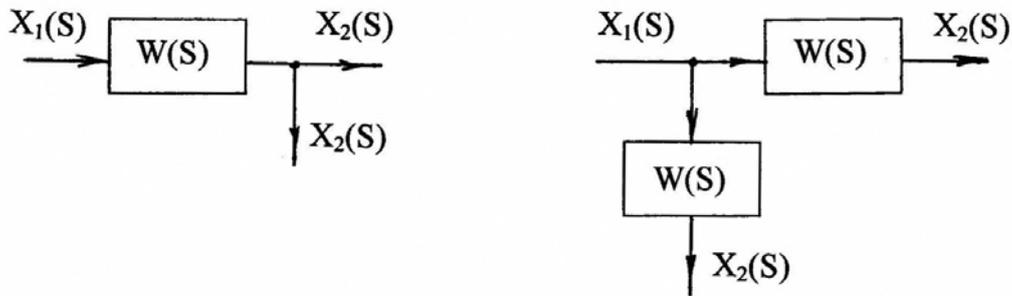


Рис. 5.18. Структурные схемы при переносе узла с выхода на вход

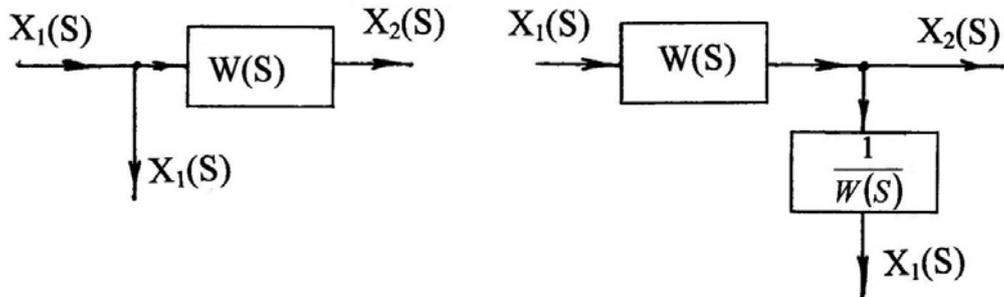


Рис. 5.19. Структурные схемы при переносе узла со входа на выход

Переход к единичной обратной связи показан на рис. 5.20.

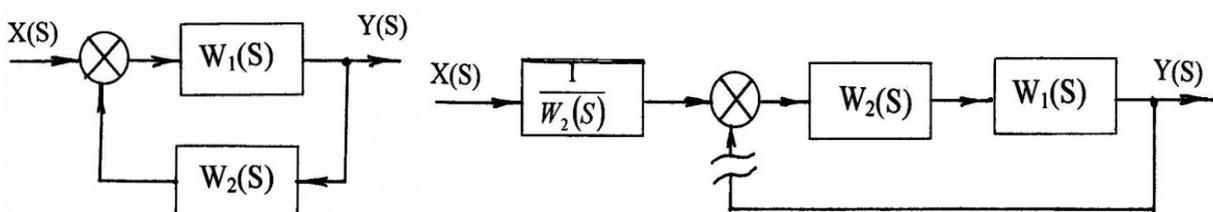


Рис. 5.20. Исходная и преобразованная структурные схемы

**Пример.** По заданной структурной схеме определить передаточную функцию системы (рис. 5.21).

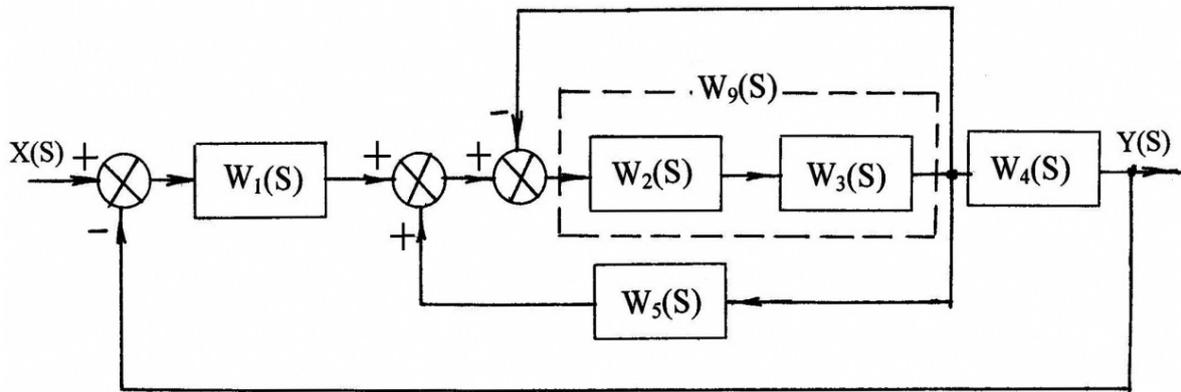


Рис. 5.21. Структурная схема системы с непересекающимися связями

**Решение:** объединим два последовательных звена

$$W_9(S) = W_2(S) \cdot W_3(S).$$

Упростим контур, охваченный отрицательной обратной связью (рис. 5.22).

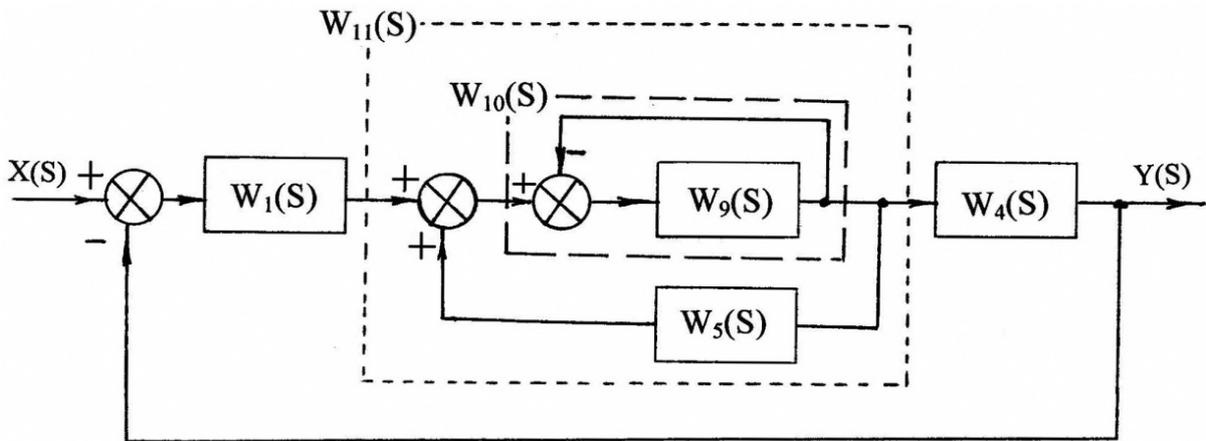


Рис. 5.22. Структурная схема с упрощенным звеном  $W_9(S)$

$$W_{10}(S) = \frac{W_9(S)}{1 + W_9(S) \cdot 1} = \frac{W_2(S) \cdot W_3(S)}{1 + W_2(S) \cdot W_3(S)}.$$

Упростим контур, охваченный положительной обратной связью (рис. 5.23).

$$W_{11}(S) = \frac{W_{10}(S)}{1 - W_{10}(S) \cdot W_5(S)}$$

$$\text{или } W_{11}(S) = \frac{W_2(S) \cdot W_3(S)}{1 + W_2(S) \cdot W_3(S) - W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot W_5(S)}.$$

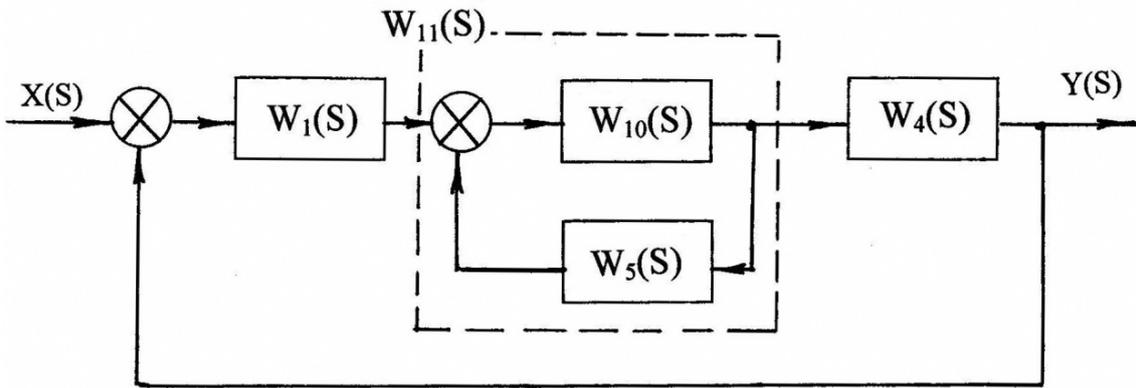


Рис. 5.23. Структурная схема с контуром, охваченным положительной обратной связью

Упростим последовательно соединенные звенья с передаточными функциями  $W_1(S)$ ,  $W_{11}(S)$ ,  $W_4(S)$  (рис. 5.24).

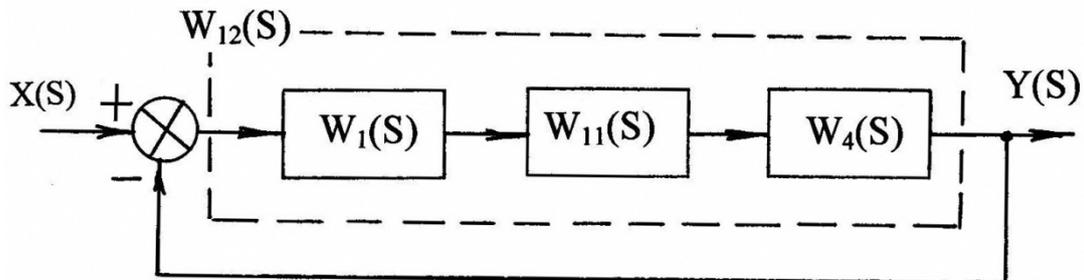


Рис. 5.24. Структурная схема с новыми звеньями

Получили контур, охваченный отрицательной обратной связью (рис. 5.25); свернем его в один квадрат и получим передаточную функцию системы:

$$W_{12}(S) = W_1(S) \cdot W_{11}(S) \cdot W_4(S)$$

$$\text{или } W_{12}(S) = \frac{W_1(S) \cdot W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot W_4(S)}{1 + W_2(S) \cdot W_3(S) - W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot W_5(S)}$$

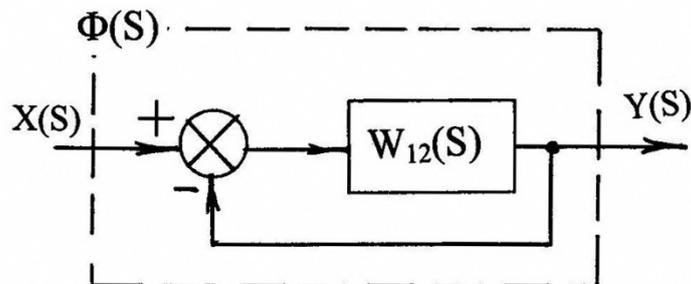


Рис. 5.25. Структурная схема, приведенная к одному звену

$$\Phi(S) = \frac{W_{12}(S)}{1 + W_{12}(S) \cdot 1},$$

$$\Phi(S) = \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{\{1 + W_2 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_3 \cdot W_5\} \cdot \left[ 1 + \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{1 + W_2 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_3 \cdot W_5} \right]},$$

$$\Phi(S) = \frac{W_1(S) \cdot W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot W_4(S)}{1 + W_2(S) \cdot W_3(S) - W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot W_5(S) + W_1(S) \cdot W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot W_4(S)}.$$

Получили передаточную функцию системы путем преобразования структурной схемы без решения системы дифференциальных уравнений.

### 5.5. Преобразование структурных схем с пересекающимися связями

В сложных ветвистых структурных схемах связи могут пересекаться, что усложняет их преобразование. Рекомендуется, прежде чем начать преобразования, развязать схему, т.е. ликвидировать пересечение связей. При развязке схем связи лучше переносить через динамические звенья, не трогая сумматоров (будет меньше ошибок). Рассмотрим преобразование структурной схемы с пересекающимися связями на примере.

**Пример.** По заданной структурной схеме (рис. 5.26) определить передаточную функцию системы.

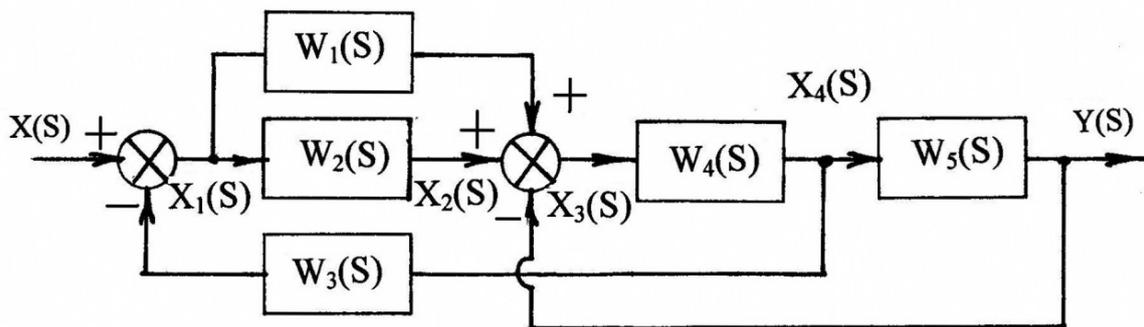


Рис. 5.26. Структурная схема системы с пересекающимися связями

Вначале упростим схему без потери сигналов. Параллельные звенья  $W_1(S)$  и  $W_2(S)$  свернем в одно звено  $W_{10}(S)$ , получим  $W_{10}(S) = W_1(S) + W_2(S)$ . На новой структурной схеме (рис. 5.27) хорошо видно пересечение сигналов  $Y(S)$  и  $X_4(S)$ .

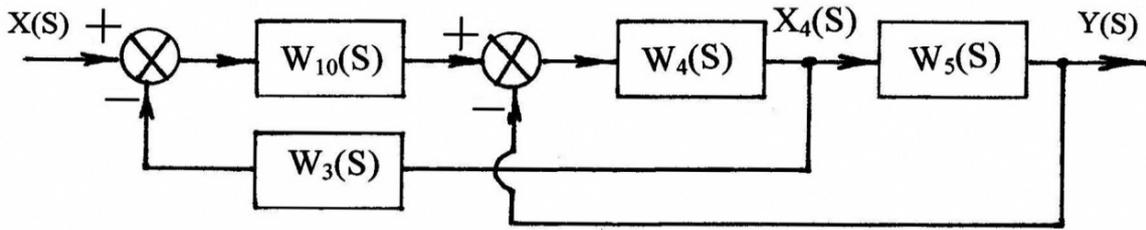


Рис. 5.27. Структурная схема системы с одним пересечением сигналов

Развязку можно сделать двумя путями. Либо взять в место изображения сигнала  $X_4(S)$  изображение сигнала  $Y(S)$  и направить его к динамическому звену с передаточной функцией  $W_3(S)$ . Но в этом случае на звено  $W_3(S)$  должен придти сигнал  $X_4(S)$ , который получится, если предварительно сигнал  $Y(S)$  пройдет звено с передаточной функцией  $\frac{1}{W_5(S)}$ . Такая схема показана на рис. 5.28. Либо вместо

изображения сигнала  $Y(S)$  взять изображение сигнала  $X_4(S)$ . Тогда сигнал  $X_4(S)$  необходимо предварительно умножить на  $W_5(S)$ , как показано на рис. 5.29. Оба варианта равнозначны.

Докажем, что схемы равнозначны, получив передаточные функции всей системы.

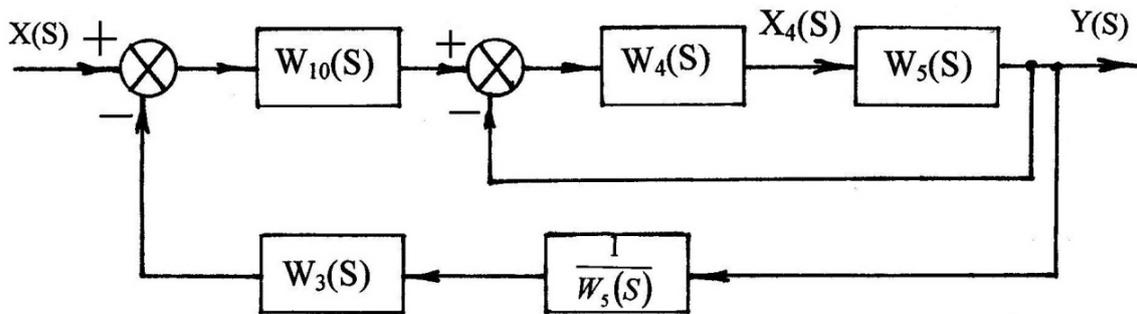


Рис. 5.28. Структурная схема развязана по сигналу  $Y(S)$

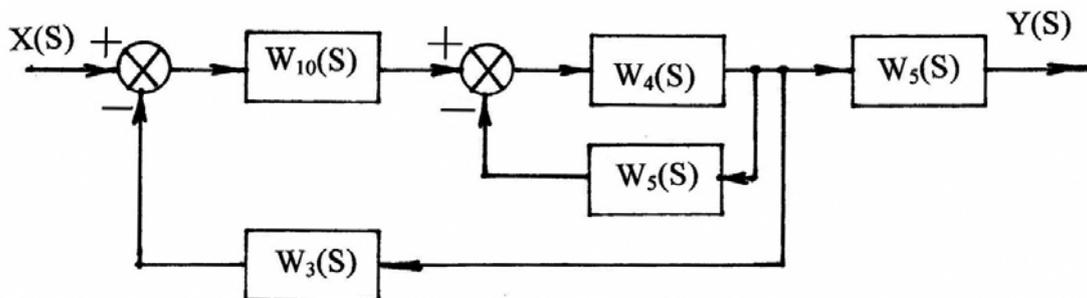


Рис. 5.29. Структурная схема развязана по сигналу  $X_4(S)$

Упрощаем схему, показанную на рис. 5.28. Для этого объединим звенья  $W_4(S)$  и  $W_5(S)$ , получив  $W_{11}(S)$ , где  $W_{11}(S) = W_4(S) \cdot W_5(S)$ . И объединив звенья в цепи обратной связи  $\frac{W_3(S)}{W_5(S)}$ , получаем структурную схему, показанную на рис. 5.30.

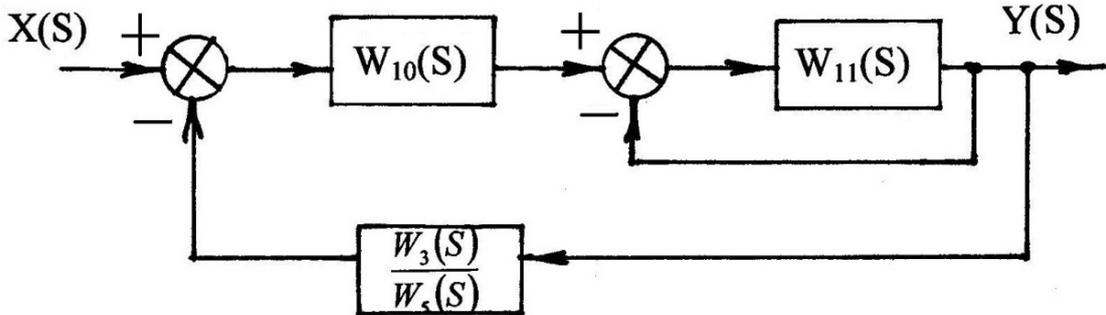


Рис. 5.30. Структурная схема после упрощения последовательных звеньев

Теперь можно упростить контур, охваченный отрицательной единичной обратной связью, получив звено  $W_{12}(S)$ , где

$$W_{12}(S) = \frac{W_{11}(S)}{1 + W_{11}(S)} = \frac{W_4(S) \cdot W_5(S)}{1 + W_4(S) \cdot W_5(S)}.$$

Получили два последовательно соединённых звена  $W_{10}(S)$  и  $W_{12}(S)$ , которые заменяем одним звеном  $W_{13}(S)$ , где

$$W_{13}(S) = W_{10}(S) \cdot W_{12}(S) = \frac{[W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_4(S) \cdot W_5(S)}{1 + W(S) \cdot W_5(S)}.$$

Преобразованная структурная схема показана на рис. 5.31.

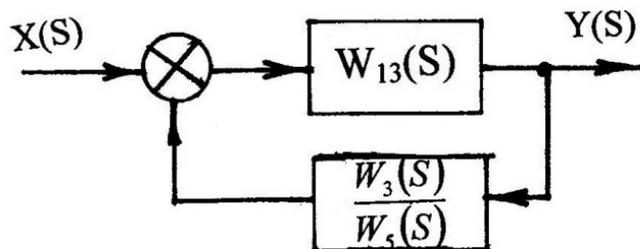


Рис. 5.31. Преобразованная структурная схема с развязкой по сигналу Y(S)

Полученный контур, охваченный отрицательной обратной связью, преобразовываем, получая передаточную функцию системы  $\varphi(S)$ , где

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= \frac{W_{13}(S)}{1 + W_{13}(S) \cdot \frac{W_3(S)}{W_5(S)}} = \\ &= \frac{[W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_4(S) W_5(S)}{[1 + W_4(S) \cdot W_5(S)] \left\{ 1 + \frac{[W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_4(S) W_5(S) W_3(S)}{[1 + W_4(S) W_5(S)] \cdot W_5(S)} \right\}}; \\ \varphi(S) &= \frac{[W_1(S) + W_2(S)] W_4(S) W_5(S)}{1 + W_4(S) W_5(S) + [W_1(S) + W_2(S)] W_3(S) W_4(S)}. \end{aligned}$$

Упрощаем схему, показанную на рис. 5.29. Сворачиваем контур, охваченный обратной связью, со звеном  $W_5(S)$  и получаем звено с передаточной функцией  $W_{20}(S) = \frac{W_4(S)}{1 + W_4(S)W_5(S)}$ . Теперь можно свер-

нуть два звена  $W_{10}(S)$  и  $W_{20}(S)$ . Получаем передаточную функцию

$$W_{21}(S) = W_{10}(S) \cdot W_{20}(S) = \frac{[W_1(S) + W_2(S)] W_4(S)}{1 + W_4(S) W_5(S)}.$$

После упрощений получили структурную схему, показанную на рис. 5.32.

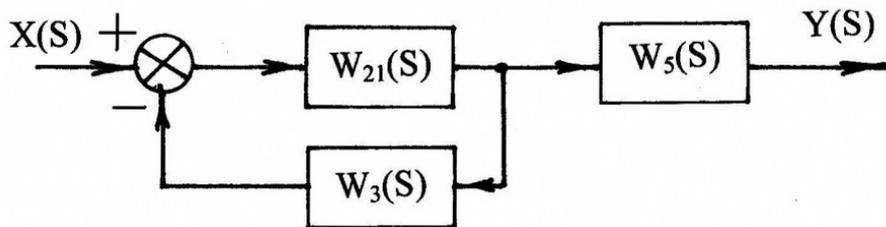


Рис. 5.32. Упрощенная структурная схема по сигналу  $X_4(S)$

Теперь упрощаем контур, охваченный обратной связью, со звеном  $W_3(S)$  и получаем звено с передаточной функцией

$$\begin{aligned} W_{22}(S) &= \frac{W_{21}(S)}{1 + W_{21}(S) W_3(S)} = \\ &= \frac{[W_1(S) + W_2(S)] W_4(S)}{[1 + W_4(S) W_5(S)] \cdot \left[ 1 + \frac{[W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_4(S) W_3(S)}{1 + W_4(S) W_5(S)} \right]}; \\ W_{22}(S) &= \frac{[W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_4(S)}{1 + W_4(S) W_5(S) + [W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_3(S) W_4(S)}. \end{aligned}$$

После преобразований осталось два звена, соединённых последовательно с передаточными функциями  $W_{22}(S)$  и  $W_5(S)$ ; структурная схема показана на рис. 5.33.

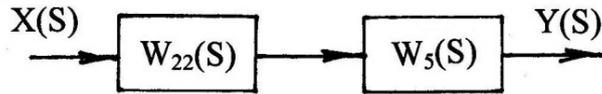


Рис. 5.33. Упрощенная структурная схема по сигналу  $X_4(S)$  до двух звеньев

Получаем передаточную функцию всей системы  $\varphi(S)$ .

$$\varphi(S) = W(S)W(S) = \frac{[W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_4(S)W_5(S)}{1 + W_4(S)W_5(S) + [W_1(S) + W_2(S)] \cdot W_3(S)W_4(S)}$$

При упрощении структурных схем, показанных на рис. 5.28 и 5.29, передаточные функции получились одинаковые, что доказывает их тождественность.

## 5.6. Передаточные функции системы

Передаточная функция замкнутой системы, схема которой показана на рис. 5.34:

$$\varphi_x(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}$$

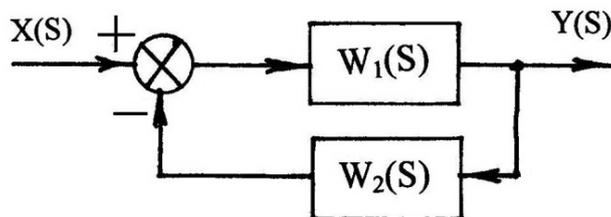


Рис. 5.34. Контур, охваченный отрицательной обратной связью

В случае, если входной сигнал не один, например, как показано на рис. 5.35, то будет несколько передаточных функций по каждому входному воздействию отдельно. При этом считается, что все другие входные сигналы отсутствуют.

Передаточная функция системы, показанной на рис. 5.35, по управляющему воздействию  $X(S)$  будет равна

$$\varphi_x(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)},$$

при этом изображение сигнала  $R(S) = 0$ .

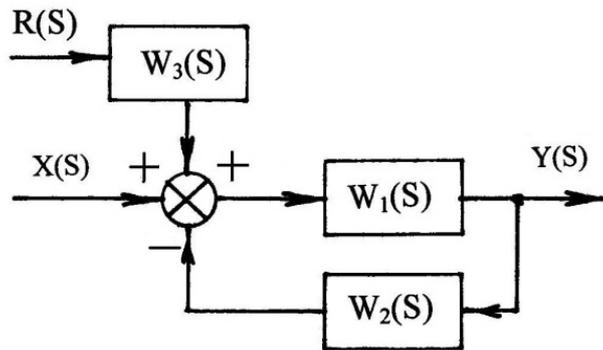


Рис. 5.35. Структурная схема с несколькими входными воздействиями

Передаточная функция по возмущающему воздействию  $R(S)$  имеет вид  $\varphi_R(S) = W_3(S) \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}$ , при этом считается, что  $X(S) = 0$  (рис. 5.36).

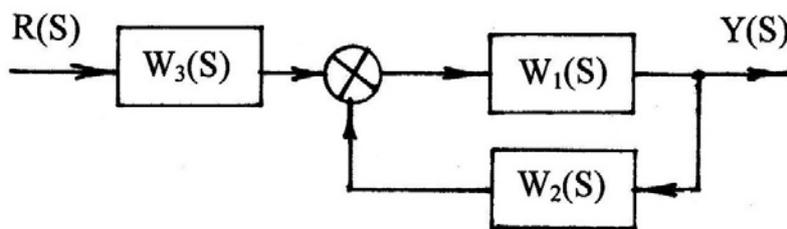


Рис. 5.36. Структурная схема по возмущающему воздействию

Можно отметить, что знаменатель передаточных функций по управляющему воздействию и по возмущающему воздействию одинаков.

**Передаточная функция разомкнутой системы** (рис. 5.37) определяется как отношение изображений выходного воздействия (регулируемой величины) к изображению сигнала на выходе сумматора, т.е. ошибки при нулевых начальных условиях.

$$W_{px}(S) = \frac{Y(S)}{\varepsilon_x(S)}$$

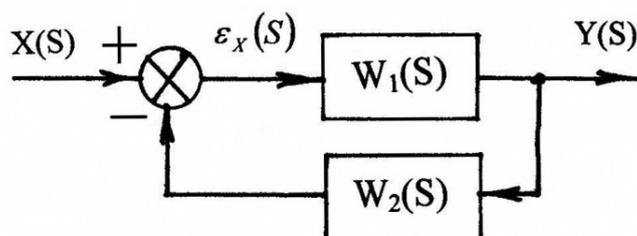


Рис. 5.37. Структурная схема по управляющему воздействию

Структурные схемы разомкнутых систем получают отключением обратной связи перед узлами суммирования. При этом обратная связь может быть только единичной, как показано на рис. 5.38. Передаточная функция разомкнутой системы  $W_{px}(S) = W(S)$ .

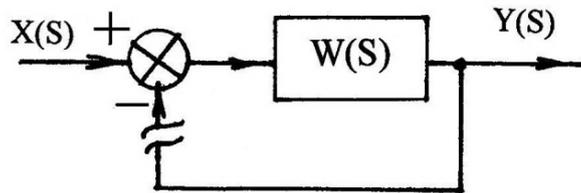


Рис. 5.38. Структурная схема с единичной обратной связью

Если обратная связь не единичная, то необходимо звено из цепи обратной связи перенести, как показано на рис. 5.39.

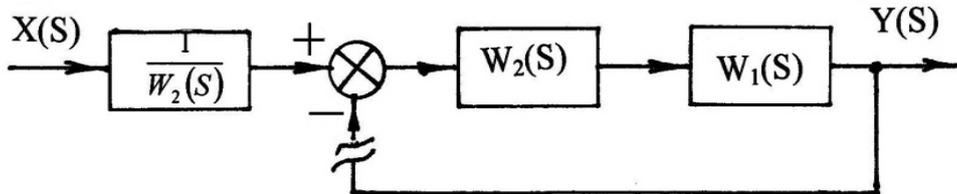


Рис. 5.39. Схема с переносом звена из цепи обратной связи в основную

$$W_{px}(S) = W_1(S) \cdot W_2(S).$$

**Передаточная функция замкнутой системы по ошибке** даёт связь между ошибкой и входным (задающим) воздействием при нулевых начальных условиях. Передаточная функция по ошибке может быть для ошибки по управляющему воздействию  $x(S)$  и по возмущающему воздействию  $R(S)$ .

Ошибка по управляющему воздействию для нашего примера. Структурная схема показана на рис. 5.40, где  $\varepsilon_x(S)$  – ошибка по управляющему воздействию.

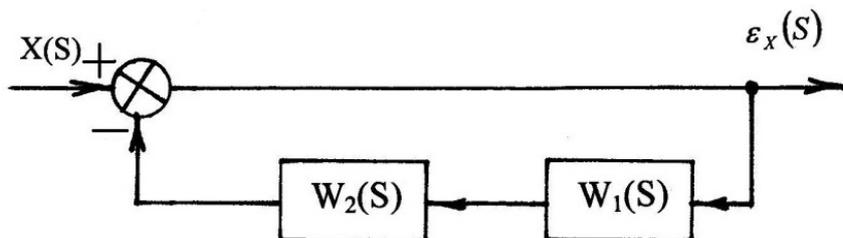


Рис. 5.40. Структурная схема по ошибке управления

Структурная схема по ошибке возмущающего воздействия показана на рис. 5.41.

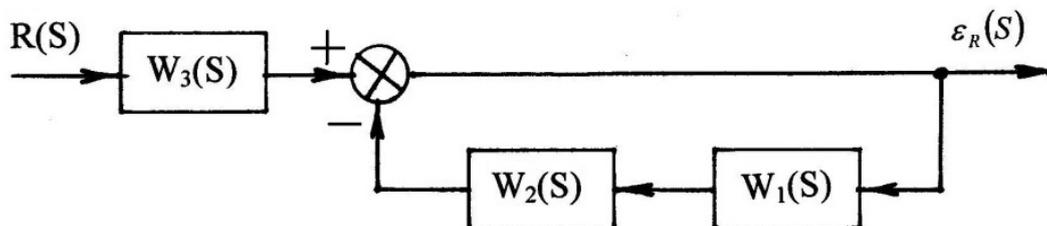


Рис. 5.41. Структурная схема по ошибке возмущающего воздействия

Передаточная функция по ошибке управления

$$\Phi_{\varepsilon, X}(S) = \frac{\varepsilon_X(S)}{X(S)} = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}$$

Передаточная функция ошибки по возмущающему воздействию имеет вид

$$\Phi_{\varepsilon, R}(S) = W_3(S) \cdot \frac{\varepsilon_R(S)}{R(S)} = W_3(S) \cdot \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}$$

### Контрольные вопросы и задания по разделу 5

1. Что понимается под управляющим и возмущающим воздействиями?
2. Каковы выходной сигнал и передаточная функция системы с последовательным соединением звеньев?
3. Как образуется передаточная функция цепи параллельно соединенных звеньев?
4. Как получить передаточные функции цепи с параллельно-встречным соединением звеньев при отрицательной и положительной обратной связи?
5. Как вывести уравнение передаточной функции системы автоматического управления со сложным соединением звеньев?
6. Что такое структурная схема?
7. Как из математической модели получить структурную схему?
8. Какие виды передаточных функций обратной связи Вы знаете?
9. Как получить передаточную функцию разомкнутой системы, если в цепи обратной связи имеется звено?
10. Приведите пример структурной схемы по ошибке управления и по ошибке возмущающего воздействия.

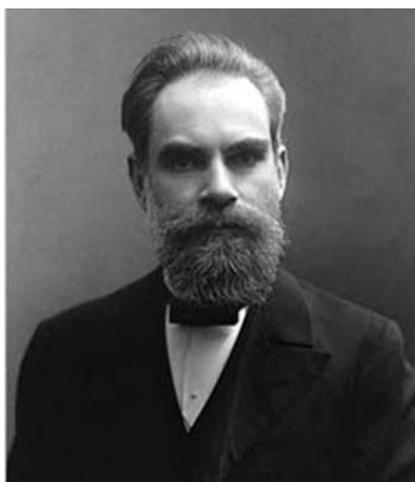
## Раздел 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 6.1. Необходимые и достаточные условия устойчивости

Любая система автоматического управления характеризуется переходным процессом, который возникает в ней при нарушении состояния равновесия вследствие какого-либо воздействия. Обеспечение устойчивости является одной из основных задач, решаемых при создании систем автоматического регулирования.

*Понятие устойчивости определяется способностью системы сохранять заданные состояния равновесия или заданные (эталонные) виды движения.*

Наиболее общая постановка задачи устойчивости систем была дана в 1892 году Александром Михайловичем Ляпуновым.



*Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918 гг.)*

Физическую трактовку понятия устойчивости можно пояснить следующим примером:

1. Если шар помещён в верхнюю точку возвышенности, то система неустойчива, поскольку при малейшем отклонении шара от начального положения он скатится по склону поверхности и не возвратится в исходное положение (рис. 6.1, а).

2. Если шар помещён во впадине, то система устойчива, поскольку шар обязательно возвратится к первоначальному положению (рис. 6.1, б).

В обеих ситуациях устойчивость системы не зависит от величины начального отклонения шара, т.е. от входного воздействия.

3. Возможен случай, когда при «малом» отклонении система будет устойчивой, а при «большом» отклонении – неустойчивой. Это происходит тогда, когда шар находится во впадине, расположенной на вершине выпуклой поверхности (рис. 6.1, в). Такую систему принято считать устойчивой «в малом» и неустойчивой «в большом».

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения линейной, или линеаризованной, системы автоматического регулирования, записанной для регулируемой величины  $y(t)$  при наличии управляющего воздействия  $x(t)$  и возмущающего воздействия  $R(t)$ , показанной на рис. 6.2.

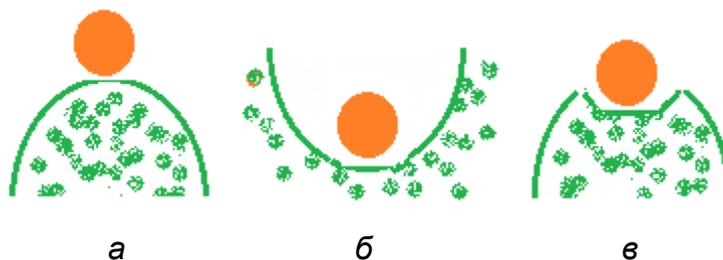


Рис. 6.1. Популярное представление устойчивости: а – система неустойчива при любом воздействии; б – система устойчива при любом воздействии; в – система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом»

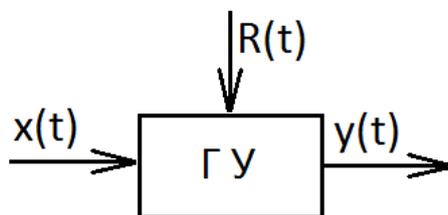


Рис. 6.2. Структурная схема системы с управляющим и возмущающим воздействием

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы, имеет вид:

$$[a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0] y(S) = [b_m S^m + \dots + b_1 S^1 + b_0 S^0] x(S) + [z_k S^k + \dots + z_0 S^0] R(S),$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $z$  – коэффициенты, представляющие собой постоянные величины, определяемые параметрами системы;  $S \equiv \frac{d}{dt}$  – оператор Лапласа, символ дифференцирования;

$n$ ,  $k$ ,  $m$  – старшие степени полиномов.

Характер переходных процессов в системе определяется видом левой части дифференциального уравнения, являющейся знаменателем передаточной функции. Для определения качественной оценки переходных процессов безразлично записано уравнение для управляющего или возмущающего воздействия. Полином знаменателя передаточной функции, приравненный к нулю, называется характеристическим уравнением.

Передаточная функция для системы, показанной на рис. 6.2, по управляющему воздействию:

$$W_x(S) = \frac{y(S)}{x(S)} = \frac{b_m S^m + \dots + b_1 S^1 + b_0 S^0}{a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0}, \text{ при } R(S) = 0.$$

Передаточная функция по возмущающему воздействию:

$$W_R(S) = \frac{y(S)}{R(S)} = \frac{z_k S^k + \dots + z_1 S^1 + z_0 S^0}{a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0}, \text{ при } x(S) = 0.$$

Процесс регулирования определяется решением дифференциального уравнения как сумма двух решений  $y(t) = y_c(t) + y_b(t)$ , где  $y_c(t)$  – переходная составляющая или составляющая свободных (собственных) движений системы;  $y_b(t)$  – составляющая вынужденного движения, того, что мы задаём.

Чтобы система могла воспроизводить входной сигнал  $x(t)$  или  $R(t)$ , переходная составляющая должна стремиться к нулю или затухать  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0$ .

Система будет называться *устойчивой*, если в течение времени при  $t \rightarrow \infty$  переходная составляющая будет стремиться к нулю. Для того чтобы найти эту составляющую, надо решить дифференциальное уравнение (знаменатель передаточной функции приравненной к нулю):

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет в виде  $y_c(t) = C e^{St}$ , здесь  $S$  – корни характеристического уравнения. Корней может быть  $n$ ; переходная составляющая может быть записана в виде

$$y_c(t) = C_1 e^{S_1 t} + C_2 e^{S_2 t} + \dots + C_n e^{S_n t},$$

где  $S_{1,2,3,\dots,n}$  – корни характеристического уравнения,  $C$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Дифференциальное уравнение, записанное в изображениях Лапласа, имеет вид:

$$a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0 = 0,$$

где  $S_{1\dots n}$  – корни этого уравнения, которые могут быть вещественными, комплексными, мнимыми. Рассмотрим все варианты.

**Вещественный корень.** Пусть один из корней характеристического уравнения будет вещественный. Если корень отрицательный ( $S = -\alpha$ ), то слагаемое, определяемое этим корнем, представляет экспоненту, которая при  $t \rightarrow 0$  затухает (рис. 6.3).

При положительном вещественном корне  $S = +\alpha$  получается не затухающий, а расходящийся процесс. Подтвердим сказанное примером. Положительный вещественный корень  $C_1 e^1 = C_1 \cdot 2,71$ ;  $C_1 e^2 = C_1 \cdot 7,4$  – значение экспоненты возрастает. Отрицательный вещественный корень  $C_1 e^0 = C_1$ ;  $C_1 e^{-1} = C_1 \cdot 0,36$ ;  $C_1 e^{-2} = C_1 \cdot 0,13$  – значение экспоненты уменьшается и приближается к нулю.

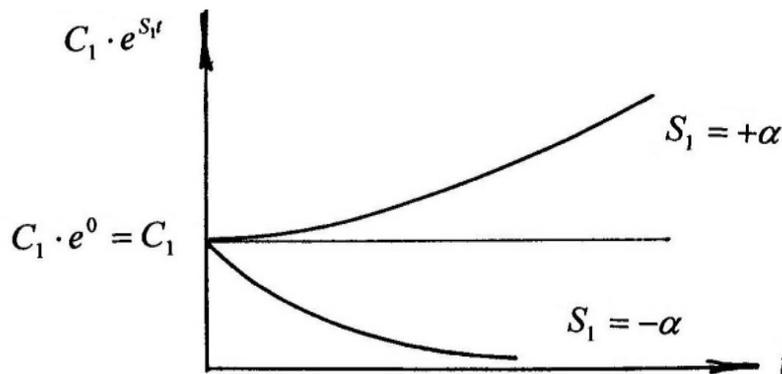


Рис. 6.3. График зависимости экспоненциальных зависимостей при положительном и отрицательном корнях характеристического уравнения

Если среди вещественных отрицательных корней есть один вещественный положительный корень  $S \cdot k = +\alpha \cdot k$ , то соответствующее слагаемое  $A \cdot K \exp(+\alpha \cdot k \cdot t)$  при  $t \rightarrow \infty$  будет беспредельно увеличиваться. Поэтому, хотя все слагаемые, кроме одного, будут затухать, процесс будет расходящимся, неустойчивым.

Переходная составляющая будет затухать только в том случае, если будут затухать каждая из экспоненциальных составляющих в отдельности.

**Комплексные корни** бывают попарно сопряженными. При отрицательной вещественной части два корня, например  $S_1$  и  $S_2$ , будут иметь вид  $S_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ , переходный процесс имеет вид, показанный на рис. 6.4.

Слагаемые, определяемые этими корнями, представляют в виде  $C_1 e^{-(\alpha+j\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha-j\beta)t} = A e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \Psi)$ , где  $A$  и  $\Psi$  – новые постоянные интегрирования, полученные в результате преобразований слагаемых с помощью формул Эйлера:

$$e^{j\beta t} = \cos \beta t + j \sin \beta t; \quad e^{-j\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t.$$

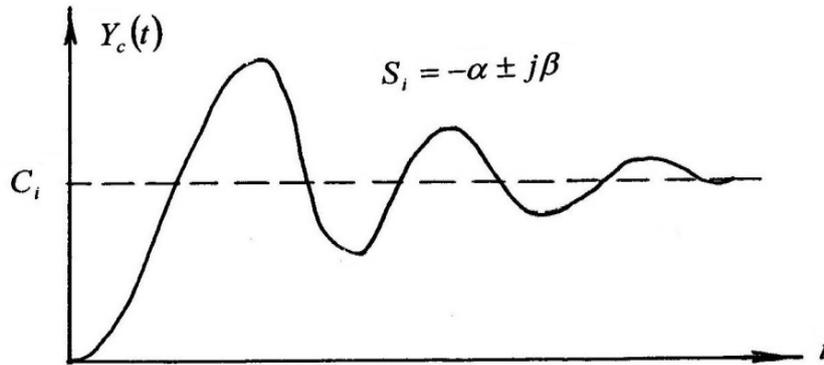


Рис. 6.4. График переходного процесса при отрицательной вещественной части характеристического уравнения

Сумма слагаемых, соответствующая комплексным корням, представляет собой составляющую в виде гармонической функции с угловой частотой  $\beta$  амплитудой  $A e^{-\alpha t}$ .

Параметр  $\alpha$  является показателем затухания огибающей кривой переходного процесса. При положительной вещественной части колебания будут не затухать, а расходиться. На рис. 6.5 показан переходный процесс при отрицательной вещественной части комплексных корней. Если вещественная часть корней характеристического уравнения положительная, то переходный процесс – расходящийся (рис. 6.6).

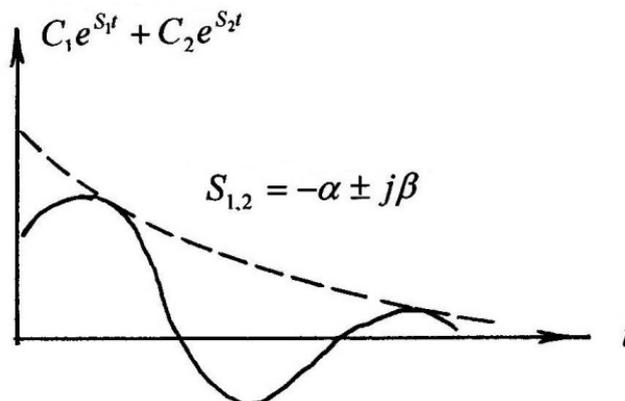


Рис. 6.5. График переходного процесса при отрицательных вещественных частях корней характеристического уравнения

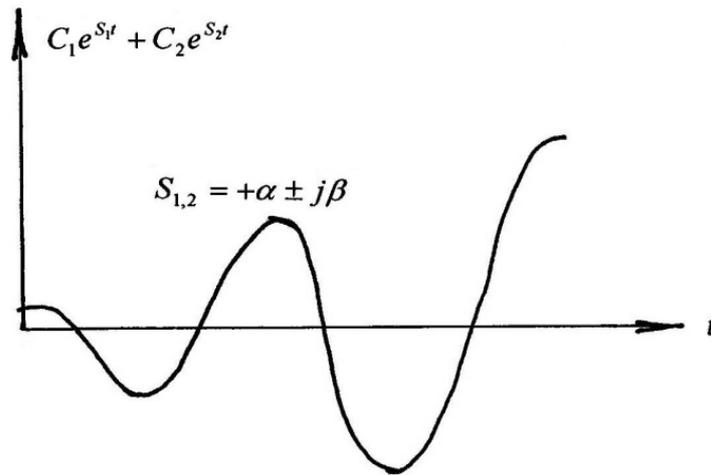


Рис. 6.6. График переходного процесса при положительных вещественных частях корней характеристического уравнения

**Чисто мнимые корни.** Слагаемое, определяемое этими корнями, будет представлять собой незатухающие колебания. Чисто мнимые корни имеют вид  $S_1 = +j\beta$  и  $S_2 = -j\beta$ , тогда слагаемые с чисто мнимыми корнями будут:

$$C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t} = A \cdot \sin(\beta t + \Psi).$$

Переходный процесс при чисто мнимых корнях показан на рис. 6.7.

Все реальные системы нелинейные, если учитывать силы трения, силы инерции и т.д. Ляпунов вывел ряд теорем, но все они об устойчивости «в малом».

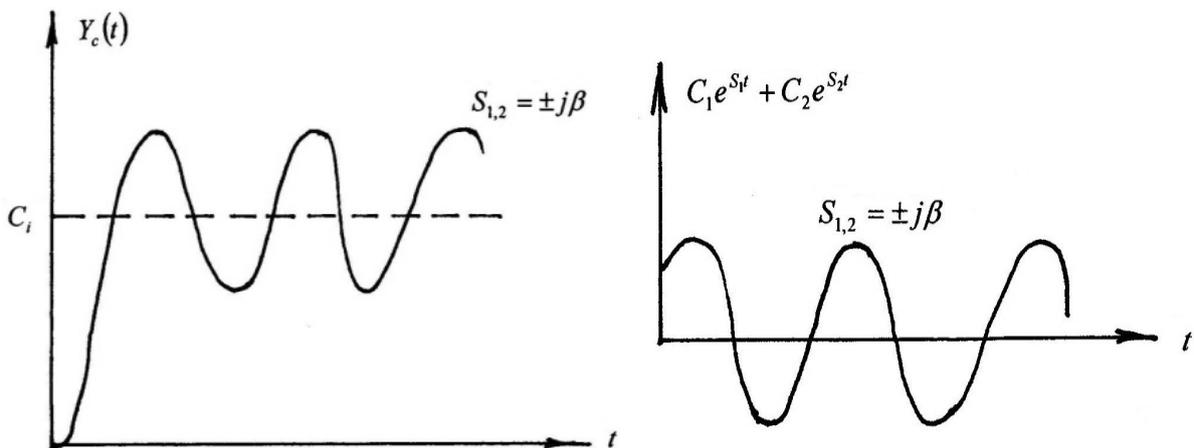


Рис. 6.7. Графики переходных процессов при чисто мнимых корнях характеристического уравнения

При этом не сказано, что считать малым воздействием. Если возможно нелинейную систему линеаризовать или считать, что не-

линейные звенья не оказывают существенного влияния, то при определении устойчивости систем допускается пользоваться теоремами Ляпунова и критериями устойчивости, основанными на виде передаточных функций.

**1 теорема Ляпунова.** Линейная, или линеаризованная, система устойчива, если все вещественные корни ее характеристического уравнения отрицательны, а комплексные – имеют отрицательную вещественную часть.

**2 теорема Ляпунова.** Система, у которой хотя бы один из корней характеристического уравнения или пара комплексных сопряженных корней окажутся правее мнимой оси – неустойчива.

Корни характеристического уравнения можно представить в виде точек на комплексной плоскости (рис. 6.8). Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали слева от мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения системы. Мнимая ось представляет собой граничную линию в плоскости корней, за которую не должны переходить корни характеристического уравнения. Вся левая полуплоскость представляет собой область устойчивости. Граница перехода является *границей устойчивости* системы.

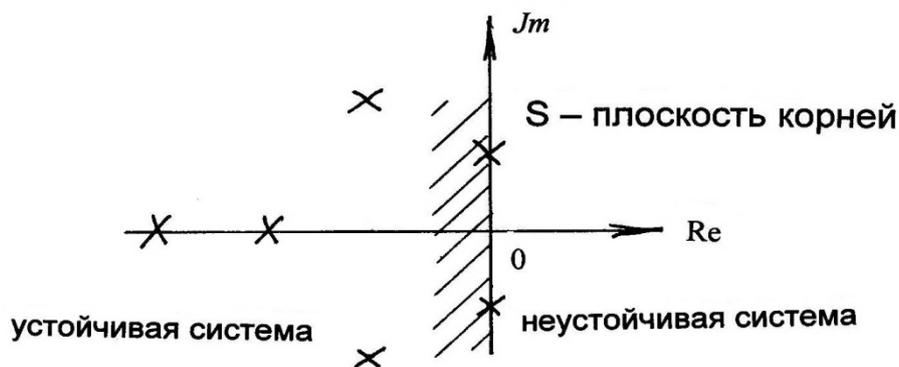


Рис. 6.8. Плоскость корней характеристического уравнения

Система находится на границе устойчивости при наличии:

- 1) нулевого корня;
- 2) пары чисто мнимых корней;
- 3) бесконечного корня – вещественный корень может попасть из левой полуплоскости в правую полуплоскость, проходя через бесконечность. Этот случай встречается редко, но возможен.

## 6.2. Критерии устойчивости

Если корни характеристического уравнения известны, то вопрос, устойчива система или нет, решен. Сейчас с помощью программ на компьютере найти корни характеристического уравнения не представляет трудности. Но отрицательная часть корней скажет лишь о том, устойчива система или нет. Если система неустойчива, то на вопрос, в каком направлении двигаться, в каких соотношениях необходимо изменить параметры, чтобы добиться устойчивости системы, мы не получим ответ.

Совсем недавно решить уравнение третьей степени было достаточно сложно, не говоря уже о более высоких степенях. Поэтому возникла необходимость судить об устойчивости системы непосредственно по коэффициентам характеристических уравнений или по коэффициентам передаточных функций.

Для того чтобы обойти вопрос о корнях уравнений при исследовании системы, в управлении техническими системами разработаны критерии устойчивости.

Ценность критериев не только в возможности, не находя корней, судить об устойчивости системы, но и в возможности выяснить сравнительно просто причину неустойчивости. Зная корни, трудно установить, какой элемент, какой параметр системы нужно изменить и в какую сторону, чтобы система стала устойчивой. Использование критериев устойчивости это позволяет.

Существует три основных критерия устойчивости:

- 1) алгебраический критерий Рауса-Гурвица;
- 2) графический критерий Михайлова;
- 3) частотные критерии Найквиста.

Рассмотрим эти критерии без доказательств.

## 6.3. Критерий Гурвица

Алгебраические критерии устойчивости позволяют находить соотношения между коэффициентами характеристического уравнения, составленного из коэффициентов знаменателя передаточной функции замкнутой системы. Если характеристическое уравнение имеет вид

$$a_n \cdot S^n + \dots + a_3 \cdot S^3 + a_2 \cdot S^2 + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0 = 0,$$

то его корни будут расположены на комплексной плоскости слева от мнимой оси при определенном соотношении коэффициентов.

Алгебраические критерии были предложены в 1875 году Раусом, а в 1895 году – Гурвицем. Критерий Рауса дан в форме алгоритма, определяющего последовательность математических операций; использование его в практике неудобно. В технике большее распространение получил критерий Гурвица.



Адольф Гурвиц (1859–1919 гг.)

*Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы определители системы  $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$  и коэффициент  $a_n$  характеристического уравнения замкнутой системы были бы положительны.*

Определители Гурвица составляют из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, устойчивость по критерию Гурвица сводится к выполнению неравенств  $a_n > 0; \Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \dots \Delta_n > 0$ .

Рассмотрим пример, в котором математическая модель описывается уравнениями второго порядка. Характеристическое уравнение

имеет вид  $a_2 \cdot S^2 + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0 = 0$ . Коэффициенты уравнения больше нуля, т.е. при  $n = 2$   $a_0 > 0$ ;  $a_1 > 0$ ;  $a_2 > 0$ . Определитель Гурвица будет иметь вид:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_0 - 0 \cdot a_2 > 0.$$

Для характеристического уравнения третьего порядка при  $n = 3$  должны выполняться неравенства:

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0.$$

Определитель Гурвица третьего порядка будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 + a_0 \cdot 0 \cdot 0 + a_3 \cdot a_2 \cdot 0 - \\ &\quad - 0 \cdot a_1 \cdot 0 - 0 \cdot a_2 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 \cdot a_0 = \\ &= a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 - a_0 \cdot a_3 \cdot a_0 = a_0 \cdot (a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3). \end{aligned}$$

Составим определитель Гурвица для уравнений четвертого порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

**Пример.** Имеем передаточную функцию замкнутой системы

$$W(S) = \frac{K}{T_2^2 \cdot T_1 \cdot S^3 + 2 \cdot T_1 \cdot \xi \cdot T_2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + K}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы – это знаменатель передаточной функции замкнутой системы, приравненный к нулю, т.е.

$$T_2^2 \cdot T_1 \cdot S^3 + 2 \cdot T_1 \cdot \xi \cdot T_2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + K = 0,$$

где  $a_3 = T_2^2 T_1 S^3$ ,  $a_2 = 2T_1 \xi T_2 S^2$ ,  $a_1 = T_1 S$ ,  $a_0 = K$ .

По критерию устойчивости Гурвица для систем третьего порядка необходимо и достаточно, чтобы  $a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3 > 0$  при  $a_0 > 0$ ;  $a_1 > 0$ ;  $a_2 > 0$ ;  $a_3 > 0$ . Подставив в это выражение наши коэффициенты, получаем:  $2 \cdot T_1 \cdot \xi \cdot T_2 \cdot T_1 > K \cdot T_2^2 \cdot T_1$  или  $2 \cdot T_1 \cdot \xi > K \cdot T_2$ , значит, при таком соотношении коэффициентов система будет устойчивой.

## 6.4. Критерий устойчивости Михайлова

### *Графический критерий устойчивости*

Во Всесоюзном электротехническом институте в 1938 году было предложено использовать частотные методы для исследования рабочих процессов в системах автоматического регулирования. Михайлов А.В. в 1938 г. предложил критерий устойчивости, который потом назвали его именем.

Михайлов предложил подставить в полином характеристического уравнения замкнутой системы чисто мнимое значение  $S = j\omega$ . Имеется характеристический полином замкнутой системы

$$D(S) = a_n \cdot S^n + \dots + a_2 \cdot S^2 + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0.$$

Получим частотный характеристический полином

$$D(j\omega) = a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_2 \cdot \omega^2 j^2 + a_1 \cdot \omega j + a_0.$$

Разделим его на вещественную и мнимую части

$$D(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega),$$

где вещественная часть будет содержать четные степени  $\omega$

$$A(\omega) = a_n \omega^n - a_{n-2} \omega^2 + a_0,$$

а мнимая часть – нечетные степени  $\omega$

$$B(\omega) = a_{n-1} \omega^{n-1} - a_{n-3} \omega^3 + a_1 \omega.$$

Если все коэффициенты известны, то задавая значение  $\omega$  от нуля до бесконечности можно на комплексной плоскости построить модуль знаменателя передаточной функции  $D(j\omega)$ :

$$D(j\omega) = |D(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}.$$

Конец вектора будет описывать кривую (годограф), она называется *кривой Михайлова*, показанной на рис. 6.9.

Между знаками корней характеристического уравнения и кривой Михайлова имеется взаимосвязь.

Запишем характеристический полином в виде произведения сомножителей  $D(S) = a_n(S - S_n) \dots (S - S_2)(S - S_1)$ , где  $S_n, S_1, S_2$  – корни характеристического уравнения.

Характеристический вектор можно представить в виде:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega - S_n) \dots (j\omega - S_2)(j\omega - S_1).$$

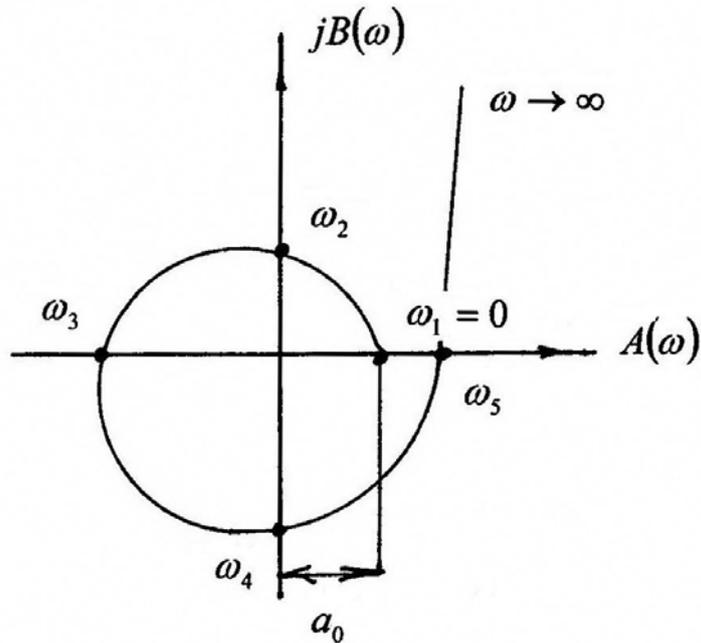


Рис. 6.9. График кривой Михайлова

Каждая скобка представляет собой комплексное число; характеристический вектор  $D(j\omega)$  – это произведение  $n$  комплексных чисел. При перемножении аргументы комплексных чисел складываются. Результирующий угол поворота вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей, т.е.  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n$ .

Каждое слагаемое поворачивает кривую Михайлова на  $90^\circ$ , т.е. на один квадрант. Значит, сколько скобок (сомножителей) в характеристическом полиноме, столько квадрантов должна пройти кривая Михайлова.

*Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора  $D(j\omega)$  полинома характеристического уравнения замкнутой системы при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности начинался на положительной оси и в направлении против часовой стрелки последовательно проходил  $n$  квадрантов комплексной плоскости.*

Кривая Михайлова всегда имеет для устойчивых систем спиралевидную форму с концом, уходящим в бесконечность.

На рис. 6.10 показан график неустойчивой систем; кривая Михайлова из 1 квадранта, минуя 2 и 3 квадранты, сразу переходит в 4 квадрант.

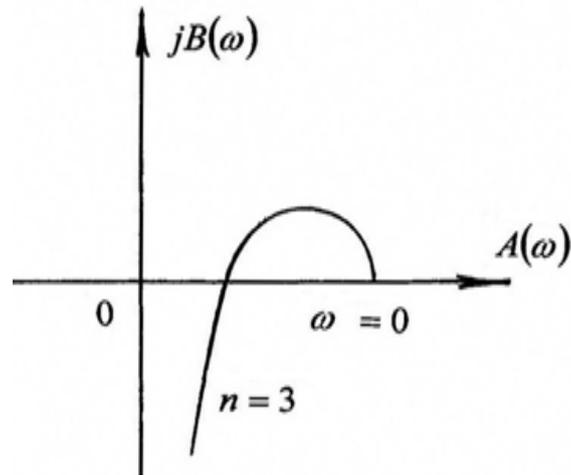


Рис. 6.10. График кривой Михайлова неустойчивой системы третьего порядка

Графики кривых Михайлова для устойчивых систем показаны на рис. 6.11, где  $n$  – старшая степень полинома знаменателя передаточной функции замкнутой системы.

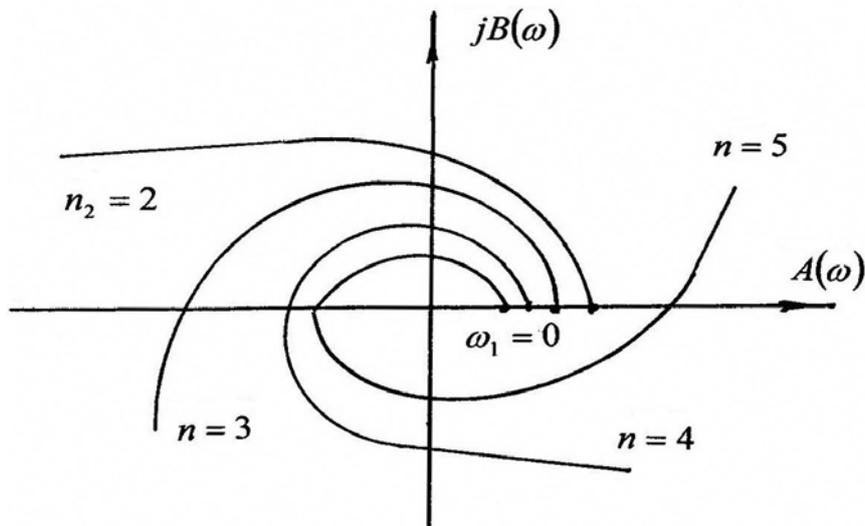


Рис. 6.11. Графики кривых Михайлова для устойчивых систем

Нахождение системы на границе устойчивости может быть представлено согласно критерию Михайлова следующим образом:

1) нулевой корень, отсутствует свободный член характеристического уравнения  $a_0 = 0$ , кривая выходит из начала координат (рис. 6.12);

2) колебательная граница устойчивости характеристического полинома обращается в ноль при подстановке  $S = j\omega$

$$D(j\omega) = A(\omega_0) + jB(\omega_0),$$

где  $A(\omega_0) = 0$  и  $B(\omega_0) = 0$ , где  $\omega_0$  – частота незатухающих колебаний (рис. 6.13).

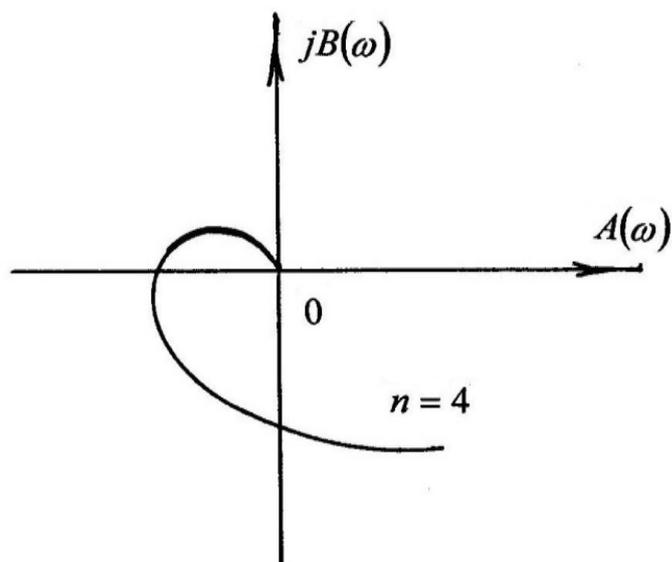


Рис. 6.12. Вид кривой Михайлова у системы, находящейся на границе устойчивости

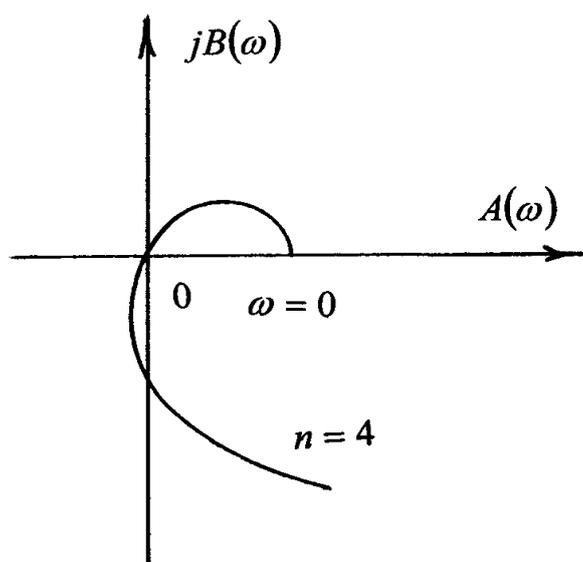


Рис. 6.13. Кривая Михайлова проходит через «0», когда система находится на границе устойчивости

**Пример.** По заданному характеристическому полиному замкнутой системы определить необходимое соотношение постоянных коэффициентов, при котором система будет находиться в состоянии устойчивости

$$D(S) = T_y T_M S^3 + (T_y + T_M) S^2 + S + K.$$

**Решение:** преобразуем заданный полином в частотный

$$D(j\omega) = K + j\omega - \omega^2(T_B + T_M) - j\omega^3 T_B T_M,$$

здесь  $j = \sqrt{-1}$ ,  $j^2 \omega^2 = -1\omega^2$ ,  $j^3 \omega^3 = -j\omega^3$ . Вещественная часть полинома  $A(\omega) = K - \omega^2(T_B + T_M)$  мнимая часть  $B(\omega) = \omega - \omega^3 T_B T_M$ . Примерный вид кривой Михайлова для этого случая изображен на рис. 6.14.

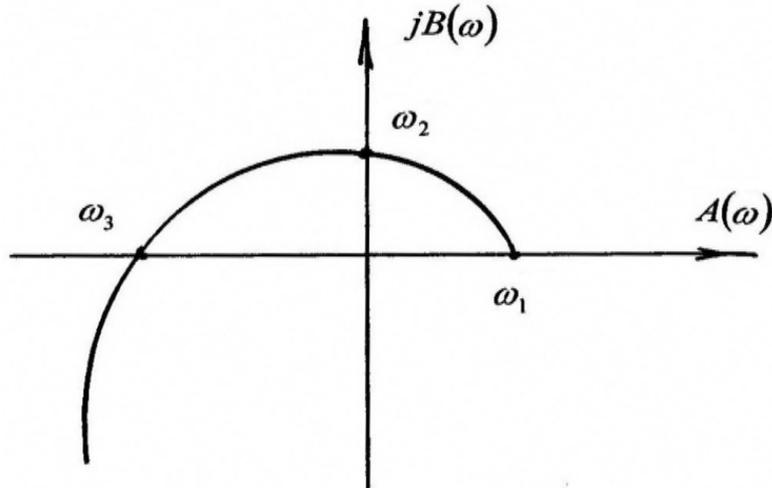


Рис. 6.14. Вид кривой Михайлова для систем третьего порядка

Найдем условие устойчивости из требований чередования корней. Пусть будет:  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ . Тогда при  $\omega_1 = 0$  подставим в выражения  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  вместо  $\omega$  ноль и получим:  $A(\omega) = K$ ;  $B(\omega) = 0$ . Следующую частоту  $\omega_2$  найдем из условия  $A(\omega_2) = 0$ , при подстановке получаем  $0 = K - \omega_2^2(T_B + T_M)$ , откуда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{T_B + T_M}}.$$

$\omega_3$  найдем из условия  $B(\omega_3) = 0$ ;

$$0 = \omega_3 - \omega_3^3 T_B T_M \text{ или } 0 = 1 - \omega_3^2 T_B T_M.$$

Решая квадратное уравнение, определяем  $\omega_3$ .

$$\omega_3^2 = \frac{1}{T_B T_M}, \text{ откуда } \omega_3 = \sqrt{\frac{1}{T_B T_M}}.$$

Подставляя полученные значения частот в неравенство  $\omega_2 < \omega_3$ , получаем  $\frac{K}{T_B + T_M} < \frac{1}{T_B T_M}$  или  $K < \frac{T_B + T_M}{T_B T_M}$ , значит, при выполнении последнего неравенства система будет устойчивой.

### 6.5. Критерий Найквиста

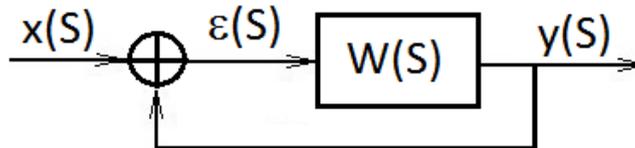
Критерий, предложенный в 1932 году американским ученым Гарри Найквистом, позволяет судить о замкнутой системе по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы.



*Гарри Найквист (1889 – 1976 гг.)*

Следует отметить, что разомкнутая система практического смысла не имеет. Разомкнутая связь между объектом и регулятором нарушает взаимодействие элементов системы, и объект становится неуправляемым. Однако в теории автоматического управления разомкнутая система используется часто, потому что у разомкнутой системы легко строятся логарифмические частотные характеристики, по которым можно приблизительно судить об устойчивости системы.

Предположим, что замкнутая отрицательной единичной обратной связью система, структурная схема которой показана на рис. 6.15, находится на границе устойчивости.



*Рис. 6.15. Структурная схема замкнутой системы*

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(S) = \frac{W(S)}{1 + W(S)}.$$

Обозначим знаменатель передаточной функции замкнутой системы  $D(S) = 1 + W(S)$  или в частотном виде  $D(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ .

Система находится на границе устойчивости при наличии нулевого корня, т.е.  $D(j\omega) = 0$ , когда  $W(j\omega) = -1$ . Критическая точка  $(-1, 0)$  соответствует случаю  $W(j\omega) = -1$  или  $A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = -1$ , что имеет место при  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . Подставив в выражение амплитудно-частотной характеристики значение  $\varphi(\omega)$ , получим

$$A(\omega) = 1 \cdot e^{-j \cdot 180^\circ} = 1 \cdot [\cos 180^\circ - j \cdot \sin 180^\circ] = 1 \cdot 1.$$

Физически это означает, что амплитуда входного и выходного сигналов одинакова, т.е.  $A_{\text{вх}} = A_{\text{вых}}$  или

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{вых}}(\omega)}{A_{\text{вх}}(\omega)} = 1.$$

*Замкнутая система устойчива, если устойчива разомкнутая система, и ее амплитудно-фазовая частотная характеристика при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  не охватывает точку с координатами  $-1, j0$ .*

Строим амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы по выражению:

$$W_p(S) = \frac{K(b_m S^m + \dots + b_1 S^1 + b_0 S^0)}{a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0}.$$

Если амплитудно-фазовая характеристика проходит через точку с координатами  $[-1; j0]$ , как показано на рис. 6.16, система находится на границе устойчивости. Когда АФХ охватывает точку с координатами  $[-1; j0]$  (рис. 6.17), то разомкнутая система неустойчива.

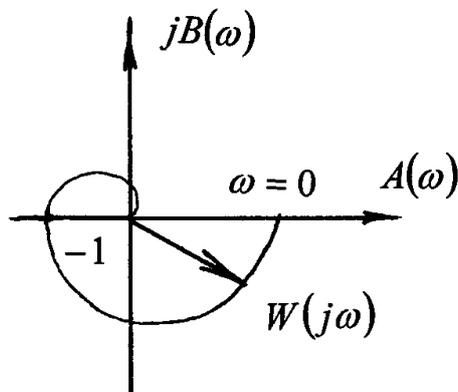


Рис. 6.16. График амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы, находящейся на границе устойчивости

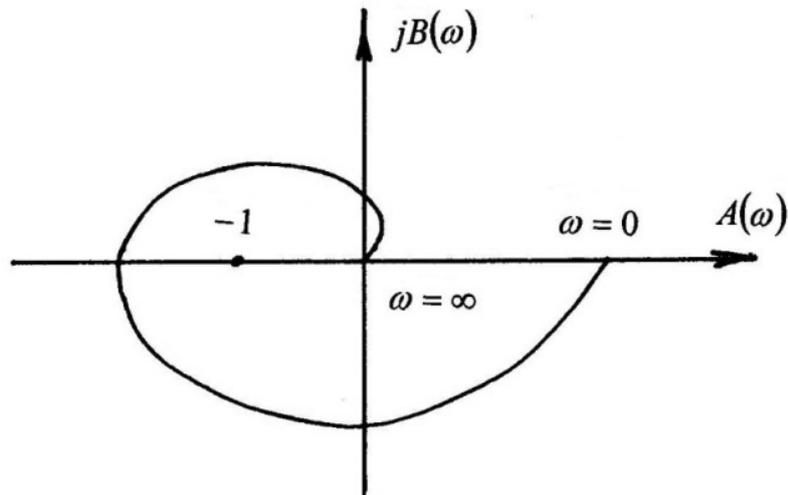


Рис. 6.17. График амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой неустойчивой системы

Вид АФХ для устойчивых систем показан на рис. 6.18, а и условно устойчивых – на рис. 6.18, б.

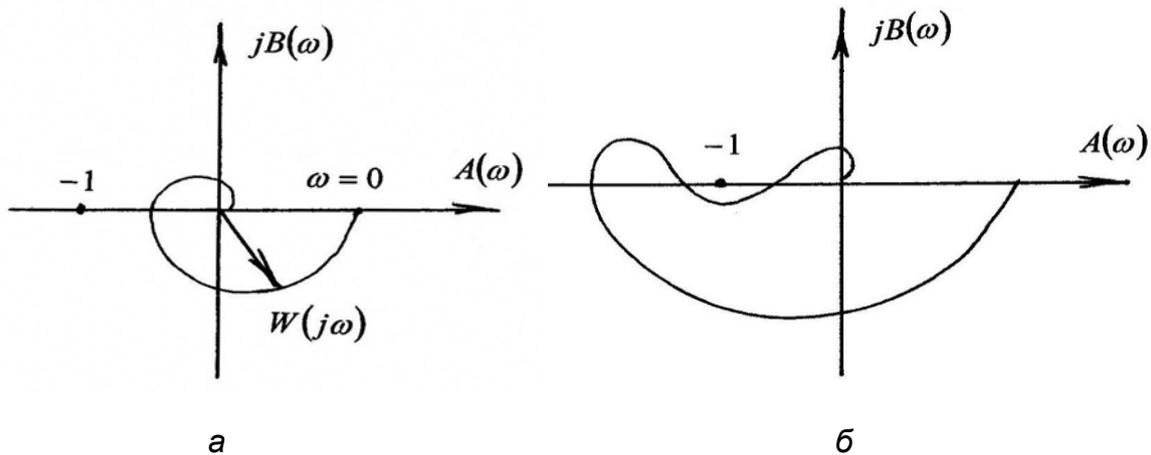


Рис. 6.18. Графики АФХ для устойчивых систем: а – устойчивая система; б – условно устойчивая система

При определении устойчивости достаточно строить амплитудно-фазовую характеристику только для положительных частот, так как ветвь с отрицательными частотами получается зеркальным отображением относительно вещественной оси (рис. 6.19).

Вид рассмотренных кривых характерен для статических систем.

**Статическими системами** называют системы, у которых амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых систем не содержат интегрирующих звеньев, т.е. в знаменателе передаточной функции нет множителя  $S$

$$W(S) = \frac{K(b_m S^m + \dots + b_1 S^1 + b_0 S^0)}{a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0}.$$

Если передаточная функция разомкнутой системы содержит интегрирующие звенья, то системы астатическая.

$$\text{Астатизм первого порядка } W(S) = \frac{K(b_m S^m + \dots + b_1 S^1 + b_0 S^0)}{S(a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0)}.$$

$$\text{Астатизм второго порядка } W(S) = \frac{K(b_m S^m + \dots + b_1 S^1 + b_0 S^0)}{S^2(a_n S^n + \dots + a_1 S^1 + a_0 S^0)}.$$

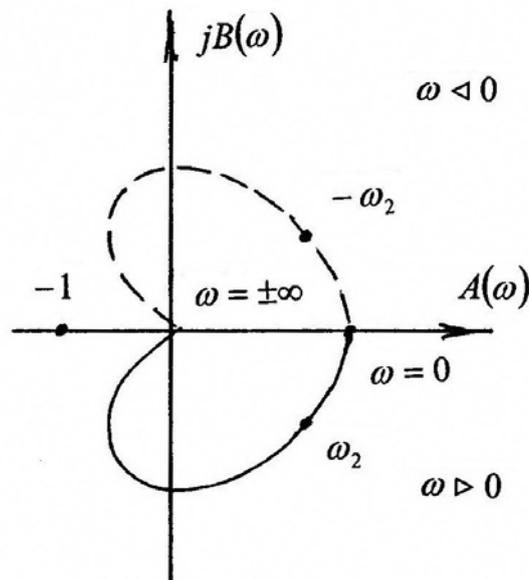


Рис. 6.19. Графики АФХ для положительных и отрицательных частот

Если разомкнутая система является астатической, т.е. содержит одно или несколько интегрирующих звеньев с передаточной функцией  $W(S) = \frac{1}{S}$ , то при  $\omega = 0$  ветви ее амплитудно-фазовой характеристики уходят вдоль мнимой оси в бесконечность. Тогда их надо дополнить дугами окружности бесконечно большого диаметра, как показано на рис. 6.20.

Амплитудно-фазовые характеристики астатических систем при  $\omega = 0$  уходят в бесконечность, так как у амплитудно-фазовой функции  $W_p(j\omega)$  имеется множитель  $\frac{1}{(j\omega)^r}$ , где  $r$  – порядок астатизма. При  $r = 1$  характеристика  $W_p(j\omega)$  уходит в бесконечность вдоль отрицательной мнимой полуоси, при  $r = 2$  – характеристика  $W_p(j\omega)$  уходит в беско-

нечность вдоль отрицательной действительной полуоси, при  $r = 3$  – характеристика  $W_p(j\omega)$  уходит в бесконечность вдоль положительной мнимой полуоси (рис. 6.21).

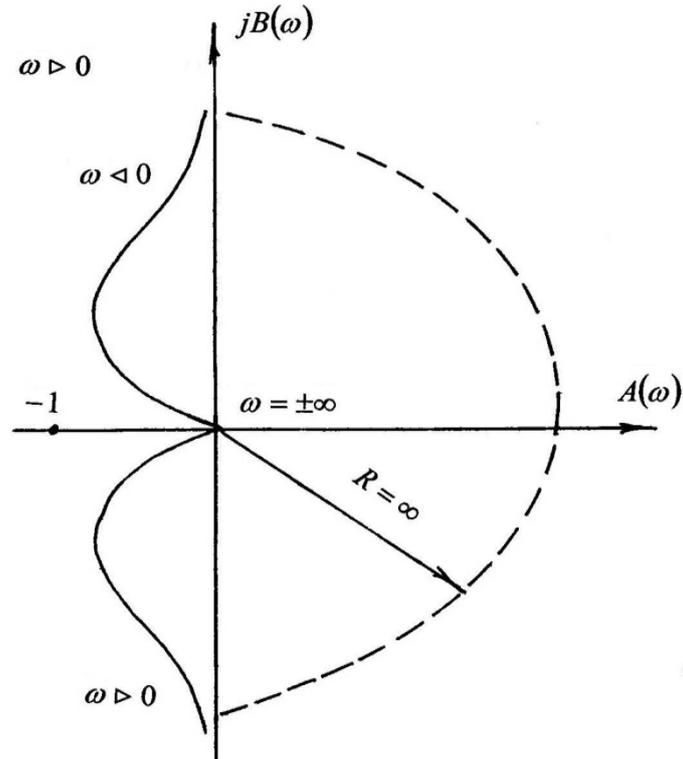


Рис. 6.20. График АФХ астатической устойчивой системы

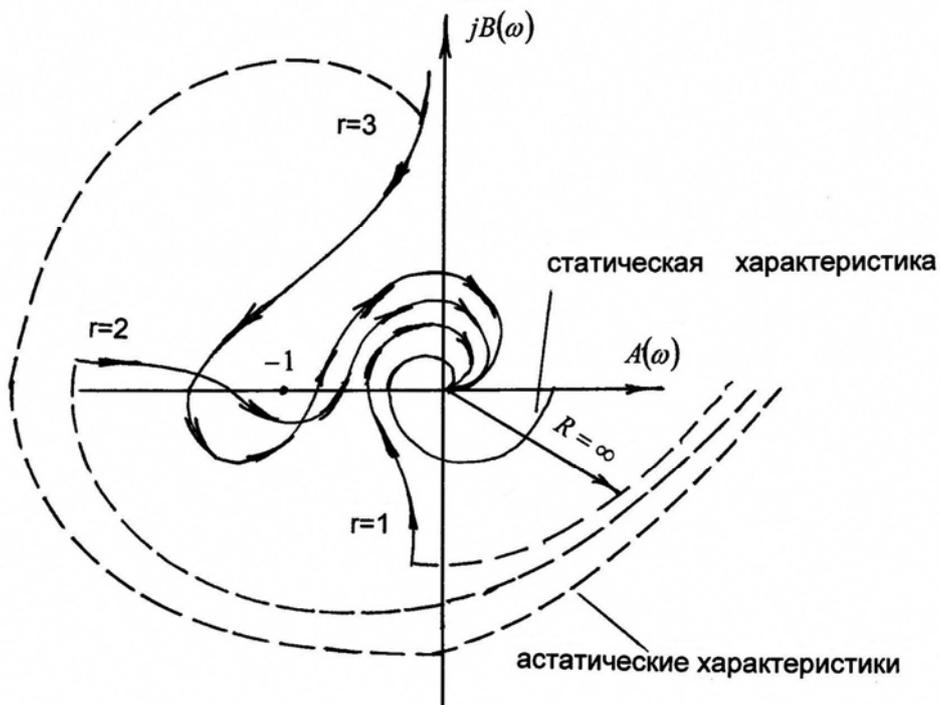


Рис. 6.21. Графики АФХ астатических систем с разным порядком астатизма

Если соединить мысленно находящееся в бесконечности начало амплитудно-фазовой характеристики астатической системы с положительной действительной полуосью, с дугой бесконечно большого радиуса, то в случае устойчивости системы точка  $(-1, 0)$  не должна охватываться АФХ, как показано на рис. 6.21.

У неустойчивых систем АФХ охватывает точку с координатами  $(-1, 0)$  (рис. 6.22).

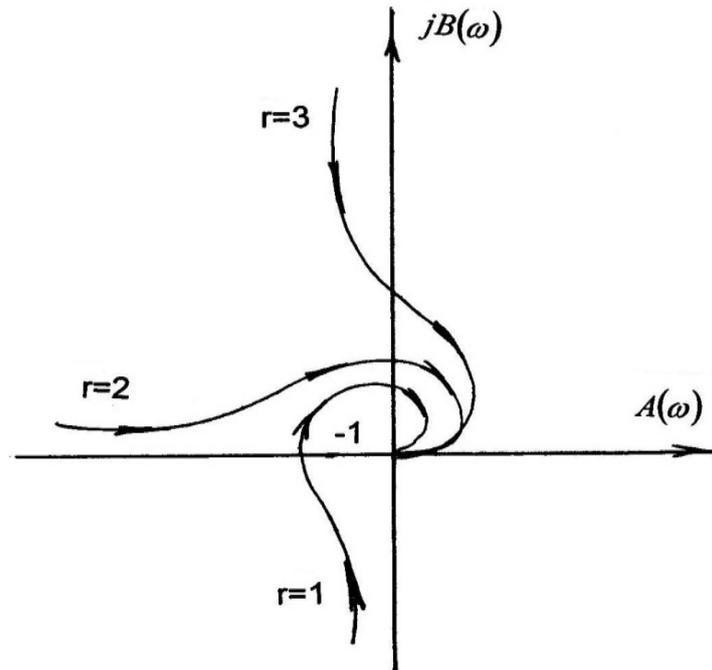


Рис. 6.22. Графики АФХ неустойчивых систем с разным порядком астатизма

### 6.6. Запасы устойчивости по критерию Найквиста

По критерию Найквиста можно определить запасы устойчивости. Запасы устойчивости определяются по передаточной функции разомкнутой системы  $W_p(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$  (рис. 6.23).

Чем больше величина запасов, тем устойчивее система автоматического управления. Рекомендуемые значения запасов – по амплитуде  $A_3 = 6 \dots 8$  дБ и по фазе  $\varphi_3 = 30^\circ \dots 40^\circ$ . Для определения  $A_3$  надо, чтобы  $B(\omega) = 0$ , найти  $\omega_1$  и подставить ее в выражение  $A(\omega_1)$ . Тогда

$$A_3 = 1 - \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = 1 - A(\omega_1).$$

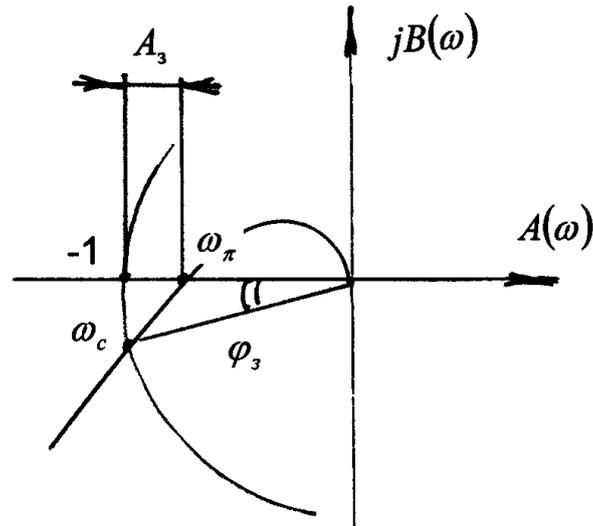


Рис. 6.23. Определение запасов устойчивости по АФХ

Для определения запаса устойчивости по фазе надо снять с графика значение  $B(\omega_c)$  и  $A(\omega_c)$  в точке пересечения годографа с кругом, радиус которого равен 1. Тогда  $\varphi_3 = -\pi + \varphi(\omega_c)$ , где  $\varphi(\omega_c) = \text{arctg} \frac{B(\omega_c)}{A(\omega_c)}$ .

### 6.7. Влияние некоторых характеристик на устойчивость систем

1. Общий коэффициент усиления  $K$  системы (рис. 6.24):

$$W_p(S) = \frac{K}{D(S)}.$$

С увеличением  $K$  запасы устойчивости  $A_3$  и  $\varphi_3$  уменьшаются, но точность обработки программы увеличивается (рис. 6.24).

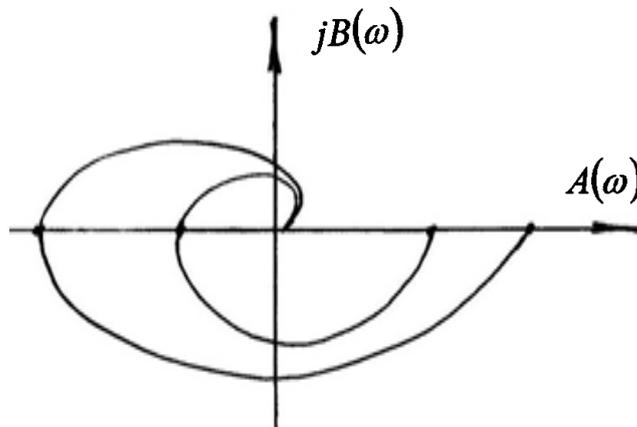


Рис. 6.24. Графики АФХ для систем с разным коэффициентом усиления

2. Влияние астатизма. Если система содержит интегрирующие звенья  $W(S) = \frac{1}{S^r}$ , то система астатическая  $r$  порядка, где  $r$  – порядок астатизма.

При  $r = 1$  – астатизм 1-го порядка  $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ .

При  $r = 2$  – астатизм 2-го порядка  $\varphi(\omega) = -\pi$ .

При  $r = 3$  – астатизм 3-го порядка  $\varphi(\omega) = -\frac{3}{2}\pi$ .

Астатизм системы уменьшает запасы устойчивости. При астатизме второго порядка система становится устойчивой, но точность при этом возрастает.

### 6.8. Определение устойчивости по логарифмическим характеристикам

Для определения устойчивости по критерию Найквиста можно строить не амплитудно-фазовую частотную характеристику, а логарифмическую амплитудную частотную характеристику и логарифмическую фазовую частотную характеристику разомкнутой системы.

Замкнутая система по критерию Найквиста устойчива, так как АФЧХ разомкнутого контура не охватывает точку  $-1$ . На логарифмических частотных характеристиках разомкнутой системы это проявляется тем, что фазовая характеристика не достигает значения  $-\pi$  при частоте, при которой  $L(\omega) = 0$ , т.е. пересекает ось ЛАХ; эту частоту называют частотой среза  $\omega_c$  (рис. 6.25).

Угол, на который фазовая характеристика не достигает до значения  $-\pi$ , определяет запас устойчивости по фазе.

Запас устойчивости по амплитуде проверяют при частоте перехода фазы, т.е. когда фаза пересекает  $-\pi$ . При увеличении коэффициента усиления запасы уменьшаются, и система может стать неустойчивой (рис. 6.28).

Ось  $\omega$  в ЛАХ  $L(\omega)$  является границей устойчивости по амплитуде. Прямая  $-\pi$  является границей устойчивости по фазе.

На рис. 6.26 показаны АФЧХ системы стабилизации угла наклона таранжа самолета.

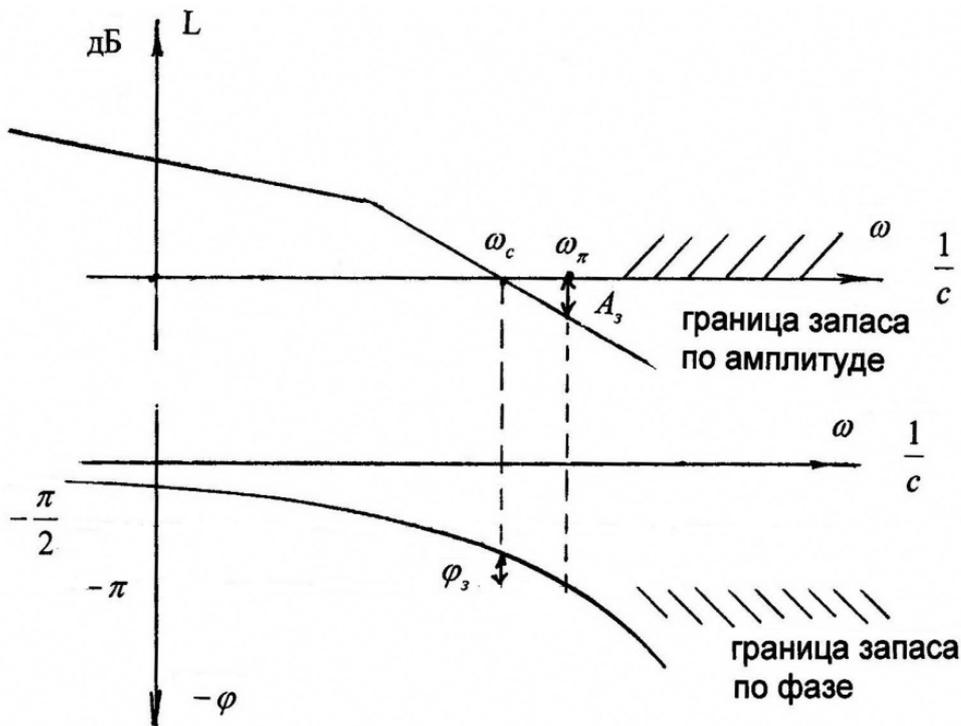


Рис. 6.25. Графики логарифмических амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик

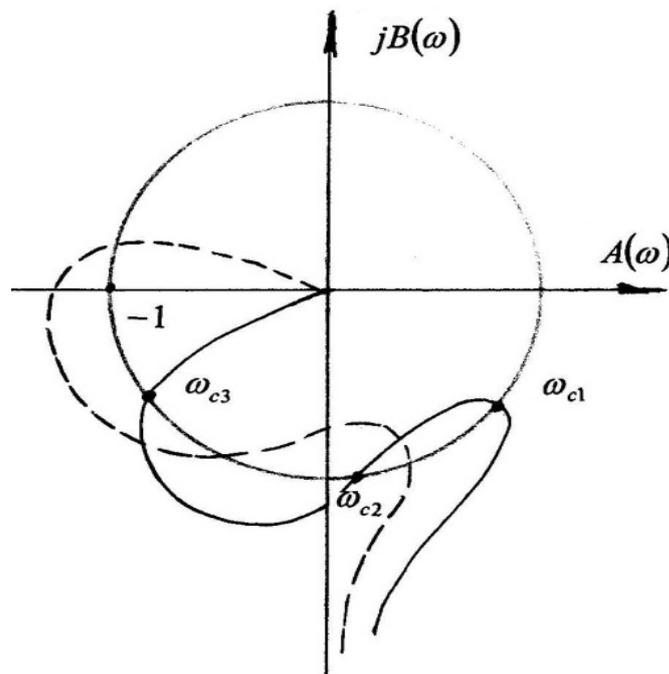


Рис. 6.26. АФЧХ системы угла наклона самолёта

Логарифмическая характеристика системы угла наклона самолёта имеет три частоты среза (рис. 6.27). Устойчивость определяется по отношению к последней частоте среза  $\omega_{c3}$ , остальные приходятся на участок фазовой характеристики с большим запасом по фазе.

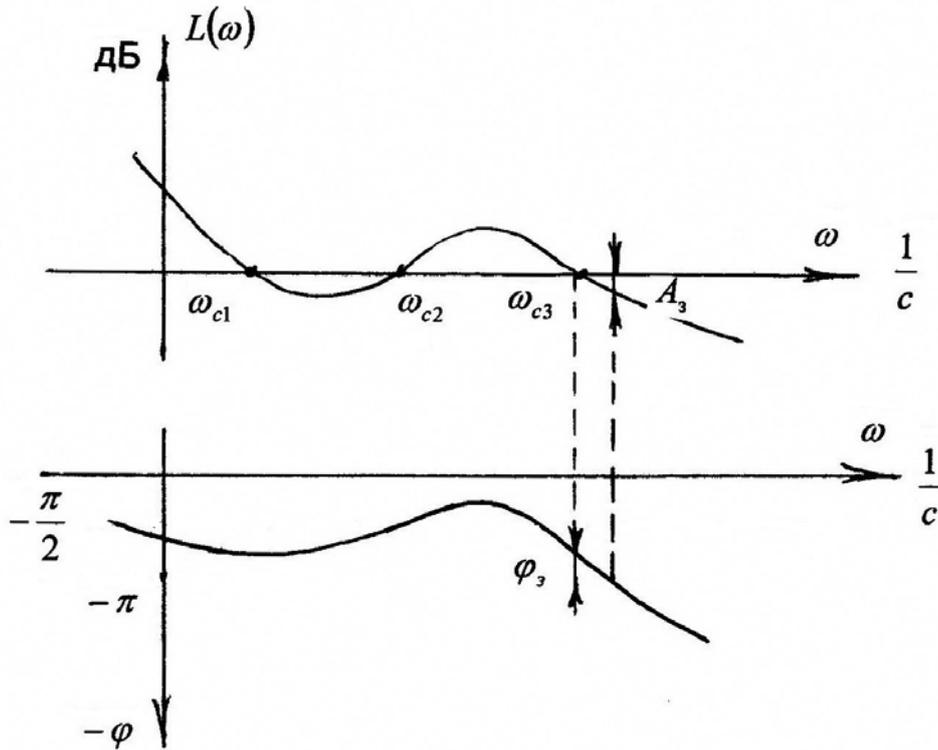


Рис. 6.27. Графики ЛАХ с несколькими частотами среза

### 6.9. Области устойчивости систем автоматического управления

Часто проектировщика интересует влияние какого-то одного или нескольких параметров на устойчивость системы. Для этого имеются специальные методы. Эти методы основаны на анализе перемещения корней характеристического уравнения замкнутой системы в комплексной плоскости при изменении интересующего параметра.

#### **Определение и построение областей устойчивости системы**

При проектировании системы, если задан диапазон какого-то конкретного параметра, то изменяя его, можно определить, где система будет оставаться устойчивой, что позволит оптимально подобрать этот параметр.

Впервые область устойчивости системы прямого действия в плоскости двух коэффициентов характеристического уравнения была построена русским ученым И.А. Вышнеградским в 1876 году для уравнения 3-го порядка  $a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S^1 + a_0 = 0$ .



*Иван Алексеевич Вышнеградский (1831–1895 гг.)*

Вышнеградский предложил представить это уравнение в виде:

$$z^3 + Az^2 + Bz + 1 = 0, \text{ т.е. } \frac{a_3}{a_0} S^3 + \frac{a_2}{a_0} S^2 + \frac{a_1}{a_0} S^1 + \frac{a_0}{a_0} S^0 = 0.$$

При этом Вышнеградский вводит новую переменную:  $z = S \cdot \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$ ,

тогда определяются коэффициенты  $A$  и  $B$ . Покажем подробно, как это сделано:

$$\frac{a_2}{a_0} S^2 = S^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a_2^3 \cdot a_3^2}{a_0^3 \cdot a_3^2}} = S^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a_2^3}{a_0^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a_3^2}{a_0 \cdot a_3^2}} = S^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a_2^3}{a_0^2}} \cdot \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 \cdot a_3^2}} = S^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a_2^2}{a_0^2}} \cdot A.$$

Таким образом,  $A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 \cdot a_3^2}}$  и  $B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 \cdot a_3}}$ , затем вместо  $z$  под-

ставим  $z = j\omega$  в исходное уравнение

$$-j\omega^3 + A\omega^2(-1) + Bj\omega + 1 = 0.$$

Сгруппируем вещественную и мнимую части

$$A(-\omega^2) + j(B\omega - \omega^3) + 1 = 0.$$

Представим последнее уравнение в виде двух уравнений, при этом вначале приравняем к нулю мнимую часть, а потом приравняем к нулю вещественную часть:

$$A(-\omega^2) + B \cdot 0 + 1 = 0, \text{ где } j \cdot (B\omega - \omega^3) = 0 \text{ и}$$

$$A \cdot 0 + B\omega - \omega^3 = 0, \text{ где } A(-\omega^2) + 1 = 0.$$

Из первого уравнения определяем коэффициент

$$A \rightarrow A(-\omega^2) + B \cdot 0 + 1 = 0.$$

Упростив последнее выражение, получим  $-\omega^2 \cdot A + 1 = 0$  или  $1 = A \cdot \omega^2$ , т.е.  $A = \frac{1}{\omega^2}$ .

Из второго уравнения определяем коэффициент

$$B \rightarrow A \cdot 0 + B\omega - \omega^3 = 0 \text{ или } B\omega = \omega^3, \text{ т.е. } B = \omega^2.$$

$A \cdot B = 1$  – это равнобокая гипербола Вышнеградского с осями координат в качестве асимптот.

Согласно критерию Гурвица, при  $A > 0$  и  $B > 0$  условием устойчивости системы является неравенство  $A \cdot B > 1$ , которое определяется из определителя Гурвица.

Рассмотрим уравнение, предложенное Вышнеградским:

$$z^3 + Az^2 + Bz + 1 = 0$$

– оно аналогично уравнению третьей степени

$$a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S^1 + a_0 S^0 = 0,$$

в котором коэффициентам  $a$  соответствуют следующие выражения  $a^3 = 1$ ,  $a^2 = A$ ,  $a_1 = B$ ,  $a_0 = 1$ , из которых составим определитель Гурвица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & A \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= AB1 + 1A0 + 100 - 0B0 - 111 - A0A = AB - 1 > 0.$$

Вышнеградский вывел алгебраический критерий за 20 лет до Гурвица и раньше критерия Рауса.

Когда  $A \cdot B = 1$ , система находится на границе устойчивости. Уравнение  $A \cdot B = 1$  можно рассматривать как уравнение кривой, которая разбивает плоскость с координатами  $A$  и  $B$  на две основных области: область устойчивости и область неустойчивости.

Область устойчивости системы лежит выше этой кривой, и по виду корней характеристического уравнения системы можно определить примерный вид переходного процесса (рис. 6.28): 1 – область, соответствующая аperiodическому затухающему процессу; 2 – монотонный затухающий процесс; 3 – периодический затухающий процесс; 4 – неустойчивый переходный процесс.

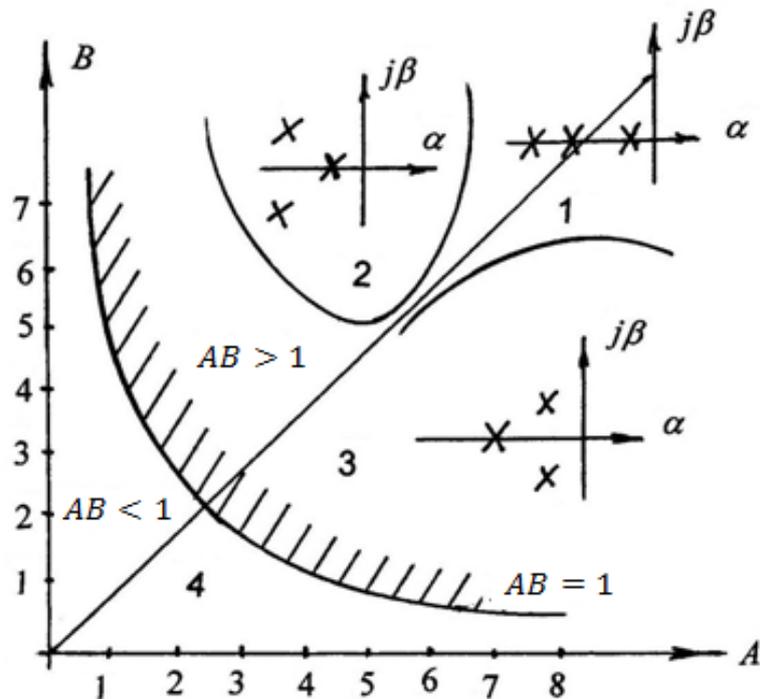


Рис. 6.28. График с гиперболой Вышнеградского

Недостаток критерия: интересующие проектировщика параметры, например диаметры, расход, ширина щели, давление ( $d, Q, h, P$ ), входят в выражения коэффициентов  $A$  и  $B$  в неявном виде, что усложняет расчеты. К тому же уравнения должны быть не выше третьего порядка.

### 6.10. Общий метод $D$ -разбиения в плоскости двух параметров

В 1948 г. Ю.И. Неймарк разработал критерий, названный потом  $D$ -разбиение пространства параметров. Метод является дальнейшим развитием критерия Вышнеградского.



Юрий Исаакович Неймарк (1920–2011 гг.)

Каждому сочетанию значений коэффициентов характеристического уравнения соответствует вполне определенное расположение корней этого уравнения на комплексной плоскости.

Изменение коэффициентов уравнения вызывает перемещение корня на комплексной плоскости.

### **Построение области устойчивости в плоскости одного комплексного параметра**

Пусть требуется выяснить влияние параметра  $m$  на влияние устойчивости системы.

Характеристический полином, т.е. знаменатель передаточной функции, сгруппируем так, чтобы в  $R(S)$  были все члены, не содержащие интересующего параметра, а в  $Q(S)$  – слагаемые, содержащие интересующий параметр  $m$ . Тогда характеристический полином представит в виде  $D(S) = R(S) + mQ(S)$ . Получим частотный характеристический полином заменой  $S = j\omega$  в виде  $D(j\omega) = R(j\omega) + mQ(j\omega)$  и определим интересующий параметр  $m$ .

Характеристическое уравнение

$$R(j\omega) + mQ(j\omega) = 0 \text{ или } m = -\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega).$$

Изменяя  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , определим значения  $X$  и  $Y$ . Построим границу  $D$ -разбиения. Граница  $D$ -разбиения – это геометрическое расположение мнимой оси в плоскости одного параметра. Переход через границу означает переход через мнимую ось. Кривая  $D$ -разбиения делит плоскость на ряд областей (рис. 6.29).

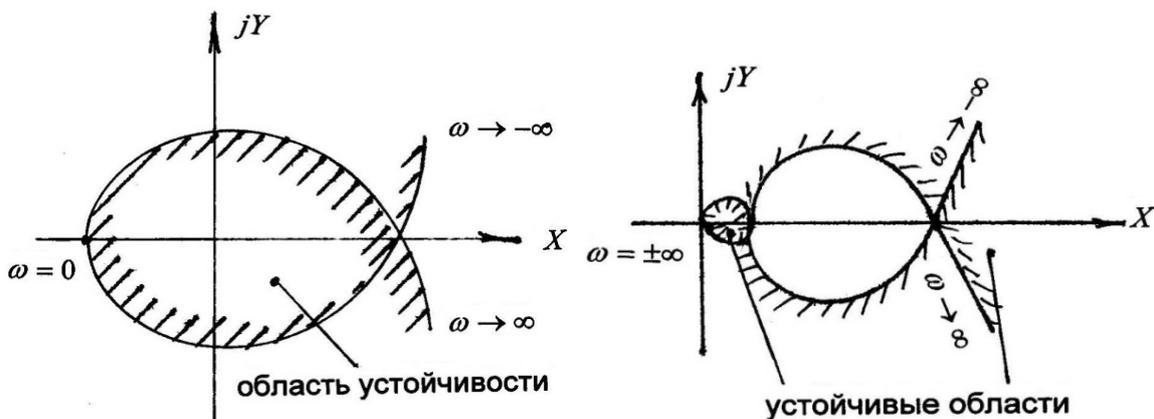


Рис. 6.29. Граница  $D$ -разбиения для разных систем

*Штриховка кривой D-разбиения производится слева при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что соответствует положению мнимой оси в координатной системе и расположению левых устойчивых корней.*

Обычно задачу D-разбиения решают с помощью вычислительных машин.

### **Построение области устойчивости в плоскости двух параметров**

При проектировании часто надо узнать влияние на устойчивость двух параметров, например  $m$  и  $h$ . Предполагаем, что параметры  $m$  и  $h$  входят линейно в характеристическое уравнение замкнутой системы. Сгруппируем слагаемые, зависящие от интересующих параметров. Тогда уравнение примет вид

$$mR(S) + hQ(S) + P(S) = 0.$$

Заменив  $S = j\omega$ , получаем  $mR(j\omega) + hQ(j\omega) + P(j\omega)$ . Каждое слагаемое разделяем на вещественную и мнимую части:

$$R(j\omega) = R_1(j\omega) + jR_2(j\omega);$$

$$Q(j\omega) = Q_1(j\omega) + jQ_2(j\omega);$$

$$P(j\omega) = P_1(j\omega) + jP_2(j\omega).$$

Подставив полученные выражения в уравнение, получим тождество

$$mR_1(j\omega) + jmR_2(j\omega) + hQ_1(j\omega) + jhQ_2(j\omega) + P_1(j\omega) + jP_2(j\omega) \equiv 0.$$

Тождество имеет место, если отдельно равны нулю действительная и мнимая части. Объединим все слагаемые, вещественные и мнимые, в отдельности:

$$A(\omega) = mR_1(\omega) + hQ_1(\omega) + P_1(\omega) = 0;$$

$$B(\omega) = mR_2(\omega) + hQ_2(\omega) + P_2(\omega) = 0.$$

В результате получим два параметрических уравнения с двумя неизвестными  $m$  и  $h$ . Решаем эти уравнения относительно  $m$  и  $h$ . Если главный определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то каждому значению  $\omega$  будет соответствовать одна точка на границе области устойчивости.

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = R_1(\omega)Q_2(\omega) - R_2(\omega)Q_1(\omega);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = -P_1(\omega)Q_2(\omega) + P_2(\omega)Q_1(\omega);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_1(\omega) & -P_1(\omega) \\ R_2(\omega) & -P_2(\omega) \end{vmatrix} = -R_1(\omega)P_2(\omega) + R_2(\omega)P_1(\omega).$$

По этим уравнениям для каждого значения  $\omega$  определяют  $m$  и  $h$ , исключая промежуточный параметр  $\omega$ :

$$m = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad h = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Строят границу  $D$ -разбиения в плоскости двух параметров как функцию  $m = f(h)$ .

При некоторых значениях  $\omega$   $\Delta = 0$ , а  $\Delta_1 \neq 0$  и  $\Delta_2 \neq 0$  точка границы  $D$ -разбиения уходит в  $\infty$ . Параметрические уравнения становятся эквивалентными и определяют прямую (рис. 6.30).

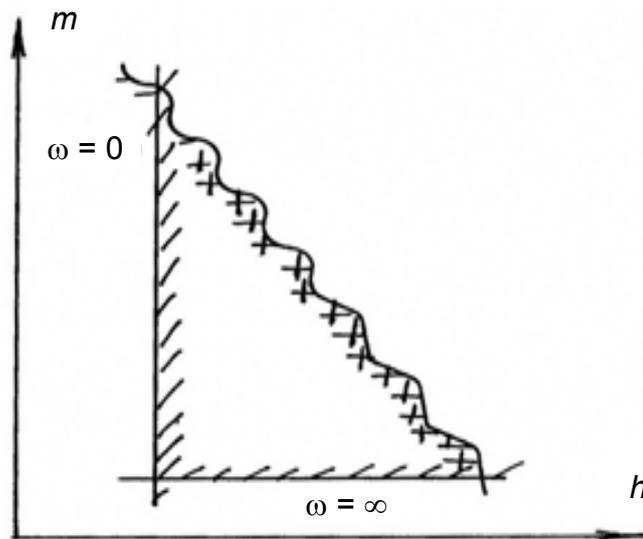


Рис. 6.30. Границы  $D$ -разбиения в плоскости двух параметров

Особые прямые отвечают значениям  $\omega = 0$  и  $\omega = \pm\infty$ .

### **Правила штриховки границы $D$ -разбиения**

Граница  $D$ -разбиения в плоскости двух исследуемых параметров штрихуется слева при  $\omega \rightarrow \infty$ , если  $\Delta > 0$ , и справа, если  $\Delta < 0$ . Так как граница  $D$ -разбиения совпадает для  $+\infty$  и  $-\infty$ , то она штрихуется дважды с одной и той же стороны (рис. 6.31).

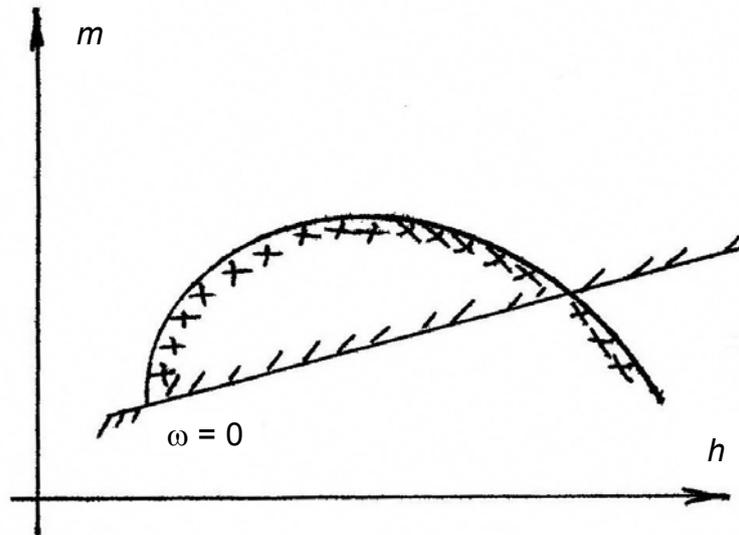


Рис. 6.31. Штриховка границ  $D$ -разбиения

Штриховка особых прямых одинарная. Заштрихованные и не заштрихованные стороны прямой и кривой вблизи точки сопряжения направлены друг к другу.

Метод  $D$ -разбиения требует строгого соблюдения формальных процедур, иначе его применение приведет к грубым ошибкам.

Если проектируемая система устойчивая, то можно приступить к анализу её работы.

### **Контрольные вопросы по разделу 6**

1. Что такое устойчивость систем автоматического регулирования?
2. Как определить устойчивость по корням характеристического уравнения?
3. Какой алгебраический критерий устойчивости Вы знаете и в чём его сущность?
4. Как исследуется устойчивость систем автоматического регулирования прямым методом А.М. Ляпунова?
5. По какой передаточной функции исследуется система на устойчивость, используя критерий Михайлова?
6. В чём суть критерия Найквиста?
7. Как определить запасы устойчивости системы по логарифмическим характеристикам?

## Раздел 7. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

### 7.1. Понятия качества регулирования

Устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности системы автоматического регулирования. Неустойчивая система неработоспособна, поэтому нет смысла анализировать качество её работы.

Устойчивость означает, что переходные (собственные) составляющие процессов (движений) затухают. Но за какое время затухают, с какой точностью воспроизводится входной сигнал, каковы величины ошибок, вызванных возмущением? Все эти стороны работоспособности системы обобщены в понятиях качества процессов регулирования.

Максимальное значение выходной величины при переходном процессе, вид этого процесса и время, за которое выходная величина достигает заданного значения, называются *показателями качества регулирования*. Для прямой оценки качества системы используют кривую переходного процесса  $Y(t)$  в размерном виде или  $h(t)$  в безразмерном виде.

Если к системе, показанной на рис. 7.1, прикладывается типовое внешнее воздействие (ступенчатое, импульсное, линейное, гармоническое или любое другое), то в системе возникает переходный процесс, при котором выходная величина изменяется во времени.

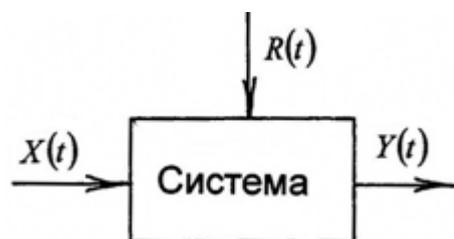


Рис. 7.1. Структурная схема системы

Качество регулирования, т.е. реакцию системы на входные воздействия, проверяют отдельно для задающего  $X(t)$  и возмущающего  $R(t)$  воздействий, при этом одно из них приравнивается к нулю. Качество легко определить, если построить график процесса регулирова-

ния, по которому можно найти величину показателей качества: статическую ошибку, динамическую ошибку, время регулирования, склонность системы к колебаниям.

Например, при ступенчатом входном воздействии  $X(t) = 1(t)$  (рис. 7.2) можно наблюдать три вида переходных процессов, показанных на рис. 7.3, при этом возмущающее воздействие считается отсутствующим. Колебательный переходный процесс обозначен цифрой: 1, 2 – монотонный, 3 – апериодический.

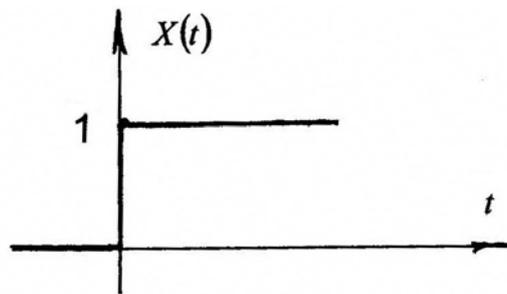


Рис. 7.2. Ступенчатое входное воздействие

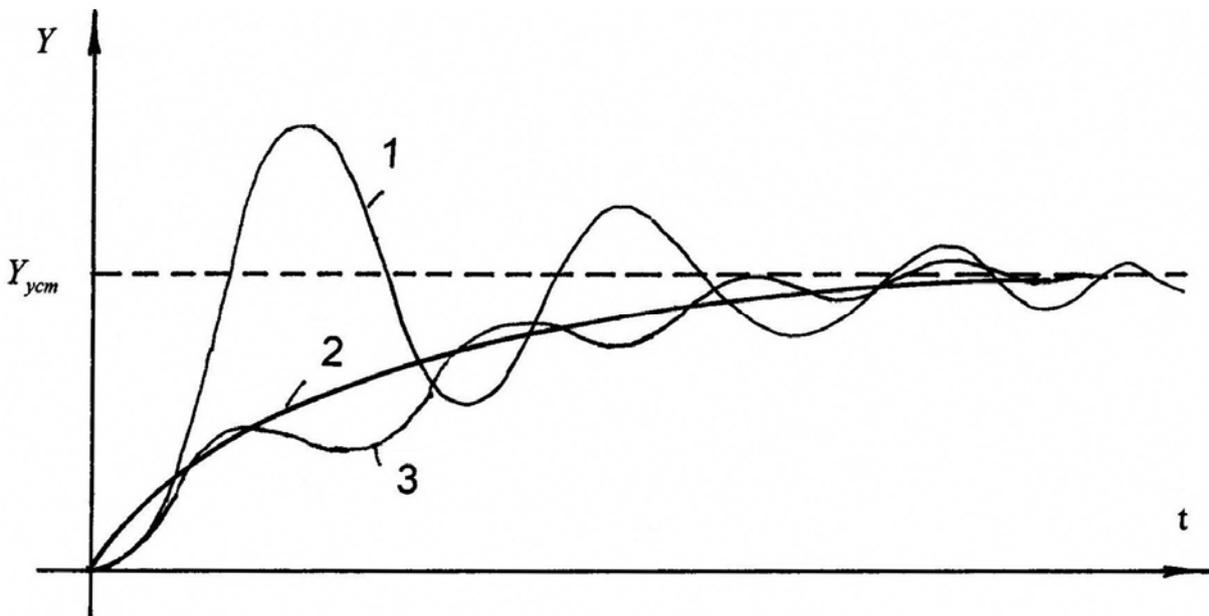


Рис. 7.3. Возможный переходный процесс при ступенчатом входном воздействии

Выходная величина при переходном процессе стремится к установившемуся значению. Продолжительность процесса определяется до того момента времени, при котором  $Y$  больше не выходит из допустимой зоны. Обычно это  $(\pm 2...5\%)Y_{уст}$  от установившегося значения. Отклонения меньше 5% обычно считаются вполне допустимыми.

**Быстродействие системы** оценивается временем переходного процесса  $t_{\text{пер}}$  (рис. 7.4). Может интересовать и время, за которое регулируемая величина возрастает максимально  $T_M$ , или время  $T_c$ , когда  $Y$  первый раз достигает установившегося  $Y_{\text{уст}}$  значения, называемого временем срабатывания системы, период колебаний –  $T_K$ . Быстродействие системы оценивается временем переходного процесса. *Время регулирования, или время переходного процесса  $t_{\text{пер}}$* , – это отрезок времени с момента начала возмущающего воздействия на замкнутую систему автоматического управления до момента времени, при котором регулируемый параметр от конечного состояния равновесия становится равным или меньше  $\pm 5\%$  от установившегося значения.

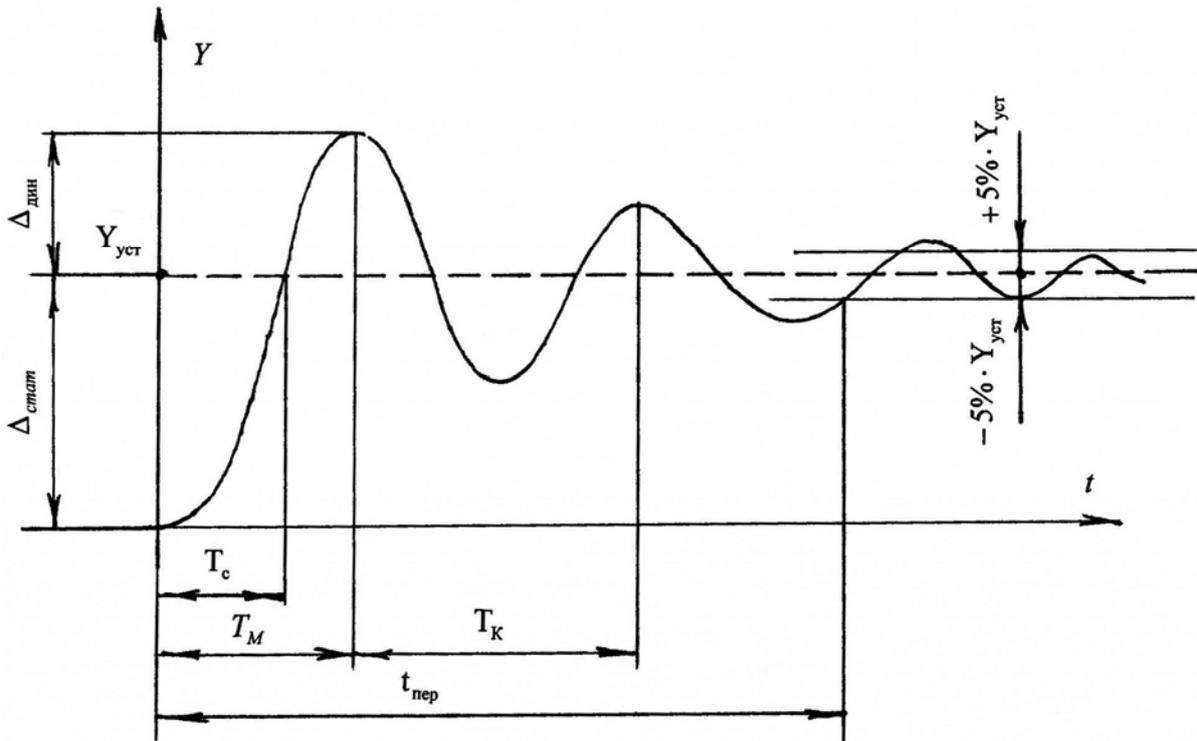


Рис. 7.4. График переходного процесса

Статическая ошибка  $\Delta_{\text{стат}}$  – это разность величин регулируемого параметра в исходном и конечном (после окончания процесса регулирования) состояниях равновесия системы. Динамическая ошибка –  $\Delta_{\text{дин}}$  показывает, насколько регулируемый параметр в процессе регулирования превышает установившееся значение. Параметры  $Y$ ,  $\Delta_{\text{стат}}$ ,  $\Delta_{\text{дин}}$  – величины размерные.

Для астатической системы (рис. 7.5) статическая ошибка равна нулю, т.е. система возвращается в исходное состояние равновесия. Если система астатическая, то величину приемлемой зоны колебаний берут  $(\pm 5\%)\Delta_{\text{дин}}$  от величины динамической ошибки. В астатических САУ конечное и исходное равновесие совпадает с заданным.

Склонность системы к колебаниям определяется двумя параметрами: величиной перерегулирования –  $\sigma$  (это  $\Delta_{\text{дин}}$  – динамическая ошибка в процентном выражении) и количеством колебаний регулируемой величины до входа в  $\pm 5\%$ -й коридор приемлемой зоны колебаний –  $n$ .

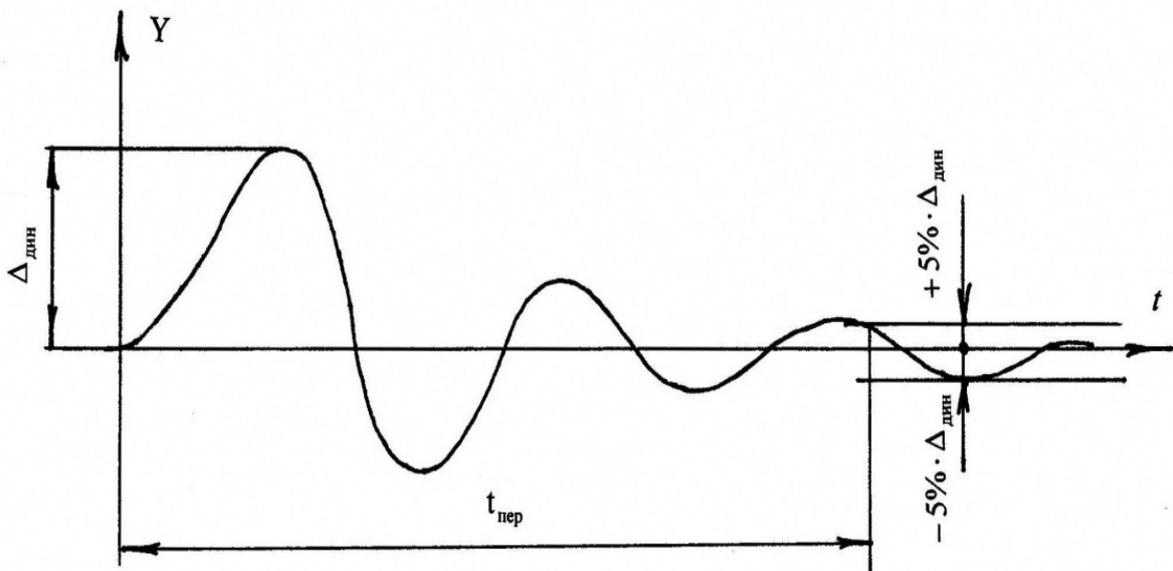


Рис. 7.5. График переходного процесса астатической системы

Перерегулирование  $\sigma$  – это динамическая ошибка, отнесенная к номинальной величине регулируемого параметра в %.

Динамическая ошибка  $\Delta_{\text{дин}}$  имеет размерность. Покажем, почему предпочтительней величина перерегулирования. Например, пусть динамическая ошибка  $\Delta_{\text{дин}} = 2^\circ\text{C}$ . Для температуры  $1000^\circ\text{C}$  – это величина незначительная, а для  $36,6^\circ\text{C}$  – это много.

Величина перерегулирования вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta_{\text{дин}}}{Y_{\text{уст}}} 100\%.$$

Величина перерегулирования или максимальная динамическая ошибка обычно допускается  $\sigma \approx 10\ldots 20\%$  от установившегося значения, количество колебаний  $n \approx 2\ldots 3$ .

Кривую переходного процесса  $Y(t)$  можно получить либо прямым путем, решая аналитически или численными методами уравнения математической модели системы, либо косвенно, используя частотные и временные характеристики системы путем построения некоторой её аппроксимации.

Если построение переходного процесса с использованием ЭВМ затруднено, то одним из методов построения переходного процесса может быть частотный метод построения характеристики по АФЧХ системы.

## 7.2. Расчет переходных процессов по частотным характеристикам

Непосредственная количественная связь между временными и частотными характеристиками осуществляется с помощью преобразований Фурье. Преобразуем функцию  $X(t)$  в  $X(S)$ :

$$X(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}; \quad X(S) = \frac{1}{S};$$

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(S) e^{St} dS; \quad Y(S) = \int_0^{\infty} Y(t) e^{-St} dt.$$

Если все корни лежат слева от мнимой оси при  $S = j\omega$ , то

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad Y(j\omega) = \int_0^{\infty} Y(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Когда все корни лежат левее мнимой оси,  $Y(t)$  состоит из суммы убывающих экспонент и экспоненциально затухающих гармонических колебаний. Площадь под кривой каждой из этих компонент  $Y_i(t)$  – величина конечная, значит конечная величина – площадь под всей кривой.

Пусть имеется система, показанная на рис. 7.6.

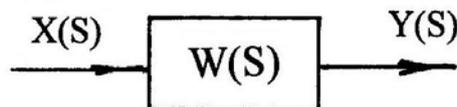


Рис. 7.6. Структурная схема замкнутой системы автоматического регулирования

Тогда  $Y(S) = W(S) \cdot X(S)$ , или подставив значение  $X(S)$ , получаем  $Y(S) = \frac{W(S)}{S}$  или  $Y(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{j\omega}$ , однако  $Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$ .

Разделим передаточную функцию на вещественную  $A(\omega)$  и мнимую части  $B(\omega)$  и отбросим мнимую часть, поскольку  $Y(t)$  – вещественная и, учитывая, что  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t$ , окончательно получаем

$$Y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7.1)$$

Эта формула устанавливает связь между переходной функцией и вещественной частотной характеристикой замкнутой системы. Но непосредственное определение переходного процесса по формуле сложно, так как нужно считать интеграл. Приближенное вычисление переходных процессов предложил Солодовников В.В. В основе метода лежит приближенное вычисление интеграла. Строится график процесса регулирования замкнутой системы с использованием вещественной части АФЧХ, называемой вещественной характеристикой.



*Солодовников Владимир Викторович (1910–1991 гг.)*

Получив частотную передаточную функцию замкнутой системы и разделив её на вещественную и мнимую части  $W(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ , строится график вещественной характеристики замкнутой системы  $A(\omega)$  (рис. 7.7, а).

По аналитическому выражению  $A(\omega)$ , изменяя частоту  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , строится график (рис. 7.7, а), который разбивают затем на несколько трапеций с алгебраической суммой площадей, близкой к алгебраической сумме площади под интегралом (7.1). Первая трапеция –  $abed$  (рис. 7.7, б). Площадь трапеции  $abed$  больше, чем положительная часть АХЧ (рис. 7.7, а), на площадь трапеции  $oced$ , которую учтем во

второй трапеции с отрицательной площадью  $odfk$  (рис. 7.7, в). Сумма двух площадей трапеций (рис. 7.7, б и в) равна приблизительно площади под кривой АЧХ (рис. 7.7, а).

На рис. 7.7, а график  $A(\omega)$  разбит на две трапеции. Для большей точности можно разбить на большее число трапеций – на 3...6. На рис. 7.8 показаны графики процессов регулирования для каждой трапеции в одних осях координат, построенные с использованием табличных данных, рассчитанных для единичной (с ординатой, равной 1) трапеции и коэффициентов масштабного перехода от единичной трапеции к заданным.

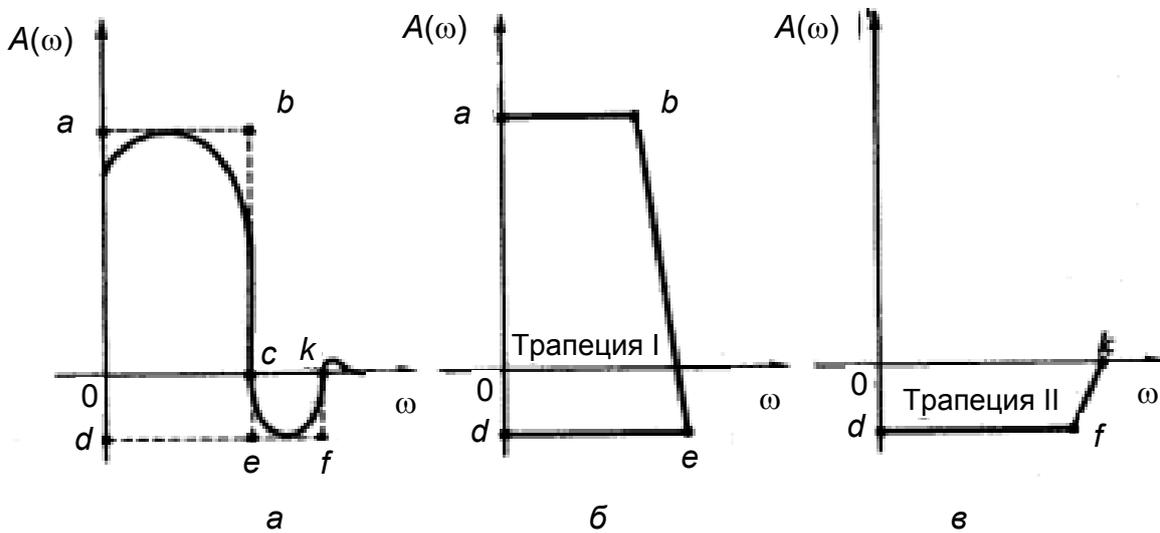


Рис. 7.7. График вещественной частотной характеристики и его аппроксимации: а – вещественная частотная характеристика; б – аппроксимация первой трапецией; в – аппроксимация второй трапецией

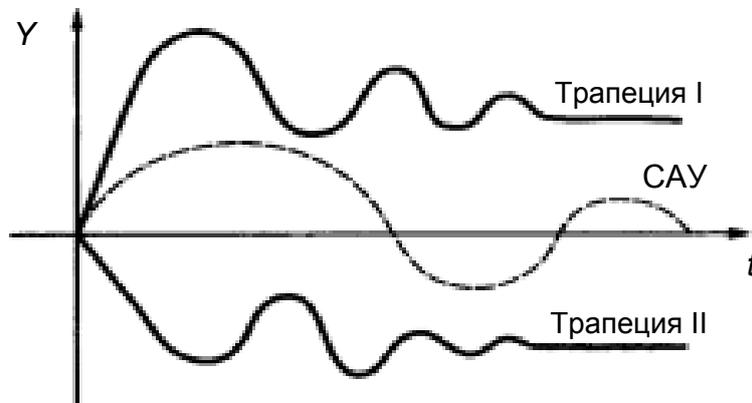


Рис. 7.8. Графики переходных процессов для трапеций и суммарный график переходного процесса системы

Алгебраически суммируя графики трапеции 1 и трапеции 2 (или графики всех имеющихся трапеций), получается график переходного процесса для системы в целом. По этому графику делается вывод об устойчивости системы и определяются показатели качества работы спроектированной системы.

### 7.3. Оценка качества переходных процессов по частотным характеристикам

Приблизительно вид переходного процесса может быть определен по вещественной частотной характеристике  $A(\omega)$ . Этот метод особенно удобно применять, когда для исследования систем пользуются частотными методами. На основании интеграла (7.1) были получены оценки качества переходного процесса.

– Значение вещественной частотной характеристики замкнутой системы при  $\omega = 0$ , т.е.  $A(\omega = 0)$ , совпадает с установившимся значением выходной величины  $Y_{уст}$  (рис. 7.9).

Чтобы величина перерегулирования не превышала 18% от статического отклонения, достаточно иметь положительно нарастающую непрерывную характеристику  $A(\omega)$ . На рис. 7.10 показаны три вида вещественной частотной характеристики.

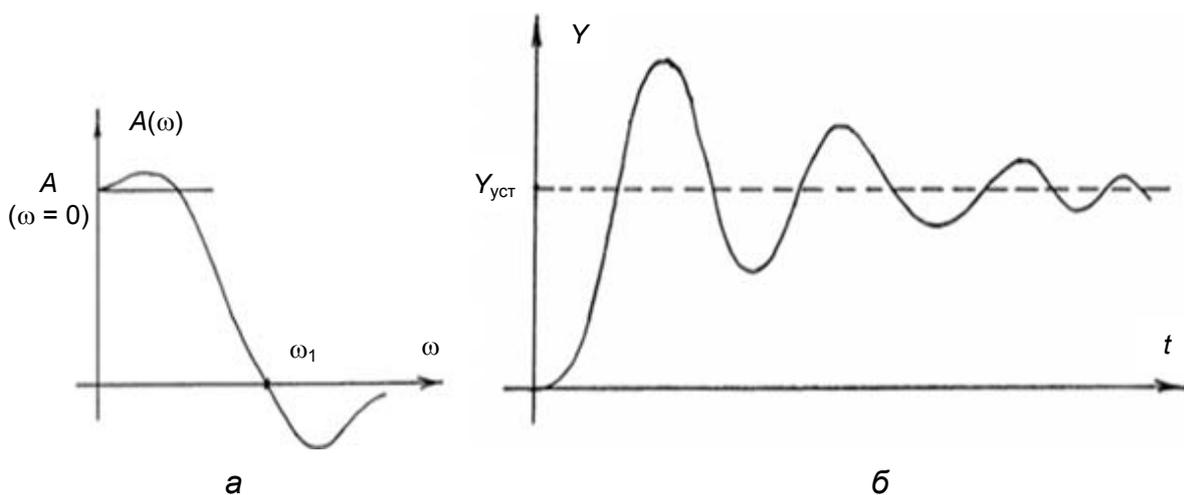


Рис. 7.9. Графики: а – вещественная частотная характеристика; б – ожидаемый вид переходного процесса

Если вещественная частотная характеристика имеет вид 1, показанный на рис. 7.10, то предполагаемый вид переходного процесса будет таким, как представлено на рис. 7.11. При этом величина пере-

регулирования  $\sigma > 18\%$ . Максимальная величина перерегулирования для этого вида кривой будет  $\sigma_{\max} = \frac{1,18 \cdot A_{\max} - A(\omega = 0)}{A(\omega = 0)} 100\%$ .

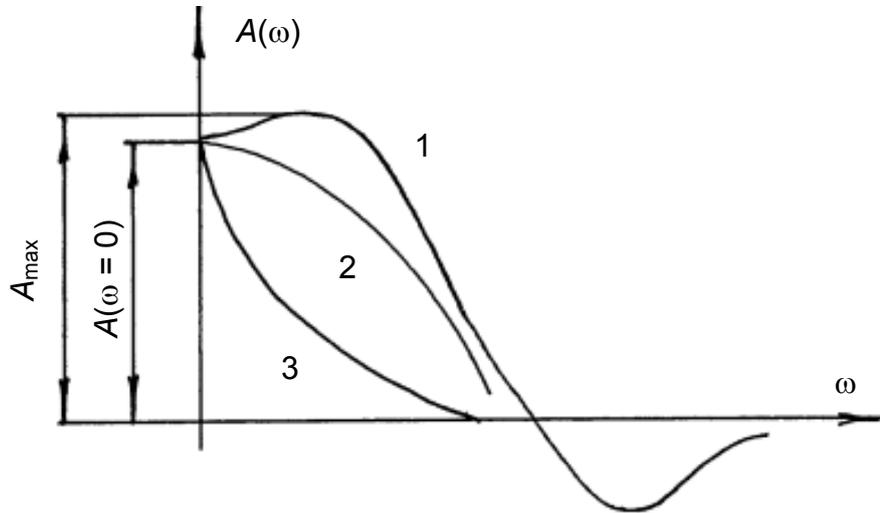


Рис. 7.10. Графики вещественной частотной характеристики

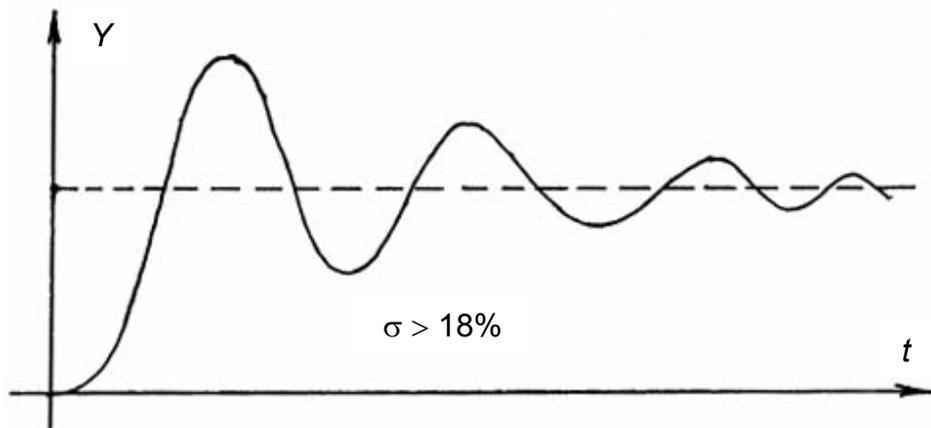


Рис. 7.11. График переходного процесса при  $\sigma > 18\%$

При вещественной частотной характеристике, соответствующей 2 кривой на рис. 7.10, вид переходного процесса ожидается таким, как показано на рис. 7.12.

Если вещественная частотная характеристика соответствует 3 кривой на рис. 7.10, то величина перерегулирования  $\sigma = 0$ , ожидаемый вид переходного процесса показан на рис. 7.13.

– Для монотонных процессов время затухания  $t_{\text{пер}}$  до значений, когда переходный процесс войдет в зону  $Y = \pm 5\% Y_{\text{уст}}$ , будет  $t_{\text{пер}} = \frac{4\pi}{\omega_{\pi}}$ , где  $\omega_{\pi}$  (рис. 7.10).

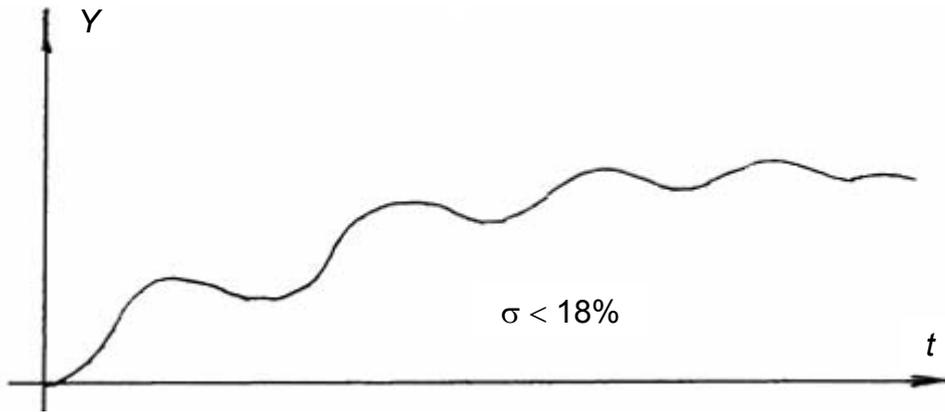


Рис. 7.12. График переходного процесса при  $\sigma < 18\%$

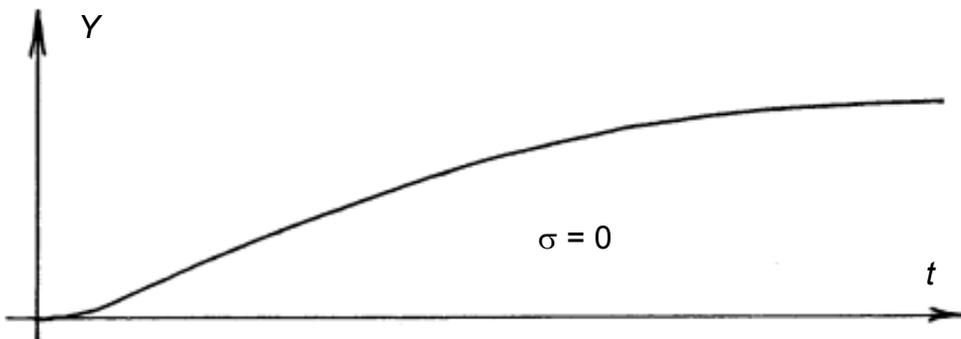


Рис. 7.13. График переходного процесса при  $\sigma = 0$

В общем случае время переходного процесса лежит в диапазоне

$$\frac{3\pi}{\omega_{\pi}} < t_{\text{пер}} < \frac{8\pi}{\omega_{\pi}}$$

При прочих равных условиях переходный процесс затухает тем быстрее, чем больше растянута область положительной вещественной частотной характеристики вдоль оси  $\omega$ , т.е. чем больше  $\omega_{\pi}$ .

– Склонность системы к колебаниям тем больше, чем выше пик у вещественной характеристики. Если пик уходит в бесконечность, система находится на границе колебательной устойчивости.

– Связь между графиками переходных процессов и логарифмическими амплитудно-частотными характеристиками можно проиллюстрировать на примерах.

Рассмотрим систему первого порядка, структурная схема которой показана на рис. 7.14.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{раз}}(S) = \frac{K}{S} = \frac{1}{\frac{1}{K} \cdot S} = \frac{1}{TS},$$

где частота среза  $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{T} = K$ . Графику амплитудно-частотной характеристики, показанному на рис. 7.15, а, соответствует график переходного процесса (рис. 7.15, б).

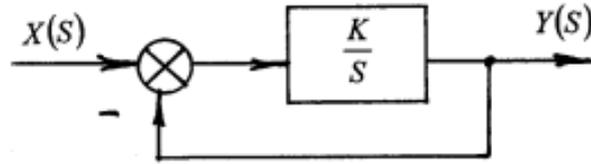


Рис. 7.14. Структурная схема системы

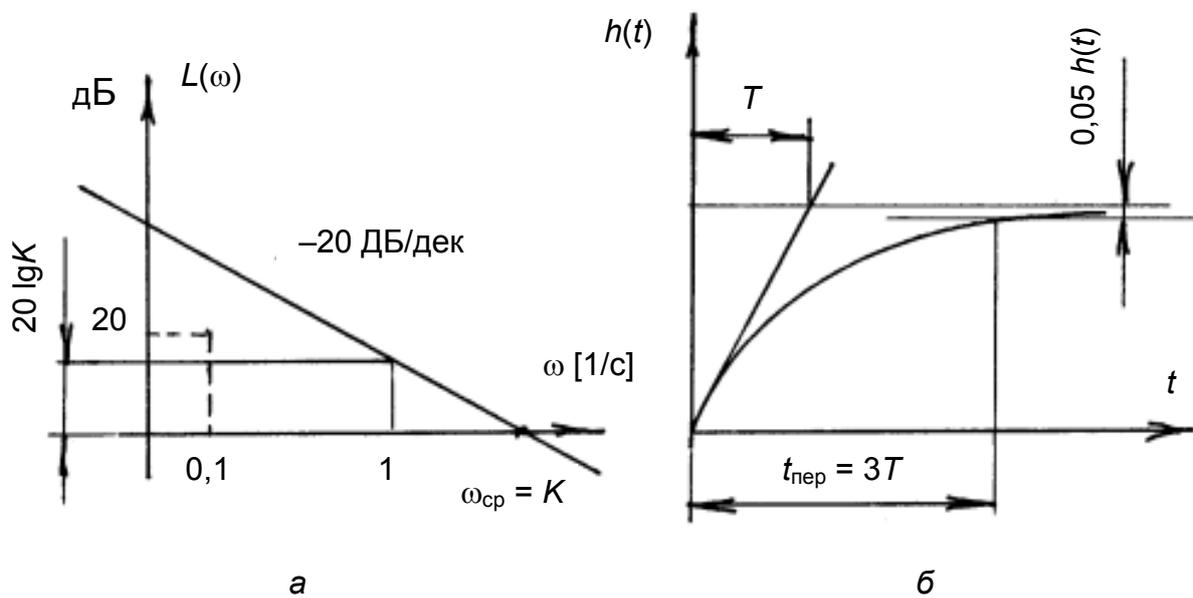


Рис. 7.15. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (а); график переходного процесса (б)

Рассмотрим систему второго порядка с передаточной функцией разомкнутой системы  $W_{\text{раз}}(S) = \frac{K}{(T_1 + 1)S}$ , структурная схема которой показана на рис. 7.16. В зависимости от того, где происходит присоединение апериодического звена второго порядка, т.е. при сопрягаемой частоте  $\omega_1$  логарифмическая характеристика находится выше (рис. 7.17), на оси частот  $\omega$  (рис. 7.18), или перелом ЛАХ происходит ниже оси  $\omega$  (рис. 7.19); вид ожидаемых графиков переходного процесса будет разным.

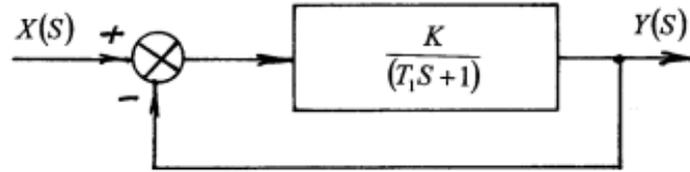


Рис. 7.16. Структурная схема системы второго порядка

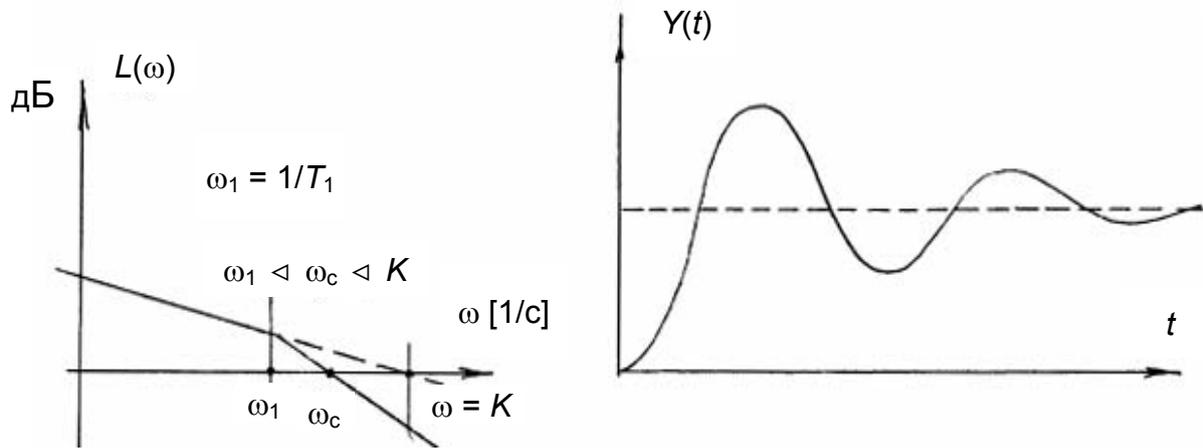


Рис. 7.17. ЛАХ и ожидаемый вид переходного процесса

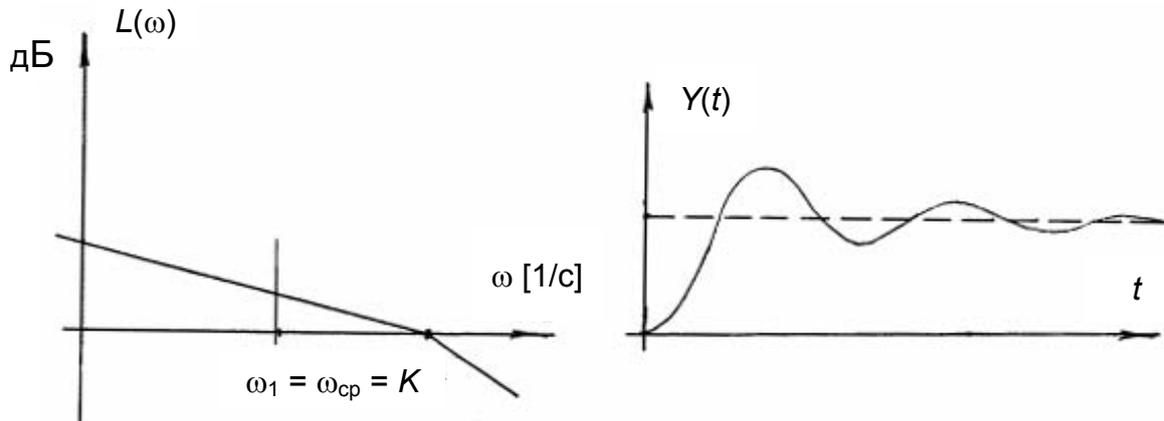


Рис. 7.18. ЛАХ при сопрягаемой частоте  $\omega_1$ , равной частоте среза, и ожидаемый вид переходного процесса

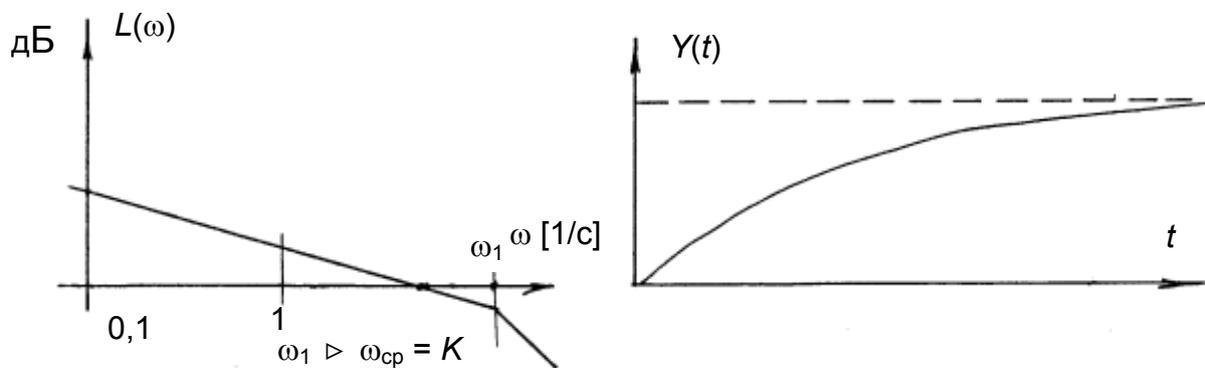


Рис. 7.19. Вид графика переходного процесса при частоте среза, меньше сопрягаемой частоты

Для того чтобы переходная составляющая не была колебательной, частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  должна приходиться на участок с наклоном  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ . Это распространяется и на более сложные системы.

Логарифмические характеристики у сложных систем в области средних частот должны иметь наклон  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ , а в области низких и вы-

соких частот значение отрицательных наклонов может быть  $-40 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ ,

$-60 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$  и более. Чем шире участок с наклоном  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ , тем ближе

переходная характеристика к экспоненте. Частота среза в этом случае обратно пропорциональна постоянной времени экспоненты.

Количественную связь между показателями качества процесса регулирования и параметрами типовой логарифмической характеристики получим с помощью монограмм Честната-Майера или по фор-

муле  $\omega_{\text{ср}} \geq \frac{b \cdot \pi}{T_{\text{max}}}$ .

#### 7.4. Корневые методы оценки качества

Вид корней характеристического уравнения определяет характер переходных процессов в системе. Для устойчивости системы необходимо, чтобы вещественная часть корней была отрицательная (теорема Ляпунова). Для устойчивости системы необходимо, чтобы степень полинома числителя была на единицу меньше степени полинома знаменателя. Повышение быстродействия может быть достигнуто за счет увеличения общего коэффициента усиления  $K$ .

Показателем качества устойчивости системы является степень удалённости корней характеристического уравнения замкнутой системы, лежащих в левой комплексной полуплоскости, от мнимой оси. Время переходного процесса можно определить, зная степень устойчивости. Под степенью устойчивости понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня  $\lambda$ . На рис. 7.20 показана плоскость корней характеристического уравнения замкнутой передаточной функции системы, на которой «X» обозначены некие значения корней.

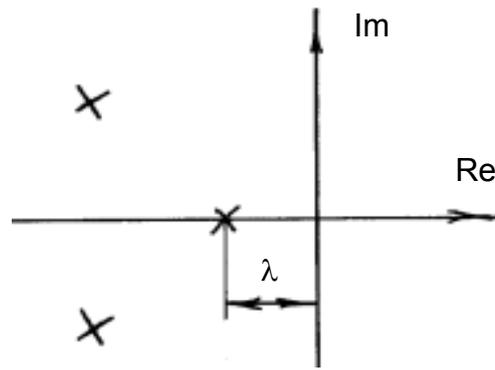


Рис. 7.20. Плоскость корней характеристического уравнения

Осями плоскости корней являются вещественная часть корня  $Re$  и мнимая часть корня  $Im$ . Время переходного процесса определяется как  $t_{пер} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\Delta}$ , где  $\Delta$  – зона допустимого отклонения выходной величины, которая обычно принимается  $\Delta = 3...5\% Y_{уст}$ .

Если принять  $\Delta = 5$ , то время переходного процесса будет

$$t_{пер} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{0,05} = \frac{3}{\lambda}.$$

Склонность системы к колебаниям может характеризоваться отношением мнимой части корня  $\beta$  к вещественной  $\lambda$  (рис. 7.21). Это отношение называется колебательностью.

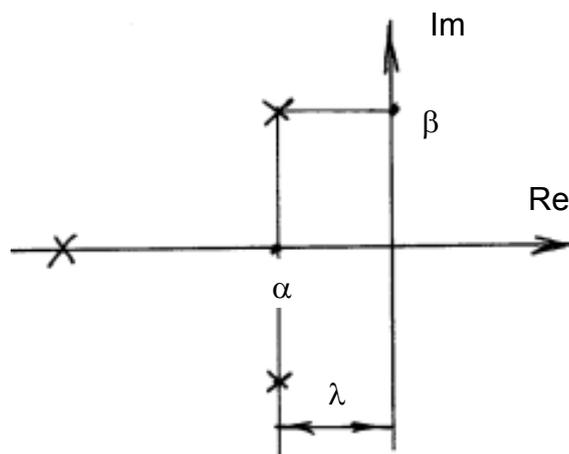


Рис. 7.21. Плоскость корней характеристического уравнения

Число колебаний примерно определяется как максимально отношение мнимой части к вещественной из корней системы:

$$n = \left[ \frac{\beta}{\alpha} \right]_{\max}.$$

В системах обычно допускается затухание за один период не менее чем на 90...98%, допустимая колебательность при этом составит

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \approx \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Задание определенной колебательности системы заставляет ограничивать область расположения корней двумя лучами, составляющими с вещественной осью угол  $\varphi$ , как показано на рис. 7.22.

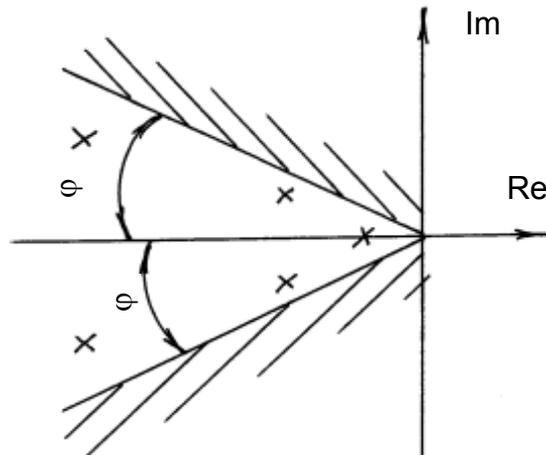


Рис. 7.22. Плоскость корней характеристического уравнения с лучами, ограничивающими колебательность

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{arctg} \mu.$$

Если заданы колебательность и степень устойчивости, то добавляется ограничение по вертикальной прямой, проходящей параллельно мнимой оси на расстоянии  $\lambda$ , как показано на рис. 7.23.

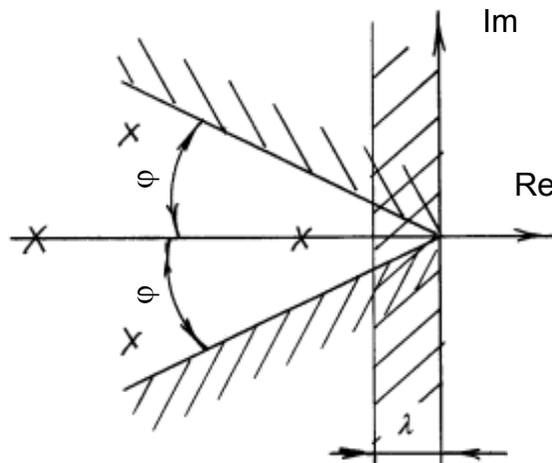


Рис. 7.23. Положение площади корней характеристического уравнения при ограничениях высокочастотных составляющих переходного процесса и при ограничениях величины перерегулирования

Таким образом, при оценке качества системы по расположению корней характеристического уравнения следует учитывать, что переходный процесс в основном определяется ближайшим к мнимой оси действительным корнем или ближайшей к мнимой оси парой сопряженных комплексных корней.

### ***Контрольные вопросы по разделу 7***

1. Что такое статическая ошибка САУ и в каких системах она наблюдается?
2. Что такое динамическая ошибка САУ?
3. Что такое время регулирования, перерегулирования и степень затухания в процессе регулирования?
4. Как определить качество САУ методом трапеций?
5. Как оценивается качество системы?
6. Как определить показатели качества?
7. Какова связь между показателями качества и положением корней на комплексной плоскости?

## **Раздел 8. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

### **8.1. Точность работы систем в установившихся режимах**

Устойчивость систем автоматического управления является необходимым, но недостаточным условием работы. Конечный результат определяется точностью работы системы в реальных условиях, когда непрерывно изменяются управляющий и возмущающий сигналы. Точность работы оценивается величиной ошибки, которая равна разности между требуемым и действительным значением выходной величины, т.е. управляющего сигнала  $X(t) = \varepsilon(t) - Y(t)$ , где  $\varepsilon(t)$  – ошибка. На графиках переходного процесса (рис. 8.1) показана ошибка между установившимся значением выходной величины и текущим значением. Точность рассматривают при установившемся режиме работы, при этом переходным процессом пренебрегают.

Поскольку сигналы изменяются во времени, причём если управляющий сигнал задается, то возмущающий может изменяться случайным, неизвестным образом, и мгновенное значение ошибки не может быть определено при проектировании. Поэтому качество ра-

боты системы автоматического управления оценивается с помощью косвенных показателей.

Точность САУ оценивают ошибкой, возникающей при различных типовых входных сигналах.

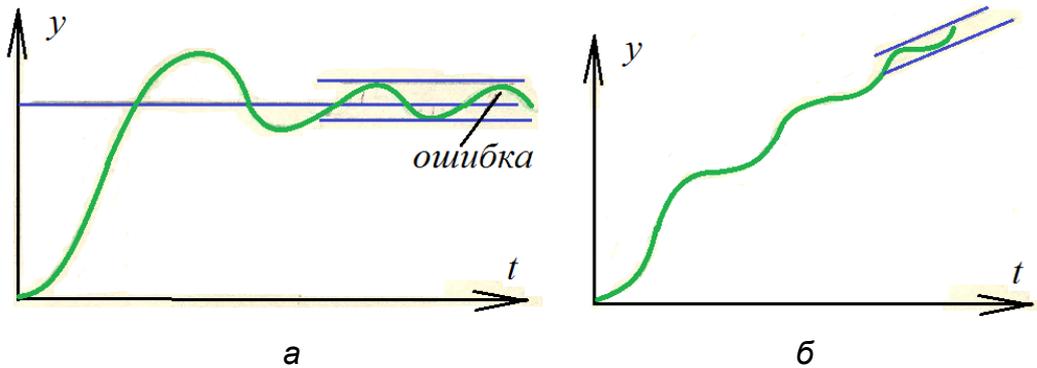


Рис. 8.1. Графики переходных процессов: колебательного (а); монотонного (б)

Рассмотрим систему автоматического управления, у которой одно управляющее воздействие  $x(t)$  в изображениях Лапласа – это  $x(S)$ , и одно возмущающее воздействие  $R(S)$  (рис. 8.2).

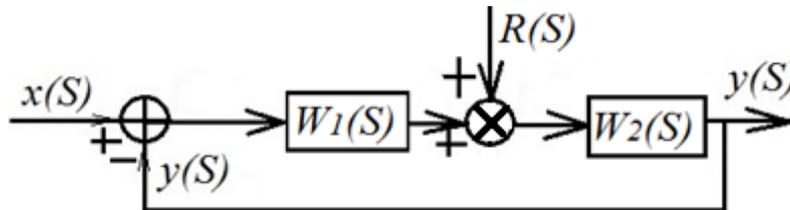


Рис. 8.2. Структурная схема системы автоматического управления

Структурная схема по управляющему воздействию показана на рис. 8.3, при этом считается, что возмущающее воздействие отсутствует. Передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию  $W_{px}(S) = W_1(S) + W_1(S)$ , ошибка по управляющему воздействию  $\varepsilon_x$ . Передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию  $W(S) = \frac{W_1(S) \cdot W_2(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}$ .

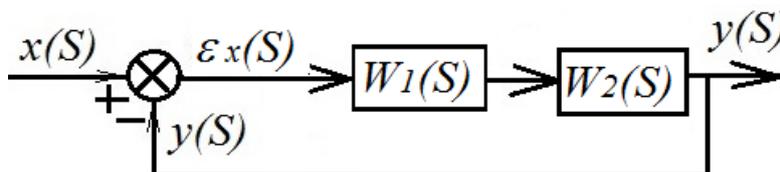


Рис. 8.3. Структурная схема по управляющему воздействию

Структурная схема по ошибке управляющего воздействия показана на рис. 8.4.

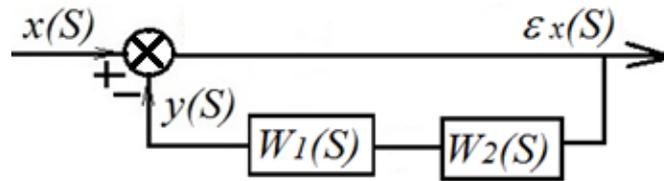


Рис. 8.4. Структурная схема по ошибке управляющего воздействия

Передаточная функция системы по ошибке управляющего воздействия  $W_{\varepsilon x}(S) = \frac{\varepsilon_x(S)}{x(S)} = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}$ .

Ошибка по управляющему воздействию определяется

$$\varepsilon_x(S) = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} \cdot x(S).$$

Структурная схема по возмущающему воздействию  $R(S)$ , при этом считается, что управляющее воздействие равно нулю, т.е. отсутствует (рис. 8.5).

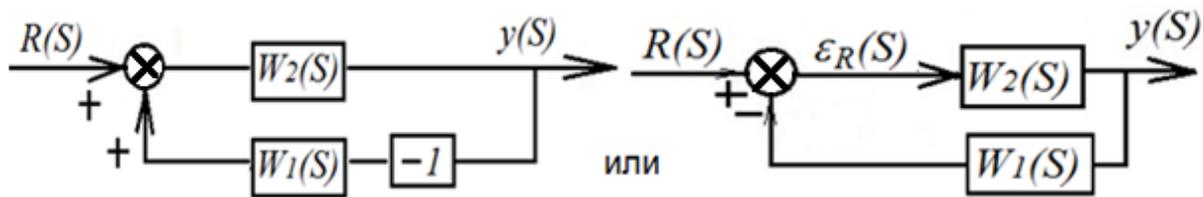


Рис. 8.5. Структурная схема по возмущающему воздействию

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию  $W_R(S) = \frac{W_2(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}$ .

Передаточная функция системы по ошибке возмущающего воздействия  $W_{\varepsilon R}(S) = \frac{\varepsilon_R(S)}{R(S)} = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}$ . Ошибка по возмущающему воздействию

$$\varepsilon_R(S) = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} \cdot R(S).$$

Структурная схема разомкнутой системы по возмущающему воздействию показана на рис. 8.6. Передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию  $W_{\text{раз}R}(S) = W_1(S) \cdot W_2(S)$ .

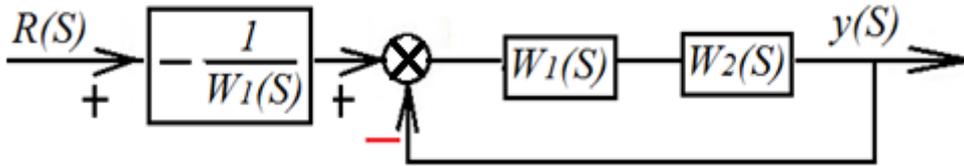


Рис. 8.6. Структурная схема разомкнутой системы по возмущающему воздействию

Ошибка системы будет равна сумме ошибок по управляющему и возмущающему воздействиям  $\varepsilon(S) = \varepsilon_x(S) + \varepsilon_R(S)$ , или

$$\varepsilon(S) = \frac{1}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} [x(S) + R(S)].$$

## 8.2. Неизменность управляющего и возмущающего воздействий

В качестве типового режима рассматриваем установившееся состояние, (при  $(t \rightarrow +\infty)$ , отсюда  $(S \rightarrow 0)$ ), при постоянных значениях  $x(t) = \text{const}$  и  $R(t) = 0$  или  $R(t) = \text{const}$  и  $x(t) = 0$ , что будет при ступенчатом входном воздействии после переходного процесса. Ошибка системы в этом режиме называется статической. Ошибка не изменяется во времени, но может зависеть от величины управляющего и возмущающего воздействий.

Если передаточная функция статическая, т.е. нет интегрирующих звеньев, передаточная функция системы имеет вид

$$[W(S)]_{S=0} = \left[ \frac{b_m \cdot S^m + \dots + b_1 \cdot S^1 + b_0 \cdot S^0}{a_n \cdot S^n + \dots + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0} \right]_{S=0} = \frac{b_0}{a_0}, \text{ где } K = \frac{b_0}{a_0}; W(S) = K.$$

Ошибка статической системы будет равна

$$[\varepsilon(S)]_{S \rightarrow 0} = \frac{1}{1 + K} \cdot [x(S) + R(S)],$$

где  $K$  – коэффициент усиления всей разомкнутой системы.

Это значит, что в статической системе ошибка обработки задающего воздействия будет всегда. Ошибка будет меньше, чем больше коэффициент усиления.

Если передаточная функция астатическая, т.е. есть интегрирующие звенья

$$[W(S)]_{S \rightarrow 0} = \left[ \frac{b_m \cdot S^m + \dots + b_1 \cdot S^1 + b_0 \cdot S^0}{S^v \cdot (a_n \cdot S^n + \dots + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0)} \right]_{S=0} = \left[ \frac{K_r}{S} \right]_{S \rightarrow 0},$$

$r$  – порядок астатизма. При  $r = 1$  и  $K_r = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $[W(S)]_{S \rightarrow 0} = \frac{K_r}{0} = \infty$ .

Ошибка астатической системы

$$[\varepsilon(S)]_{S \rightarrow 0} = \frac{1}{1+W(S)} \cdot [x(S) + R(S)] = \left\{ \frac{1}{1+\infty} \cdot [x(S) + R(S)] \right\}_{S \rightarrow 0} = 0.$$

Для того чтобы ошибка была равна «0», надо ввести интегрирующее звено, т.е. сделать систему астатической (рис. 8.7). С введением астатических звеньев система может стать неустойчивой, что показано на рис. 8.8. Кривая стала охватывать точку с координатой  $(-1, 0)$ .

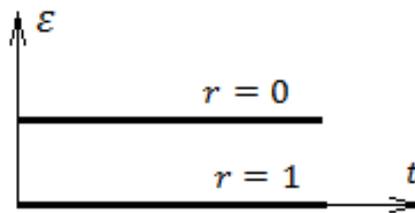


Рис. 8.7 Зависимость ошибки от астатизма системы

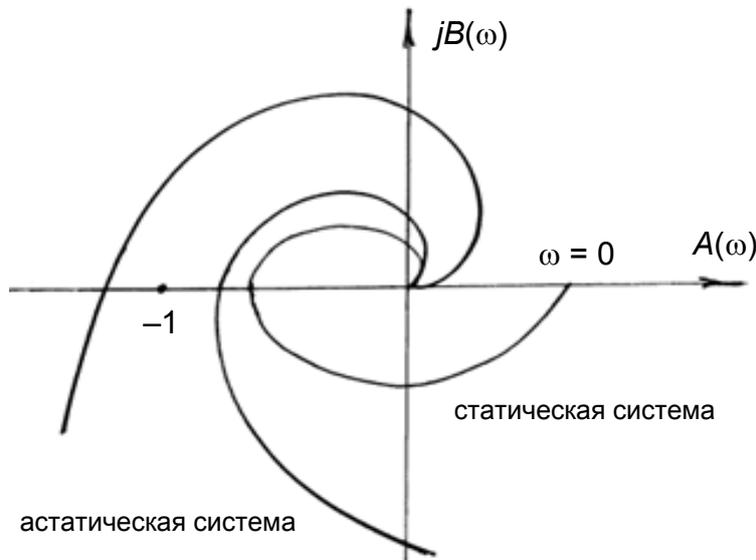


Рис. 8.8. Амплитудно-частотные характеристики статической и астатической систем

### 8.3. Движение с постоянной скоростью

При типовом управляющем входном воздействии, с движением системы автоматического управления с постоянной скоростью, изменение входного воздействия осуществляется по линейному закону (рис. 8.9); возмущающие воздействия при этом остаются неизменными.

Задающее воздействие  $x(t) = v \cdot t$ , где  $v = \text{const}$ , в изображениях Лапласа  $x(S) = v_0 \cdot \frac{1}{S}$ , при  $R(t) = \text{const}$ . Или

$$x(t) = v \cdot 1(t), \text{ так как } 1(t) \bullet \text{---} \bullet \frac{1}{S}.$$

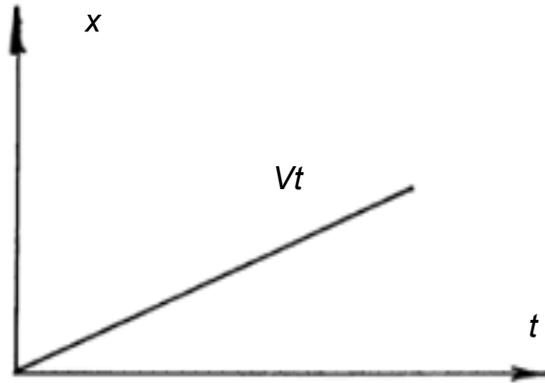


Рис. 8.9. График управляющего воздействия с постоянной скоростью

Ошибка системы  $\varepsilon(S)$  – это сумма ошибок по управляющему воздействию и по возмущающему воздействию. Она будет вызвана в том числе и собственной погрешностью чувствительного элемента

$$\varepsilon(S) = \frac{x(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} + \frac{R(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)}.$$

Первое слагаемое – это скоростная ошибка, второе слагаемое дает статическую ошибку. Если система статическая  $W(S)|_{S \rightarrow 0} = K$ , то ошибка будет равна бесконечности

$$\varepsilon(S) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \frac{1}{S}}{1 + K} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{v_0}{S \cdot (1 + K)} = \frac{v_0}{0} = \infty.$$

Если система астатическая  $W(S)|_{S \rightarrow 0} = \frac{K_v}{S}$ , то ошибка будет

$$\varepsilon(S) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \frac{1}{S}}{1 + \frac{K_v}{S}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{v_0}{S \cdot (1 + K_v)} = \frac{v_0}{K_v},$$

что продемонстрировано на рис. 8.10.

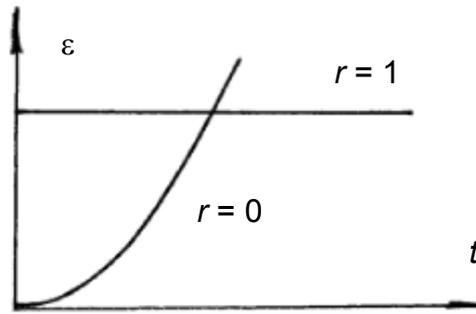


Рис. 8.10. Зависимость ошибки системы от времени

#### 8.4. Другие законы воздействия

Ошибки обработки входных воздействий можно вычислить с помощью «коэффициентов ошибок».

Предположим, что к системе приложено только управляющее воздействие. Структурная схема системы показана на рис. 8.11 и передаточная функция замкнутой системы  $\Phi(S)$  по ошибке управления  $\Phi_{\varepsilon_x}(S)$  приводится к виду

$$\Phi_{\varepsilon_x}(S) = \frac{1}{1+W(S)} = \frac{b_m \cdot S^m + \dots + 1}{a_n \cdot S^n + \dots + 1}.$$

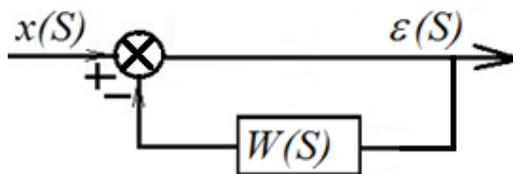


Рис. 8.11. Структурная схема по ошибке управления

Разложением на элементарные звенья дробно-рациональная функция может быть представлена в виде, где

$$C_0 = [\Phi_{\varepsilon_x}(S)]_{S=0};$$

$$C_1 = \left[ \frac{d\Phi_{\varepsilon_x}(S)}{dS} \right]_{S=0};$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2\Phi_{\varepsilon_x}(S)}{dS^2} \right]_{S=0};$$

$$C_k = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k\Phi_{\varepsilon_x}(S)}{dS^k} \right]_{S=0}.$$

Величины  $C_0, C_1, C_2 \dots$  – называются коэффициентами ошибок. Изображение ошибки находят в виде:

$$[\varepsilon_x(S)]_{S \rightarrow 0} = \Phi_{\varepsilon_x}(S) \cdot x(S) = (C_0 + C_1 S + C_2 S^2 + \dots + C_k S^k) x(S).$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, установившаяся ошибка получается

$$\varepsilon_x(t) = C_0 \cdot x(t) + C_1 \frac{dx(t)}{dt} + C_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots,$$

где  $C_0 x(t)$  – позиционная ошибка;  $C_1 \dot{x}(t)$  – скоростная ошибка;  $C_2 \ddot{x}(t)$  – ошибка по ускорению.

Коэффициенты составляющих ошибки находятся по формулам:

$$C_i = \left\{ \frac{1}{S^i} \cdot \left[ 1 - \Phi(S) - \sum_0^i C_{i-1} \cdot S^{i-1} \right] \right\}_{S=0},$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$

Этот метод применим и для определения ошибки по возмущающему воздействию, т.е. по  $R(t)$ .

**Пример.** Задана система автоматического управления (рис. 8.12) с передаточной функцией  $W(S) = \frac{K_v}{S(T^2 S^2 + 2T\xi S + 1)}$ , где  $K_v = 1000 \frac{1}{S}$ ,  $T = 0,003$  с,  $\xi = 0,75$ .

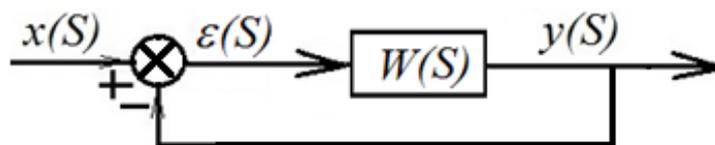


Рис. 8.12. Структурная схема системы

Закон изменения входного воздействия

$$x(t) = a_0 + v_0 \cdot t.$$

Определить ошибку обработки задающего воздействия  $x(t)$ , если

$$x(t) = a_0 + v_0 \cdot t; \quad a_0 = 1,5 \text{ м}; \quad v_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Порядок расчета.

Ошибка в установившемся режиме движения следящей системы:

$$\varepsilon_x(t) = C_0 \cdot x(t) + C_1 \dot{x}(t) + C_2 \ddot{x}(t),$$

где  $x(t) = a_0 + v_0 \cdot t$ ;  $\dot{x}(t) = v_0$ ;  $\ddot{x}(t) = 0$ .

Передаточная функция замкнутого контура:

$$\Phi(S) = \frac{W(S)}{1+W(S)} = \frac{K_v}{S \cdot (T^2 S^2 + 2T\xi S + 1) + K_v}.$$

Находим коэффициенты ошибок ( $C_0$  и  $C_1$ ) из уравнения общего вида ( $C_i$ ):

$$C_i = \left\{ \frac{1}{S^i} \cdot \left[ 1 - \Phi(S) - \sum_0^i C_{i-1} \cdot S^{i-1} \right] \right\}_{S=0},$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \left\{ \frac{1}{S^0} \cdot [1 - \Phi(S)] \right\}_{S=0} = 1 - \frac{K_v}{T^2 S^3 + 2T\xi S^2 + S + K_v} \Big|_{S=0} = \\ &= \frac{T^2 S^3 + 2T\xi S^2 + S + K_v - K_v}{T^2 S^3 + 2T\xi S^2 + S + K_v} \Big|_{S=0} = \frac{0}{K_v} = 0; \\ C_1 &= \left\{ \frac{1}{S} \cdot [1 - \Phi(S) - C_0 S^0] \right\}_{S=0} = \left\{ \frac{1}{S} \cdot \left[ \frac{T^2 S^3 + 2T\xi S^2 + S + K_v - K_v}{T^2 S^3 + 2T\xi S^2 + S + K_v} \right] \right\}_{S=0} = \\ &= \left\{ \frac{1}{S} \cdot S \cdot \left[ \frac{(T^2 S^2 + 2T\xi S + 1)}{(T^2 S^3 + 2T\xi S^2 + S + K_v)} \right] \right\}_{S=0} = \frac{1}{K_v}. \end{aligned}$$

Ошибка в установившемся режиме движения следящей системы будет следующей:

$$\varepsilon_{уст}(t) = C_0 \cdot [a_0 + v_0 \cdot t] + C_1 \cdot v_0 + C_2 \cdot 0.$$

Подставим исходные данные:

$$\varepsilon_{уст}(t) = C_1 \cdot v_0 = \frac{1}{K_v} \cdot v_0 = \frac{2}{1000} \frac{с \cdot м}{с} = 2 \cdot 10^{-3} м = 0,002 м.$$

### **Контрольные вопросы и задания по разделу 8**

1. Приведите пример переходного процесса и покажите на нём величину ошибки.
2. Приведите пример структурной схемы САУ по ошибке.
3. Чему равна ошибка системы, если имеются два входных воздействия?
4. Как влияет астатизм системы на ошибку?
5. Какое звено необходимо ввести, чтобы уменьшить ошибку?
6. Как определить скоростную ошибку?
7. Как определить ошибку по ускорению?

## Раздел 9. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

### 9.1. Коррекция системы управления

Под улучшением качества процесса управления понимается не только повышение точности в типовых режимах (в режимах при типовом входном сигнале), но и изменение динамических свойств системы для обеспечения заданных показателей качества, т.е. быстродействия и колебательности.

Задача получения в системе управления заданных показателей точности, запасов устойчивости, быстродействия может быть решена только в комплексе. Нельзя улучшить только один из показателей в отрыве от других. Это усложняет коррекцию системы и часто добиваются требуемых показателей качества посредством последовательного приближения и рассмотрения многих вариантов.

Увеличение общего коэффициента усиления системы приводит к уменьшению ошибки системы, но одновременно не только снижаются запасы устойчивости, но и система может стать неустойчивой.

При проектировании системы вначале определяют энергетические параметры, геометрические размеры, производится подбор аппаратуры. Заводы изготавливают элементы по стандартным значениям, а не по желаемым (заданным). На этом этапе показатели качества обычно не учитываются, поскольку в математическом описании системы неизвестных больше, чем уравнений.

Но энергетические параметры хорошо бы оценить по упрощенной, линейной, грубой математической модели, используя критерии устойчивости, например Гурвица, Михайлова или другой критерий, и определить без показателей качества и точности, устойчива ли система.

Расчеты при проектировании любой системы должны заканчиваться динамическим расчетом, где определяются уже не только устойчивость системы в целом при типовых внешних воздействиях, но и показатели качества (быстродействие, колебательность) и точность системы.

Что делать, если спроектированная система не проходит по каким-то заданным параметрам?

#### 1. Подбор параметров.

Попытаться рациональным образом изменить параметры системы (коэффициенты передачи отдельных звеньев, постоянные време-

ни, уменьшить массу подвижных частей). Если система чисто гидравлическая, то метод подбора параметров, которые можно изменять, является единственным.

## 2. Коррекция системы.

Когда изменение параметров не решает задачу, то изменяют структуру системы. Для этого вводят в систему автоматического управления корректирующие звенья, которые должны изменить динамику системы в нужном направлении.

Коррекция – это исправление системы, чтобы показатели качества удовлетворяли заданным требованиям путем введения дополнительных корректирующих звеньев.

Пример. Амплитудно-фазовая частотная характеристика спроектированной системы не обеспечивает заданный запас устойчивости по амплитуде  $A_{31}$  (рис. 9.1). Запас по амплитуде и фазе увеличится, если АФЧХ повернуть по часовой стрелке, для чего необходимо ввести дополнительное корректирующее форсирующее звено.

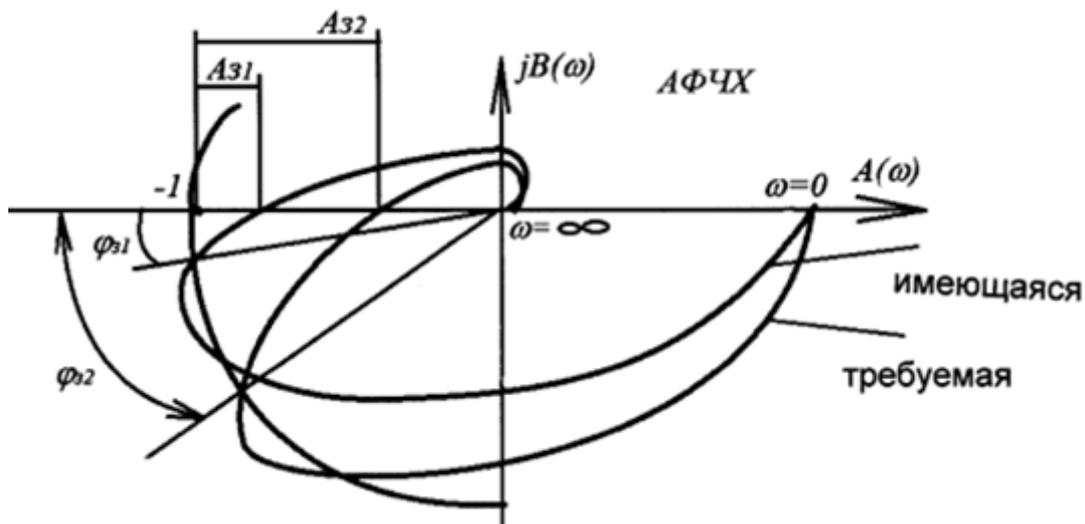


Рис. 9.1. Амплитудно-фазовые частотные характеристики системы

## 9.2. Корневой метод коррекции

Имеется некая система автоматического управления, структурная схема которой показана на рис. 9.2. При исследовании обнаружено, что показатели качества не удовлетворяют заказчика, например, время переходного процесса больше заданного.

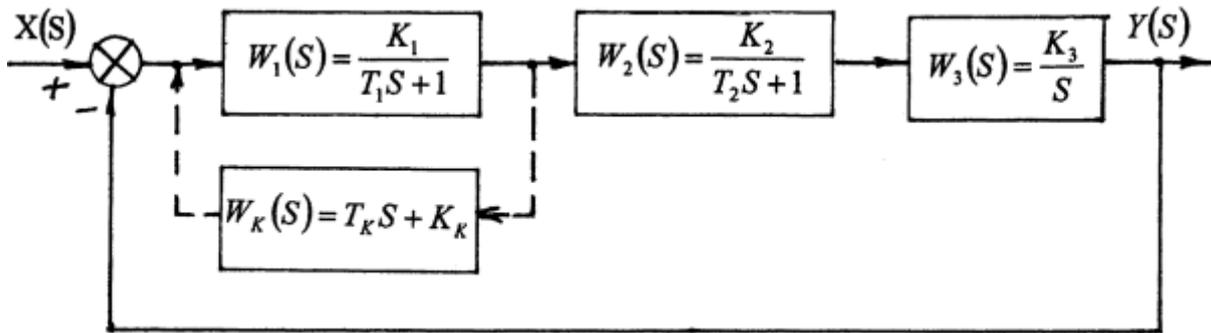


Рис. 9.2. Структурная схема системы с корректирующим звеном

При корректировке необходимо ввести форсирующее звено. Передаточная функция форсирующего звена первого порядка имеет вид  $W(S) = T_K S + K_K$ . Значит, нужно определить параметры этого звена  $T_K$  и  $K_K$ . Передаточную функцию звена  $W_1(S)$  вместе с корректирующим звеном обозначим  $W_{10}(S)$ :

$$W_{10}(S) = \frac{K_1}{(T_1 S + 1) \left[ 1 + \frac{K_1(T_K S + K_K)}{(T_1 S + 1)} \right]} = \frac{K_1}{T_1 S + 1 + K_1 T_K S + K_1 K_K}.$$

В результате передаточная функция скорректированной замкнутой системы имеет вид

$$W_x(S) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 S + 1 + K_1 T_K S + K_1 K_K)(T_2 S + 1) S + K_1 K_2 K_3} = \frac{H(S)}{D(S)}.$$

Получаем характеристическое уравнение  $D(S) = 0$  с коэффициентами

$$D(S) = (T_1 T_2 + K_1 T_2 T_K) S^3 + (T_2 + K_1 K_K T_2 + T_1 + K_1 T_K) S^2 + (1 + K_1 K_K) S + K_1 K_2 K_3$$

или  $D(S) = S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0$ ,

где коэффициентами обозначены:

$$a_2 = \frac{T_2 + K_1 K_K T_2 + T_1 + K_1 T_K}{T_1 T_2 + K_1 T_2 T_K}; \quad a_1 = \frac{1 + K_1 K_K}{T_1 T_2 + K_1 T_2 T_K}; \quad a_0 = \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 + K_1 T_2 T_K}.$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $T_K$  и  $K_K$  нужно выбрать желаемое характеристическое уравнение  $D_{ж}(S)$ .

Желаемое характеристическое уравнение выбирается для систем не выше третьего порядка заданием корней уравнения из условия заданных показателей качества.

На комплексной плоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы проводятся ограничительные линии (рис. 9.3).

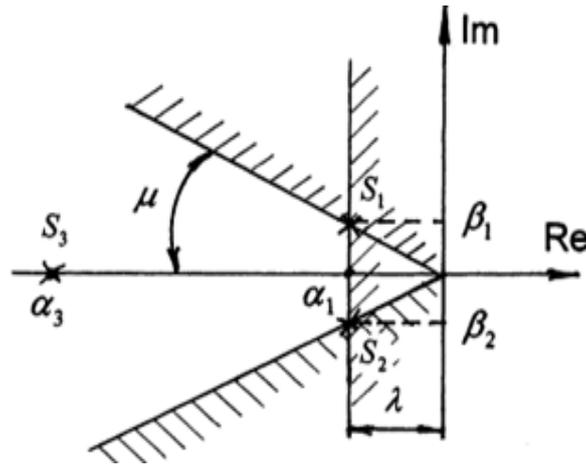


Рис. 9.3. Плоскость корней характеристического уравнения с ограничительными линиями

Для того чтобы уложиться в период переходного процесса, определяем отрицательную вещественную часть корня, ближайшего к мнимой оси  $t_{\text{пер}} \cong \frac{3...4}{\lambda}$  или  $\lambda = \frac{3...4}{t_{\text{пер}}}$ . На расстоянии  $\lambda$  от мнимой оси

проводим вертикальную линию, ограничивающую значение корней. Колебательность системы ограничивается углом  $\mu$ , равным отношению мнимой части  $\beta$  комплексного корня к вещественной части  $\alpha$ ,

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} \leq 1,57.$$

Мы задаемся в незаштрихованной зоне корнями  $S_1, S_2, S_3$ .

В нашем примере пусть 1 и 2 корень будут равны  $S_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\omega$ , третий корень равен  $S_3 = -\alpha_3$ . Минимальная колебательность будет при  $\mu = 1,57$ . Пусть  $\lambda = 3$ , тогда  $\alpha_1 = \lambda$  и

$$\omega = \beta = \mu \cdot \alpha = 1,57 \cdot 3 = 4,71.$$

Значит, корни будут равны  $S_{1,2} = -3 \pm j \cdot 4,71$ .

Пусть  $S_3 = -\alpha_3 = -10$ . Чем дальше корень от мнимой оси, тем быстродействие меньше.

Получаем в результате:

$$D_{\text{ж}}(S) = (S + \alpha_1 + j\omega) \cdot (S + \alpha_1 - j\omega) \cdot (S + \alpha_3) = S^3 + b_2 S^2 + b_1 S + b_0,$$

где  $b_2 = 2\alpha_1 + \alpha_3$ ,  $b_1 = 2\alpha_1\omega$ ,  $b_0 = \alpha_1\omega^2 + \alpha_3\omega$ .

Приравниваем имеющийся и желаемый характеристические полиномы, которые по виду одинаковые, т.е.  $D(S) = D_{\text{ж}}(S)$ ; это будет при

$b_2 = a_2$ ,  $b_1 = a_1$ ,  $b_0 = a_0$ . В последнее равенство подставляем значения и определяем  $T_K$ , поскольку в уравнении одно неизвестное

$$\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\omega^2 = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3}{T_1 T_2 + K_1 T_2 T_K};$$

$$T_K = \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \omega^2) + (\alpha_1 \alpha_3 K_1 T_2 + \alpha_3 \omega^2 K_1 T_2)}.$$

### 9.3. Коррекция с использованием логарифмических характеристик

Первоначально спроектированная система, не отвечающая требованиям точности и устойчивости, принимается за неизменяемую часть. Звенья, выполняющие функции корректирующих устройств, должны быть введены в систему для обеспечения заданных характеристик. Корректирующие звенья могут быть включены в структурную схему системы: последовательно, параллельно или в виде местных обратных связей.

Какой тип коррекции использовать, определяется удобством технического осуществления. Корректирующие звенья могут состоять из различных по своей физической природе элементов (электрических, механических, гидравлических). Все корректирующие звенья стандартизированы.

**Последовательная коррекция** (структурная схема показана на рис. 9.4) представляет собой фильтры (фильтрует частоты). Наиболее просто последовательная коррекция осуществляется из электрических элементов:  $R$  – сопротивлений,  $C$  – емкостей,  $L$  – индуктивностей. При последовательной коррекции дополнительное устройство включается последовательно с элементами системы.

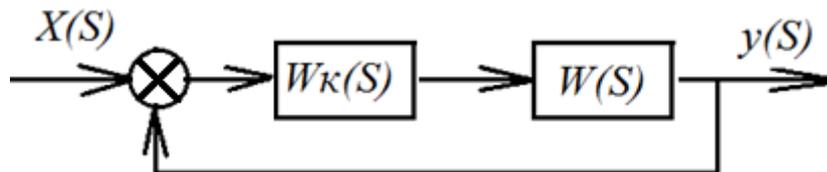


Рис. 9.4. Структурная схема последовательной коррекции

На структурной схеме обозначена передаточная функция спроектированной системы  $W(S)$ , передаточная функция корректирующего звена  $W_K(S)$ . Передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W_p(S) = W(S) \cdot W_k(S).$$

По показателям качества выбирается  $W_{ж}(S)$  – желаемая передаточная функция системы  $W_{ж}(S) = W_k(S) \cdot W(S)$  или логарифмическая характеристика  $20\lg W_{ж}(S) = 20\lg W_k(S) + 20\lg W(S)$ . Желаемая логарифмическая характеристика  $L_{ж}$  складывается из характеристики корректирующего звена  $L_k$  и логарифмической характеристики спроектированной системы  $L$ , т.е.  $L_{ж} = L_k + L$ , откуда можно определить  $L_k = L_{ж} - L$ .

В справочниках приводится множество схем звеньев различного вида, используемых при последовательной коррекции; это и электрические схемы, и механические.

**Параллельная коррекция** (структурная схема показана на рис. 9.5) применяется, когда нужны сложные законы управления корректирующих звеньев. Параллельное корректирующее устройство включается параллельно части системы и состоит из одного или нескольких звеньев. Сигнал на выходе параллельной коррекции суммируется с выходным сигналом охваченной части системы.

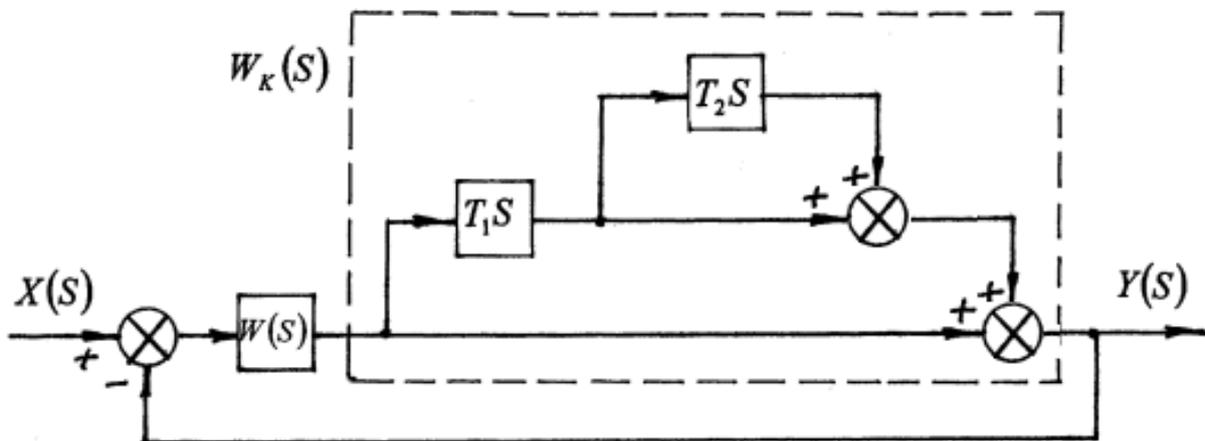


Рис. 9.5. Структурная схема с параллельной коррекцией системы

В схеме на рис. 9.5 корректирующее звено состоит из двух звеньев  $W_k(S) = W_{1k}(S) \cdot W_{2k}(S)$ . Структурная схема корректирующего звена показана на рис. 9.6. Передаточная функция корректирующего звена

$$W_k(S) = (1 + T_1S)(1 + T_2S) = 1 + T_1S + T_2S + T_1T_2S^2,$$

$$W_k(S) = T_1T_2S^2 + (T_1 + T_2)S + 1.$$

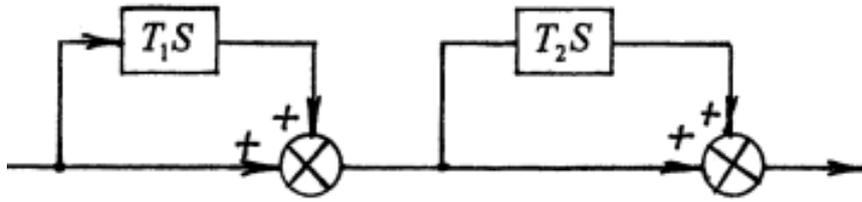


Рис. 9.6. Структурная схема корректирующего звена

**Коррекция обратными связями.** Корректирующие звенья могут быть: жесткие и инерционно жесткие, – улучшающие качество переходного процесса; гибкие – уменьшают колебательность; инерционно гибкие – превращают звено первого порядка в звено второго порядка.

Обратной связью можно охватывать либо отдельную часть структурной схемы, например звено  $W_2(S)$ , как показано на рис. 9.7, либо вводить дополнительную обратную связь для прямой цепи всей системы (рис. 9.8).

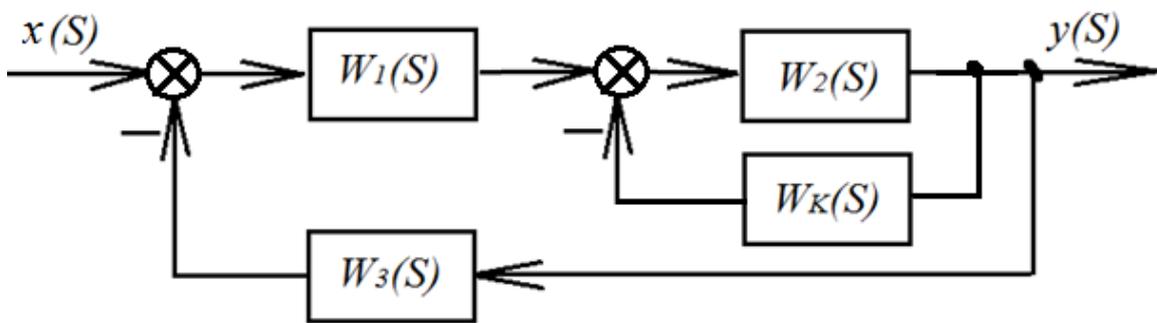


Рис. 9.7. Структурная схема системы с корректирующим звеном, охватывающим одно звено

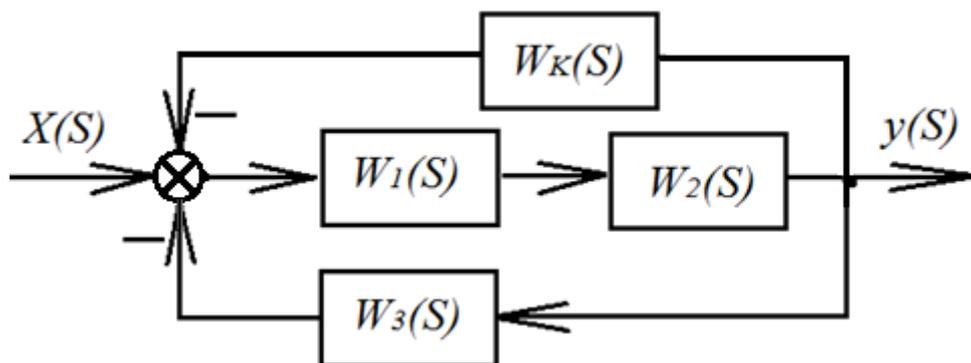


Рис. 9.8. Структурная схема системы с корректирующим звеном, охватывающим прямую цепь

Динамические свойства линейных замкнутых систем автоматического регулирования при использовании эквивалентных корректирующих устройств различного типа будут одинаковыми. Реальные

системы всегда содержат элементы с нелинейными статическими характеристиками, например, люфт, насыщение, зона нечувствительности, которые ухудшают качество системы.

Отрицательные обратные связи уменьшают влияние нелинейностей охватываемых звеньев. Поэтому использование корректирующих отрицательных обратных звеньев в большинстве систем более целесообразно.

### ***Контрольные вопросы по разделу 9***

1. Что понимают под улучшением качества процесса управления?
2. Что увеличивается и уменьшается при увеличении общего коэффициента усиления системы?
3. Какие способы улучшения качества систем автоматического управления Вы знаете?
4. Каким образом проводится коррекция системы автоматического управления?
5. В чём заключается метод корневой коррекции?
6. Как производят коррекцию с помощью логарифмических характеристик?
7. Как могут быть включены в структурную схему корректирующие звенья?

## **Раздел 10. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

### **10.1. Особенности нелинейных систем автоматического управления**

Системы механических, электрических, гидравлических, пневматических приводов, т.е. приводов любой физической природы, получили широкое распространение в различных областях. Однако до сего времени конструктивные параметры привода и отдельных аппаратов выбирают исходя в основном из статических и кинематических требований в части преодолеваемых сопротивлений и обеспечения скоростей рабочих и холостых ходов двигателя. Опыт эксплуатации приводов показывает, что недостаточно руководствоваться статическими и кинематическими требованиями. Нередко в системах приводов наблюдаются вибрации, при внешних воздействиях скорость движения рабочих органов нестабильна, происходят колебательные процессы. Все это вызывает снижение надёжности приводов и ухудшает качество производимых работ. Метод динамического расчёта

позволяет избавиться от этих недостатков. Поэтому вопросы динамики привода и выбора его конструктивных параметров в определенной области переменных системы с учетом переходных процессов имеют большое значение.

При разработке привода для экономии времени и средств необходимо провести расчеты, т.е. заменить реальный привод его математическим описанием и по нему проанализировать его работу.

*Динамическая система – это математическое описание системы, которая может двигаться.*

Поведение динамической системы зависит от внешних и внутренних возмущений. Каждая система при разных возмущениях может иметь большое число вариантов своего движения.

Например, юла имеет несколько состояний равновесия (рис. 10.1).

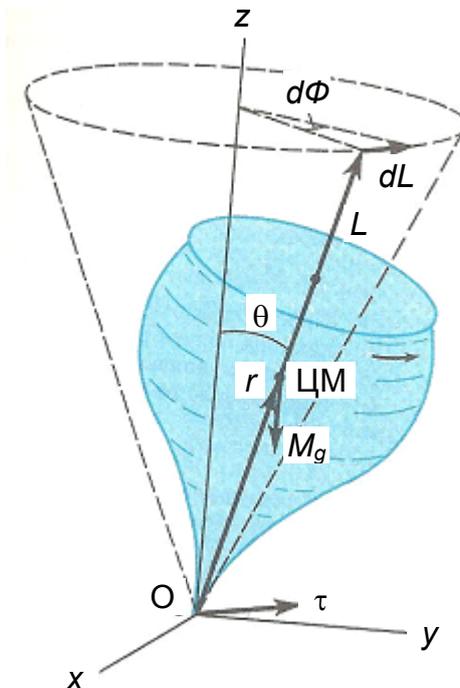


Рис. 10.1. Схема движения юлы

Когда заводят юлу, то её ось может стоять вертикально или крутиться наклонно, да ещё под разными углами. Это зависит от первоначального воздействия на юлу, т.е. завода. Вне зависимости от начального воздействия юла будет находиться в состоянии равновесия некоторое время.

Поведение приводов, работающих в автоматическом режиме, в динамике описывается, как правило, нелинейными дифференциаль-

ными уравнениями. При анализе нелинейных систем не существует универсального метода решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые описывают поведение системы. Для линейных моделей методы универсальны. По поведению линейной системы в окрестности начала координат можно судить о поведении системы в пространстве состояний. Устойчивость нелинейной системы зависит не только от параметров системы, но и от начальных условий.

В любых реальных системах присутствуют силы трения, силы инерции и т.п. Поэтому все реальные системы являются нелинейными. Замена нелинейных уравнений, описывающих поведение системы, линейными уравнениями является идеализацией реальных процессов. Часто при замене нелинейной характеристики линейной меняется не только количественная оценка, но даже качественная.

*Нелинейной системой автоматического управления называется система, содержащая хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением.*

Признаки нелинейных уравнений:

- переменные или их производные представлены в степени, отличающейся от первой;
- произведение переменных или производных;
- логические функции;
- математическое описание представлено в виде нелинейных функций (тригонометрических, логарифмических, показательных, иррациональных).

## **10.2. Статические и динамические нелинейности**

Нелинейные системы обладают особенностями, которых нет у линейных систем, например, возникновение периодических автоколебаний, переход из одного установившегося движения в другое под действием внешних сил, возможность нескольких равновесных состояний.

Различают статические и динамические нелинейности. Статические характеристики представляются в виде кусочно-линейных участков с переменным коэффициентом усиления на отдельных участках, т.е. на своём участке это – прямая линия, но участков таких много. Динамические нелинейности – это положение, когда математическое описание задаётся в виде дифференциальных уравнений.

Подход составления математической модели такой же, как был у линейных систем. Затем линеаризуются все уравнения звеньев системы, для которых это допустимо, т.е. сохраняются характерные черты физических явлений, кроме существенно нелинейных звеньев. Обычно в математическом описании остаётся одно-два нелинейных звена. Обобщенная структурная схема нелинейных систем представлена на рис. 10.2. При этом линейная часть системы может иметь структуру любой сложности с разными обратными связями, но свернута в один квадрат, т.е. линейная часть имеет одну передаточную функцию.

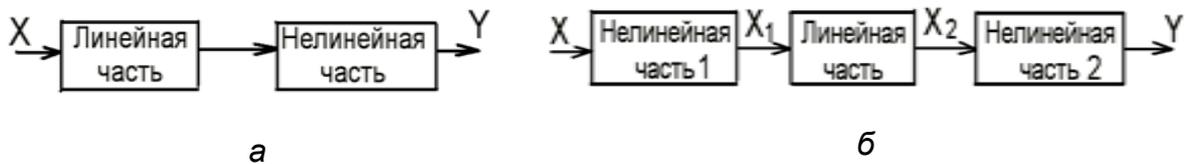


Рис. 10.2. Структурная схема нелинейных систем:  
а – с одним нелинейным звеном; б – с двумя нелинейными звеньями

**Пример.** Рабочая среда протекает через постоянный дроссель, показанный на рис. 10.3. Расход  $Q$ , протекающий через дроссель, определяется по формуле  $Q = \mu \cdot f_{др} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$ , где  $\mu$  – коэффициент расхода,  $\rho$  – плотность рабочей среды,  $f_{др}$  – площадь щели дросселя,  $p_1$  и  $p_2$  – давление перед и после дросселя.

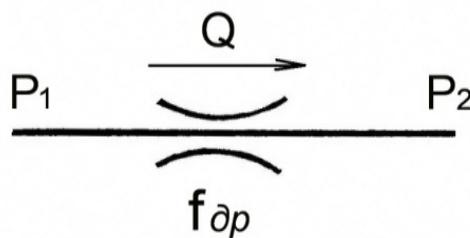


Рис. 10.3. Схема постоянного дросселя

Примем, что  $\Delta p = p_1 - p_2$ , и  $\alpha = \mu \cdot f_{др} \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ . Тогда  $Q = \alpha \sqrt{|\Delta p|} \cdot \text{sign} \Delta p$ .

Расходно-перепадная характеристика дросселя показана на рис. 10.4. На малом участке  $AB$  в этой небольшой зоне заменяем кривую прямой линией  $AC$ . Отрезок  $CD$  – ошибка линеаризации звена. Линеаризация приемлема в зоне малых изменений аргумента и функции.

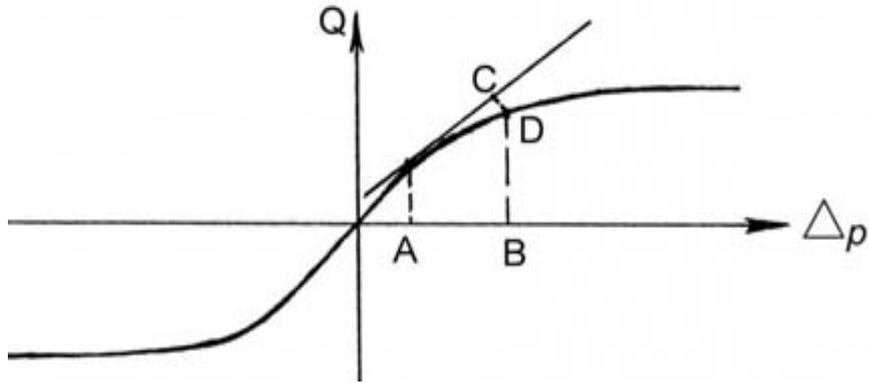


Рис. 10.4. Расходно-перепадная характеристика дросселя

Схема дросселирующего распределителя с пропорциональным управлением показана на рис. 10.5, а.



Рис. 10.5. Схема дросселирующего распределителя – а; зависимость площади щели распределителя от напряжения в обмотке управления – б

Функция площади распределителя с пропорциональным управлением от напряжения тока управления показана на рис. 10.5, б.

$$f = \begin{cases} 0 & \text{при } U \leq 0 \\ \frac{f_{\text{НОМ}}}{U_{\text{НОМ}}} & \text{при } 0 < U < U_{\text{НОМ}} \\ f_{\text{НОМ}} & \text{при } U \geq U_{\text{НОМ}} \end{cases},$$

где  $U$  – напряжение тока в распределителе управления,  $f$  – текущая площадь щели дросселирующего распределителя.

Реакция нелинейной системы (выходной сигнал) зависит не только от вида входного воздействия, но и от вида нелинейности (рис. 10.6). Например, при гармоническом входном воздействии у линейных систем на выходе ожидается тоже гармонический сигнал с таким же периодом колебаний, только с другой амплитудой и со

сдвигом по фазе. При гармоническом входном возмущении нелинейной системы на выходе после нелинейного звена появляются сложного вида периодические колебания (рис. 10.7).

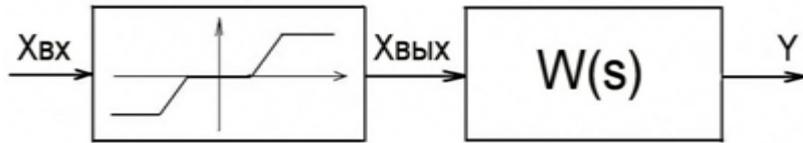


Рис. 10.6. Структурная схема нелинейной системы

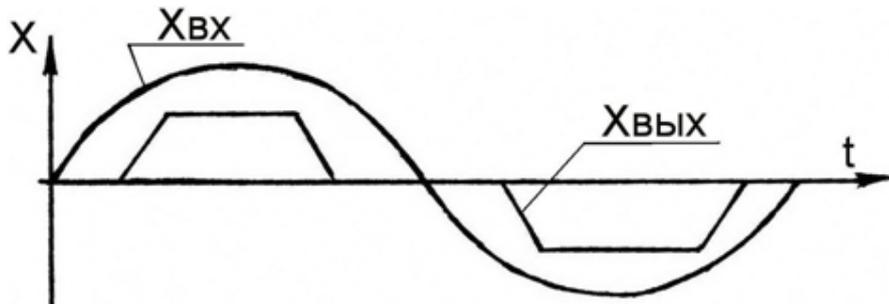


Рис. 10.7. Характеристика сигналов  $X$ , на входе в нелинейное звено  $X_{вх}$  и на выходе из нелинейного звена  $X_{вых}$

Рассмотрим некоторые типичные нелинейные характеристики, показанные на рис. 10.8 и 10.9.

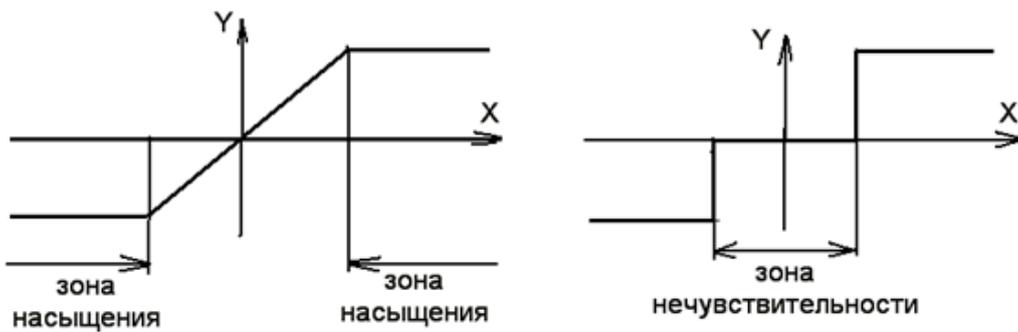


Рис. 10.8. Нелинейные характеристики с зоной насыщения и зоной нечувствительности

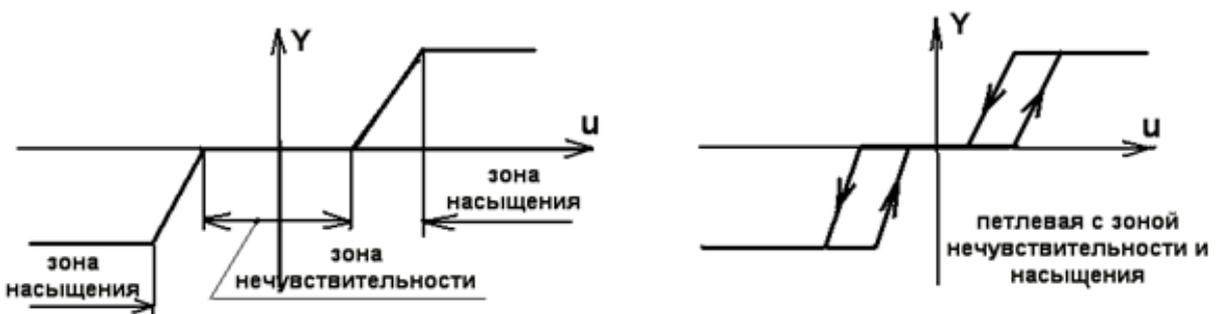


Рис. 10.9. Неоднозначные релейные характеристики

Неоднозначные характеристики получаются в механизмах с зазорами. Функция статический люфт в зубчатой или рычажной передаче приведена на рис. 10.10.

При  $L = 0$ ,  $Y = KX$  – это прямая линия под углом  $\beta$ ,  $K = \operatorname{tg}\beta$ . Если  $L \neq 0$ , то

$$Y = \left\{ \begin{array}{ll} Y(0) & \text{при } \left| X - \frac{Y(0)}{K} \right| \leq \frac{L}{2} \\ K \left( X - \frac{L}{2} \right) & \text{при } X' > 0 \\ K \left( X + \frac{L}{2} \right) & \text{при } X' < 0 \end{array} \right\}.$$

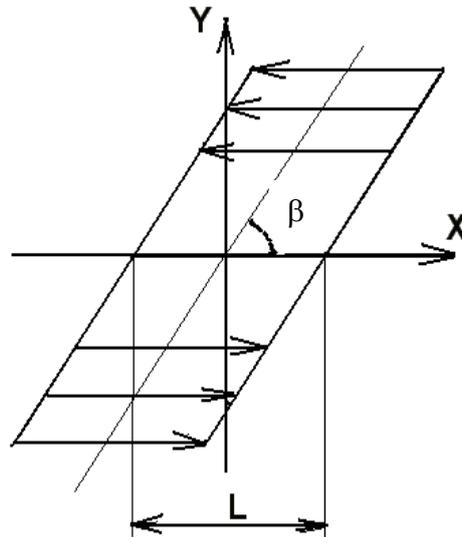
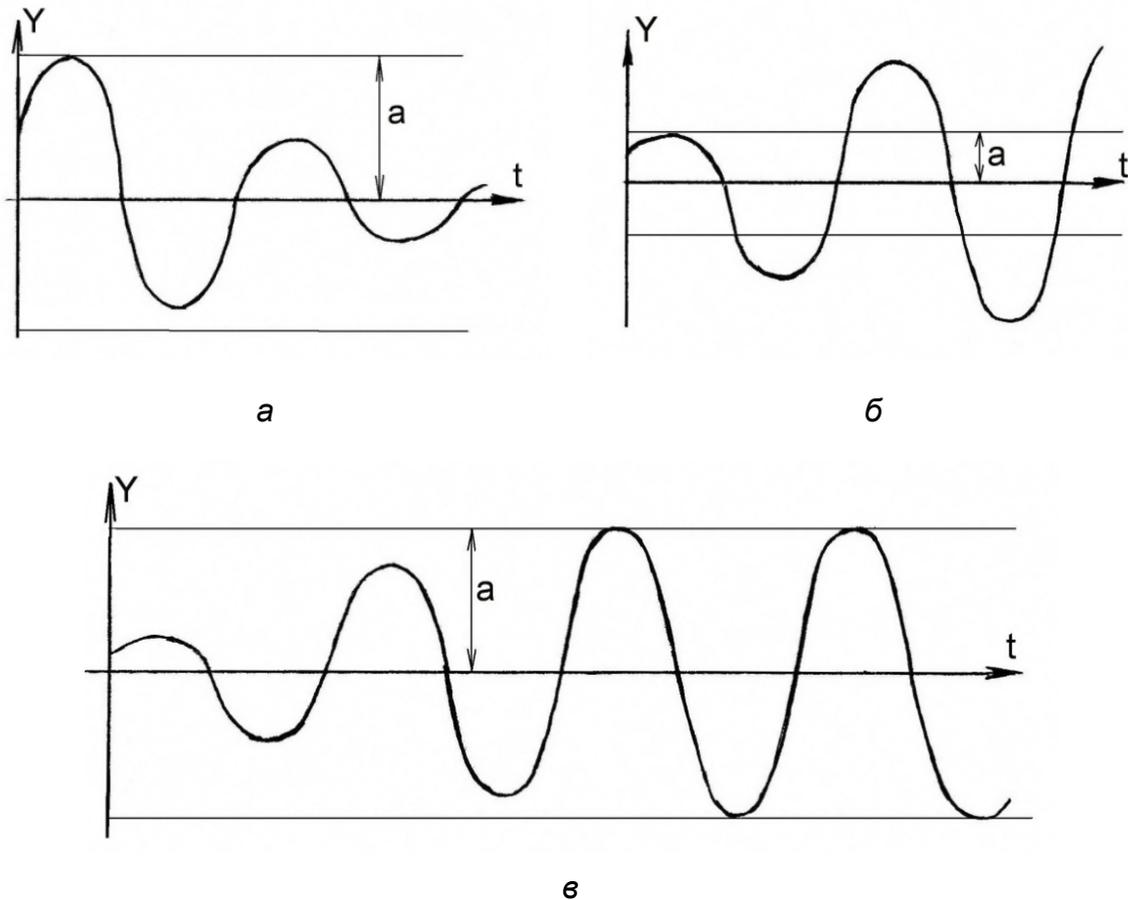


Рис. 10.10. Характеристика типа «люфт»

Процессы в нелинейных системах имеют особенности по сравнению с линейными системами. Из-за этих особенностей вопрос об устойчивости системы становится более сложным. Для устойчивости установившегося процесса большое значение имеют начальные условия. Нелинейные системы могут быть: устойчивы «в малом», «в большом», в целом. Например, система устойчива «в малом», т.е. устойчива при начальном возмущении, не выводящем отклонения в переходном процессе за определенную величину «а», и неустойчива «в большом» (рис. 10.11).



*Рис. 10.11. Характеристика выходного сигнала:  
 а – система устойчива «в малом», б – система неустойчива «в большом»,  
 в – система стремится к автоколебаниям*

### 10.3. Методы исследования устойчивости нелинейных систем

Анализируя работу нелинейных систем после входного воздействия (возмущения), оценивают возможные состояния равновесия системы. Выходной сигнал у нелинейных систем автоматического управления не только не пропорционален входному сигналу, но и зависит от величины входного сигнала.

Часто для нелинейных систем характерен режим незатухающих колебаний.

Автоколебаниями называются самоустанавливающиеся незатухающие колебания, которые существуют в системе при отсутствии переменного внешнего воздействия. Амплитуда и частота автоколебаний определяются свойствами самой системы. Этим они отличаются от вынужденных колебаний, частота и амплитуда которых зависят от внешнего воздействия.

При затухающих колебаниях переходного процесса период колебаний изменяется в нелинейных системах. А у линейных систем период колебаний постоянен.

Методы исследования нелинейных систем подразделяются на точные и приближенные, или еще их называют качественными. К точным методам относятся: аналитический метод А.М. Ляпунова; частотный метод В.М. Попова, метод фазовых портретов. К качественным методам относится метод «гармонической линеаризации».

### **Метод Ляпунова**

Каждая динамическая система, в частности представляющая привод, может характеризоваться некоторыми переменными параметрами:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для реальных приводов эти параметры остаются вещественными для всяких действительных состояний привода, например: координаты по осям  $X, Y, Z$ , скорости, ускорения, напряжение, сила тока, давление, расход и т.д.

В 1892 году Александр Михайлович Ляпунов предложил, что если с течением времени поведение двух систем совпадает, то одна система устойчива по отношению к другой. На рис. 10.12 показаны траектории движения систем  $L_1$  и  $L_2$  в параметрах  $x_1, x_2, x_3$ . Приняв траекторию  $L_1$  за эталон, можно наблюдать, как траектория  $L_2$  приближается к эталону. Здесь  $\Delta X$  – возмущение.

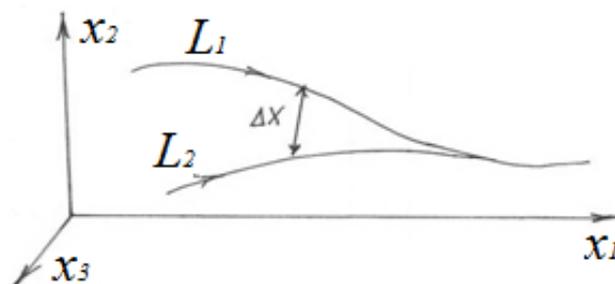


Рис. 10.12. Траектории движения систем при разных начальных условиях

Подход Ляпунова (первая «метода», так свои теоремы называл сам Ляпунов) – **теорема 1**: если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределённую функцию  $V$ , производная которой  $\frac{dV}{dt}$  в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного

знака с  $V$ , или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво (рис. 10.13).

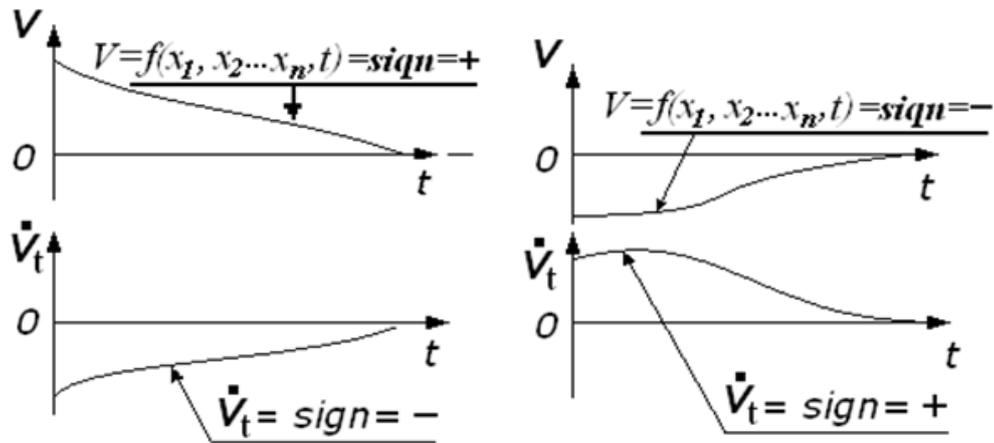


Рис. 10.13. Характер знакоопределённых функций  $V$  и их производных  $\dot{V}_t$  при устойчивом состоянии системы

Знакоопределённой называется функция, которая во всех точках некоторой области вокруг начала координат сохраняет один знак и нигде, кроме начала координат, не обращается в ноль.

**Теорема 2.** Если функция  $V = f(X_1, X_2, \dots, X_N, t)$  допускает малый предел, а её производная  $\frac{dV}{dt}$  знакоопределённая и при  $t > T$  принимает знак первообразной, то невозмущенное движение неустойчиво. Иллюстрация показана на рис. 10.14.

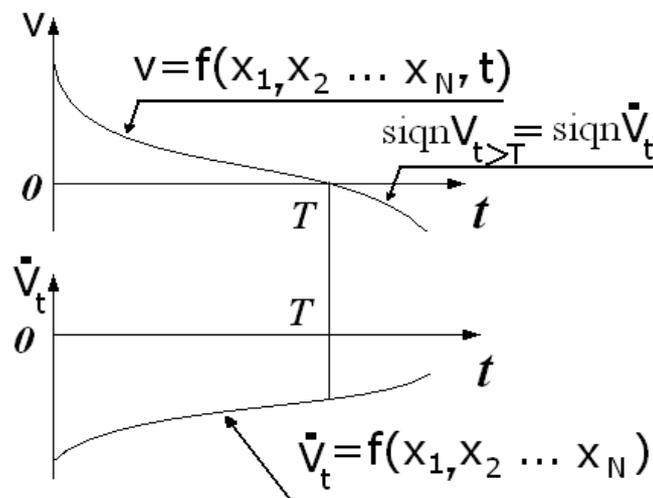


Рис. 10.14. Характер знакоопределённой функции  $V$  и её производной  $\dot{V}$  при неустойчивом состоянии системы

Общих правил отыскания функций Ляпунова нет. Найденные условия устойчивости системы могут не охватывать всей области её устойчивости. Поэтому от подбора функций Ляпунова зависит близость полученных условий устойчивости к необходимым и достаточным. Метод сложен и на практике применяется редко.

### **Частотный метод В.М. Попова**

В математическом описании системы выделяются линейная часть, заданная частотной передаточной функцией  $W(j\omega)$ , и одна однозначная нелинейная часть, заданная некоторым предельным значением параметра  $K$ .

Приведем без доказательств формулировку теоремы, предложенную румынским ученым В.М. Поповым (1959 г.): для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число  $h$ , при котором для всех  $\omega \geq 0$  соблюдается неравенство:  $\operatorname{Re}(1 + j\omega h) \cdot W(j\omega) + \frac{1}{K} > 0$ .

Преобразуем последнее выражение

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega h)W(j\omega)] = \operatorname{Re}[W(j\omega) - h\omega \operatorname{Im}W(j\omega)] = X - hY,$$

где  $W(j\omega)$  – амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной системы;  $X = \operatorname{Re}[W(j\omega)]$ ;  $Y = \omega \operatorname{Im}[W(j\omega)]$ .

Тогда выражение  $\operatorname{Re}(1 + j\omega h) \cdot W(j\omega) + \frac{1}{K} > 0$  принимает вид  $x + hy + \frac{1}{K} > 0$ .

Приравняв последнее выражение к нулю, получаем уравнение прямой линии, которую называют прямой Попова  $X - hY + \frac{1}{K} = 0$ .

Прямая Попова проходит через точку с координатами  $\left(-\frac{1}{K}; j0\right)$ , проходящую под углом  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{h}$ .

Графическая интерпретация теоремы Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на комплексной плоскости видоизмененной частотной передаточной

функции линейной части  $W^*(j\omega)$ , проходящую через точку  $\left(-\frac{1}{K}; j0\right)$ , чтобы вся кривая  $W^*(j\omega)$  лежала справа от этой прямой (рис. 10.15).

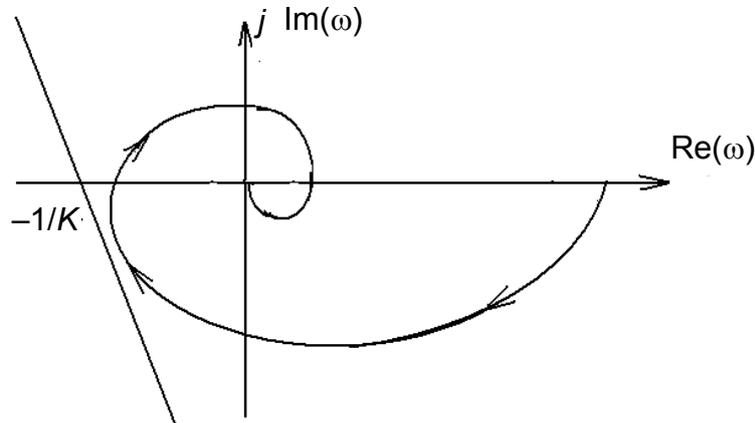


Рис. 10.15. Амплитудно-фазовая частотная характеристика и прямая Попова

Видоизмененная характеристика  $W^*(j\omega)$  связана с  $W(j\omega)$  равенствами

$$\operatorname{Re}[W^*(j\omega)] = \operatorname{Re}[W(j\omega)] \text{ и } \operatorname{Im}[W^*(j\omega)] = \omega \operatorname{Im}[W(j\omega)].$$

Наиболее широкое практическое применение получил метод фазовых траекторий.

### **Метод фазовых траекторий**

Метод фазовых траекторий дает наглядную картину поведения системы. Метод целесообразен, если система автономна.

Автономной называют систему, не подвергающуюся при рассматриваемых процессах внешним воздействиям и не содержащую параметров, изменяющихся в зависимости от времени.

Рассмотрим некий процесс, при котором изменяется координата  $X_1$  во времени  $t$  по закону, показанному на рис. 10.16, и скорость изменения этой координаты  $X_2 = X_1'$  соответствует изменению, показанному на графике. Жюль Анри Пуанкаре (1900 г.) предложил рассматривать такие функции систем, исключив из них время. Время рассматривается как безразмерная величина непрерывности пространства. Норма для времени – это пространство, которое описывает Земля за один оборот.

Пусть некая система движется из точки А в точку Б.

Значит, участок  $0-t_1$  – система разгоняется, участок  $t_1-t_2$  – система движется с постоянной скоростью, участок  $t_2-t_3$  – торможение,  $t_3-t_4$  – система стоит на месте,  $t_4-t_5$  – система разгоняется при движении в обратную сторону от Б к А,  $t_5-t_6$  – движение с постоянной скоростью в обратную сторону,  $t_6-t_7$  – торможение и остановка системы (рис. 10.16).

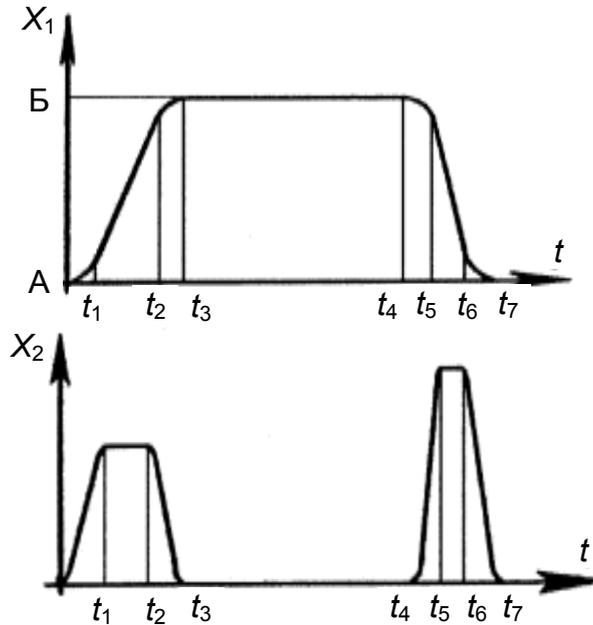


Рис. 10.16. Циклограмма и тахограмма движения системы

Поведение движения этой системы можно рассмотреть, исключив из нее время.

Плоскость, по оси абсцисс которой откладывается переменная  $X_1$ , а по оси ординат – скорость изменения этой переменной  $X_2$ , называется фазовой плоскостью (рис. 10.17).

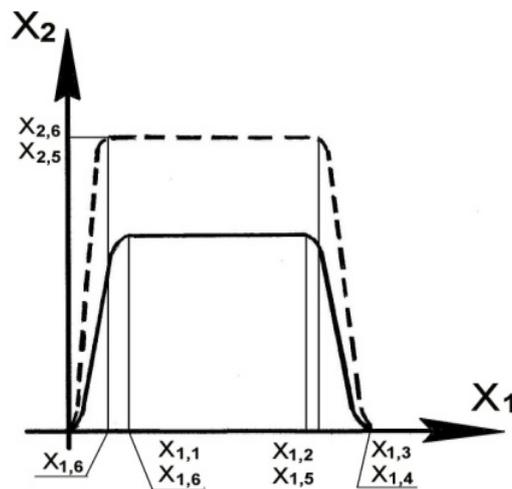


Рис. 10.17. Фазовая плоскость

Если переменных больше двух, тогда это – фазовое пространство.

Точка  $M_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  в координатах  $X_1, X_2, \dots, X_n$  определяет состояние системы в момент времени  $t_1$ . Такую точку называют *изображающей точкой* (рис. 10.18).

При изменении времени  $t$  от  $t_1$  до  $t_2$  изображающая точка переместится по некоторой траектории  $L$  из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ . Траектория  $L$ , по которой перемещается точка, называется *фазовой траекторией* и при заданных начальных условиях полностью описывает поведение динамической системы (привода) (рис. 10.19).

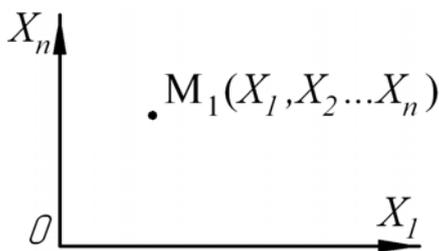


Рис. 10.18. Изображающая точка  $M_1$  в фазовом пространстве

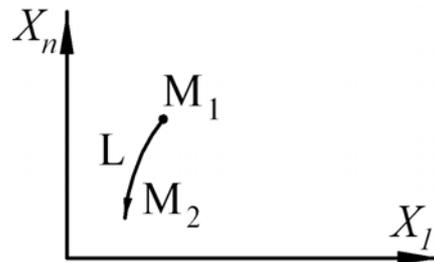


Рис. 10.19. Траектория  $L$  изображающей точки  $M$  в фазовом пространстве

Рассмотрим поведение возбужденной динамической системы по двум переменным параметрам во временных координатах. Эталонное движение – это движение, которое мы хотим получить во временной системе координат на прямой  $Ot$ , где  $X_1$  перемещение, а  $X_2 = \dot{X}_1$  скорость перемещения изображающей точки. Продифференцировав последнее выражение, получим  $\frac{dX_2}{dt} = \frac{d^2X_1}{dt^2}$ , тогда первая функция

$F_1(X_1, X_2) = \frac{dX_1}{dt}$  и вторая функция  $F_2(X_1, X_2) = \frac{dX_2}{dt}$ . Разделив почлененно уравнения, получим

$\frac{\frac{dX_2}{dt}}{\frac{dX_1}{dt}} = \frac{F_2(X_1, X_2)}{F_1(X_1, X_2)}$  или  $\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{F_2(X_1, X_2)}{F_1(X_1, X_2)}$ . Полу-

ченное уравнение является дифференциальным уравнением кривых на плоскости координат  $X_1, X_2$ , т.е. фазовой плоскости.

Фазовое пространство и фазовые траектории представляют собой геометрический образ динамических процессов, протекающих в

системе. Траектория движения системы при начальном возмущении по параметру  $X_1$  показана на рис. 10.20.

В таком геометрическом представлении могут участвовать все переменные параметры системы.

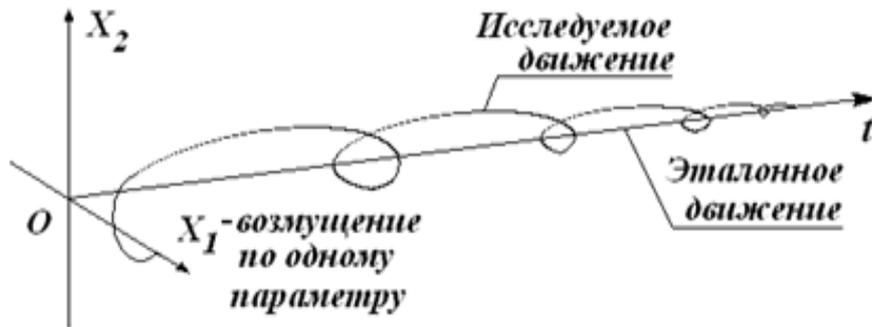


Рис. 10.20. Траектория изображающей точки при начальном воздействии (возмущении) по параметру  $X_1$ , изменяющаяся во времени

Также можно рассмотреть поведение этой системы на фазовой плоскости, т.е. исключив время (рис. 10.21).

В разные моменты времени меняется величина возмущения, т.е. расстояние от эталонного движения до текущего положения исследуемой системы.

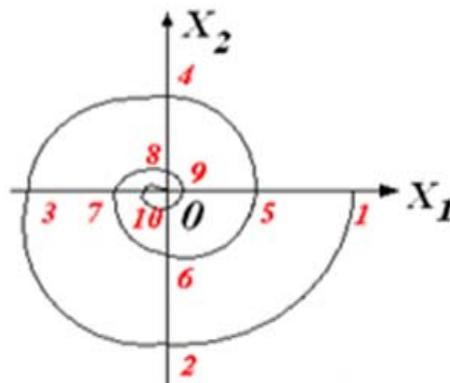


Рис. 10.21. Траектория изображающей точки в фазовой плоскости в разные моменты времени, показывающая соответствующие возмущения

Как видно из рис. 10.21, исследуемое движение приближается к эталонному движению, из чего можно сделать вывод, что исследуемая система устойчива.

Фазовые траектории устойчивой системы автоматического управления должны стремиться к началу координат при неограниченном возрастании времени, потому что начало координат находится на эталонной траектории движения системы.

Фазовые траектории неустойчивой системы должны неограниченно удаляться от начала координат фазовой плоскости. Замкнутым фазовым траекториям соответствуют периодические процессы.

### **Свойства фазовых траекторий**

Фазовым траекториям можно приписать направление. Каждое положение изображающей точки  $M$  есть функция времени

$$X_1 = f_1(t), \dots, X_n = f_n(t).$$

С изменением времени положение точки меняется. За положительное направление движения изображающей точки (от точки  $M_1$  к  $M_2$ ) принимают направление в сторону возрастания времени ( $t_2 > t_1$ ) (рис. 10.22).

Каждая фазовая траектория может представлять решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях, которое определено для всех значений времени  $t$ , как  $t > 0$ , так и  $t < 0$  (рис. 10.23).

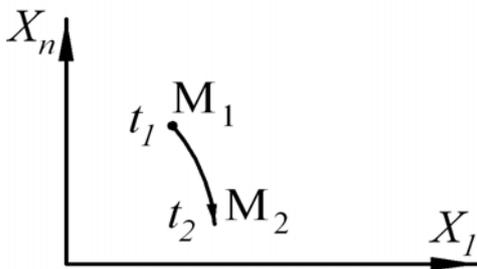


Рис. 10.22. Положение изображающей точки с увеличением времени

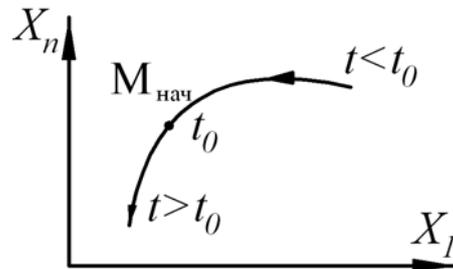


Рис. 10.23. Изображающая точка  $M$  могла двигаться до начала отсчета

Разные точки одной и той же фазовой траектории соответствуют одним и тем же начальным условиям значения переменных. Отличаются точки друг от друга только выбором начальных значений времени  $t_{01}$  и  $t_{02}$  (рис. 10.24), где  $t_{02} > t_{01}$ .

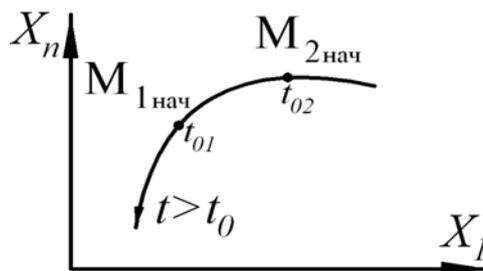


Рис. 10.24. Траектория движения системы на фазовой плоскости

Если функции, которые определяют угол наклона касательной к фазовой траектории в некоторой области фазового пространства, однозначны, т.е. можно провести только одну касательную, то через каждую точку этой области проходит одна и только одна фазовая траектория (рис. 10.25).

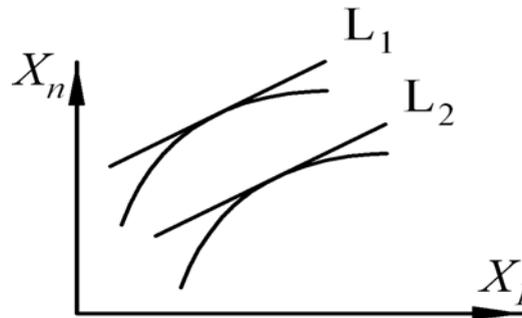


Рис. 10.25. При разных начальных возмущениях траектория поведения системы будет разной

Замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению изображающей точки в фазовом пространстве и характеризует периодически изменяемые состояния исследуемого объекта. Такие траектории называются *предельными циклами* (рис. 10.26).

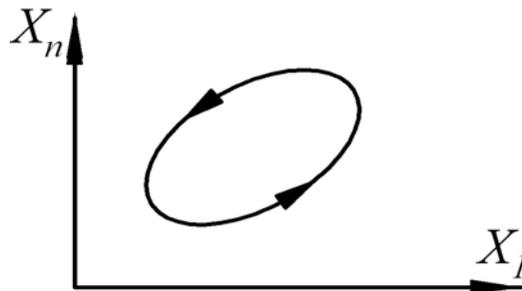


Рис. 10.26. Предельный цикл на фазовой плоскости

Например, часы-ходики. Первое состояние равновесия – когда часы стоят. Часы заведены, но не пущены в ход. На графике (рис. 10.27) – это нулевая точка. Когда часы запущены – это второе состояние равновесия на фазовой плоскости (на рисунке это эллипс).

При малом воздействии на маятник (точка 1 на рис. 10.27) часы останавливаются, т.е. приходят в первое состояние равновесия. Если задающая амплитуда маятника меньше, чем состояние равновесия (точка 2), возможно маятник придет во второе состояние равновесия. Если первоначальное отклонение будет большим (точка 3), маятник опять придет во второе состояние равновесия.

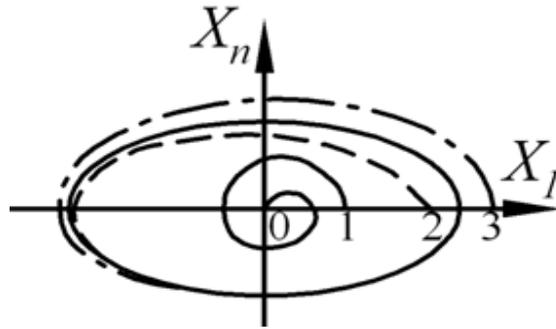


Рис. 10.27. Возможные траектории часов-ходиков

Точку на фазовой траектории, к которой можно провести несколько касательных, называют особой точкой. Особая точка, через которую проходит неограниченное число касательных, сама является отдельной траекторией. Такую точку часто называют *точкой состояния равновесия* (рис. 10.28). Например, на рис. 10.27 – это точка начала координат, точка «0».

Состояние равновесия называется *изолированным*, если существует малая область, близкая к нулю, внутри которой не лежит ни одного состояния равновесия (рис. 10.29). В некотором пространстве координат  $x_1, \dots, x_n$  каждая система привода может при разных начальных условиях иметь разные траектории движения.

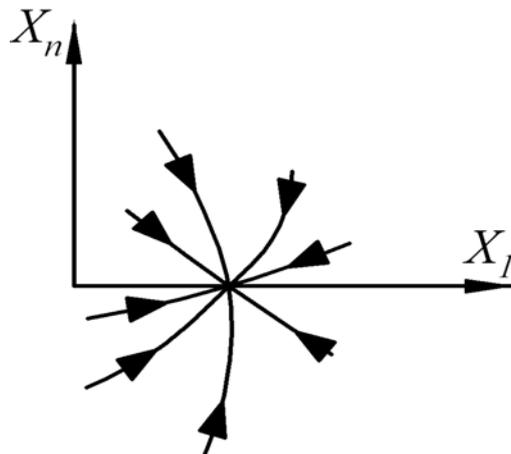


Рис. 10.28. Точка состояния равновесия на фазовой плоскости

Из этого множества обычно интересует одно эталонное движение  $L_0$ .

Для сравнения поведения возможных траекторий с эталонным движением целесообразно перенести начало координат на эталонную траекторию.

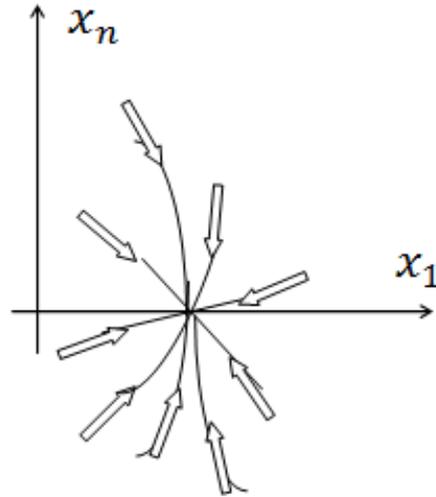


Рис. 10.29. Изолированное состояние равновесия

Например, имеется некая эталонная траектория ( $L_3$ ) и возможная траектория ( $L_1$ ) (рис. 10.30). Начало системы координат устанавливают на эталонной траектории.

Эта система координат все время движется. Мы сравниваем, насколько наша возможная траектория ( $L_1$ ) не совпадает с эталонной траекторией. Приближение возможной траектории к эталонной траектории показано на рис. 10.30 в плоскости параметров  $x_1, x_n$ .

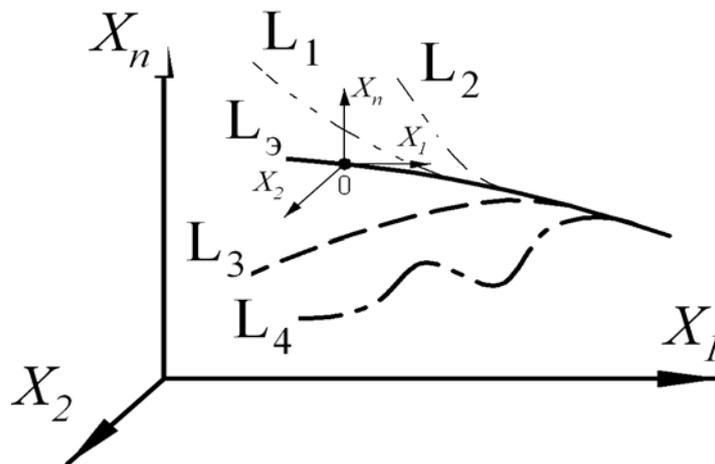


Рис. 10.30. Перенос начала координат на эталонную траекторию:

$L_3$  – эталонная траектория системы;

$L_1, L_2, L_3, L_4$  – траектория движения системы при разных начальных условиях

Имеется некая траектория, к которой мы стремимся (эталонная траектория  $L_3$ , на которой находится движущееся начало координат с точкой «0»). При разных начальных условиях система имеет возможность двигаться по разным траекториям  $L_1, L_2, L_3, L_4$ . Расстояние ме-

жду какой-либо траекторией и эталонной называется возмущением или отклонением от эталона по рекомендациям Ляпунова А.М.

Об устойчивости исследуемой динамической системы можно было бы судить, проследив за поведением всех фазовых траекторий, т.е. построив все фазовые траектории для всех возможных начальных условий, так называемые фазовые портреты, представляющие собой интегралы исходных дифференциальных уравнений. Наиболее распространенные фазовые портреты приведены на рис. 10.31.

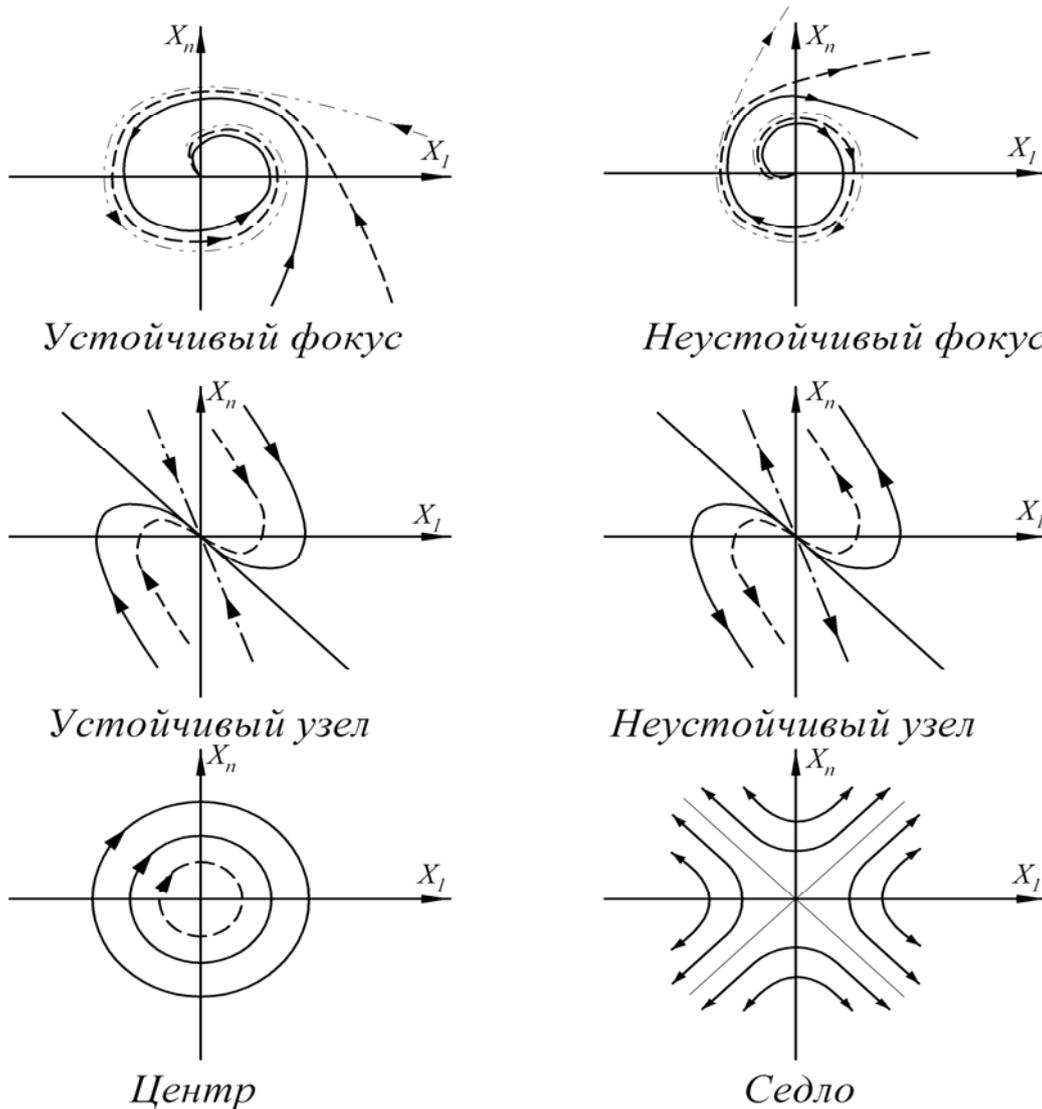


Рис. 10.31. Наиболее распространённые фазовые портреты

Реальные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями и общее решение этих уравнений, как правило, найти не удаётся. Для анализа устойчивости работы системы недостаточно нахождения одного численного частного решения при каком-

то начальном условии. Необходимо найти численное значение частного решения системы при всех возможных начальных условиях в области желаемых значений переменных системы.

Для качественного анализа устойчивости динамической системы необходимо проследить поведение не одной, а всех траекторий по всей области  $G$ , области предельных, реальных, возможных отклонений значений переменных системы (рис. 10.32).

Например, при начальном воздействии  $M_1$  система приходит к одному устойчивому состоянию, а при начальном воздействии  $M_2$  – выходит на автоколебания.

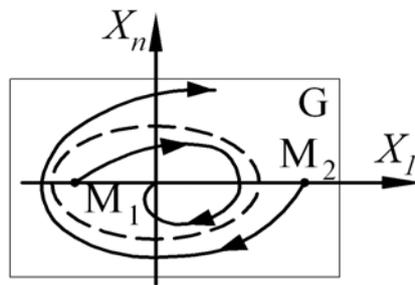


Рис. 10.32. Фазовый портрет поведения системы при различных начальных воздействиях

**Пример.** Дана гидравлическая следящая система с обратной связью (рис. 10.33).

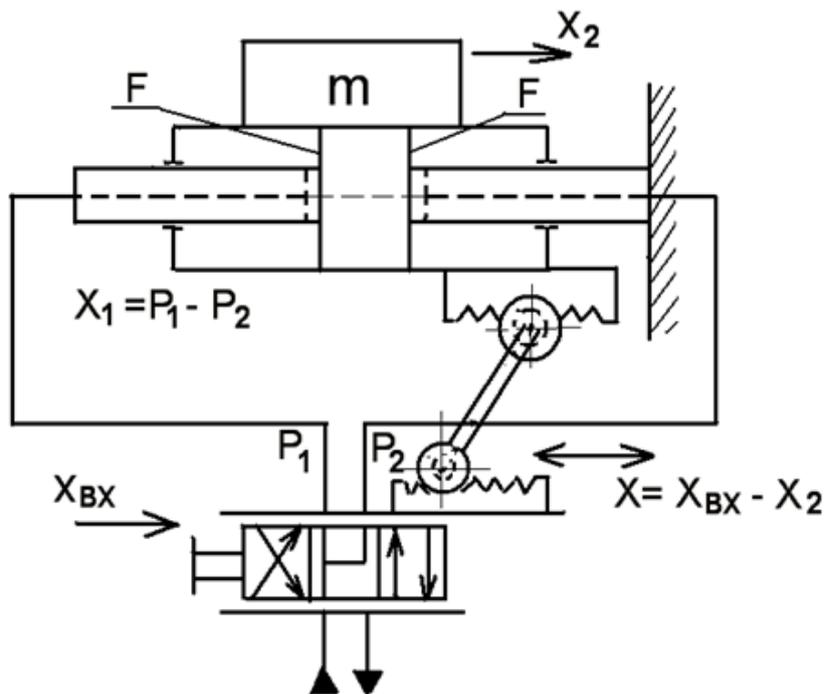


Рис. 10.33. Гидравлическая следящая система

Затвор распределителя является нелинейным звеном с релейно-петлевой характеристикой (рис. 10.34).

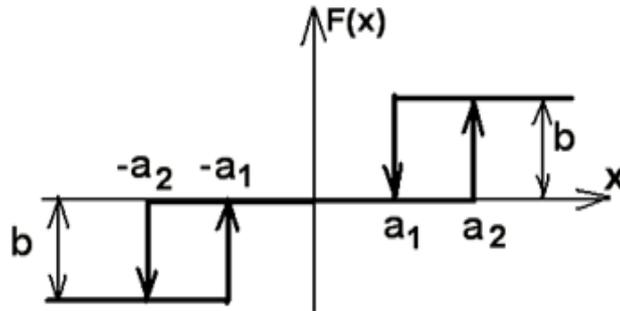


Рис. 10.34. Характеристика распределителя

Схема распределителя показана на рис. 10.35. Характеристика распределителя представлена на рис. 10.34, где  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b = 1$ ,  $k = 1$ . На комплексной плоскости зададим начальную точку фазовой траектории с координатами при  $t = 0$ ;  $x = 5$ ;  $x' = 0$ .

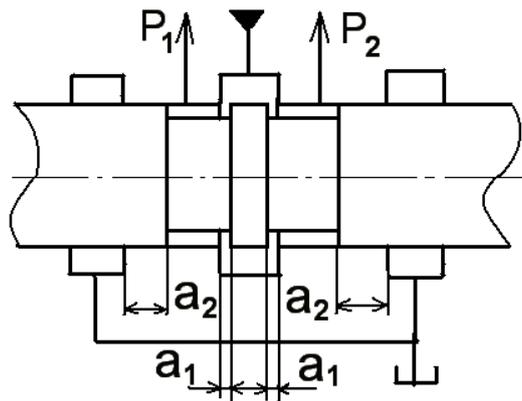


Рис. 10.35. Схема распределителя

Составим для данной следящей системы структурную схему (рис. 10.36).

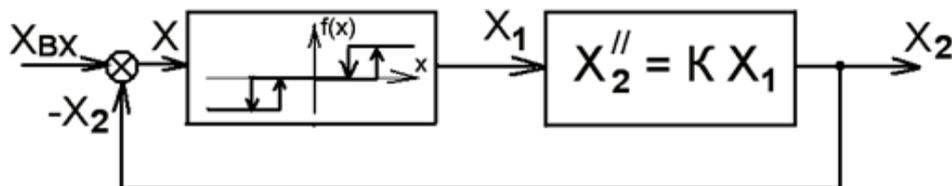


Рис. 10.36. Структурная схема следящей системы с нелинейным звеном

Сигнал после сумматора будет равен  $X = X_{\text{вх}} - X_2 = X_2$ , поскольку система автономна  $X_{\text{вх}} = 0$ .

*Решение.* Преобразуем заданное уравнение линейной части системы  $X_2'' = KX_1$  или  $\frac{d^2 X_2}{dt^2} = KX_1$ . Необходимо получить траекторию перемещения изображающей точки на фазовой плоскости и по этой траектории судить об устойчивости или неустойчивости системы. Фазовые траектории стремятся к началу координат с возрастанием времени, когда система устойчива. При неустойчивой системе фазовые траектории удаляются от начала координат. Замкнутые фазовые траектории означают наличие в системе периодических процессов.

По условию имеются две переменные величины  $X_1$  и  $X_2''$ . Обозначим  $\frac{d^2 X_2}{dt^2} = \frac{dY}{dt}$ , тогда исходное уравнение примет вид  $\frac{dY}{dt} = KX_1$  или  $dY = KX_1 dt$ . Последнее выражение проинтегрируем  $\int dY = \int KX_1 dt$ . В результате интегрирования получаем  $Y = KX_1 t + C_1$ , где  $C_1$  – постоянная интегрирования. Но  $Y = \frac{dX_2}{dt}$ , подставив это выражение в результат интегрирования, получим

$$\frac{dX_2}{dt} = KX_1 t + C_1 \quad (10.1)$$

или  $dX_2 = KX_1 t dt + C_1 dt$ .

Проинтегрировав последнее выражение  $\int dX_2 = \int KX_1 t dt + \int C_1 dt$ , получаем

$$X_2 = KX_1 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (10.2)$$

От переменной  $X_2$  перейдем к переменной  $X$ .

По условию  $X = X_{\text{вх}} - X_2$ , где  $X_{\text{вх}} = 0$ . Значит  $X = -X_2$  или  $X_2 = -X$ , а  $\frac{dX_2}{dt} = -\frac{dX}{dt}$ . Подставим в (10.1) и (10.2) уравнения

$$X' = -KX_1 t - C_1; \quad (10.3)$$

$$X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2. \quad (10.4)$$

И получим систему уравнений (10.3) и (10.4), описывающих поведение изображающей точки на фазовой плоскости. Нанесем линии пересечения характеристики распределителя на фазовой плоскости (рис. 10.37).

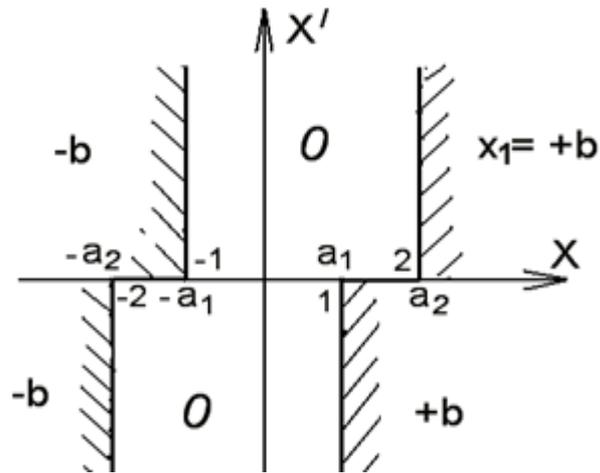


Рис. 10.37. Фазовая плоскость

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия на первом участке

$$t = 0, X = 5, X' = 0, K = 1, X_1 = b = 1,$$

и подставляем их в уравнение (10.3), определяем  $C_1$ :

$$X' = -KX_1 t - C_1;$$

$$0 = -1 \cdot 1 \cdot 0 - C_1;$$

$$C_1 = 0.$$

Подставляем эти же начальные условия в уравнение (10.4) для определения  $C_2$ :

$$X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2;$$

$$5 = -1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 - C_2;$$

$$C_2 = -5.$$

Следовательно, для первого участка уравнения (10.3), (10.4) примут вид

$$\begin{cases} X' = -KX_1 t; \\ X = -KX_1 \frac{t^2}{2} + 5. \end{cases} \quad (10.5)$$

Выразим уравнения (10.5) одно через другое для исключения времени в уравнениях  $X' = -KX_1 t$  откуда  $t = -\frac{X'}{KX_1}$  и подставим его во

второе уравнение в системе (10.5)  $X = -KX_1 \frac{t^2}{2} + 5$ , получим

$$X = -KX_1 \frac{1}{2} \left( -\frac{X'}{KX_1} \right)^2 + 5.$$

Упростив это уравнение получим:

$$X = -\frac{(X')^2}{2KX_1} + 5 \text{ или } (X')^2 + 2KX_1X - 10KX_1 = 0. \quad (10.6)$$

Получили уравнение параболы. В уравнение (10.6) подставим значения  $K = 1$  и  $X_1 = b = 1$ , получим  $(X')^2 + 2X - 10 = 0$  или  $X' = \pm\sqrt{10 - 2X}$ .

При движении  $X$  уменьшается, а уменьшению  $X$  соответствует отрицательное значение производной  $X'$ . Следовательно, первый участок фазовой траектории находится в четвертом квадранте фазовой плоскости, и уравнение имеет вид  $X' = -\sqrt{10 - 2X}$ .

Уравнения (10.5) действуют только на первом участке, где  $b = +1$ . Этот участок заканчивается при пересечении линии  $X = a_1$ . Далее начнется второй участок.

Конечными значениями первого участка являются:

$$X = 1, \quad X' = -\sqrt{10 - 2} = -\sqrt{8} = -2,828, \quad t = -\frac{X'}{KX_1} = -\frac{X'}{1 \cdot 1} = -X' = 2,83.$$

Конечные значения  $X$ ,  $X'$  и  $t$  каждого предыдущего участка являются начальными значениями  $X$  и  $X'$  каждого последующего участка.

Начальные значения для *второго* участка:

$$t = 2,83, \quad X = 1, \quad X' = -2,83, \quad X_1 = 0, \quad K = 1.$$

Из уравнений (10.3) и (10.4), которые описывают поведение системы в целом

$$\begin{cases} X' = -KX_1 t - C_1; \\ X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2, \end{cases}$$

определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  для второго участка:

$$X' = -KX_1 t - C_1;$$

$$-2,83 = -1 \cdot 0 \cdot 2,83 - C_1;$$

$$C_1 = 2,83.$$

$$X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2;$$

$$1 = -1 \cdot 0 \cdot \frac{2,83^2}{2} - 2,83 \cdot 2,83 - C_2;$$

$$C_2 = -9.$$

Получаем систему уравнений, описывающих поведение системы на втором участке

$$\begin{cases} X' = -2,83; \\ X = -2,83t + 9. \end{cases} \quad (10.7)$$

На фазовой плоскости траектория изображающей точки на втором участке представляет собой прямую линию.

Заканчивается второй участок при изменении  $X_1 = -1$ , при этом  $X = -2$  и  $X' = -2,83$ .

Определим время, при котором изображающая точка пересекает границу второго участка  $X = -2,83t + 9$ ;  $t = \frac{9+2}{2,83} = 3,887$ .

Начальные значения *третьего* участка:

$$t = 3,887, \quad X = -2, \quad X_1 = -1, \quad X' = -2,83, \quad K = 1.$$

Из уравнений (10.3) и (10.4), описывающих поведение системы в целом

$$\begin{cases} X' = -KX_1 t - C_1; \\ X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2, \end{cases}$$

определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  для третьего участка:

$$\begin{aligned} X' &= -KX_1 t - C_1; & X &= -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2; \\ -2,83 &= -1 \cdot (-1) \cdot 3,887 - C_1; & & \\ C_1 &= 6,717. & -2 &= -1 \cdot (-1) \cdot \frac{3,887^2}{2} - 6,717 \cdot 3,887 - C_2; \\ & & C_2 &= -16,51. \end{aligned}$$

Получаем систему уравнений, описывающих поведение изображающей точки, на третьем участке

$$\begin{cases} X' = t - 6,71; \\ X = \frac{t^2}{2} - 6,71t + 16,51. \end{cases}$$

Если в полученную систему уравнений подставить  $X' = 0$ , то определим точку пересечения траектории изображающей точки с осью  $X$  на третьем участке.

В уравнение  $X' = t - 6,71$  подставляем значение  $X' = 0$ , получим  $0 = t - 6,71$ , отсюда  $t = 6,71$ . Это значение подставляем в уравнение  $X = \frac{t^2}{2} - 6,71t + 16,51$ , получим  $X = \frac{6,71^2}{2} - 6,71 \cdot 6,71 + 16,51$ , отсюда  $X = -6$ .

Изображающая точка, перемещаясь из третьего квадранта во второй, имеет следующие координаты:  $t = 6,71$ ,  $X' = 0$ ,  $X = -6$ .

Определяем конечные значения третьего участка. На графике (рис. 10.37) видно, что  $X = -1$ . Подставим это значение в уравнение

$X = \frac{t^2}{2} - 6,71t + 16,51$ , получим

$$-1 = \frac{t^2}{2} - 6,71t + 16,51 \text{ или } t^2 - 13,42t + 35,02 = 0.$$

Определяем значение  $t$ :

$$t_{1,2} = \frac{13,42}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13,42}{2}\right)^2 - 35,02} = 6,71 \pm \sqrt{10};$$

$$t_1 = 9,87.$$

Подставив полученное значение  $t_1$  в уравнение  $X' = t - 6,71$ , получим:

$$X' = 9,81 - 6,71 = 3,16.$$

Конечные значения третьего участка являются начальными значениями для четвертого участка:

$$t_1 = 9,87, \quad X = -1, \quad X' = 3,16, \quad X_1 = 0, \quad K = 1.$$

Из уравнений (10.3) и (10.4), которые описывают поведение системы в целом

$$\begin{cases} X = -KX_1 t - C_1; \\ X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2, \end{cases}$$

определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  для четвертого участка:

$$X' = -KX_1 t - C_1;$$

$$3,16 = -1 \cdot 0 \cdot 9,87 - C_1;$$

$$C_1 = -3,16.$$

$$X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2;$$

$$-1 = -\frac{9,87^2}{2} \cdot 0 - (-3,16) \cdot 9,87 - C_2;$$

$$C_2 = -32.$$

Получаем систему уравнений, описывающих поведение системы на четвертом участке

$$\begin{cases} X' = 3,16; \\ X = 3,16t - 32. \end{cases}$$

Траектория изображающей точки на четвертом участке представляет собой прямую линию, параллельную оси  $X$ . Конечные значения четвертого участка по рис. 10.37  $X = 2$ ,  $X' = 3,16$ , определим время пересечения границы участка  $2 = 3,16t - 32$ , откуда  $t = \frac{34}{3,16} = 10,76$ .

Начальными значениями *пятого* участка являются:

$$t = 10,76, \quad X = 2, \quad X' = 3,16, \quad K = 1, \quad X_1 = 1.$$

Из уравнений (10.3) и (10.4), которые описывают поведение системы в целом

$$\begin{cases} X' = -KX_1 t - C_1; \\ X = -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2, \end{cases}$$

определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  для пятого участка:

$$\begin{aligned} X' &= -KX_1 t - C_1; & X &= -KX_1 \frac{t^2}{2} - C_1 t - C_2; \\ 3,16 &= -1 \cdot 1 \cdot 10,76 - C_1; & & \\ C_1 &= -13,92. & -1 &= -1 \cdot 1 \cdot \frac{10,76^2}{2} - (-13,92) \cdot 10,76 - C_2; \\ & & C_2 &= 89,78. \end{aligned}$$

Получаем систему уравнений, описывающие траекторию изображающей точки на пятом участке:

$$\begin{cases} X' = -t + 13,92; \\ X = -\frac{t^2}{2} + 13,92t - 89,78. \end{cases}$$

Если в полученную систему уравнений подставить  $X' = 0$ , то определим точку пересечения траектории изображающей точки оси  $X$  на пятом участке.

В уравнение  $X' = -t + 13,92$  подставляем значение  $X' = 0$ , получим  $0 = -t + 13,92$ , отсюда  $t = 13,92$ . Это значение подставляем в урав-

нение  $X = -\frac{t^2}{2} + 13,92t - 89,78$ , получим  $X = \frac{13,92^2}{2} - 13,92 \cdot 13,92 - 89,78$ ,  
отсюда  $X = 7,1$ .

По рассчитанным значениям на фазовой плоскости построена фазовая траектория, показанная на рис. 10.38.

Как показывает траектория изображающей точки на фазовой плоскости, система совершает колебания с увеличивающейся амплитудой отклонений по  $X$  и по  $X'$ .

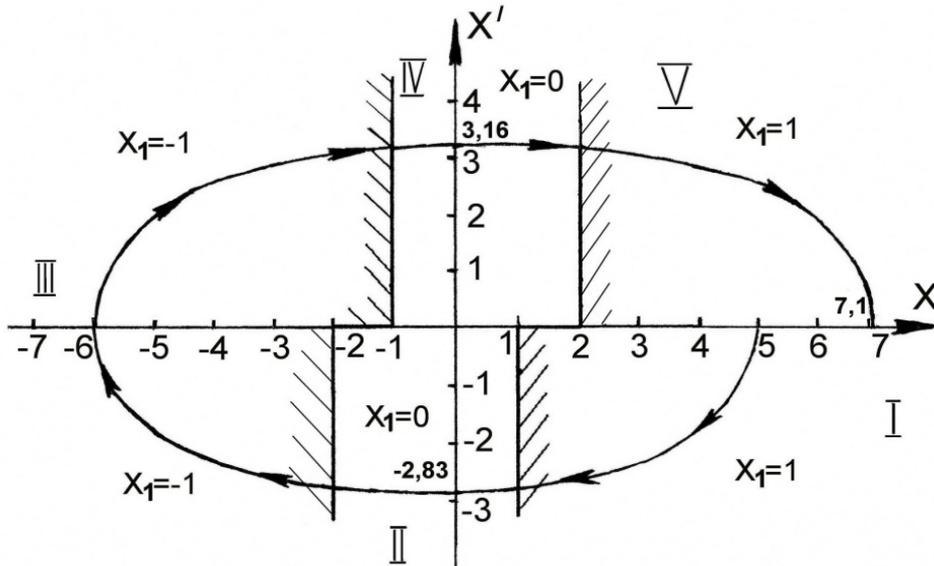


Рис. 10.38. Траектория изображающей точки на фазовой плоскости

Для более полной картины поведения системы необходимо построить траектории движения изображающей точки при разных начальных значениях и получить фазовый портрет.

### **Метод гармонической линеаризации**

При исследовании систем выше второго порядка широко применяется метод гармонической линеаризации. Метод применим к системам любого порядка, но только для исследования колебательных процессов. Основан метод на работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, 1934 г. Идея метода заключается в линеаризации нелинейностей в режиме автоколебаний.

Метод имеет ряд допущений:

- Вход в нелинейное звено – это гармонический сигнал, близкий к синусоидальному. Это предположение справедливо для большинства систем автоматического управления.

– Линейные звенья обладают свойствами фильтров низкой частоты, ослабляющими высшие гармоники.

– Считаем, что постоянная составляющая колебаний отсутствует.

Несмотря на допущения, практические расчеты и эксперимент показывают приемлемость применения этого приближенного метода.

Рассмотрим систему автоматического управления с одним нелинейным звеном (рис. 10.39).

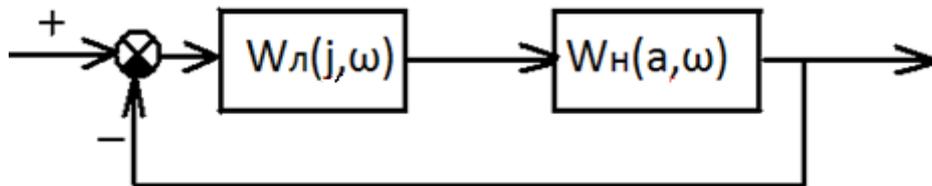


Рис. 10.39. Структурная схема системы

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(A, j\omega) = \frac{W_{\text{л}}(j\omega)W_{\text{н}}(a, \omega)}{1 - W_{\text{л}}(j\omega)W_{\text{н}}(a, \omega)}.$$

При устойчивости разомкнутого контура, в соответствии с критерием Найквиста, замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если  $W_{\text{л}}(j\omega) \cdot W_{\text{н}}(a, \omega) = -1$ , где  $a$  – амплитуда и  $\omega$  – частота. Это уравнение называется уравнением гармонического баланса. Уравнение можно рассматривать как условие наличия чисто мнимого корня  $j\omega$  характеристического уравнения линеаризованной системы, что показывает существование периодических движений линейных систем. В системе могут существовать колебания, которые в случае их устойчивости будут автоколебаниями.  $W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н}}(a, \omega)}$  – это со-

отношение показывает, что если характеристики  $W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $-\frac{1}{W_{\text{н}}(a, \omega)}$  пересекаются, то в точке их пересечения на годографе  $W_{\text{л}}(j\omega)$  можно определить частоту  $\omega$ , а по  $W_{\text{н}}(a, \omega)$  – амплитуду автоколебаний.

Для этого необходимо в одних координатных осях построить амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части  $W_{\text{л}}(\omega) \rightarrow A(\omega) + jB(\omega)$  и в этих же координатных осях построить по линеаризованным коэффициентам нелинейную характеристику

$W(a)$ . Если характеристики не пересекаются, автоколебаний в системе нет (рис. 10.40).

При соприкосновении характеристик система находится на границе автоколебаний (рис. 10.41).

Точка пересечения характеристик показывает, что автоколебания в системе присутствуют.

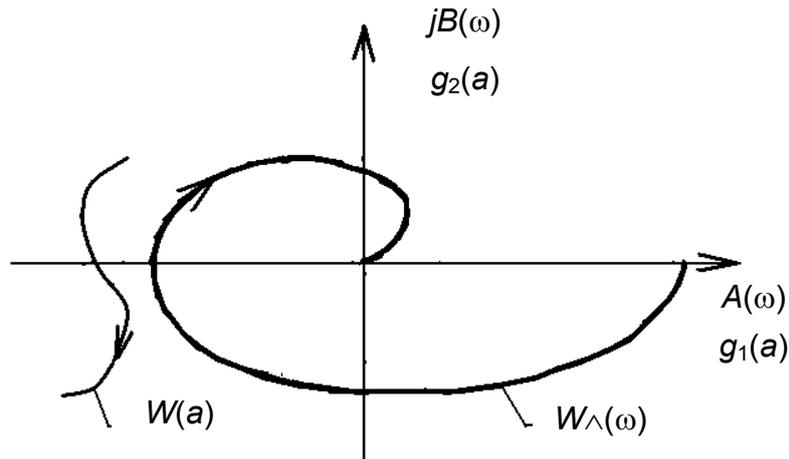


Рис. 10.40. Годографы для линейной части системы и нелинейного звена при отсутствии автоколебаний в системе

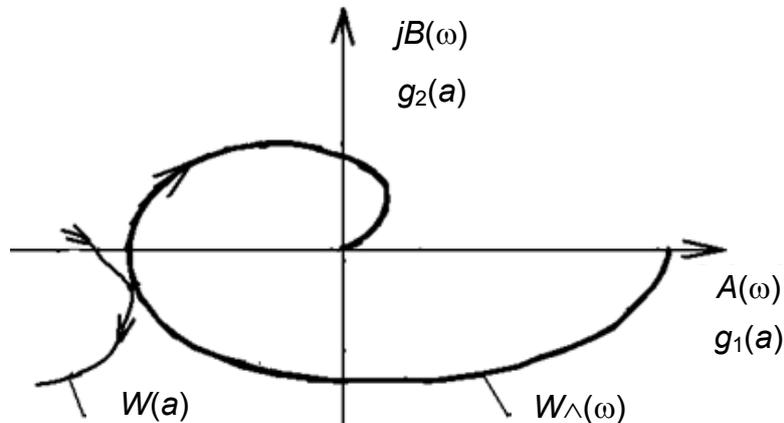


Рис. 10.41. Вид годографов линейной части системы и нелинейного звена на границе автоколебаний

Частота автоколебаний равна частоте в точке пересечения (рис. 10.42).

Пусть все линейные звенья объединены в одно звено, и состояние какой-то системы описывается нелинейным уравнением

$$Y = F\left(X, \frac{dX}{dt}\right).$$

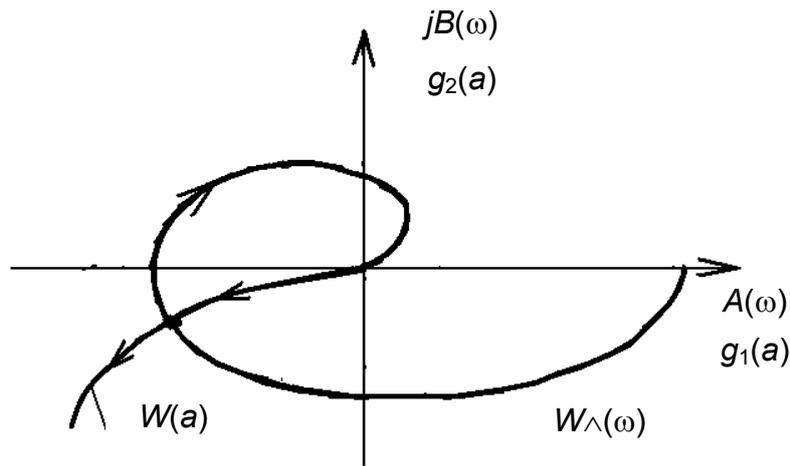


Рис. 10.42. Вид годографов линейной части системы и нелинейного звена при автоколебаниях системы

При гармоническом законе изменения входной величины  $X$  (рис. 10.43) будет

$$X = a \cdot \sin(\omega t) \text{ и } \omega t = \varphi \frac{dX}{dt} = a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t). \quad (10.8)$$



Рис. 10.43. Структурная схема нелинейного звена

Закон изменения выходной величины  $Y$  будет периодический, но не гармонический. Вид выходной величины определяется характеристикой конкретного нелинейного звена (рис. 10.44).

Любой периодический сигнал с помощью разложения в ряд Фурье может быть представлен в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих различной частоты, кратной частоте входного сигнала. Согласно принятым допущениям линейная часть системы из-за своей инерционности обладает фильтрующими свойствами, и амплитуды высших гармоник при прохождении через линейную часть уменьшаются во много раз, поэтому высшими гармониками можно пренебречь, учитывая только первую гармонику с частотой, равной частоте входного сигнала.

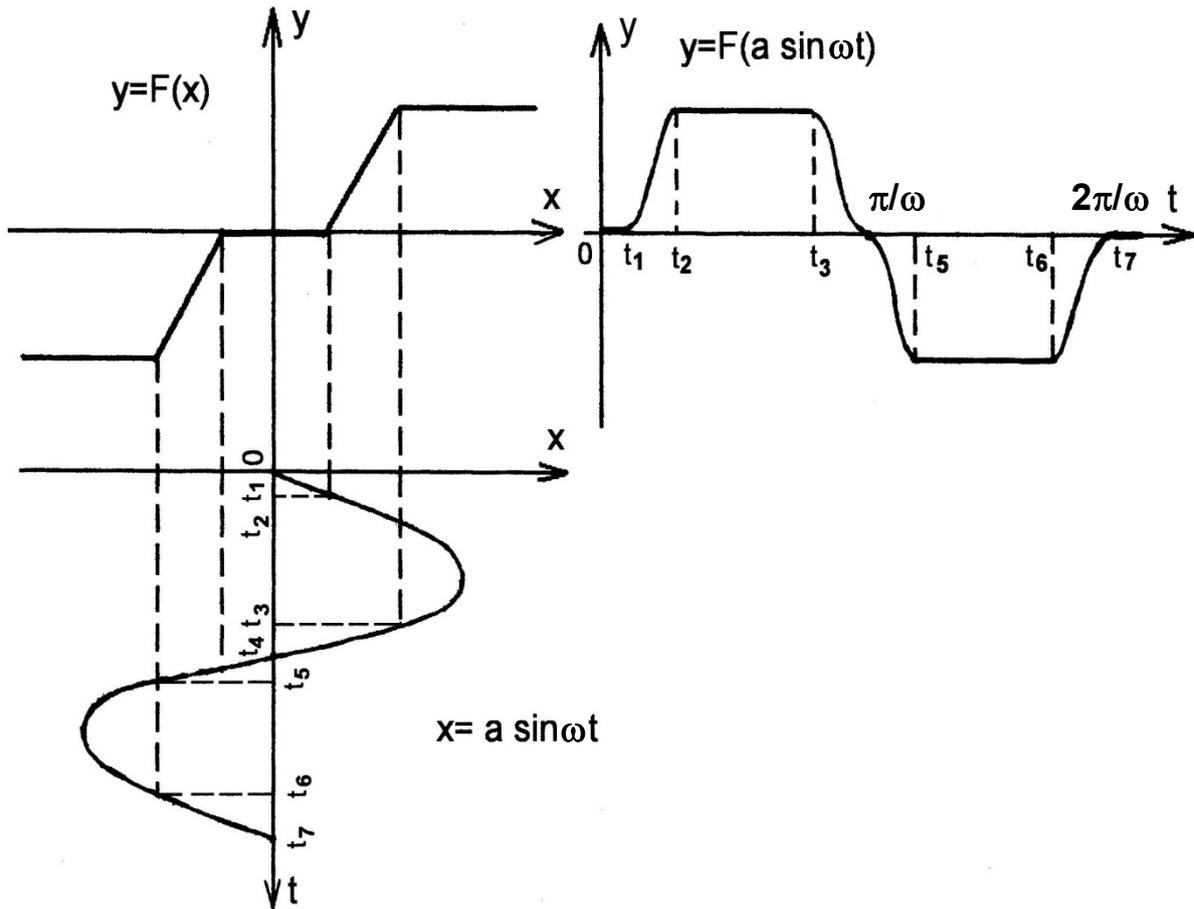


Рис. 10.44. Влияние постоянной составляющей на гармоническую линеаризацию характеристики с зоной насыщения и зоной нечувствительности

Разложим нелинейную функцию  $Y$  в ряд Фурье, отбросив высшие гармоники, т.е. считая, что их не пропускают линейные звенья:

$$Y = F\left(X, \frac{dX}{dt}\right) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cdot \cos(\omega t) + A_2 \cdot \sin(\omega t), \quad (10.9)$$

где  $A_0, A_1, A_2$ , – коэффициенты ряда Фурье, определяемые по известным соотношениям. В колебаниях системы отсутствует постоянная составляющая, поэтому считаем, что  $A_0 = 0$

$$A_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi;$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Из соотношений (10.8) следует, что  $\sin \varphi = \frac{X}{a}$  и  $\cos \varphi = \frac{1}{a \cdot \omega} \cdot \frac{dX}{dt}$ .

Подставив полученные выражения в уравнения (10.9), получим

$$Y = A_1 \cdot \sin \varphi + A_2 \cdot \cos \varphi = \frac{A_1}{a} X + \frac{A_2}{a \cdot \omega} \cdot \frac{dX}{dt}$$

или в изображениях Лапласа

$$Y(S) = q(a, \omega) \cdot X(S) + q_1(a, \omega) \cdot \frac{S}{\omega} X(S).$$

Последнее выражение заменяют приближенной эквивалентной передаточной функцией элемента, которая определяется как отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала нелинейного элемента к амплитуде его входного гармонического сигнала, и в общем случае

$$W_H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = q_1(a, \omega) + q_2(a, \omega) \frac{S}{\omega}.$$

Частотная эквивалентная передаточная функция будет

$$W_H(j\omega) = q_1(a) + q_2(a) \frac{j\omega}{\omega}$$

$$\text{или } W_H(j\omega) = q_1(a) + q_2(a)j,$$

где  $q_1(a)$  и  $q_2(a)$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

Амплитуда эквивалентной передаточной функции, показывающая, во сколько раз первая гармоника на входе нелинейного элемента больше амплитуды  $A_H$  синусоидального входного сигнала, рассчитывается по формуле

$$A_H(a) = |W_H(j\omega)| = \sqrt{q_1^2(a) + q_2^2(a)}.$$

Фаза эквивалентной передаточной функции определяется как разность фаз между первой гармоникой на выходе нелинейного элемента и синусоидальным входным сигналом

$$\varphi(a) = \text{arctg} \frac{q_2(a)}{q_1(a)}.$$

Полученные формулы показывают, что эквивалентная передаточная функция нелинейного звена зависит от амплитуды входного сигнала и не зависит от его частоты.

Для некоторых нелинейных характеристик коэффициенты гармонической линеаризации приведены в табл. 4.

Нелинейные характеристики  
и коэффициенты гармонической линейаризации

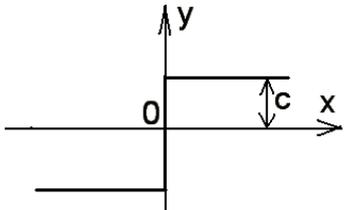
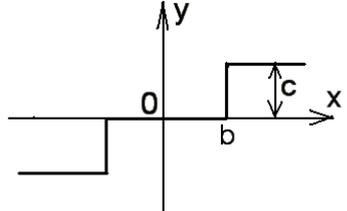
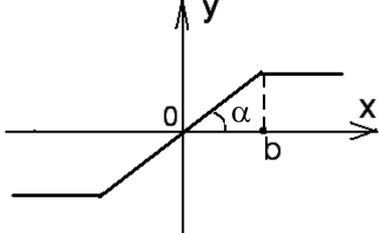
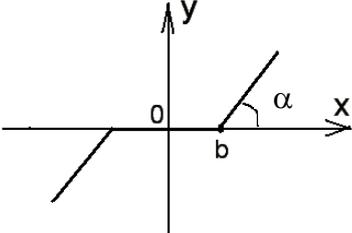
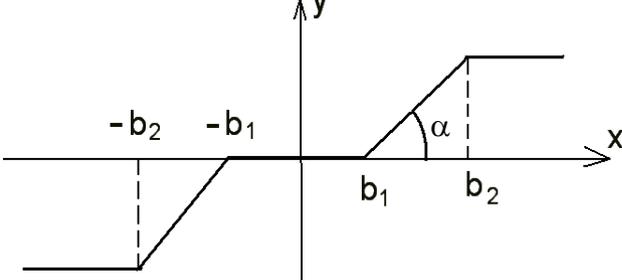
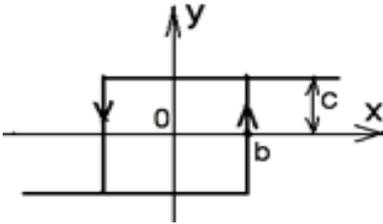
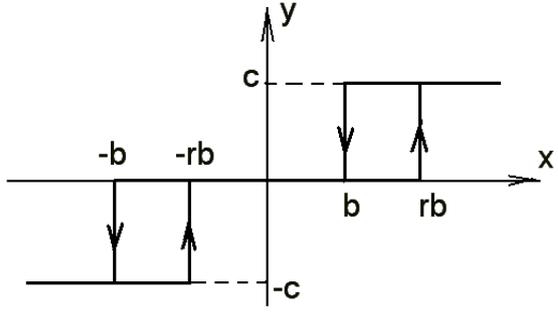
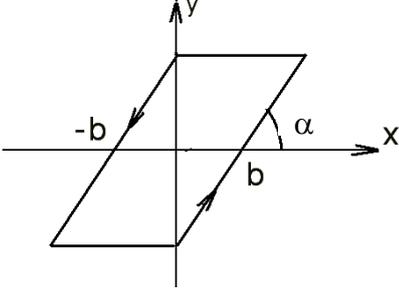
График нелинейного элемента	Коэффициенты гармонической линейаризации
<p>Релейный элемент</p> 	$q_1(a) = \frac{4c}{\pi a};$ $q_2(a) = 0$
<p>Релейный элемент с зоной нечувствительности</p> 	$q_1(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ при } a \geq b;$ $q_1(a) = 0 \text{ при } a < b;$ $q_2(a) = 0$
<p>Релейный элемент с насыщением</p> 	$k = \operatorname{tg} \alpha;$ $q_1(a) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ <p>при <math>a \geq b</math>;</p> $q_1(a) = k \text{ при } a \leq b;$ $q_2(a) = 0$
<p>Элемент с зоной нечувствительности</p> 	$q_1(a) = c - \frac{2c}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ <p>при <math>a \geq b</math>;</p> $q_1(a) = 0 \text{ при } a < b;$ $q_2(a) = 0$
<p>Элемент с зоной нечувствительности и насыщением</p> 	$k = \operatorname{tg} \alpha;$ $q_1(a) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a^2}} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right)$ <p>при <math>a \geq b_2</math>;</p> $q_2(a) = 0$

График нелинейного элемента	Коэффициенты гармонической линейризации
<p>Элемент с петлей гистерезиса</p> 	$q_1(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ при } a \geq b;$ $q_1(a) = 0 \text{ при } a < b;$ $q_2(a) = -\frac{4cb}{\pi a^2} \text{ при } a \geq b;$ $q_2(a) = 0 \text{ при } a < b$
<p>Элемент с зонами нечувствительности и неоднозначности</p> 	$q_1(a) = \frac{2c}{\pi a} \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{r^2 b^2}{a^2}} \right)$ <p>при <math>a \geq b</math>;</p> $q_1(a) = 0 \text{ при } a < b;$ $q_2(a) = -\frac{2cb(1-r)}{\pi a^2} \text{ при } a \geq b;$ $q_2(a) = 0 \text{ при } a < b$
<p>Элемент типа люфта</p> 	$k = \operatorname{tg} \alpha;$ $q_1(a) = \frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right)} \right]$ <p>при <math>a \geq b</math>;</p> $q_2(a) = -\frac{4k}{\pi a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \text{ при } a \geq b$

При решении задач удобно пользоваться графоаналитической схемой, называемой диаграммой Гольдфарба:

- 1) построить годограф линейного звена  $W_n(\omega)$  при  $\omega \in [0; \infty)$ ;
- 2) построить годограф линейризованной характеристики нелинейного звена  $W(a) = -\frac{1}{W_n(a)}$  при  $a \in [0; \infty)$ ;

3) найти значения частоты  $\omega_{\text{кол}}$  и амплитуды  $A_{\text{кол}}$  периодического движения, соответствующие точкам пересечения годографов (рис. 10.45).

При движении по годографу нелинейного звена в сторону увеличения амплитуды, если годограф входит в зону, охватываемую линейным годографом (точка 1 на рис. 10.45), то колебания в системе неус-

тойчивые. Если годограф нелинейного звена при увеличении амплитуды выходит из годографа линейных звеньев, то в системе устойчивые автоколебания (на рис. 10.46 точка 2).

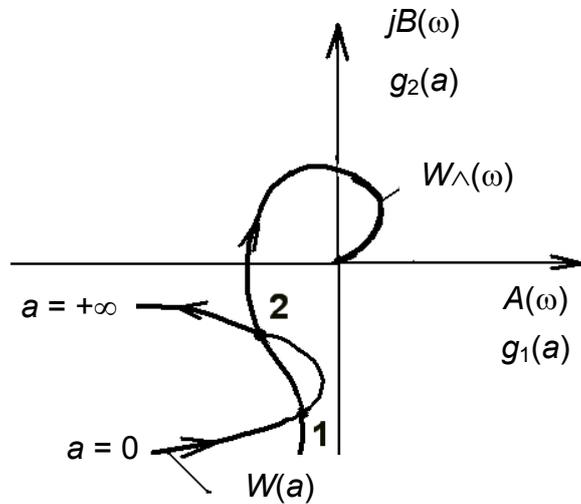


Рис. 10.45. Вид годографов системы при автоколебаниях

**Пример.** Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис. 10.44. Параметры линейной части системы:  $T_1 = 1,0$  с;  $T_2 = 0,9$  с;  $T_3 = 1,1$  с;  $K_1 = 0,5$ ;  $K_2 = 5$ .

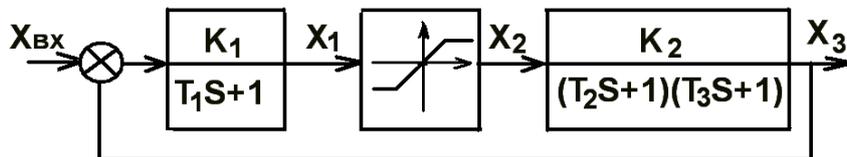


Рис. 10.46. Структурная схема системы

Статическая характеристика нелинейного звена изображена на рис. 10.47, где  $b = 1$ ;  $K_3 = \text{tg}\alpha = 4$ .

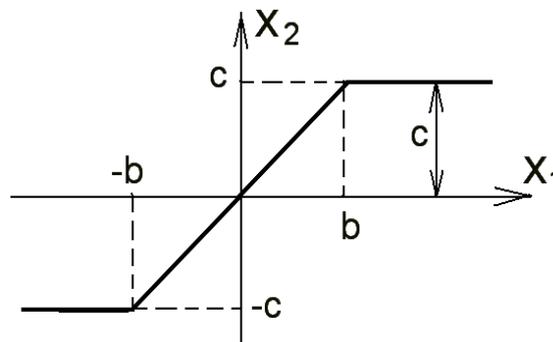


Рис. 10.47. Статическая характеристика нелинейного звена

Необходимо исследовать систему на наличие автоколебаний. При наличии автоколебаний определить частоту и амплитуду.

*Решение.*

Следуя диаграмме Гольдфарба, необходимо:

1) построить годограф амплитудно-частотной характеристики линейной части системы.

Для этого по заданной структурной схеме определяется передаточная функция линейной части системы  $W_n(j\omega)$ :

$$W_n(j\omega) = \frac{K_1}{T_1 S + 1} \cdot \frac{K_2}{(T_2 S + 1)(T_3 S + 1)}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика строится любым известным способом. Можно ее разделить на вещественную и мнимую части  $W_n(\omega) \rightarrow A(\omega) + jB(\omega)$ :

$$\begin{aligned} W_n(j\omega) &= \frac{K_1 \cdot K_2}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{K_1 K_2 (1 - T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_3 j\omega + 1)}{(1 + T_1^2 j\omega)(1 + T_2^2 j\omega)(1 + T_3^2 j\omega)}. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и перегруппировки получаем

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{K_1 K_2 (1 - T_1 T_2 \omega^2 - T_1 T_3 \omega^2 - T_2 T_3 \omega^2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_3^2 \omega^2)}, \\ B(\omega) &= \frac{K_1 K_2 (-T_3 \omega - T_2 \omega - T_1 \omega + T_1 T_2 T_3 \omega^3)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_3^2 \omega^2)}. \end{aligned}$$

Для построения амплитудно-фазовой частотной характеристики линейной части системы задаемся значениями  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , например, показанными в табл. 5.

Таблица 5

При заданных значениях  $\omega$ , получаемые значения  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$

$\omega$	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	2,5	0
0,5	0,32	-1,76
1	-0,62	-0,63
1,5	-0,57	-0,34
2	-0,22	0,0387

Амплитудно-частотная характеристика показана  $W_n(\omega)$  на рис. 10.48;

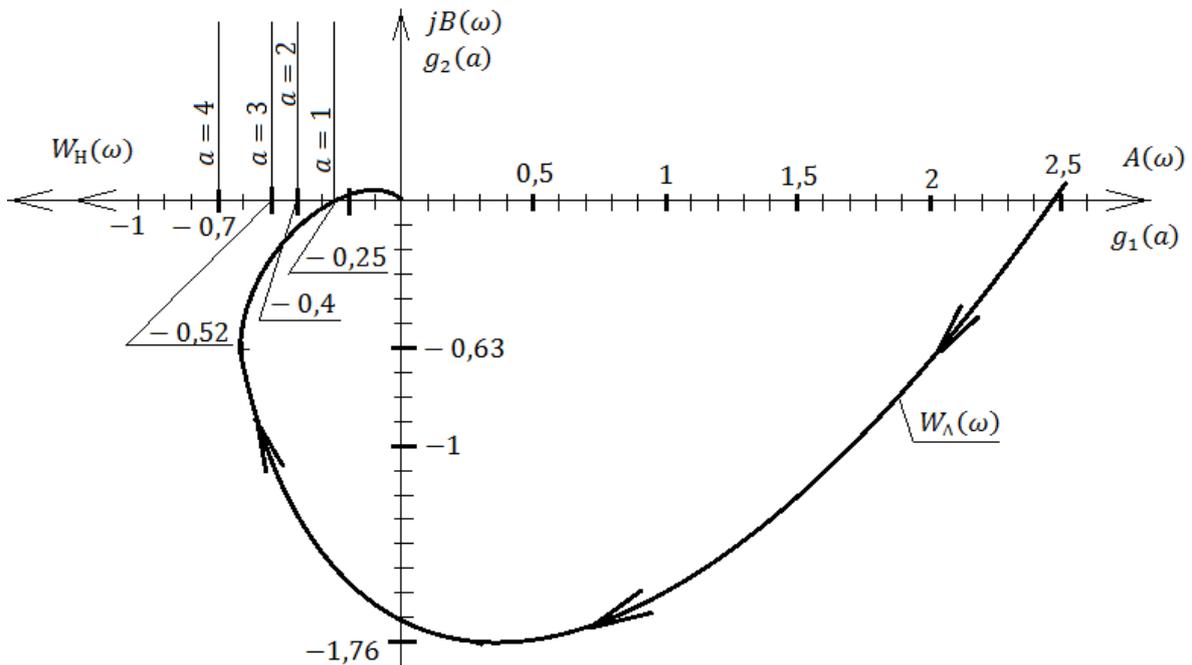


Рис. 10.48. Годографы линейной части и линейризованного нелинейного звена системы

2) построение линейризованной характеристики нелинейного звена, для чего определяем гармонически линейризованную эквивалентную передаточную функцию нелинейной характеристики  $W(A) = q(a)$ . Гармонически линейризованная передаточная функция нелинейного звена, имеющего однозначную статическую характеристику показанную на рис. 10.47, может быть записана с использованием коэффициентов гармонической линейризации нелинейной характеристики с насыщением, взятых из табл. 4 в виде  $W(A) = q(a)$ , где  $q_2(a) = 0$ ,

$$q_1(a) = \frac{2K_3}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \text{ при } a \geq b;$$

$$q_1(a) = K_3 \text{ при } a \leq b.$$

При периодическом движении нелинейной системы без внешнего воздействия  $W_n(j\omega) = -\frac{1}{W_n(a, \omega)}$ , где  $-W(A)^{-1} = -\frac{1}{q_1(a)}$ .

Для графического решения этого уравнения строим  $-W(A^{-1})$ .

Подставляем в коэффициенты гармонической линейризации исходные данные:  $b = 1$ ;  $k_3 = 4$  и задаём значение амплитуды  $a = 1, 2, 3, 4$ .

$$q_1(a) = \frac{2K_3}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) = \frac{2 \cdot 4}{3,14} \left( \arcsin \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right);$$

– при  $a = 1$

$$q_1(1) = \frac{8}{3,14} (\arcsin 1 + 0) = 2,55 \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) = 4,$$

$$-W(A)^{-1} = -\frac{1}{q_1(a)} = -\frac{1}{4} = -0,25;$$

– при  $a = 2$

$$q_1(2) = \frac{8}{3,14} \left( \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \right) = 2,55 \left( \frac{\pi}{6} + 0,5 \cdot 0,86 \right) = 2,5,$$

$$-W(A)^{-1} = -0,4;$$

– при  $a = 3$

$$q_1(3) = \frac{8}{3,14} \left( \arcsin \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \right) = 2,55 \left( \frac{\pi}{7} + 0,33 \cdot 0,942 \right) = 1,94,$$

$$-W(A)^{-1} = -0,52;$$

– при  $a = 4$

$$q_1(4) = 2,55 (\arcsin 0,25 + 0,25 \sqrt{1 - 0,0625}) = 1,53,$$

$$-W(A)^{-1} = -0,7.$$

Поскольку  $q_2(a) = 0$ , характеристика пойдет по оси  $q_1(A)$ , как показано на рис. 10.48.

Как видно из построенных годографов линейной части и нелинейного звена системы, показанных на рис. 10.48, годографы пересекаются, причем годограф нелинейного звена с увеличением амплитуды отдаляется от годографа линейной части, что свидетельствует о наличии в системе устойчивых автоколебаний;

3) определяем частоту  $\omega_{\text{кол}}$  и амплитуду автоколебаний.

Годограф линейной части системы проходит через три квадранта. Необходимо определить частоту, при которой годограф пересекает ось  $A(\omega)$ , при этом

$$B(\omega) = \frac{K_1 K_2 (-T_3 \omega - T_2 \omega - T_1 \omega + T_1 T_2 T_3 \omega^3)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_3^2 \omega^2)} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, т.е.

$$K_1 K_2 \omega (-T_3 - T_2 - T_1 + T_1 T_2 T_3 \omega^2) = 0.$$

Поскольку  $\omega \neq 0$  и коэффициенты  $K_1 K_2 \neq 0$ , значит, скобка должна быть равна нулю. Приравниваем скобку к нулю и решаем квадратное уравнение  $-T_3 - T_2 - T_1 + T_1 T_2 T_3 \omega^2 = 0$ , тогда

$$\omega_{\text{кол}} = \pm \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}} = \sqrt{\frac{1,0 + 0,9 + 1,1}{1 \cdot 0,9 \cdot 1,1}} = \sqrt{\frac{3}{0,99}} = 1,74 \frac{1}{\text{с}}.$$

Амплитуду автоколебаний находят графически по шкале амплитуды, при которой строился годограф нелинейного звена. Определяем приблизительно, какая амплитуда у годографа нелинейного звена будет при пересечении годографом линейной части системы:  $A_{\text{кол}} = 1,8$ .

Вывод. В заданной системе присутствуют устойчивые автоколебания системы с частотой  $\omega_{\text{кол}} = 1,74 \frac{1}{\text{с}}$  и амплитудой  $A_{\text{кол}} = 1,8$ .

### **Контрольные вопросы и задания по разделу 10**

1. Что такое нелинейная система?
2. Какие виды нелинейности Вы знаете?
3. Каково влияние начальных условий на устойчивость нелинейных систем?
4. Приведите примеры статических и динамических нелинейностей.
5. Что такое автоколебания системы?
6. Чем отличаются вынужденные колебания системы от автоколебаний?
7. В чём отличие затухающих колебаний нелинейных и линейных систем?
8. В чём суть первой теоремы Ляпунова?
9. Какие точные методы исследования устойчивости Вы знаете?
10. В чём суть графической интерпретации графического метода Попова?
11. Какую систему называют автономной?
12. Что называется фазовой плоскостью?
13. Что такое фазовое пространство?
14. Какая точка называется изображающей и где её обозначают?
15. Что называется предельным циклом?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гидравлика. В 2 т. Т. 2. Гидравлические машины и приводы: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / В.И. Иванов, И.И. Сазанов, А.Г. Схиртладзе, Г.О. Трифонова. – М.: Изд. центр «Академия», 2012. – 288 с.

2. Трифонова, Г.О. Следящие системы приводов: учеб. пособие / Г.О. Трифонова, О.И. Трифонова. – М.: МАДИ, 2013. – 142 с.

3. Гидравлические и пневматические системы транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования: учеб. пособие / В.В. Буренин, Г.С. Мазлумян, Л.А. Пресняков, Г.О. Трифонова, О.И. Трифонова, Р.В. Чайка. – М.: Филиал ФГУП «ЦЭНКИ» – КБТХМ, 2017. – 217 с.

4. Щербаков, В.Ф. Система эксплуатации гидропривода подвижного агрегата ремонтно-транспортной машины / В.Ф. Щербаков, О.И. Трифонова // Строительные и дорожные машины. – 2016. – № 1. – С. 35–39.

5. Анализ и вывод закона торможения отводимых конструкций гидравлического привода / В.В. Буренин, Г.О. Трифонова, О.И. Трифонова, В.Ф. Щербаков, А. Трохницкий // Строительные и дорожные машины. – 2017. – № 2. – С. 16–21.

6. Расчет площади проходного сечения гидродресселя демпфирующего устройства / В.В. Буренин, Г.О. Трифонова, О.И. Трифонова, В.Ф. Щербаков // Строительные и дорожные машины. – 2017. – № 3. – С. 41–44.

7. Трифонова, Г.О. Гидравлические шаговые приводы во внутренних цепях агрегатов транспортных установок / Г.О. Трифонова, О.И. Трифонова, В.Д. Горшков // Строительные и дорожные машины. – 2017. – № 12. – С. 34–43.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>3</b>
<b>Раздел 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>4</b>
1.1. Классификация систем управления.....	5
1.2. Задачи исследования и расчета систем автоматического регулирования и управления.....	6
<i>Контрольные вопросы и задания по разделу 1</i> .....	9
<b>Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>10</b>
2.1. Составление математической модели системы .....	10
2.2. Линеаризация уравнений динамики .....	13
2.3. Дифференциальная и операторная формы представления математической модели .....	17
<i>Контрольные вопросы и задания по разделу 2</i> .....	24
<b>Раздел 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ .....</b>	<b>25</b>
3.1. Режимы работы систем автоматического управления .....	25
3.2. Типовые внешние воздействия .....	26
3.3. Временные характеристики .....	28
3.4. Частотные характеристики.....	32
3.5. Логарифмические частотные характеристики .....	39
<i>Контрольные вопросы по разделу 3</i> .....	41
<b>Раздел 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....</b>	<b>42</b>
4.1. Пропорциональное звено (безынерционное, усилительное).....	42
4.2. Интегрирующее (астатическое) звено .....	44
4.3. Дифференцирующее звено .....	48
4.4. Аперiodическое звено первого порядка .....	51
4.5. Форсирующее звено первого порядка .....	56
4.6. Звенья второго порядка .....	58
<i>Контрольные вопросы и задания по разделу 4</i> .....	63
<b>Раздел 5. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ .....</b>	<b>64</b>
5.1. Построение структурных схем .....	64
5.2. Преобразование структурных схем .....	70
5.3. Преобразование структурных связей.....	73
5.4. Преобразование структурной схемы с непересекающимися связями .....	74
5.5. Преобразование структурных схем с пересекающимися связями .....	77
5.6. Передаточные функции системы .....	81
<i>Контрольные вопросы и задания по разделу 5</i> .....	84

<b>Раздел 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....</b>	<b>85</b>
6.1. Необходимые и достаточные условия устойчивости .....	85
6.2. Критерии устойчивости .....	92
6.3. Критерий Гурвица .....	92
6.4. Критерий устойчивости Михайлова .....	95
6.5. Критерий Найквиста .....	100
6.6. Запасы устойчивости по критерию Найквиста .....	105
6.7. Влияние некоторых характеристик на устойчивость систем.....	106
6.8. Определение устойчивости по логарифмическим характеристикам .....	107
6.9. Области устойчивости систем автоматического управления.....	109
6.10. Общий метод $D$ -разбиения в плоскости двух параметров.....	112
<i>Контрольные вопросы по разделу 6.....</i>	<i>116</i>
<b>Раздел 7. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....</b>	<b>117</b>
7.1. Понятия качества регулирования .....	117
7.2. Расчет переходных процессов по частотным характеристикам .....	121
7.3. Оценка качества переходных процессов по частотным характеристикам .....	124
7.4. Корневые методы оценки качества.....	129
<i>Контрольные вопросы по разделу 7.....</i>	<i>132</i>
<b>Раздел 8. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>132</b>
8.1. Точность работы систем в установившихся режимах.....	132
8.2. Неизменность управляющего и возмущающего воздействий .....	135
8.3. Движение с постоянной скоростью.....	136
8.4. Другие законы воздействия.....	138
<i>Контрольные вопросы и задания по разделу 8.....</i>	<i>140</i>
<b>Раздел 9. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ.....</b>	<b>141</b>
9.1. Коррекция системы управления .....	141
9.2. Корневой метод коррекции.....	142
9.3. Коррекция с использованием логарифмических характеристик.....	145
<i>Контрольные вопросы по разделу 9.....</i>	<i>148</i>
<b>Раздел 10. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>148</b>
10.1. Особенности нелинейных систем автоматического управления .....	148
10.2. Статические и динамические нелинейности .....	150
10.3. Методы исследования устойчивости нелинейных систем.....	155
<i>Контрольные вопросы и задания по разделу 10.....</i>	<i>188</i>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>189</b>

Учебное издание

**ТРИФОНОВА** Галина Олеговна  
**БУРЕНИН** Владислав Валентинович  
**ТРИФОНОВА** Ольга Игоревна

**УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕХНИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ**

*УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ*

*Редактор Н.В. Шашина*

*Редакционно-издательский отдел МАДИ. E-mail: rio@madi.ru*

Подписано в печать 27.09.2018 г. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 12,0. Тираж 500 экз. Заказ . Цена 390 руб.  
МАДИ, Москва, 125319, Ленинградский пр-т, 64.