Периодическая система химических элементов Д. И. Менделеева

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
		A B	A B	B A	B A	B A	B A	B A	B		A
I	1	1 H 1,00794 ВОДОРОД						H	Относительная атомная масса* / Атомный номер: Rb 37 85,4678 РУБИДИЙ		2 He 4,002602 ГЕЛИЙ
II	2	3 Li 6,941 ЛИТИЙ	4 Be 9,012182 БЕРИЛЛИЙ	5 B 10,811 БОР	6 C 12,0107 УГЛЕРОД	7 N [illegible]	8 O 15,9994 КИСЛОРОД	9 F 18,9984032 ФТОР			10 Ne 20,1797 НЕОН
III	3	11 Na 22,989770 НАТРИЙ	12 Mg 24,3050 МАГНИЙ	13 Al 26,981538 АЛЮМИНИЙ	14 Si 28,0855 КРЕМНИЙ	15 P [illegible]	16 S 32,066 СЕРА	17 Cl 35,4527 ХЛОР			18 Ar 39,948 АРГОН
IV	4	19 K 39,0983 КАЛИЙ	20 Ca 40,078 КАЛЬЦИЙ	21 Sc 44,955910 СКАНДИЙ	22 Ti 47,867 ТИТАН	23 V 50,9415 ВАНАДИЙ	24 Cr 51,9961 ХРОМ	25 Mn 54,938049 МАРГАНЕЦ	26 Fe 55,845 ЖЕЛЕЗО	27 Co 58,933200 КОБАЛЬТ	28 Ni 58,6934 НИКЕЛЬ
	5	29 Cu 63,546 МЕДЬ	30 Zn 65,39 ЦИНК	31 Ga 69,723 ГАЛЛИЙ	32 Ge 72,61 ГЕРМАНИЙ	33 As [illegible]	34 Se 78,96 СЕЛЕН	35 Br 79,904 БРОМ			36 Kr 83,80 КРИПТОН
V	6	37 Rb 85,4678 РУБИДИЙ	38 Sr 87,62 СТРОНЦИЙ	39 Y 88,90585 ИТТРИЙ	40 Zr 91,224 ЦИРКОНИЙ	41 Nb 92,90638 НИОБИЙ	42 Mo 95,94 МОЛИБДЕН	43 Tc [98] ТЕХНЕЦИЙ	44 Ru 101,07 РУТЕНИЙ	45 Rh 102,90550 РОДИЙ	46 Pd 106,42 ПАЛЛАДИЙ
	7	47 Ag 107,8682 СЕРЕБРО	48 Cd 112,411 КАДМИЙ	49 In 114,818 ИНДИЙ	50 Sn 118,710 ОЛОВО	51 Sb [illegible]	52 Te 127,60 ТЕЛЛУР	53 I 126,90447 ИОД			54 Xe 131,29 КСЕНОН
VI	8	55 Cs 132,90545 ЦЕЗИЙ	56 Ba 137,327 БАРИЙ	57–71 La – Lu	72 Hf 178,49 ГАФНИЙ	73 Ta 180,9479 ТАНТАЛ	74 W 183,84 ВОЛЬФРАМ	75 Re 186,207 РЕНИЙ	76 Os 190,23 ОСМИЙ	77 Ir 192,217 ИРИДИЙ	78 Pt 195,078 ПЛАТИНА
	9	79 Au 196,96655 ЗОЛОТО	80 Hg 200,59 РТУТЬ	81 Tl 204,3833 ТАЛЛИЙ	82 Pb 207,2 СВИНЕЦ	83 Bi [illegible]	84 Po [209] ПОЛОНИЙ	85 At [210] АСТАТ			86 Rn [222] РАДОН
VII	10	87 Fr [223] ФРАНЦИЙ	88 Ra [226] РАДИЙ	89–103 Ac – Lr	104 Rf [261] РЕЗЕРФОРДИЙ	105 Db [262] ДУБНИЙ	106 Sg [265] СИБОРГИЙ	107 Bh [261] БОРИЙ	108 Hs [265] ГАССИЙ	109 Mt [266] МЕЙТНЕРИЙ	.....

*Для элементов, не имеющих стабильных нуклидов (за исключением Th, Pa и U, распространенных в земной коре), в квадратных скобках приведены массовые числа наиболее долгоживущих изотопов.

Лантаноиды	57 La 138,9055 ЛАНТАН	58 Ce 140,116 ЦЕРИЙ	59 Pr 140,90765 ПРАЗЕОДИМ	60 Nd 144,24 НЕОДИМ	61 Pm [145] ПРОМЕТИЙ	62 Sm 150,36 САМАРИЙ	63 Eu 151,964 ЕВРОПИЙ	64 Gd [illegible]	65 Tb 158,92534 ТЕРБИЙ	66 Dy 162,50 ДИСПРОЗИЙ	67 Ho 164,93032 ГОЛЬМИЙ	68 Er 167,26 ЭРБИЙ	69 Tm 168,93421 ТУЛИЙ	70 Yb 173,04 ИТТЕРБИЙ	71 Lu 174,967 ЛЮТЕЦИЙ

Актиноиды	89 Ac [227] АКТИНИЙ	90 Th 232,0381 ТОРИЙ	91 Pa 231,03588 ПРОТАКТИНИЙ	92 U 238,0289 УРАН	93 Np [237] НЕПТУНИЙ	94 Pu [244] ПЛУТОНИЙ	95 Am [243] АМЕРИЦИЙ	96 Cm [illegible]	97 Bk [247] БЕРКЛИЙ	98 Cf [251] КАЛИФОРНИЙ	99 Es [252] ЭЙНШТЕЙНИЙ	100 Fm [257] ФЕРМИЙ	101 Md [258] МЕНДЕЛЕВИЙ	102 No [259] НОБЕЛИЙ	103 Lr [262] ЛОУРЕНСИЙ

А. Г. ЧЕРТОВ
А. А. ВОРОБЬЕВ

ЗАДАЧНИК ПО ФИЗИКЕ

Издание седьмое, переработанное и дополненное

Москва
Физматлит
2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. **Физические основы механики** 7

§ 1. Кинематика 7

§ 2. Динамика материальной точки и тела, движущихся поступательно 23

§ 3. Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси 50

§ 4. Силы в механике 75

§ 5. Релятивистская механика 91

§ 6. Механические колебания 101

§ 7. Волны в упругой среде. Акустика 120

Глава 2. **Молекулярная физика и термодинамика** 132

§ 8. Молекулярное строение вещества. Законы идеальных газов 132

§ 9. Молекулярно-кинетическая теория газов 142

§ 10. Элементы статистической физики 149

§ 11. Физические основы термодинамики 165

§ 12. Реальные газы. Жидкости 185

Глава 3. **Электростатика** 202

§ 13. Закон Кулона. Взаимодействие заряженных тел 202

§ 14. Напряженность электрического поля. Электрическое смещение 210

§ 15. Потенциал. Энергия системы электрических зарядов. Работа по перемещению заряда в поле 233

§ 16. Электрический диполь. Свойства диэлектриков 255

§ 17. Электрическая емкость. Конденсаторы 270

§ 18. Энергия заряженного проводника. Энергия электрического поля 276

Глава 4. **Постоянный электрический ток** 285

§ 19. Основные законы постоянного тока 285

§ 20. Ток в металлах, жидкостях и газах 297

Глава 5. **Электромагнетизм** 307

§ 21. Магнитное поле постоянного тока 307

§ 22. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле 320

§ 23. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле 334

§ 24. Закон полного тока. Магнитный поток. Магнитные цепи 344
§ 25. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция. Индуктивность . . . 352
§ 26. Энергия магнитного поля 365
§ 27. Магнитные свойства вещества 370

Глава 6. **Оптика** 380
§ 28. Геометрическая оптика 380
§ 29. Фотометрия 390
§ 30. Интерференция света 395
§ 31. Дифракция света 406
§ 32. Поляризация света 415
§ 33. Оптика движущихся тел 423

Глава 7. **Квантовооптические явления. Физика атома** 428
§ 34. Законы теплового излучения 428
§ 35. Фотоэлектрический эффект 434
§ 36. Давление света. Фотоны 437
§ 37. Эффект Комптона 441
§ 38. Атом водорода и водородоподобные ионы 444
§ 39. Рентгеновское излучение 449

Глава 8. **Физика атомного ядра и элементарных частиц** 453
§ 40. Строение атомных ядер 453
§ 41. Радиоактивность 458
§ 42. Элементы дозиметрии ионизирующих излучений 463
§ 43. Дефект массы и энергия связи атомных ядер 468
§ 44. Ядерные реакции 472

Глава 9. **Элементы квантовой механики** 478
§ 45. Волновые свойства микрочастиц 478
§ 46. Простейшие случаи движения микрочастиц 487
§ 47. Строение атома 501
§ 48. Спектры молекул 516

Глава 10. **Физика твердого тела** 524
§ 49. Элементы кристаллографии 524
§ 50. Тепловые свойства 533
§ 51. Электрические и магнитные свойства твердых тел 547

Ответы 559
Приложения 619

ПРЕДИСЛОВИЕ

В седьмом, частично переработанном, исправленном и дополненном издании «Задачника по физике» общая структура задачника осталась прежней. Для удобства и экономии времени студентов каждый параграф начинается с перечня основных формул, относящихся к данному разделу, и кратких пояснений к ним. Затем следуют примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения с ответами, помещенными в конце задачника.

Примеры решений не имеют цели научить решению задач: научить нельзя — можно только научиться. Но для этого существует единственный путь — самостоятельное решение большого числа задач. Примеры решения типовых задач выполняют другую роль: они показывают последовательность физических рассуждений, применимость того или иного физического закона к данной задаче. Решения задач приводятся в общем виде. Вычисления и проверка единиц измерений ради экономии места в ряде примеров опускаются.

Ответы к задачам даны с точностью до трех значащих цифр. С такой же точностью приведены величины в условиях задач и справочных таблицах. Значащие цифры — нули, стоящие в конце чисел, в целях упрощения записи, опущены (например, запись $m = 2$ кг следует читать $m = 2{,}00$ кг).

При подборе задач отдавалось предпочтение реальным задачам, заимствованным из практики, науки и техники. Мы стремились располагать там, где это возможно, задачи в логической последовательности и возрастающей сложности.

Существенная переработка коснулась пункта «Основные формулы» практически в каждом параграфе. Помимо дополнений, наряду со скалярной формой записи соотношений была введена и векторная форма (в старом издании векторная форма записи во многих случаях отсутствовала).

Добавлены несколько новых примеров решения задач и несколько примеров были переработаны.

В задачник включено дополнительно около 150 новых задач. Так, например, в разделе «Динамика» добавлены задачи на упругое и неупругое столкновения шаров, движение тела под действием переменной силы и движение тела с переменной массой. В параграфе «Элементы статистической физики» добавлены новые за-

дачи оценочного характера (по порядку величины). Несколько расширен раздел термодинамики — добавлены задачи на вычисление изменения внутренней энергии, энтальпии и энтропии в различных термодинамических процессах. В главу «Электростатика» включены задачи на определение напряженности электрического поля, создаваемого распределенными (вдоль линии, по поверхности и объему) зарядами. Добавлены задачи по тепловому излучению, элементам квантовой механики, квантовой статистике и квантовой теории теплоемкости. Новые задачи помещены в конце параграфа и отмечены звездочкой (⋆), что позволило не нарушать прежней нумерации задач.

Следует отметить, что в результате переработки был несколько сокращен раздел акустики.

Авторы выражают благодарность коллегам: профессору Кузнецову В.М. (зав. кафедрой РХТУ им. Д.И. Менделеева) и доцентам Турдакину В.М. и Хромову В.И. Их ценные советы и предложенные темы ряда задач были использованы авторами при подготовке задачника к новому изданию.

Все замечания по структуре задачника и подбору задач авторы примут с благодарностью.

А. Г. Чертов
А. А. Воробьев

Глава 1
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

§ 1. Кинематика

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Положение материальной точки в пространстве задается радиусом-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы направлений (орты); x, y, z — координаты точки.

Кинематические уравнения движения в координатной форме:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

где t — время.

• Средняя скорость

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \mathbf{r}$ — перемещение материальной точки за интервал времени Δt.

Средняя путевая [1]) скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs — путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

Мгновенная скорость

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z,$$

где $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$; $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ — проекции скорости v на оси координат.

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

---

[1]) См. об этом термине, например, в кн.: Детлаф А. А. и др. Курс физики.— М.: Высшая школа, 1973. Т. I. С. 17.

• Ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z,$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ — проекции ускорения a на оси координат.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной $\mathbf{a}_n$ и тангенциальной $\mathbf{a}_\tau$ составляющих (рис. 1.1):

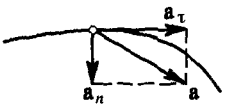


Рис. 1.1

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau.$$

Модули этих ускорений:

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где R — радиус кривизны в данной точке траектории.

• Кинематические уравнения прямолинейного равномерного ($\mathbf{v} = \text{const}$) движения:

а) в векторной форме

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t,$$

где $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор, определяющий положение материальной точки в момент времени t; $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор, определяющий положение материальной точки в начальный момент времени ($t = 0$);

б) в координатной форме (в проекции на координатные оси Ox, Oy, Oz)

$$x(t) = x_0 + v_x t; \quad y(t) = y_0 + v_y t; \quad z(t) = z_0 + v_z t,$$

где x_0, y_0, z_0 — начальные координаты; v_x, v_y, v_z — проекции скорости на координатные оси.

• Кинематические уравнения прямолинейного равноускоренного ($a = \text{const}$) движения:

а) в векторной форме

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2},$$

где $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость (скорость материальной точки в момент времени $t = 0$);

б) в координатной форме

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2};$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2},$$

где v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} — проекции начальной скорости на координатные оси; a_x, a_y, a_z — проекции ускорения.

• Скорость точки при равноускоренном движении:

а) в векторной форме

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t;$$

б) в координатной форме

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t; \quad v_y(t) = v_{0y} + a_y t; \quad v_z(t) = v_{0z} + a_z t,$$

• Положение твердого тела (или материальной точки) при заданной оси вращения определяется угловым перемещением (углом поворота)

$$\varphi = \frac{\breve{S}}{R},$$

где $\breve{S}$ — путь, пройденный точкой по дуге окружности радиуса R. При дифференциально малом угловом перемещении его можно рассматривать как вектор $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$, направление которого совпадает с осью вращения и определяется правилом правого винта.

• Средняя угловая скорость

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ — угловое перемещение за время Δt.

• Мгновенная угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t},$$

в проекции на ось вращения

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

• Угловое ускорение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t},$$

в проекции на ось вращения

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

• Кинематическое уравнение равномерного ($\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const}$) вращения в проекции на ось вращения

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 — начальное угловое перемещение.

Частота вращения

$$n = \frac{N}{t} \quad \text{или} \quad n = \frac{1}{T},$$

где N — число оборотов, совершаемое телом за время t; T — период вращения (время одного полного оборота).

Угловое перемещение φ и угловая скорость ω связаны с числом оборотов, частотой вращения и периодом вращения соотношениями

$$\varphi = 2\pi N; \quad \omega = 2\pi n; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

• Кинематическое уравнение равноускоренного вращения в проекции на ось вращения

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

Угловая скорость при равноускоренном вращении

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Число оборотов N связано со средней частотой $\langle n \rangle$ вращения соотношением

$$N = \langle n \rangle t.$$

При равноускоренном вращении $\langle n \rangle$ есть полусумма начальной n_0 и конечной n мгновенными частотами вращения

$$\langle n \rangle = \frac{n_0 + n}{2}.$$

• Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами:

путь, пройденный точкой по дуге окружности радиуса R,

$$s = \varphi R \quad (\varphi \text{ — угол поворота тела});$$

скорость точки (линейная)

$$v = \omega R; \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}];$$

ускорение точки

$$a_\tau = \varepsilon R; \quad \mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{R}] \quad \text{(тангенциальное)};$$

$$a_n = \omega^2 R; \quad \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{R} \quad \text{(нормальное)}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^3. Для момента времени $t_1 = 2$ с определить: 1) координату x_1 точки; 2) мгновенную скорость v_1; 3) мгновенное ускорение a_1.

Решение. 1. Координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, найдем, подставив в уравнение движения вместо t заданное значение времени t_1:

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^3.$$

Подставим в это выражение значения A, B, C, t_1 и произведем вычисления:

$$x_1 = 4 + 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^3 = 4 \text{ м}.$$

2. Мгновенную скорость в произвольный момент времени найдем, продифференцировав координату x по времени: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 3Ct^2$. Тогда в заданный момент времени t_1 мгновенная скорость

$$v_1 = B + 3Ct_1^2.$$

Подставим сюда значения B, C, t_1 и произведем вычисления:

$$v_1 = -4 \text{ м/с}.$$

Знак минус указывает на то, что в момент времени $t_1 = 2$ с точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

3. Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты x по времени: $a = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6Ct$. Мгновенное ускорение в заданный момент времени t_1 равно

$$a_1 = 6Ct_1.$$

Подставим значения C, t_1 и произведем вычисления:

$$a_1 = -6 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

Пример 2. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = 4$ м/с, $C = -1$ м/с^2. 1. Построить график зависимости координаты x и пути s от времени. 2. Определить среднюю скорость $\langle v_x \rangle$ за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с. 3. Найти среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ за тот же интервал времени.

Решение. 1. Для построения графика зависимости координаты точки от времени найдем характерные значения координаты — начальное и максимальное и моменты времени, соответствующие указанным координатам и координате, равной нулю.

Начальная координата соответствует моменту $t = 0$. Ее значение равно

$$x_0 = x(0) = A = 5 \text{ м}.$$

Максимального значения координата достигает в тот момент, когда точка начинает двигаться обратно (скорость меняет знак). Этот момент времени найдем, приравняв нулю первую производную от координаты по времени: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct = 0$, откуда

$$t = -\frac{B}{2C} = 2 \text{ с}.$$

Максимальная координата

$$x_{\max} = x(2) = 9 \text{ м}.$$

Момент времени t, когда координата $x = 0$, найдем из выражения

$$x = A + Bt + Ct^2 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно t:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

Подставим значения A, B, C и произведем вычисления:

$$t = (2 \pm 3) \text{ с}.$$

Таким образом, получаем два значения времени: $t' = 5\,\text{с}$ и $t'' = -1\,\text{с}$. Второе значение времени отбрасываем, так как оно не удовлетворяет условию задачи ($t \geqslant 0$).

График зависимости координаты точки от времени представляет собой кривую второго порядка. Для его построения необходимо иметь пять точек, так как уравнение кривой второго порядка содержит пять коэффициентов. Поэтому кроме трех вычисленных ранее характерных значений координаты найдем еще два значения координаты, соответствующие моментам $t_1 = 1\,\text{с}$ и $t_2 = 6\,\text{с}$:

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8 \text{ м}; \quad x_2 = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7 \text{ м}.$$

Полученные данные представим в виде таблицы:

Время, с	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_\text{в} = 2$	$t' = 5$	$t_2 = 6$
Координата, м	$x_0 = A = 5$	$x_1 = 8$	$x_{\max} = 9$	$x = 0$	$x_2 = -7$

Используя данные таблицы, чертим график зависимости координаты от времени (рис. 1.2).

График пути (штриховая линия) построим, исходя из следующих соображений: 1) путь и координата до момента изменения знака скорости совпадают; 2) начиная с момента возврата ($t_в$) точка движется в обратном направлении и, следовательно, координата ее убывает, а путь продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата.

Следовательно, график пути до момента времени $t_в = 2$ с совпадает с графиком координаты, а начиная с этого момента является зеркальным отображением графика координаты.

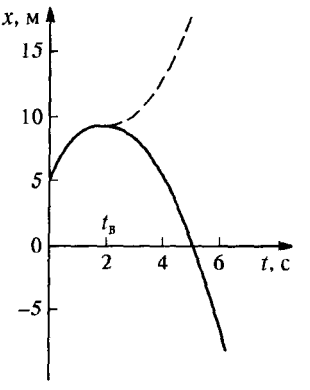


Рис. 1.2

2. Средняя скорость $\langle v_x \rangle$ за интервал времени $t_2 - t_1$ определяется выражением

$$\langle v_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Подставим значения x_1, x_2, t_1, t_2 из таблицы и произведем вычисления:

$$\langle v_x \rangle = \frac{-7 - 8}{6 - 1} \frac{\text{м}}{\text{с}} = -3 \text{ м/с}.$$

3. Среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ находим из выражения

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1},$$

где s — путь, пройденный точкой за интервал времени $t_2 - t_1$. Из графика на рис. 1.2 видно, что этот путь складывается из двух отрезков пути: $s_1 = x_{\max} - x_1$, который точка прошла за интервал времени $t_в - t_1$, и $s_2 = x_{\max} + |x_2|$, который она прошла за интервал $t_2 - t_в$. Таким образом, путь

$$s = s_1 + s_2 = (x_{\max} - x_1) + (x_{\max} + |x_2|) = 2x_{\max} + |x_2| - x_1.$$

Подставим в это выражение значения x_1, $|x_2|$, $x_{\max}$ и произведем вычисления:

$$\langle s \rangle = 2 \cdot 9 + 7 - 8 = 17 \text{ м}.$$

Тогда искомая средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{17}{6 - 1} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}4 \text{ м/с}.$$

Заметим, что средняя путевая скорость всегда положительна.

Пример 3. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 50$ м. Уравнение[2]) движения автомобиля

[2]) В заданном уравнении движения ξ означает криволинейную координату, отсчитанную по дуге окружности.

$\xi(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти: 1) скорость v автомобиля, его тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения в момент времени $t = 5$ с; 2) длину пути s и модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ автомобиля за интервал времени $\tau = 10$ с, отсчитанный с момента начала движения.

Решение. 1. Зная уравнение движения, найдем скорость, взяв первую производную от координаты по времени: $v = \dfrac{d\xi}{dt} = B + 2Ct$. Подставим в это выражение значения B, C, t и произведем вычисления:

$$v = 5 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное ускорение найдем, взяв первую производную от скорости по времени: $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 2C$. Подставив значение C, получим

$$a_\tau = -1 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение определяется по формуле $a_n = v^2/R$. Подставим сюда найденное значение скорости и заданное значение радиуса кривизны траектории и произведем вычисления:

$$a_n = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение, как это видно из рис. 1.1, является геометрической суммой ускорений $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$. Модуль ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Подставив в это выражение найденные значения a_τ и a_n, получим

$$a = 1{,}12 \text{ м/с}^2.$$

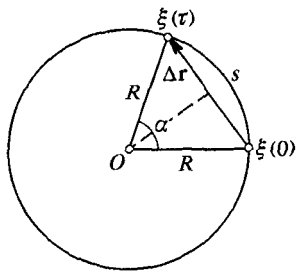


Рис. 1.3

2. Чтобы определить путь s, пройденный автомобилем, заметим, что в случае движения в одном направлении (как это имеет место в условиях данной задачи) длина пути s равна изменению криволинейной координаты ξ, т. е.

$$s = \xi(\tau) - \xi(0),$$

или

$$s = A + B\tau + C\tau^2 - A = B\tau + C\tau^2.$$

Подставим в полученное выражение значения B, C, τ и произведем вычисления:

$$s = 50 \text{ м}.$$

Модуль перемещения, как это видно из рис. 1.3, равен

$$|\Delta\mathbf{r}| = 2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

где α — угол между радиусами-векторами, определяющими начальное $\xi(0)$ и конечное $\xi(\tau)$ положения автомобиля на траектории. Этот угол (в

радианах) находим как отношение длины пути s к радиусу кривизны R траектории, т.е. $\alpha = s/R$. Таким образом,

$$|\Delta \mathbf{r}| = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

Подставим сюда значения R, s и произведем вычисления:

$$|\Delta \mathbf{r}| = 47{,}9 \text{ м}.$$

Пример 4. Маховик, вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10\,\text{с}^{-1}$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова стало равномерным, но уже с частотой $n = 6\,\text{с}^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Решение. Угловое ускорение маховика связано с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями соотношением $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$, откуда $\varepsilon = (\omega^2 - \omega_0^2)/(2\varphi)$. Но так как $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi n$, то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \frac{\pi(n^2 - n_0^2)}{N}.$$

Подставив значения π, n, n_0, N и вычислив, получим

$$\varepsilon = \frac{3{,}14(6^2 - 10^2)}{50} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что маховик вращается замедленно.

Определим продолжительность торможения, используя формулу, связывающую угол поворота φ со средней угловой скоростью $\langle\omega\rangle$ вращения и временем t: $\varphi = \langle\omega\rangle t$. По условию задачи угловая скорость линейно зависит от времени и поэтому можно написать $\langle\omega\rangle = (\omega_0 + \omega)/2$, тогда

$$\varphi = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} = \pi(n_0 + n)t,$$

откуда

$$t = \frac{\varphi}{\pi(n_0 + n)} = \frac{2N}{n_0 + n}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$t = \frac{2 \cdot 50}{10 + 6} = 6{,}25 \text{ с}.$$

ЗАДАЧИ

Прямолинейное движение

1.1. Две прямые дороги пересекаются под углом $\alpha = 60°$. От перекрестка по ним удаляются машины: одна со скоростью $v_1 = 60\,\text{км/ч}$, другая со скоростью $v_2 = 80\,\text{км/ч}$. Определить скорости,

с которыми одна машина удаляется от другой. Перекресток машины прошли одновременно. Рассмотреть два возможных варианта.

1.2. Точка двигалась в течение $t_1 = 15\,\text{с}$ со скоростью $v_1 = 5\,\text{м/с}$, в течение $t_2 = 10\,\text{с}$ со скоростью $v_2 = 8\,\text{м/с}$ и в течение $t_3 = 6\,\text{с}$ со скоростью $v_3 = 20\,\text{м/с}$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ точки.

1.3. Три четверти своего пути автомобиль прошел со скоростью $v_1 = 60\,\text{км/ч}$, остальную часть пути — со скоростью $v_2 = 80\,\text{км/ч}$. Какова средняя путевая скорость $\langle v \rangle$ автомобиля?

1.4. Первую половину пути тело двигалось со скоростью $v_1 = 2\,\text{м/с}$, вторую — со скоростью $v_2 = 8\,\text{м/с}$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$.

1.5. Тело прошло первую половину пути за время $t_1 = 2\,\text{с}$, вторую — за время $t_2 = 8\,\text{с}$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ тела, если длина пути $s = 20\,\text{м}$.

1.6. Зависимость скорости от времени для движения некоторого тела представлена на рис. 1.4. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ за время $t = 14\,\text{с}$.

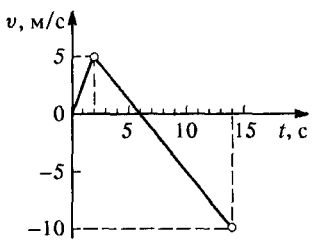


Рис. 1.4

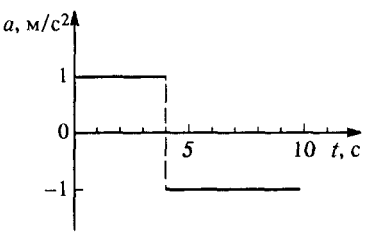


Рис. 1 5

1.7. Зависимость ускорения от времени при некотором движении тела представлена на рис. 1.5. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ за время $t = 8\,\text{с}$. Начальная скорость $v_0 = 0$.

1.8. Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x = At + Bt^2$, где $A = 3\,\text{м/с}$, $B = -0{,}25\,\text{м/с}^2$. Построить графики зависимости координаты и пути от времени для заданного движения.

1.9. На рис. 1.5 дан график зависимости ускорения от времени для некоторого движения тела. Построить графики зависимости скорости и пути от времени для этого движения, если в начальный момент тело покоилось.

1.10. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4\,\text{м/с}$, $B = -0{,}05\,\text{м/с}^2$. Определить момент времени, в который скорость v точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент. Построить графики зависимости

координаты, пути, скорости и ускорения этого движения от времени.

1.11. Написать кинематическое уравнение движения $x = f(t)$ точки для четырех случаев, представленных на рис. 1.6. На каждой позиции рисунка — *а*, *б*, *в*, *г* — изображена координатная

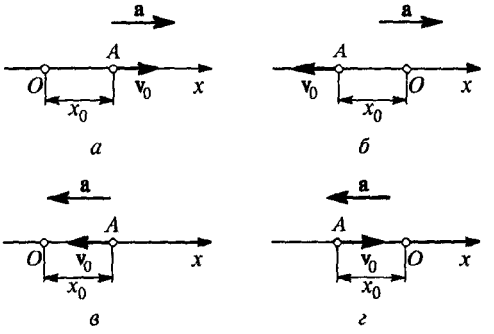


Рис. 1.6

ось Ox, указаны начальные положение x_0 и скорость $\mathbf{v}_0$ материальной точки A, а также ее ускорение $\mathbf{a}$.

1.12. Прожектор O (рис. 1.7) установлен на расстоянии $l = 100$ м от стены AB и бросает светлое пятно на эту стену. Прожектор вращается вокруг вертикальной оси, делая один оборот за время $T = 20$ с. Найти: 1) уравнение движения светлого пятна по стене в течение первой четверти оборота; 2) скорость v, с которой светлое пятно движется по стене, в момент времени $t = 2$ с. За начало отсчета принять момент, когда направление луча совпадает с OC.

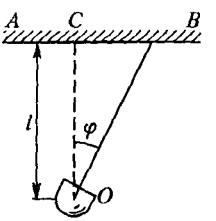


Рис. 1.7

1.13. Рядом с поездом на одной линии с передними буферами паровоза стоит человек. В тот момент, когда поезд начал двигаться с ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2, человек начал идти в том же направлении со скоростью $v = 1{,}5$ м/с. Через какое время t поезд догонит человека? Определить скорость v_1 поезда в этот момент и путь, пройденный за это время человеком.

1.14. Из одного и того же места начали равноускоренно двигаться в одном направлении две точки, причем вторая начала свое движение через 2 с после первой. Первая точка двигалась с начальной скоростью $v_1 = 1$ м/с и ускорением $a_1 = 2$ м/с^2, вторая — с начальной скоростью $v_2 = 10$ м/с и ускорением $a_2 = 1$ м/с^2. Через сколько времени и на каком расстоянии от исходного положения вторая точка догонит первую?

1.15. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2, \quad x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2,$$

где $A_1 = 20$ м, $A_2 = 2$ м, $B_2 = B_1 = 2$ м/с, $C_1 = -4$ м/с^2, $C_2 = 0{,}5$ м/с^2.

В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковыми? Определить скорости v_1 и v_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент.

1.16. Две материальные точки движутся согласно уравнениям

$$x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3, \quad x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3,$$

где $A_1 = 4$ м/с, $B_1 = 8$ м/с^2, $C_1 = -16$ м/с^3, $A_2 = 2$ м/с, $B_2 = -4$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^3.

В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент.

1.17. С какой высоты H упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время $t = 0{,}1$ с?

1.18. Камень падает с высоты $h = 1200$ м. Какой путь s пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

1.19. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. По истечении какого времени камень будет находиться на высоте $h = 15$ м? Найти скорость v камня на этой высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2.

1.20. Вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с брошен камень. Через $\tau = 1$ с после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте h встретятся камни?

1.21. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте $h = 8{,}6$ м два раза с интервалом $\Delta t = 3$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость брошенного тела.

1.22. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. Через $t = 2$ с мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.

1.23. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Высота балкона над поверхностью земли $h = 12{,}5$ м. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ с момента бросания до момента падения на землю.

1.24. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с, $B = -0{,}5$ м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

1.25. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где $A = 6\,\text{м/с}$, $B = -0{,}125\,\text{м/с}^3$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ точки в интервале времени от $t_1 = 2\,\text{с}$ до $t_2 = 6\,\text{с}$.

Криволинейное движение

1.26. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}At^3 + \mathbf{j}Bt^2$. Написать зависимости: 1) $\mathbf{v}(t)$, 2) $\mathbf{a}(t)$.

1.27. Движение материальной точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = A(\mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t)$, где $A = 0{,}5\,\text{м}$, $\omega = 5\,\text{рад/с}$. Начертить траекторию точки. Определить модуль скорости $|\mathbf{v}|$ и модуль нормального ускорения $|\mathbf{a}_n|$.

1.28. Движение материальной точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(A + Bt^2) + \mathbf{j}Ct$, где $A = 10\,\text{м}$, $B = -5\,\text{м/с}^2$, $C = 10\,\text{м/с}$. Начертить траекторию точки. Найти выражения $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$. Для момента времени $t = 1\,\text{с}$ вычислить: 1) модуль скорости $|\mathbf{v}|$; 2) модуль ускорения $|\mathbf{a}|$; 3) модуль тангенциального ускорения $|\mathbf{a}_\tau|$; 4) модуль нормального ускорения $|\mathbf{a}_n|$.

1.29. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5\,\text{м/с}^2$. Определить полное ускорение a точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3\,\text{м}$, если точка движется на этом участке со скоростью $v = 2\,\text{м/с}$.

1.30. Точка движется по окружности радиусом $R = 4\,\text{м}$. Начальная скорость v_0 точки равна $3\,\text{м/с}$, тангенциальное ускорение $a_\tau = 1\,\text{м/с}^2$. Для момента времени $t = 2\,\text{с}$ определить: 1) длину пути s, пройденного точкой; 2) модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$; 3) среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$; 4) модуль вектора средней скорости $|\langle \mathbf{v} \rangle|$.

1.31. По окружности радиусом $R = 5\,\text{м}$ равномерно движется материальная точка со скоростью $v = 5\,\text{м/с}$. Построить графики зависимости длины пути s и модуля перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ от времени t. В момент времени, принятый за начальный ($t = 0$), $s(0)$ и $|\Delta\mathbf{r}(0)|$ считать равными нулю.

1.32. За время $t = 6\,\text{с}$ точка прошла путь, равный половине длины окружности радиусом $R = 0{,}8\,\text{м}$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ за это время и модуль вектора средней скорости $|\langle \mathbf{v} \rangle|$.

1.33. Движение точки по окружности радиусом $R = 4\,\text{м}$ задано уравнением[3]) $\xi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10\,\text{м}$, $B = -2\,\text{м/с}$, $C = 1\,\text{м/с}^2$. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точки в момент времени $t = 2\,\text{с}$.

[3]) См. сноску на с. 13.

1.34. По дуге окружности радиусом $R = 10\,\text{м}$ движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 4{,}9\,\text{м/с}^2$; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол $\varphi = 60°$. Найти скорость v и тангенциальное ускорение a_τ точки.

1.35. Точка движется по окружности радиусом $R = 2\,\text{м}$ согласно уравнению[3]) $\xi = At^3$, где $A = 2\,\text{м/с}^3$. В какой момент времени t нормальное ускорение a_n точки будет равно тангенциальному a_τ? Определить полное ускорение a в этот момент.

1.36. Движение точки по кривой задано уравнениями $x = A_1t^3$ и $y = A_2t$, где $A_1 = 1\,\text{м/с}^3$, $A_2 = 2\,\text{м/с}$. Найти уравнение траектории точки, ее скорость v и полное ускорение a в момент времени $t = 0{,}8\,\text{с}$.

1.37. Точка A движется равномерно со скоростью v по окружности радиусом R. Начальное положение точки и направление движения указаны на рис. 1.8. Написать кинематическое уравнение движения проекции точки A на направление оси x.

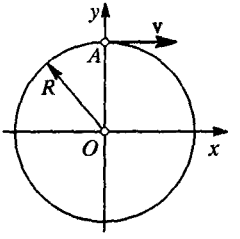


Рис. 1.8

1.38. Точка движется равномерно со скоростью v по окружности радиусом R и в момент времени, принятый за начальный ($t = 0$), занимает положение, указанное на рис. 1.8. Написать кинематические уравнения движения точки: 1) в декартовой системе координат, расположив оси так, как это указано на рисунке; 2) в полярной системе координат (ось x считать полярной осью).

1.39. Написать для четырех случаев, представленных на рис. 1.9: 1) кинематические уравнения движения $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$; 2) уравнение траектории $y = \varphi(x)$. На каждой позиции рисунка — *а*, *б*, *в*, *г* — изображены координатные оси, указаны начальное положение точки A, ее начальная скорость $\mathbf{v}_0$ и ускорение $\mathbf{g}$.

1.40. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через промежуток времени $t = 2$ с камень упал на землю на расстоянии $s = 40\,\text{м}$ от основания вышки. Определить начальную v_0 и конечную v скорости камня.

1.41. Тело, брошенное с башни в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20\,\text{м/с}$, упало на землю на расстоянии s (от основания башни), вдвое большем высоты h башни. Найти высоту башни.

1.42. Пистолетная пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расстояние l между которыми равно 30 м. Пробоина во втором листе оказалась на $h = 10\,\text{см}$ ниже, чем в первом. Определить скорость v пули, если к первому листу она подлетела, двигаясь горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

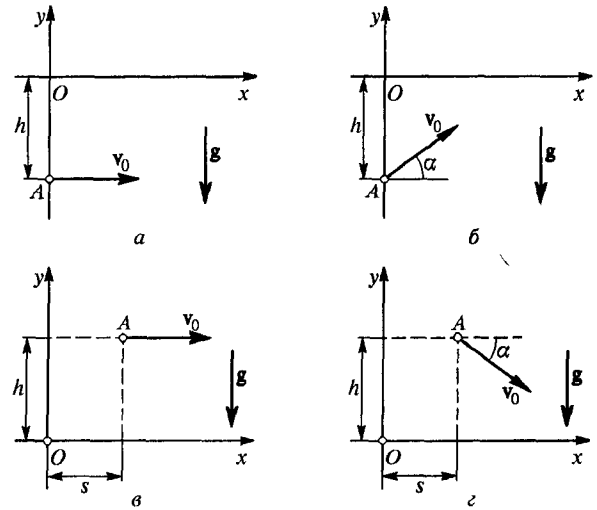


Рис. 1.9

1.43. Самолет, летевший на высоте $h = 2940$ м со скоростью $v = 360$ км/ч, сбросил бомбу. За какое время t до прохождения над целью и на каком расстоянии s от нее должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.44. Тело брошено под некоторым углом α к горизонту. Найти этот угол, если горизонтальная дальность s полета тела в четыре раза больше максимальной высоты H траектории.

1.45. Миномет установлен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту на крыше здания, высота которого $h = 40$ м. Начальная скорость v_0 мины равна 50 м/с. Требуется: 1) написать кинематические уравнения движения и уравнения траектории и начертить эту траекторию с соблюдением масштаба; 2) определить время τ полета мины, максимальную высоту H ее подъема, горизонтальную дальность s полета, скорость v в момент падения мины на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Указание. Начало координат поместить на поверхности земли так, чтобы оно находилось на одной вертикали с минометом и чтобы вектор скорости $\mathbf{v}$ лежал в плоскости xOy.

1.46. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h: спустя время $t_1 = 10$ с и $t_2 = 50$ с после выстрела. Определить начальную скорость v_0 и высоту h.

1.47. Пуля пущена с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определить максимальную высоту

H подъема, дальность s полета и радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.48. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью $v_0 = 30\,\text{м/с}$. Определить скорость v, тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

1.49. Тело брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

Вращение тела вокруг неподвижной оси

1.50. Определить линейную скорость v и центростремительное ускорение $a_\text{ц}$ точек, лежащих на земной поверхности: 1) на экваторе; 2) на широте Москвы ($\varphi = 56°$).

1.51. Линейная скорость v_1 точек на окружности вращающегося диска равна $3\,\text{м/с}$. Точки, расположенные на $\Delta R = 10\,\text{см}$ ближе к оси, имеют линейную скорость $v_2 = 2\,\text{м/с}$. Определить частоту вращения n диска.

1.52. Два бумажных диска насажены на общую горизонтальную ось так, что плоскости их параллельны и отстоят на $d = 30\,\text{см}$ друг от друга. Диски вращаются с частотой $n = 25\,\text{с}^{-1}$. Пуля, летевшая параллельно оси на расстоянии $r = 12\,\text{см}$ от нее, пробила оба диска. Пробоины в дисках смещены друг относительно друга на расстояние $s = 5\,\text{см}$, считая по дуге окружности. Найти среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ пули в промежутке между дисками и оценить создаваемое силой тяжести смещение пробоин в вертикальном направлении. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.53. На цилиндр, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали грузик и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за время $t = 3\,\text{с}$ опустился на $h = 1{,}5\,\text{м}$. Определить угловое ускорение ε цилиндра, если его радиус $r = 4\,\text{см}$.

1.54. Диск радиусом $r = 10\,\text{см}$, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5\ \text{рад/с}^2$. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

1.55. Диск радиусом $r = 20\,\text{см}$ вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3\,\text{рад}$, $B = -1\,\text{рад/с}$, $C = 0{,}1\,\text{рад/с}^3$. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени $t = 10\,\text{с}$.

1.56. Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток времени $\Delta t = 10\,\text{с}$ достиг частоты вращения $n = 300\,\text{мин}^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и число N оборотов, которое он сделал за это время.

1.57. Велосипедное колесо вращается с частотой $n = 5\,\text{с}^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени $\Delta t = 1\,\text{мин}$. Определить угловое ускорение ε и число N оборотов, которое сделает колесо за это время.

1.58. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения от $n_1 = 4\,\text{с}^{-1}$ до $n_2 = 6\,\text{с}^{-1}$. Определить угловое ускорение ε колеса.

1.59. Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2\,\text{рад/с}^2$. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240\,\text{мин}^{-1}$ до $n_2 = 90\,\text{мин}^{-1}$? Найти время Δt, в течение которого это произойдет.

1.60. Винт аэросаней вращается с частотой $n = 360\,\text{мин}^{-1}$. Скорость v поступательного движения аэросаней равна 54 км/ч. С какой скоростью u движется один из концов винта, если радиус R винта равен 1 м?

1.61. На токарном станке протачивается вал диаметром $d = 60\,\text{мм}$. Продольная подача h резца равна 0,5 мм за один оборот. Какова скорость v резания, если за интервал времени $\Delta t = 1\,\text{мин}$ протачивается участок вала длиной $l = 120\,\text{мм}$?

§ 2. Динамика материальной точки и тела, движущихся поступательно

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):
а) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i, \quad \text{или} \quad m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$ — геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m — масса точки; $\mathbf{a}$ — ускорение; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс; N — число сил, действующих на точку;

б) в координатной форме (скалярной)

$$ma_x = \sum F_{xi}; \quad ma_y = \sum F_{yi}; \quad ma_z = \sum F_{zi},$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{xi}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{yi}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{zi},$$

где под знаком суммы стоят проекции сил $\mathbf{F}_i$ на соответствующие оси координат.

• Сила упругости [4])

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

где k — коэффициент упругости (жесткость в случае пружины); x — абсолютная деформация.

• Сила гравитационного взаимодействия [4])

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная; m_1 и m_2 — массы взаимодействующих тел, рассматриваемые как материальные точки; r — расстояние между ними.

• Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления.

• Координаты центра масс системы материальных точек

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

где m_i — масса i-й материальной точки; x_i, y_i, z_i — ее координаты.

• Закон сохранения импульса замкнутой системы

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \text{const}, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \text{const},$$

где N — число материальных точек (или тел), входящих в систему.

• Работа, совершаемая постоянной силой,

$$\Delta A = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}, \quad \text{или} \quad \Delta A = F\Delta r\cos\alpha,$$

где α — угол между направлениями векторов силы $\mathbf{F}$ и перемещения $\Delta\mathbf{r}$.

• Работа, совершаемая переменной силой,

$$A = \int_L F(r)\cos\alpha\, dr,$$

где интегрирование ведется вдоль траектории, обозначаемой L.

• Средняя мощность за интервал времени Δt

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

---

[4]) Силы упругости и гравитационного взаимодействия более подробно рассмотрены в § 4.

• Мгновенная мощность

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}, \quad \text{или} \quad N = Fv\cos\alpha,$$

где $\mathrm{d}A$ — работа, совершаемая за промежуток времени $\mathrm{d}t$.

• Кинетическая энергия материальной точки (или тела), движущейся поступательно,

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{2m}.$$

• Потенциальная энергия тела и сила, действующая на тело в данной точке поля, связаны соотношением

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\Pi, \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты). В частном случае, когда поле сил обладает сферической симметрией (как, например, гравитационное),

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

• Потенциальная энергия упругодеформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

• Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек (или тел) массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

• Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$\Pi = mgh,$$

где h — высота тела над уровнем, принятым за нулевой для отсчета потенциальной энергии. Эта формула справедлива при условии $h \ll R$, где R — радиус Земли.

• Закон сохранения энергии в механике выполняется в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, и записывается в виде

$$T + \Pi = \text{const}.$$

• Применяя законы сохранения энергии и импульса к прямому центральному удару шаров, получаем формулу скорости абсолютно неупругих шаров после удара

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

и формулы скорости абсолютно упругих шаров после удара:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы шаров; v_1 и v_2 — их скорости до удара.

• Формула Циолковского

$$v = u \ln \frac{m_c}{m_c - \mu t},$$

где v — скорость ракеты в момент времени t, u — скорость истечения продуктов сгорания (газов), m_c — стартовая масса ракеты, μ — массовый расход топлива.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. К концам однородного стержня приложены две противоположно направленные силы: $F_1 = 40\,\text{Н}$ и $F_2 = 100\,\text{Н}$ (рис. 2.1*а*). Определить силу натяжения T стержня в поперечном сечении, которое делит стержень на две части в отношении 1 : 2.

Решение. Если бы силы F_1 и F_2 были равны между собой, то сила натяжения в любом сечении стержня была бы одинаковой и равной си-

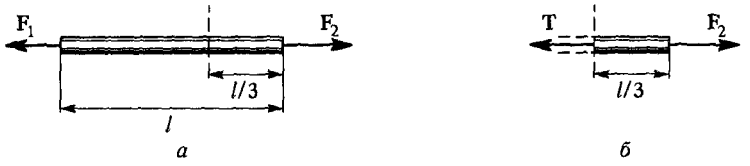


Рис. 2.1

лам, приложенным к концам стержня. Стержень в этом случае находился бы в покое. Но так как сумма сил, действующих на стержень, отлична от нуля, то стержень будет двигаться с ускорением, величина и направление которого определяются по второму закону Ньютона: $\mathbf{a} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)/m$, где m — масса стержня. Так как обе силы действуют вдоль прямой, то геометрическую сумму можно заменить алгебраической:

$$a = \frac{F_2 - F_1}{m}. \qquad (1)$$

При ускоренном движении стержня силы натяжения в разных сечениях различны. Для определения этих сил применим следующий прием: разделим стержень на две части в интересующем нас сечении и отбросим одну из них, например, левую. Действие левой части на правую заменим силой натяжения T (рис. 2.1*б*). В результате действия разности сил $F_2 - T$ оставшаяся правая часть стержня массой m_1 должна двигаться с ускорением $a = (F_2 - T)/m_1$, равным по величине и направлению прежнему ускорению, выраженному формулой (1). Так как

стержень однородный, то $m_1 = m/3$ и, следовательно,

$$a = \frac{F_2 - T}{m/3}. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2) и выражая из полученного равенства силу натяжения T, находим

$$T = F_2 - \frac{F_2 - F_1}{3}.$$

Подставив значения F_2 и F_1, получим $T = 80\,\text{Н}$.

Пример 2. В лифте на пружинных весах находится тело массой $m = 10\,\text{кг}$ (рис. 2.2*а*). Лифт движется с ускорением $a = 2\,\text{м/с}^2$. Определить показания весов в двух случаях, когда ускорение лифта направлено: 1) вертикально вверх; 2) вертикально вниз.

Решение. Определить показания весов — это значит найти вес тела **P**, т. е. силу, с которой тело действует на пружину. Но эта сила, по

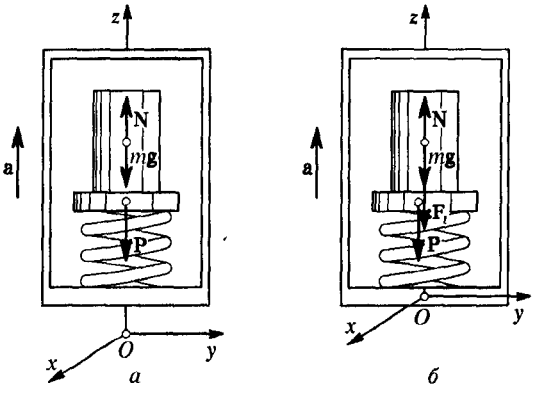


Рис. 2.2

третьему закону Ньютона, равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости N (силе реакции опоры), с которой пружина через посредство прикрепленной к ней чашки весов действует на тело, т. е.

$$\mathbf{P} = -\mathbf{N}, \quad \text{или} \quad P = N. \qquad (3)$$

Следовательно, задача определения показания весов сводится к нахождению реакции опоры **N**.

Задачу можно решать как в инерциальной, так и неинерциальной системе отсчета.

Решение в инерциальной системе отсчета. На тело действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила **N**.

Направим ось z вертикально вверх и спроецируем на нее все силы, действующие на тело. Индекс z у проекций сил опустим, так как проекции и сами силы совпадают по величине. Направление сил учтем знаком

плюс или минус. Напишем уравнение движения:

$$N - mg = ma,$$

откуда

$$N = mg + ma = m(g + a). \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) следует

$$P = m(g + a).$$

При вычислении показания весов следует учесть знак ускорения:
1) ускорение направлено вертикально вверх ($a > 0$), тогда

$$P_1 = 10(9{,}81 + 2) \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 118 \text{ Н};$$

2) ускорение направлено вертикально вниз ($a < 0$), тогда

$$P_2 = 10(9{,}81 - 2) \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 78 \text{ Н}.$$

Отметим, что ни модуль, ни направление скорости лифта не влияют на показания весов. Существенны лишь величина и направление ускорения.

Решение в неинерциальной системе отсчета, т. е. в системе, движущейся ускоренно вместе с лифтом. В этой системе отсчета законы Ньютона не выполняются. Однако если к телу, в соответствии с принципом Даламбера, дополнительно к действующим на него силам приложить силу инерции

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a},$$

где a — ускорение системы отсчета, то с учетом этой силы законы Ньютона будут справедливы. В этом случае на тело будут действовать три силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости $\mathbf{N}$ и сила инерции $\mathbf{F}_i$ (рис. 2.2*б*). Под действием этих сил тело в данной неинерциальной системе отсчета *покоится*. Это значит, что вместо уравнений динамики (законов Ньютона) можно воспользоваться законами статики. Если тело под действием системы сходящихся сил покоится, то геометрическая сумма этих сил равна нулю. В данном случае это приводит к равенству

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_i = 0.$$

Спроецируем все силы на ось z и напишем соответствующее равенство для проекций этих сил (индекс z опустим):

$$N - mg - ma = 0,$$

откуда сила реакции опоры

$$N = mg + ma = m(g + a). \tag{5}$$

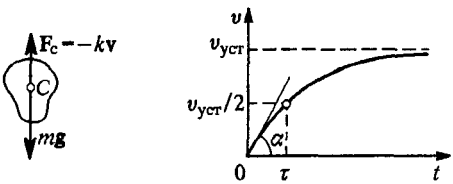
Из равенств (3) и (5) следует

$$P = m(g + a),$$

что совпадает с результатом, полученным при решении в инерциальной системе отсчета.

Пример 3. При падении тела с большой высоты его скорость $v_{уст}$ при установившемся движении достигает 80 м/с. Определить время τ, в течение которого, начиная от момента начала падения, скорость становится равной $v_{уст}/2$. Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости тела.

Решение. На падающее тело действуют две силы (рис. 2.3*а*): сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила сопротивления воздуха $\mathbf{F}_c$.



а *б*

Рис. 2.3

Сила сопротивления воздуха по условиям задачи пропорциональна скорости тела и противоположна ей по направлению:

$$\mathbf{F}_c = -k\mathbf{v}, \tag{6}$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы тела и от свойств окружающей среды.

Напишем уравнение движения тела в соответствии со вторым законом Ньютона в векторной форме: $m\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - \mathbf{F}_c$. Заменив $\mathbf{F}_c$ согласно (6), получим

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}. \tag{7}$$

Спроецируем все векторные величины на вертикально направленную ось и напишем уравнение (7) для проекций:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \frac{\mathrm{d}t}{m}.$$

Выполним интегрирование, учитывая, что при изменении времени от нуля до τ (искомое время) скорость возрастает от нуля до $v_{\text{уст}}/2$ (рис. 2.3*б*):

$$\int_0^{v_{\text{уст}}/2} \frac{dv}{mg - kv} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}, \quad -\frac{1}{k} \ln (mg - kv) \Big|_0^{v_{\text{уст}}/2} = \frac{\tau}{m}.$$

Подставим пределы интегрирования в левую часть равенства:

$$-\frac{1}{k} \ln \frac{mg - kv_{\text{уст}}/2}{mg} = \frac{\tau}{m}$$

и найдем из полученного выражения искомое время:

$$\tau = \frac{m}{k} \ln \frac{mg}{mg - kv_{\text{уст}}/2}. \tag{8}$$

Входящий сюда коэффициент пропорциональности k определим из следующих соображений. При установившемся движении (скорость постоянна) алгебраическая сумма проекций (на ось y) сил, действующих на тело, равна нулю, т. е. $mg - kv_{\text{уст}} = 0$, откуда $k = mg/v_{\text{уст}}$. Подставим найденное значение k в формулу (8):

$$\tau = \frac{mv_{\text{уст}}}{mg} \ln \frac{mg}{mg - \frac{1}{2} \frac{mg}{v_{\text{уст}}} v_{\text{уст}}}.$$

После сокращений и упрощений получим

$$\tau = \frac{v_{\text{уст}}}{g} \ln 2.$$

Проверка размерности в данном случае не обязательна, так как результат очевиден. Подставив в эту формулу значения $v_{\text{уст}}$, g, $\ln 2$ и произведя вычисления, получим $\tau = 5{,}66$ с.

Пример 4. Шар массой $m = 0{,}3$ кг, двигаясь со скоростью $v = 10$ м/с, упруго ударяется о гладкую неподвижную стенку так, что скорость его направлена под углом $\alpha = 30°$ к нормали. Определить импульс p, получаемый стенкой.

Решение. Сначала проанализируем условие задачи. Стенка неподвижна, поэтому система отсчета, связанная с ней, будет инерциальной. Удар о стенку упругий; следовательно, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии. Из него, учитывая, что масса стенки много больше массы шара, следует равенство модулей скоростей шара $|\mathbf{v}|$ до и после удара.

Покажем, что угол α' отражения шара от стенки равен углу α падения шара. Спроецируем векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ на координатные оси Ox и

Oy (рис. 2.4). Так как стенка гладкая, то $\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y$. Учитывая, кроме того, что $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$, получим $u_x = -v_x$, а отсюда следует равенство углов падения и отражения ($\alpha' = \alpha$).

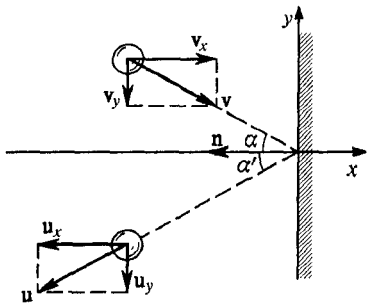


Рис. 2.4

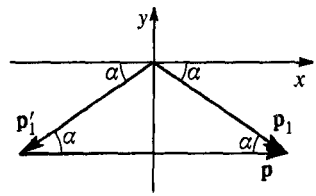


Рис. 2.5

Для определения импульса, полученного стенкой, воспользуемся законом сохранения импульса. Для нашего случая этот закон можно записать в виде

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p},$$

где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_1'$ — импульсы шара до и после удара ($|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_1'|$). Отсюда импульс, полученный стенкой,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'.$$

Из рис. 2.5 видно, что вектор $\mathbf{p}$ сонаправлен с осью Ox и его модуль $p = |\mathbf{p}| = 2p_1 \cos\alpha$. Подставив сюда выражение импульса $p_1 = mv$, получим

$$p = 2mv \cos\alpha.$$

Произведем вычисления:

$$p = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5{,}20 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Пример 5. На спокойной воде пруда стоит лодка длиной L и массой M перпендикулярно берегу, обращенная к нему носом. На корме стоит человек массой m. На какое расстояние s приблизится лодка к берегу, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Трением о воду и воздух пренебречь.

Решение. *1-й способ.* Для простоты решения будем считать, что человек идет по лодке с постоянной скоростью. Лодка в этом случае также будет двигаться равномерно. Поэтому перемещение лодки относительно берега определим по формуле

$$s = vt, \tag{9}$$

где v — скорость лодки относительно берега; t — время движения человека и лодки. Направление перемещения человека примем за положительное.

Скорость v лодки найдем, пользуясь законом сохранения импульса [5]) (количества движения). Так как, по условию задачи система человек–лодка в начальный момент была относительно берега в покое, то по закону сохранения импульса получим $Mv - mu = 0$, где u — скорость человека относительно берега; знак минус указывает на то, что скорости человека и лодки по направлению противоположны. Отсюда $v = mu/M$.

Время t движения лодки равно времени перемещения человека по лодке, т. е. $t = s_1/u = (L - s)/u$, где s_1 — перемещение человека относительно берега.

Подставив полученные выражения v и t в формулу (9), найдем

$$s = \frac{mu}{M}\frac{L-s}{u} = \frac{m}{M}(L-s),$$

откуда

$$s = \frac{mL}{m+M}.$$

Заметим, что предположение о равномерности движения человека не является обязательным. В приведенном ниже более общем способе решения задачи такое предположение не используется.

2-*й способ.* Согласно следствию из закона сохранения импульса, внутренние силы системы тел не могут изменить положение центра тя-

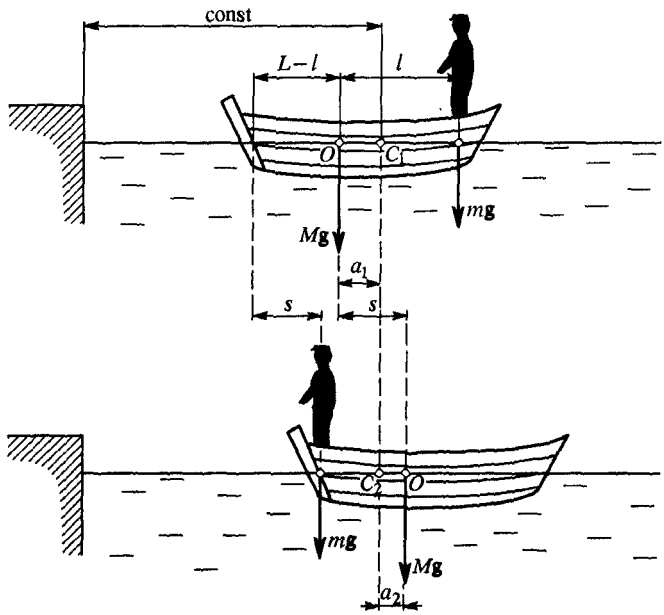


Рис. 2.6

[5]) В данном случае систему человек–лодка можно считать замкнутой, так как векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

жести[6]) системы. Применяя это следствие к системе человек–лодка, можно считать, что при перемещении человека по лодке центр тяжести системы не изменит своего положения, т. е. останется на прежнем расстоянии от берега.

Пусть центр тяжести системы человек–лодка находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки (рис. 2.6), а после перемещения лодки — через другую ее точку C_2. Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение s лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали. А это последнее легко определить по перемещению центра тяжести O лодки. Как видно из рис. 2.6, в начальный момент точка O находится слева от вертикали на расстоянии a_1, а после перехода человека — на расстоянии a_2 справа от нее. Следовательно, искомое перемещение лодки

$$s = a_1 + a_2. \tag{10}$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что относительно центра тяжести системы моменты сил тяжести лодки и человека должны быть равны. Для точки C_1 имеем $Mga_1 = mg(l - a_1)$, где l — первоначальное расстояние человека от центра тяжести лодки. Отсюда получим $a_1 = ml/(M + m)$. Для точки C_2 имеем $Mga_2 = mg(L - a_2 - l)$, откуда $a_2 = m(L - l)/(M + m)$.

Подставив выражения a_1 и a_2 в формулу (10), получим

$$s = \frac{mL}{M + m},$$

что совпадает с результатом, полученным 1-м способом.

Пример 6. Два шара массами $m_1 = 2{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 6$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определить: 1) скорость u шаров после удара; 2) кинетические энергии шаров T_1 до и T_2 после удара; 3) долю кинетической энергии w шаров, превратившейся во внутреннюю энергию. Удар считать прямым, неупругим.

Решение. 1. Неупругие шары не восстанавливают после удара своей первоначальной формы. Следовательно, не возникают силы, отталкивающие шары друг от друга, и шары после удара будут двигаться совместно с одной и той же скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса. Так как шары движутся по одной прямой, то этот закон можно записать в скалярной форме:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

[6]) Точнее было бы говорить о центре масс (центре инерции системы). Но в том случае, когда система твердых тел находится в однородном поле силы тяжести, центр масс и центр тяжести совпадают.

Направление скорости первого шара примем за положительное, тогда при вычислении скорость второго шара, который движется навстречу первому, следует взять со знаком минус:

$$u = \frac{2{,}5 \cdot 6 - 1{,}5 \cdot 2}{2{,}5 + 1{,}5} = 3 \text{ м/с}.$$

2. Кинетические энергии шаров до и после удара определим по формулам

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}; \quad T_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Произведя вычисления по этим формулам, получим

$$T_1 = \frac{2{,}5 \cdot 6^2}{2} + \frac{1{,}5 \cdot 2^2}{2} = 48 \text{ Дж};$$

$$T_2 = \frac{(2{,}5 + 1{,}5) \cdot 3^2}{2} = 18 \text{ Дж}.$$

3. Сравнение кинетических энергий шаров до и после удара показывает, что в результате неупругого удара шаров произошло уменьшение их кинетической энергии, за счет чего увеличилась их внутренняя энергия. Долю кинетической энергии шаров, пошедшей на увеличение их внутренней энергии, определим из соотношения

$$w = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad w = 0{,}62.$$

Пример 7. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю w своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$w = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2, \tag{11}$$

где T_1 — кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2' — скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из выражения (11), для определения w надо найти u_2. Воспользуемся тем, что при ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: импульса и механической энергии.

По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, имеем $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$. По закону сохранения энергии в механике $m_1 v_1^2/2 = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2$. Решая совместно два последних уравнения, найдем

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение u_2 в равенство (11), получим

$$w = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1v_1}{v_1(m_1+m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}.$$

Из этого соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Доля передаваемой энергии не изменится, если шары поменяются местами.

Пример 8. Молот массой $m_1 = 200$ кг падает на поковку, масса m_2 которой вместе с наковальней равна 2500 кг. Скорость v_1 молота в момент удара равна 2 м/с. Найти: 1) кинетическую энергию T_1 молота в момент удара; 2) энергию T_2, переданную фундаменту; 3) энергию T, затраченную на деформацию поковки; 4) коэффициент полезного действия η (к.п.д.) удара молота о поковку. Удар молота о поковку рассматривать как неупругий.

Решение. 1. Кинетическую энергию молота в момент удара найдем по формуле $T_1 = m_1v_1^2/2$. Подставив значения m_1 и v_1 и произведя вычисления, получим

$$T_1 = 400 \text{ Дж}.$$

2. Чтобы определить энергию, переданную фундаменту, предварительно найдем скорость системы молот–поковка (с наковальней) непосредственно после удара. Для этого применим закон сохранения импульса, который в случае неупругого удара двух тел выражается формулой

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)u, \tag{12}$$

где v_2 — скорость поковки (вместе с наковальней) перед ударом; u — скорость молота и поковки (вместе с наковальней) непосредственно после удара. Так как поковка с наковальней до удара находилась в состоянии покоя, то $v_2 = 0$. При неупругом ударе деформация не восстанавливается, вследствие чего молот и поковка (с наковальней) движутся как одно целое, т. е. с одинаковой скоростью u. Из формулы (12) найдем эту скорость:

$$u = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1. \tag{13}$$

В результате сопротивления фундамента скорость u быстро гасится, а кинетическая энергия, которой обладает система молот–поковка (с наковальней), передается фундаменту. Эту энергию находим по формуле $T_2 = (m_1+m_2)u^2/2$. Заменим скорость u ее выражением (13):

$$T_2 = \frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)},$$

или, учитывая, что $T_1 = m_1v_1^2/2$, запишем

$$T_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}T_1. \tag{14}$$

Подставив в уравнение (14) значения m_1, m_2 и T_1 и произведя вычисления, получим

$$T_2 = 29{,}6 \text{ Дж}.$$

3. Молот до удара обладал энергией T_1; T_2 — энергия, переданная фундаменту. Следовательно, на деформацию поковки использовалась энергия

$$T = T_1 - T_2.$$

Подставив в это выражение значения T_1 и T_2, получим

$$T = 370 \text{ Дж}.$$

4. Назначение молота — путем ударов о поковку, находящуюся на наковальне, вызвать деформацию поковки; следовательно, энергию T можно считать полезной; к.п.д. удара молота о поковку равен отношению энергии T, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии T_1:

$$\eta = \frac{T}{T_1}, \quad \text{или} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Подставив в последнее выражение T_2 по формуле (14), получим

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

После подстановки значений m_2 и m_1 найдем

$$\eta = 92{,}6\%.$$

Пример 9. Из сопла ракеты вылетают продукты сгорания (газы) со скоростью $u = 2$ км/с (относительно ракеты). Массовый расход горючего,

Рис. 2.7

т. е. масса ежесекундно выбрасываемых газов, $\mu = 5$ кг/с. Определить реактивную силу $\mathbf{R}$, возникающую при выбрасывании газов.

Решение. Реактивная сила $\mathbf{R}$, действующая на ракету, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю и направлена противоположно силе $\mathbf{F}$, действующей со стороны ракеты на выбрасываемые газы:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}.$$

Эту силу найдем, используя второй закон Ньютона, который запишем в виде

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t},$$

где $\mathbf{dp}$ — импульс, получаемый порцией газа массой dm за время dt (рис. 2.7):

$$\mathbf{dp} = \mathbf{u}\,dm.$$

Тогда

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{u}\,dm}{dt},$$

где $\dfrac{dm}{dt}$ и есть массовый расход μ, т. е.

$$\mathbf{F} = \mu\mathbf{u}.$$

Следовательно, реактивная сила

$$\mathbf{R} = -\mu\mathbf{u}.$$

Знак минус указывает на то, что реактивная сила $\mathbf{R}$ направлена противоположно скорости $\mathbf{u}$ выбрасываемых из сопла газов.

Модуль реактивной силы

$$R = |\mathbf{R}| = \mu|\mathbf{u}|.$$

Проверим единицы измерения

$$[\mu][u] = 1\ \text{кг/с} \cdot 1\ \text{м/с} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 = 1\ \text{Н}.$$

Подставим числовые значения в СИ и произведем вычисления

$$R = 5 \cdot 2 \cdot 10^3 = 10^4\ \text{Н} = 10\ \text{кН}.$$

Пример 10. Ракета, имеющая стартовую массу $m_c = 10$ т, запущена вертикально вверх. Пренебрегая действием внешних сил (силы тяжести и силы сопротивления), определить скорость v ракеты через интервал времени $\tau = 2$ мин после запуска. Массовый расход топлива $\mu = 25$ кг/с и скорость u истекающих из сопла ракеты газов равна 2 км/с.

Решение. Запишем уравнение движения для тела переменной массы в векторной форме:

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i + \mathbf{R}.$$

В процессе движения масса ракеты $m(t)$ будет убывать, поэтому ее массовый расход следует считать величиной отрицательной, и тогда мгновенную массу ракеты можно записать следующим образом:

$$m(t) = m_c - \mu t.$$

Так как влиянием внешних сил можно пренебречь, то

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0.$$

Учитывая, что реактивная сила (см. пример 9) выражается как

$$\mathbf{R} = -\mu\mathbf{u},$$

уравнение движения примет вид

$$(m_c - \mu t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mu\mathbf{u}.$$

Проведем координатную ось y по направлению вектора скорости ракеты $\mathbf{v}$ (рис. 2.8). Спроектируем на эту ось все векторные величины, входящие в последнее уравнение. Учитывая, что проекция скорости газов $\mathbf{u}$ отрицательна, перепишем уравнение движения в координатной форме:

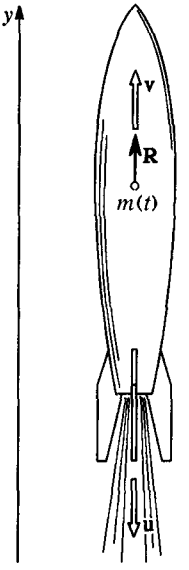


Рис. 2.8

$$(m_c - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u.$$

Произведем разделение переменных v и t

$$\frac{dv}{u} = \frac{\mu\, dt}{m_c - \mu t}$$

и проинтегрируем по времени в пределах от 0 до τ и по скорости от 0 до v

$$\int_0^v \frac{dv}{u} = \int_0^\tau \frac{\mu\, dt}{m_c - \mu t}.$$

Подставим пределы

$$\frac{v}{u} = -\ln|m_c - \mu\tau| + \ln m_0$$

и, опуская знак модуля под знаком логарифма, так как мгновенная масса ракеты $(m_0 - \mu\tau)$ положительна, получим

$$v = u \ln\frac{m_c}{m_c - \mu\tau}.$$

Это одна из форм записи формулы Циолковского. Поскольку логарифм любого числа представляет собой величину безразмерную, то единицы измерения правой и левой части равенства совпадают. Поэтому скорость u в единицах СИ можно не выражать, а оставить единицу, приведенную в условии задачи (км/с), тогда как стартовую массу m_c ракеты, массовый расход μ и время τ обязательно надо выразить в единицах СИ.

Произведем вычисления

$$v = 2\ln\left(\frac{10\cdot 10^3}{10\cdot 10^3 - 25\cdot 120}\right) = 0{,}713 \text{ км/с}.$$

ЗАДАЧИ

Второй закон Ньютона

2.1. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязан шнур, ко второму концу которого приложена сила $F = 10$ Н, направленная параллельно поверхности стола. Найти ускорение a бруска.

2.2. На столе стоит тележка массой $m_1 = 4$ кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок. С каким ускорением a будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой $m_2 = 1$ кг?

2.3. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами $m_1 = 1,5$ кг и $m_2 = 3$ кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

2.4. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 4$ кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением a будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу $F = 10$ Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения T шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить к первому бруску? ко второму бруску? Трением пренебречь.

2.5. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок, и силу натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

2.6. Наклонная плоскость, образующая угол $\alpha = 25°$ с плоскостью горизонта, имеет длину $l = 2$ м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время $t = 2$ с. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость.

2.7. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2, $D = -0,2$ м/с^3. Найти значения этой силы в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с. В какой момент времени сила равна нулю?

2.8. Молот массой $m = 1$ т падает с высоты $h = 2$ м на наковальню. Длительность удара $\tau = 0,01$ с. Определить среднее значение силы $\langle F \rangle$ удара.

2.9. Шайба, пущенная по поверхности льда с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, остановилась через $t = 40$ с. Найти коэффициент трения μ шайбы о лед.

2.10. Материальная точка массой $m = 1$ кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом $r = 1,2$ м в течение времени $t = 2$ с. Найти изменение Δp импульса точки.

2.11. Тело массой $m = 5$ кг брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы F, действующей на тело, за время его полета; 2) изменение Δp импульса тела за время полета.

2.12. Шарик массой $m = 100$ г упал с высоты $h = 2{,}5$ м на горизонтальную плиту, масса которой много больше массы шарика, и отскочил от нее вверх. Считая удар абсолютно упругим, определить импульс p, полученный плитой.

2.13. Шарик массой $m = 300$ г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс p_1, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость $v_0 = 10$ м/с, направленную под углом $\alpha = 30°$ к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

2.14. Гладкий наклонный желоб имеет в нижней части горизонтальный участок. По желобу соскальзывает с высоты $h = 2$ м брусок массой $m = 0{,}2$ кг. Начальная скорость v_0 бруска равна нулю. Определить изменение Δp импульса бруска и импульс p, полученный желобом при движении тела.

2.15. Ракета массой $m = 1$ т, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, поднимается с ускорением $a = 2g$. Скорость v струи газов, вырывающихся из сопла, равна 1200 м/с. Найти расход Q_m горючего.

2.16. Космический корабль имеет массу $m = 3{,}5$ т. При маневрировании из его двигателей вырывается струя газов со скоростью $v = 800$ м/с; расход горючего $Q_m = 0{,}2$ кг/с. Найти реактивную силу R двигателей и ускорение a, которое она сообщает кораблю.

2.17. Вертолет массой $m = 3{,}5$ т с ротором, диаметр d которого равен 18 м, «висит» в воздухе. С какой скоростью v ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха? Диаметр струи считать равным диаметру ротора.

2.18. Брусок массой $m_2 = 5$ кг может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. На нем находится другой брусок массой $m_1 = 1$ кг. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков $\mu = 0{,}3$. Определить максимальное значение силы $F_{\max}$, приложенной к нижнему бруску, при которой начнется соскальзывание верхнего бруска.

2.19. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m_1 = 2$ кг. Коэффициент трения μ_1 бруска о поверхность равен 0,2. На бруске находится другой брусок массой $m_2 = 8$ кг. Коэффициент трения μ_2 верхнего бруска о нижний равен 0,3. К верхнему бруску приложена сила F. Определить: 1) значение силы F_1, при котором начнется совместное скольжение брусков по поверхности; 2) значение силы F_2, при котором верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего.

2.20. Ракета, масса которой $M = 6$ т, поднимается вертикально вверх. Двигатель ракеты развивает силу тяги $F = 500$ кН. Определить ускорение a ракеты и силу T натяжения троса, свободно свисающего с ракеты, на расстоянии, равном $1/4$ его длины от точки прикрепления троса. Масса m троса равна 10 кг. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

2.21. На плоской горизонтальной поверхности находится обруч, масса которого ничтожно мала. К внутренней части обруча прикреплен груз малых размеров, как это показано на рис. 2.9. Угол $\alpha = 30°$. С каким ускорением a необходимо двигать плоскость в направлении, указанном на рисунке, чтобы обруч с грузом не изменил своего положения относительно плоскости? Скольжение обруча по плоскости отсутствует.

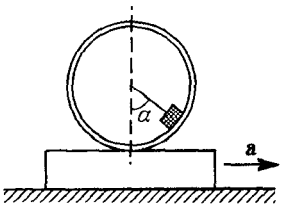


Рис. 2.9

2.22. Самолет летит в горизонтальном направлении с ускорением $a = 20$ м/с^2. Какова перегрузка пассажира, находящегося в самолете? (Перегрузкой называется отношение силы F, действующей на пассажира, к силе тяжести mg.)

2.23. Автоцистерна с керосином движется с ускорением $a = 0{,}7$ м/с^2. Под каким углом φ к плоскости горизонта расположен уровень керосина в цистерне?

2.24. Бак в тендере паровоза имеет длину $l = 4$ м. Какова разность Δl уровней воды у переднего и заднего концов бака при движении поезда с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2?

2.25. Неподвижная труба площадью поперечного сечения S, равной 10 см^2, изогнута под углом $\varphi = 90°$ и прикреплена к стене (рис. 2.10). По трубе течет вода, объемный расход Q_V которой 50 л/с. Найти силу F давления струи воды, вызванную изгибом трубы.

2.26. Струя воды ударяется о неподвижную плоскость, поставленную под углом $\varphi = 60°$ к направлению движения струи. Скорость v струи равна 20 м/с, площадь S ее поперечного сечения равна 5 см^2. Определить силу F давления струи на плоскость.

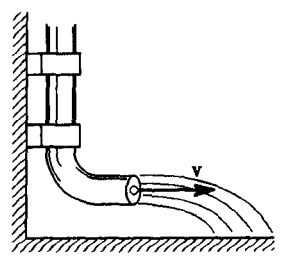


Рис. 2.10

2.27. [7]) Катер массой $m = 2$ т с двигателем мощностью $N = 50$ кВт развивает максимальную скорость $v_{max} = 25$ м/с. Определить время t, в течение которого катер

[7]) Перед решением задач 2.27–2.30 следует предварительно разобрать пример 3 из § 2.

после выключения двигателя потеряет половину своей скорости. Принять, что сила сопротивления движению катера изменяется пропорционально квадрату скорости.

2.28. Снаряд массой $m = 10$ кг выпущен из зенитного орудия вертикально вверх со скоростью $v_0 = 800$ м/с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости, определить время t подъема снаряда до высшей точки. Коэффициент сопротивления $k = 0{,}25$ кг/с.

2.29. С вертолета, неподвижно висящего на некоторой высоте над поверхностью Земли, сброшен груз массой $m = 100$ кг. Считая, что сила сопротивления воздуха изменяется пропорционально скорости, определить, через какой промежуток времени τ ускорение a груза будет равно половине ускорения свободного падения. Коэффициент сопротивления $k = 10$ кг/с.

2.30. Моторная лодка массой $m = 400$ кг начинает двигаться по озеру. Сила тяги F мотора равна 0,2 кН. Считая силу сопротивления F_c пропорциональной скорости, определить скорость v лодки через $\tau = 20$ с после начала ее движения. Коэффициент сопротивления $k = 20$ кг/с.

2.31. Катер массой $m = 2$ т трогается с места и в течение времени $\tau = 10$ с развивает при движении по спокойной воде скорость $v = 4$ м/с. Определить силу тяги F мотора, считая ее постоянной. Принять силу сопротивления F_c движению пропорциональной скорости; коэффициент сопротивления $k = 100$ кг/с.

2.32. Начальная скорость v_0 пули равна 800 м/с. При движении в воздухе за время $t = 0{,}8$ с ее скорость уменьшилась до $v = 200$ м/с. Масса m пули равна 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления k. Действием силы тяжести пренебречь.

2.33. Парашютист, масса которого $m = 80$ кг, совершает затяжной прыжок. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, определить, через какой промежуток времени τ скорость движения парашютиста будет равна 0,9 от скорости установившегося движения. Коэффициент сопротивления $k = 10$ кг/с. Начальная скорость парашютиста равна нулю.

Закон сохранения импульса

2.34. Шар массой $m_1 = 10$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 4$ м/с, сталкивается с шаром массой $m_2 = 4$ кг, скорость v_2 которого равна 12 м/с. Считая удар прямым, неупругим, найти скорость u шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) шары движутся навстречу друг другу.

2.35. В лодке массой $m_1 = 240$ кг стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Лодка плывет со скоростью $v_1 = 2$ м/с. Человек пры-

гает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью $v = 4$ м/с (относительно лодки). Найти скорость u движения лодки после прыжка человека в двух случаях: 1) человек прыгает вперед по движению лодки и 2) в сторону, противоположную движению лодки.

2.36. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека $M = 60$ кг, масса доски $m = 20$ кг. С какой скоростью v (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью (относительно доски) $u = 1$ м/с? Массой колес пренебречь. Трение во втулках не учитывать.

2.37. В предыдущей задаче найти, на какое расстояние: 1) передвинется тележка, если человек перейдет на другой конец доски; 2) переместится человек относительно пола; 3) переместится центр масс системы тележка–человек относительно доски и относительно пола. Длина l доски равна 2 м.

2.38. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\varphi = 60°$ к горизонту в направлении пути. С какой скоростью v_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $v_2 = 600$ м/с?

2.39. Снаряд массой $m = 10$ кг обладал скоростью $v = 200$ м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой $m_1 = 3$ кг получила скорость $u_1 = 400$ м/с в прежнем направлении. Найти скорость u_2 второй, большей части после разрыва.

2.40. В предыдущей задаче найти, с какой скоростью u_2 и под каким углом φ_2 к горизонту полетит бóльшая часть снаряда, если меньшая полетела вперед под углом $\varphi_1 = 60°$ к горизонту.

2.41. Два конькобежца массами $m_1 = 80$ кг и $m_2 = 50$ кг, держась за концы длинного натянутого шнура, неподвижно стоят на льду один против другого. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью $v = 1$ м/с. С какими скоростями u_1 и u_2 будут двигаться по льду конькобежцы? Трением пренебречь.

Динамика материальной точки, движущейся по окружности

2.42. Диск радиусом $R = 40$ см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения $\mu = 0{,}4$, найти частоту n вращения, при которой кубик соскользнет с диска.

2.43. Акробат на мотоцикле описывает «мертвую петлю» радиусом $r = 4$ м. С какой наименьшей скоростью $v_{\min}$ должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

2.44. К шнуру подвешена гиря. Гирю отвели в сторону так, что шнур принял горизонтальное положение, и отпустили. Как

велика сила T натяжения шнура в момент, когда гиря проходит положение равновесия? Какой угол φ с вертикалью составляет шнур в момент, когда сила натяжения шнура равна силе тяжести гири?

2.45. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом $R = 200$ м. Во сколько раз сила F, с которой летчик давит на сиденье в нижней точке, больше силы тяжести P летчика, если скорость самолета $v = 100$ м/с?

2.46. Грузик, привязанный к шнуру длиной $l = 50$ см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол φ образует шнур с вертикалью, если частота вращения $n = 1\,\text{с}^{-1}$?

2.47. Грузик, привязанный к нити длиной $l = 1$ м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период T обращения, если нить отклонена на угол $\varphi = 60°$ от вертикали.

2.48. При насадке маховика на ось центр тяжести оказался на расстоянии $r = 0{,}1$ мм от оси вращения. В каких пределах меняется сила F давления оси на подшипники, если частота вращения маховика $n = 10\,\text{с}^{-1}$? Масса m маховика равна 100 кг.

2.49. Мотоцикл едет по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом $R = 11{,}2$ м. Центр тяжести мотоцикла с человеком расположен на расстоянии $l = 0{,}8$ м от поверхности цилиндра. Коэффициент трения μ покрышек о поверхность цилиндра равен 0,6. С какой минимальной скоростью $v_{\min}$ должен ехать мотоциклист? Каков будет при этом угол φ наклона его к плоскости горизонта?

2.50. Автомобиль массой $m = 5$ т движется со скоростью $v = 10$ м/с по выпуклому мосту. Определить силу F давления автомобиля на мост в его верхней части, если радиус R кривизны моста равен 50 м.

2.51. Сосуд с жидкостью вращается с частотой $n = 2\,\text{с}^{-1}$ вокруг вертикальной оси. Поверхность жидкости имеет вид воронки. Чему равен угол φ наклона поверхности жидкости в точках, лежащих на расстоянии $r = 5$ см от оси?

2.52. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус R кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения μ колес о покрытие дороги равен 0,1 (гололед). При какой скорости v автомобиля начнется его занос?

2.53. Какую наибольшую скорость $v_{\max}$ может развить велосипедист, проезжая закругление радиусом $R = 50$ м, если коэффициент трения скольжения μ между шинами и асфальтом равен 0,3? Каков угол φ отклонения велосипеда от вертикали, когда велосипедист движется по закруглению?

2.54. Самолет массой $m = 2{,}5$ т летит со скоростью $v = 400$ км/ч. Он совершает в горизонтальной плоскости вираж (вираж — полет самолета по дуге окружности с некоторым углом крена). Радиус R траектории самолета равен 500 м. Найти поперечный

угол φ наклона самолета и подъемную силу F крыльев во время полета.

2.55. Вал вращается с частотой $n = 2400\,\text{мин}^{-1}$. К валу перпендикулярно его оси прикреплен стержень очень малой массы, несущий на концах грузы массой $m = 1\,\text{кг}$ каждый, находящиеся на расстоянии $r = 0{,}2\,\text{м}$ от оси вала. Найти: 1) силу F, растягивающую стержень при вращении вала; 2) момент M силы, которая действовала бы на вал, если бы стержень был наклонен под углом $\varphi = 89°$ к оси вала.

2.56. Тонкое однородное медное кольцо радиусом $R = 10\,\text{см}$ вращается относительно оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью $\omega = 10\,\text{рад/с}$. Определить нормальное напряжение σ, возникающее в кольце, если ось вращения перпендикулярна плоскости кольца.

Работа и энергия

2.57. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь $s = 5\,\text{м}$ и приобрела скорость $v = 2\,\text{м/с}$. Определить работу A силы, если масса m вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения $\mu = 0{,}01$.

2.58. Вычислить работу A, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой $m = 100\,\text{кг}$ на высоту $h = 4\,\text{м}$ за время $t = 2\,\text{с}$.

2.59. Найти работу A подъема груза по наклонной плоскости длиной $l = 2\,\text{м}$, если масса m груза равна 100 кг, угол наклона $\varphi = 30°$, коэффициент трения $\mu = 0{,}1$ и груз движется с ускорением $a = 1\,\text{м/с}^2$.

2.60. Вычислить работу A, совершаемую на пути $s = 12\,\text{м}$ равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила $F_1 = 10\,\text{Н}$, в конце пути $F_2 = 46\,\text{Н}$.

2.61. Под действием постоянной силы $F = 400\,\text{Н}$, направленной вертикально вверх, груз массой $m = 20\,\text{кг}$ был поднят на высоту $h = 15\,\text{м}$. Какой потенциальной энергией П будет обладать поднятый груз? Какую работу A совершит сила F?

2.62. Тело массой $m = 1\,\text{кг}$, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 20\,\text{м/с}$, через $t = 3\,\text{с}$ упало на землю. Определить кинетическую энергию T, которую имело тело в момент удара о землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.63. Камень брошен вверх под углом $\varphi = 60°$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия T_0 камня в начальный момент времени равна 20 Дж. Определить кинетическую T и потенциальную П энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.64. Насос выбрасывает струю воды диаметром $d = 2\,\text{см}$ со скоростью $v = 20\,\text{м/с}$. Найти мощность N, необходимую для выбрасывания воды.

2.65. Какова мощность N воздушного потока сечением $S = 0{,}55\,\text{м}^2$ при скорости воздуха $v = 20\,\text{м/с}$ и нормальных условиях?

2.66. Вертолет массой $m = 3\,\text{т}$ висит в воздухе. Определить мощность N, расходуемую на поддержание вертолета в этом положении, при двух значениях диаметра d ротора: 1) 18 м; 2) 8 м. При расчете принять, что ротор отбрасывает вниз цилиндрическую струю воздуха диаметром, равным диаметру ротора.

2.67. Материальная точка массой $m = 2\,\text{кг}$ двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси Ox согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 10\,\text{м}$, $B = -2\,\text{м/с}$, $C = 1\,\text{м/с}^2$, $D = -0{,}2\,\text{м/с}^3$. Найти мощность N, затрачиваемую на движение точки, в моменты времени $t_1 = 2\,\text{с}$ и $t_2 = 5\,\text{с}$.

2.68. С какой наименьшей высоты h должен начать скатываться акробат на велосипеде (не работая ногами), чтобы проехать по дорожке, имеющей форму «мертвой петли» радиусом $R = 4\,\text{м}$, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Трением пренебречь.

2.69. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторвется от поверхности купола? Трением пренебречь.

2.70. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость v он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли» радиусом $R = 4\,\text{м}$? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

2.71. При выстреле из орудия снаряд массой $m_1 = 10\,\text{кг}$ получает кинетическую энергию $T_1 = 1{,}8\,\text{МДж}$. Определить кинетическую энергию T_2 ствола орудия вследствие отдачи, если масса m_2 ствола орудия равна 600 кг.

2.72. Ядро атома распадается на два осколка массами $m_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-25}\,\text{кг}$ и $m_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-25}\,\text{кг}$. Определить кинетическую энергию T_2 второго осколка, если энергия T_1 первого осколка равна 18 нДж.

2.73. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой $m_1 = 5\,\text{кг}$ и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $v_2 = 1\,\text{м/с}$. Масса конькобежца $m_2 = 60\,\text{кг}$. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири.

2.74. Молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в $n = 3$ раза больше, чем другого. Пренебрегая начальной кинетической энергией и импульсом молекулы, определить кинетические энергии T_1 и T_2 атомов, если их суммарная кинетическая энергия $T = 0{,}032\,\text{нДж}$.

2.75. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда m_1 равна 10 кг и его скорость $v = 1\,\text{км/с}$. Масса m_2

платформы с орудием и прочим грузом равна 20 т. На какое расстояние l откатится платформа после выстрела, если коэффициент сопротивления $\mu = 0{,}002$?

2.76. Пуля массой $m = 10$ г, летевшая со скоростью $v = 600$ м/с, попала в баллистический маятник (рис. 2.11) массой $M = 5$ кг и застряла в нем. На какую высоту h, откачнувшись после удара, поднялся маятник?

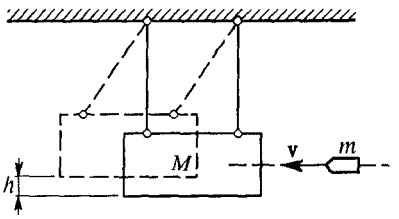


Рис. 2 11

2.77. В баллистический маятник массой $M = 5$ кг попала пуля массой $m = 10$ г и застряла в нем. Найти скорость v пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту $h = 10$ см.

2.78. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\varphi = 60°$ и пущен. Определить высоту h, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

2.79. Два неупругих шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг движутся со скоростями соответственно $v_1 = 8$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Определить увеличение ΔU внутренней энергии шаров при их столкновении в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу.

2.80. Шар массой m_1, летящий со скоростью $v_1 = 5$ м/с, ударяет неподвижный шар массой m_2. Удар прямой, неупругий. Определить скорость u шаров после удара, а также долю w кинетической энергии летящего шара, израсходованной на увеличение внутренней энергии этих шаров. Рассмотреть два случая: 1) $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 8$ кг; 2) $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг.

2.81. Шар массой $m_1 = 2$ кг налетает на покоящийся шар массой $m_2 = 8$ кг. Импульс p_1 движущегося шара равен 10 кг·м/с. Удар шаров прямой, упругий. Определить непосредственно после удара: 1) импульсы p_1' первого шара и p_2' второго шара; 2) изменение Δp_1 импульса первого шара; 3) кинетические энергии T_1' первого шара и T_2' второго шара; 4) изменение ΔT_1 кинетической энергии первого шара; 5) долю w кинетической энергии, переданной первым шаром второму.

2.82. Шар массой $m_1 = 6$ кг налетает на другой, покоящийся шар массой $m_2 = 4$ кг. Импульс p_1 первого шара равен 5 кг·м/с. Удар шаров прямой, неупругий. Определить непосредственно после удара: 1) импульсы p_1' первого шара и p_2' второго шара; 2) изменение Δp_1 импульса первого шара; 3) кинетические энергии T_1' первого шара и T_2' второго шара; 4) изменение ΔT_1 кинетической энергии первого шара; 5) долю w_1 кинетической энергии, пере-

данной первым шаром второму, и долю w_2 кинетической энергии, оставшейся у первого шара; 6) изменение ΔU внутренней энергии шаров; 7) долю w кинетической энергии первого шара, перешедшей во внутреннюю энергию шаров.

2.83. Молот массой $m_1 = 5$ кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить к.п.д. η удара молота при данных условиях.

2.84. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найти к.п.д. η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.

2.85. Молотком, масса которого $m_1 = 1$ кг, забивают в стену гвоздь массой $m_2 = 75$ г. Определить к.п.д. η удара молотка при данных условиях.

2.86. Шар массой $m_1 = 200$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 10$ м/с, ударяет неподвижный шар массой $m_2 = 800$ г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости u_1 и u_2 шаров после удара?

2.87. Шар массой $m = 1{,}8$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял $w = 0{,}36$ своей кинетической энергии T_1. Определить массу большего шара.

2.88. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял $w = 3/4$ своей кинетической энергии T_1. Определить отношение $k = M/m$ масс шаров.

2.89. Определить максимальную часть w кинетической энергии T_1, которую может передать частица массой $m_1 = 2 \cdot 10^{-22}$ г, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2 = 6 \cdot 10^{-22}$ г, которая до столкновения покоилась.

2.90. Частица массой $m_1 = 10^{-25}$ кг обладает импульсом $p_1 = 5 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с. Определить, какой максимальный импульс p_2 может передать эта частица, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2 = 4 \cdot 10^{-25}$ кг, которая до соударения покоилась.

2.91. На покоящийся шар налетает со скоростью $v_1 = 2$ м/с другой шар одинаковой с ним массы. В результате столкновения этот шар изменил направление движения на угол $\alpha = 30°$. Определить: 1) скорости u_1 и u_2 шаров после удара; 2) угол β между вектором скорости второго шара и первоначальным направлением движения первого шара. Удар считать упругим.

2.92. Частица массой $m_1 = 10^{-24}$ г имеет кинетическую энергию $T_1 = 9 \cdot 10^{-9}$ Дж. В результате упругого столкновения с покоящейся частицей массой $m_2 = 4 \cdot 10^{-24}$ г она сообщает ей кинети-

ческую энергию $T_2 = 5 \cdot 10^{-9}$ Дж. Определить угол α, на который отклонится частица от своего первоначального направления.

2.93*. Два шара массами m и $4m$ движутся в одном направлении, имея одинаковые кинетические энергии ($T_1 = T_2 = 100$ Дж). Определить непосредственно после удара: 1) кинетическую энергию T_2' второго (бóльшего) шара; 2) изменение ΔU внутренней энергии шаров. Удар считать прямым, центральным, неупругим.

2.94*. Два шара массами m и $4m$ движутся навстречу друг другу, имея одинаковые кинетические энергии ($T_1 = T_2 = 200$ Дж). Определить непосредственно после удара: 1) кинетическую энергию T_1' первого (меньшего) шара; 2) изменение ΔU внутренней энергии шаров. Удар считать центральным, неупругим.

2.95*. Кинетические энергии T_1 и T_2 двух шаров, движущихся в одном направлении, соответственно равны 400 Дж и 100 Дж. Определить непосредственно после прямого, центрального, неупругого удара: 1) изменения ΔT_1 и ΔT_2 кинетических энергий первого и второго шара; 2) изменение внутренней энергии ΔU шаров.

2.96*. То же условие что и в предыдущей задаче, но шары движутся навстречу друг другу.

2.97*. Шар массой m налетает на другой шар массой $4m$, движущийся в том же направлении. Кинетические энергии шаров до удара одинаковы ($T_1 = T_2 = 250$ Дж). Удар шаров прямой, центральный, упругий. Определить непосредственно после удара: 1) кинетические энергии T_1' и T_2' шаров; 2) изменения ΔT_1 и ΔT_2 их кинетических энергий.

2.98*. То же условие, что и в задаче 2.97, но шары движутся навстречу друг другу.

2.99*. В одном направлении движутся два шара с одинаковыми импульсами ($\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$; $|\mathbf{p}_1| = 10$ кг·м/с). Считая удар шаров прямым, центральным и упругим, определить импульсы $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ шаров после удара, если отношение масс шаров равно четырем.

2.100*. То же условие, что и в задаче 2.99, но шары движутся навстречу друг другу ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$).

2.101*. Катер массой $m = 1{,}5$ т начинает движение по озеру под действием постоянной силы тяги. Определить, через какой промежуток времени τ скорость катера достигнет значения, равного половине максимально достижимой скорости. Принять силу сопротивления пропорциональной скорости катера и коэффициент сопротивления $k = 100$ кг/с.

2.102*. Моторная лодка массой $m = 200$ кг, достигнув скорости $v = 8$ м/с, стала двигаться далее с выключенным двигателем. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости, определить путь s, пройденный лодкой за время τ с момента выключения двигателя. Коэффициент сопротивления k принять равным 25 кг/с.

2.103*. С поверхности Луны стартовала ракета массой $m_c = 2$ т. Спустя время τ ракета достигла первой (лунной) космической скорости $v_1 = 1{,}68$ км/с. Определить массовый расход μ топлива, если скорость u истечения газов из сопла ракеты равна 4 км/с. Силой тяжести пренебречь.

2.104*. Топливо баллистической ракеты составляет $\eta = 3/4$ от стартовой массы ракеты. Определить скорость v ракеты после полного сгорания топлива, если скорость u истечения газов из сопла ракеты постоянна и равна 2 км/с. Силой тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

2.105*. Во сколько раз будет отличаться ускорение a ракеты от стартового ускорения a_c в тот момент времени, когда ее скорость v станет равной скорости u истечения газов из сопла ракеты. Силу тяги считать неизменной. Силами тяжести и сопротивления воздуха пренебречь.

2.106*. Каково относительное изменение $\dfrac{|\Delta m|}{m_c}$ массы ракеты (m_c — стартовая масса) к тому моменту времени, когда ее скорость v достигнет скорости u истечения газов из сопла ракеты. Силами тяжести и сопротивления воздуха пренебречь.

§ 3. Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Момент силы $\mathbf{F}$, действующей на тело, относительно оси вращения

$$M = F_\perp l,$$

где $F_\perp$ — проекция силы $\mathbf{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения; l — плечо силы $\mathbf{F}$ (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

• Момент инерции относительно оси Oz:

а) материальной точки

$$J_z = mr^2,$$

где m — масса материальной точки; r — расстояние от нее до оси вращения;

б) системы материальных точек

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где m_i — масса i-й материальной точки; r_i — расстояние от этой точки до оси Oz;

в) твердого тела

$$J_z = \int\limits_m r^2 \, \mathrm{d}m,$$

где знак «m» у интеграла означает, что интегрирование ведется по всем элементам твердого тела, обладающим массой.

Для однородного тела плотностью ρ

$$J_z = \rho \int\limits_V r^2 \, \mathrm{d}V,$$

где $\mathrm{d}V$ — дифференциально малый объем тела, знак «V» у интеграла означает, что интегрирование ведется по всем элементам объема твердого тела.

• *Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы:*

Тело	Ось, относительно которой определяется момент инерции	Формула момента инерции
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр тяжести стержня перпендикулярно стержню	$\frac{ml^2}{12}$
	Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$\frac{ml^2}{3}$
Тонкое кольцо, обруч, труба радиусом R и массой m, маховик радиусом R и массой m, распределенной по ободу	Проходит через центр перпендикулярно плоскости основания	mR^2
Круглый однородный диск (цилиндр) радиусом R и массой m	Проходит через центр диска перпендикулярно плоскости основания	$\frac{mR^2}{2}$
Однородный шар массой m и радиусом R	Проходит через центр шара	$\frac{2mR^2}{5}$

• Для плоских фигур (тонких пластин и жестко связанных материальных точек, лежащих в одной плоскости) справедливо равенство

$$J_z = J_x + J_y,$$

где J_z — момент инерции плоской фигуры относительно оси Oz, перпендикулярной плоскости; J_x и J_y — моменты инерции той же фигуры относительно осей Ox и Oy, лежащих в плоскости.

• *Теорема Штейнера.* Момент инерции $J_{z'}$ твердого тела относительно оси Oz'

$$J_{z'} = J_{z,C} + ma^2,$$

где $J_{z,C}$ — момент инерции тела относительно оси Oz, проходящей через его центр масс (C); m — масса тела; a — расстояние между параллельными осями Oz и Oz'.

• Момент силы, действующий на тело, относительно точки O

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный от точки O, относительно которой определяется момент силы, к точке приложения силы $\mathbf{F}$.

• Момент силы, действующий на тело, относительно оси Oz (проекция вектора $\mathbf{M}$ на ось Oz)

$$M_z = [\mathbf{rF}]_{\text{пр.}z},$$

или

$$M_z = F_\perp l,$$

где $F_\perp$ — проекция силы $\mathbf{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси Oz; l — плечо силы $\mathbf{F}$ (кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы).

• Момент импульса материальной точки относительно точки O

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный от точки O, относительно которой определяется момент импульса, к движущейся материальной точке, импульс которой равен $\mathbf{p}$.

• Момент импульса материальной точки относительно оси Oz (проекция вектора $\mathbf{L}$ на ось Oz)

$$L_z = [\mathbf{rp}]_{\text{пр.}z},$$

или

$$L_z = p_\perp l,$$

где $p_\perp$ — проекция импульса $\mathbf{p}$ на плоскость, перпендикулярную оси Oz; l — плечо импульса $\mathbf{p}$ (кратчайшее расстояние от оси Oz до линии, вдоль которой движется материальная точка).

• Момент импульса твердого тела, вращающегося относительно оси Oz,

$$L_z = J_z\omega.$$

• Основной закон динамики вращательного движения:

а) относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t},$$

где $\mathbf{M}$ — главный (результирующий) момент всех внешних сил, действующих на систему относительно неподвижной точки O; $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$ — скорость изменения момента импульса системы относительно той же точки;

б) относительно неподвижной оси Oz

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t},$$

где M_z и L_z — главный момент внешних сил и момент импульса системы относительно оси Oz, или для твердого тела с неизменным моментом инерции

$$M_z = J_z\varepsilon,$$

где J_z — момент инерции твердого тела, ε — угловое ускорение.

• Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы:

а) относительно точки ($\mathbf{M} = 0$)

$$\mathbf{L} = \text{const};$$

б) относительно оси Oz ($M_z = 0$)

$$L_z = \text{const},$$

или

$$J_z\omega = \text{const},$$

где ω — угловая скорость тела.

• Работа постоянного момента силы M_z, действующего на вращающееся вокруг оси Oz тело,

$$A = M_z\varphi,$$

где φ — угол поворота тела.

• Мгновенная мощность

$$N = M_z\omega.$$

• Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси Oz,

$$T = \frac{J_z\omega^2}{2}.$$

• Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости,

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_z\omega^2}{2},$$

где v_C — скорость центра масс тела, J_z — момент инерции тела относительно мгновенной оси Oz, проходящей через его центр масс.

• Величины, характеризующие динамику вращательного движения, и формулы, описывающие это движение, аналогичны соответствующим величинам и формулам поступательного движения.

Эта аналогия раскрывается следующей таблицей:

Поступательное движение	Вращательное движение
Основной закон динамики	
$F\Delta t = mv_2 - mv_1;$ $F = ma$	$M\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1;$ $M = J\varepsilon$
Закон сохранения	
импульса $\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \text{const}$	*момента импульса* $\sum_{i=1}^{n} J_i \omega_i = \text{const}$
Работа и мощность	
$A = Fs;$ $N = Fv$	$A = M\varphi;$ $N = M\omega$
Кинетическая энергия	
$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{J\omega^2}{2}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить момент инерции J_z молекулы NO_2 относительно оси z, проходящей через центр масс молекулы перпендикулярно

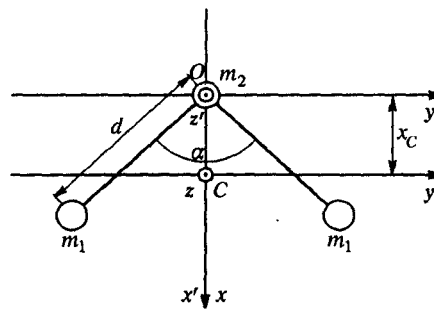


Рис. 3.1

плоскости, содержащей ядра атомов. Межъядерное расстояние d этой молекулы равно 0,118 нм, валентный угол $\alpha = 140°$.

Решение. Молекулу NO_2 можно рассматривать как систему, состоящую из трех материальных точек общей массой

$$m = 2m_1 + m_2, \tag{1}$$

где m_1 — масса атома кислорода; m_2 — масса атома азота.

Расположим молекулу относительно координатных осей так, как это указано на рис. 3.1 (начало координат совместим с центром масс C (ось

Oy) молекулы, ось z направим перпендикулярно плоскости чертежа «на нас»).

Для определения J_z воспользуемся теоремой Штейнера

$$J = J_C + ma^2.$$

Для данного случая эта теорема запишется в виде $J_{z'} = J_z + ma^2$, где $J_{z'}$ — момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через атом азота (точка O на рис. 3.1). Отсюда искомый момент инерции

$$J_z = J_{z'} - ma^2. \tag{2}$$

Момент инерции $J_{z'}$ находим как сумму моментов инерции двух материальных точек (атомов кислорода):

$$J_{z'} = 2m_1 d^2. \tag{3}$$

Расстояние a между осями z и z' равно координате x_C центра масс системы и поэтому может быть выражено по формуле (см. § 2) $x_C = \sum m_i x_i' / \sum m_i$. В данном случае

$$a = x_C = \frac{2m_1 x_1' + m_2 x_2'}{2m_1 + m_2},$$

или, учитывая, что $x_1 = d\cos(\alpha/2)$ и $x_2 = 0$,

$$a = x_C = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} d\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Подставив в формулу (2) значения $J_{z'}$, m, a соответственно из выражений (3), (1), (4), получим

$$J_z = 2m_1 d^2 - (2m_1 + m_2)\left(\frac{2m_1}{2m_1 + m_2}\right)^2 d^2 \cos^2\frac{\alpha}{2},$$

или после преобразований

$$J_z = 2m_1 d^2 \left(1 - \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right). \tag{5}$$

Найдем в табл. 23 относительные атомные массы кислорода ($A_O = 16$) и азота ($A_N = 14$) и запишем массы атомов этих элементов в атомных единицах массы (а.е.м.), а затем выразим в килограммах (1 а.е.м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, см. табл. 9):

$$m_1 = 16 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 2{,}66 \cdot 10^{-26} \text{ кг};$$
$$m_2 = 14 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 2{,}32 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Значения m_1, m_2, d и α подставим в формулу (5)[8]) и произведем вычисления:

$$J_z = 6{,}80 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Пример 2. Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 1$ м и массой $m_1 = 1$ кг с прикрепленным к одному из его концов диском массой $m_2 = 0{,}5m_1$. Определить момент инерции J_z такого маятника относительно оси Oz, проходящей через точку O на стержне перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 3.2).

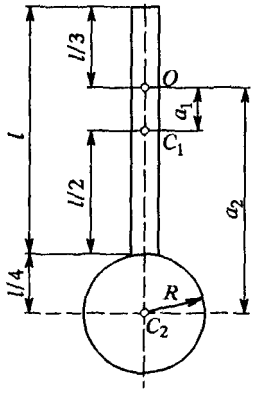


Рис. 3.2

Решение. Общий момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_{z_1} и диска J_{z_2}:

$$J_z = J_{z_1} + J_{z_2}. \qquad (6)$$

Формулы, по которым вычисляются моменты инерции стержня J_1 и диска J_2 относительно осей, проходящих через их центры масс, даны в табл. на с. 51. Чтобы определить моменты инерции J_{z_1} и J_{z_2}, надо воспользоваться теоремой Штейнера

$$J = J_C + ma^2. \qquad (7)$$

Выразим момент инерции стержня согласно формуле (7):

$$J_{z_1} = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1 a_1^2.$$

Расстояние a_1 между осью Oz и параллельной ей осью, проходящей через центр масс C_1 стержня, как следует из рис. 3.2, равно $l/2 - l/3 = l/6$. С учетом этого запишем

$$J_{z_1} = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1 \left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{m_1 l^2}{9} = 0{,}111 m_1 l^2.$$

Момент инерции диска в соответствии с формулой (7) равен

$$J_{z_2} = \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 a_2^2,$$

где R — радиус диска; $R = l/4$. Расстояние a_2 между осью Oz и параллельной ей осью, проходящей через центр масс диска, равно (рис. 3.2) $2l/3 + l/4 = 11l/12$. С учетом этого запишем

$$J_{z_2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_2 \left(\frac{11l}{12}\right)^2 = 0{,}0312 m_2 l^2 + 0{,}840 m_2 l^2 = 0{,}871 m_2 l^2.$$

[8]) Для вычисления выражения, стоящего в скобках, вместо масс атомов можно подставить их относительные атомные массы, так как здесь массы входят в виде отношения.

Подставив полученные выражения J_{z_1} и J_{z_2} в формулу (6), найдем

$$J_z = 0{,}111 m_1 l^2 + 0{,}871 m_2 l^2 = (0{,}111 m_1 + 0{,}871 m_2) l^2,$$

или, учитывая, что $m_2 = 0{,}5 m_1$,

$$J_z = 0{,}547 m_1 l^2.$$

Произведя вычисления, получим значение момента инерции физического маятника относительно оси Oz:

$$J_z = 0{,}547 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Пример 3. Вал в виде сплошного цилиндра массой $m_1 = 10$ кг насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой $m_2 = 2$ кг (рис. 3.3). С каким ускорением a будет опускаться гиря, если ее предоставить самой себе?

Решение. Линейное ускорение a гири равно тангенциальному ускорению точек вала, лежащих на его цилиндрической поверхности, и связано с угловым ускорением ε вала соотношением

$$a = \varepsilon r, \tag{8}$$

где r — радиус вала.

Угловое ускорение вала выражается основным уравнением динамики вращающегося тела

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \tag{9}$$

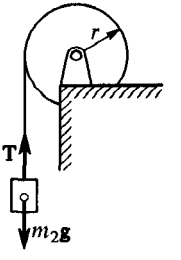


Рис. 3.3

где M — вращающий момент, действующий на вал; J — момент инерции вала. Рассматриваем вал как однородный цилиндр. Тогда его момент инерции относительно геометрической оси равен

$$J = \frac{m_1 r^2}{2}.$$

Вращающий момент M, действующий на вал, равен произведению силы натяжения $\mathbf{T}$ шнура на радиус вала: $M = Tr$.

Силу натяжения шнура найдем из следующих соображений. На гирю действуют две силы: сила тяжести $m_2\mathbf{g}$, направленная вниз, и сила натяжения $\mathbf{T}$ шнура, направленная вверх. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение гири. По второму закону Ньютона, $m_2 g - T = m_2 a$, откуда $T = m_2(g - a)$. Таким образом, вращающий момент $M = m_2(g - a)r$.

Подставив в формулу (9) полученные выражения M и J, найдем угловое ускорение вала:

$$\varepsilon = \frac{m_2(g-a)r}{(1/2)m_1 r^2} = \frac{2m_2(g-a)}{m_1 r}.$$

Для определения линейного ускорения гири подставим выражение ε в формулу (8). Получим $a = 2m_2(g - a)/m_1$, откуда

$$a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2{,}80 \text{ м/с}^2.$$

Пример 4. Через блок в виде диска, имеющий массу $m = 80$ г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г (рис. 3.4). С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Решение. Применим к решению задачи основные законы поступательного и вращательного движения. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная вниз, и сила $\mathbf{T}$ натяжения нити, направленная вверх. Так как вектор ускорения $\mathbf{a}$ груза m_1 направлен вверх, то $T_1 > m_1 g$. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение и, по второму закону Ньютона, равна $T_1 - m_1 g = m_1 a$, откуда

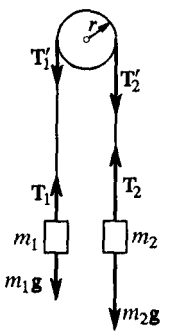


Рис. 3.4

$$T_1 = m_1 g + m_1 a. \tag{10}$$

Вектор ускорения $\mathbf{a}$ груза m_2 направлен вниз; следовательно, $T_2 < m_2 g$. Запишем формулу второго закона для этого груза: $m_2 g - T_2 = m_2 a$, откуда

$$T_2 = m_2 g - m_2 a. \tag{11}$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент M, приложенный к диску, равен произведению момента инерции J диска на его угловое ускорение ε:

$$M = J\varepsilon. \tag{12}$$

Определим вращающий момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона силы T_1' и T_2', приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2, но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке; следовательно, $T_2' > T_1'$. Вращающий момент, приложенный к диску, равен произведению разности этих сил на плечо, равное радиусу диска, т. е. $M = (T_2' - T_1')r$. Момент инерции диска $J = mr^2/2$, угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов соотношением $\varepsilon = a/r$. Подставив в формулу (12) выражения M, J и ε, получим

$$(T_2' - T_1')r = \frac{mr^2}{2}\frac{a}{r},$$

откуда

$$T_2' - T_1' = \frac{m}{2} a.$$

Так как $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$, то можно заменить силы T_1' и T_2' выражениями по формулам (10) и (11), тогда

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{m}{2} a,$$

или

$$(m_2 - m_1) g = \left(m_2 + m_1 + \frac{m}{2}\right) a,$$

откуда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g. \tag{13}$$

Отношение масс в правой части формулы (13) есть величина безразмерная. Поэтому значения масс m_1, m_2 и m можно выразить в граммах, как они даны в условии задачи. После подстановки получим

$$a = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}04} 9{,}81 \text{ м/с}^2 = 2{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Пример 5. Маховик в виде диска массой $m = 50$ кг и радиусом $r = 20$ см был раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ мин$^{-1}$ и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Найти момент M сил трения, считая его постоянным для двух случаев: 1) маховик остановился через $t = 50$ с; 2) маховик до полной остановки сделал $N = 200$ оборотов.

Решение. 1. По второму закону динамики вращательного движения изменение момента импульса вращающегося тела равно произведению момента силы, действующего на тело, на время действия этой силы:

$$M \Delta t = J\omega_2 - J\omega_1,$$

где J — момент инерции маховика; ω_1 и ω_2 — начальная и конечная угловые скорости. Так как $\omega_2 = 0$ и $\Delta t = t$, то $Mt = -J\omega_1$, откуда

$$M = -\frac{J\omega_1}{t}. \tag{14}$$

Момент инерции диска относительно его геометрической оси равен $J = mr^2/2$. Подставив это выражение в формулу (14), найдем

$$M = -\frac{mr^2\omega_1}{2t}. \tag{15}$$

Выразив угловую скорость ω_1 через частоту вращения n_1 и произведя вычисления по формуле (15), найдем

$$M = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. В условии задачи дано число оборотов, сделанных маховиком до остановки, т. е. его угловое перемещение. Поэтому применим формулу, выражающую связь работы с изменением кинетической энергии:

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2},$$

или, учтя, что $\omega_2 = 0$,

$$A = -\frac{J\omega_1^2}{2}. \tag{16}$$

Работа при вращательном движении определяется по формуле $A = M\varphi$. Подставив выражения работы и момента инерции диска в формулу (16), получим

$$M\varphi = -\frac{mr^2\omega_1^2}{4}.$$

Отсюда момент силы трения

$$M = -\frac{mr^2\omega_1^2}{4\varphi}. \tag{17}$$

Угол поворота $\varphi = 2\pi N = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 200 = 1256$ рад. Произведя вычисления по формуле (17), получим

$$M = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что момент силы трения оказывает тормозящее действие.

Пример 6. Платформа в виде диска радиусом $R = 1{,}5$ м и массой $m_1 = 180$ кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n = 10\,\text{мин}^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение. По закону сохранения момента импульса,

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1 + J_2')\omega', \tag{18}$$

где J_1 — момент инерции платформы; J_2 — момент инерции человека, стоящего в центре платформы; ω — угловая скорость платформы с человеком, стоящим в ее центре; J_2' — момент инерции человека, стоящего на краю платформы; ω' — угловая скорость платформы с человеком, стоящим на ее краю.

Линейная скорость человека, стоящего на краю платформы, связана с угловой скоростью соотношением

$$v = \omega' R. \tag{19}$$

Определив ω' из уравнения (18) и подставив полученное выражение в формулу (19), будем иметь

$$v = \frac{(J_1 + J_2)\omega R}{J_1 + J_2'}. \qquad (20)$$

Момент инерции платформы рассчитываем, как для диска; следовательно, $J_1 = m_1 R^2/2$. Момент инерции человека рассчитываем, как для материальной точки. Поэтому $J_2 = 0$, $J_2' = m_2 R^2$. Угловая скорость платформы до перехода человека равна $\omega = 2\pi n$.

Заменив в формуле (20) величины J_1, J_2, J_2' и ω их выражениями, получим

$$v = \frac{m_1 R^2/2}{m_1 R^2/2 + m_2 R^2} 2\pi n R = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} 2\pi n R.$$

Сделав подстановку значений m_1, m_2, n, R и π, найдем линейную скорость человека:

$$v = \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{10}{60} \cdot 1{,}5 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = 0{,}942 \text{ м/с}.$$

Пример 7. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения $n_1 = 0{,}5\,\text{с}^{-1}$. Момент инерции J_0 тела человека относительно оси вращения равен $1{,}6\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

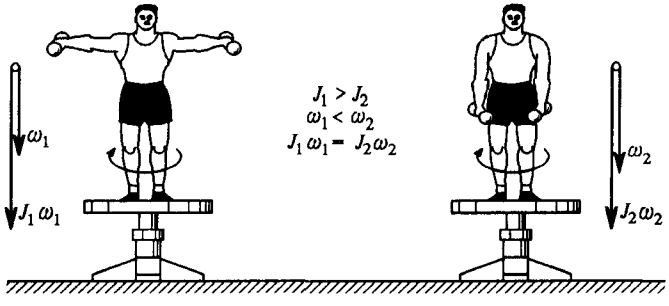


Рис. 3.5

В вытянутых в стороны руках человек держит по гире массой $m = 2\,\text{кг}$ каждая. Расстояние между гирями $l_1 = 1{,}6\,\text{м}$. Определить частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние l_2 между гирями станет равным $0{,}4\,\text{м}$. Моментом инерции скамьи пренебречь.

Решение. Человек, держащий гири (рис. 3.5), составляет вместе со скамьей замкнутую механическую систему [9]), поэтому момент импульса

[9]) Предполагается, что моменты всех внешних сил (сил тяжести и сил реакции), действующих на эту систему по отношению к оси вращения, являются уравновешенными. Трением пренебречь.

$J\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение. Следовательно, для данного случая

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и ω_1 — момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с вытянутыми руками; J_2 и ω_2 — момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с опущенными руками. Отсюда

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1.$$

Выразив в этом уравнении угловые скорости ω_1 и ω_2 через частоты вращения n_1 и n_2 ($\omega = 2\pi n$) и сократив на 2π, получим

$$n_2 = \frac{J_1}{J_2}n_1. \tag{21}$$

Момент инерции системы, рассматриваемой в данной задаче, равен сумме момента инерции тела человека J_0 и момента инерции гирь в руках человека. Так как размер гирь много меньше расстояния их от оси вращения, то момент инерции гирь можно определить по формуле момента инерции материальной точки: $J = mr^2$. Следовательно[10]),

$$J_1 = J_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2; \quad J_2 = J_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2,$$

где m — масса каждой из гирь; l_1 и l_2 — первоначальное и конечное расстояния между гирями. Подставив выражения J_1 и J_2 в уравнение (21), получим

$$n_2 = \frac{J_0 + 2m(l_1/2)^2}{J_0 + 2m(l_2/2)^2}n_1. \tag{22}$$

Выполнив вычисления по формуле (22), найдем

$$n_2 = 1{,}18\ \text{с}^{-1}.$$

Пример 8. Стержень длиной $l = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рис. 3.6). В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 500$ м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Решение. Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

[10]) В действительности с изменением положения рук человека (без гирь) изменяется момент инерции его тела относительно оси вращения, однако ввиду сложности учета этого изменения будем считать момент инерции J_0 тела человека постоянным.

Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (23)$$

где J — момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на искомый угол φ, причем центр масс его поднимается на высоту $h = (l/2) \times \times (1 - \cos\varphi)$. В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$\Pi = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi). \qquad (24)$$

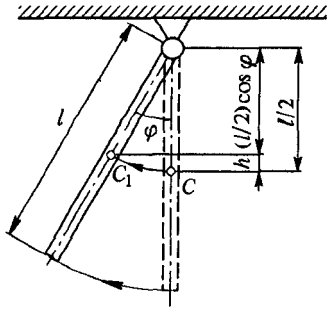


Рис. 3.6

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии. Приравняв правые части равенств (23) и (24), получим

$$Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Отсюда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}.$$

Подставив в эту формулу выражение для момента инерции стержня $J = = Ml^2/3$, получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}. \qquad (25)$$

Чтобы из выражения (25) найти φ, необходимо предварительно определить значение ω. В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси. Начальный момент импульса пули $L_{02} = mv_0 r$, где r — расстояние точки попадания от оси вращения. В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля — линейную скорость v, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $v = \omega r$, то конечный момент импульса пули $L_2 = mvr = mr^2\omega$.

Применив закон сохранения импульса, можем написать

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2, \quad \text{или} \quad mv_0 r = J\omega + mr^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{mv_0 r}{J + mr^2}, \tag{26}$$

где $J = Ml^2/3$ — момент инерции системы стержень–пуля.

Если учесть, что в (26) $mr^2 \ll J = Ml^2/3$, а также, что $r = l/2$, то после несложных преобразований получим

$$\omega = \frac{3mv_0}{2Ml}. \tag{27}$$

Подставив числовые значения величин в (27), найдем

$$\omega = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 500}{2 \cdot 10 \cdot 1{,}5} \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = 0{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

По (25) получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1{,}5(0{,}5)^2}{3 \cdot 9{,}81} = 0{,}987, \quad \varphi = 9°20'.$$

ЗАДАЧИ

Момент инерции

3.1. Определить момент инерции J материальной точки массой $m = 0,3$ кг относительно оси, отстоящей от точки на $r = 20$ см.

3.2. Два маленьких шарика массой $m = 10$ г каждый скреплены тонким невесомым стержнем длиной $l = 20$ см. Определить момент инерции J системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс.

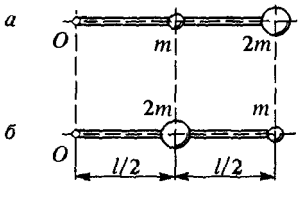


Рис. 3.7

3.3. Два шара массами m и $2m$ ($m = 10$ г) закреплены на тонком невесомом стержне длиной $l = 40$ см так, как это указано на рис. 3.7*а*, *б*. Определить моменты инерции J системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец в этих двух случаях. Размерами шаров пренебречь.

3.4. Три маленьких шарика массой $m = 10$ г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной

$a = 20$ см и скреплены между собой. Определить момент инерции J системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин треугольника. Массой стержней, соединяющих шары, пренебречь.

3.5. Определить моменты инерции J_x, J_y, J_z трехатомных молекул типа AB_2 относительно осей x, y, z (рис. 3.8), проходящих через центр инерции C молекулы (ось z перпендикулярна плоскости xy). Межъядерное расстояние AB обозначено d, валентный угол α. Вычисления выполнить для следующих молекул: 1) H_2O ($d = 0{,}097$ нм, $\alpha = 104°30'$); 2) SO_2 ($d = 0{,}145$ нм, $\alpha = 124°$).

3.6. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l = 30$ см и массой $m = 100$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) его середину; 3) точку, отстоящую от конца стержня на $1/3$ его длины.

3.7. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l = 60$ см и массой $m = 100$ г относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через точку стержня, удаленную на $a = 20$ см от одного из его концов.

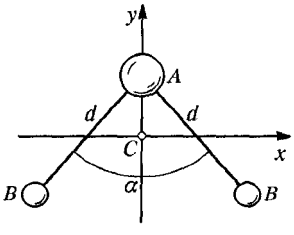


Рис. 3.8

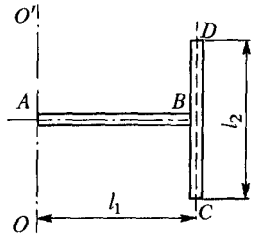


Рис. 3.9

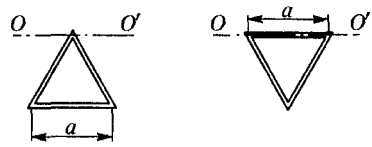
3.8. Вычислить момент инерции J проволочного прямоугольника со сторонами $a = 12$ см и $b = 16$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон. Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью $\tau = 0{,}1$ кг/м.

3.9. Два однородных тонких стержня: AB длиной $l_1 = 40$ см и массой $m_1 = 900$ г и CD длиной $l_2 = 40$ см и массой $m_2 = 400$ г скреплены под прямым углом (рис. 3.9). Определить момент инерции J системы стержней относительно оси OO', проходящей через конец стержня AB параллельно стержню CD.

3.10. Решить предыдущую задачу для случая, когда ось OO' проходит через точку A перпендикулярно плоскости чертежа.

3.11. Определить момент инерции J проволочного равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см относительно: 1) оси, ле-

жащей в плоскости треугольника и проходящей через его вершину параллельно стороне, противоположной этой вершине (рис. 3.10*а*);



а *б*

Рис. 3.10

2) оси, совпадающей с одной из сторон треугольника (рис. 3.10*б*). Масса m треугольника равна 12 г и равномерно распределена по длине проволоки.

3.12. На концах тонкого однородного стержня длиной l и массой $3m$ прикреплены маленькие шарики массами m и $2m$. Определить момент инерции J такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку O, лежащую на оси стержня. Вычисления выполнить для случаев *а–д*, изображенных на рис. 3.11. При расчетах принять $l = 1$ м, $m = 0{,}1$ кг. Шарики рассматривать как материальные точки.

3.13. Найти момент инерции J тонкого однородного кольца радиусом $R = 20$ см и массой $m = 100$ г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

3.14. Определить момент инерции J кольца массой $m = 50$ г и радиусом $R = 10$ см относительно оси, касательной к кольцу.

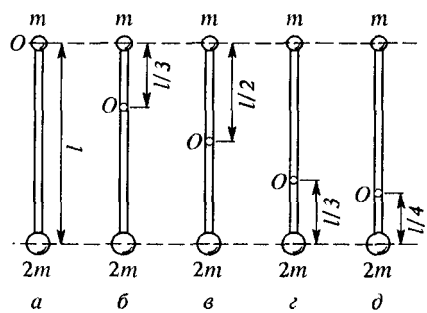


Рис. 3.11

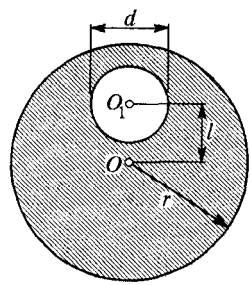


Рис. 3.12

3.15. Диаметр диска $d = 20$ см, масса $m = 800$ г. Определить момент инерции J диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска.

3.16. В однородном диске массой $m = 1$ кг и радиусом $r = 30$ см вырезано круглое отверстие диаметром $d = 20$ см, центр которого находится на расстоянии $l = 15$ см от оси диска (рис. 3.12). Найти момент инерции J полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

3.17. Найти момент инерции J плоской однородной прямоугольной пластины массой $m = 800$ г относительно оси, совпадающей с одной из ее сторон, если длина a другой стороны равна 40 см.

3.18. Определить момент инерции J тонкой плоской пластины со сторонами $a = 10$ см и $b = 20$ см относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно большей стороне. Масса пластины равномерно распределена по ее площади с поверхностной плотностью $\sigma = 1{,}2$ кг/м^2.

Основное уравнение динамики вращательного движения

3.19. Тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O на стержне (рис. 3.13). Стержень отклонили от вертикали на угол α и отпустили. Определить для начального момента времени угловое ε и тангенциальное a_τ ускорения точки B на стержне. Вычисления произвести для следующих случаев: 1) $a = 0$, $b = 2l/3$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = l/3$, $b = l$, $\alpha = \pi/3$; 3) $a = l/4$, $b = l/2$, $\alpha = 2\pi/3$.

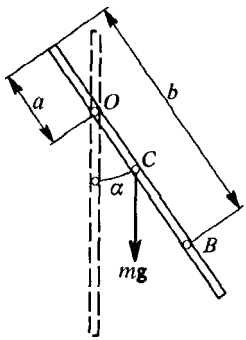


Рис. 3.13

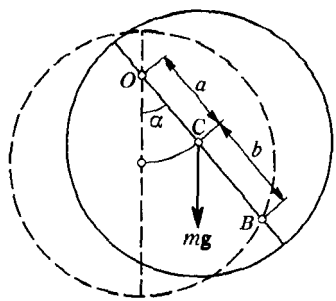


Рис. 3.14

3.20. Однородный диск радиусом $R = 10$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O на нем (рис. 3.14). Диск отклонили на угол α и отпустили. Определить для начального момента времени угловое ε и тангенциальное a_τ ускорения точки B, находящейся на диске. Вычисления выполнить для следующих случаев: 1) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$; 3) $a = 2R/3$, $b = 2R/3$, $\alpha = 2\pi/3$.

3.21. Тонкий однородный стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

3.22. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом $R = 5$ см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0{,}4$ кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел

путь $s = 1{,}8$ м за время $t = 3$ с. Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

3.23. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой $n = 8\,\text{с}^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через $t = 10$ с. Определить коэффициент трения μ.

3.24. На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение a оси цилиндра, если цилиндр: 1) сплошной; 2) полый тонкостенный.

3.25. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой $m_1 = 100$ г и $m_2 = 110$ г. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса m блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

3.26. Два тела массами $m_1 = 0{,}25$ кг и $m_2 = 0{,}15$ кг связаны тонкой нитью, переброшенной через блок (рис. 3.15). Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. С каким ускорением a движутся тела и каковы силы T_1 и T_2 натяжения нити по обе стороны от блока? Коэффициент трения μ тела о поверхность стола равен 0,2. Масса m блока равна 0,1 кг и ее можно считать равномерно распределенной по ободу. Массой нити и трением в подшипниках оси блока пренебречь.

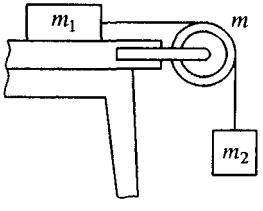


Рис. 3.15

3.27. Через неподвижный блок массой $m = 0{,}2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

3.28. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 4\,\text{рад/с}^2$, $C = -1\,\text{рад/с}^3$. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M в момент времени $t = 2$ с.

Закон сохранения момента импульса

3.29. Однородный тонкий стержень массой $m_1 = 0{,}2$ кг и длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, проходящей через точку O (рис. 3.16). В точку A на стержне попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпенди-

кулярно оси z) со скоростью $v = 10$ м/с и прилипает к стержню. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω стержня и линейную скорость u нижнего конца стержня в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений расстояния между точками A и O: 1) $l/2$; 2) $l/3$; 3) $l/4$.

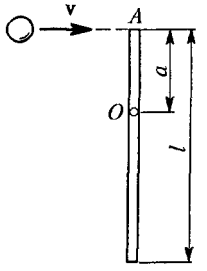


Рис. 3.16

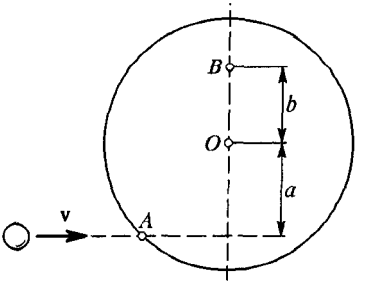


Рис. 3.17

3.30. Однородный диск массой $m_1 = 0{,}2$ кг и радиусом $R = 20$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O (рис. 3.17). В точку A на образующей диска попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси z) со скоростью $v = 10$ м/с, и прилипает к его поверхности. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω диска и линейную скорость u точки B на диске в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений a и b: 1) $a = b = R$; 2) $a = R/2$, $b = R$; 3) $a = 2R/3$, $b = R/2$; 4) $a = R/3$, $b = 2R/3$.

3.31. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой $m = 0{,}4$ кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии $r = 0{,}8$ м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

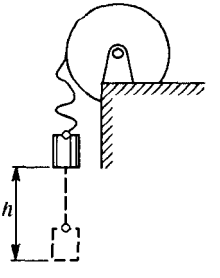


Рис. 3.18

3.32. Маховик, имеющий вид диска радиусом $R = 40$ см и массой $m_1 = 48$ кг, может вращаться вокруг горизонтальной оси. К его цилиндрической поверхности прикреплен конец нерастяжимой нити, к другому концу которой подвешен груз массой $m_2 = 0{,}2$ кг (рис. 3.18). Груз был приподнят и затем опущен. Упав свободно с высоты $h = 2$ м, груз натянул нить и благодаря этому привел маховик во вращение. Какую угловую скорость ω груз сообщил при этом маховику?

3.33. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ м, стоит человек массой $m_1 = 80$ кг. Масса m_2 платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы.

3.34. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой $m_1 = 60$ кг. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса m_2 платформы равна 240 кг. Момент инерции J человека рассчитывать, как для материальной точки.

3.35. Платформа в виде диска радиусом $R = 1$ м вращается по инерции с частотой $n_1 = 6$ мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса m которого равна 80 кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции J платформы равен 120 кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать, как для материальной точки.

3.36. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной $l = 2{,}4$ м и массой $m = 8$ кг, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2.

3.37. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамьи. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $n = 10$ с$^{-1}$. Радиус R колеса равен 20 см, его масса $m = 3$ кг. Определить частоту вращения n_2 скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°? Суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по ободу.

Работа и энергия

3.38. Шарик массой $m = 100$ г, привязанный к концу нити длиной $l_1 = 1$ м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. Нить укорачивается и шарик приближается к оси вращения до расстояния $l_2 = 0{,}5$ м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершит внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

3.39. Маховик вращается по закону, выраженному уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2$ рад, $B = 32$ рад/с, $C = -4$ рад/с^2. Найти среднюю мощность $\langle N \rangle$, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки, если его момент инерции $J = 100$ кг·м^2.

3.40. Маховик вращается по закону, выраженному уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2$ рад, $B = 16$ рад/с, $C = -2$ рад/с^2. Момент инерции J маховика равен 50 кг·м^2. Найти законы, по которым меняются вращающий момент M и мощность N. Чему равна мощность в момент времени $t = 3$ с?

3.41. Якорь двигателя вращается с частотой $n = 1500$ мин$^{-1}$. Определить вращающий момент M, если двигатель развивает мощность $N = 500$ Вт.

3.42. Со шкива диаметром $d = 0{,}48$ м через ремень передается мощность $N = 9$ кВт. Шкив вращается с частотой $n = 240$ мин$^{-1}$. Сила натяжения T_1 ведущей ветви ремня в два раза больше силы натяжения T_2 ведомой ветви. Найти силы натяжения обеих ветвей ремня.

3.43. Для определения мощности двигателя на его шкив диаметром $d = 20$ см накинули ленту. К одному концу ленты прикреплен динамометр, к другому подвесили груз. Найти мощность N двигателя, вращающего с частотой $n = 24$ с$^{-1}$. Масса m груза равна 1 кг и показание динамометра $F = 24$ Н.

3.44. Маховик в виде диска массой $m = 80$ кг и радиусом $R = 30$ см находится в состоянии покоя. Какую работу A_1 нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту $n = 10$ с$^{-1}$? Какую работу A_2 пришлось бы совершить, если бы при той же массе диск имел меньшую толщину, но вдвое больший радиус?

3.45. Кинетическая энергия T вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 80$ оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

3.46. Маховик, момент инерции J которого равен 40 кг·м^2, начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы $M = 20$ Н·м. Вращение продолжалось в течение $t = 10$ с. Определить кинетическую энергию T, приобретенную маховиком.

3.47. Пуля массой $m = 10$ г летит со скоростью $v = 800$ м/с, вращаясь около продольной оси с частотой $n = 3000$ с$^{-1}$. Принимая пулю за цилиндрик диаметром $d = 8$ мм, определить полную кинетическую энергию T пули.

3.48. Сплошной цилиндр массой $m = 4$ кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость v оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию T цилиндра.

3.49. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу $m = 2$ кг, катятся без скольжения с одинаковой скоростью $v = 5$ м/с. Найти кинетические энергии T_1 и T_2 этих тел.

3.50. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия T шара равна 14 Дж. Определить кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движения шара.

3.51. Определить линейную скорость v центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 1$ м.

3.52. Сколько времени t будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной $l = 2$ м и высотой $h = 10$ см?

3.53. Тонкий прямой стержень длиной $l = 1$ м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $\varphi = 60°$ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

3.54. Однородный тонкий стержень длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, проходящей через точку O на стержне. Стержень отклонили от положения равновесия на угол α и отпустили (см. рис. 3.13). Определить угловую скорость ω стержня и линейную скорость v точки B на стержне в момент прохождения им положения равновесия. Вычисления выполнить для следующих случаев: 1) $a = 0$, $b = l/2$, $\alpha = \pi/3$; 2) $a = l/3$, $b = 2l/3$, $\alpha = \pi/2$; 3) $a = l/4$, $b = l$, $\alpha = 2\pi/3$.

3.55. Карандаш длиной $l = 15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую ω и линейную v скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша? 2) верхний его конец? Считать, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

3.56. Однородный диск радиусом $R = 20$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O (см. рис. 3.14). Определить угловую ω и линейную v скорости точки B на диске в момент прохождения им положения равновесия. Вычисления выполнить для следующих случаев: 1) $a = b = R$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = R/2$, $b = 0$, $\alpha = \pi/3$; 3) $a = 2R/3$, $b = 2R/3$, $\alpha = 5\pi/6$; 4) $a = R/3$, $b = R$, $\alpha = 2\pi/3$.

3.57*. Атом гелия налетает на покоящуюся молекулу азота со скоростью $v = 10^3$ м/с так, как это изображено на рис. 3.19 (m_1 — масса атома гелия, m_2 — масса атома азота). Определить непосредственно после столкновения: 1) скорость u_1, импульс p'_1 и изменение Δp_1 импульса атома гелия; 2) скорость v_C центра масс, импульс p'_2, угловую скорость ω вращения и момент импульса L_z молекулы азота относительно оси z, проходящей через ее центр масс (C). Удар между атомами считать упругим. Атомы рассма-

тривать как материальные точки, молекулу как жесткий ротатор. Межъядерное расстояние $d = 0{,}109$ нм.

3.58*. Атом неона, кинетическая энергия T_1 которого равна $5 \times \times 10^{-21}$ Дж, налетает на покоящуюся молекулу кислорода так, как это изображено на рис. 3.20 (m_1 — масса атома неона, m_2 — масса

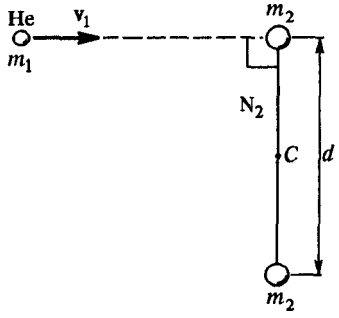


Рис. 3.19

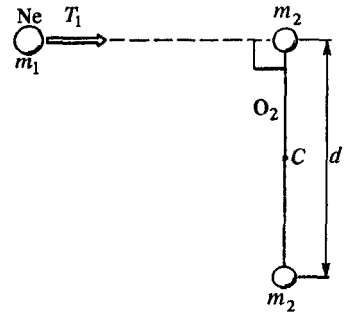


Рис. 3.20

атома кислорода). Определить непосредственно после столкновения: 1) импульс p_1', кинетическую энергию T_1' и изменение кинетической энергии ΔT_1 атома неона; 2) скорость v_C центра масс, импульс p_2', кинетические энергии $T'_{2\text{пост}}$ поступательного и $T'_{2\text{вр}}$ вращательного движения молекулы кислорода, а также ее угловую скорость ω и момент импульса L_z относительно оси z, проходящей через центр масс C молекулы. Удар между атомами считать упругим. Атомы рассматривать как материальные точки, молекулу как жесткий ротатор. Межъядерное расстояние $d = 0{,}121$ нм.

Центр масс

3.59*. На рис. 3.21 изображен тонкий однородный стержень, на концах которого прикреплены маленькие шарики. Массы стержня

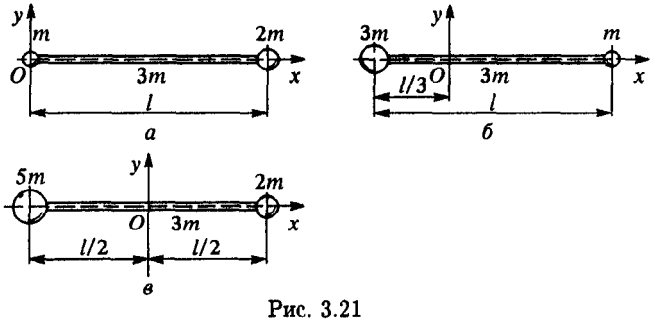


Рис. 3.21

и шариков указаны на рисунке. Определить координату X_C центра масс такой системы в случаях *а*, *б* и *в*. Длину l стержня

принять во всех случаях равной 1,2 м. Шарики рассматривать как материальные точки.

3.60*. Трехатомная молекула состоит из двух одинаковых атомов массой m_1 и одного атома массой m_2. Межъядерное расстояние d и валентный угол α считать известными (рис. 3.22). Определить координаты X_C и Y_C центра масс молекулы. Расчеты выполнить для молекул: 1) H_2O ($d = 95{,}8$ пм; $\alpha = 104°$); 2) SO_2 ($d = 143$ пм; $\alpha = 118°$).

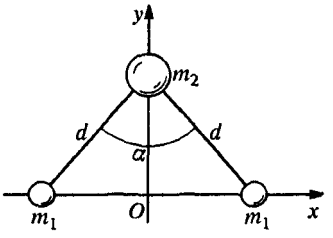


Рис. 3.22

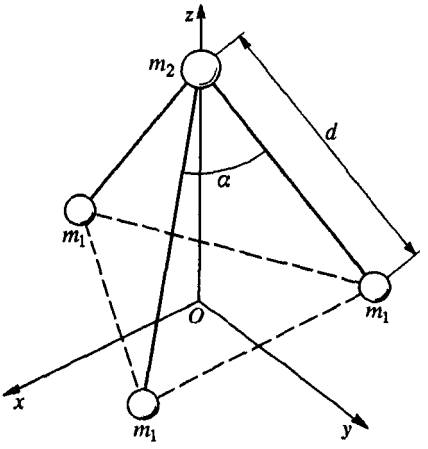


Рис. 3.23

3.61*. На рис. 3.23 изображена четырехатомная молекула, имеющая форму тригональной симметричной пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник. Начало координат совмещено с центром этого треугольника. Массы m_1 и m_2 атомов, межъядерное расстояние d и валентный угол α считать извест-

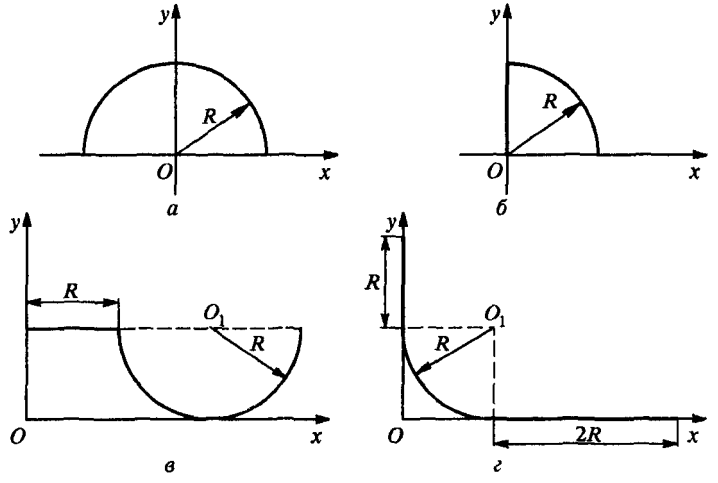


Рис. 3.24

ными. Определить координату Z_C центра масс молекулы. Расчеты выполнить для молекул: 1) NH_3 ($d = 101$ пм, $\alpha = 106°$); 2) PCl_3 ($d = 204$ пм, $\alpha = 100°$); 3) PH_3 ($d = 144$ пм, $\alpha = 94°$).

3.62*. Тонкую однородную проволоку изогнули так, как это изображено на рис. 3.24. Определить координаты X_C и Y_C центра масс для каждого случая (*а*, *б*, *в*, *г*). При расчетах принять $R = 10$ см.

3.63*. Из плоской, тонкой, однородной пластины вырезали фигуры, изображенные на рис. 3.25. Определить координаты X_C и

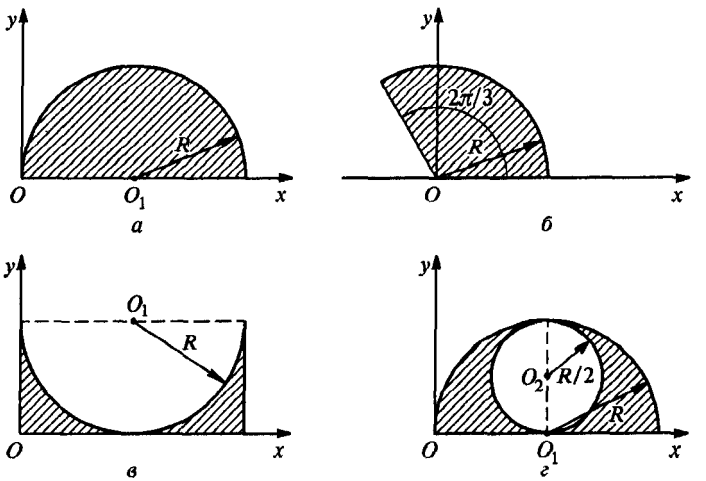


Рис. 3.25

Y_C центра масс для каждой фигуры (*а*, *б*, *в*, *г*). При расчетах принять $R = 10$ см.

§ 4. Силы в механике

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

- Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F — сила взаимного притяжения двух материальных точек; m_1 и m_2 — их массы; r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная.

В написанной форме закон всемирного тяготения можно применять и к взаимодействию шаров, масса которых распределена сферически-симметрично. В этом случае r есть расстояние между центрами масс шаров.

• Напряженность гравитационного поля

$$g = \frac{F}{m},$$

где F — сила тяготения, действующая на материальную точку массы m, помещенную в некоторую точку поля.

• Напряженность гравитационного поля, создаваемого планетой, массу M которой можно считать распределенной сферически-симметрично,

$$g = G\frac{M}{r^2},$$

где r — расстояние от центра планеты до интересующей нас точки поля, находящейся вне планеты.

• Ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью Земли

$$g_h = \frac{g}{(1 + h/R)^2},$$

где R — радиус Земли; g — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Если $h \ll R$, то

$$g_h \approx \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g.$$

• Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2 (шаров с массой, распределенной сферически-симметрично), находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

(Потенциальную энергию бесконечно удаленных друг от друга материальных точек принято считать равной нулю.)

• Потенциал гравитационного поля

$$\varphi = \frac{\Pi}{m},$$

где Π — потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

• Потенциал гравитационного поля, создаваемого планетой, массу M которой можно считать распределенной сферически-симметрично,

$$\varphi = -G\frac{M}{r},$$

где r — расстояние от центра планеты до интересующей нас точки поля, находящейся вне планеты.

• *Законы Кеплера*:

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус-вектор планеты, проведенный из Солнца, в равные времена описывает одинаковые площади.

3. Квадраты периодов обращения любых двух планет относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Законы Кеплера справедливы также для движения спутников вокруг планеты.

• Относительная деформация при продольном растяжении или сжатии тела

$$\varepsilon = \frac{x}{l},$$

где ε — относительное удлинение (сжатие); x — абсолютное удлинение (рис. 4.1); l — начальная длина тела.

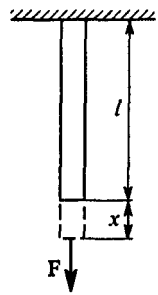


Рис. 4.1

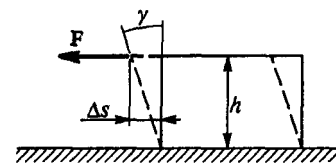


Рис. 4.2

Относительная деформация при сдвиге определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta s}{h},$$

где $\operatorname{tg}\gamma$ — относительный сдвиг; Δs — абсолютный сдвиг параллельных слоев тела относительно друг друга (рис. 4.2); h — расстояние между слоями; γ — угол сдвига. (Для малых углов $\operatorname{tg}\gamma = \gamma = \Delta s/h$.)

• Напряжение нормальное

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S},$$

где $F_{\text{упр}}$ — упругая сила, перпендикулярная поперечному сечению тела; S — площадь этого сечения.

Напряжение тангенциальное

$$\tau = \frac{F_{\text{упр}}}{S},$$

где $F_{\text{упр}}$ — упругая сила, действующая вдоль слоя тела; S — площадь этого слоя.

• Закон Гука для продольного растяжения или сжатия

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad \text{или} \quad \sigma = \varepsilon E,$$

где k — коэффициент упругости (в случае пружины — жесткость); E — модуль Юнга.

Закон Гука для сдвига

$$\Delta s = \frac{Fh}{GS}, \quad \text{или} \quad \tau = G\gamma,$$

где G — модуль поперечной упругости (модуль сдвига).

• Момент, закручивающий на угол φ однородный круглый стержень,

$$M = C\varphi,$$

где C — постоянная кручения.

• Работа, совершаемая при деформации тела,

$$A = \frac{kx^2}{2}.$$

• Потенциальная энергия растянутого или сжатого стержня

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}, \quad \text{или} \quad \Pi = \frac{\sigma^2}{2E}V, \quad \text{или} \quad \Pi = \frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V — объем тела.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить вторую космическую скорость v_{II} ракеты, запущенной с поверхности Земли.

Примечание. Второй космической (или параболической) скоростью v_{II} называется минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно удалилось с поверхности Земли в бесконечность (при этом сопротивление воздуха в расчет не принимается и предполагается, что на тело действует только поле тяготения Земли).

Решение. При удалении тела массой m в бесконечность его потенциальная энергия возрастает за счет убыли кинетической энергии и в бесконечности достигает максимального значения, равного нулю. Согласно определению второй космической скорости, кинетическая энергия в бесконечности также равна нулю. Таким образом, в бесконечности $T_\infty = 0$ и $\Pi_\infty = 0$. В соответствии с законом сохранения энергии в механике

$$T + \Pi = T_\infty + \Pi_\infty, \quad \text{или} \quad \frac{mv_{\text{II}}^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0,$$

где M — масса Земли. Отсюда находим $v_{\text{II}} = \sqrt{2GM/R}$. Преобразуем эту формулу, умножив и разделив подкоренное выражение на R: $v_{\text{II}} = \sqrt{(2GM/R^2)R}$.

Так как $GM/R^2 = g$ (где g — ускорение свободного падения у поверхности Земли), то

$$v_{II} = \sqrt{2gR}.$$

Подставив в эту формулу значения g и R и произведя вычисления, получим

$$v_{II} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Пример 2. Ракета установлена на поверхности Земли для запуска в вертикальном направлении. При какой минимальной скорости v_I, сообщенной ракете при запуске, она удалится от поверхности на расстояние, равное радиусу Земли ($R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м)? Силами, кроме силы гравитационного взаимодействия ракеты и Земли, пренебречь.

Решение. Чтобы определить минимальную скорость v_I ракеты, надо найти ее минимальную кинетическую энергию T_1. Для этого воспользуемся законом сохранения механической энергии. Этот закон выполняется для замкнутой системы тел, в которой действуют только консервативные силы.

Систему ракета–Земля можно считать замкнутой. Единственная сила, действующая на систему, — сила гравитационного взаимодействия, являющаяся консервативной.

В качестве системы отсчета выберем инерциальную систему отсчета, так как только в такой системе справедливы законы динамики и, в частности, законы сохранения. Известно, что система отсчета, связанная с центром масс замкнутой системы тел, является инерциальной. В рассматриваемом случае центр масс системы ракета–Земля будет практически совпадать с центром Земли, так как масса M Земли много больше массы m ракеты. Следовательно, систему отсчета, связанную с центром Земли, можно считать практически инерциальной. Согласно закону сохранения механической энергии, запишем

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \tag{1}$$

где T_1 и Π_1 — кинетическая и потенциальная энергия системы ракета–Земля в начальном состоянии (на поверхности Земли); T_2 и Π_2 — те же величины в конечном состоянии (на расстоянии, равном радиусу Земли).

В выбранной системе отсчета кинетическая энергия Земли равна нулю. Поэтому T_1 есть просто начальная кинетическая энергия ракеты: $T_1 = mv_I^2/2$. Потенциальная энергия системы в начальном состоянии[11]) $\Pi_1 = -GmM/R$. По мере удаления ракеты от поверхности Земли ее потенциальная энергия будет возрастать, а кинетическая — убывать. В конечном состоянии кинетическая энергия T_2 станет равной нулю, а потенциальная энергия Π_2 достигнет максимального значения: $\Pi_2 = -GmM/(2R)$.

Подставив значения T_1, Π_1, T_2 и Π_2 в выражение (1), получим

$$\frac{1}{2}mv_I^2 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2R},$$

[11]) Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел, бесконечно удаленных друг от друга, принимается равной нулю.

откуда после сокращения на m найдем

$$v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Заметив, что $GM/R^2 = g$ (g — ускорение свободного падения у поверхности Земли), перепишем эту формулу в виде

$$v_{\text{I}} = \sqrt{gR},$$

что совпадает с выражением для первой космической скорости (см. пример 1). Подставив числовые значения величин и произведя вычисления, получим

$$v_{\text{I}} = 7{,}9 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Пример 3. Найти выражение для потенциальной энергии П гравитационного взаимодействия Земли и тела массой m, находящегося на расстоянии r от центра Земли за пределами ее поверхности. Построить график $\Pi(r)$.

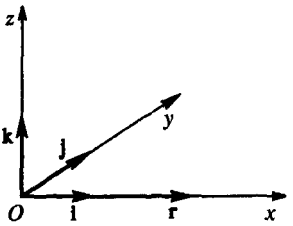


Рис. 4.3

Решение. Потенциальная энергия в поле консервативных сил (гравитационные силы консервативны) связана с силой следующим соотношением:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\Pi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей координат (орты); $\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}$ — частные производные потенциальной энергии по соответствующим координатам. В случае, когда поле сил обладает сферической симметрией, это выражение упрощается. Если ось x совместить с радиусом-вектором r, направленным по радиусу сферы, то $\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}$ обращаются в нуль и тогда $\mathbf{F} = -\mathbf{i}\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}$. Так как векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{i}$ совпадают (рис. 4.3) и П зависит только от r, то

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2}$$

Запишем в векторной форме закон всемирного тяготения:

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{3}$$

где G — гравитационная постоянная; M — масса Земли.

Сравнивая выражения (2) и (3), найдем $\dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}r} = G\dfrac{mM}{r^2}$, откуда

$$\mathrm{d}\Pi = G\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Взяв от этого равенства неопределенный интеграл, получим

$$\Pi = -G\frac{mM}{r} + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Полученное выражение показывает, что потенциальная энергия может быть определена лишь с точностью до некоторой произвольной постоянной.

1. Если принять потенциальную энергию бесконечно удаленных друг от друга тел равной нулю, то постоянная C обращается в нуль. В этом случае запишем

$$\Pi(r) = -G\frac{mM}{r}.$$

Соответствующая зависимость $\Pi(r)$ изображается графиком, представленным на рис. 4.4.

2. Если же принять потенциальную энергию равной нулю на поверхности Земли, то $\Pi(r) = -G\frac{mM}{R} + C = 0$, $C = G\frac{mM}{R}$ и тогда

$$\Pi(r) = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{r}.$$

Но так как $r = R + h$, где h — высота тела над поверхностью Земли, то

$$\Pi(h) = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)R}h.$$

Если $h \ll R$, то $\Pi(h) = G\frac{mM}{R^2}h$, или, так как $g = G\frac{M}{R^2}$, $\Pi(h) = mgh$.

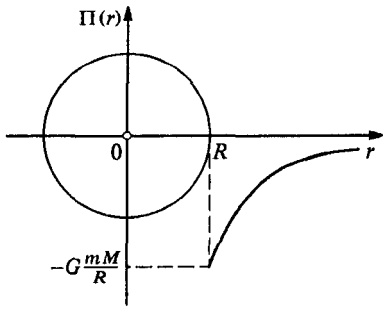


Рис. 4.4

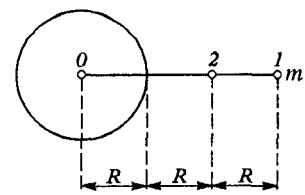


Рис. 4.5

Пример 4. В гравитационном поле Земли тело массой m перемещается из точки *1* в точку *2* (рис. 4.5). Определить скорость v_2 тела в точке *2*, если в точке *1* его скорость $v_1 = \sqrt{gR} = 7{,}9$ км/с. Ускорение свободного падения g считать известным.

Решение. Система тело–Земля является замкнутой, в которой действует консервативная сила — сила гравитационного взаимодействия.

Поэтому можно воспользоваться законом сохранения механической энергии (инерциальную систему отсчета свяжем с центром масс системы). Тогда можно записать

$$E_1 = E_2, \quad \text{или} \quad T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \tag{4}$$

где T_1, Π_1 и T_2, Π_2 — соответственно кинетические и потенциальные энергии в начальном *1* и конечном *2* состояниях. Заметим, что центр масс системы тело–Земля практически совпадает с центром масс Земли ($m \ll M$), и поэтому кинетическая энергия Земли в начальном и конечном состояниях равна нулю. Тогда

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2}; \quad \Pi_1 = -G\frac{Mm}{3R}; \quad T_2 = \frac{mv_2^2}{2}; \quad \Pi_2 = -G\frac{Mm}{2R}.$$

Подставив эти выражения в (4), получим

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{3R} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{2R}.$$

Заменив $GM = gR^2$ и произведя сокращения, найдем $v_2^2 = v_1^2 + gR/3$, откуда $v_2 = \sqrt{v_1^2 + gR/3}$.

Так как $v_1^2 = gR$ (по условию задачи), то

$$v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}gR} = v_1\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Произведя вычисления, получим

$$v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot 7{,}9 \text{ км/с} = 9{,}12 \text{ км/с}.$$

Пример 5. Вычислить работу A_{12} сил гравитационного поля Земли при перемещении тела массой $m = 10$ кг из точки *1* в точку *2* (рис. 4.5). Радиус R земли и ускорение g свободного падения вблизи поверхности Земли считать известными.

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношением между работой A и изменением $\Delta\Pi$ потенциальной энергии. Так как силы системы — гравитационные — относятся к силам консервативным, то работа сил поля совершается за счет убыли потенциальной энергии, т. е.

$$A_{12} = -\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{5}$$

где Π_1 и Π_2 — потенциальные энергии системы тело–Земля соответственно в начальном и конечном ее состояниях.

Условимся, что потенциальная энергия взаимодействия тела и Земли равна нулю, когда тело находится на бесконечно большом расстоянии от Земли, тогда на расстоянии r потенциальная энергия выразится равенством $\Pi = -G\dfrac{mM}{r}$, где M — масса Земли.

Для расстояний $r_1 = 3R$ и $r_2 = 2R$, заданных в условиях задачи (см. рис. 4.5), получим два выражения потенциальной энергии:

$$\Pi_1 = -G\frac{mM}{3R}; \quad \Pi_2 = -G\frac{mM}{2R}.$$

Подставив эти выражения Π_1 и Π_2 в формулу (5), получим

$$A_{12} = -G\frac{mM}{3R} - \left(-G\frac{mM}{2R}\right) = \frac{1}{6}G\frac{mM}{R}.$$

Заметив, что $G\dfrac{M}{R^2} = g$, преобразуем последнее выражение к виду

$$A_{12} = \frac{mgR}{6}.$$

Подставив значения m, g, R в это выражение и произведя вычисления, найдем

$$A_{12} = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м} = 1{,}04 \cdot 10^8 \text{ Дж} = 104 \text{ МДж}.$$

Пример 6. Верхний конец стального стержня длиной $l = 5$ м с площадью поперечного сечения $S = 4\,\text{см}^2$ закреплен неподвижно, к нижнему подвешен груз массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг. Определить: 1) нормальное напряжение σ материала стержня; 2) абсолютное x и относительное ε удлинения стержня; 3) потенциальную энергию П растянутого стержня.

Решение. 1. Нормальное напряжение материала растянутого стержня выражается формулой $\sigma = F/S$, где F — сила, действующая вдоль оси стержня. В данном случае F равна силе тяжести mg и поэтому можем записать

$$\sigma = \frac{mg}{S}.$$

Сделав вычисления, найдем

$$\sigma = 49 \text{ МПа}.$$

2. Абсолютное удлинение выражается формулой

$$x = \frac{Fl}{ES},$$

где E — модуль Юнга.

Подставив значения величин F, l, S и E в эту формулу (значение E взять из табл. 11) и произведя вычисления, получим

$$x = \frac{Fl}{ES} = \frac{mgl}{ES} = 1{,}23 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1{,}23 \text{ мм}.$$

Относительное удлинение стержня

$$\varepsilon = \frac{x}{l} = 2{,}46 \cdot 10^{-4}.$$

3. Потенциальная энергия растянутого стержня $\Pi = (\varepsilon\sigma/2)V$, где V — объем тела, равный Sl. Поэтому

$$\Pi = \frac{\varepsilon\sigma}{2} Sl.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$\Pi = 12{,}1 \text{ Дж}.$$

Пример 7. Из пружинного пистолета был произведен выстрел вертикально вверх. Определить высоту h, на которую поднимается пуля массой $m = 20$ г, если пружина жесткостью $k = 196$ Н/м была сжата перед выстрелом на $x = 10$ см. Массой пружины пренебречь.

Решение. Система пуля–Земля (вместе с пистолетом) является замкнутой системой, в которой действуют консервативные силы — силы упругости и силы тяготения. Поэтому для решения задачи можно применить закон сохранения энергии в механике. Согласно этому закону, полная механическая энергия E_1 системы в начальном состоянии (в данном случае перед выстрелом) равна полной энергии E_2 в конечном состоянии (когда пуля поднялась на высоту h), т. е.

$$E_1 = E_2, \quad \text{или} \quad T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \tag{6}$$

где T_1 и T_2 — кинетические энергии системы в начальном и конечном состояниях; Π_1 и Π_2 — потенциальные энергии в тех же состояниях.

Так как кинетические энергии пули в начальном и конечном состояниях равны нулю, то равенство (6) примет вид

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{7}$$

Если потенциальную энергию в поле тяготения Земли на ее поверхность принять равной нулю, то энергия системы в начальном состоянии равна потенциальной энергии сжатой пружины, т. е. $\Pi_1 = kx^2/2$, а в конечном состоянии — потенциальной энергии пули на высоте h, т. е. $\Pi_2 = mgh$.

Подставив приведенные выражения Π_1 и Π_2 в формулу (7), найдем

$$\frac{kx^2}{2} = mgh; \quad h = \frac{kx^2}{2mg}.$$

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$$h = 5 \text{ м}.$$

ЗАДАЧИ

Силы тяготения. Гравитационное поле

4.1. Центры масс двух одинаковых однородных шаров находятся на расстоянии $r = 1$ м друг от друга. Масса m каждого шара равна 1 кг. Определить силу F гравитационного взаимодействия шаров.

4.2. Как велика сила F взаимного притяжения двух космических кораблей массой $m = 10$ т каждый, если они сблизятся до расстояния $r = 100$ м?

4.3. Определить силу F взаимного притяжения двух соприкасающихся железных шаров диаметром $d = 20$ см каждый.

4.4. На какой высоте h над поверхностью Земли напряженность g_h гравитационного поля равна 1 Н/кг? Радиус R Земли считать известным.

4.5. Ракета, пущенная вертикально вверх, поднялась на высоту $h = 3200$ км и начала падать. Какой путь s пройдет ракета за первую секунду своего падения?

4.6. Радиус R планеты Марс равен $3{,}4 \cdot 10^6$ м, ее масса $M = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Определить напряженность g гравитационного поля на поверхности Марса.

4.7. Радиус Земли в $n = 3{,}66$ раза больше радиуса Луны; средняя плотность Земли в $k = 1{,}66$ раза больше средней плотности Луны. Определить ускорение свободного падения $g_л$ на поверхности Луны, если на поверхности Земли ускорение свободного падения g считать известным.

4.8. Радиус R малой планеты равен 250 км, средняя плотность $\rho = 3$ г/см^3. Определить ускорение свободного падения g на поверхности планеты.

4.9. Масса Земли в $n = 81{,}6$ раза больше массы Луны. Расстояние l между центрами масс Земли и Луны равно $60{,}3R$ (R — радиус Земли). На каком расстоянии r (в единицах R) от центра Земли находится точка, в которой суммарная напряженность гравитационного поля Земли и Луны равна нулю?

4.10. Искусственный спутник обращается вокруг Земли по окружности на высоте $h = 3{,}6 \cdot 10^6$ м. Определить линейную скорость v спутника. Радиус R Земли и ускорение свободного падения g на поверхности Земли считать известными.

4.11. Период T вращения искусственного спутника Земли равен 2 ч. Считая орбиту спутника круговой, найти, на какой высоте h над поверхностью Земли движется спутник.

4.12. Стационарный искусственный спутник движется по окружности в плоскости земного экватора, оставаясь все время над одним и тем же пунктом земной поверхности. Определить угловую скорость ω спутника и радиус R его орбиты.

4.13. Планета Нептун в $k = 30$ раз дальше от Солнца, чем Земля. Определить период T обращения (в годах) Нептуна вокруг Солнца.

4.14. Луна движется вокруг Земли со скоростью $v_1 = 1{,}02$ км/с. Среднее расстояние l Луны от Земли равно $60{,}3R$ (R — радиус Земли). Определить по этим данным, с какой скоростью v_2 должен двигаться искусственный спутник, вращающийся вокруг Земли на незначительной высоте над ее поверхностью.

4.15. Зная среднюю скорость v_1 движения Земли вокруг Солнца (30 км/с), определить, с какой средней скоростью v_2 движется малая планета, радиус орбиты которой в $n = 4$ раза больше радиуса орбиты Земли.

4.16. Космическая ракета, ставшая искусственной планетой, обращается вокруг Солнца по эллипсу. Наименьшее расстояние $r_{\min}$ ракеты от Солнца равно 0,97, наибольшее расстояние $r_{\max}$ равно 1,31 а.е. (среднего расстояния Земли от Солнца). Определить период T вращения (в годах) искусственной планеты.

4.17. Космическая ракета движется вокруг Солнца по орбите, почти совпадающей с орбитой Земли. При включении тормозного устройства ракета быстро теряет скорость и начинает падать на Солнце (рис. 4.6). Определить время t, в течение которого будет падать ракета.

Указание. Принять, что, падая на Солнце, ракета движется по эллипсу, большая ось которого очень мало отличается от радиуса орбиты Земли, а эксцентриситет — от единицы. Период обращения по эллипсу не зависит от эксцентриситета.

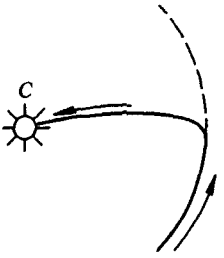


Рис. 4.6

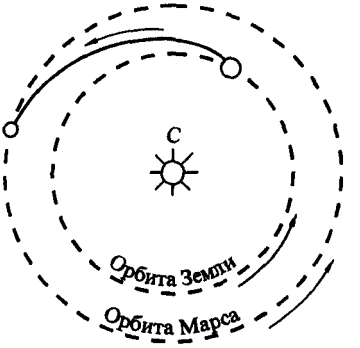


Рис. 4.7

4.18. Ракета, запущенная с Земли на Марс, летит, двигаясь вокруг Солнца по эллиптической орбите (рис. 4.7). Среднее расстояние r планеты Марс от Солнца равно 1,5 а.е. В течение какого времени t будет лететь ракета до встречи с Марсом?

4.19. Искусственный спутник движется вокруг Земли по эллипсу с эксцентриситетом $e = 0{,}5$. Во сколько раз линейная ско-

рость спутника в перигее (ближайшая к центру Земли точка орбиты спутника) больше, чем в апогее (наиболее удаленная точка орбиты)?

Указание. Применить закон сохранения момента импульса.

4.20. Комета движется вокруг Солнца по эллипсу с эксцентриситетом $e = 0{,}6$. Во сколько раз линейная скорость кометы в ближайшей к Солнцу точке орбиты больше, чем в наиболее удаленной?

4.21. Ближайший спутник Марса находится на расстоянии $r = 9{,}4 \cdot 10^6$ м от центра планеты и движется вокруг нее со скоростью $v = 2{,}1$ км/с. Определить массу M Марса.

4.22. Определить массу M Земли по среднему расстоянию r от центра Луны до центра Земли и периоду T обращения Луны вокруг Земли (T и r считать известными).

4.23. Один из спутников планеты Сатурн находится приблизительно на таком же расстоянии r от планеты, как Луна от Земли, но период T его обращения вокруг планеты почти в $n = 10$ раз меньше, чем у Луны. Определить отношение масс Сатурна и Земли.

4.24. Найти зависимость ускорения свободного падения g от расстояния r, отсчитанного от центра планеты, плотность ρ которой можно считать для всех точек одинаковой. Построить график зависимости $g(r)$. Радиус R планеты считать известным.

4.25. Тело массой $m = 1$ кг находится на поверхности Земли. Определить изменение Δmg силы тяжести для двух случаев: 1) при подъеме тела на высоту $h = 5$ км; 2) при опускании тела в шахту на глубину $h = 5$ км. Землю считать однородным шаром радиусом $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м и плотностью $\rho = 5{,}5$ г/см^3.

4.26. Определить работу A, которую совершат силы гравитационного поля Земли, если тело массой $m = 1$ кг упадет на поверхность Земли: 1) с высоты h, равной радиусу Земли; 2) из бесконечности. Радиус R Земли и ускорение свободного падения g на ее поверхности считать известными.

4.27. На какую высоту h над поверхностью Земли поднимется ракета, пущенная вертикально вверх, если начальная скорость v ракеты равна первой космической скорости?

4.28. Определить значения потенциала φ гравитационного поля на поверхностях Земли и Солнца.

4.29. Вычислить значения первой (круговой) и второй (параболической) космических скоростей вблизи поверхности Луны.

4.30. Найти первую и вторую космические скорости вблизи поверхности Солнца.

4.31. Радиус R малой планеты равен 100 км, средняя плотность ρ вещества планеты равна 3 г/см^3. Определить параболическую скорость v_2 у поверхности этой планеты.

4.32. Какова будет скорость v ракеты на высоте, равной радиусу Земли, если ракета пущена с Земли с начальной скоростью $v_0 = 10$ км/с? Сопротивление воздуха не учитывать. Радиус R Земли и ускорение свободного падения g на ее поверхности считать известными.

4.33. Ракета пущена с Земли с начальной скоростью $v_0 = 15$ км/с. К какому пределу будет стремиться скорость ракеты, если расстояние ракеты от Земли бесконечно увеличивается? Сопротивление воздуха и притяжение других небесных тел, кроме Земли, не учитывать.

4.34. Метеорит падает на Солнце с очень большого расстояния, которое практически можно считать бесконечно большим. Начальная скорость метеорита пренебрежимо мала. Какую скорость v будет иметь метеорит в момент, когда его расстояние от Солнца равно среднему расстоянию Земли от Солнца?

4.35. Комета огибает Солнце, двигаясь по орбите, которую можно считать параболической. С какой скоростью v движется комета, когда она проходит через перигей (ближайшую к Солнцу точку своей орбиты), если расстояние r кометы от Солнца в этот момент равно 50 Гм?

4.36. На высоте $h = 2{,}6 \cdot 10^6$ м над поверхностью Земли космической ракете была сообщена скорость $v = 10$ км/с, направленная перпендикулярно линии, соединяющей центр Земли с ракетой. По какой орбите относительно Земли будет двигаться ракета? Определить вид конического сечения.

Силы упругости. Механическое напряжение

4.37. К проволоке диаметром $d = 2$ мм подвешен груз массой $m = 1$ кг. Определить напряжение σ, возникшее в проволоке.

4.38. Верхний конец свинцовой проволоки диаметром $d = 2$ см и длиной $l = 60$ м закреплен неподвижно. К нижнему концу подвешен груз массой $m = 100$ кг. Найти напряжение σ материала: 1) у нижнего конца; 2) на середине длины; 3) у верхнего конца проволоки.

4.39. Какой наибольший груз может выдержать стальная проволока диаметром $d = 1$ мм, не выходя за предел упругости $\sigma_{\text{упр}} = 294$ МПа? Какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе?

4.40. Свинцовая проволока подвешена в вертикальном положении за верхний конец. Какую наибольшую длину l может иметь проволока, не обрываясь под действием силы тяжести? Предел прочности $\sigma_{\text{пр}}$ свинца равен 12,3 МПа.

4.41. Гиря массой $m = 10$ кг, привязанная к проволоке, вращается с частотой $n = 2\,\text{с}^{-1}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через конец проволоки, скользя при этом без трения по горизонтальной поверхности. Длина l проволоки равна 1,2 м, площадь S

ее поперечного сечения равна $2\,мм^2$. Найти напряжение σ металла проволоки. Массой ее пренебречь.

4.42. Однородный стержень длиной $l = 1{,}2\,м$, площадью поперечного сечения $S = 2\,см^2$ и массой $m = 10\,кг$ вращается с частотой $n = 2\,с^{-1}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня, скользя при этом без трения по горизонтальной поверхности. Найти наибольшее напряжение σ_{max} материала стержня при данной частоте вращения.

4.43. К вертикальной проволоке длиной $l = 5\,м$ и площадью поперечного сечения $S = 2\,мм^2$ подвешен груз массой $m = 5{,}1\,кг$. В результате проволока удлинилась на $x = 0{,}6\,мм$. Найти модуль Юнга E материала проволоки.

4.44. К стальному стержню длиной $l = 3\,м$ и диаметром $d = 2\,см$ подвешен груз массой $m = 2{,}5 \cdot 10^3\,кг$. Определить напряжение σ в стержне, относительное ε и абсолютное x удлинения стержня.

4.45. Проволока длиной $l = 2\,м$ и диаметром $d = 1\,мм$ натянута практически горизонтально. Когда к середине проволоки подвесили груз массой $m = 1\,кг$, проволока растянулась настолько, что точка подвеса опустилась на $h = 4\,см$. Определить модуль Юнга E материала проволоки.

4.46. Две пружины жесткостью $k_1 = 0{,}3\,кН/м$ и $k_2 = 0{,}8\,кН/м$ соединены последовательно. Определить абсолютную деформацию x_1 первой пружины, если вторая деформирована на $x_2 = 1{,}5\,см$.

4.47. Определить жесткость k системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении (рис. 4.8). Жесткость пружин $k_1 = 2\,кН/м$ и $k_2 = 6\,кН/м$.

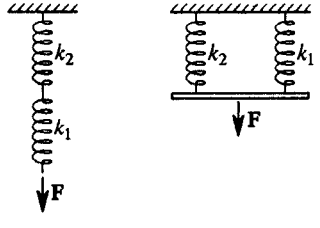


Рис. 4.8

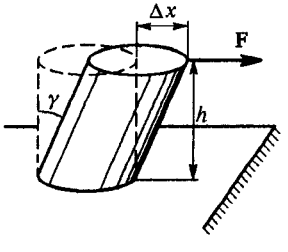


Рис. 4.9

4.48. Нижнее основание железной тумбы, имеющей форму цилиндра диаметром $d = 20\,см$ и высотой $h = 20\,см$, закреплено неподвижно. На верхнее основание тумбы действует сила $F = 20\,кН$ (рис. 4.9). Найти: 1) тангенциальное напряжение τ в материале тумбы; 2) относительную деформацию γ (угол сдвига); 3) смещение Δx верхнего основания тумбы.

4.49. Тонкий стержень одним концом закреплен, к другому концу приложен момент силы $M = 1$ кН·м. Определить угол φ закручивания стержня, если постоянная кручения $C = 120$ кН·м/рад.

4.50. Тонкая однородная металлическая лента закреплена верхним концом. К нижнему концу приложен момент силы $M = 1$ мН·м. Угол φ закручивания ленты равен 10°. Определить постоянную кручения C.

Работа упругой силы. Энергия деформированного тела

4.51. Какую работу A нужно совершить, чтобы растянуть на $x = 1$ мм стальной стержень длиной $l = 1$ м и площадью S поперечного сечения, равной 1 см^2?

4.52. Для сжатия пружины на $x_1 = 1$ см нужно приложить силу $F = 10$ Н. Какую работу A нужно совершить, чтобы сжать пружину на $x_2 = 10$ см, если сила пропорциональна сжатию?

4.53. Пружина жесткостью $k = 10$ кН/м сжата силой $F = 200$ Н. Определить работу A внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину еще на $x = 1$ см.

4.54. Пружина жесткостью $k = 1$ кН/м была сжата на $x_1 = 4$ см. Какую нужно совершить работу A, чтобы сжатие пружины увеличить до $x_2 = 18$ см?

4.55. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, поставленной на подставке, сжимает ее на $x = 2$ мм. На сколько сожмет пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высотой $h = 5$ см?

4.56. Пуля массой $m_1 = 10$ г вылетает со скоростью $v = 300$ м/с из дула автоматического пистолета, масса m_2 затвора которого равна 200 г. Затвор пистолета прижимается к стволу пружиной жесткостью $k = 25$ кН/м. На какое расстояние l отойдет затвор после выстрела? Считать пистолет жестко закрепленным.

4.57. Две пружины, жесткости которых $k_1 = 0{,}3$ кН/м и $k_2 = 0{,}5$ кН/м, скреплены последовательно и растянуты так, что абсолютная деформация x_2 второй пружины равна 3 см. Вычислить работу A растяжения пружин.

4.58. Пружина жесткостью $k_1 = 100$ кН/м была растянута на $x_1 = 4$ см. Уменьшая приложенную силу, пружине дают возможность вернуться в первоначальное состояние (нерастянутое). Затем сжимают пружину на $x_2 = 6$ см. Определить работу A, совершенную при этом внешней силой.

4.59. Стальной стержень массой $m = 3{,}9$ кг растянут на $\varepsilon = 0{,}001$ своей первоначальной длины. Найти потенциальную энергию П растянутого стержня.

4.60. Стержень из стали длиной $l = 2$ м и площадью поперечного сечения $S = 2$ см^2 растягивается некоторой силой, причем удлинение x равно 0,4 см. Вычислить потенциальную энергию П растянутого стержня и объемную плотность w энергии.

4.61. Стальной стержень длиной $l = 2\,\text{м}$ и площадью поперечного сечения $S = 2\,\text{см}^2$ растягивается силой $F = 10\,\text{кН}$. Найти потенциальную энергию П растянутого стержня и объемную плотность w энергии.

4.62. Две пружины, жесткости которых $k_1 = 1\,\text{кН/м}$ и $k_2 = 3\,\text{кН/м}$, скреплены параллельно. Определить потенциальную энергию П данной системы при абсолютной деформации $x = 5\,\text{см}$.

4.63. С какой скоростью v вылетит из пружинного пистолета шарик массой $m = 10\,\text{г}$, если пружина была сжата на $x = 5\,\text{см}$. Жесткость k пружины равна $200\,\text{Н/м}$?

4.64. В пружинном ружье пружина сжата на $x_1 = 20\,\text{см}$. При взводе ее сжали еще на $x_2 = 30\,\text{см}$. С какой скоростью v вылетит из ружья стрела массой $m = 50\,\text{г}$, если жесткость k пружины равна $120\,\text{Н/м}$?

4.65. Вагон массой $m = 12\,\text{т}$ двигался со скоростью $v = 1\,\text{м/с}$. Налетев на пружинный буфер, он остановился, сжав пружину буфера на $x = 10\,\text{см}$. Найти жесткость k пружины.

4.66. Стальной стержень растянут так, что напряжение в материале стержня $\sigma = 300\,\text{МПа}$. Найти объемную плотность w потенциальной энергии растянутого стержня.

4.67. Стержень из стали имеет длину $l = 2\,\text{м}$ и площадь поперечного сечения $S = 10\,\text{мм}^2$. Верхний конец стержня закреплен неподвижно, к нижнему прикреплен упор. На стержень надет просверленный посередине груз массой $m = 10\,\text{кг}$ (рис. 4.10). Груз падает с высоты $h = 10\,\text{см}$ и задерживается упором. Найти: 1) удлинение x стержня при ударе груза; 2) нормальное напряжение σ, возникающее при этом в материале стержня.

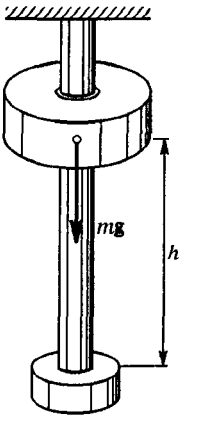


Рис. 4.10

§ 5. Релятивистская механика

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

В специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета. Во всех задачах считается, что оси y, y' и z, z' сонаправлены, а относительная скорость v_0 системы координат K' относительно системы K направлена вдоль общей оси xx' (рис. 5.1).

• Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

где l_0 — длина стержня в системе координат K', относительно которой стержень покоится (собственная длина). Стержень параллелен оси x';

l — длина стержня, измеренная в системе K, относительно которой он движется со скоростью v; c — скорость распространения электромагнитного излучения.

• Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

где Δt_0 — интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы K', измеренный по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt — интервал времени между двумя событиями, измеренный по часам системы K.

• Релятивистское сложение скоростей

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v_0 v'/c^2},$$

где v' — относительная скорость (скорость тела относительно системы K'); v_0 — переносная скорость (скорость системы K' относительно K); v — абсолютная скорость (скорость тела относительно системы K).

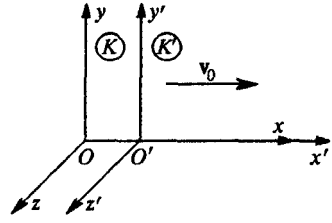


Рис. 5.1

В теории относительности абсолютной скоростью называется скорость тела (частицы) в системе координат, условно принятой за неподвижную.

• Релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \text{или} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где m_0 — масса покоя; β — скорость частицы, выраженная в долях скорости света ($\beta = v/c$).

• Релятивистский импульс

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \text{или} \quad p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

• Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T,$$

где T — кинетическая энергия частицы; $m_0 c^2 = E_0$ — ее энергия покоя. Частица называется релятивистской, если скорость частицы сравнима со скоростью света, и классической, если $v \ll c$.

• Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы

$$p^2 c^2 = E^2 - E_0^2.$$

• Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы

$$p^2 c^2 = T(T + 2E_0).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Космический корабль движется со скоростью $v = 0{,}9c$ по направлению к центру Земли. Какое расстояние l пройдет этот корабль в системе отсчета, связанной с Землей (K-система), за интервал времени $\Delta t_0 = 1$ с, отсчитанный по часам, находящимся в космическом корабле (K'-система)? Суточным вращением Земли и ее орбитальным движением вокруг Солнца пренебречь.

Решение. Расстояние l, которое пройдет космический корабль в системе отсчета, связанной с Землей (K-система), определим по формуле

$$l = v\Delta t, \tag{1}$$

где Δt — интервал времени, отсчитанный в K-системе отсчета. Этот интервал времени связан с интервалом времени, отсчитанным в K'-системе, соотношением $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Подставив выражение Δt в формулу (1), получим

$$l = \frac{v\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

После вычислений найдем

$$l = 6{,}19 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Пример 2. В лабораторной системе отсчета (K-система) движется стержень со скоростью $v = 0{,}8c$. По измерениям, произведенным в K-системе, его длина l оказалась равной 10 м, а угол φ, который он составляет с осью x, оказался равным 30°. Определить собственную

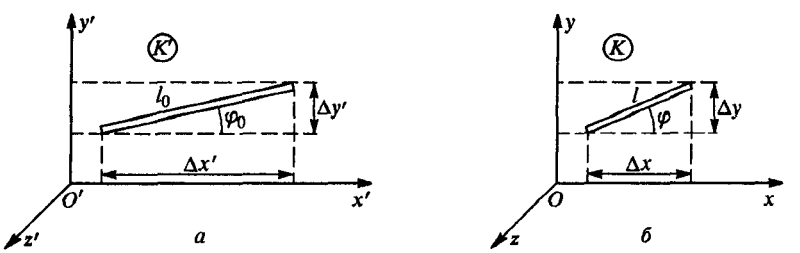


Рис. 5.2

длину l_0 стержня в K'-системе, связанной со стержнем, и угол φ_0, который он составляет с осью x' (рис. 5.2).

Решение. Пусть в K'-системе стержень лежит в плоскости $x'O'y'$. Из рис. 5.2*а* следует, что собственная длина l_0 стержня и угол φ_0, который он составляет с осью x', выразятся равенствами

$$l_0 = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}. \tag{2}$$

В K-системе те же величины окажутся равными (рис. 5.2*б*) соответственно

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

Заметим, что при переходе от системы K' к K размеры стержня в направлении оси y не изменятся, а в направлении оси x претерпят релятивистское (лоренцево) сокращение, т. е.

$$\Delta y = \Delta y', \quad \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{4}$$

С учетом последних соотношений собственная длина стержня выразится равенством

$$l_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - \beta^2 (\Delta y)^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

или

$$l_0 = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2 (\Delta y)^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Заменив в этом выражении Δy на $l \sin\varphi$ (рис. 5.2*б*), получим

$$l_0 = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2 l^2 \sin^2\varphi^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\varphi}.$$

Подставив значения величин l, β, φ в это выражение и произведя вычисления, найдем

$$l_0 = 15{,}3 \text{ м}.$$

Для определения угла φ_0 воспользуемся соотношениями (2), (3) и (4):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}\sqrt{1-\beta^2}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{1-\beta^2},$$

откуда

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi \sqrt{1-\beta^2}).$$

Подставив значения φ и β в это выражение и произведя вычисления, получим

$$\varphi_0 = 19{,}1^\circ.$$

Пример 3. Кинетическая энергия T электрона равна 1 МэВ. Определить скорость электрона.

Решение. Релятивистская формула кинетической энергии

$$T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Выполнив относительно β преобразования, найдем скорость частицы, выраженную в долях скорости света ($\beta = v/c$):

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{E_0 + T}, \tag{5}$$

где E_0 — энергия покоя электрона (см. табл. 22).

Вычисления по этой формуле можно производить в любых единицах энергии, так как наименования единиц в правой части формул сократятся и в результате подсчета будет получено отвлеченное число.

Подставив числовые значения E_0 и T в мегаэлектрон-вольтах, получим

$$\beta = 0{,}941.$$

Так как $v = \beta c$, то

$$v = 2{,}82 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Чтобы определить, является ли частица с кинетической энергией T релятивистской или классической, достаточно сравнить кинетическую энергию частицы с ее энергией покоя.

Если $T/E_0 \ll 1$, частицу можно считать классической. В этом случае релятивистская формула (5) переходит в классическую:

$$\beta = \sqrt{\frac{2T}{E_0}}, \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{2T}{m_0}}.$$

Пример 4. Определить релятивистский импульс p и кинетическую энергию T электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}9c$ (где c — скорость света в вакууме).

Решение. Релятивистский импульс

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{6}$$

После вычисления по формуле (6) получим

$$p = 5{,}6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия T частицы определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 этой частицы, т. е.

$$T = E - E_0.$$

Так как $E = mc^2$ и $E_0 = m_0 c^2$, то, учитывая зависимость массы от скорости, получим

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2,$$

или окончательно

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (7)$$

Сделав вычисления, найдем

$$T = 1{,}06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Во внесистемных единицах энергия покоя электрона $m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ. Подставив это значение в формулу (7), получим

$$T = 0{,}66 \text{ МэВ}.$$

Пример 5. Релятивистская частица с кинетической энергией $T = m_0c^2$ (m_0 — масса покоя частицы) испытывает неупругое столкновение с такой же покоящейся (в лабораторной системе отсчета) частицей. При этом образуется составная частица. Определить: 1) релятивистскую массу m движущейся частицы; 2) релятивистскую массу m' и массу покоя m_0' составной частицы; 3) ее кинетическую энергию T'.

Решение. 1. Релятивистскую массу m движущейся частицы до столкновения найдем из выражения для кинетической энергии релятивистской частицы $T = (m - m_0)c^2$. Так как $T = m_0c^2$, то $m = 2m_0$.

2. Для того чтобы найти релятивистскую массу составной частицы, воспользуемся тем, что суммарная релятивистская масса частиц сохраняется[12]): $m + m_0 = m'$, где $m + m_0$ — суммарная релятивистская масса частиц до столкновения; m' — релятивистская масса составной частицы. Так как $m = 2m_0$, то

$$m' = 3m_0.$$

Массу покоя m_0' составной частицы найдем из соотношения

$$m' = \frac{m_0'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}. \qquad (8)$$

Скорость v' составной частицы (она совпадает со скоростью V_C центра масс в лабораторной системе отсчета) можно найти из закона сохранения импульса $p = p'$, где p — импульс релятивистской частицы до столкновения; p' — импульс составной релятивистской частицы. Выразим p через кинетическую энергию T:

$$p = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{c}.$$

[12]) Этот закон см., например, в кн.: Савельев И.В. Курс общей физики.—М.: Наука, 1977. Т. I, § 70.

Так как $T = E_0 = m_0c^2$, то

$$p = \frac{\sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2}}{c} = m_0c\sqrt{3}.$$

Релятивистский импульс $p' = m'v'$. Учитывая, что $m' = 3m_0$, закон сохранения импульса можно записать в виде $m_0c\sqrt{3} = 3m_0v'$, откуда

$$v' = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Подставив выражения v' и m' в формулу (8), найдем массу покоя составной частицы:

$$m_0' = 3m_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}, \quad \text{или} \quad m_0' = m_0\sqrt{6}.$$

3. Кинетическую энергию T' составной релятивистской частицы найдем как разность полной энергии $m'c^2$ и энергии покоя $m_0'c^2$ составной частицы:

$$T' = (m' - m_0')c^2.$$

Подставив выражения m' и m_0', получим

$$T' = (3m_0 - \sqrt{6}m_0)c^2 = (3 - \sqrt{6})m_0c^2 = 0{,}55m_0c^2.$$

ЗАДАЧИ

Релятивистское изменение длин и интервалов времени

5.1. Предположим, что мы можем измерить длину стержня с точностью $\Delta l = 0{,}1$ мкм. При какой относительной скорости u двух инерциальных систем отсчета можно было бы обнаружить релятивистское сокращение длины стержня, собственная длина l_0 которого равна 1 м?

5.2. Двое часов после синхронизации были помещены в начало систем координат K и K', движущихся друг относительно друга. При какой скорости u их относительного движения возможно обнаружить релятивистское замедление хода часов, если собственная длительность τ_0 измеряемого промежутка времени составляет 1 с? Измерение времени производится с точностью $\Delta\tau = 10$ пс.

5.3. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость v_0 спутника составляет 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя по своим часам за время $\tau_0 = 0{,}5$ года?

5.4. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $v = 0{,}6c$. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

5.5. В системе K' покоится стержень, собственная длина l_0 которого равна 1 м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi_0 = 45°$ с осью x'. Определить длину l стержня и угол φ в системе K, если скорость v_0 системы K' относительно K равна $0{,}8c$.

5.6. В системе K находится квадрат, сторона которого параллельна оси x'. Определить угол φ между его диагоналями в системе K, если система K' движется относительно K со скоростью $v = 0{,}95c$.

5.7. В лабораторной системе отсчета (K-система) пи-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l = 75$ м. Скорость v пи-мезона равна $0{,}995c$. Определить собственное время жизни τ_0 пи-мезона.

5.8. Собственное время жизни τ_0 мю-мезона равно 2 мкс. От точки рождения до точки распада в лабораторной системе отсчета мю-мезон пролетел расстояние $l = 6$ км. С какой скоростью v (в долях скорости света) двигался мезон?

Релятивистское сложение скоростей

5.9. Показать, что формула сложения скоростей релятивистских частиц переходит в соответствующую формулу классической механики при $v \ll c$.

5.10. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $v_1 = 0{,}6c$ и $v_2 = 0{,}9c$ вдоль одной прямой. Определить их относительную скорость u_{21} в двух случаях: 1) частицы движутся в одном направлении; 2) частицы движутся в противоположных направлениях.

5.11. В лабораторной системе отсчета удаляются друг от друга две частицы с одинаковыми по модулю скоростями. Их относительная скорость u в той же системе отсчета равна $0{,}5c$. Определить скорости частиц.

5.12. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя, если скорость v иона относительно ускорителя равна $0{,}8c$.

5.13. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $v_1 = 0{,}4c$. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β-частицу со скоростью $v_2 = 0{,}75c$ относительно ускорителя. Найти скорость u_{21} частицы относительно ядра.

5.14. Два ускорителя выбрасывают навстречу друг другу частицы со скоростями $|v| = 0{,}9c$. Определить относительную скорость u_{21} сближения частиц в системе отсчета, движущейся вместе с одной из частиц.

Релятивистская масса и релятивистский импульс

5.15. Частица движется со скоростью $v = 0{,}5c$. Во сколько раз релятивистская масса частицы больше массы покоя?

5.16. С какой скоростью v движется частица, если ее релятивистская масса в три раза больше массы покоя?

5.17. Отношение заряда движущегося электрона к его массе, определенное из опыта, равно $0{,}88 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Определить релятивистскую массу m электрона и его скорость v.

5.18. На сколько процентов релятивистская масса частицы больше массы покоя при скорости $v = 3{,}0 \cdot 10^7$ м/с?

5.19. Показать, что выражение релятивистского импульса переходит в соответствующее выражение импульса в классической механике при $v \ll c$.

5.20. Электрон движется со скоростью $v = 0{,}6c$. Определить релятивистский импульс p электрона.

5.21. Импульс p релятивистской частицы равен $m_0 c$ (m_0 — масса покоя). Определить скорость v частицы (в долях скорости света).

5.22. В лабораторной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, другая движется со скоростью $v = 0{,}8c$ по направлению к покоящейся частице. Определить: 1) релятивистскую массу движущейся частицы в лабораторной системе отсчета; 2) скорость частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы; 3) релятивистскую массу частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции.

5.23. В лабораторной системе отсчета находятся две частицы. Одна частица с массой покоя m_0 движется со скоростью $v = 0{,}6c$, другая с массой покоя $2m_0$ покоится. Определить скорость V_C центра масс системы частиц.

Взаимосвязь массы и энергии[13])

5.24. Полная энергия тела возросла на $\Delta E = 1$ Дж. На сколько при этом изменится масса тела?

5.25. Определить, на сколько должна увеличиться полная энергия тела, чтобы его релятивистская масса возросла на $\Delta m = 1$ г.

5.26. Вычислить энергию покоя: 1) электрона; 2) протона; 3) α-частицы. Ответ выразить в джоулях и мегаэлектрон-вольтах.

5.27. Известно, что объем воды в океане равен $1{,}37 \cdot 10^9$ км^3. Определить, на сколько возрастет масса воды в океане, если температура воды повысится на $\Delta t = 1\,^\circ$C. Плотность ρ воды в океане принять равной $1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

---

[13]) Задачи на эту тему, в условиях которых речь идет о ядерных превращениях, помещены в § 43.

5.28. Солнечная постоянная C (плотность потока энергии электромагнитного излучения Солнца на расстоянии, равном среднему расстоянию от Земли до Солнца) равна 1,4 кВт/м^2. 1. Определить массу, которую теряет Солнце в течение одного года. 2. На сколько изменится масса воды в океане за один год, если предположить, что поглощается 50% падающей на поверхность океана энергии излучения? При расчетах принять площадь S поверхности океана равной $3{,}6 \cdot 10^8$ км^2.

Кинетическая энергия релятивистской частицы

5.29. Кинетическая энергия T электрона равна 10 МэВ. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя? Сделать такой же подсчет для протона.

5.30. Во сколько раз релятивистская масса протона больше релятивистской массы электрона, если обе частицы имеют одинаковую кинетическую энергию $T = 1$ ГэВ?

5.31. Электрон летит со скоростью $v = 0{,}8c$. Определить кинетическую энергию T электрона (в мегаэлектрон-вольтах).

5.32. При какой скорости v кинетическая энергия любой частицы вещества равна ее энергии покоя?

5.33. Определить скорость v электрона, если его кинетическая энергия равна: 1) $T = 4$ МэВ; 2) $T = 1$ кэВ.

5.34. Найти скорость v протона, если его кинетическая энергия равна: 1) $T = 1$ МэВ; 2) $T = 2$ ГэВ.

5.35. Показать, что релятивистское выражение кинетической энергии $T = (m - m_0)c^2$ при $v \ll c$ переходит в соответствующее выражение классической механики.

5.36. Какая относительная ошибка будет допущена при вычислении кинетической энергии релятивистской частицы, если вместо релятивистского выражения $T = (m - m_0)c^2$ воспользоваться классическим $T = m_0v^2/2$? Вычисления выполнить для двух случаев; 1) $v = 0{,}2c$; 2) $v = 0{,}8c$.

5.37. Две релятивистские частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми (в лабораторной системе отсчета) кинетическими энергиями, равными их энергии покоя. Определить: 1) скорости частиц в лабораторной системе отсчета; 2) относительную скорость сближения частиц (в единицах c); 3) кинетическую энергию (в единицах m_0c^2) одной из частиц в системе отсчета, связанной с другой частицей.

Связь энергии релятивистской частицы с ее импульсом

5.38. Показать, что выражение релятивистского импульса через кинетическую энергию $p = (1/c)\sqrt{(2E_0 + T)T}$ при $v \ll c$ переходит в соответствующее выражение классической механики.

5.39. Определить импульс p частицы (в единицах m_0c), если ее кинетическая энергия равна энергии покоя.

5.40. Определить кинетическую энергию T релятивистской частицы (в единицах m_0c^2), если ее импульс $p = m_0c$.

5.41. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в $n = 4$ раза?

5.42. Импульс p релятивистской частицы равен m_0c. Под действием внешней силы импульс частицы увеличился в два раза. Во сколько раз возрастет при этом энергия частицы: 1) кинетическая? 2) полная?

5.43. При неупругом столкновении частицы, обладающей импульсом $p = m_0c$, и такой же покоящейся частицы образуется составная частица. Определить: 1) скорость v частицы (в единицах c) до столкновения; 2) релятивистскую массу составной частицы (в единицах m_0); 3) скорость составной частицы; 4) массу покоя составной частицы (в единицах m_0); 5) кинетическую энергию частицы до столкновения и кинетическую энергию составной частицы (в единицах m_0c^2).

5.44. Частица с кинетической энергией $T = m_0c^2$ налетает на другую такую же частицу, которая в лабораторной системе отсчета покоится. Найти суммарную кинетическую энергию T' частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы частиц.

§ 6. Механические колебания

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где x — смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t — время; A, ω, φ — соответственно амплитуда, циклическая частота, начальная фаза колебаний; $(\omega t + \varphi)$ — фаза колебаний в момент t.

• Циклическая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \text{или} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где ν и T — частота и период колебаний.

• Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

• Ускорение при гармоническом колебании

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

• Амплитуда A результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где A_1 и A_2 — амплитуды составляющих колебаний; φ_1 и φ_2 — их начальные фазы.

• Начальная фаза φ результирующего колебания может быть найдена из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

• Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2,

$$\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

• Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами φ_1 и φ_2,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, то уравнение траектории принимает вид

$$y = \frac{A_2}{A_1}x \quad \text{или} \quad y = -\frac{A_2}{A_1}x,$$

т. е. точка движется по прямой.

В том случае, если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

т. е. точка движется по эллипсу.

• Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где m — масса точки; k — коэффициент квазиупругой силы ($k = m\omega^2$).

• Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

• Период колебаний тела, подвешенного на пружине (пружинный маятник),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m — масса тела; k — жесткость пружины.

Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (при малой массе пружины в сравнении с массой тела).

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника; g — ускорение свободного падения.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}},$$

где J — момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний; a — расстояние центра масс маятника от оси колебаний; $L = J/(ma)$ — приведенная длина физического маятника.

Приведенные формулы являются точными в случае линейного приближения, верного, как правило, для малых амплитуд. При отклонениях от положения равновесия не более $\approx 3°$ ошибка в значении периода не превышает 1%.

Период крутильных колебаний тела, подвешенного на упругой нити,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}},$$

где J — момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; k — жесткость упругой нити, равная отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается.

• Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где r — коэффициент сопротивления; δ — коэффициент затухания: $\delta = r/(2m)$; ω_0 — собственная циклическая частота колебаний [14]) ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$).

• Уравнение затухающих колебаний

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi),$$

где $A(t)$ — амплитуда затухающих колебаний в момент t; ω — их циклическая частота.

• Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

[14]) В приведенных ранее формулах гармонических колебаний та же величина обозначалась просто ω (без индекса 0).

• Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t),$$

где A_0 — амплитуда колебаний в момент $t = 0$.

• Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T,$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период.

• Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

где $F_0 \cos \omega t$ — внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_0 — ее амплитудное значение; $f_0 = F_0/m$.

• Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

• Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{и} \quad A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Точка совершает колебания по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A = 2$ см. Определить начальную фазу φ, если $x(0) = -\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) < 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

Решение. Воспользуемся уравнением движения и выразим смещение в момент $t = 0$ через начальную фазу: $x(0) = A \cos \varphi$. Отсюда найдем начальную фазу:

$$\varphi = \arccos \frac{x(0)}{A}.$$

Подставим в это выражение заданные значения $x(0)$ и A:

$$\varphi = \arccos(-\sqrt{3}/2).$$

Значению аргумента $(-\sqrt{3}/2)$ удовлетворяют два значения угла:

$$\varphi_1 = \frac{5\pi}{6} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

Для того чтобы решить, какое из этих значений угла φ удовлетворяет еще и условию $\dot{x}(0) < 0$, найдем сначала $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

Подставив в это выражение значение $t = 0$ и поочередно значения начальных фаз $\varphi_1 = = 5\pi/6$ и $\varphi_2 = = 7\pi/6$, найдем

$$\dot{x}_1(0) = -\frac{A\omega}{2} \quad \text{и} \quad \dot{x}_2(0) = \frac{A\omega}{2}.$$

Так как всегда $A > 0$ и $\omega > 0$, то условию $\dot{x}(0) < 0$ удовлетворяет только первое значение начальной фазы. Таким образом, искомая начальная фаза $\varphi = 5\pi/6$.

По найденному значению φ построим векторную диаграмму (рис. 6.1).

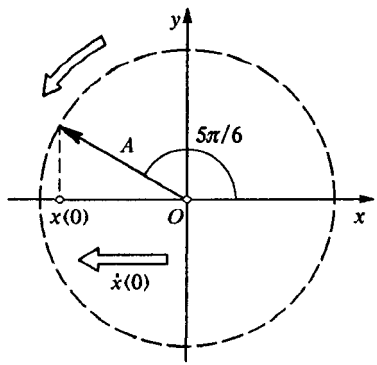


Рис. 6.1

Пример 2. Материальная точка массой $m = 5$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = = 0{,}5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 3$ см. Определить: 1) скорость v точки в момент времени, когда смещение $x = 1{,}5$ см; 2) максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку; 3) полную энергию E колеблющейся точки.

Решение. 1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

а формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \tag{2}$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно v, найдем

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$v = \pm 8{,}2 \text{ см/с}.$$

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x, знак минус, — когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

Смещение при гармоническом колебании кроме уравнения (1) может быть определено также уравнением

$$x = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Повторив с этим уравнением такое же решение, получим тот же ответ.

2. Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \tag{3}$$

где a — ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi), \quad \text{или} \quad a = -4\pi^2\nu^2 A\cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив выражение ускорения в формулу (3), получим

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(\omega t + \varphi).$$

Отсюда максимальное значение силы

$$F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 mA.$$

Подставив в это уравнение значения величин π, ν, m и A, найдем

$$F_{\max} = 1{,}49 \text{ мН}.$$

3. Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии $T_{\max}$:

$$E = T_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \tag{4}$$

Максимальную скорость определим из формулы (2), положив $\cos(\omega t + \varphi) = 1$: $v_{\max} = 2\pi\nu A$. Подставив выражение скорости в формулу (4), найдем

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$E = 2\cdot(3{,}14)^2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot(0{,}5)^2\cdot(3\cdot 10^{-2})^2 \text{кг}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{м}^2 = 22{,}1\cdot 10^{-6} \text{ Дж},$$

или $E = 22{,}1$ мкДж.

Пример 3. На концах тонкого стержня длиной $l = 1$ м и массой $m_3 = 400$ г укреплены шарики малых размеров массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (точка O на рис. 6.2). Определить период T колебаний, совершаемых стержнем.

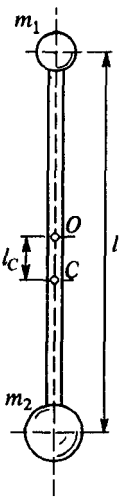


Рис. 6.2

Решение. Период колебаний физического маятника, каким является стержень с шариками, определяется соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_C}}, \qquad (5)$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; m — его масса; l_C — расстояние от центра масс маятника до оси.

Момент инерции данного маятника равен сумме моментов инерции шариков J_1 и J_2 и стержня J_3:

$$J = J_1 + J_2 + J_3. \qquad (6)$$

Принимая шарики за материальные точки, выразим моменты их инерций: $J_1 = m_1(l/2)^2$; $J_2 = m_2(l/2)^2$. Так как ось проходит через середину стержня, то его момент инерции относительно этой оси $J_3 = m_3 l^2/12$. Подставив полученные выражения J_1, J_2 и J_3 в формулу (6), найдем общий момент инерции физического маятника:

$$J = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_3\frac{l^2}{12} = \frac{l^2(3m_1 + 3m_2 + m_3)}{12}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$J = 0{,}158 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Масса маятника состоит из масс шариков и массы стержня:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}9 \text{ кг}.$$

Расстояние l_C центра масс маятника от оси колебаний найдем, исходя из следующих соображений. Если ось x направить вдоль стержня и начало координат совместить с точкой O, то искомое расстояние l_C равно координате центра масс маятника, т. е.

$$l_C = x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1(-l/2) + m_2(l/2) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3},$$

или

$$l_C = \frac{(m_2 - m_1)l}{2(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{(m_2 - m_1)l}{2m}.$$

Подставив значения величин m_1, m_2, m, l и произведя вычисления, найдем

$$l_C = 5{,}55 \text{ см}.$$

Произведя расчеты по формуле (5), получим период колебаний физического маятника:

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{0{,}158}{0{,}9 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}55 \cdot 10^{-2}}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}}} = 11{,}2 \text{ с}.$$

Пример 4. Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 1$ м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром $d = l/2$ и массой m_1. Горизонтальная ось Oz маятника проходит через середину стержня перпендикулярно ему (рис. 6.3). Определить период T колебаний такого маятника.

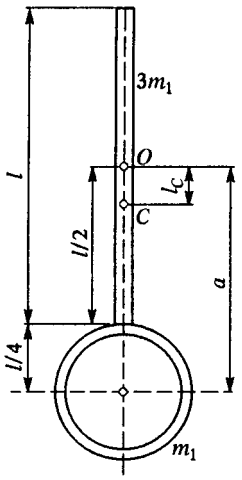


Рис. 6.3

Решение. Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_C}}, \tag{7}$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; m — его масса; l_C — расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_1 и обруча J_2:

$$J = J_1 + J_2. \tag{8}$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле $J_1 = ml^2/12$. В данном случае $m = 3m_1$ и

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{4}.$$

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера: $J = J_0 + ma^2$, где J — момент инерции относительно произвольной оси; J_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; a — расстояние между указанными осями. Применив эту формулу к обручу, получим

$$J_2 = m_1 \left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_1 \left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} m_1 l^2.$$

Подставив выражения J_1 и J_2 в формулу (8), найдем момент инерции маятника относительно оси вращения:

$$J = \frac{1}{4}m_1l^2 + \frac{5}{8}m_1l^2 = \frac{7}{8}m_1l^2.$$

Расстояние l_C от оси маятника до его центра масс равно

$$l_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{3m_1 \cdot 0 + m_1(3l/4)}{3m_1 + m_1} = \frac{(3/4)m_1 l}{4m_1}, \quad \text{или} \quad l_C = \frac{3}{16}l.$$

Подставив в формулу (7) выражения J, l_C и массы маятника ($m = 3m_1 + m_1 = 4m_1$), найдем период его колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(7/8)m_1l^2}{4m_1g \cdot (3/16)l}} = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{6g}}.$$

После вычисления по этой формуле получим

$$T = 2{,}17 \text{ с}.$$

Пример 5. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1 = A_1\cos\omega(t+\tau_1)$; $x_2 = A_2\cos\omega(t+\tau_2)$, где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$. 1. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний. 2. Найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Решение. 1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{9}$$

Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \omega\tau_1), \quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \omega\tau_2). \tag{10}$$

Из сравнения выражений (10) с равенством (9) находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$$\varphi_1 = \omega\tau_1 = \frac{\pi}{6} \text{ рад} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \omega\tau_2 = \frac{\pi}{2} \text{ рад}.$$

2. Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис. 6.4. Согласно теореме косинусов, получим

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}, \tag{11}$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз составляющих колебаний. Так как $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то, подставляя найденные значения φ_2 и φ_1, получим $\Delta\varphi = \pi/3$ рад.

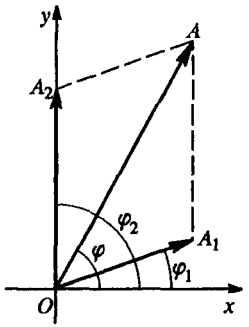


Рис. 6.4

Подставим значения A_1, A_2 и $\Delta\varphi$ в формулу (11) и произведем вычисления:

$$A = 2{,}65 \text{ см}.$$

Тангенс начальной фазы φ результирующего колебания определим непосредственно из рис. 6.4:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

откуда начальная фаза

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Подставим значения A_1, A_2, φ_1, φ_2 и произведем вычисления:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 70{,}9^\circ = 0{,}394\pi \text{ рад}.$$

Так как угловые частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 2{,}65$ см, $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$, $\varphi = 0{,}394\pi$ рад.

Пример 6. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых

$$x = A_1 \cos\omega t, \tag{12}$$

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t, \tag{13}$$

где $A_1 = 1$ см, $A = 2$ см, $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$. Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений (12) и (13). Для этого воспользуемся формулой $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1/2)(1+\cos\alpha)}$. В данном случае $\alpha = \omega t$, поэтому

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t = A_2 \sqrt{\frac{1+\cos\omega t}{2}}.$$

Так как согласно формуле (12) $\cos\omega t = x/A_1$, то уравнение траектории

$$y = A_2 \sqrt{\frac{1 + x/A_1}{2}}. \tag{14}$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Из уравнений (12) и (13) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от -1 до $+1$ см по оси Ox и от -2 до $+2$ см по оси Oy.

Для построения траектории найдем по уравнению (14) значения y, соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$ см, и составим таблицу:

x, см	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$
y, см	0	$\pm 0{,}707$	± 1	$\pm 1{,}41$	$\pm 1{,}73$	± 2

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xOy найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (12) и (13) (рис. 6.5).

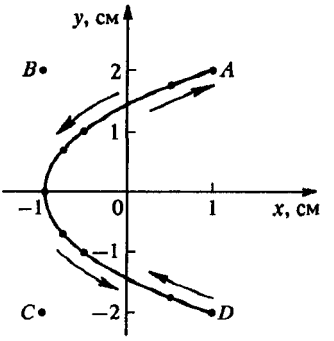


Рис. 6.5

Для того чтобы указать направление движения точки, проследим за тем, как изменяется ее положение с течением времени. В начальный момент $t = 0$ координаты точки равны $x(0) = 1$ см и $y(0) = 2$ см. В последующий момент времени, например при $t_1 = 1$ с, координаты точек изменятся и станут равными $x(1) = -1$ см, $y(1) = 0$. Зная положения точек в начальный и последующий (близкий) моменты времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рис. 6.5 это направление движения указано стрелкой (от точки A к началу координат). После того как в момент $t_2 = 2$ с колеблющаяся точка достигнет точки D, она будет двигаться в обратном направлении.

ЗАДАЧИ

Кинематика гармонических колебаний

6.1. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = A\cos\omega(t+\tau)$, где $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$, $\tau = 0{,}2$ с. Определить период T и начальную фазу φ колебаний.

6.2. Определить период T, частоту ν и начальную фазу φ колебаний, заданных уравнением $x = A\sin\omega(t+\tau)$, где $\omega = 2{,}5\pi\,\text{с}^{-1}$, $\tau = 0{,}4$ с.

6.3. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ, если: 1) $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 2) $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 3) $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) > 0$; 4) $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

6.4. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ, если: 1) $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 2) $x(0) = 2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$; 3) $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и

$\dot{x}(0) < 0$; 4) $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

6.5. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 2$ см; $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$; $\varphi = \pi/4$ рад. Построить графики зависимости от времени: 1) смещения $x(t)$; 2) скорости $\dot{x}(t)$; 3) ускорения $\ddot{x}(t)$.

6.6. Точка совершает колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t = 0$ смещение $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) < 0$. Определить фазу $(\omega t + \varphi)$ для двух моментов времени: 1) когда смещение $x = 1$ см и $\dot{x} > 0$; 2) когда скорость $\dot{x} = -6$ см/с и $x < 0$.

6.7. Точка равномерно движется по окружности против часовой стрелки с периодом $T = 6$ с. Диаметр d окружности равен 20 см. Написать уравнение движения проекции точки на ось x, проходящую через центр окружности, если в момент времени, принятый за начальный, проекция на ось x равна нулю. Найти смещение x, скорость $\dot{x}$ и ускорение $\ddot{x}$ проекции точки в момент $t = 1$ с.

6.8. Определить максимальные значения скорости $\dot{x}_{\max}$ и ускорения $\ddot{x}_{\max}$ точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и циклической частотой $\omega = \pi/2\,\text{с}^{-1}$.

6.9. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos\omega t$, где $A = 5$ см; $\omega = 2\,\text{с}^{-1}$. Определить ускорение $|\ddot{x}|$ точки в момент времени, когда ее скорость $\dot{x} = 8$ см/с.

6.10. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение $x_{\max}$ точки равно 10 см, наибольшая скорость $\dot{x}_{\max} =$ $= 20$ см/с. Найти циклическую частоту ω колебаний и максимальное ускорение $\ddot{x}_{\max}$ точки.

6.11. Максимальная скорость $\dot{x}_{\max}$ точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение $\ddot{x}_{\max} = 100\,\text{см/с}^2$. Найти угловую частоту ω колебаний, их период T и амплитуду A. Написать уравнение колебаний, приняв начальную фазу равной нулю.

6.12. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin\omega t$. В некоторый момент времени смещение x_1 точки оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение x_2 стало равным 8 см. Найти амплитуду A колебаний.

6.13. Колебания точки происходят по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость $\dot{x} = 20$ см/с и ускорение $\ddot{x} = -80\,\text{см/с}^2$. Найти амплитуду A, угловую частоту ω, период T колебаний и фазу $(\omega t + \varphi)$ в рассматриваемый момент времени.

Сложение колебаний

6.14. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами $A_1 = 10$ см и $A_2 = 6$ см складыва-

ются в одно колебание с амплитудой $A = 14\,\text{см}$. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний.

6.15. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний.

6.16. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинаковых направления и периода: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ и $x_2 = A_2 \sin\omega(t+\tau)$, где $A_1 = A_2 = 1\,\text{см}$; $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$; $\tau = 0{,}5\,\text{с}$. Найти уравнение результирующего колебания.

6.17. Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ и $x_2 = A_2 \cos\omega t$, где $A_1 = 1\,\text{см}$; $A_2 = 2\,\text{см}$; $\omega = 1\,\text{с}^{-1}$. Определить амплитуду A результирующего колебания, его частоту ν и начальную фазу φ. Найти уравнение этого движения.

6.18. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5\,\text{с}$ и амплитудами $A_1 = A_2 = 2\,\text{см}$. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму сложения амплитуд.

6.19. Складываются три гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = T_3 = 2\,\text{с}$ и амплитудами $A_1 = A_2 = A_3 = 3\,\text{см}$. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/3$, $\varphi_3 = 2\pi/3$. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Определить из чертежа амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Найти его уравнение.

6.20. Складываются два гармонических колебания одинаковой частоты и одинакового направления: $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Начертить векторную диаграмму для момента времени $t = 0$. Определить аналитически амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Отложить A и φ на векторной диаграмме. Найти уравнение результирующего колебания (в тригонометрической форме через косинус). Задачу решить для двух случаев: 1) $A_1 = 1\,\text{см}$, $\varphi_1 = \pi/3$, $A_2 = 2\,\text{см}$, $\varphi_2 = 5\pi/6$; 2) $A_1 = 1\,\text{см}$, $\varphi_1 = 2\pi/3$, $A_2 = 1\,\text{см}$, $\varphi_2 = 7\pi/6$.

6.21. Два камертона звучат одновременно. Частоты ν_1 и ν_2 их колебаний соответственно равны 440 и 440,5 Гц. Определить период T биений.

6.22. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемых уравнениями $x = A_1 \sin\omega t$ и $y = A_2 \cos\omega(t+\tau)$, где $A_1 = 2\,\text{см}$, $A_2 = 1\,\text{см}$, $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$, $\tau = 0{,}5\,\text{с}$. Найти уравнение траектории и построить ее, показав направление движения точки.

6.23. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \text{и} \quad y = A_2 \cos \omega (t + \tau),$$

где $A_1 = 4$ см, $A_2 = 8$ см, $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$, $\tau = 1$ с. Найти уравнение траектории точки и построить график ее движения.

6.24. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями:

1) $x = A \cos \omega t$ и $y = A \cos \omega t$;
2) $x = A \cos \omega t$ и $y = A_1 \cos \omega t$;
3) $x = A \cos \omega t$ и $y = A \cos (\omega t + \varphi_1)$;
4) $x = A_2 \cos \omega t$ и $y = A \cos (\omega t + \varphi_2)$;
5) $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_1 \sin \omega t$;
6) $x = A \cos \omega t$ и $y = A_1 \sin \omega t$;
7) $x = A_2 \sin \omega t$ и $y = A_1 \sin \omega t$;
8) $x = A_2 \sin \omega t$ и $y = A \sin (\omega t + \varphi_2)$.

Найти (для восьми случаев) уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять: $A = 2$ см, $A_1 = 3$ см, $A_2 = 1$ см; $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi$.

6.25. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.

6.26. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega t$, где $A_1 = 0{,}5$ см; $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.

6.27. Движение точки задано уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega (t + \tau)$, где $A_1 = 10$ см, $A_2 = 5$ см, $\omega = 2\,\text{с}^{-1}$, $\tau = \pi/4$ с. Найти уравнение траектории и скорости точки в момент времени $t = 0{,}5$ с.

6.28. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = -A_2 \cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см. Найти уравнение тректории и построить ее.

6.29. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и описываемых уравнениями:

1) $x = A \sin \omega t$ и $y = A \cos 2\omega t$;
2) $x = A \cos \omega t$ и $y = A \sin 2\omega t$;

3) $x = A\cos 2\omega t$ и $y = A_1 \cos \omega t$;

4) $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A\cos \omega t$.

Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять: $A = 2$ см; $A_1 = 3$ см.

6.30. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin 0{,}5\omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 3$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.

6.31. Смещение светящейся точки на экране осциллографа является результатом сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний, которые описываются уравнениями:

1) $x = A\sin 3\omega t$ и $y = A\sin 2\omega t$;

2) $x = A\sin 3\omega t$ и $y = A\cos 2\omega t$;

3) $x = A\sin 3\omega t$ и $y = A\cos \omega t$.

Применяя графический метод сложения и соблюдая масштаб, построить траекторию светящейся точки на экране. Принять $A = 4$ см.

Динамика гармонических колебаний. Маятники

6.32. Материальная точка массой $m = 50$ г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A\cos \omega t$, где $A = 10$ см, $\omega = 5\,\text{с}^{-1}$. Найти силу F, действующую на точку, в двух случаях: 1) в момент, когда фаза $\omega t = \pi/3$; 2) в положении наибольшего смещения точки.

6.33. Колебания материальной точки массой $m = 0{,}1$ г происходят согласно уравнению $x = A\cos \omega t$, где $A = 5$ см; $\omega = 20\,\text{с}^{-1}$. Определить максимальные значения возвращающей силы $F_{\max}$ и кинетической энергии $T_{\max}$.

6.34. Найти возвращающую силу F в момент $t = 1$ с и полную энергию E материальной точки, совершающей колебания по закону $x = A\cos \omega t$, где $A = 20$ см; $\omega = 2\pi/3\,\text{с}^{-1}$. Масса m материальной точки равна 10 г.

6.35. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A\cos \omega t$, где $A = 8$ см, $\omega = \pi/6\,\text{с}^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила F в первый раз достигла значения -5 мН, потенциальная энергия П точки стала равной 100 мкДж. Найти этот момент времени t и соответствующую ему фазу ωt.

6.36. Грузик массой $m = 250$ г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом $T = 1$ с. Определить жесткость k пружины.

6.37. К спиральной пружине подвесили грузик, в результате чего пружина растянулась на $x = 9$ см. Каков будет период T колебаний грузика, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

6.38. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 4$ см. Определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость k пружины равна 1 кН/м.

6.39. Найти отношение длин двух математических маятников, если отношение периодов их колебаний равно 1,5.

6.40. Математический маятник длиной $l = 1$ м установлен в лифте. Лифт поднимается с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2. Определить период T колебаний маятника.

6.41. На концах тонкого стержня длиной $l = 30$ см укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку, удаленную на $d = 10$ см от одного из концов стержня. Определить приведенную длину L и период T колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебречь.

6.42. На стержне длиной $l = 30$ см укреплены два одинаковых грузика: один — в середине стержня, другой — на одном из его концов. Стержень с грузиком колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину L и период T колебаний такой системы. Массой стержня пренебречь.

6.43. Система из трех грузов, соединенных стержнями длиной $l = 30$ см (рис. 6.6), колеблется относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа. Найти период T колебаний системы. Массами стержней пренебречь, грузы рассматривать как материальные точки.

6.44. Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус R обруча равен 30 см. Вычислить период T колебаний обруча.

6.45. Однородный диск радиусом $R = 30$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период T его колебаний?

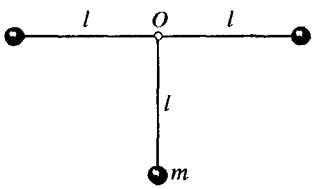


Рис. 6.6

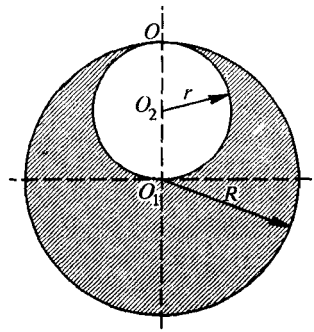


Рис. 6.7

6.46. Диск радиусом $R = 24$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определить приведенную длину L и период T колебаний такого маятника.

6.47. Из тонкого однородного диска радиусом $R = 20$ см вырезана часть, имеющая вид круга радиусом $r = 10$ см, так, как это показано на рис. 6.7. Оставшаяся часть диска колеблется относительно горизонтальной оси O, совпадающей с одной из образующих цилиндрической поверхности диска. Найти период T колебаний такого маятника.

6.48. Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $l_2 = 60$ см синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние a центра масс стержня от оси колебаний.

6.49. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $l = 120$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние a от центра масс стержня. При каком значении a период T колебаний имеет наименьшее значение?

6.50. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень массой m с укрепленным на нем маленьким шариком массой m. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O на стержне. Определить период T гармонических колебаний маятника для случаев *а*, *б*, *в*, *г*, изображенных на рис. 6.8. Длина l стержня равна 1 м. Шарик рассматривать как материальную точку.

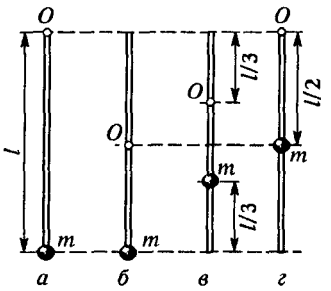


Рис. 6.8

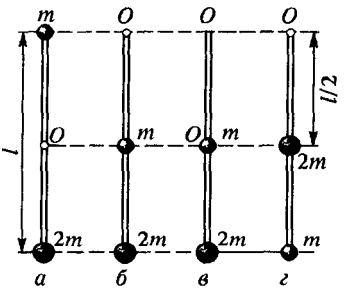


Рис. 6.9

6.51. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень массой m с укрепленными на нем двумя маленькими шариками массами m и $2m$. Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O на стержне. Определить частоту ν гармонических колебаний маятника для случаев *а*, *б*, *в*, *г*, изображенных на рис. 6.9. Длина l стержня равна 1 м. Шарики рассматривать как материальные точки.

6.52. Тело массой $m = 4$ кг, закрепленное на горизонтальной оси, совершало колебания с периодом $T_1 = 0{,}8$ с. Когда на эту ось был насажен диск так, что его ось совпала с осью колебаний тела, период T_2 колебаний стал равным 1,2 с. Радиус R диска равен 20 см, масса его равна массе тела. Найти момент инерции J тела относительно оси колебаний.

6.53. Ареометр массой $m = 50$ г, имеющий трубку диаметром $d = 1$ см, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период T этих колебаний.

6.54. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения $S = 0{,}4$ см^2 быстро вливают ртуть массой $m = 200$ г. Определить период T колебаний ртути в трубке.

6.55. Набухшее бревно, сечение которого постоянно по всей длине, погрузилось вертикально в воду так, что над водой находится лишь малая (по сравнению с длиной) его часть. Период T колебаний бревна равен 5 с. Определить длину l бревна.

Затухающие колебания

6.56. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 5$ мин уменьшилась в два раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

6.57. За время $t = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в три раза. Определить коэффициент затухания δ.

6.58. Амплитуда колебаний маятника длиной $l = 1$ м за время $t = 10$ мин уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент затухания θ.

6.59. Логарифмический декремент колебаний θ маятника равен 0,003. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

6.60. Гиря массой $m = 500$ г подвешена к спиральной пружине жесткостью $k = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания $\theta = 0{,}004$. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в $n = 2$ раза. За какое время t произойдет это уменьшение?

6.61. Тело массой $m = 5$ г совершает затухающие колебания. В течение времени $t = 50$ с тело потеряло 60% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления b.

6.62. Определить период T затухающих колебаний, если период T_0 собственных колебаний системы равен 1 с и логарифмический декремент затухания $\theta = 0{,}628$.

6.63. Найти число N полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в $n = 2$ раза. Логарифмический декремент затухания $\theta = 0{,}01$.

6.64. Тело массой $m = 1$ кг находится в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}05$ кг/с. С помощью двух одинаковых пружин жесткостью $k = 50$ Н/м каждое тело удерживается в положении равновесия, пружины при этом не деформированы (рис. 6.10). Тело сместили от положения равновесия и отпустили. Определить: 1) коэффициент затухания δ; 2) частоту ν колебаний; 3) логарифмический декремент затухания θ; 4) число N колебаний, по прошествии которых амплитуда уменьшится в e раз.

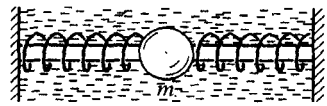


Рис. 6.10

Вынужденные колебания. Резонанс

6.65. Под действием силы тяжести электродвигателя консольная балка, на которой он установлен, прогнулась на $h = 1$ мм. При какой частоте вращения n якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса?

6.66. Вагон массой $m = 80$ т имеет четыре рессоры. Жесткость k пружин каждой рессоры равна 500 кН/м. При какой скорости v вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина l рельса равна 12,8 м?

6.67. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 998$ Гц.

6.68. Определить, на сколько резонансная частота отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания $\delta = 400\,\text{с}^{-1}$.

6.69. Определить логарифмический декремент затухания θ колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц.

6.70. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период T того же маятника стал равным 0,56 с. Определить резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$ колебаний.

6.71. Пружинный маятник (жесткость k пружины равна 10 Н/м, масса m груза равна 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Определить коэффициент затухания δ и резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = .10$ мН.

6.72. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 1$ г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{\text{рез}} = 0{,}5$ см и частота ν_0 собственных колебаний равна 10 Гц.

6.73. Амплитуды вынужденных гармонических колебаний при частотах $\nu_1 = 400$ Гц и $\nu_2 = 600$ Гц равны между собой. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$. Затуханием пренебречь.

6.74. К спиральной пружине жесткостью $k = 10$ Н/м подвесили грузик массой $m = 10$ г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления r равным 0,1 кг/с, определить: 1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$, если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону и ее амплитудное значение $F_0 = 0{,}02$ Н; 4) отношение резонансной амплитуды к статическому смещению под действием силы F_0.

6.75. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота изменения вынуждающей силы будет больше резонансной частоты: 1) на 10%? 2) в два раза? Коэффициент затухания δ в обоих случаях принять равным $0{,}1\omega_0$ (ω_0 — циклическая частота собственных колебаний).

§ 7. Волны в упругой среде. Акустика

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c_{зв}}\right), \quad \text{или} \quad \xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx),$$

где $\xi(x, t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; ω — циклическая частота; $c_{зв}$ — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость); k — волновое число: $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны.

• Длина волны связана с периодом T колебаний и частотой ν соотношениями

$$\lambda = c_{зв}T \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{c_{зв}}{\nu}.$$

• Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно Δx,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x,$$

где λ — длина волны.

• Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = 2A\cos kx \cdot \cos\omega t = A_{ст}\cos kx \cdot \cos\omega t,$$

где $A_{ст}$ — амплитуда пучности стоячей волны.

• Фазовая скорость продольных волн в упругой среде:

в твердых телах $c_{зв} = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга; ρ — плотность вещества;

в газах $c_{зв} = \sqrt{\gamma RT/M}$, или $c_{зв} = \sqrt{\gamma p/\rho}$, где γ — показатель адиабаты ($\gamma = c_p/c_V$ — отношение удельных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме); R — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; M — молярная масса; p — давление газа.

• Акустический эффект Доплера

$$\nu = \frac{c_{зв} + u_{пр}}{c_{зв} - u_{ист}}\nu_0,$$

где ν — частота звука, воспринимаемого движущимся прибором (или ухом); $c_{зв}$ — скорость звука в среде; $u_{пр}$ — скорость прибора относительно среды; $u_{ист}$ — скорость источника звука относительно среды; ν_0 — частота звука, испускаемого источником.

• Средняя объемная плотность энергии звукового поля

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2,$$

где ρ — плотность среды; ω — циклическая частота колебаний точек среды; A — амплитуда колебаний.

• Энергия звукового поля, заключенного в некотором объеме V,

$$W = \langle w\rangle V.$$

• Поток звуковой энергии

$$\Phi = \frac{W}{t},$$

где W — энергия, переносимая через данную поверхность за время t.

• Интенсивность звука (плотность потока энергии звуковой волны)

$$I = \frac{\Phi}{S}.$$

• Интенсивность звука связана со средней объемной плотностью энергии звукового поля соотношением

$$I = \langle w\rangle c_{зв},$$

где $c_{зв}$ — скорость звука в среде.

• Связь мощности N точечного изотропного источника звука с интенсивностью звука:

$$I = \frac{N}{4\pi r^2},$$

где r — расстояние от источника звука до точки звукового поля, в которой определяется интенсивность.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $c_{\text{зв}} = 15$ м/с. Период T колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A = 2$ см. Определить: 1) длину волны λ; 2) фазу φ колебаний, смещение ξ, скорость $\dot{\xi}$ и ускорение $\ddot{\xi}$ точки, отстоящей на расстоянии $x = 45$ м от источника волн в момент $t = 4$ с; 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20$ м и $x_2 = 30$ м.

Решение. 1. Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и может быть найдена из соотношения

$$\lambda = c_{\text{зв}} T.$$

Подставив значения величин $c_{\text{зв}}$ и T, получим

$$\lambda = 18 \text{ м}.$$

2. Запишем уравнение волны:

$$\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_{\text{зв}}} \right), \tag{1}$$

где ξ — смещение колеблющейся точки; x — расстояние точки от источника волн; $c_{\text{зв}}$ — скорость распространения волн.

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{c_{\text{зв}}} \right), \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c_{\text{зв}}} \right),$$

где учтено, что $\omega = 2\pi/T$.

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$$\varphi = 5{,}24 \text{ рад}, \quad \text{или} \quad \varphi = 300°.$$

Смещение точки определим, подставив в уравнение (1) значения амплитуды A и фазы φ:

$$\xi = 1 \text{ см}.$$

Скорость $\dot{\xi}$ точки находим, взяв первую производную от смещения по времени:

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_{\text{зв}}} \right) = -\frac{2\pi A}{T} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_{\text{зв}}} \right) = \frac{2\pi A}{T} \sin \varphi.$$

Подставив значения величин π, A, T и φ и произведя вычисления, получим

$$\dot{\xi} = 9 \text{ см/с}.$$

Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому

$$\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{dt} = -A\omega^2 \cos\omega\left(t - \frac{x}{c_{зв}}\right) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2}\cos\varphi.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$\ddot{\xi} = 27{,}4 \text{ см/с}^2.$$

3. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x.$$

Подставив значения величин λ, x_1 и x_2 и вычислив, получим

$$\Delta\varphi = 3{,}49 \text{ рад}, \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = 200°.$$

Пример 2. На расстоянии $l = 4$ м от источника плоской волны частотой $\nu = 440$ Гц перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определить расстояния от источника волн до точек, в которых будут первые три узла и три пучности стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость $c_{зв}$ волны считать равной 440 м/с.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль луча бегущей волны и начало O координат совпадало с

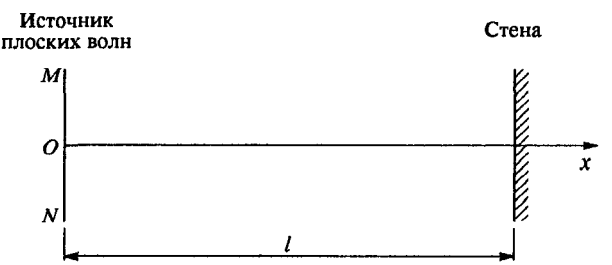


Рис. 7.1

точкой, находящейся на источнике MN плоской волны (рис. 7.1). С учетом этого уравнение бегущей волны запишется в виде

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx). \tag{2}$$

Поскольку в точку с координатой x волна возвратится, пройдя дважды расстояние $l - x$, и при отражении от стены, как среды более плотной, изменит фазу на π, то уравнение отраженной волны может быть записано в виде

$$\xi_2 = A\cos\omega t - k\big(x + 2(l - x)\big) + \pi.$$

После очевидных упрощений получим

$$\xi_2 = -A\cos\big(\omega t - k(2l - x)\big). \tag{3}$$

Сложив уравнения (2) и (3), найдем уравнение стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) - A\cos\big(\omega t - k(2l - x)\big).$$

Воспользовавшись формулой разности косинусов, найдем

$$\xi = -2A\sin k(l - x)\sin(\omega t - kl).$$

Так как выражение $A\sin k(l - x)$ не зависит от времени, то, взятое по модулю, оно может рассматриваться как амплитуда стоячей волны:

$$A_{\text{ст}} = |2A\sin k(l - x)|.$$

Зная выражение амплитуды, можем найти координаты узлов и пучностей.

Узлы возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны равна нулю: $|2A\sin k(l - x)| = 0$. Это равенство выполняется для точек, коор-

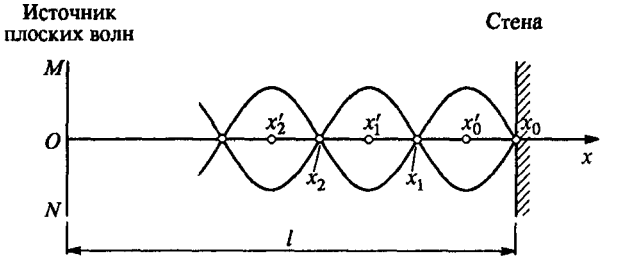


Рис. 7.2

динаты x_n которых удовлетворяют условию

$$k(l - x_n) = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Но $k = 2\pi/\lambda$ или, так как $\lambda = c_{\text{зв}}/\nu$,

$$k = \frac{2\pi\nu}{c_{\text{зв}}}. \tag{5}$$

Подставив это выражение k в (4), получим

$$2\pi\nu(l - x_n) = n\pi c_{\text{зв}},$$

откуда координаты узлов

$$x_n = l - \frac{nc_{\text{зв}}}{2\nu}.$$

Подставив сюда значения l, $c_{\text{зв}}$, ν и $n = 0, 1, 2$, найдем координаты первых трех узлов:

$$x_0 = 4 \text{ м}, \quad x_1 = 3{,}61 \text{ м}, \quad x_2 = 3{,}23 \text{ м}.$$

Пучности возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны максимальна: $2A \sin k(l - x') = 2A$. Это равенство выполняется для точек, координаты x'_n которых удовлетворяют условию $k(l - x'_n) = (2n+1)(\pi/2)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Выразив здесь k по (5), получим

$$4\nu x'_n = 4\nu l - (2n + 1)c_{\text{зв}},$$

откуда координаты пучностей

$$x'_n = l - \frac{(2n + 1)c_{\text{зв}}}{4\nu}.$$

Подставив сюда значения l, $c_{\text{зв}}$, ν и $n = 0, 1, 2$, найдем координаты первых трех пучностей:

$$x'_0 = 3{,}81 \text{ м}, \quad x'_1 = 3{,}42 \text{ м}, \quad x'_2 = 3{,}04 \text{ м}.$$

Границы максимальных смещений точек среды в зависимости от их координат изображены на рис. 7.2. Здесь же отмечены координаты x_0, x_1, x_2, ... узлов и координаты x'_0, x'_1, x'_2, ... пучностей стоячей волны.

Пример 3. Источник звука частотой $\nu = 18$ кГц приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну длиной $\lambda = 1{,}7$ см. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызвали колебания резонатора? Температура T воздуха равна 290 К.

Решение. Согласно принципу Доплера, частота ν звука, воспринимаемая прибором (резонатором), зависит от скорости $u_{\text{ист}}$ источника звука и скорости $u_{\text{пр}}$ прибора. Эта зависимость выражается формулой

$$\nu = \frac{c_{\text{зв}} + u_{\text{пр}}}{c_{\text{зв}} - u_{\text{ист}}}\nu_0, \tag{6}$$

где $c_{\text{зв}}$ — скорость звука в данной среде; ν_0 — частота звуковых волн, излучаемых источником.

Учитывая, что резонатор остается неподвижным ($u_{\text{пр}} = 0$), из формулы (6) получим $\nu = \dfrac{c_{\text{зв}}}{c_{\text{зв}} - u_{\text{ист}}}\nu_0$, откуда

$$u_{\text{ист}} = c_{\text{зв}}\left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right). \tag{7}$$

В этом выражении неизвестны значения скорости $c_{\text{зв}}$ звука и частоты ν.

Скорость звука в газах зависит от природы газа и температуры и определяется по формуле

$$c_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \tag{8}$$

Чтобы волны, приходящие к резонатору, вызвали его колебания, частота ν воспринимаемых резонатором волн должна совпадать с собственной частотой $\nu_{рез}$ резонатора, т. е.

$$\nu = \nu_{рез} = \frac{c_{зв}}{\lambda_{рез}}, \tag{9}$$

где $\lambda_{рез}$ — длина волны собственных колебаний резонатора.

Подставив выражения $c_{зв}$ и ν из равенства (8) и (9) в формулу (7), получим

$$u_{ист} = c_{зв}\left(1 - \frac{\nu_0 \lambda_{рез}}{c_{зв}}\right) = c_{зв} - \nu_0 \lambda_{рез},$$

или

$$u_{ист} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} - \nu_0 \lambda_{рез}.$$

Взяв значения $\gamma = 1{,}4$, $M = 0{,}029$ кг/моль, а также значения R, T, ν_0, $\lambda_{рез}$ и подставив их в последнюю формулу, после вычислений получим

$$u_{ист} = 36 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧИ

Уравнение плоской волны

7.1. Задано уравнение плоской волны $\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$, где $A = 0{,}5$ см, $\omega = 628\,с^{-1}$, $k = 2\,м^{-1}$. Определить: 1) частоту колебаний ν и длину волны λ; 2) фазовую скорость $c_{зв}$; 3) максимальные значения скорости $\dot{\xi}_{max}$ и ускорения $\ddot{\xi}_{max}$ колебаний частиц среды.

7.2. Показать, что выражение $\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$ удовлетворяет волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c_{зв}^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ при условии, что $\omega = kc_{зв}$.

7.3. Плоская звуковая волна возбуждается источником колебаний частоты $\nu = 200$ Гц. Амплитуда A колебаний источника равна 4 мм. Написать уравнение колебаний источника $\xi(0, t)$ если в начальный момент смещение точек источника максимально. Найти смещение $\xi(x, t)$ точек среды, находящихся на расстоянии $x = 100$ см от источника, в момент $t = 0{,}1$ с. Скорость $c_{зв}$ звуковой волны принять равной 300 м/с. Затуханием пренебречь.

7.4. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 0{,}5$ кГц и амплитуду $A = 0{,}25$ мм, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти: 1) скорость $c_{зв}$ распространения волн; 2) максимальную скорость $\dot{\xi}_{max}$ частиц среды.

7.5. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0{,}2$ мм и длину волны $\lambda = 1{,}2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти: 1) смещение $\xi(x, t)$ в момент $t = 7$ мс; 2) скорость $\dot{\xi}$ и ускорение $\ddot{\xi}$ для того же момента времени. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

7.6. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии. Амплитуда A колебаний равна 10 см. Как велико смещение точки, удаленной от источника на $x = 3\lambda/4$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9T$?

7.7. Волна с периодом $T = 1{,}2$ с и амплитудой колебаний $A = 2$ см распространяется со скоростью $c_{зв} = 15$ м/с. Чему равно смещение $\xi(x, t)$ точки, находящейся на расстоянии $x = 45$ м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t = 4$ с?

7.8. Две точки находятся на расстоянии $\Delta x = 50$ см друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $c_{зв} = 50$ м/с. Период T колебаний равен 0,05 с. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках.

7.9. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на $x = 2$ м от источника. Частота ν колебаний равна 5 Гц; волны распространяются со скоростью $c_{зв} = 40$ м/с.

7.10. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $c_{зв} = 100$ м/с. Наименьшее расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1 м. Определить частоту ν колебаний.

7.11. Определить скорость $c_{зв}$ распространения волны в упругой среде, если разность $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 10$ см, равна $\pi/3$. Частота ν колебаний равна 25 Гц.

Скорость звука[15])

7.12. Найти скорость $c_{зв}$ распространения продольных упругих колебаний в следующих металлах: 1) алюминии; 2) меди; 3) вольфраме.

7.13. Определить максимальное и минимальное значения длины λ звуковых волн, воспринимаемых человеческим ухом, соот-

---

[15]) В задачах, где в условии не указана скорость звука и не заданы величины, по которым ее можно вычислить, значение скорости следует брать из табл. 16.

ветствующие граничным частотам $\nu_1 = 16$ Гц и $\nu_2 = 20$ кГц. Скорость звука принять равной 340 м/с.

7.14. Определить скорость $c_{зв}$ звука в азоте при температуре $T = 300$ К.

7.15. Найти скорость $c_{зв}$ звука в воздухе при температурах $T_1 = 290$ К и $T_2 = 350$ К.

7.16. Наблюдатель, находящийся на расстоянии $l = 800$ м от источника звука, слышит звук, пришедший по воздуху, на $\Delta t = 1{,}78$ с позднее, чем звук, пришедший по воде. Найти скорость $c_{зв}$ звука в воде, если температура T воздуха равна 350 К.

7.17. Скорость $c_{зв}$ звука в некотором газе при нормальных условиях равна 308 м/с. Плотность ρ газа равна 1,78 кг/м^3. Определить отношение c_p/c_V для данного газа.

7.18. Найти отношение скоростей $c_{зв1}/c_{зв2}$ звука в водороде и углекислом газе при одинаковой температуре газов.

7.19. Температура T воздуха у поверхности земли равна 300 К; при увеличении высоты она понижается на $\Delta T = 7$ мК на каждый метр высоты. За какое время звук, распространяясь, достигнет высоты $h = 8$ км?

Суперпозиция волн

7.20. Имеются два источника, совершающие колебания в одинаковой фазе и возбуждающие в окружающей среде плоские волны одинаковой частоты и амплитуды ($A_1 = A_2 = 1$ мм). Найти амплитуду A колебаний точки среды, отстоящей от одного источника колебаний на расстоянии $x_1 = 3{,}5$ м и от другого — на $x_2 = 5{,}4$ м. Направления колебаний в рассматриваемой точке совпадают. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ м.

7.21. Стоячая волна образуется при наложении бегущей волны и волны, отраженной от границы раздела сред, перпендикулярной направлению распространения волны. Найти положения (расстояния от границы раздела сред) узлов и пучностей стоячей волны, если отражение происходит: 1) от среды менее плотной; 2) от среды более плотной. Скорость $c_{зв}$ распространения звуковых колебаний равна 340 м/с и частота $\nu = 3{,}4$ кГц.

7.22. Определить длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние l между: 1) первой и седьмой пучностями равно 15 см; 2) первым и четвертым узлом равно 15 см.

7.23. В трубе длиной $l = 1{,}2$ м находится воздух при температуре $T = 300$ К. Определить минимальную частоту ν_{min} возможных колебаний воздушного столба в двух случаях: 1) труба открыта; 2) труба закрыта.

7.24. Широкая трубка, закрытая снизу и расположенная вертикально, наполнена до краев водой. Над верхним отверстием трубки помещен звучащий камертон, частота ν колебаний которого равна

440 Гц. Через кран, находящийся внизу, воду медленно выпускают. Когда уровень воды в трубке понижается на $\Delta H = 19{,}5$ см, звук камертона усиливается. Определить скорость $c_{зв}$ звука в условиях опыта.

7.25. Один из способов измерения скорости звука состоит в следующем. В широкой трубке A может перемещаться поршень B. Перед открытым концом трубки A, соединенным с помощью резиновой трубки с ухом наблюдателя, расположен звучащий камертон К (рис. 7.3). Отодвигая поршень B от конца трубки A, наблюдатель отмечает ряд следующих друг за другом увеличений

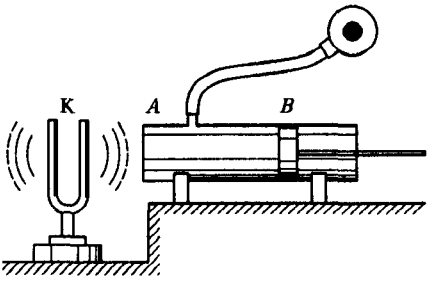


Рис. 7.3

и уменьшений громкости звука. Найти скорость $c_{зв}$ звука в воздухе, если при частоте колебаний $\nu = 440$ Гц двум последовательным усилениям интенсивности звука соответствует расстояние Δl между положениями поршня, равное 0,375 м.

7.26. На рис. 7.4 изображен прибор, служащий для определения скорости звука в твердых телах и газах. В латунном стержне A, зажатом посередине, возбуждаются колебания. При определенном положении легкого кружочка B, закрепленного на конце

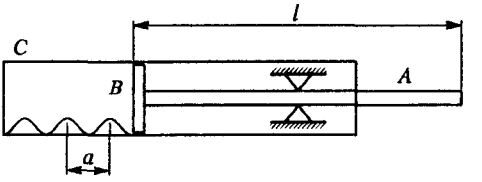


Рис. 7.4

стержня, пробковый порошок, находящийся в трубке C, расположится в виде небольших кучек на равных расстояниях. Найти скорость $c_{зв}$ звука в латуни, если расстояние a между кучками оказалось равным 8,5 см. Длина стержня $l = 0{,}8$ м.

7.27. Стальной стержень длиной $l = 1$ м, закрепленный посередине, натирают суконкой, посыпанной канифолью. Определить

частоту ν возникающих при этом собственных продольных колебаний стержня. Скорость $c_{зв}$ продольных волн в стали вычислить.

Эффект Доплера[16])

7.28. Поезд проходит мимо станции со скоростью $u = 10$ м/с. Частота ν_0 тона гудка электровоза равна 300 Гц. Определить кажущуюся частоту ν тона для человека, стоящего на платформе, в двух случаях: 1) поезд приближается; 2) поезд удаляется.

7.29. Мимо неподвижного электровоза, гудок которого дает сигнал частотой $\nu_0 = 300$ Гц, проезжает поезд со скоростью $u = 40$ м/с. Какова кажущаяся частота ν тона для пассажира, когда поезд приближается к электровозу? когда удаляется от него?

7.30. Мимо железнодорожной платформы проходит электропоезд. Наблюдатель, стоящий на платформе, слышит звук сирены поезда. Когда поезд приближается, кажущаяся частота звука $\nu_1 = 1100$ Гц; когда удаляется, кажущаяся частота $\nu_2 = 900$ Гц. Найти скорость u электровоза и частоту ν_0 звука, издаваемого сиреной.

7.31. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, высота тона звукового сигнала меняется скачком. Определить относительное изменение частоты $\Delta\nu/\nu$, если скорость u поезда равна 54 км/ч.

7.32. Резонатор и источник звука частотой $\nu_0 = 8$ кГц расположены на одной прямой. Резонатор настроен на длину волны $\lambda = 4{,}2$ см и установлен неподвижно. Источник звука может перемещаться по направляющим вдоль прямой. С какой скоростью u и в каком направлении должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызвали колебания резонатора?

7.33. Поезд движется со скоростью $u = 120$ км/ч. Он дает свисток длительностью $\tau_0 = 5$ с. Какова будет кажущаяся продолжительность τ свистка для неподвижного наблюдателя, если: 1) поезд приближается к нему; 2) удаляется? Принять скорость звука равной 348 м/с.

7.34. Скорый поезд приближается к стоящему на путях электропоезду со скоростью $u = 72$ км/ч. Электропоезд подает звуковой сигнал частотой $\nu_0 = 0{,}6$ кГц. Определить кажущуюся частоту ν звукового сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда.

7.35. На шоссе сближаются две автомашины со скоростями $u_1 = 30$ м/с и $u_2 = 20$ м/с. Первая из них подает звуковой сигнал частотой $\nu_1 = 600$ Гц. Найти кажущуюся частоту ν_2 звука, воспринимаемого водителем второй автомашины, в двух случаях: 1) до встречи; 2) после встречи. Изменится ли ответ (если изменится, то как) в случае подачи сигнала второй машиной?

---

[16]) См. сноску на с. 127

7.36. Узкий пучок ультразвуковых волн частотой $\nu_0 = 50\,\text{кГц}$ направлен от неподвижного локатора к приближающейся подводной лодке. Определить скорость u подводной лодки, если частота ν_1 биений (разность частот колебаний источника и сигнала, отраженного от лодки) равна 250 Гц. Скорость $c_{\text{зв}}$ ультразвука в морской воде принять равной 1,5 км/с.

Энергия звуковых волн[17])

7.37. По цилиндрической трубе диаметром $d = 20\,\text{см}$ и длиной $l = 5\,\text{м}$, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна со средней за период интенсивностью $I = 50\,\text{мВт/м}^2$. Найти энергию W звукового поля, заключенного в трубе.

7.38. Интенсивность звука $I = 1\,\text{Вт/м}^2$. Определить среднюю объемную плотность $\langle w \rangle$ энергии звуковой волны, если звук распространяется в сухом воздухе при нормальных условиях.

7.39. Мощность N изотропного точечного источника звуковых волн равна 10 Вт. Какова средняя объемная плотность $\langle w \rangle$ энергии на расстоянии $r = 10\,\text{м}$ от источника волн? Температуру T воздуха принять равной 250 К.

7.40. Найти мощность N точечного изотропного источника звука, если на расстоянии $r = 25\,\text{м}$ от него интенсивность I звука равна $20\,\text{мВт/м}^2$. Какова средняя объемная плотность $\langle w \rangle$ энергии на этом расстоянии?

---

[17]) См. сноску на с. 127

Глава 2

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§ 8. Молекулярное строение вещества. Законы идеальных газов

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Количество вещества [1]) тела (системы)

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), составляющих тело (систему); N_A — постоянная Авогадро: $N_A = 6{,}02 \times \times 10^{23}$ моль$^{-1}$.

• Молярная масса вещества

$$M = \frac{m}{\nu},$$

где m — масса однородного тела (системы); ν — количество вещества этого тела.

• Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum_i n_i A_{r,i},$$

где n_i — число атомов i-го химического элемента, входящего в состав молекулы данного вещества; $A_{r,i}$ — относительная атомная масса этого элемента. Относительные атомные массы приводятся в таблице Д. И. Менделеева.

• Связь молярной массы M с относительной молекулярной массой M_r вещества

$$M = M_r k,$$

где $k = 10^{-3}$ кг/моль.

---

[1]) Количество вещества — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), содержащихся в системе или теле. Количество вещества выражается в моль. Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

• Молярная масса смеси газов

$$M_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\nu_{\text{см}}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \nu_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} (m_i/M_i)},$$

где ν_i, m_i, M_i — соответственно количество вещества, масса и молярная масса i-го компонента смеси; k — число компонентов смеси.

• Плотность идеального газа

$$\rho = \frac{Mp}{RT}.$$

• Массовая доля[2]) i-го компонента смеси газов

$$w_i = \frac{m_i}{m},$$

где m_i — масса i-го компонента смеси; m — масса смеси.

• Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева)

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad \text{или} \quad pV = \nu RT,$$

где m — масса газа; M — его молярная масса; R — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; ν — количество вещества.

• Закон Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^{k} p_i,$$

где p — давление смеси газов; p_i — парциальное давление i-го компонента смеси; k — число компонентов смеси.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить молярную массу M углекислого газа CO_2.

Решение. Молярную массу данного вещества можно определить по формуле

$$M = M_r k, \tag{1}$$

где M_r — относительная молекулярная масса вещества; $k = 10^{-3}$ кг/моль.

Относительная молекулярная масса молекулы находится суммированием относительных атомных масс A_r атомов, входящих в состав данной молекулы. Молекула CO_2 содержит один атом углерода и два атома

[2]) Массовой долей компонента в смеси называется безразмерная величина, равная отношению массы компонента к массе смеси.

кислорода, атомные массы которых обозначим $A_{r,\mathrm{C}}$ и $A_{r,\mathrm{O}}$. Тогда относительная молекулярная масса молекулы CO_2

$$M_{r,CO_2} = A_{r,C} + 2A_{r,\mathrm{O}}.$$

По таблице Д. И. Менделеева найдем

$$A_{r,\mathrm{C}} = 12 \quad \text{и} \quad A_{r,\mathrm{O}} = 16,$$

соответственно,

$$M_{r,CO_2} = 12 + 2 \cdot 16 = 44.$$

Подставив это значение относительной молекулярной массы, а также значение k в формулу (1), найдем молярную массу углекислого газа:

$$M = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 4{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль}.$$

Пример 2. Найти молярную массу M смеси кислорода массой $m_1 = 25\,\text{г}$ и азота массой $m_2 = 75\,\text{г}$.

Решение. Молярная масса смеси $M_{\text{см}}$ есть отношение массы смеси $m_{\text{см}}$ к количеству вещества смеси $\nu_{\text{см}}$, т. е.

$$M_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\nu_{\text{см}}}. \tag{2}$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси $m_{\text{см}} = m_1 + m_2$. Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов.

Подставив в формулу (2) выражения $m_{\text{см}}$ и $\nu_{\text{см}}$, получим

$$M_{\text{см}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2}. \tag{3}$$

Применив способ, использованный в примере 1, найдем молярные массы M_1 кислорода и M_2 азота:

$$M_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \quad M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Подставим значения величин в (3) и произведем вычисления:

$$M_{\text{см}} = \frac{25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3}/(32 \cdot 10^{-3}) + 75 \cdot 10^{-3}/(28 \cdot 10^{-3})} \text{ кг/моль} =$$

$$= 28{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Пример 3. Определить: 1) число N молекул воды, занимающей при температуре $t = 4\,^\circ\text{C}$ объем $V = 1\,\text{мм}^3$; 2) массу m_1 молекулы воды; 3) диаметр d молекулы воды, считая, что молекулы имеют форму шариков, соприкасающихся друг с другом.

Решение. 1. Число N молекул, содержащихся в теле некоторой массы m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν: $N = N_A\nu$. Так как $\nu = m/M$, где M — молярная масса, то $N = (m/M)N_A$. Выразив в этой формуле массу как произведение плотности ρ на объем V, получим

$$N = \frac{\rho V}{M} N_A. \tag{4}$$

Все величины, кроме молярной массы воды, входящие в (4), известны: $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 (см. табл. 9), $V = 1$ мм$^3 = 1 \cdot 10^{-9}$ м^3, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ (см. табл. 24).

Зная химическую формулу воды (H_2O), найдем молярную массу воды (см. пример 1):

$$M = M_r k = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 16) \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Подставим значения величин в (4) и произведем вычисления:

$$N = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{18 \cdot 10^{-3}} 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{(\text{кг/м})^3 \cdot \text{м}^3}{\text{кг/моль}} \text{моль}^{-1} = 3{,}34 \cdot 10^{19} \text{ молекул}.$$

2. Массу одной молекулы воды найдем делением ее молярной массы на постоянную Авогадро: $m_1 = M/N_A$. Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$m_1 = \frac{18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}}{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 2{,}99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

3. Будем считать, что молекулы плотно прилегают друг к другу, тогда на каждую молекулу диаметром d приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1}.$$

Объем V_1 найдем, разделив молярный объем V_m вещества на число молекул в моле, т. е. на постоянную Авогадро N_A: $V_1 = V_m/N_A$. Молярный объем равен отношению молярной массы к плотности вещества, т. е. $V_m = M/\rho$. Поэтому можем записать, что $V_1 = M/(\rho N_A)$. Подставив полученное выражение V_1 в формулу (4), получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}. \tag{5}$$

Проверим, дает ли правая часть выражения (5) единицу длины:

$$[d] = \left[\frac{[M]}{[\rho][N_A]}\right]^{1/3} = \left[\frac{1 \text{ кг/моль}}{1 \text{ (кг/м)}^3 \cdot 1 \text{ моль}^{-1}}\right]^{1/3} = 1 \text{ м}.$$

Теперь подставим значения величин в формулу (5) и произведем вычисления:

$$d = 3{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{м} = 311\ \text{пм}.$$

Пример 4. В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того как из баллона был израсходован гелий массой $m = 10$ г, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева, применив его дважды к начальному и конечному состояниям газа. Для начального состояния уравнение имеет вид

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1, \tag{6}$$

а для конечного состояния —

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \tag{7}$$

где m_1 и m_2 — массы гелия в начальном и конечном состояниях.

Выразим массы m_1 и m_2 гелия из уравнений (6) и (7):

$$m_1 = \frac{M p_1 V}{R T_1}; \tag{8}$$

$$m_2 = \frac{M p_2 V}{R T_2}. \tag{9}$$

Вычитая из (8) равенство (9), получим

$$m = m_1 - m_2 = \frac{M p_1 V}{R T_1} - \frac{M p_2 V}{R T_2}.$$

Отсюда найдем искомое давление:

$$p_2 = \frac{R T_2}{M V}\left(\frac{M p_1 V}{R T_1} - m\right) = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M}\frac{R T_2}{V}. \tag{10}$$

Проверим, дает ли правая часть формулы (10) единицу давления. Для этого выразим все величины, входящие в нее, в соответствующих единицах. Единица, в которой выражается первое слагаемое, не вызывает сомнений, так как отношение T_2/T_1 — величина безразмерная. Проверим, в каких единицах выражается второе слагаемое:

$$\frac{[m]}{[M]}\frac{[R][T_2]}{[V]} = \frac{1\ \text{кг}}{1\ \text{кг/моль}}\,\frac{1\ [\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})]\cdot 1\ \text{К}}{1\ \text{м}^3} =$$

$$= \frac{1\ \text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{К}}{1\ \text{кг}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{м}^3} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{м}^3} = \frac{1\ \text{Н}\cdot\text{м}}{1\ \text{м}^2\cdot\text{м}} = \frac{1\ \text{Н}}{1\ \text{м}^2} = 1\ \text{Па}.$$

Убедившись в том, что правая часть полученной расчетной формулы дает единицу искомой величины — давления, можем подставить в (10) значения всех величин и произвести вычисления.

В формуле (10) все величины, кроме молярной массы M гелия, известны. Найдем ее (см. пример 1). Для гелия как одноатомного газа относительная молекулярная масса равна его относительной атомной массе A_r.

Из таблицы Д. И. Менделеева найдем $A_r = 4$. Следовательно, молярная масса гелия

$$M = A_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Подставив значения всех величин в (10), получим

$$p_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 290}{10 \cdot 10^{-3}}\right) \text{ Па} = 3{,}64 \cdot 10^5 \text{ Па} = 364 \text{ кПа}.$$

ЗАДАЧИ

Молекулярное строение вещества

8.1. Определить относительную молекулярную массу M_r: 1) воды; 2) углекислого газа CO_2, 3) поваренной соли NaCl.

8.2. Найти молярную массу M серной кислоты H_2SO_4.

8.3. Определить массу m_1 молекулы: 1) углекислого газа; 2) поваренной соли.

8.4. В сосуде вместимостью $V = 2$ л находится кислород, количество вещества ν которого равно 0,2 моль. Определить плотность ρ газа.

8.5. Определить количество вещества ν и число N молекул азота массой $m = 0{,}2$ кг.

8.6. В баллоне вместимостью $V = 3$ л находится кислород массой $m = 4$ г. Определить количество вещества ν и число N молекул газа.

8.7. Кислород при нормальных условиях заполняет сосуд вместимостью $V = 11{,}2$ л. Определить количество вещества ν газа и его массу m.

8.8. Определить количество вещества ν водорода, заполняющего сосуд вместимостью $V = 3$ л, если плотность газа $\rho = 6{,}65 \times$ $\times 10^{-3}$ кг/моль.

8.9. Колба вместимостью $V = 0{,}5$ л содержит газ при нормальных условиях. Определить число N молекул газа, находящихся в колбе.

8.10. Сколько атомов содержится в газах массой 1 г каждый: 1) гелии; 2) углероде; 3) фторе; 4) полонии?

8.11. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится однородный газ количеством вещества $\nu = 0{,}2$ моль. Определить, какой это газ, если его плотность $\rho = 1{,}12$ кг/м^3.

8.12. Одна треть молекул азота массой $m = 10\,\text{г}$ распалась на атомы. Определить полное число N частиц, находящихся в газе.

8.13. Рассматривая молекулы жидкости как шарики, соприкасающиеся друг с другом, оценить порядок размера диаметра молекулы сероуглерода CS_2. При тех же предположениях оценить порядок размера диаметра атомов ртути. Плотности жидкостей считать известными.

8.14. Определить среднее расстояние $\langle l \rangle$ между центрами молекул водяных паров при нормальных условиях и сравнить его с диаметром d самих молекул ($d = 0{,}311\,\text{нм}$).

8.15. В сосуде вместимостью $V = 1{,}12\,\text{л}$ находится азот при нормальных условиях. Часть молекул газа при нагревании до некоторой температуры оказалась диссоциированной на атомы. Степень диссоциации $\alpha = 0{,}3$. Определить количество вещества: 1) ν — азота до нагревания; 2) $\nu_{\text{мол}}$ — молекулярного азота после нагревания; 3) $\nu_{\text{ат}}$ — атомарного азота после нагревания; 4) $\nu_{\text{пол}}$ — всего азота после нагревания.

Примечание. Степенью диссоциации называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа. Степень диссоциации показывает, какая часть молекул распалась на атомы.

Уравнение газового состояния

8.16. В цилиндр длиной $l = 1{,}6\,\text{м}$, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью $S = 200\,\text{см}^2$. Определить силу F, которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии $l_1 = 10\,\text{см}$ от дна цилиндра.

8.17. Колба вместимостью $V = 300\,\text{см}^2$, закрытая пробкой с краном, содержит разреженный воздух. Для измерения давления в колбе горлышко колбы погрузили в воду на незначительную глубину и открыли кран, в результате чего в колбу вошла вода массой $m = 292\,\text{г}$. Определить первоначальное давление p в колбе, если атмосферное давление $p_0 = 100\,\text{кПа}$.

8.18. В U-образный манометр налита ртуть. Открытое колено манометра соединено с окружающим пространством при нормальном атмосферном давлении p_0, и ртуть в открытом колене стоит выше, чем в закрытом, на $\Delta h = 10\,\text{см}$. При этом свободная от ртути часть трубки закрытого колена имеет длину $l = 20\,\text{см}$. Когда открытое колено присоединили к баллону с воздухом, разность уровней ртути увеличилась и достигла значения $\Delta h_1 = 26\,\text{см}$. Найти давление p воздуха в баллоне.

8.19. Манометр в виде стеклянной U-образной трубки с внутренним диаметром $d = 5\,\text{мм}$ (рис. 8.1*а*) наполнен ртутью так, что оставшийся в закрытом колене трубки воздух занимает при нормальном атмосферном давлении объем $V_1 = 10\,\text{мм}^3$. При этом раз-

ность уровней Δh_1 ртути в обоих коленах трубки равна 10 см. При соединении открытого конца трубки с большим сосудом (рис. 8.1*б*)

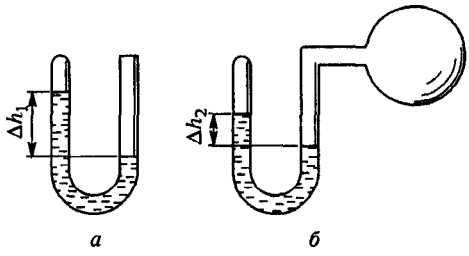


Рис. 8.1

разность Δh_2 уровней ртути уменьшилась до 1 см. Определить давление p в сосуде.

8.20. В баллоне содержится газ при температуре $t_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}$. До какой температуры t_2 нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?

8.21. При нагревании идеального газа на $\Delta T = 1$ К при постоянном давлении объем его увеличился на $1/350$ первоначального объема. Найти начальную температуру T газа.

8.22. Полый шар вместимостью $V = 10\,\mathrm{см}^3$, заполненный воздухом при температуре $T_1 = 573$ К, соединили трубкой с чашкой, заполненной ртутью. Определить массу m ртути, вошедшей в шар при остывании воздуха в нем до температуры $T_2 = 293$ К. Изменением вместимости шара пренебречь.

8.23. Оболочка воздушного шара вместимостью $V = 800\,\mathrm{м}^3$ целиком заполнена водородом при температуре $T_1 = 273$ К. На сколько изменится подъемная сила шара при повышении температуры до $T_2 = 293$ К? Считать вместимость V оболочки неизменной и внешнее давление нормальным. В нижней части оболочки имеется отверстие, через которое водород может выходить в окружающее пространство.

8.24. В оболочке сферического аэростата находится газ объемом $V = 1500\,\mathrm{м}^3$, заполняющий оболочку лишь частично. На сколько изменится подъемная сила аэростата, если газ в аэростате нагреть от $T_0 = 273$ К до $T = 293$ К? Давления газа в оболочке и окружающего воздуха постоянны и равны нормальному атмосферному давлению.

8.25. Газовый термометр состоит из шара с припаянной к нему горизонтальной стеклянной трубкой. Капелька ртути, помещенная в трубку, отделяет объем шара от внешнего пространства (рис. 8.2). Площадь S поперечного сечения трубки равна $0{,}1\,\mathrm{см}^2$. При температуре $T_1 = 273$ К капелька находилась на расстоянии $l_1 = 30$ см от поверхности шара, при температуре $T_2 = 278$ К — на расстоянии $l_2 = 50$ см. Найти вместимость V шара.

8.26. В большой сосуд с водой был опрокинут цилиндрический сосуд (рис. 8.3). Уровни воды внутри и вне цилиндрического сосуда находятся на одинаковой высоте. Расстояние l от уровня воды до дна опрокинутого сосуда равно 40 см. На какую высоту Δh

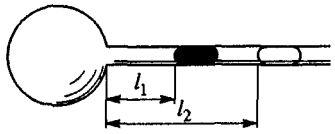


Рис. 8.2

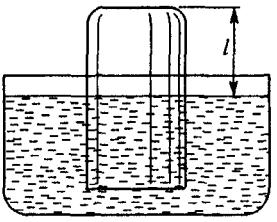


Рис. 8.3

поднимется вода в цилиндрическом сосуде при понижении температуры от $T_1 = 310$ К до $T_2 = 273$ К? Атмосферное давление нормальное.

8.27. Баллон вместимостью $V = 12$ л содержит углекислый газ. Давление p газа равно 1 МПа, температура $T = 300$ К. Определить массу m газа в баллоне.

8.28. Какой объем V занимает идеальный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ кмоль при давлении $p = 1$ МПа и температуре $T = 400$ К?

8.29. Котел вместимостью $V = 2\,м^3$ содержит перегретый водяной пар массой $m = 10$ кг при температуре $T = 500$ К. Определить давление p пара в котле.

8.30. Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит углекислый газ массой $m = 500$ г под давлением $p = 1{,}3$ МПа. Определить температуру T газа.

8.31. Газ при температуре $T = 309$ К и давлении $p = 0{,}7$ МПа имеет плотность $\rho = 12\,кг/м^3$. Определить относительную молекулярную массу M_r газа.

8.32. Определить плотность ρ насыщенного водяного пара в воздухе при температуре $T = 300$ К. Давление p насыщенного водяного пара при этой температуре равно 3,55 кПа.

8.33. Оболочка воздушного шара имеет вместимость $V = 1600\,м^3$. Найти подъемную силу F водорода, наполняющего оболочку, на высоте, где давление $p = 60$ кПа и температура $T = 280$ К. При подъеме шара водород может выходить через отверстие в нижней части шара.

8.34. В баллоне вместимостью $V = 25$ л находится водород при температуре $T = 290$ К. После того как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 0{,}4$ МПа. Определить массу m израсходованного водорода.

8.35. Оболочка аэростата вместимостью $V = 1600\,\text{м}^3$, находящегося на поверхности Земли, на $k = 7/8$ наполнена водородом при давлении $p_1 = 100\,\text{кПа}$ и температуре $T_1 = 290\,\text{К}$. Аэростат подняли на некоторую высоту, где давление $p_2 = 80\,\text{кПа}$ и температура $T_2 = 280\,\text{К}$. Определить массу Δm водорода, вышедшего из оболочки при его подъеме.

Смеси газов

8.36. Какой объем V занимает смесь газов — азота массой $m_1 = 1\,\text{кг}$ и гелия массой $m_2 = 1\,\text{кг}$ — при нормальных условиях?

8.37. В баллонах вместимостью $V_1 = 20\,\text{л}$ и $V_2 = 44\,\text{л}$ содержится газ. Давление в первом баллоне $p_1 = 2{,}4\,\text{МПа}$, во втором — $p_2 = 1{,}6\,\text{МПа}$. Определить общее давление p и парциальные p_1' и p_2' после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

8.38. В сосуде вместимостью $V = 0{,}01\,\text{м}^3$ содержится смесь газов — азота массой $m_1 = 7\,\text{г}$ и водорода массой $m_2 = 1\,\text{г}$ — при температуре $T = 280\,\text{К}$. Определить давление p смеси газов.

8.39. Найти плотность ρ газовой смеси водорода и кислорода, если их массовые доли w_1 и w_2 равны соответственно $1/9$ и $8/9$. Давление p смеси равно $100\,\text{кПа}$, температура $T = 300\,\text{К}$.

8.40. Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением $p = 1\,\text{МПа}$. Определить парциальные давления p_1 кислорода и p_2 азота, если массовая доля w_1 кислорода в смеси равна 0,2.

8.41. Сухой воздух состоит в основном из кислорода и азота. Если пренебречь остальными составными частями воздуха, то можно считать, что массовые доли кислорода и азота соответственно $w_1 = 0{,}232$, $w_2 = 0{,}768$. Определить относительную молекулярную массу M_r воздуха.

8.42. Баллон вместимостью $V = 30\,\text{л}$ содержит смесь водорода и гелия при температуре $T = 300\,\text{К}$ и давлении $p = 828\,\text{кПа}$. Масса m смеси равна $24\,\text{г}$. Определить массу m_1 водорода и массу m_2 гелия.

8.43. В сосуде вместимостью $V = 15\,\text{л}$ находится смесь азота и водорода при температуре $t = 23\,^\circ\text{C}$ и давлении $p = 200\,\text{кПа}$. Определить массы смеси и ее компонентов, если массовая доля w_1 азота в смеси равна 0,7.

8.44. Баллон вместимостью $V = 5\,\text{л}$ содержит смесь гелия и водорода при давлении $p = 600\,\text{кПа}$. Масса m смеси равна $4\,\text{г}$, массовая доля w_1 гелия равна 0,6. Определить температуру T смеси.

8.45. В сосуде находится смесь кислорода и водорода. Масса m смеси равна $3{,}6\,\text{г}$. Массовая доля w_1 кислорода составляет 0,6. Определить количество вещества ν смеси, ν_1 и ν_2 каждого газа в отдельности.

§ 9. Молекулярно-кинетическая теория газов

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V} \quad \text{и} \quad n = \frac{\rho}{M} N_A,$$

где N — число частиц; V — объем системы; ρ — плотность вещества (в любом агрегатном состоянии); M — молярная масса; N_A — постоянная Авогадро.

• Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_п \rangle,$$

где p — давление газа; $\langle \varepsilon_п \rangle$ — средняя кинетическая энергия[3]) поступательного движения молекулы.

• Средняя кинетическая энергия молекулы (с учетом поступательного и вращательного движения)

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i — число степеней свободы ($i = 3$ для одноатомной молекулы, $i = 5$ для двухатомной и $i = 6$ для трех- и более атомной молекулы); $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

• Средняя кинетическая энергия:

поступательного движения молекулы ($i_п = 3$)

$$\langle \varepsilon_п \rangle = \frac{3}{2} kT;$$

вращательного движения молекулы

$$\varepsilon_{вр} = \frac{i_{вр}}{2} kT,$$

где $i_{вр}$ — число вращательных степеней свободы ($i_{вр} = 2$ для двухатомной молекулы, $i_{вр} = 3$ для трех- и более атомной молекулы);

колебательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon_{кол} \rangle = kT.$$

Энергетический вклад колебательного движения учитывается при достаточно высоких, порядка нескольких тысяч кельвинов, температурах.

---

[3]) Здесь и далее кинетическая энергия молекул и других частиц обозначается ε.

• Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT.$$

• Скорость молекул:
средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}}, \quad \text{или} \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}};$$

средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}, \quad \text{или} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

наиболее вероятная

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}}, \quad \text{или} \quad v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

где m_1 — масса одной молекулы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В баллоне вместимостью $V = 6{,}9$ л находится азот массой $m = 2{,}3$ г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации [4]) $\alpha = 0{,}2$. Определить: 1) общее число N_1 молекул и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) концентрацию n_2 молекул и n_3 атомов азота после нагревания.

Решение. По определению, концентрация частиц газа есть отношение числа частиц к вместимости сосуда, занимаемого газом:

$$n = \frac{N}{V}. \tag{1}$$

1. Число N_1 молекул газа до нагревания найдем из соотношения

$$N_1 = \nu N_{\text{A}} = \frac{m}{M} N_{\text{A}} = \frac{m}{kM_r} N_{\text{A}}, \tag{2}$$

где ν — количество вещества азота; N_{A} — постоянная Авогадро; M — молярная масса азота; M_r — относительная молекулярная масса азота; $k = 10^{-3}$ кг/моль (см. пример 1 на с. 133).

Подставив значения величин в (2), получим

$$N_1 = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 28} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ молекул} = 4{,}94 \cdot 10^{23} \text{ молекул}.$$

[4]) См. примечание к задаче 8.15.

Концентрацию n_1 найдем, подставив значения величин в (1):

$$n_1 = \frac{N_1}{V} = \frac{4{,}94 \cdot 10^{23}}{6{,}9 \cdot 10^{-3}}\ \text{м}^{-3} = 7{,}16 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

2. Концентрацию после нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{N_1(1-\alpha)}{V}, \tag{3}$$

где N_2 — число молекул, не распавшихся на атомы.

После подстановки значений величин в (3) получим

$$n_2 = \frac{4{,}94 \cdot 10^{23}(1-0{,}2)}{6{,}9 \cdot 10^{-3}}\ \text{м}^{-3} = 5{,}73 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Концентрация атомов после нагревания азота

$$n_3 = \frac{2N_1\alpha}{V}. \tag{4}$$

Число 2 в формуле (4) выражает тот факт, что каждая молекула после распада дает два атома.

Подставим в (4) значения величин и произведем вычисления:

$$n_3 = \frac{2 \cdot 4{,}94 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}2}{6{,}9 \cdot 10^{-3}}\ \text{м}^{-3} = 0{,}286 \cdot 10^{26}\ \text{м}^{-3} = 2{,}86 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Пример 2. В колбе вместимостью $V = 0{,}5$ л находится кислород при нормальных условиях. Определить среднюю энергию $\langle W_\text{п} \rangle$ поступательного движения всех молекул, содержащихся в колбе.

Решение. Средняя энергия $\langle W_\text{п} \rangle$ поступательного движения всех молекул может быть выражена соотношением

$$\langle W_\text{п} \rangle = \langle \varepsilon_\text{п} \rangle N, \tag{5}$$

где $\langle \varepsilon_\text{п} \rangle$ — средняя энергия поступательного движения одной молекулы; N — число всех молекул, содержащихся в колбе.

Как известно,

$$\langle \varepsilon_\text{п} \rangle = \frac{3}{2}kT, \tag{6}$$

где k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

Число молекул, содержащихся в колбе, найдем по формуле

$$N = \nu N_\text{A}, \tag{7}$$

где ν — количество вещества кислорода; N_A — постоянная Авогадро.

Количество вещества ν найдем из таких соображений: известно, что при нормальных условиях молярный объем V_m равен $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль. Так как, по условию задачи, кислород в колбе находится при нормальных условиях, то количество вещества кислорода в колбе выражается соотношением

$$\nu = \frac{V}{V_m}. \tag{8}$$

Подставив выражение ν по (8) в (7), получим

$$N = \frac{VN_\text{A}}{V_m}. \tag{9}$$

С учетом (6) и (9) выражение (5) энергии поступательного движения молекул примет вид

$$W_\text{п} = \frac{3kTVN_\text{A}}{2V_m}. \tag{10}$$

Проверим, дает ли правая часть расчетной формулы единицу энергии (джоуль). Для этого вместо символов величин подставим единицы, в которых эти величины выражаются:

$$[W_\text{п}] = \frac{(\text{Дж/К}) \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{м}^3/\text{моль}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}} = \text{Дж}.$$

Подставив значения величин в (10) и произведя вычисления, найдем

$$W_\text{п} = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 75{,}9 \text{ Дж}.$$

Пример 3. Найти среднюю кинетическую энергию одной молекулы аммиака NH_3 при температуре $t = 27\,^\circ$C и среднюю энергию вращательного движения этой молекулы при той же температуре.

Решение. Средняя полная энергия молекулы определяется по формуле

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT, \tag{11}$$

где i — число степеней свободы молекулы; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура газа: $T = t + T_0$, где $T_0 = 273$ К.

Число степеней свободы i четырехатомной молекулы, какой является молекула аммиака, равно 6.

Подставим значения величин в (11):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{6}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}(27 + 273) \text{ Дж} = 1{,}24 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

Средняя энергия вращательного движения молекулы определяется по формуле

$$\langle \varepsilon_\text{вр} \rangle = \frac{i-3}{2}kT, \tag{12}$$

где число 3 означает число степеней свободы поступательного движения.

Подставим в (12) значения величин и вычислим:

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = \frac{6-3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}(27+273)\ \text{Дж} = 6{,}21 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Заметим, что энергию вращательного движения молекул аммиака можно было получить иначе, разделив полную энергию $\langle \varepsilon \rangle$ на две равные части. Дело в том, что у трех- (и более) атомных молекул число степеней свободы, приходящихся на поступательное и вращательное движение, одинаково (по 3), поэтому энергии поступательного и вращательного движений одинаковы.

ЗАДАЧИ

Концентрация молекул

9.1. В сосуде вместимостью $V = 12$ л находится газ, число N молекул которого равно $1{,}44 \cdot 10^{18}$. Определить концентрацию n молекул газа.

9.2. Определить вместимость V сосуда, в котором находится газ, если концентрация молекул $n = 1{,}25 \cdot 10^{26}\ \text{м}^{-3}$, а общее их число $N = 2{,}5 \cdot 10^{23}$.

9.3. В сосуде вместимостью $V = 20$ л находится газ количеством вещества $\nu = 1{,}5$ кмоль. Определить концентрацию n молекул в сосуде.

9.4. Идеальный газ находится при нормальных условиях в закрытом сосуде. Определить концентрацию n молекул газа.

9.5. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится кислород, концентрация n молекул которого равна $9{,}41 \cdot 10^{23}\ \text{м}^{-3}$. Определить массу m газа.

9.6. В баллоне вместимостью $V = 5$ л находится азот массой $m = 17{,}5$ г. Определить концентрацию n молекул азота в баллоне.

9.7. Определить количество вещества ν водорода, заполняющего сосуд вместимостью $V = 3$ л, если концентрация n молекул газа в сосуде равна $2 \cdot 10^{18}\ \text{м}^{-3}$.

9.8. В двух одинаковых по вместимости сосудах находятся разные газы: в первом — водород, во втором — кислород. Найти отношение n_1/n_2 концентраций газов, если массы газов одинаковы.

9.9. Газ массой $m = 58{,}5$ г находится в сосуде вместимостью $V = 5$ л. Концентрация n молекул газа равна $2{,}2 \cdot 10^{26}\ \text{м}^{-3}$. Какой это газ?

9.10. В баллоне вместимостью $V = 2$ л находится кислород массой $m = 1{,}17$ г. Концентрация n молекул в сосуде равна $1{,}1 \times \times 10^{25}\ \text{м}^{-3}$. Определить по этим данным постоянную Авогадро N_A.

9.11. В баллоне находится кислород при нормальных условиях. При нагревании до некоторой температуры часть молекул оказалась диссоциированной на атомы. Степень диссоциации $\alpha = 0{,}4$.

Определить концентрации частиц: 1) n_1 — до нагревания газа; 2) n_2 — молекулярного кислорода после нагревания; 3) n_3 — атомарного кислорода после нагревания.

Основное уравнение кинетической теории газов. Энергия молекул

9.12. Определить концентрацию n молекул идеального газа при температуре $T = 300\,\text{К}$ и давлении $p = 1\,\text{мПа}$.

9.13. Определить давление p идеального газа при двух значениях температуры газа: 1) $T = 3\,\text{К}$; 2) $T = 1\,\text{кК}$. Принять концентрацию n молекул газа равной $\approx 10^{19}\,\text{см}^{-3}$.

9.14. Сколько молекул газа содержится в баллоне вместимостью $V = 30\,\text{л}$ при температуре $T = 300\,\text{К}$ и давлении $p = 5\,\text{МПа}$?

9.15. Определить количество вещества ν и концентрацию n молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью $V = 240\,\text{см}^3$ при температуре $T = 290\,\text{К}$ и давлении $p = 50\,\text{кПа}$.

9.16. В колбе вместимостью $V = 100\,\text{см}^3$ содержится некоторый газ при температуре $T = 300\,\text{К}$. На сколько понизится давление p газа в колбе, если вследствие утечки из колбы выйдет $N = 10^{20}$ молекул?

9.17. В колбе вместимостью $V = 240\,\text{см}^3$ находится газ при температуре $T = 290\,\text{К}$ и давлении $p = 50\,\text{кПа}$. Определить количество вещества ν газа и число N его молекул.

9.18. Давление p газа равно 1 мПа, концентрация n его молекул равна $10^{10}\,\text{см}^{-3}$. Определить: 1) температуру T газа; 2) среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_\text{п}\rangle$ поступательного движения молекул газа.

9.19. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_\text{п}\rangle$ поступательного движения и среднее значение $\langle\varepsilon\rangle$ полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре $T = 600\,\text{К}$. Найти также кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул пара, содержащего количество вещества $\nu = 1\,\text{кмоль}$.

9.20. Определить среднее значение $\langle\varepsilon\rangle$ полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 400\,\text{К}$.

9.21. Определить кинетическую энергию $\langle\varepsilon_1\rangle$, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре $T = 1\,\text{кК}$, а также среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_\text{п}\rangle$ поступательного движения, $\langle\varepsilon_\text{вр}\rangle$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы.

9.22. Определить число N молекул ртути, содержащихся в воздухе объемом $V = 1\,\text{м}^3$ в помещении, зараженном ртутью, при температуре $t = 20\,^\circ\text{C}$, если давление p насыщенного пара ртути при этой температуре равно 0,13 Па.

9.23. Для получения высокого вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать его при откачке с целью удалить адсорбированные газы. Определить, на сколько повысится давление в сферическом сосуде радиусом $R = 10$ см, если все адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным, сечение σ одной молекулы равно 10^{-15} см^2. Температура T, при которой производится откачка, равна 600 К.

9.24. Определить температуру T водорода, при которой средняя кинетическая энергия $\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle$ поступательного движения молекул достаточна для их расщепления на атомы, если молярная энергия диссоциации водорода $W_m = 419$ кДж/моль.

Примечание. Молярной энергией диссоциации называется энергия, затрачиваемая на диссоциацию всех молекул газа количеством вещества $\nu = 1$ моль.

Скорости молекул

9.25. Найти среднюю квадратичную $\langle v_{\text{кв}}\rangle$, среднюю арифметическую $\langle v\rangle$ и наиболее вероятную $v_{\text{в}}$ скорости молекул водорода. Вычисления выполнить для трех значений температуры: 1) $T = 20$ К; 2) $T = 300$ К; 3) $T = 5$ кК.

9.26. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия станет равной второй космической скорости $v_{\text{II}} = 11{,}2$ км/с?

9.27. При какой температуре T молекулы кислорода имеют такую же среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$, как молекулы водорода при температуре $T_1 = 100$ К?

9.28. Колба вместимостью $V = 4$ л содержит некоторый газ массой $m = 0{,}6$ г под давлением $p = 200$ кПа. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ молекул газа.

9.29. Смесь гелия и аргона находится при температуре $T = 1{,}2$ кК. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.

9.30. Взвешенные в воздухе мельчайшие пылинки движутся так, как если бы они были очень крупными молекулами. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ пылинки массой $m = 10^{-10}$ г, если температура T воздуха равна 300 К.

9.31. Во сколько раз средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ молекул кислорода больше средней квадратичной скорости пылинки массой $m = 10^{-8}$ г, находящейся среди молекул кислорода?

9.32. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle v\rangle$ молекул газа, если их средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle = 1$ км/с.

9.33. Определить наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$ молекул водорода при температуре $T = 400$ К.

§ 10. Элементы статистической физики

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right),$$

где n — концентрация частиц; U — их потенциальная энергия; n_0 — концентрация частиц в точках поля, где $U = 0$; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

• Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести)

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right), \quad \text{или} \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right),$$

где p — давление газа; m — масса частицы; M — молярная масса; z — координата (высота) точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p_0 — давление на этом уровне; g — ускорение свободного падения; R — молярная газовая постоянная.

• Вероятность того, что физическая величина x, характеризующая молекулу, лежит в интервале значений от x до $x + \mathrm{d}x$, определяется по формуле [5])

$$\mathrm{d}W(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $f(x)$ — функция распределения молекул по значениям данной физической величины x (плотность вероятности).

• Количество молекул, для которых физическая величина x, характеризующая их, заключена в интервале значений от x до $x + \mathrm{d}x$,

$$\mathrm{d}N = N\,\mathrm{d}W(x) = Nf(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям) выражается двумя соотношениями:

а) число молекул, скорости которых заключены в пределах от v до $v + \mathrm{d}v$,

$$\mathrm{d}N(v) = Nf(v)\,\mathrm{d}v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2\,\mathrm{d}v,$$

где $f(v)$ — функция распределения молекул по модулям скоростей, выражающая отношение вероятности того, что скорость молекулы лежит в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$, к величине этого интервала, а также долю числа молекул, скорости которых лежат в указанном интервале; N — общее число молекул; m — масса молекулы;

---

[5]) Приведенная формула выражает также долю молекул, для которых физическая величина x заключена в интервале от x до $x + \mathrm{d}x$.

б) число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + \mathrm{d}u$,

$$\mathrm{d}N(u) = Nf(u)\,\mathrm{d}u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \exp(-u^2) u^2\,\mathrm{d}u,$$

где $u = v/v_{\text{в}}$ — относительная скорость, равная отношению скорости v к наивероятнейшей скорости $v_{\text{в}}$ (о скоростях молекулы см. § 9); $f(u)$ — функция распределения по относительным скоростям.

• Распределение молекул по импульсам. Число молекул, импульсы которых заключены в пределах от p до $p + \mathrm{d}p$,

$$\mathrm{d}N(p) = Nf(p)\,\mathrm{d}p = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{1}{2mkT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2\,\mathrm{d}p,$$

где $f(p)$ — функция распределения по импульсам.

• Распределение молекул по кинетическим энергиям поступательного движения. Число молекул, энергии которых заключены в интервале от ε до $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$,

$$\mathrm{d}N(\varepsilon) = Nf(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \varepsilon^{1/2}\,\mathrm{d}\varepsilon,$$

где $f(\varepsilon)$ — функция распределения по кинетическим энергиям.

• Среднее значение[6]) физической величины x в общем случае:

$$\langle x \rangle = \frac{\int x f(x)\,\mathrm{d}x}{f(x)\,\mathrm{d}x},$$

и в случае, если функция распределения нормирована на единицу:

$$\langle x \rangle = \int x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $f(x)$ — функция распределения, а интегрирование ведется по всей совокупности изменений величины x.

Например, среднее значение скорости молекулы (т. е. средняя арифметическая скорость) $\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v)\,\mathrm{d}v$; средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \langle v^2 \rangle^{1/2}$, где $\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v)\,\mathrm{d}v$; средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$.

• Эффективное сечение столкновения молекулы

$$\sigma = \pi d^2,$$

[6]) Интегралы для вычисления средних значений приведены в табл. 2.

где d — эффективный диаметр молекулы (внесистемная единица измерения 1 барн $= 10^{-28}$ м^2).

• Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle, \quad \text{или} \quad \langle z\rangle = \sqrt{2}\sigma n\langle v\rangle.$$

где d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle v\rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул.

• Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad \text{или} \quad \langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n};$$

$$\text{для оценок} \quad \langle l\rangle \sim \frac{1}{\sigma n}.$$

• Импульс (количество движения), переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности,

$$\mathrm{d}p = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\Delta S\,\mathrm{d}t,$$

где η — динамическая вязкость газа; $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ — градиент (поперечный) скорости течения его слоев; ΔS — площадь элемента поверхности; $\mathrm{d}t$ — время переноса.

• Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{\rho\langle v\rangle\langle l\rangle}{3},$$

где ρ — плотность газа (жидкости); $\langle v\rangle$ — средняя скорость хаотического движения его молекул; $\langle l\rangle$ — их средняя длина свободного пробега.

• Закон Ньютона

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\Delta S,$$

где F — сила внутреннего трения между движущимися слоями газа.

• Закон Фурье

$$\Delta Q = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}S\Delta t,$$

где ΔQ — количество теплоты, прошедшее посредством теплопроводности через сечение площадью S за время Δt; λ — теплопроводность; $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ — градиент температуры.

• Теплопроводность (коэффициент теплопроводности) газа

$$\lambda = \frac{c_V\rho\langle v\rangle\langle l\rangle}{3}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{kn\langle v\rangle\langle l\rangle}{6},$$

где c_V — удельная теплоемкость [7]) газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость его молекулы; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул.

• Закон Фика

$$\Delta m_i = -D \frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}x} S \Delta t,$$

где Δm_i — масса i-й компоненты газа, перенесенная в результате диффузии через поверхность площадью S, перпендикулярную оси Ox, за время Δt; $\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}x}$ — градиент парциальной плотности i-й компоненты.

• Коэффициент диффузии

$$D = \frac{\langle v \rangle \langle l \rangle}{3}.$$

Коэффициент диффузии D измеряется в м^2/с (L^2/τ). Параметры L и τ можно рассматривать как некоторые характерные для диффузии величины: L — расстояние, на которое успевает распространиться диффундирующее в среде вещество, τ — характерное время «выравнивания» концентраций диффундирующего вещества. Тогда для оценок этих величин можно пользоваться приближенным соотношением

$$\tau = \frac{L^2}{D}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пылинки массой $m = 10^{-18}$ г взвешены в воздухе. Определить толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на 1%. Температура T воздуха во всем объеме одинакова и равна 300 К.

Решение. При равновесном распределении пылинок концентрация их зависит только от координаты z по оси, направленной вертикально. В этом случае к распределению пылинок можно применить формулу Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \qquad (1)$$

Так как в однородном поле силы тяжести $U = mgz$, то

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \qquad (2)$$

По условию задачи, изменение Δn концентрации с высотой мало по сравнению с n ($\Delta n/n = 0{,}01$), поэтому без существенной погрешности изменение концентрации Δn можно заменить дифференциалом $\mathrm{d}n$.

---

[7]) См. § 11, теплоемкость.

Дифференцируя выражение (2) по z, получим

$$\mathrm{d}n = -n_0 \frac{mg}{kT} \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \mathrm{d}z.$$

Так как $n_0 \exp\left(-mgz/(kT)\right) = n$, то

$$\mathrm{d}n = -\frac{mg}{kT} n \, \mathrm{d}z.$$

Отсюда находим интересующее нас изменение координаты:

$$\mathrm{d}z = -\frac{kT}{mg} \frac{\mathrm{d}n}{n}.$$

Знак минус показывает, что положительным изменениям координаты ($\mathrm{d}z > 0$) соответствует уменьшение относительной концентрации ($\mathrm{d}n < 0$). Знак минус опустим (в данном случае он несуществен) и заменим дифференциалы $\mathrm{d}z$ и $\mathrm{d}n$ конечными приращениями Δz и Δn:

$$\Delta z = \frac{kT}{mg} \frac{\Delta n}{n}.$$

Подставим в эту формулу значения величин $\Delta n/n = 0{,}01$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $T = 300$ К, $m = 10^{-21}$ кг, $g = 9{,}81$ м/с^2 и, произведя вычисления, найдем

$$\Delta z = 4{,}23 \text{ мм}.$$

Как видно из полученного результата, концентрация даже таких маленьких пылинок ($m = 10^{-18}$ г) очень быстро изменяется с высотой.

Пример 2. В сосуде содержится газ, количество вещества ν которого равно 1,2 моль. Рассматривая этот газ как идеальный, определить число ΔN молекул, скорости u которых меньше 0,001 наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$.

Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по относительным скоростям u ($u = v/v_{\text{в}}$). Число $\mathrm{d}N(u)$ молекул, относительные скорости и которых заключены в пределах от u до $\mathrm{d}u$, определяется формулой

$$\mathrm{d}N(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right) u^2 \, \mathrm{d}u, \tag{3}$$

где N — полное число молекул.

По условию задачи, максимальная скорость интересующих нас молекул $v_{\max} = 0{,}001 v_{\text{в}}$, откуда $u_{\max} = v_{\max}/v_{\text{в}} = 0{,}001$. Для таких значений u выражение (3) можно существенно упростить. В самом деле, для $u \ll 1$ имеем $\exp\left(-u^2\right) \approx 1 - u^2$. Пренебрегая значением $u^2 = (0{,}001)^2 = 10^{-6}$ по сравнению с единицей, выражение (3) запишем в виде

$$\mathrm{d}N(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 \, \mathrm{d}u. \tag{4}$$

Интегрируя это выражение по u в пределах от 0 до $u_{\max}$, получим

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{u^3}{3}\Big|_0^{u_{\max}}, \quad \text{или} \quad \Delta N = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3. \qquad (5)$$

Выразив в (5) число молекул N через количество вещества ν и постоянную Авогадро, найдем расчетную формулу:

$$\Delta N = \frac{4\nu N_{\mathrm{A}}}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3. \qquad (6)$$

Подставим в (6) значения величин ν, N_{A} и произведем вычисления:

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 1{,}2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 1{,}77} (10^{-3})^3 \text{ молекул} = 5{,}44 \cdot 10^{14} \text{ молекул}.$$

Пример 3. Зная функцию $f(p)$ распределения молекул по импульсам, определить среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$.

Решение. Среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$ можно определить по общему правилу вычисления среднего:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} p^2 f(p) \, \mathrm{d}p}{\int_0^{\infty} f(p) \, \mathrm{d}p}. \qquad (7)$$

Функция распределения молекул по импульсам имеет вид

$$f(p) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2mkT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT} \right) p^2. \qquad (8)$$

Эта функция распределения уже нормирована на единицу, т. е. $\int_0^{\infty} f(p) \, \mathrm{d}p = 1$. С учетом нормировки формулу (7) перепишем иначе:

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^{\infty} p^2 f(p) \, \mathrm{d}p. \qquad (9)$$

Подставим выражение $f(p)$ по уравнению (8) в формулу (9) и вынесем величины, не зависящие от p, за знак интеграла:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2mkT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} p^4 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT} \right) \mathrm{d}p.$$

Этот интеграл можно свести к табличному (см. табл. 2)

$$\int_0^\infty x^4 \exp(-ax^2)\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}, \quad \text{положив} \quad a = \frac{1}{2mkT}.$$

В нашем случае это даст

$$\langle p^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2mkT}\right)^{-5/2}$$

После упрощений и сокращений найдем

$$\langle p^2 \rangle = 3mkT.$$

Пример 4. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы углекислого газа при нормальных условиях равна 40 нм. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул и число z соударений, которые испытывает молекула в 1 с.

Решение. Средняя арифметическая скорость молекул определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

где M — молярная масса вещества.

Подставив числовые значения, получим

$$\langle v \rangle = 362 \text{ м/с}.$$

Среднее число $\langle z \rangle$ соударений молекулы в 1 с определяется отношением средней скорости $\langle v \rangle$ молекулы к средней длине ее свободного пробега $\langle l \rangle$:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}.$$

Подставив в эту формулу значения $\langle v \rangle = 362$ м/с, $\langle l \rangle = 40$ нм $= 4 \cdot 10^{-8}$ м, получим

$$\langle z \rangle = 9{,}05 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 5. Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $l = 10$ см могут свободно вращаться вокруг их общей оси z. Радиус R большого цилиндра равен 5 см. Между цилиндрами имеется зазор размером $d = 2$ мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой $n_1 = 20\,\text{с}^{-1}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какой промежуток времени с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения $n_2 = 1\,\text{с}^{-1}$. При расчетах изменением

относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса m внешнего цилиндра равна 100 г.

Р е ш е н и е. При вращении внутреннего цилиндра слой воздуха увлекается им и начинает участвовать во вращательном движении. Вблизи поверхности этого цилиндра слой воздуха приобретает со временем практически такую же линейную скорость, как и скорость точек на поверхности цилиндра, т. е. $v = 2\pi n_1(R - d)$. Так как $d \ll R$, то приближенно можно считать

$$v \approx 2\pi n_1 R. \tag{10}$$

Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям газа и в конечном счете внешнему цилиндру. За интервал времени Δt внешний цилиндр приобретает момент импульса $L = pR$, где p — импульс, полученный за Δt внешним цилиндром. Отсюда

$$p = \frac{L}{R}. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$p = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} S \Delta t, \tag{12}$$

где η — динамическая вязкость; $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ — градиент скорости; S — площадь поверхности цилиндра ($S = 2\pi Rl$).

Приравняв правые части выражений (11) и (12) и выразив из полученного равенства искомый интервал Δt, получим

$$\Delta t = \frac{L}{\eta R \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} S}. \tag{13}$$

Найдем входящие в эту формулу величины L, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ и S. Момент импульса $L = J\omega_2$, где J — момент инерции цилиндра ($J = mR^2$); m — его масса; ω_2 — угловая скорость внешнего цилиндра ($\omega_2 = 2\pi n_2$). С учетом этого запишем

$$L = mR^2 \cdot 2\pi n_2 = 2\pi m R^2 n_2.$$

Градиент скорости $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \dfrac{v}{z} = \dfrac{v}{d}$. Площадь цилиндра равна $S = 2\pi Rl$.

Подставив в (13) выражения L, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$, S, получим

$$\Delta t = \frac{m d n_2}{\eta v l}.$$

Заменив здесь v по (10), найдем

$$\Delta t = \frac{m d n_2}{2\pi \eta R l n_1}. \tag{14}$$

Динамическая вязкость воздуха $\eta = 17{,}2\,\text{мкПа}\cdot\text{с} = 1{,}72\cdot 10^{-5}\,\text{Па}\cdot\text{с}$ (см. табл. 14).

Подставив в (14) значения входящих в нее величин и произведя вычисления, получим

$$\Delta t = \frac{100\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 1}{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}72\cdot 10^{-5}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 10\cdot 10^{-2}\cdot 20}\ \text{с} = 18{,}5\ \text{с}.$$

Пример 6. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 79\,\text{кПа}$, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с $t = 5\,^\circ\text{C}$ до $t = 1\,^\circ\text{C}$. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Решение. Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Барометр может показывать неизменное давление p при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится не на высоте h (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh_1}{RT_1}\right); \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh_2}{RT_2}\right).$$

Найдем отношение p_0/p и обе части полученного равенства прологарифмируем:

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{Mgh_1}{RT_1}; \quad \ln\frac{p_0}{p} = \frac{Mgh_2}{RT_2}.$$

Из полученных соотношений выразим высоты h_2 и h_1 и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R\ln(p_0/p)}{Mg}(T_2 - T_1). \tag{15}$$

Проверим, дает ли правая часть равенства (15) единицу длины:

$$\frac{[R][T]}{[M][g]} = \frac{[1\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})]\cdot\text{К}}{(1\ \text{кг}/\text{моль})\cdot(\text{м}/\text{с}^2)} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Н}} = 1\ \text{м}.$$

Подставим в (15) значения величин (давления в отношении p_0/p можно выразить в килопаскалях, это не повлияет на окончательный результат):

$$\Delta h = \frac{8{,}31\cdot\ln(101/79)}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}(1-5)\ \text{м} = -28{,}5\ \text{м}.$$

Знак «−» означает, что $h_2 < h_1$ и, следовательно, самолет снизился на 28,5 м по сравнению с предполагаемой высотой.

ЗАДАЧИ

Распределение Больцмана

10.1. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м? Температура воздуха $T = 300$ К.

10.2. Одинаковые частицы массой $m = 10^{-12}$ г каждая распределены в однородном гравитационном поле напряженностью $G = 0{,}2$ мкН/кг. Определить отношение n_1/n_2 концентраций частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta z = 10$ м. Температура T во всех слоях считается одинаковой и равной 290 К.

10.3. Масса m каждой из пылинок, взвешенных в воздухе, равна 1 аг. Отношение концентрации n_1 пылинок на высоте $h_1 = 1$ м к концентрации n_0 их на высоте $h_0 = 0$ равно 0,787. Температура воздуха $T = 300$ К. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро N_A.

10.4. Определить силу F, действующую на частицу, находящуюся во внешнем однородном поле силы тяжести, если отношение n_1/n_2 концентраций частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta z = 1$ м, равно e (e — основание натуральных логарифмов). Температуру T считать везде одинаковой и равной 300 К.

10.5. На сколько уменьшится атмосферное давление $p = 100$ кПа при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту $h = 100$ м? Считать, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

10.6. На какой высоте h над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

10.7. Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление $p = 90$ кПа. На какой высоте h летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление $p_0 = 100$ кПа? Считать, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

10.8. Найти изменение высоты Δh, соответствующее изменению давления на $\Delta p = 100$ Па, в двух случаях: 1) вблизи поверхности Земли, где температура $T_1 = 290$ К, давление $p_1 = 100$ кПа; 2) на некоторой высоте, где температура $T_2 = 220$ К, давление $p_2 = 25$ кПа.

10.9. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 80$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту h полета неизменной. Однако температура воздуха

изменилась на $\Delta T = 1\,\text{К}$. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление $p_0 = 100\,\text{кПа}$.

10.10. Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью ω. Используя функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации n частиц массой m, находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния r от оси вращения.

10.11. В центрифуге с ротором радиусом a, равным 0,5 м, при температуре $T = 300\,\text{К}$ находится в газообразном состоянии вещество с относительной молекулярной массой $M_r = 10^3$. Определить отношение n_a/n_0 концентраций молекул у стенок ротора и в центре его, если ротор вращается с частотой $n = 30\,\text{с}^{-1}$.

10.12. Ротор центрифуги, заполненный радоном, вращается с частотой $n = 50\,\text{с}^{-1}$. Радиус a ротора равен 0,5 м. Определить давление p газа на стенки ротора, если в его центре давление p_0 равно нормальному атмосферному. Температуру T по всему объему считать одинаковой и равной 300 К.

10.13. В центрифуге находится некоторый газ при температуре $T = 271\,\text{К}$. Ротор центрифуги радиусом $a = 0{,}4\,\text{м}$ вращается с угловой скоростью $\omega = 500\,\text{рад/с}$. Определить относительную молекулярную массу M_r газа, если давление p у стенки ротора в 2,1 раза больше давления p_0 в его центре.

10.14. Ротор ультрацентрифуги радиусом $a = 0{,}2\,\text{м}$ заполнен атомарным хлором при температуре $T = 3000\,\text{К}$. Хлор состоит из двух изотопов: ^{37}Cl и ^{35}Cl. Доля w_1 атомов изотопа ^{37}Cl составляет 0,25. Определить доли w_1' и w_2' атомов того и другого изотопов вблизи стенок ротора, если ротору сообщить угловую скорость вращения ω, равную $10^4\,\text{рад/с}$.

Распределение молекул по скоростям и импульсам

10.15. Зная функцию распределения молекул по скоростям, вывести формулу наиболее вероятной скорости $v_\text{в}$.

10.16. Используя функцию распределения молекул по скоростям, получить функцию, выражающую распределение молекул по относительным скоростям u $(u = v/v_\text{в})$.

10.17. Какова вероятность W того, что данная молекула идеального газа имеет скорость, отличную от $v_\text{в}/2$ не более чем на 1%?

10.18. Найти вероятность W того, что данная молекула идеального газа имеет скорость, отличную от $2v_\text{в}$ не более чем на 1%.

10.19. Зная функцию распределения молекул по скоростям, вывести формулу, определяющую долю w молекул, скорости v которых много меньше наиболее вероятной скорости $v_\text{в}$.

10.20. Определить относительное число w молекул идеального газа, скорости которых заключены в пределах от нуля до одной сотой наиболее вероятной скорости $v_\text{в}$.

10.21. Зная функцию распределения молекул по скоростям, определить среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул.

10.22. По функции распределения молекул по скоростям определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$.

10.23. Определить, какая из двух средних величин, $\langle 1/v \rangle$ или $1/\langle v \rangle$, больше, и найти их отношение k.

10.24. Распределение молекул по скоростям в молекулярных пучках при эффузионном истечении[8]) отличается от максвелловского и имеет вид $f(v)\,\mathrm{d}v = Cv^3 \exp\left(-mv^2/(2kT)\right)v^3\,\mathrm{d}v$. Определить из условия нормировки коэффициент C.

10.25. Зная функцию распределения молекул по скоростям в некотором молекулярном пучке $f(v) = \dfrac{m^2}{2k^2T^2} \exp\left(-mv^2/(2kT)\right)v^3$, найти выражения для: 1) наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$; 2) средней арифметической скорости $\langle v \rangle$.

10.26. Водород находится при нормальных условиях и занимает объем $V = 1\,\text{см}^3$. Определить число N молекул в этом объеме, обладающих скоростями, меньшими некоторого значения $v_{\max} = 1\,\text{м/с}$.

10.27. Вывести формулу наиболее вероятного импульса $p_{\text{в}}$ молекул идеального газа.

10.28. Найти число N молекул идеального газа, имеющих импульс, значение которого точно равно наиболее вероятному значению $p_{\text{в}}$.

10.29. Вывести формулу, определяющую среднее значение компонента импульса $\langle p_x \rangle$ молекул идеального газа.

10.30. На сколько процентов изменится наиболее вероятное значение $p_{\text{в}}$ импульса молекул идеального газа при изменении температуры на один процент?

10.31. Найти выражение для импульса молекул идеального газа, энергии которых равны наиболее вероятному значению энергии.

Распределение молекул по кинетическим энергиям поступательного движения

10.32. Найти выражение средней кинетической энергии $\langle \varepsilon \rangle$ поступательного движения молекул. Функцию распределения молекул по энергиям считать известной.

10.33. Преобразовать формулу распределения молекул по энергиям в формулу, выражающую распределение молекул по относительным энергиям w $(w = \varepsilon/\langle \varepsilon \rangle$, где ε — кинетическая энергия; $\langle \varepsilon \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул).

---

[8]) Эффузионным называется истечение газов через отверстия, малые по сравнению с длиной свободного пробега молекулы.

10.34. Определить долю w молекул идеального газа, энергии которых отличаются от средней энергии $\langle\varepsilon\rangle$ поступательного движения молекул при той же температуре не более чем на 1%.

10.35. Вывести формулу, определяющую долю w молекул, энергия ε которых много меньше kT. Функцию распределения молекул по энергиям считать известной.

10.36. Определить долю w молекул, энергия которых заключена в пределах от $\varepsilon_1 = 0$ до $\varepsilon_2 = 0{,}01kT$.

10.37. Число молекул, энергия которых заключена в пределах от нуля до некоторого значения ε, составляет 0,1% от общего числа молекул. Определить величину ε в долях kT.

10.38. Считая функцию распределения молекул по энергиям известной, вывести формулу, определяющую долю w молекул, энергия ε которых много больше энергии теплового движения молекул.

10.39. Число молекул, энергия которых выше некоторого значения ε_1, составляет 10^{-4} от общего числа молекул. Определить величину ε_1 в долях kT, считая, что $\varepsilon \gg mkT$.

Указание. Получающееся трансцендентное уравнение решить графически.

10.40. Используя функцию распределения молекул по энергиям, определить наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_{\text{в}}$.

10.41. Преобразовать функцию $f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$ распределения молекул по кинетическим энергиям в функцию $f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ распределения молекул по относительным кинетическим энергиям (где $\theta = \varepsilon/\varepsilon_{\text{в}}$; $\varepsilon_{\text{в}}$ — наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул).

10.42. Найти относительное число w молекул идеального газа, кинетические энергии которых отличаются от наиболее вероятного значения $\varepsilon_{\text{в}}$ энергии не более чем на 1%.

10.43. Определить относительное число w молекул идеального газа, кинетические энергии которых заключены в пределах от нуля до значения, равного $0{,}01\varepsilon_{\text{в}}$ ($\varepsilon_{\text{в}}$ — наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул).

10.44. Найти выражение для кинетической энергии молекул идеального газа, импульсы которых имеют наиболее вероятное значение $p_{\text{в}}$.

10.45. Во сколько раз изменится значение максимума функции $f(\varepsilon)$ распределения молекул идеального газа по энергиям, если температура T газа увеличится в два раза? Решение пояснить графиком.

10.46. Определить, во сколько раз средняя кинетическая энергия $\langle\varepsilon\rangle$ поступательного движения молекул идеального газа отличается от наиболее вероятного значения $\varepsilon_{\text{в}}$ кинетической энергии поступательного движения при той же температуре.

Длина свободного пробега и число столкновений молекул

10.47. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул водорода при давлении $p = 0{,}1$ Па и температуре $T = 100$ К.

10.48. При каком давлении p средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота равна 1 м, если температура T газа равна 300 К?

10.49. Баллон вместимостью $V = 10$ л содержит водород массой $m = 1$ г. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул.

10.50. Можно ли считать вакуум с давлением $p = 100$ мкПа высоким, если он создан в колбе диаметром $d = 20$ см, содержащей азот при температуре $T = 280$ К?

10.51. Определить плотность ρ разреженного водорода, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул равна 1 см.

10.52. Найти среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых в течение $t = 1$ с молекулой кислорода при нормальных условиях.

10.53. Найти число N всех соударений, которые происходят в течение $t = 1$ с между всеми молекулами водорода, занимающего при нормальных условиях объем $V = 1$ мм^3.

10.54. В газоразрядной трубке находится неон при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 1$ Па. Найти число N атомов неона, ударяющихся за время $\Delta t = 1$ с о катод, имеющий форму диска площадью $S = 1$ см^2.

10.55. Найти среднюю продолжительность $\langle \tau \rangle$ свободного пробега молекул кислорода при температуре $T = 250$ К и давлении $p = 100$ Па.

10.56. Найти зависимость средней длины свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул идеального газа от давления p при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изотермическом. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.57. Найти зависимость средней длины свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул идеального газа от температуры T при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изобарном. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.58. Найти зависимость среднего числа столкновений $\langle z \rangle$ молекулы идеального газа в 1 с от давления p при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изотермическом. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.59. Найти зависимость среднего числа столкновений $\langle z \rangle$ молекулы идеального газа в 1 с от температуры T при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изобарном. Изобразить эти зависимости на графиках.

Явления переноса: диффузия, вязкость, теплопроводность

10.60. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.

10.61. Коэффициент диффузии D кислорода при температуре $t = 0\,^\circ\mathrm{C}$ равна $0{,}19\,\mathrm{см}^2/\mathrm{с}$. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода.

10.62. Вычислить коэффициент диффузии D азота: 1) при нормальных условиях; 2) при давлении $p = 100\,\mathrm{Па}$ и температуре $T = 300\,\mathrm{К}$.

10.63. Определить, во сколько раз отличается коэффициент диффузии D_1 газообразного водорода от коэффициента диффузии D_2 газообразного кислорода, если оба газа находятся при одинаковых условиях.

10.64. Определить зависимость коэффициента диффузии D от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном.

10.65. Определить зависимость коэффициента диффузии D от давления p при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном.

10.66. Вычислить динамическую вязкость η кислорода при нормальных условиях.

10.67. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота при условии, что его динамическая вязкость $\eta = 17\,\mathrm{мкПа} \cdot \mathrm{с}$.

10.68. Найти динамическую вязкость η гелия при нормальных условиях, если коэффициент диффузии D при тех же условиях равен $1{,}06 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{м}^2/\mathrm{с}$.

10.69. Определить зависимость динамической вязкости η от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.70. Определить зависимость динамической вязкости η от давления p при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.71. Цилиндр радиусом $R_1 = 10\,\mathrm{см}$ и длиной $l = 30\,\mathrm{см}$ расположен внутри цилиндра радиусом $R_2 = 10{,}5\,\mathrm{см}$ так, что оси обоих цилиндров совпадают. Малый цилиндр неподвижен, большой вращается относительно геометрической оси с частотой $n = 15\,\mathrm{с}^{-1}$. Динамическая вязкость η газа, в котором находятся цилиндры, равна $8{,}5\,\mathrm{мкПа} \cdot \mathrm{с}$. Определить вращающий момент M, действующий на поверхность внутреннего цилиндра.

10.72. Два горизонтальных диска радиусами $R = 20\,\mathrm{см}$ расположены друг над другом так, что оси их совпадают. Расстояние d между плоскостями дисков равно $0{,}5\,\mathrm{см}$. Верхний диск неподвижен, нижний вращается относительно геометрической оси с частотой $n = 10\,\mathrm{с}^{-1}$. Найти вращающий момент M, действующий

на верхний диск. Динамическая вязкость η воздуха, в котором находятся диски, равна 17,2 мкПа·с.

10.73. В ультраразреженном азоте, находящемся под давлением $p = 1$ мПа и при температуре $T = 300$ К, движутся друг относительно друга две параллельные пластины со скоростью $u = 1$ м/с. Расстояние между пластинами не изменяется и много меньше средней длины свободного пробега молекул. Определить силу F внутреннего трения, действующую на поверхность пластин площадью $S = 1\,м^2$.

10.74. Вычислить теплопроводность λ гелия при нормальных условиях.

10.75. В приближенной теории явлений переноса получается соотношение $\lambda/\eta = c_V$. Более строгая теория приводит к соотношению $\lambda/\eta = Kc_V$, где K — безразмерный коэффициент, равный $(9\gamma - 5)/4$ (γ — показатель адиабаты). Найти значения K, вычисленные по приведенной формуле и по экспериментальным данным, приведенным в табл. 12, для следующих газов: 1) аргона; 2) водорода; 3) кислорода; 4) паров воды.

10.76. При нормальных условиях динамическая вязкость η воздуха равна 17,2 мкПа · с. Найти для тех же условий теплопроводность λ воздуха. Значение K вычислить по формуле, приведенной в задаче 10.75.

10.77. Найти зависимость теплопроводности λ от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.78. Найти зависимость теплопроводности λ от давления p при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

10.79. Пространство между двумя большими параллельными пластинами, расстояние d между которыми равно 5 мм, заполнено гелием. Температура T_1 одной пластины поддерживается равной 290 К, другой — $T_2 = 310$ К. Вычислить плотность теплового потока $|q|$. Расчеты выполнить для двух случаев, когда давление p гелия равно: 1) 0,1 МПа; 2) 1 мПа.

10.80*. Определить коэффициент теплопроводности λ насыщенного водяного пара, находящегося при температуре $T = 373$ К (100 °С). Эффективный диаметр d молекул водяного пара принять равным 0,30 нм.

10.81*. Найти среднее время $\langle\tau\rangle$ между соударениями молекул азота, если азот находится под давлением $p = 10^{-5}$ Па при температуре $T = 300$ К.

10.82*. Аргон находится при температуре $T = 320$ К. При каком давлении p один атом аргона будет испытывать в среднем тысячу столкновений.

10.83*. Хлор находится в сосуде при нормальных условиях. Оценить, за какое время τ любая из молекул хлора сместится от своего начального положения на расстояние $L = 1$ см.

10.84*. Сосуд кубической формы объемом $V = 1$ л заполнен водой. В сосуд бросили щепотку соли (NaCl). Оценить, какое время τ потребуется для установления практически равномерной концентрации соли в воде (без перемешивания). Среднюю скорость $\langle v \rangle$ теплового движения молекул NaCl принять равной 300 м/с и среднее расстояние δ между молекулами воды равным 0,3 нм.

10.85*. Плотность ρ кислорода, находящегося в сосуде, равна 1 кг/м^3. Оценить среднее число $\langle z \rangle$ соударений, которое испытает одна молекула кислорода за время смещения ее от начального положения на расстояние $L = 1$ мм.

10.86*. Быстрые нейтроны, попав в жидкость, молекулы которых содержат водород, быстро замедляются до тепловых скоростей ($v \approx 300$ м/с). Тепловые нейтроны диффундируют в жидкости до тех пор, пока не окажутся захваченными ядрами водорода (протонами). Эффективное сечение σ захвата нейтронов протонами можно принять равным 0,3 барн. Пренебрегая захватом нейтронов ядрами других атомов, входящих в состав молекул, оценить время τ жизни тепловых нейтронов в следующих жидкостях (в скобках указаны химические формулы соединений и плотности ρ этих соединений в жидком состоянии; плотности выражены в кг/м^3): 1) вода (H_2O; 10^3); 2) этанол (C_2H_6O; $0{,}81 \cdot 10^3$); 3) глицерин ($C_2H_8O_3$; $1{,}3 \cdot 10^3$); 4) гексан (C_6H_{14}; $0{,}71 \cdot 10^3$); 5) октан (C_8H_{18}; $0{,}72 \cdot 10^3$).

§ 11. Физические основы термодинамики

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Связь между молярной (C_m) и удельной (c) теплоемкостями газа

$$C_m = cM,$$

где M — молярная масса газа.

• Молярные теплоемкости[9]) при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = \frac{iR}{2}; \qquad C_p = \frac{(i+2)R}{2},$$

где i — число степеней свободы; R — молярная газовая постоянная.

[9]) Здесь и далее в целях упрощения записи в индексах обозначений молярной теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме букву «m» будем опускать.

• Удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

• Уравнение Майера

$$C_p - C_V = R.$$

• Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}, \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V}, \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{i+2}{i}.$$

• Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N\langle\varepsilon\rangle, \quad \text{или} \quad U = \nu C_V T,$$

где $\langle\varepsilon\rangle$ — средняя кинетическая энергия молекулы; N — число молекул газа; ν — количество вещества.

• Работа, совершаемая газом при изменении его объема, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V,$$

где V_1 — начальный объем газа; V_2 — его конечный объем.

Частные случаи:

а) при изобарном процессе ($p = \text{const}$)

$$A = p(V_2 - V_1);$$

б) при изотермическом процессе ($T = \text{const}$)

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1};$$

в) *при адиабатном процессе*

$$A = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2), \quad \text{или} \quad A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1 — начальная температура газа; T_2 — его конечная температура.

• Уравнение адиабаты (уравнение Пуассона)

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

• Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатном процессе:

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma};\quad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1};\quad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

• Первое начало (закон) термодинамики:

а) для бесконечно малого изменения состояния системы (элементарного квазистатического процесса)

$$\delta Q=\mathrm{d}U+\delta A\,^{10}),$$

где δQ — бесконечно малое (элементарное) количество теплоты, подводимое к системе; $\mathrm{d}U$ — бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; δA — бесконечно малая (элементарная) работа, совершаемая системой против внешних сил;

б) для конечного изменения состояния системы

$$Q=\Delta U+A.$$

• Количество теплоты Q, подводимое к системе, изменение ΔU внутренней энергии газа и работа A, совершаемая газом против внешних сил при изопроцессах:

а) изохорном ($V=\mathrm{const}$)

$$Q=\frac{m}{M}C_v(T_2-T_1),\quad \Delta U=\frac{m}{M}C_v(T_2-T_1),\quad A=0;$$

б) изобарном ($p=\mathrm{const}$)

$$Q=\frac{m}{M}C_p(T_2-T_1),\quad \Delta U=\frac{m}{M}C_v(T_2-T_1),$$
$$A=p(V_2-V_1)\quad \text{или}\quad A=\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1};$$

в) изотермическом ($T=\mathrm{const}$)

$$Q=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1},\quad \Delta U=0,\quad A=\frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1};$$

---

[10]) Такая форма записи подчеркивает, что из трех величин только бесконечно малое изменение $\mathrm{d}U$ внутренней энергии является полным дифференциалом и сама внутренняя энергия U есть функция состояния термодинамической системы. Количество теплоты Q и работа A функциями состояния системы, в общем случае, не являются. Поэтому элементарные количество теплоты δQ и работу δA нельзя рассматривать как полные дифференциалы. В математической записи это обстоятельство учитывается заменой символа d (дифференциал) на символ δ (элементарное бесконечно малое изменение).

г) адиабатном ($S = \text{const}$ при обратимом процессе)

$$Q = 0, \quad \Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1),$$

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) \quad \text{или} \quad A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

где T_1 и V_1 — начальные температура газа и его объем; T_2 и V_2 — конечные температура газа и его объем; C_V — молярная теплоемкость газа; γ — показатель адиабаты.

• Энтальпия и ее изменение

$$H = U + pV, \quad \Delta H = \Delta U + p\Delta V = Q \quad (\text{при } p = \text{const});$$

$$\Delta H = \Delta U + V\Delta p \qquad (\text{при } V = \text{const}).$$

• Изменение энтропии:

а) при обратимых процессах

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{и} \quad S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T};$$

б) при необратимых процессах

$$\mathrm{d}S > \frac{\delta Q}{T} \quad \text{и} \quad S_B - S_A > \int_A^B \frac{\delta Q}{T},$$

где S_A и S_B — энтропии начального и конечного состояний системы.

• Термический коэффициент полезного действия (к.п.д.) цикла в общем случае

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

К.п.д. цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура охладителя.

• Формула Больцмана

$$S = k \ln W,$$

где S — энтропия системы; W — статистический вес или термодинамическая вероятность состояния системы; k — постоянная Больцмана.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_V) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \tag{1}$$

$$c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}. \tag{2}$$

Для неона (одноатомный газ) $i_1 = 3$, $M_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Подставив в формулы (1) и (2) значения i_1, M_1 и R и произведя вычисления, найдем

$$c_{V_1} = 624 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}; \quad c_{p_1} = 1{,}04 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i_2 = 5$, $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Вычисление по формулам (1) и (2) дает следующие значения удельных теплоемкостей водорода:

$$c_{V_2} = 10{,}4 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}; \quad c_{p_2} = 14{,}6 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Пример 2. Вычислить удельную теплоемкость $c_{V,\text{см}}$ смеси двух газов (гелия массой $m_1 = 6$ г и азота массой $m_2 = 10$ г) при постоянном объеме.

Решение. Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{\text{см}}$ к массе $m_{\text{см}}$ этой смеси:

$$c_{\text{см}} = \frac{C_{\text{см}}}{m_{\text{см}}}.$$

Теплоемкость вещества есть величина аддитивная, поэтому для двух газов можно написать

$$c_{\text{см}} = \frac{C_1 + C_2}{m_1 + m_2}, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — теплоемкости газов; m_1 и m_2 — их массы.

Теплоемкости газов при постоянном объеме определяются соотношениями

$$C_{V,1} = \frac{m_1}{M_1}\frac{i_1}{2}R \quad \text{и} \quad C_{V,2} = \frac{m_2}{M_2}\frac{i_2}{2}R, \tag{4}$$

где M_1 и M_2 — молярные массы газов; i_1 и i_2 — числа степеней свободы и R — молярная газовая постоянная.

Подставив (4) в (3), найдем

$$c_{V,\text{см}} = \frac{i_1(m_1/M_1) + i_2(m_2/M_2)}{m_1 + m_2}\frac{R}{2}.$$

Для гелия $i_1 = 3$ (газ одноатомный), $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; для азота $i_2 = 5$ (газ двухатомный), $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Вычисление по этой формуле дает следующее значение:

$$c_{V,\text{см}} = 1{,}63 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Пример 3. *Определить количество теплоты, поглощаемое водородом массой* $m = 0{,}2$ кг при нагревании его от температуры $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100\,^\circ\text{C}$ при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Решение. Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_p\Delta T, \tag{5}$$

где m — масса нагреваемого газа; c_p — его удельная теплоемкость при постоянном давлении; ΔT — изменение температуры газа.

Как известно, $c_p = \dfrac{i+2}{2}\dfrac{R}{M}$. Подставив это выражение c_p в формулу (5), получим

$$Q = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\Delta T.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$Q = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия выражается формулой

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT,$$

следовательно, изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T.$$

После подстановки в эту формулу числовых значений величин и вычислений получим

$$\Delta U = 208 \text{ кДж}.$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$, откуда

$$A = Q - \Delta U.$$

Подставив значения Q и ΔU, найдем

$$A = 83 \text{ кДж}.$$

Пример 4. Кислород занимает объем $V_1 = 1\,\text{м}^3$ и находится под давлением $p_1 = 200\,\text{кПа}$. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3\,\text{м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 500\,\text{кПа}$. Построить график процесса и найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

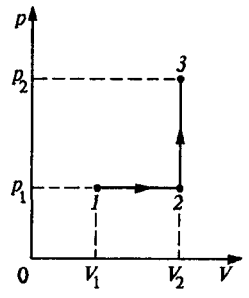


Рис. 11.1

Решение. Построим график процесса (рис. 11.1). На графике точками *1*, *2*, *3* обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами (p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния *1* в состояние *3* выражается формулой

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; m — масса газа; ΔT — разность температур, соответствующих конечному *3* и начальному *1* состояниям, т. е. $\Delta T = T_3 - T_1$. Так как $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{M}$, где M — молярная масса газа, то

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R(T_3 - T_1). \qquad (6)$$

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Клапейрона–Менделеева $(pV = (m/M)(R/T))$:

$$T_1 = \frac{Mp_1V_1}{mR}; \quad T_3 = \frac{Mp_2V_2}{mR}.$$

С учетом этого равенство (6) перепишем в виде

$$\Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Подставим сюда значения величин (учтем, что для кислорода как двухатомного газа $i = 5$) и произведем вычисления:

$$\Delta U = 3{,}25 \text{ МДж}.$$

2. Полная работа, совершаемая газом, равна $A = A_1 + A_2$, где A_1 — работа на участке *1–2*; A_2 — работа на участке *2–3*.

На участке *1–2* давление постоянно $(p = \text{const})$. Работа в этом случае выражается формулой $A_1 = p_1\Delta V = p_1(V_2 - V_1)$. На участке *2–3* объем

газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю ($A_2 = 0$). Таким образом,

$$A = A_1 = p_1(V_2 - V_1).$$

Подставив в эту формулу значения физических величин, произведем вычисления:

$$A = 0{,}4 \text{ МДж}.$$

3. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, переданное газу, равно сумме работы A, совершенной газом, и изменению ΔU внутренней энергии:

$$Q = A + \Delta U, \quad \text{или} \quad Q = 3{,}65 \text{ МДж}.$$

Пример 5. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится под давлением $p_1 = 250$ кПа и занимает объем $V_1 = 10$ л. Сначала газ изохорно нагревают до температуры $T_2 = 400$ К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический к.п.д. η цикла.

Решение. Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах p, V этот цикл имеет вид, представленный на рис. 11.2. Характерные точки цикла обозначим *1*, *2*, *3*.

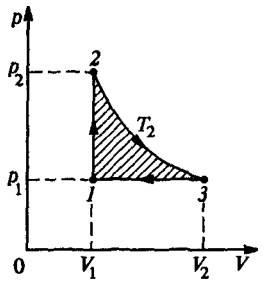


Рис. 11.2

Термический к.п.д. любого цикла определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \text{или} \quad \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \qquad (7)$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, отданное газом за цикл охладителю.

Заметим, что разность количеств теплоты $Q_1 - Q_2$ равна работе A, совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах p, V (рис. 11.2) изображается площадью цикла (площадь цикла заштрихована).

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: Q_{1-2} на участке *1–2* (изохорный процесс) и Q_{2-3} на участке *2–3* (изотермический процесс). Таким образом, $Q_1 = Q_{1-2} + Q_{2-3}$. Количество теплоты, полученное газом при изохорном процессе, равно

$$Q_{1-2} = C_V \nu (T_2 - T_1),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; ν — количество вещества. Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона–Менделеева:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$T_1 = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8{,}31} \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{моль} \cdot \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} = 300 \text{ К}.$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе, равно

$$Q_{2-3} = \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

где V_1 — объем, занимаемый газом при температуре T_2 и давлении p_1 (точка *3* на графике).

На участке *3–1* газ отдает количество теплоты Q_2, равное

$$Q_2 = Q_{3-1} = C_p \nu (T_2 - T_1),$$

где C_p — молярная теплоемкость газа при изобарном процессе.

Подставим найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (7):

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_p (T_2 - T_1)}{\nu C_v (T_2 - T_1) + \nu R T_2 \ln (V_2/V_1)}.$$

В полученном выражении заменим отношение объемов V_2/V_1, согласно закону Гей-Люссака, отношением температур ($V_2/V_1 = T_2/T_1$) и выразим C_v и C_p через число степеней свободы молекулы [$C_v = iR/2$, $C_p = (i+2)R/2$]. Тогда после сокращения на ν и $R/2$ получим

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)(T_2 - T_1)}{i(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln (T_2/T_1)}.$$

Подставив значения i, T_1, T_2 и R и произведя вычисления, найдем

$$\eta = 1 - \frac{(5+2)(400-300)}{5(400-300) + 2 \cdot 400 \ln (400/300)} = 0{,}041 = 4{,}1\%.$$

Пример 6. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02$ кг при температуре $T_1 = 300$ К. Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Решение. Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1},$$

где γ — показатель адиабаты (для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1{,}4$). Отсюда получаем выражение для конечной температуры T_2:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Подставляя числовые значения заданных величин, находим

$$T_2 = 300 \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1} \text{ К} = 300 \cdot 0{,}525 \text{ К} = 158 \text{ К}.$$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} c_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2).$$

Подставив сюда числовые значения величин, после вычисления получим

$$A_1 = \frac{0{,}02}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 (300 - 158) \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{\text{кг/моль}} =$$

$$= 29{,}5 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 29{,}5 \text{ кДж}.$$

Работу A_2 газа при изотермическом сжатии можно выразить формулой

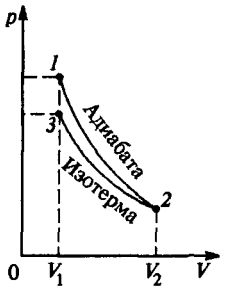


Рис. 11.3

$$A_2 = RT_2 \frac{m}{M} \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$A_2 = -21 \text{ кДж}.$$

Знак минус показывает, что при сжатии газа работа совершена внешними силами. Общая работа, совершенная газом при рассмотренных процессах,

$$A = A_1 + A_2 = 29{,}8 \text{ кДж} + (-21 \text{ кДж}) = 8{,}8 \text{ кДж}.$$

График процесса приведен на рис. 11.3.

Пример 7. Нагреватель тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, имеет температуру $t_1 = 200\,^\circ\text{C}$. Определить температуру T_2 охладителя, если при получении от нагревателя количества теплоты $Q_1 = 1$ Дж машина совершает работу $A = 0{,}4$ Дж? Потери на трение и теплоотдачу не учитывать.

Решение. Температуру охладителя найдем, использовав выражение для термического к.п.д. машины, работающей по циклу Карно, $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$. Отсюда

$$T_2 = T_1 (1 - \eta). \qquad (8)$$

Термический к.п.д. тепловой машины выражает отношение количества теплоты, которое превращено в механическую работу A, к количеству теплоты Q_1, которое получено рабочим телом тепловой машины из внешней среды (от нагревателя), т.е. $\eta = A/Q_1$. Подставив это выражение в формулу (8), найдем

$$T_2 = T_1\left(1 - \frac{A}{Q_1}\right). \tag{9}$$

Учтя, что $T_1 = 473\,\text{К}$, после вычисления по формуле (9) получим

$$T_2 = 284\ \text{К}.$$

Пример 8. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой $m = 100\,\text{г}$ от температуры $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100\,^\circ\text{C}$ и последующем превращении воды в пар той же температуры.

Решение. Найдем отдельно изменение энтропии $\Delta S'$ при нагревании воды и изменение энтропии $\Delta S''$ при превращении ее в пар. Полное изменение энтропии выразится суммой $\Delta S'$ и $\Delta S''$.

Как известно, изменение энтропии выражается общей формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T}. \tag{10}$$

При бесконечно малом изменении $\mathrm{d}T$ температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты $\mathrm{d}Q = mc\,\mathrm{d}T$, где m — масса тела; c — его удельная теплоемкость. Подставив выражение $\mathrm{d}Q$ в равенство (10), найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды:

$$\Delta S' = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\,\mathrm{d}T}{T}.$$

Вынесем за знак интеграла постоянные величины и произведем интегрирование, тогда получим

$$\Delta S' = mc\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

После вычислений найдем

$$\Delta S' = 132\ \text{Дж/К}.$$

При вычислении по формуле (10) изменения энтропии во время превращения воды в пар той же температуры постоянная температура T выносится за знак интеграла. Вычислив интеграл, найдем

$$\Delta S'' = \frac{1}{T}\int_1^2 \mathrm{d}Q = \frac{Q}{T}, \tag{11}$$

где Q — количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры.

Подставив в равенство (11) выражение количества теплоты $Q = \lambda m$, где λ — удельная теплота парообразования, получим

$$\Delta S'' = \frac{\lambda m}{T}. \tag{12}$$

Произведя вычисления по формуле (12), найдем

$$\Delta S'' = 605 \text{ Дж/К}.$$

Полное изменение энтропии при нагревании воды и последующем превращении ее в пар

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = 737 \text{ Дж/К}.$$

Пример 9. Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л.

Решение. Так как процесс изотермический, то в общем выражении энтропии $\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ температуру выносят за знак интеграла. Выполнив это, получим

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \tag{13}$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по первому началу термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$Q = A, \tag{14}$$

а работа A для этого процесса определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{15}$$

С учетом (14) и (15) равенство (13) примет вид

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{16}$$

Подставив в (16) числовые значения и произведя вычисления, получим

$$\Delta S = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \ln\left(\frac{100 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3}}\right) \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}}{\text{кг/моль}} = 3{,}60 \text{ Дж/К}.$$

ЗАДАЧИ

Теплоемкость идеального газа

11.1. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p газов: 1) гелия; 2) водорода; 3) углекислого газа.

11.2. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V$ некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг · К). Найти молярную массу M газа и его удельные теплоемкости c_V и c_p.

11.3. Каковы удельные теплоемкости c_V и c_p смеси газов, содержащей кислород массой $m_1 = 10$ г и азот массой $m_2 = 20$ г?

11.4. Определить удельную теплоемкость c_V смеси газов, содержащей $V_1 = 5$ л водорода и $V_2 = 3$ л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

11.5. Определить удельную теплоемкость c_p смеси кислорода и азота, если количество вещества [11]) ν_1 первого компонента равно 2 моль, а количество вещества ν_2 второго равно 4 моль.

11.6. В баллоне находятся аргон и азот. Определить удельную теплоемкость c_V смеси этих газов, если массовые доли [11]) аргона (w_1) и азота (w_2) одинаковы и равны $w = 0{,}5$.

11.7. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и в равных объемах. Определить удельную теплоемкость c_p смеси.

11.8. Определить удельную теплоемкость c_V смеси ксенона и кислорода, если количества вещества [11]) газов в смеси одинаковы и равны ν.

11.9. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 10$ г и водород массой $m_2 = 4$ г.

11.10. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определить показатель адиабаты γ такой смеси.

11.11. Найти показатель адиабаты γ смеси водорода и неона, если массовые доли [11]) обоих газов в смеси одинаковы и равны $w = 0{,}5$.

11.12. Найти показатель адиабаты γ смеси газов, содержащей кислород и аргон, если количества вещества [11]) того и другого газа в смеси одинаковы.

11.13. [12]) Степень диссоциации [13]) α газообразного водорода равна 0,6. Найти удельную теплоемкость c_V такого частично диссоциировавшего водорода

---

[11]) См сноску на с 132

[12]) В задачах 11.13–11.15 для частично диссоциировавшего газа следует учитывать колебательные степени свободы для недиссоциировавших молекул (см. § 9, Основные формулы).

[13]) См. задачу 9.11.

11.14. Определить показатель адиабаты γ частично диссоциировавшего газообразного азота, степень диссоциации α которого равна 0,4.

11.15. Определить степень диссоциации α газообразного хлора, если показатель адиабаты γ такого частично диссоциировавшего газа равен 1,55.

11.16. На нагревание кислорода массой $m = 160$ г на $\Delta T = 12$ К было затрачено количество теплоты $Q = 1{,}76$ кДж. Как протекал процесс: при постоянном объеме или постоянном давлении?

11.17. При адиабатном сжатии газа его объем уменьшился в $n = 10$ раз, а давление увеличилось в $k = 21{,}4$ раза. Определить отношение C_p/C_V теплоемкостей газов.

Работа расширения газа

11.18. Водород массой $m = 4$ г был нагрет на $\Delta T = 10$ К при постоянном давлении. Определить работу A расширения газа.

11.19. Газ, занимавший объем $V_1 = 12$ л под давлением $p_1 = 100$ кПа, был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Определить работу A расширения газа.

11.20. Какая работа A совершается при изотермическом расширении водорода массой $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличивается в три раза?

11.21. При адиабатном сжатии кислорода массой $m = 1$ кг совершена работа $A = 100$ кДж. Определить конечную температуру T_2 газа, если до сжатия кислород находился при температуре $T_1 = 300$ К.

11.22. Определить работу A адиабатного расширения водорода массой $m = 4$ г, если температура газа понизилась на $\Delta T = 10$ К.

11.23. Азот массой $m = 2$ г, имевший температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатно сжат так, что его объем уменьшился в $n = 10$ раз. Определить конечную температуру T_2 газа и работу A сжатия.

11.24. Кислород, занимавший объем $V_1 = 1$ л под давлением $p_1 = 1{,}2$ МПа, адиабатно расширился до объема $V_2 = 10$ л. Определить работу A расширения газа.

Первое начало термодинамики

11.25. Азот массой $m = 5$ кг, нагретый на $\Delta T = 150$ К, сохранил неизменный объем V. Найти: 1) количество теплоты Q, сообщенное газу; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) совершенную газом работу A.

11.26. Водород занимает объем $V_1 = 10$ м^3 при давлении $p_1 = 100$ кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления $p_2 = 300$ кПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) работу A, совершенную газом; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

11.27. При изохорном нагревании кислорода объемом $V = 50$ л давление газа изменилось на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Найти количество теплоты Q, сообщенное газу.

11.28. Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит водород при температуре $T_1 = 300$ К под давлением $p_1 = 0{,}4$ МПа. Каковы будут температура T_2 и давление p_2, если газу сообщить количество теплоты $Q = 6$ кДж?

11.29. Кислород при неизменном давлении $p = 80$ кПа нагревается. Его объем увеличивается от $V_1 = 1\,м^3$ до $V_2 = 3\,м^3$. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии кислорода; 2) работу A, совершенную им при расширении; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

11.30. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщено количество теплоты $Q = 21$ кДж. Определить работу A, которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии.

11.31. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1\,м^3$ и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3\,м^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найти: 1) изменение внутренней энергии ΔU газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу. Построить график процесса.

11.32. Гелий массой $m = 1$ г был нагрет на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении p. Определить: 1) количество теплоты Q, переданное газу; 2) работу A расширения; 3) приращение ΔU внутренней энергии газа.

11.33. Какая доля w_1 количества теплоты Q_1, подводимого к идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение ΔU внутренней энергии газа и какая доля w_2 — на работу A расширения? Рассмотреть три случая, если газ: 1) одноатомный; 2) двухатомный; 3) трехатомный.

11.34. Водяной пар расширяется при постоянном давлении. Определить работу A расширения, если пару передано количество теплоты $Q = 4$ кДж.

11.35. Азот массой $m = 200$ г расширяется изотермически при температуре $T = 280$ К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную при расширении газа работу A; 3) количество теплоты Q, полученное газом.

11.36. В цилиндре под поршнем находится азот массой $m = 0{,}6$ кг, занимающий объем $V_1 = 1{,}2\,м^3$ при температуре $T = 560$ К. В результате подвода теплоты газ расширился и занял объем $V_2 = 4{,}2\,м^3$, причем температура осталась неизменной. Най-

ти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

11.37. Водород массой $m = 10\,\text{г}$ нагрели на $\Delta T = 200\,\text{К}$, причем газу было передано количество теплоты $Q = 40\,\text{кДж}$. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа и совершенную им работу A.

11.38. При изотермическом расширении водорода массой $m = 1\,\text{г}$, имевшего температуру $T = 280\,\text{К}$, объем газа увеличился в три раза. Определить работу A расширения газа и полученное газом количество теплоты Q.

11.39. Азот, занимавший объем $V_1 = 10\,\text{л}$ под давлением $p_1 = 0{,}2\,\text{МПа}$, изотермически расширился до объема $V_2 = 28\,\text{л}$. Определить работу A расширения газа и количество теплоты Q, полученное газом.

11.40. При изотермическом расширении кислорода, содержавшего количество вещества $\nu = 1\,\text{моль}$ и имевшего температуру $T = 300\,\text{К}$, газу было передано количество теплоты $Q = 2\,\text{кДж}$. Во сколько раз увеличился объем газа?

11.41. Какое количество теплоты Q выделится, если азот массой $m = 1\,\text{г}$, взятый при температуре $T = 280\,\text{К}$ под давлением $p_1 = 0{,}1\,\text{МПа}$, изотермически сжать до давления $p_2 = 1\,\text{МПа}$?

11.42. Расширяясь, водород совершил работу $A = 6\,\text{кДж}$. Определить количество теплоты Q, подведенное к газу, если процесс протекал: 1) изобарно; 2) изотермически.

11.43. Автомобильная шина накачана до давления $p_1 = 220\,\text{кПа}$ при температуре $T_1 = 290\,\text{К}$. Во время движения она нагрелась до температуры $T_2 = 330\,\text{К}$ и лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения шины, адиабатным, определить изменение температуры ΔT вышедшего из нее воздуха. Внешнее давление p_0 воздуха равно $100\,\text{кПа}$.

11.44. При адиабатном расширении кислорода с начальной температурой $T_1 = 320\,\text{К}$ внутренняя энергия уменьшилась на $\Delta U = 8{,}4\,\text{кДж}$, а его объем увеличился в $n = 10$ раз. Определить массу m кислорода.

11.45. Водород при нормальных условиях имел объем $V_1 = 100\,\text{м}^3$. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема $V_2 = 150\,\text{м}^3$.

11.46. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02\,\text{кг}$ при температуре $T_1 = 300\,\text{К}$. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и полную работу A, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

11.47. При адиабатном сжатии кислорода массой $m = 20\,\text{г}$ его внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U = 8\,\text{кДж}$ и температура повысилась до $T_2 = 900\,\text{К}$. Найти: 1) повышение температуры

ΔT; 2) конечное давление газа p_2, если начальное давление $p_1 = 200$ кПа.

11.48. Воздух, занимавший объем $V_1 = 10$ л при давлении $p_1 = 100$ кПа, был адиабатно сжат до объема $V_2 = 1$ л. Под каким давлением p_2 находится воздух после сжатия?

11.49. Горючая смесь в двигателе дизеля воспламеняется при температуре $T_2 = 1{,}1$ кК. Начальная температура смеси $T_1 = 350$ К. Во сколько раз нужно уменьшить объем смеси при сжатии, чтобы она воспламенилась? Сжатие считать адиабатным. Показатель адиабаты γ для смеси принять равным 1,4.

11.50. Углекислый газ CO_2 массой $m = 400$ г был нагрет на $\Delta T = 50$ К при постоянном давлении. Определить изменение ΔU внутренней энергии газа, количество теплоты Q, полученное газом, и совершенную им работу A.

11.51. Кислород массой $m = 800$ г, охлажденный от температуры $t_1 = 100\,^\circ$C до температуры $t_2 = 20\,^\circ$C, сохранил неизменным объем. Определить: 1) количество теплоты Q, полученное газом; 2) изменение ΔU внутренней энергии и 3) совершенную газом работу A.

11.52. Давление азота объемом $V = 3$ л при нагревании увеличилось на $\Delta p = 1$ МПа. Определить количество теплоты Q, полученное газом если объем газа, остался неизменным.

Круговые процессы. Термический к.п.д. Цикл Карно

11.53. В результате кругового процесса газ совершил работу $A = 1$ Дж и передал охладителю количество теплоты $Q_2 = 4{,}2$ Дж. Определить термический к.п.д. η цикла.

11.54. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 4$ кДж. Определить работу A газа при протекании цикла, если его термический к.п.д. $\eta = 0{,}1$.

11.55. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем $V_{\min} = 10$ л, наибольший $V_{\max} = 20$ л, наименьшее давление $p_{\min} = 246$ кПа, наибольшее $p_{\max} = 410$ кПа. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический к.п.д. η.

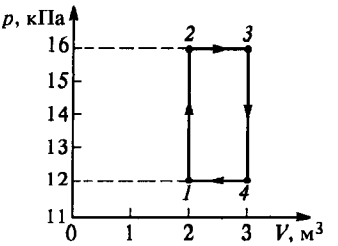


Рис. 11 4

11.56. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ кмоль, совершает замкнутый цикл, график которого изображен на рис. 11.4. Определить: 1) количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя; 2) количество теплоты Q_2, переданное охладителю; 3) работу A, совершаемую газом за цикл; 4) термический к.п.д. η цикла.

охлажден так, что давление его уменьшилось в $n = 3$ раза. Найти изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

11.76*. Неон находится при температуре $T_1 = 300\,\text{К}$. Определить конечную температуру T_2 в конце адиабатного сжатия в двух случаях: 1) объем газа уменьшается в $n = 5$ раз; 2) давление газа возрастает в $n = 5$ раз.

11.77*. Один моль двухатомного газа, находящегося при температуре $T_1 = 400\,\text{К}$, расширяется сначала изотермически от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$, а затем адиабатно до объема $V_3 = 3V_1$. Определить: 1) работу A_{1-2} и A_{2-3}, совершенную газом на участках *1–2* и *2–3*; 2) конечную температуру T_3; 3) изменением ΔU_{1-3} внутренней энергии газа на участке *1–3*.

11.78*. Один моль одноатомного газа, находящегося при температуре $T_1 = 300\,\text{К}$ сжимается сначала изотермически, так, что давление возрастает от p_1 до $p_2 = 2p_1$, а затем адиабатно до давления $p_3 = 4p_1$. Определить: 1) работу A_{1-2} и A_{2-3} на участках *1–2* и *1–3*; 2) конечную температуру T_3; 3) изменение ΔU_{1-3} внутренней энергии на участке *1–3*.

11.79*. Водород в количестве $\nu = 6\,\text{моль}$ находится под давлением $p = 1\,\text{МПа}$ и температуре 300 К. При изохорном нагревании давление возросло на $\Delta p = 1{,}5\,\text{МПа}$. Определить изменение: 1) внутренней энергии ΔU; 2) энтальпии ΔH; 3) энтропии ΔS.

11.80*. Кислород массой $m = 80\,\text{г}$ изохорно нагрели от температуры $T_1 = 300\,\text{К}$ до $T_2 = 400\,\text{К}$. Определить изменения: 1) внутренней энергии ΔU; 2) энтальпии ΔH; 3) энтропии ΔS.

11.81*. Определить к.п.д. η цикла *1–2–3–1* (рис. 11.6), состоящего из изохоры (*1–2*), адиабаты (*2–3*) и изобары (*3–1*). Газ одноатомный.

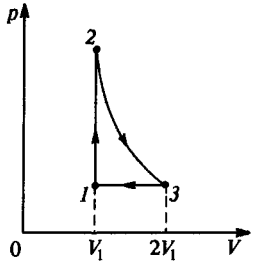


Рис. 11.6

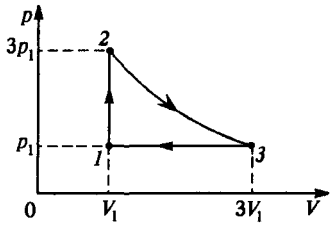


Рис. 11.7

11.82*. Определить к.п.д. η цикла *1–2–3–1* (рис. 11.7), совершаемого идеальным двухатомным газом (участок *2–3* — изотерма).

11.83*. Одноатомный идеальный газ совершает цикл *1–2–3–1* (рис. 11.8). Определить к.п.д. η цикла.

11.84*. Вода массой $m = 36$ г находится при температуре кипения (атмосферное давление нормальное). Определить изменение ΔU внутренней энергии при полном выкипании воды. Удельная теплота L парообразования воды равна 2,26 МДж/кг. Объемом жидкой воды пренебречь.

11.85*. Лед массой $m = 1$ кг, находящийся при температуре $t = -30\,^{\circ}\mathrm{C}$, нагревают до температуры плавления (при нормальном атмосферном давлении) и плавят. Определить изменение ΔS энтропии. Удельная теплоемкость $c_{уд}$ льда равна 2,09 кДж/(кг · К) и удельная теплота плавления $r = 333$ кДж/кг.

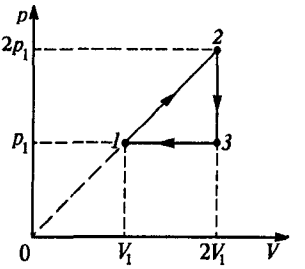


Рис. 11.8

11.86*. Определить изменение ΔS энтропии при нагревании до кипения $m = 100$ г воды, взятой при температуре $T_1 = 300$ К, и превращении ее в пар при температуре кипения и нормальном атмосферном давлении. Для воды известны: молярная теплоемкость $C_m = 75{,}4$ Дж/(моль · К); удельная теплота парообразования $L = 2{,}26$ МДж/кг.

§ 12. Реальные газы. Жидкости

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

для произвольного количества вещества ν газа

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса (рассчитанные на один моль газа); V — объем, занимаемый газом; V_m — молярный объем; p — давление газа на стенки сосуда.

• Связь критических параметров — объема, давления и температуры газа — с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса:

$$V_{m_{кр}} = 3b; \quad p_{кр} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{кр} = \frac{3a}{27Rb}.$$

• Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

• Коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{F}{l},$$

где F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости, или

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где ΔE — изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади ΔS поверхности этой пленки.

• Формула Лапласа в общем случае записывается в виде

$$p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где p — давление, создаваемое изогнутой поверхностью жидкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения; R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости, а в случае сферической поверхности

$$p = \frac{2\sigma}{R}.$$

• Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},$$

где θ — краевой угол; R — радиус канала трубки; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

• Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d},$$

где d — расстояние между плоскостями.

• Расход жидкости в трубке тока (рис. 12.1):

а) объемный расход $Q_V = vS$;

б) массовый расход $Q_m = \rho v S$, где S — площадь поперечного сечения трубки тока; v — скорость жидкости; ρ — ее плотность.

• Уравнение неразрывности струи

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

где S_1 и S_2 — площади поперечного сечения трубки тока в двух местах; v_1 и v_2 — соответствующие скорости течений.

• Уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости в общем случае

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2,$$

где p_1 и p_2 — статические давления жидкости в двух сечениях трубки тока; v_1 и v_2 — скорости жидкости в этих сечениях; $\rho v_1^2/2$ и $\rho v_2^2/2$ — динамические давления жидкости в этих же сечениях; h_1 и h_2 — высоты их над некоторым уровнем (рис. 12.1); $\rho g h_1$ и $\rho g h_2$ — гидростатические давления.

Уравнение Бернулли в случае, когда оба сечения находятся на одной высоте ($h_1 = h_2$):

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

• Скорость течения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде

$$v = \sqrt{2gh},$$

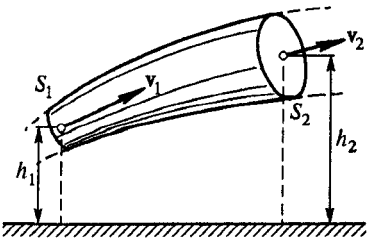


Рис. 12.1

где h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

• Формула Пуазейля. Объем жидкости (газа), протекающей за время t через длинную трубку,

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta},$$

где r — радиус трубки; l — ее длина; Δp — разность давлений на концах трубки; η — динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения) жидкости.

• Число Рейнольдса для потока жидкости в длинных трубках

$$\mathrm{Re} = \rho \langle v \rangle \frac{d}{\eta},$$

где $\langle v \rangle$ — средняя по сечению скорость течения жидкости; d — диаметр трубки, и для движения шарика в жидкости

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta},$$

где v — скорость шарика; d — его диаметр.

Число Рейнольдса Re есть функция скорости v тела, линейной величины l, определяющей размеры тела, плотности ρ и динамической вязкости η жидкости, т. е.

$$\mathrm{Re} = f(\rho, \eta, l, v).$$

При малых значениях чисел Рейнольдса, меньших некоторого критического значения $\mathrm{Re}_{кр}$, движение жидкости является ламинарным.

При значениях чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Re}_{кр}$ движение жидкости переходит в турбулентное.

Критическое число Рейнольдса для движения шарика в жидкости $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$; для потока жидкости в длинных трубках $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$.

• Формула Стокса. Сила сопротивления F, действующая со стороны потока жидкости на медленно движущийся в ней шарик,

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r — радиус шарика; v — его скорость.

Формула справедлива для скоростей, при которых число Рейнольдса много меньше единицы ($\mathrm{Re} \ll 1$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В баллоне вместимостью $V = 8$ л находится кислород массой $m = 0{,}3$ кг при температуре $T = 300$ К. Найти, какую часть вместимости сосуда составляет собственный объем молекул газа. Определить отношение внутреннего давления p' к давлению p газа на стенки сосуда.

Решение. Для получения ответа на первый вопрос задачи необходимо найти отношение

$$k = \frac{V'}{V}, \tag{1}$$

где V' — собственный объем молекул.

Собственный объем молекул найдем, воспользовавшись постоянной b Ван-дер-Ваальса, равной учетверенному объему молекул, содержащихся в одном моле реального газа. В уравнении Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \tag{2}$$

поправка νb означает учетверенный объем молекул всего газа, т. е. $\nu b = 4V'$. Отсюда

$$V' = \frac{\nu b}{4}, \quad \text{или} \quad V' = \frac{mb}{4M},$$

где $\nu = m/M$ — количество вещества; M — молярная масса.

Подставив полученное значение V' в выражение (1), найдем

$$k = \frac{mb}{4MV}.$$

После вычисления по этой формуле получим

$$k = 0{,}91\%.$$

Следовательно, собственный объем молекул составляет 0,91% от объема сосуда.

Для ответа на второй вопрос задачи надо найти отношение

$$k_1 = \frac{p'}{p}. \tag{3}$$

Как следует из уравнения (2),

$$p' = \frac{\nu^2 a}{V^2}, \quad \text{или} \quad p' = \frac{(m/M)^2 a}{V^2}, \tag{4}$$

где a — постоянная Ван-дер-Ваальса для одного моля газа.

После вычисления по формуле (4) найдем

$$p' = 187 \text{ кПа}.$$

Давление p, производимое газом на стенки сосуда, найдем из уравнения (2):

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2}.$$

После вычисления по этой формуле получим

$$p = \left[\frac{\left(0{,}3/(32 \cdot 10^{-3})\right) \cdot 8{,}31 \cdot 300}{8 \cdot 10^{-3} - \left(0{,}3/(32 \cdot 10^{-3})\right) \cdot 3{,}17 \cdot 10^{-5}} - \left(\frac{0{,}3}{32 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \frac{136 \cdot 10^{-3}}{(8 \cdot 10^{-3})^2}\right] \text{ Па} = 2{,}84 \text{ МПа}.$$

Подставив в выражение (3) значения p' и p и произведя вычисления, найдем

$$k_1 = 6{,}6\%.$$

Следовательно, давление газа, обусловленное силами притяжения молекул, составляет 6,6% давления газа на стенки сосуда.

Пример 2. Углекислый газ, содержащий количество вещества $\nu =$ $= 1$ моль, находится в критическом состоянии. При изобарном нагревании газа его объем V увеличился в $k = 2$ раза. Определить изменение ΔT температуры газа, если его критическая температура $T_{\text{кр}} = 304$ К.

Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенной форме, т. е. в такой форме, когда давление p, молярный объем V_m и температура T реального газа с соответствующими критическими параметрами представлены в виде следующих отношений:

$$\pi = \frac{p}{p_{\text{кр}}}; \quad \omega = \frac{V_m}{V_{m_{\text{кр}}}}; \quad \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}.$$

Из этих равенств получим:

$$p = \pi p_{\text{кр}}; \quad V_m = \omega V_{m_{\text{кр}}}; \quad T = \tau T_{\text{кр}}.$$

Подставив сюда выражения $p_{\text{кр}}$, $V_{m_{\text{кр}}}$ и $T_{\text{кр}}$ через постоянные Ван-дер-Ваальса a и b, найдем:

$$p = \frac{a}{27b^2}\pi; \qquad V_m = 3b\omega; \quad T = \frac{8a}{27bR}\tau.$$

Полученные выражения p, V_m и T подставим в обычное уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(\frac{a}{27b^2}\pi + \frac{a}{(3b\omega)^2}\right)(3b\omega - b) = R\frac{8a}{27bR}\tau.$$

После сокращения на $a/(27b)$ и в правой части на R получим

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \tag{5}$$

Это и есть уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенной форме. Оно не содержит никаких параметров, характеризующих индивидуальные свойства газа, и поэтому является универсальным.

Теперь ответим на вопрос задачи. Так как давление остается постоянным ($p = p_{\text{кр}}$), то $\pi = 1$; молярный объем газа согласно условию увеличился в два раза, т.е. $V_m = 2V_{m_{\text{кр}}}$; следовательно, $\omega = 2$. Из уравнения (5) выразим приведенную температуру τ:

$$\tau = \frac{1}{8}\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1).$$

Подставив сюда значения π и ω и произведя вычисления, найдем

$$\tau = \frac{35}{32}.$$

Температура T, как отмечалось, связана с приведенной температурой τ и критической $T_{\text{кр}}$ соотношением $T = \tau T_{\text{кр}}$. Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$T = 332 \text{ К}.$$

Пример 3. В цилиндре под поршнем находится хлор массой $m = 20$ г. Определить изменение ΔU внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 = 200\,\text{см}^3$ до $V_2 = 500\,\text{см}^3$.

Решение. Внутренняя энергия U реального (ван-дер-ваальсового) газа определяется выражением

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right). \tag{6}$$

Выразив в равенстве (6) молярный объем V_m через объем V и количество вещества ν ($V_m = V/\nu$) и учтя, что $\nu = m/M$, получим

$$U = \frac{m}{M}\left(C_v T - \frac{ma}{MV}\right). \qquad (7)$$

Изменение ΔU внутренней энергии в результате изотермического расширения найдем как разность двух значений внутренней энергии при объемах V_2 и V_1:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2 a(V_2 - V_1)}{M^2 V_1 V_2}. \qquad (8)$$

Подставив значения величин в формулу (8) и произведя вычисления, получим

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{(20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}650(5-2) \cdot 10^{-4}}{(71 \cdot 10^{-3}) \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \text{ Дж} = 154 \text{ Дж}.$$

Отметим, что для идеального газа такое изменение внутренней энергии соответствовало бы нагреванию на 26,3 К.

Пример 4. Найти добавочное давление p внутри мыльного пузыря диаметром $d = 10$ см. Определить также работу A, которую нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь.

Решение. Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности — внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление $p = 2 \cdot 2\sigma/r$, где r — радиус пузыря. Так как $r = d/2$, то

$$p = \frac{8\sigma}{d}.$$

Подставив в эту формулу значения $\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ Н/м (см. табл. 15) и $d = 0{,}1$ м и произведя вычисления, найдем

$$p = 3{,}2 \text{ Па}.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой

$$A = \sigma \Delta S, \quad \text{или} \quad A = \sigma(S - S_0).$$

В данном случае S — общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0 — общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая S_0, получим

$$A \approx \sigma S = 2\pi d^2 \sigma.$$

Сделав подстановку значений величин, получим

$$A = 2{,}5 \text{ мДж}.$$

Пример 5. Определить изменение свободной энергии ΔE поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 10\,\text{см}^3$ до $V_2 = 2V_1$.

Решение. Свободная энергия E поверхности жидкости пропорциональна площади S этой поверхности: $E = \sigma S$, где σ — поверхностное натяжение.

У мыльного пузыря имеются две поверхности — внешняя и внутренняя, площади которых практически равны из-за малой толщины мыльной пленки. Поэтому свободная энергия поверхности (внешней и внутренней вместе) мыльного пузыря

$$E = 2\sigma S. \tag{9}$$

Так как, по условию задачи, процесс изотермический, то поверхностное натяжение, являющееся для данной жидкости функцией только температуры, остается постоянным. Следовательно, по формуле (9) изменение свободной энергии

$$\Delta E = 2\sigma \Delta S, \tag{10}$$

где ΔS — изменение поверхности пузыря (одной — внутренней или внешней).

Считая, что мыльный пузырь имеет форму сферы, найдем изменение площади поверхности:

$$\Delta S = 4\pi r_2^2 - 4\pi r_1^2, \tag{11}$$

где r_1 и r_2 — радиусы сфер, соответствующие начальному V_1 и конечному V_2 объемам: $r_1 = \left(\dfrac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3}$, $r_2 = \left(\dfrac{3V_2}{4\pi}\right)^{1/3}$. Теперь формула (11) примет вид

$$\Delta S = 4\pi \left[\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\right].$$

Учитывая, что $V_2 = 2V_1$, получим после вынесения общего члена $\left(\dfrac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}$ за скобку

$$\Delta S = 4\pi \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3} \left(2^{2/3} - 1\right).$$

Подставим выражение ΔS в формулу (10)

$$\Delta E = 8\pi\sigma \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3} \left(2^{2/3} - 1\right). \tag{12}$$

После вычисления по формуле (12) получим

$$\Delta E = 106 \text{ мкДж}.$$

Пример 6. Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака (рис. 12.2) и бьет из отверстия II–II со скоростью $v_2 = 12$ м/с. Диаметр D бака равен 2 м, диаметр d сечения II–II равен 2 см. Найти: 1) скорость v_1 понижения воды в баке; 2) давление p_1, под которым вода подается в фонтан; 3) высоту h_1 уровня воды в баке и высоту h_2 струи, выходящей из фонтана.

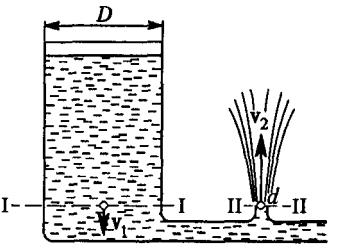


Рис. 12.2

Решение. 1. Проведем сечение I–I в баке на уровне сечения II–II фонтана. Так как площадь S_1 сечения I–I много больше площади S_2 сечения II–II, то высоту h_1 уровня воды в баке можно считать для малого промежутка времени постоянной, а поток — установившимся. Для установившегося потока справедливо условие неразрывности струи: $v_1 S_1 = v_2 S_2$, откуда

$$v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1}, \quad \text{или} \quad v_1 = v_2 \left(\frac{d}{D}\right)^2. \tag{13}$$

Подставив в равенство (13) значения заданных величин и произведя вычисления, найдем

$$v_1 = 0{,}0012 \text{ м/с}.$$

С такой же скоростью будет понижаться уровень воды в баке. Как видно, эта скорость очень мала по сравнению со скоростью струи.

2. Давление p_1, под которым вода подается в фонтан, найдем по уравнению Бернулли. В случае горизонтальной трубки тока оно имеет вид

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \tag{14}$$

Учтя, что $p_2 = 0$ (под давлением подразумевается избыточное над атмосферным давление), из уравнения (14) получим

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}. \tag{15}$$

Так как $v_1 \ll v_2$, то из равенства (15) следует

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

После вычислений, произведенных по этой формуле, найдем

$$p_1 = 72 \text{ кПа}.$$

3. Высоту h_1 уровня воды в баке найдем из соотношения $p_1 = h_1 \rho g$, откуда

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$h_1 = 7{,}35 \text{ м}.$$

Зная скорость v_2, с которой вода выбрасывается фонтаном, найдем высоту h_2, на которую она будет выброшена:

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = 7{,}35 \text{ м}.$$

Подчеркнем, что высота уровня воды в баке равна высоте, на которую поднимается фонтан воды (по правилу сообщающихся сосудов). Это замечание справедливо, если пренебречь сопротивлением воздуха.

Пример 7. В сосуде с глицерином падает свинцовый шарик. Определить максимальное значение диаметра шарика, при котором движение слоев глицерина, вызванное падением шарика, является еще ламинарным. Движение считать установившимся.

Решение. Если в вязкой жидкости движется тело, то вместе с ним, как одно целое, движется и прилипший к телу слой жидкости. Этот слой вследствие внутреннего трения увлекает за собой и соседние слои. Возникающее при этом движение жидкости является ламинарным или турбулентным в зависимости от размеров и формы тела и его скорости. Характер движения зависит также от свойств жидкости и определяется безразмерным числом Рейнольдса.

Если тело, движущееся в жидкости, имеет форму шара диаметром d, то число Рейнольдса определяется по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}, \tag{16}$$

а критическое значение этого числа $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 0{,}5$.

Скорость v выразим, исходя из следующих соображений. На свинцовый шарик, падающий в глицерине, действуют три силы:

1) сила тяжести шарика

$$mg = \rho_{\text{св}} g V = \frac{\pi \rho_{\text{св}} g d^3}{6},$$

где ρ — плотность свинца; V — объем шарика;

2) выталкивающая сила, определяемая по закону Архимеда,

$$F_{\text{выт}} = \rho_{\text{гл}} V g = \frac{\pi \rho_{\text{гл}} g d^3}{6},$$

где $\rho_{\text{гл}}$ — плотность глицерина;

3) сила внутреннего трения, определяемая по формуле Стокса,

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v = 3\pi\eta d v.$$

При установившемся движении шарика в жидкости ($v = \text{const}$) сила тяжести шарика уравновешивается суммой выталкивающей силы и силы внутреннего трения, т. е.

$$\frac{\pi\rho_{\text{св}} g d^3}{6} = \frac{\pi\rho_{\text{гл}} g d^3}{6} + 3\pi\eta d v,$$

откуда

$$v = \frac{(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})}{18\eta} d^2. \tag{17}$$

Решая совместно уравнения (16) и (17) относительно d, найдем

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \text{Re}}{\rho_{\text{гл}}(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})g}}.$$

Максимальное значение диаметра $d_{\max}$, при котором движение остается еще ламинарным, соответствует критическому значению числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$. Поэтому

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \text{Re}_{\text{кр}}}{\rho_{\text{гл}}(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})g}}.$$

Подставив сюда значения величин η (см. табл. 14), $\text{Re}_{\text{кр}}$, $\rho_{\text{св}}$, $\rho_{\text{гл}}$ и g и произведя вычисления, получим

$$d_{\max} = 5{,}29 \text{ мм}.$$

ЗАДАЧИ

Уравнение Ван-дер-Ваальса

12.1. В сосуде вместимостью $V = 10$ л находится азот массой $m = 0{,}25$ кг. Определить: 1) внутреннее давление p' газа: 2) собственный объем V' молекул.

12.2. Определить давление p, которое будет производить кислород, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, если он занимает объем $V = 0{,}5$ л при температуре $T = 300$ К. Сравнить полученный результат с давлением, вычисленным по уравнению Менделеева–Клапейрона.

12.3. В сосуде вместимостью $V = 0{,}3$ л находится углекислый газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль при температуре $T = 300$ К. Определить давление p газа: 1) по уравнению Менделеева–Клапейрона; 2) по уравнению Ван-дер-Ваальса.

12.4. Криптон, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится при температуре $T = 300$ К. Определить относительную погрешность $\varepsilon = \Delta p/p$, которая будет допущена при вычислении давления; если вместо уравнения Ван-дер-Ваальса воспользоваться уравнением Менделеева–Клапейрона. Вычисления выполнить для двух значений объема: 1) $V = 2$ л; 2) $V = 0{,}2$ л.

12.5. Внутреннюю полость толстостенного стального баллона наполовину заполнили водой при комнатной температуре. После этого баллон герметически закупорили и нагрели до температуры $T = 650$ К. Определить давление p водяного пара в баллоне при этой температуре.

12.6. Давление p кислорода равно 7 МПа, его плотность $\rho = 100$ кг/м^3. Найти температуру T кислорода.

12.7. Определить давление p водяного пара массой $m = 1$ кг, взятого при температуре $T = 380$ К и объеме V: 1) 1000 л; 2) 10 л; 3) 2 л.

Критическое состояние

12.8. Вычислить постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота, если известны критические температура $T_{\text{кр}} = 126$ К и давление $p_{\text{кр}} = 3{,}39$ МПа.

12.9. Вычислить критические температуру $T_{\text{кр}}$ и давление $p_{\text{кр}}$: 1) кислорода; 2) воды.

12.10. Критическая температура $T_{\text{кр}}$ аргона равна 151 К и критическое давление $p_{\text{кр}} = 4{,}86$ МПа. Определить по этим данным критический молярный объем $V_{m_{\text{кр}}}$ аргона.

12.11. Жидким пентаном C_5H_{12}, плотность ρ которого равна 626 кг/м^3, частично заполняют прочную кварцевую колбу и запаивают ее так, что над пентаном остаются только насыщающие пары. Определить, какую часть ε внутреннего объема колбы должен занимать пентан, чтобы можно было наблюдать при нагревании переход, вещества через критическую точку. Постоянная b Ван-дер-Ваальса равна $14{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.12. Определить наибольший объем $V_{\max}$, который может занимать вода, содержащая количество вещества $\nu = 1$ моль.

12.13. Определить плотность ρ водяных паров в критическом состоянии.

12.14. Определить наибольшее давление $p_{\max}$ насыщающих водяных паров.

12.15. Во сколько раз концентрация $n_{\text{кр}}$ молекул азота в критическом состоянии больше концентрации n_0 молекул при нормальных условиях?

12.16. Найти критический объем $V_{\text{кр}}$ веществ: 1) кислорода массой $m = 0{,}5$ г; 2) воды массой $m = 1$ г.

12.17.[14]) Газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится при критической температуре и занимает объем V, в $n = 3$ раза превышающий критический объем $V_{кр}$. Во сколько раз давление p газа в этом состоянии меньше критического давления $p_{кр}$?

12.18. При какой температуре T находится оксид азота, если его объем V и давление p в $k = 3$ раза превышают соответствующие критические значения $V_{кр}$ и $p_{кр}$? Критическая температура $T_{кр}$ оксида азота равна 180 К.

12.19. Газ находится в критическом состоянии. Как и во сколько раз его давление p будет отличаться от критического $p_{кр}$ при одновременном увеличении температуры T и объема V газа в $k = 2$ раза?

12.20. Газ находится в критическом состоянии. Во сколько раз возрастет давление p газа, если его температуру T изохорно увеличить в $k = 2$ раза?

Внутренняя энергия

12.21. Определить внутреннюю энергию U азота, содержащего количество вещества $\nu = 1$ моль, при критической температуре $T_{кр} = 126$ К. Вычисления выполнить для четырех значений объемов V: 1) 20 л; 2) 2 л; 3) 0,2 л; 4) $V_{кр}$.

12.22. Кислород, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится при температуре $T = 350$ К. Найти относительную погрешность ε в вычислении внутренней энергии газа, если газ рассматривать как идеальный. Расчеты выполнить для двух значений объема V: 1) 2 л; 2) 0,2 л.

12.23. Найти внутреннюю энергию U углекислого газа массой $m = 132$ г при нормальном давлении p_0 и температуре $T = 300$ К в двух случаях, когда газ рассматривают: 1) как идеальный; 2) как реальный.

12.24. Кислород массой $m = 8$ г занимает объем $V = 20\,см^3$ при температуре $T = 300$ К. Определить внутреннюю энергию U кислорода.

12.25. Определить изменение ΔU внутренней энергии неона, содержащего количество вещества $\nu = 1$ моль, при изотермическом расширении его объема от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л.

12.26. Объем углекислого газа массой $m = 0{,}1$ кг увеличился от $V_1 = 10^3$ л до $V_2 = 10^4$ л. Найти работу A внутренних сил взаимодействия молекул при этом расширении газа.

---

[14]) В задачах 12.17–12.20 при решении удобнее использовать уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенной форме (см. пример 2).

12.27. В сосуде вместимостью $V_1 = 1$ л содержится $m = 10$ г азота. Определить изменение ΔT температуры азота, если он расширяется в пустоту до объема $V_2 = 10$ л.

12.28. Газообразный хлор массой $m = 7{,}1$ г находится в сосуде вместимостью $V_1 = 0{,}1$ л. Какое количество теплоты Q необходимо подвести к хлору, чтобы при расширении его в пустоту до объема $V_2 = 1$ л температура газа осталась неизменной?

Поверхностное натяжение. Капиллярные явления

12.29. Масса m 100 капель спирта, вытекающего из капилляра, равна 0,71 г. Определить поверхностное натяжение σ спирта, если диаметр d шейки капли в момент отрыва равен 1 мм.

12.30. Трубка имеет диаметр $d_1 = 0{,}2$ см. На нижнем конце трубки повисла капля воды, имеющая в момент отрыва вид шарика. Найти диаметр d_2 этой капли.

12.31. Какую работу A нужно совершить, чтобы, выдувая мыльный пузырь, увеличить его диаметр от $d_1 = 1$ см до $d_2 = 11$ см? Считать процесс изотермическим.

12.32. Две капли ртути радиусом $r = 1$ мм каждая слились в одну большую каплю. Какая энергия E выделится при этом слиянии? Считать процесс изотермическим.

12.33. Воздушный пузырек диаметром $d = 2$ мкм находится в воде у самой ее поверхности. Определить плотность ρ воздуха в пузырьке, если воздух над поверхностью воды находится при нормальных условиях.

12.34. На сколько давление p воздуха внутри мыльного пузыря больше атмосферного давления p_0, если диаметр пузыря $d = 5$ мм?

12.35. Определить силу F, прижимающую друг к другу две стеклянные пластинки размерами 10×10 см, расположенные параллельно друг другу, если расстояние l между пластинками равно 22 мкм, а пространство между ними заполнено водой. Считать мениск вогнутым с диаметром d, равным расстоянию между пластинками.

12.36. Покровное стеклышко для микроскопа имеет вид круга диаметром $d = 16$ мм. На него нанесли воду массой $m = 0{,}1$ г и наложили другое такое же стеклышко; в результате оба стеклышка слиплись. С какой силой F, перпендикулярной поверхностям стеклышек, надо растягивать их, чтобы разъединить? Считать, что вода полностью смачивает стекло и поэтому меньший радиус r кривизны боковой поверхности водяного слоя равен половине расстояния d между стеклышками.

12.37. Глицерин поднялся в капиллярной трубке на высоту $h = 20$ мм. Определить поверхностное натяжение σ глицерина, если диаметр d канала трубки равен 1 мм.

12.38. Диаметр d канала стеклянной трубки чашечного ртутного барометра равен 5 мм. Какую поправку Δp нужно вводить в отсчеты по этому барометру, чтобы получить верное значение атмосферного давления?

12.39. Разность Δh уровней жидкости в коленах U-образной трубки равна 23 мм. Диаметры d_1 и d_2 каналов в коленах трубки равны соответственно 2 и 0,4 мм. Плотность ρ жидкости равна $0{,}8\ \text{г/см}^3$. Определить поверхностное натяжение σ жидкости.

12.40. В жидкость нижними концами опущены две вертикальные капиллярные трубки с внутренними диаметрами $d_1 = 0{,}05$ см и $d_2 = 0{,}1$ см. Разность Δh уровней жидкости в трубках равна 11,6 мм. Плотность ρ жидкости равна $0{,}8\ \text{г/см}^3$. Найти поверхностное натяжение σ жидкости.

12.41. В воду опущена на очень малую глубину стеклянная трубка с диаметром d внутреннего канала, равным 1 мм. Найти массу m вошедшей в трубку воды.

12.42. Капиллярная трубка диаметром $d = 0{,}5$ мм наполнена водой. На нижнем конце трубки вода повисла в виде капли. Эту каплю можно принять за часть сферы радиуса $r = 3$ мм. Найти высоту h столбика воды в трубке.

12.43. Широкое колено U-образного ртутного манометра имеет диаметр $d_1 = 4$ см, узкое $d_2 = 0{,}25$ см. Разность Δh уровней ртути в обоих коленах равна 200 мм. Найти давление p, которое показывает манометр, приняв во внимание поправку на капиллярность.

12.44. На какую высоту h поднимается вода между двумя параллельными друг другу стеклянными пластинками, если расстояние d между ними равно 0,2 мм?

Гидродинамика

12.45. Вода течет в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость v_1 воды в широкой части трубы равна 20 см/с. Определить скорость v_2 в узкой части трубы, диаметр d_2 которой в 1,5 раза меньше диаметра d_1 широкой части.

12.46. В широкой части горизонтально расположенной трубы нефть течет со скоростью $v_1 = 2$ м/с. Определить скорость v_2 нефти в узкой части трубы, если разность Δp давлений в широкой и узкой частях ее равна 6,65 кПа.

12.47. В горизонтально расположенной трубе с площадью S_1 поперечного сечения, равной $20\ \text{см}^2$, течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь S_2 сечения равна $12\ \text{см}^2$. Разность Δh уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна 8 см. Определить объемный расход Q_V жидкости.

12.48. Горизонтальный цилиндр насоса имеет диаметр $d_1 = 20$ см. В нем движется со скоростью $v_1 = 1$ м/с поршень, вы-

талкивая воду через отверстие диаметром $d_2 = 2$ см. С какой скоростью v_2 будет вытекать вода из отверстия? Каково будет избыточное давление p воды в цилиндре?

12.49. К поршню спринцовки, расположенной горизонтально, приложена сила $F = 15$ Н. Определить скорость v истечения воды из наконечника спринцовки, если площадь S поршня равна 12 см^2

12.50. Давление p ветра на стену равно 200 Па. Определить скорость v ветра, если он дует перпендикулярно стене. Плотность ρ воздуха равна 1,29 кг/м^3.

12.51. Струя воды диаметром $d = 2$ см, движущаяся со скоростью $v = 10$ м/с, ударяется о неподвижную плоскую поверхность, поставленную перпендикулярно струе. Найти силу F давления струи на поверхность, считая, что после удара о поверхность скорость частиц воды равна нулю.

12.52. Бак высотой $h = 1{,}5$ м наполнен до краев водой. На расстоянии $d = 1$ м от верхнего края бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии l от бака падает на пол струя, вытекающая из отверстия?

12.53. Струя воды с площадью S_1 поперечного сечения, равной 4 см^2, вытекает в горизонтальном направлении из брандспойта, расположенного на высоте $H = 2$ м над поверхностью Земли, и падает на эту поверхность на расстоянии $l = 8$ м (рис. 12.3). Пренебрегая сопротивлением воздуха движению воды, найти избыточное давление p воды в рукаве, если площадь S_2 поперечного сечения рукава равна 50 см^2?

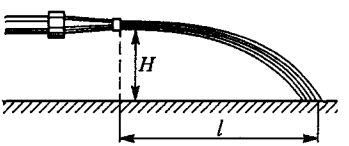


Рис. 12.3

12.54. Бак высотой $H = 2$ м до краев заполнен жидкостью. На какой высоте h должно быть проделано отверстие в стенке бака, чтобы место падения струи, вытекающей из отверстия, было на максимальном от бака расстоянии?

12.55. Вода течет по круглой гладкой трубе диаметром $d = 5$ см со средней по сечению скоростью $\langle v \rangle = 10$ см/с. Определить число Рейнольдса Re для потока жидкости в трубе и указать характер течения жидкости.

12.56. По трубе течет машинное масло. Максимальная скорость $v_{\max}$, при которой движение масла в этой трубе остается еще ламинарным, равна 3,2 см/с. При какой скорости v движение глицерина в той же трубе переходит из ламинарного в турбулентное?

12.57. В трубе с внутренним диаметром $d = 3$ см течет вода. Определить максимальный массовый расход $Q_{m_{\max}}$ воды при ламинарном течении.

12.58. Медный шарик диаметром $d = 1$ см падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением в нем шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}} = 0{,}5$.

12.59. Латунный шарик диаметром $d = 0{,}5$ мм падает в глицерине. Определить: 1) скорость v установившегося движения шарика; 2) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным?

12.60. При движении шарика радиусом $r_1 = 2{,}4$ мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости v_1 шарика, не превышающей 10 см/с. При какой минимальной скорости v_2 шарика радиусом $r_2 = 1$ мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

Глава 3
ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 13. Закон Кулона. Взаимодействие заряженных тел

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Закон Кулона:
а) в векторной форме

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r},$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на точечный заряд Q_1 со стороны точечного заряда Q_2 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$); ε_0 — электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м); ε — диэлектрическая проницаемость среды; $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, направленный от заряда Q_2 к заряду Q_1;

б) в скалярной форме

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{\varepsilon r^2} = k\frac{Q_1Q_2}{\varepsilon r^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

• Закон сохранения заряда

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \text{const},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, входящих в электрически изолированную систему; n — число зарядов.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Три одинаковых положительных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл расположены по вершинам равностороннего треугольника (рис. 13.1). Какой отрицательный заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Решение. Все три заряда, расположенных по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи

достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например Q_1, находился в равновесии. В соответствии с принципом суперпозиции на заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил будет равна нулю:

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_4 = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ — силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3 и Q_4; $\mathbf{F}$ — равнодействующая сил $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$.

Так как силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_4$ направлены по одной прямой (см. рис. 13.1), то векторное равенство (1) можно заменить скалярной суммой:

$$F - F_4 = 0, \quad \text{или} \quad F_4 = F.$$

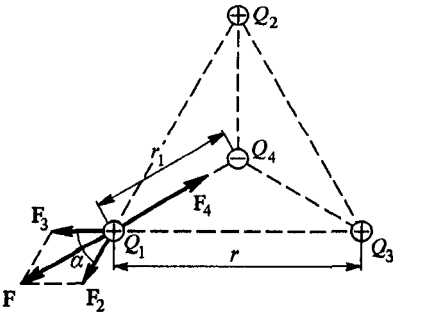


Рис. 13.1

Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $Q_2 = Q_3 = Q_4$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{\varepsilon r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{\varepsilon r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}, \quad (2)$$

откуда

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}; \quad \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$Q_4 = \frac{Q_1}{\sqrt{3}}.$$

Подставив сюда значение Q_1, получим

$$Q_4 = 0{,}58 \text{ нКл}.$$

Отметим, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Пример 2. Два заряда $9Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии l друг от друга. Третий заряд Q_1 может перемещаться только вдоль прямой,

проходящей через заряды. Определить положение заряда Q_1, при котором он будет находиться в равновесии. При каком знаке заряда равновесие будет устойчивым [1])?

Решение. Заряд Q_1 будет находиться в равновесии в том случае, если векторная сумма сил, действующих на него, будет равна нулю. Это значит, что на заряд Q_1 должны действовать две силы, равные по модулю и противоположные по направлению. Рассмотрим, на каком из

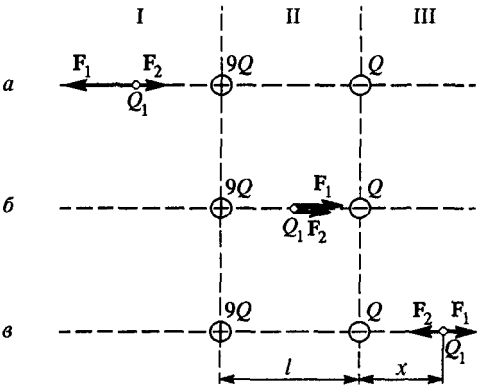


Рис. 13.2

трех участков I, II, III (рис. 13.2) может быть выполнено это условие. Для определенности будем считать, что заряд Q_1 — положительный [2]).

На участке I (рис. 13.2*а*) на заряд Q_1 действуют две противоположно направленные силы: $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Сила $\mathbf{F}_1$, действующая со стороны заряда $9Q$, в любой точке этого участка будет больше, чем сила $\mathbf{F}_2$, действующая со стороны заряда $-Q$, так как больший (по модулю) заряд $9Q$ всегда находится ближе к заряду Q_1, чем меньший заряд $-Q$. Поэтому *равновесие на этом участке невозможно.*

На участке II (рис. 13.2*б*) обе силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены в одну сторону — к заряду $-Q$. Следовательно, и на участке II равновесие невозможно.

На участке III (рис. 13.2*в*) силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены в противоположные стороны, так же как и на участке I, но в отличие от него меньший (по модулю) заряд $(-Q)$ всегда находится ближе к заряду Q_1, чем больший заряд $(9Q)$. Это значит, что можно найти такую точку на прямой, где силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ будут одинаковы по модулю, т. е.

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|. \tag{3}$$

---

[1]) Равновесие называется устойчивым, если при малом смещении заряда от положения равновесия возникают силы, возвращающие его в положение равновесия.

[2]) Рекомендуется читателю самостоятельно выполнить решение задачи для отрицательного заряда.

Пусть расстояние от меньшего заряда до заряда Q_1 равно x, тогда расстояние от большего заряда будет $l + x$. Выражая в равенстве (3) F_1 и F_2 в соответствии с законом Кулона, получим

$$\frac{9QQ_1}{(l+x)^2} = \frac{QQ_1}{x^2}.$$

Сокращая на QQ_1 и извлекая из обеих частей равенства квадратный корень, найдем $l + x = \pm 3x$, откуда

$$x_1 = +\frac{l}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{l}{4}.$$

Корень x_2 не удовлетворяет физическому условию задачи (в этой точке силы F_1 и F_2 хотя и равны по модулю, но направлены в одну сторону). Определим знак заряда, при котором равновесие будет устойчивым. Рассмотрим смещение заряда Q_1 в двух случаях: 1) заряд положителен; 2) заряд отрицателен.

1. Если заряд Q_1 положителен, то при смещении его влево обе силы F_1 и F_2 возрастают, но F_1 возрастает медленнее (заряд $9Q$ всегда находится дальше, чем $-Q$). Следовательно, F_2 (по модулю) больше, чем F_1, и на заряд Q_1 будет действовать результирующая сила, направленная также влево. Под действии этой силы заряд Q_1 удаляется от положения равновесия. То же происходит и при смещении заряда Q_1 вправо. Сила F_2 убывает быстрее, чем F_1. Векторная сумма сил в этом случае направлена вправо. Заряд под действием этой силы также будет перемещаться вправо, т. е. удаляться от положения равновесия. Таким образом, в случае положительного заряда равновесие является неустойчивым.

2. Если заряд Q_1 отрицателен, то его смещение влево вызовет увеличение сил F_2 и F_1, но сила F_1 возрастает медленнее, чем F_2, т. е. $|F_2| > |F_1|$. Результирующая сила будет направлена вправо. Под действием этой силы заряд Q_1 возвращается к положению равновесия. При смещении Q_1 вправо сила F_2 убывает быстрее, чем F_1, т. е. $|F_1| > |F_2|$, результирующая сила направлена влево и заряд Q_1 опять будет возвращаться к положению равновесия. При отрицательном заряде равновесие является устойчивым. Величина самого заряда Q_1 несущественна.

Отметим, что в электростатике устойчивое равновесие возможно только при определенных ограничениях. В нашем примере заряд Q_1 может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды $-Q$ и $9Q$. Если это ограничение снять, то устойчивого равновесия не будет. В системе зарядов, находящихся под действием одних только электростатических сил, устойчивое равновесие невозможно (теорема Ирншоу).

Пример 3. Тонкий стержень длиной $l = 30$ см (рис. 13.3) несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r_0 = 20$ см от стержня находится заряд $Q_1 = 10$ нКл, равноудаленный от концов стержня. Определить силу F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Решение. Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи, один из зарядов не является точечным, а равномерно распределен по длине стержня. Однако

если выделить на стержне малый участок длиной $\mathrm{d}l$, то находящийся на нем заряд $\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}l$ можно рассматривать как точечный и тогда по закону Кулона[3]) сила взаимодействия между зарядами Q_1 и $\mathrm{d}Q$:

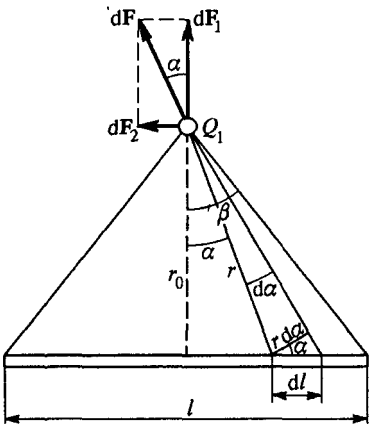


Рис. 13.3

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\tau\,\mathrm{d}l}{r^2}, \qquad (4)$$

где r — расстояние от выделенного элемента до заряда Q_1.

Из рис. 13.3 следует, что $r = \dfrac{r_0}{\cos\alpha}$ и $\mathrm{d}l = \dfrac{r\,\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha}$. Подставив эти выражения r и $\mathrm{d}l$ в формулу (4), получим

$$\mathrm{d}F = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\,\mathrm{d}\alpha. \qquad (5)$$

Следует иметь в виду, что $\mathrm{d}\mathbf{F}$ — вектор, поэтому, прежде чем интегрировать, разложим его на две составляющие: $\mathrm{d}\mathbf{F}_1$, перпендикулярную стержню, и $\mathrm{d}\mathbf{F}_2$, параллельную ему.

Из рис. 13.3 видно, что $\mathrm{d}F_1 = \mathrm{d}F\cos\alpha$, $\mathrm{d}F_2 = \mathrm{d}F\sin\alpha$. Подставляя значение $\mathrm{d}F$ из выражения (5) в эти формулы, найдем:

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{Q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\,\mathrm{d}\alpha; \quad \mathrm{d}F_2 = \frac{Q_1\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta}\frac{Q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\int_{-\beta}^{+\beta}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\alpha\Big|_{-\beta}^{+\beta} =$$

$$= \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\big(\sin\beta - \sin(-\beta)\big) = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}2\sin\beta; \quad F_1 = \frac{Q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\beta.$$

В силу симметрии расположения заряда Q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения дает нуль:

$$F_2 = \int_{-\beta}^{+\beta}\frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\cos\alpha\Big|_{-\beta}^{+\beta} = 0.$$

[3]) Здесь и далее, если в условии задачи не указана среда, имеется в виду, что заряды находятся в вакууме ($\varepsilon = 1$).

Таким образом, сила, действующая на заряд Q_1,

$$F = F_1 = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta. \tag{6}$$

Из рис. 13.3 следует, что $\sin\beta = \dfrac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + l^2/4}} = \dfrac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$. Подставив это выражение $\sin\beta$ в формулу (6), получим

$$F = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}. \tag{7}$$

Произведем вычисления по формуле (7):

$$F = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \frac{0{,}3}{\sqrt{4 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}3^2}} \frac{\text{Кл} \cdot (\text{Кл/м}) \cdot \text{м}}{(\text{Ф/м}) \cdot \text{м} \cdot \text{м}} =$$

$$= 5{,}4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Н} = 0{,}54\ \text{мН}.$$

ЗАДАЧИ

Взаимодействие точечных зарядов

13.1. Определить силу взаимодействия двух точечных зарядов $Q_1 = Q_2 = 1$ Кл, находящихся в вакууме на расстоянии $r = 1$ м друг от друга.

13.2. Два шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной $l = 20$ см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $\alpha = 60°$. Найти заряд каждого шарика.

13.3. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8 \times \times 10^2$ кг/м^3. Определить диэлектрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным. Плотность материала шариков $\rho = 1{,}6 \times \times 10^3$ кг/м^3.

13.4. Даны два шарика массой $m = 1$ г каждый. Какой заряд Q нужно сообщить каждому шарику, чтобы сила взаимного отталкивания зарядов уравновесила силу взаимного притяжения шариков по закону тяготения Ньютона? Рассматривать шарики как материальные точки.

13.5. В элементарной теории атома водорода принимают, что электрон обращается вокруг ядра по круговой орбите. Определить

скорость v электрона, если радиус орбиты $r = 53$ пм, а также частоту n вращения электрона.

13.6. Расстояние между двумя точечными зарядами $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = -Q_1$ равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд $Q = 0{,}1$ мкКл, удаленный на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго зарядов.

13.7. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см расположены точечные заряды Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ ($Q = 0{,}1$ мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд Q, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

13.8. Два одинаковых проводящих заряженных шара находятся на расстоянии $r = 60$ см. Сила отталкивания F_1 шаров равна $70 \cdot 10^{-6}$ Н. После того как шары привели в соприкосновение и удалили друг от друга на прежнее расстояние, сила отталкивания возросла и стала равной $F_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Н. Вычислить заряды Q_1 и Q_2, которые были на шарах до их соприкосновения. Диаметр шаров считать много меньшим расстояния между ними.

13.9. Два одинаковых проводящих заряженных шара находятся на расстоянии $r = 30$ см. Сила притяжения F_1 шаров равна 90 мкН. После того как шары были приведены в соприкосновение и удалены друг от друга на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой $F_2 = 160$ мкН. Определить заряды Q_1 и Q_2, которые были на шарах до их соприкосновения. Диаметр шаров считать много меньшим расстояния между ними.

13.10. Два положительных точечных заряда Q и $4Q$ закреплены на расстоянии $l = 60$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд Q_1 так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

13.11. Расстояние l между свободными зарядами $Q_1 = 180$ нКл и $Q_2 = 720$ нКл равно 60 см. Определить точку на прямой, проходящей через заряды, в которой нужно поместить третий заряд Q_3 так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определить величину и знак заряда. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие?

13.12. Три одинаковых заряда $Q = 1$ нКл каждый расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно поместить в центре треугольника, чтобы его притяжение уравновесило силы взаимного отталкивания зарядов? Будет ли это равновесие устойчивым?

13.13. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды $Q =$ $= 0{,}3$ нКл каждый. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно помес-

тить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда?

Взаимодействие точечного заряда с зарядом, равномерно распределенным

13.14. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см равномерно заряжен. Линейная плотность τ заряда равна 10^3 нКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от ближайшего его конца находится точечный заряд $Q = 100$ нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

13.15. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10^4 нКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от его конца находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

13.16. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10^4 нКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восставленном из конца его, находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Расстояние a заряда от конца стержня равно 20 см. Найти силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

13.17. Тонкая нить длиной $l = 20$ см равномерно заряжена с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. На расстоянии $a = 10$ см от нити, против ее середины, находится точечный заряд $Q = 1$ нКл. Вычислить силу F, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.

13.18. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 10^4$ нКл/м. Какова сила F, действующая на точечный заряд $Q = 10$ нКл, находящийся на расстоянии $a = 20$ см от стержня, вблизи его середины?

13.19. Тонкая бесконечная нить согнута под углом 90°. Нить несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. Определить силу F, действующую на точечный заряд $Q = 0{,}1$ мкКл, расположенный на продолжении одной из сторон и удаленный от вершины угла на $a = 50$ см.

13.20. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 10^2$ нКл. На перпендикуляре к плоскости кольца, восставленном из его середины, находится точечный заряд $Q_1 = 10$ нКл. Определить силу F, действующую на точечный заряд Q со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на: 1) $l_1 = 20$ см; 2) $l_2 = 2$ м.

13.21. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 10^3$ нКл/м.

В центре кривизны полукольца находится заряд $Q = 20$ нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

13.22. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. В центре кольца находится заряд $Q = 400$ нКл. Определить силу F, растягивающую кольцо. Взаимодействием зарядов кольца пренебречь.

§ 14. Напряженность электрического поля. Электрическое смещение

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Напряженность электрического поля в точке

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q},$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q, помещенный в данную точку поля.

• Сила, действующая на точечный заряд Q, помещенный в электрическое поле,

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}.$$

• Поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля:

а) через произвольную поверхность S, помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha\,\mathrm{d}S, \quad \text{или} \quad \Phi_E = \int_S E_n\,\mathrm{d}S,$$

где α — угол между вектором напряженности $\mathbf{E}$ и нормалью $\mathbf{n}$ к элементу поверхности; $\mathrm{d}S$ — площадь элемента поверхности; E_n — проекция вектора напряженности на нормаль;

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное электрическое поле,

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

• Поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint E_n\,\mathrm{d}S,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

• Теорема Остроградского–Гаусса. Поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$,

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

где $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности; n — число зарядов.

• Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2},$$

где $\mathbf{r}/r$ — единичный радиус-вектор, направленный от заряда Q к точке, в которой определяется $\mathbf{E}$.

• Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R, несущей заряд Q, на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r < R$)

$$E = 0;$$

б) на поверхности сферы ($r = R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon R^2};$$

в) вне сферы ($r > R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}.$$

• Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей, согласно которому напряженность $\mathbf{E}$ результирующего поля, созданного N точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i.$$

В случае наложения двух электрических полей с напряженностями $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ модуль вектора напряженности определяется по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где α — угол между векторами $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$.

• Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{\varepsilon r},$$

где τ — линейная плотность заряда.

Линейная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по нити, к длине нити (цилиндра):

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}.$$

• Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Поверхностная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по поверхности, к площади этой поверхности:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

• Напряженность поля, создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскостями с одинаковой по модулю поверхностной плотностью σ заряда (поле плоского конденсатора):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Приведенная формула справедлива для вычисления напряженности поля между пластинами плоского конденсатора (в средней части его) только в том случае, если расстояние между пластинами много меньше линейных размеров пластин конденсатора.

• Электрическое смещение (электрическая индукция) $\mathbf{D}$ связано с напряженностью $\mathbf{E}$ электрического поля соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Это соотношение справедливо только для изотропных диэлектриков.

• Поток вектора электрического смещения выражается аналогично потоку вектора напряженности электрического поля:

а) в случае однородного поля поток сквозь плоскую поверхность

$$\Delta\Psi = D\Delta S \cos\alpha;$$

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности

$$\Psi = \int D_n \, \mathrm{d}S,$$

где D_n — проекция вектора $\mathbf{D}$ на направление нормали к элементу поверхности, площадь которой равна $\mathrm{d}S$.

• Теорема Остроградского–Гаусса. Поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$,

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

где n — число зарядов (со своим знаком), заключенных внутри замкнутой поверхности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами: $Q_1 = 30$ нКл и $Q_2 = -10$ нКл. Расстояние d между зарядами равно 20 см. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 15$ см от первого и на расстоянии $r_2 = 10$ см от второго зарядов.

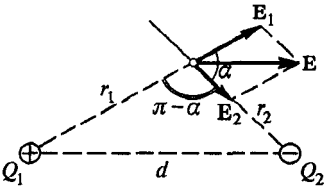


Рис. 14.1

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Напряженности электрического поля, создаваемого в вакууме [4]) первым и вторым зарядами, соответственно равны

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}; \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{1}$$

Вектор $\mathbf{E}_1$ (рис. 14.1) направлен по силовой линии от заряда Q_1, так как заряд $Q_1 > 0$; вектор $\mathbf{E}_2$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как $Q_2 < 0$.

Модуль вектора E найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \tag{2}$$

где угол α может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

В данном случае во избежание громоздких записей вычислим отдельно значение $\cos\alpha$. По этой формуле найдем

$$\cos\alpha = 0{,}25.$$

Подставляя выражения E_1 и E_2 по формулам (1) в равенство (2) и вынося общий множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$ за знак корня, получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

[4]) См. сноску на с. 206.

Подставив значения величин π, ε_0, Q_1, Q_2, r_1, r_2 и α в последнюю формулу и произведя вычисления, найдем

$$E = 9 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{(30 \cdot 10^{-9})^2}{(15 \cdot 10^{-2})^4} + \frac{(10 \cdot 10^{-9})^2}{(10 \cdot 10^{-2})^4} + 2\frac{(30 \cdot 10^{-9})(10 \cdot 10^{-9})}{(15 \cdot 10^{-2})^2 (10 \cdot 10^{-2})^2} 0{,}25} \text{ В/м} =$$

$$= 1{,}67 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 16{,}7 \text{ кВ/м}.$$

Пример 2. Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 0{,}4$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 0{,}1$ мкКл/м^2. Определить напряженность электрического поля, созданного этими заряженными плоскостями.

Решение. Согласно принципу суперпозиции, поля, создаваемые каждой заряженной плоскостью в отдельности, накладываются друг на друга, причем каждая заряженная плоскость создает электрическое поле независимо от присутствия другой заряженной плоскости.

Напряженности однородных электрических полей, создаваемых первой и второй плоскостями, соответственно равны:

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Плоскости делят все пространство на три области: I, II и III (рис. 14.2). Как видно из рисунка, в областях I и III электрические силовые линии обоих полей направлены в одну сторону и, следовательно, напряженно-

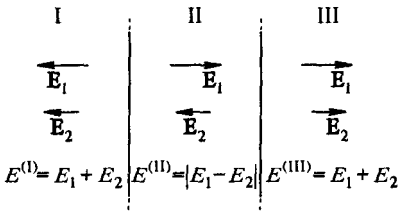


Рис. 14.2

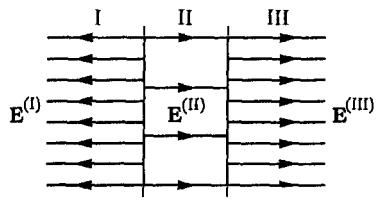


Рис. 14.3

сти суммарных полей $E^{(\mathrm{I})}$ и $E^{(\mathrm{III})}$ в областях I и III равны между собой и равны сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями: $E^{(\mathrm{I})} = E^{(\mathrm{III})} = E_1 + E_2$, или

$$E^{(\mathrm{I})} = E^{(\mathrm{III})} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Во области II (между плоскостями) электрические силовые линии полей направлены в противоположные стороны и, следовательно, напряженность поля $E^{(\mathrm{II})}$ равна разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^{(\mathrm{II})} = |E_1 - E_2|, \quad \text{или} \quad E^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2}\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\varepsilon_0}.$$

Подставив данные и произведя вычисления,

$$\text{получим } E^{(\mathrm{I})} = E^{(\mathrm{III})} = 28{,}3 \text{ кВ/м}; \quad E^{(\mathrm{II})} = 17 \text{ кВ/м}.$$

Картина распределения силовых линий суммарного поля представлена на рис. 14.3.

Пример 3. На пластинах плоского воздушного конденсатора находится заряд $Q = 10$ нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см^2. Определить силу F, с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

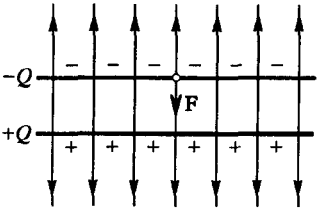


Рис. 14.4

Решение. Заряд Q одной пластины находится в поле, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила (рис. 14.4)

$$F = E_1 Q, \qquad (3)$$

где E_1 — напряженность поля, создаваемого зарядом одной пластины. Но $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$, где σ — поверхностная плотность заряда пластины.

Формула (3) с учетом выражения для E_1 примет вид

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Подставив значения величин Q, ε_0 и S в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$F = 565 \text{ мкН}.$$

Пример 4. Электрическое поле создано бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 400$ нКл/м^2, и бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью $\tau = 100$ нКл/м. На расстоянии $r = 10$ см от нити находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Определить силу, действующую на заряд, и ее направление, если заряд и нить лежат в одной плоскости, параллельной заряженной плоскости.

Решение. Сила, действующая на заряд, помещенный в поле,

$$F = EQ, \qquad (4)$$

где E — напряженность поля в точке, в которой находится заряд Q.

Определим напряженность E поля, создаваемого, по условию задачи, бесконечной заряженной плоскостью и бесконечной заряженной нитью. Поле, создаваемое бесконечной заряженной плоскостью, однородно, и его напряженность в любой точке

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Поле, создаваемое бесконечной заряженной линией, неоднородно. Его напряженность зависит от расстояния и определяется по формуле

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6}$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, напряженность поля в точке, где находится заряд Q, равна векторной сумме на-

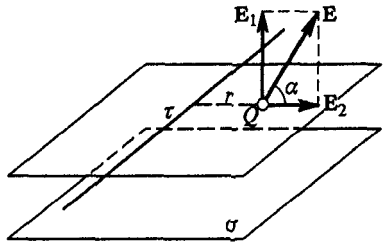


Рис. 14.5

пряженностей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ (рис. 14.5): $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Так как векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ взаимно перпендикулярны, то

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

Подставляя выражения E_1 и E_2 по формулам (5) и (6) в это равенство, получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2}, \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}.$$

Теперь найдем силу F, действующую на заряд, подставив выражение E в формулу (4):

$$F = EQ = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}. \tag{7}$$

Подставив значения величин Q, ε_0, σ, τ, π и r в формулу (7) и сделав вычисления, найдем

$$F = 289 \text{ мкН}.$$

Направление силы F, действующей на положительный заряд Q, совпадает с направлением вектора напряженности $\mathbf{E}$ поля. Направление же вектора $\mathbf{E}$ задается углом α к заряженной плоскости. Из рис. 14.5 следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \pi r\frac{\sigma}{\tau}, \quad \text{откуда } \alpha = \operatorname{arctg}\left(\pi r\frac{\sigma}{\tau}\right).$$

Подставив значения величин π, r, σ и τ в это выражение и вычислив, получим

$$\alpha = 51°34'.$$

Пример 5. Точечный заряд $Q = 25$ нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^3$ нКл/м^2. Определить силу, действующую на заряд, помещенный от оси цилиндра на расстоянии $r = 10$ см.

Решение. Сила, действующая на заряд Q, находящийся в поле,

$$F = QE, \tag{8}$$

где E — напряженность поля в точке, в которой находится заряд Q.

Как известно, напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{9}$$

где τ — линейная плотность заряда.

Выразим линейную плотность τ через поверхностную плотность σ. Для этого выделим элемент цилиндра длиной l и выразим находящийся на нем заряд Q_1 двумя способами:

$$Q_1 = \sigma S = \sigma \cdot 2\pi R l \quad \text{и} \quad Q_1 = \tau l.$$

Приравняв правые части этих равенств, получим $\tau l = 2\pi R l \sigma$. После сокращения на l найдем $\tau = 2\pi R\sigma$. С учетом этого формула (9) примет вид $E = R\sigma/(\varepsilon_0 r)$. Подставив это выражение в формулу (8), найдем искомую силу:

$$F = \frac{Q\sigma R}{\varepsilon_0 r}. \tag{10}$$

Так как R и r входят в формулу в виде отношения, то они могут быть выражены в любых, но только одинаковых единицах.

Выполнив вычисления по формуле (10), найдем

$$F = \frac{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^{-2}} \frac{\text{Кл} \cdot (\text{Кл/м}) \cdot \text{м}}{(\text{Ф/м}) \cdot \text{м}} = 565 \cdot 10^{-6}\ \text{Н} = 565\ \text{мкН}.$$

Направление силы $\mathbf{F}$ совпадает с направлением вектора напряженности $\mathbf{E}$, а последний в силу симметрии (цилиндр бесконечно длинный) направлен перпендикулярно оси цилиндра.

Пример 6. Электрическое поле создано тонкой бесконечно длинной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью $\tau = 30$ нКл/м. На расстоянии $a = 20$ см от нити находится плоская круглая площадка радиусом $r = 1$ см. Определить поток вектора напряженности через эту

площадку, если плоскость ее составляет угол $\beta = 30°$ с линией напряженности, проходящей через середину площадки.

Р е ш е н и е. Поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной нитью, является неоднородным. Поток вектора напряженности в этом случае выражается интегралом

$$\Phi_E = \int_S E_n \, \mathrm{d}S, \tag{11}$$

где E_n — проекция вектора $\mathbf{E}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности площадки $\mathrm{d}S$. Интегрирование выполняется по всей поверхности площадки, которую пронизывают линии напряженности.

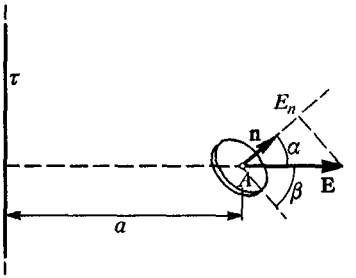


Рис. 14.6

Проекция E_n вектора напряженности равна, как видно из рис. 14.6,

$$E_n = E \cos\alpha,$$

где α — угол между направлением $\mathbf{E}$ вектора и нормалью $\mathbf{n}$.

С учетом этого формула (11) примет вид

$$\Phi_E = \int_S E \cos\alpha \, \mathrm{d}S.$$

Так как размеры поверхности площадки малы по сравнению с расстоянием до нити ($r \ll a$), то электрическое поле в пределах площадки можно считать практически однородным. Следовательно, вектор напряженности $\mathbf{E}$ очень мало меняется по модулю и направлению в пределах площадки, что позволяет заменить под знаком интеграла значения E и $\cos\alpha$ их средними значениями $\langle E \rangle$ и $\langle \cos\alpha \rangle$ и вынести их за знак интеграла:

$$\Phi_E = \int_S \langle E \rangle \langle \cos\alpha \rangle \, \mathrm{d}S = \langle E \rangle \langle \cos\alpha \rangle \int_S \mathrm{d}S.$$

Выполняя интегрирование и заменяя $\langle E \rangle$ и $\langle \cos\alpha \rangle$ их приближенными значениями E_A и $\cos\alpha_A$, вычисленными для средней точки площадки, получим

$$\Phi_E = E_A \cos\alpha_A S = \pi r^2 E_A \cos\alpha_A. \tag{12}$$

Напряженность E_A вычисляется по формуле $E_A = \tau/(2\pi\varepsilon_0 a)$. Из рис. 14.6 следует $\cos\alpha_A = \cos(\pi/2 - \beta) = \sin\beta$.

С учетом выражения E_A и $\cos\alpha_A$ равенство (12) примет вид

$$\Phi_E = \frac{\pi r^2 \tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \sin\beta, \quad \text{или} \quad \Phi_E = \frac{\tau r^2}{2\varepsilon_0 a} \sin\beta.$$

Подставив в последнюю формулу данные и произведя вычисления, найдем

$$\Phi_E = 0{,}424 \text{ В} \cdot \text{м}.$$

Пример 7. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0{,}5$ нКл. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

Решение. Заметим, что точки, в которых требуется найти напряженности электрического поля, лежат в трех областях (рис. 14.7): область I ($r_1 < R_1$), область II ($R_1 < r_2 < R_2$), область III ($r_3 > R_2$).

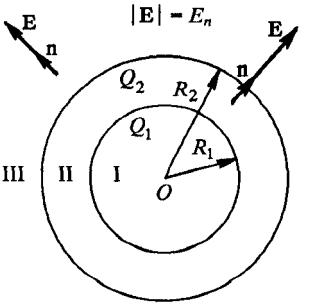


Рис. 14.7

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1, и воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса. Так как внутри области I зарядов нет, то согласно указанной теореме получим равенство

$$\oint_{S_1} E_n \, dS = 0, \qquad (13)$$

где E_n — нормальная составляющая напряженности электрического поля.

Из соображений симметрии нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т.е. $E_n = E_1 = \text{const}$. Поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Равенство (13) примет вид

$$E_1 \oint_{S_1} dS = 0.$$

Так как площадь сферы не равна нулю, то

$$E_1 = 0,$$

т.е. напряженность поля во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II сферическую поверхность проведем радиусом r_2. Так как внутри этой поверхности находится заряд Q_1, то для нее, согласно теореме Остроградского–Гаусса, можно записать равенство

$$\oint_{S_2} E_n \, dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}. \qquad (14)$$

Так как $E_n = E_2 = \text{const}$, то из условий симметрии следует

$$E_2 \oint_{S_2} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}, \quad \text{или} \quad E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S_2}.$$

Подставив сюда выражение площади сферы, получим

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

3. В области III сферическую поверхность проведем радиусом r_3. Эта поверхность охватывает суммарный заряд $Q_1 + Q_2$. Следовательно, для нее уравнение, записанное на основе теоремы Остроградского–Гаусса, будет иметь вид

$$\oint_{S_3} E_n \, \mathrm{d}S = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда, использовав положения, примененные в первых двух случаях, найдем

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (15)$$

Убедимся в том, что правые части равенств (14) и (15) дают единицу напряженности электрического поля:

$$\frac{[Q]}{[\varepsilon_0][r^2]} = \frac{1\ \text{Кл}}{1\ \text{Ф/м} \cdot 1\ \text{м}^2} = \frac{1\ \text{Кл}}{1\ \text{Ф} \cdot 1\ \text{м}} = 1\ \text{В/м}.$$

Выразим все величины в единицах СИ ($Q_1 = 10^{-9}$ Кл, $Q_2 = -0{,}5 \times 10^{-9}$ Кл, $r_1 = 0{,}09$ м, $r_2 = 0{,}15$ м, $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2}\ \text{В/м} = 1{,}11 \cdot 10^3\ \text{В/м} = 1{,}11\ \text{кВ/м};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0{,}5) \cdot 10^{-9}}{(0{,}15)^2}\ \text{В/м} = 200\ \text{В/м}.$$

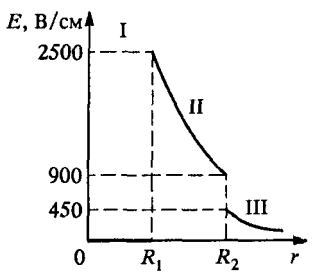


Рис. 14.8

4. Построим график $E(r)$. В области I ($r < R_1$) напряженность $E = 0$. В области II ($R_1 \leqslant r < R_2$) напряженность $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$. В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = Q_1/(4\pi\varepsilon_0 R_1^2) = 2500$ В/м. В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = Q_1/(4\pi\varepsilon_0 R_2^2) = 900$ В/м. В области III ($r > R_2$) $E_3(r)$ изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа) $E_3(R_2) = (Q_1 - |Q_2|) \times (4\pi\varepsilon_0 R_2^2)^{-1} = 450$ В/м. Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв. График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 14.8.

ЗАДАЧИ

Напряженность поля точечных зарядов

14.1. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого точечным зарядом $Q = 10$ нКл на расстоянии r=10 см от него. Диэлектрик — масло.

14.2. Расстояние d между двумя точечными зарядами $Q_1 = +8$ нКл и $Q_2 = -5{,}3$ нКл равно 40 см. Вычислить напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему будет равна напряженность, если второй заряд будет положительным?

14.3. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = -20$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 30$ см и от второго на $r_2 = 50$ см.

14.4. Расстояние d между двумя точечными положительными зарядами $Q_1 = 9Q$ и $Q_2 = Q$ равно 8 см. На каком расстоянии r от первого заряда находится точка, в которой напряженность E поля зарядов равна нулю? Где находилась бы эта точка, если бы второй заряд был отрицательным?

14.5. Два точечных заряда $Q_1 = 2Q$ и $Q_2 = -Q$ находятся на расстоянии d друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, напряженность E поля в которой равна нулю.

14.6. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 40$ нКл и $Q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

Напряженность поля заряда, распределенного по кольцу и сфере

14.7. Тонкое кольцо радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Какова напряженность E электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 10$ см?

14.8. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Найти напряженность E электрического поля в геометрическом центре полусферы.

14.9. На металлической сфере радиусом $R = 10$ см находится заряд $Q = 1$ нКл. Определить напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии $r_1 = 8$ см от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии $r_2 = 15$ см от центра сферы. Построить график зависимости E от r.

14.10. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $R_1 = 6\,\text{см}$ и $R_2 = 10\,\text{см}$ несут соответственно заряды $Q_1 = 1\,\text{нКл}$ и $Q_2 = -0{,}5\,\text{нКл}$. Найти напряженности E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5\,\text{см}$, $r_2 = 9\,\text{см}$, $r_3 = 15\,\text{см}$. Построить график зависимости $E(r)$.

Напряженность поля заряженной линии

14.11. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность E поля на расстоянии $a = 0{,}5\,\text{м}$ от проволоки против ее середины равна $200\,\text{В/м}$.

14.12. Расстояние d между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно 16 см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau| = 150\,\text{мкКл/м}$. Какова напряженность E поля в точке, удаленной на $r = 10\,\text{см}$ как от первой, так и от второй проволоки?

14.13. Прямой металлический стержень диаметром $d = 5\,\text{см}$ и длиной $l = 4\,\text{м}$ несет равномерно распределенный по его поверхности заряд $Q = 500\,\text{нКл}$. Определить напряженность E поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии $a = 1\,\text{см}$ от его поверхности.

14.14. Бесконечно длинная тонкостенная металлическая трубка радиусом $R = 2\,\text{см}$ несет равномерно распределенный по поверхности заряд ($\sigma = 1\,\text{нКл/м}^2$). Определить напряженность E поля в точках, отстоящих от оси трубки на расстояния $r_1 = 1\,\text{см}$, $r_2 = 3\,\text{см}$. Построить график зависимости $E(r)$.

14.15. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 2\,\text{см}$ и $R_2 = 4\,\text{см}$ несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 1\,\text{нКл/м}$ и $\tau_2 = -0{,}5\,\text{нКл/м}$. Пространство между трубками заполнено эбонитом. Определить напряженность E поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 1\,\text{см}$, $r_2 = 3\,\text{см}$, $r_3 = 5\,\text{см}$ от оси трубок. Построить график зависимости E от r.

14.16. На отрезке тонкого прямого проводника длиной $l = 10\,\text{см}$ равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 3\,\text{мкКл/м}$. Вычислить напряженность E, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

14.17. Тонкий стержень длиной $l = 12\,\text{см}$ заряжен с линейной плотностью $\tau = 200\,\text{нКл/м}$. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 5\,\text{см}$ от стержня против его середины.

14.18. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 400$ нКл/м. Найти напряженность E электрического поля в точке, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии $r = 8$ см от этого конца.

14.19. Электрическое поле создано зарядом тонкого равномерно заряженного стержня, изогнутого по трем сторонам квадрата (рис. 14.9). Длина a стороны квадрата равна 20 см. Линейная плотность τ зарядов равна 500 нКл/м. Вычислить напряженность E поля в точке A.

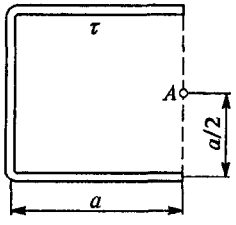


Рис. 14.9

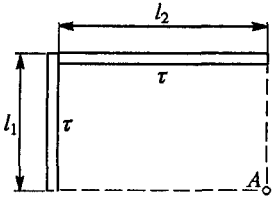


Рис. 4.10

14.20. Два прямых тонких стержня длиной $l_1 = 12$ см и $l_2 = 16$ см каждый заряжены с линейной плотностью $\tau = 400$ нКл/м. Стержни образуют прямой угол. Найти напряженность E поля в точке A (рис. 14.10).

Напряженность поля заряженной плоскости

14.21. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими одинаковый равномерно распределенный по площади заряд ($\sigma = 1$ нКл/м^2). Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

14.22. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = 3$ нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

14.23. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 2$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = -5$ нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

14.24. Две прямоугольные одинаковые параллельные пластины, длины сторон которых $a = 10$ см и $b = 15$ см, расположены на малом (по сравнению с линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд $Q_1 = 50$ нКл, на другой — заряд $Q_2 = 150$ нКл. Определить напряженность E электрического поля между пластинами.

14.25. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 10$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = -30$ нКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 1 м^2.

14.26. Две круглые параллельные пластины радиусом $R = 10$ см находятся на малом (по сравнению с радиусом) расстоянии друг от друга. Пластинам сообщили одинаковые по модулю, но противоположные по знаку заряды $|Q_1| = |Q_2| = Q$. Определить этот заряд Q, если пластины притягиваются с силой $F = 2 \cdot 10^{-3}$ Н. Считать, что заряды распределяются по пластинам равномерно.

Напряженность поля заряда, распределенного по объему

14.27. Эбонитовый сплошной шар радиусом $R = 5$ см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках: 1) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра сферы. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

14.28. Полый стеклянный шар несет равномерно распределенный по объему заряд. Его объемная плотность $\rho = 100$ нКл/м^3. Внутренний радиус R_1 шара равен 5 см, наружный — $R_2 = 10$ см. Вычислить напряженность E и смещение D электрического поля в точках, отстоящих от центра сферы на расстоянии: 1) $r_1 = 3$ см; 2) $r_2 = 6$ см; 3) $r_3 = 12$ см. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

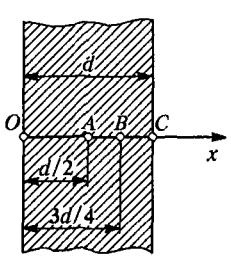


Рис. 14.11

14.29. Длинный парафиновый цилиндр радиусом $R = 2$ см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках, находящихся от оси цилиндра на расстоянии: 1) $r_1 = 1$ см; 2) $r_2 = 3$ см. Обе точки равноудалены от концов цилиндра. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

14.30. Большая плоская пластина толщиной $d = 1$ см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью $\rho = 100$ нКл/м^3. Найти напряженность E электрического

поля вблизи центральной части пластины вне ее, на малом расстоянии от поверхности.

14.31. Лист стекла толщиной $d = 2\,\text{см}$ равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1\,\text{мкКл/м}^3$. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках A, B, C (рис. 14.11). Построить график зависимости $E(x)$ (ось x перпендикулярна поверхности стекла).

Метод зеркальных изображений

14.32. На расстоянии $a = 5\,\text{см}$ от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд $Q = 1\,\text{нКл}$. Определить силу F, действующую на заряд со стороны заряда, индуцированного им на плоскости.

14.33. На расстоянии $a = 10\,\text{см}$ от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд $Q = 20\,\text{нКл}$. Вычислить напряженность E электрического поля в точке, удаленной от плоскости на расстояние a и от заряда Q на расстояние $2a$.

14.34. Точечный заряд $Q = 40\,\text{нКл}$ находится на расстоянии $a = 30\,\text{см}$ от бесконечной проводящей плоскости. Какова напряженность E электрического поля в точке A (рис. 14.12)?

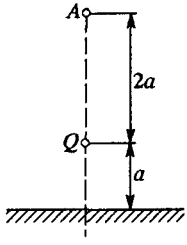


Рис. 14.12

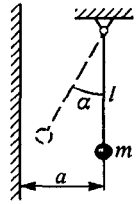


Рис. 4.13

14.35. Большая металлическая пластина расположена в вертикальной плоскости и соединена с землей (рис. 14.13). На расстоянии $a = 10\,\text{см}$ от пластины находится неподвижная точка, к которой на нити длиной $l = 12\,\text{см}$ подвешен маленький шарик массой $m = 0{,}1\,\text{г}$. При сообщении шарику заряда Q он притянулся к пластине, в результате чего нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30°$. Найти заряд Q шарика.

Сила, действующая на заряд в электрическом поле

14.36. Тонкая нить несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 2\,\text{мкКл/м}$. Вблизи средней части нити на расстоянии $r = 1\,\text{см}$, малом по сравнению с ее длиной, находится точечный заряд $Q = 0{,}1\,\text{мкКл}$. Определить силу F, действующую на заряд.

14.37. Большая металлическая пластина несет равномерно распределенный по поверхности заряд ($\sigma = 10\,\text{нКл/м}^2$). На малом расстоянии от пластины находится точечный заряд $Q = 100\,\text{нКл}$. Найти силу F, действующую на заряд.

14.38. Точечный заряд $Q = 1\,\text{мкКл}$ находится вблизи большой равномерно заряженной пластины против ее середины. Вычислить поверхностную плотность σ заряда пластины, если на точечный заряд действует сила $F = 0{,}06\,\text{Н}$.

14.39. Между пластинами плоского конденсатора находится точечный заряд $Q = 30\,\text{нКл}$. Поле конденсатора действует на заряд с силой $F_1 = 10^{-2}\,\text{Н}$. Определить силу F_2 взаимного притяжения пластин, если площадь S каждой пластины равна $100\,\text{см}^2$.

14.40. Параллельно бесконечной пластине, несущей заряд, равномерно распределенный по площади с поверхностной плотностью $\sigma = 20\,\text{нКл/м}^2$, расположена тонкая нить с равномерно распределенным по длине зарядом ($\tau = 0{,}4\,\text{нКл/м}$). Определить силу F, действующую на отрезок нити длиной $l = 1\,\text{м}$.

14.41. Две одинаковые круглые пластины площадью по $S = 100\,\text{см}^2$ каждая расположены параллельно друг другу. Заряд Q_1 одной пластины равен $+100\,\text{нКл}$, другой $Q_2 = -100\,\text{нКл}$. Определить силу F взаимного притяжения пластин в двух случаях, когда расстояние между ними: 1) $r_1 = 2\,\text{см}$; 2) $r_2 = 10\,\text{м}$.

14.42. Плоский конденсатор состоит из двух пластин, разделенных стеклом. Какое давление p производят пластины на стекло перед пробоем, если напряженность E электрического поля перед пробоем равна $30\,\text{МВ/м}$?

14.43. Две параллельные, бесконечно длинные прямые нити несут заряд, равномерно распределенный по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 100\,\text{нКл/м}$ и $\tau_2 = 200\,\text{нКл/м}$. Определить силу F взаимодействия, приходящуюся на отрезок нити длиной 1 м. Расстояние r между нитями равно 10 см.

14.44. Прямая бесконечная тонкая нить несет равномерно распределенный по длине заряд ($\tau_1 = 1\,\text{мкКл/м}$). В плоскости, где находится нить, перпендикулярно нити расположен тонкий стержень длиной l. Ближайший к нити конец стержня находится на расстоянии l от нее. Определить силу F, действующую на стержень, если он заряжен с линейной плотностью $\tau_2 = 0{,}1\,\text{мкКл/м}$.

14.45. Металлический шар имеет заряд $Q_1 = 100\,\text{нКл}$. На расстоянии, равном радиусу шара, от его поверхности находится конец нити, вытянутой вдоль силовой линии. Нить несет равномерно распределенный по длине заряд $Q_2 = 10\,\text{нКл}$. Длина нити равна радиусу шара. Определить силу F, действующую на нить, если радиус R шара равен 10 см.

14.46. Соосно с бесконечной прямой равномерно заряженной линией ($\tau_1 = 500\,\text{нКл/м}$) расположено полукольцо с равномерно

распределенным зарядом ($\tau_2 = 20$ нКл/м). Определить силу F взаимодействия нити с полукольцом.

14.47. Бесконечная прямая нить несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau_1 = 10^3$ нКл/м. Соосно с нитью расположено тонкое кольцо, заряженное равномерно с линейной плотностью $\tau_2 = 10$ нКл/м. Определить силу F, растягивающую кольцо. Взаимодействием между отдельными элементами кольца пренебречь.

14.48. Две бесконечно длинные равномерно заряженные тонкие нити ($\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1$ мкКл/м) скрещены под прямым углом друг к другу. Определить силу F их взаимодействия.

Поток напряженности и поток электрического смещения

14.49. Бесконечная плоскость несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ мкКл/м^2. На некотором расстоянии от плоскости параллельно ей расположен круг радиусом $r = 10$ см. Вычислить поток Φ_E вектора напряженности через этот круг.

14.50. Плоская квадратная пластина со стороной длиной a, равной 10 см, находится на некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной ($\sigma = 1$ мкКл/м^2) плоскости. Плоскость пластины составляет угол $\beta = 30°$ с линиями поля. Найти поток Ψ электрического смещения через эту пластину.

14.51. В центре сферы радиусом $R = 20$ см находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Определить поток Φ_E вектора напряженности через часть сферической поверхности площадью $S = 20$ см^2.

14.52. В вершине конуса с телесным углом $\Omega = 0{,}5$ ср находится точечный заряд $Q = 30$ нКл. Вычислить поток Ψ электрического смещения через площадку, ограниченную линией пересечения поверхности конуса с любой другой поверхностью.

14.53. Прямоугольная плоская площадка со сторонами, длины a и b которых равны 3 и 2 см соответственно, находится на расстоянии $R = 1$ м от точечного заряда $Q = 1$ мкКл. Площадка ориентирована так, что линии напряженности составляют угол $\alpha = 30°$ с ее поверхностью. Найти поток Φ_E вектора напряженности через площадку.

14.54. Электрическое поле создано точечным зарядом $Q = 100$ нКл. Определить поток Ψ электрического смещения через круглую площадку радиусом $R = 30$ см. Заряд равноудален от краев площадки и находится на расстоянии $a = 40$ см от ее центра.

14.55. Заряд $Q = 1$ мкКл равноудален от краев круглой площадки на расстояние $r = 20$ см. Радиус R площадки равен 12 см. Определить среднее значение нормальной составляющей напряженности $\langle E_n \rangle$ в пределах площадки.

14.56. Электрическое поле создано бесконечной прямой равномерно заряженной линией ($\tau = 300$ нКл/м). Определить поток Ψ электрического смещения через прямоугольную площадку, две большие стороны которой параллельны заряженной линии и одинаково удалены от нее на расстояние $r = 20$ см. Стороны площадки имеют размеры $a = 20$ см, $b = 40$ см.

14.57*. По тонкому стержню длиной $l = 20$ см равномерно распределен заряд $Q = 50$ нКл. Определить в точке A (рис. 14.14) напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля по модулю и направлению (угол β с осью Ox).

14.58*. Бесконечный тонкий стержень несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 0{,}2$ мкКл/м. Стержень согнут под прямым углом. Определить в точке A (рис. 14.15) напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля по модулю и направлению (угол β с осью Ox); расстояние $r_0 = 15$ см.

14.59*. Треть тонкого кольца радиуса $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 50$ нКл. Определить в точке O, совпадающей с центром кольца (рис. 14.16):

1) напряженность E электрического поля;

2) силу F, действующую на точечный заряд $q = 2$ нКл.

14.60*. По поверхности плоского полукольца, радиусами R и $2R$, равномерно распределен заряд $Q = 20$ нКл (рис. 14.17). Радиус $R = 10$ см. Определить в точке O, совпадающей с центром кольца, напряженность E электрического поля.

14.61*. По поверхности кольцевого сектора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}15$ мкКл/м^2 (рис. 14.18). Определить в точке O, совпадающей с центром круга, напряженность E электрического поля. Угол $\theta = \pi/3$.

14.62*. В бесконечной плоскости, несущей равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 40$ нКл/м^2, сделан вырез в виде круга, который удален из плоскости (рис. 14.19). Определить в точке A, лежащей на оси круга напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля.

14.63*. По поверхности сферического сегмента равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 60$ нКл/м^2 (рис. 14.20). Определить в точке O, совпадающей с центром сферы:

1) напряженность E электрического поля;

2) силу F, действующую на точечный заряд $q = 20$ нКл. Угол $\theta = \pi/4$.

14.64*. Половина шара радиуса $R = 10$ см несет равномерно распределенный по объему заряд с объемной плотностью $\rho = 6$ мкКл/м^3 (рис. 14.21). Определить в точке O, совпадающей с центром шара, напряженность E электрического поля.

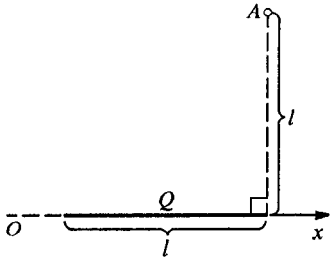


Рис. 14.14

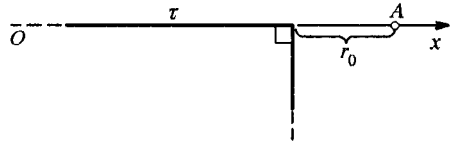


Рис. 14.15

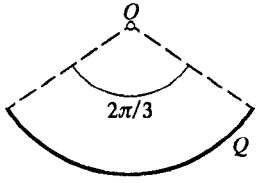


Рис. 14.16

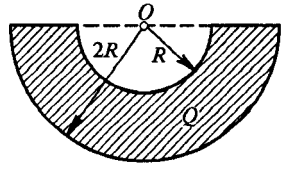


Рис. 14.17

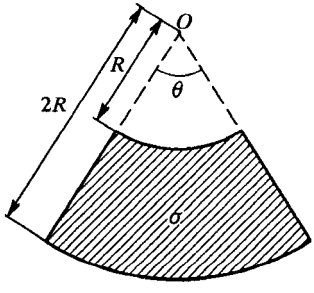


Рис. 14.18

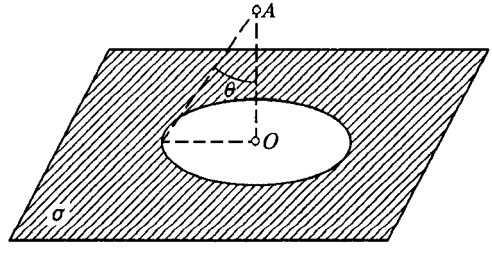


Рис. 14.19

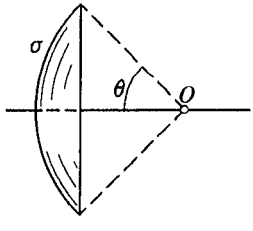


Рис. 14.20

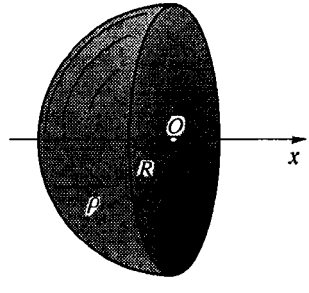


Рис. 14.21

14.65*. По объему сферической чаши радиусами R и $2R$ равномерно распределен заряд с объемной плотностью $\rho = 10\,\text{мкКл/м}^3$ (рис. 14.22). Радиус $R = 6\,\text{см}$. Определить в точке O, совпадающей с центром сфер, напряженность E электрического поля.

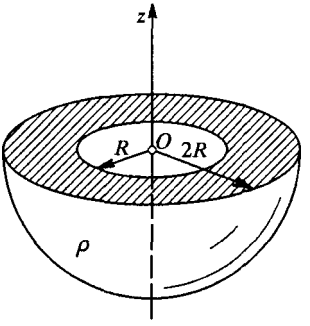


Рис. 14.22

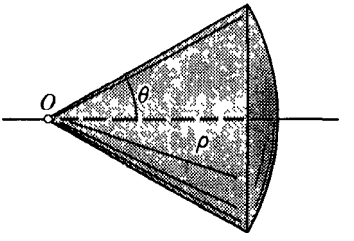


Рис. 4.23

14.66*. Шаровой сектор радиуса $R = 10\,\text{см}$ равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 4\,\text{мкКл/м}^3$ (рис. 14.23). Определить в точке O, совпадающей с центром шара: 1) напряженность E электрического поля; 2) силу F, действующую на точечный заряд $q = 8\,\text{нКл}$. Угол $\theta = \pi/6$.

14.67*. На двух концентрических сферах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями -2σ и σ ($\sigma = 0{,}1\,\text{мкКл/м}^2$) (рис. 14.24). 1. Используя теорему Остроградского–Гаусса, найти выражение для напряженности E электрического поля в трех областях (I, II, III). 2. Вычислить напряженность E_A в точке A, удаленной от центра сфер на расстояние $r = 3R$, и указать направление вектора $\mathbf{E}_A$. 3. Построить график $E(r)$.

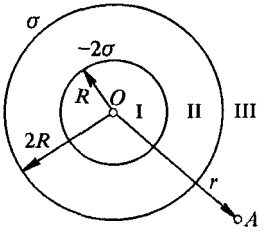


Рис. 14.24

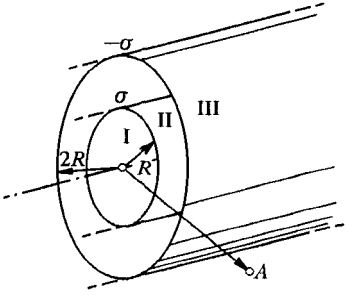


Рис. 14.25

14.68*. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ и $-\sigma$ ($\sigma = 60\,\text{нКл/м}^2$) (рис. 14.25).

1. Используя теорему Остроградского–Гаусса, найти выражение для напряженности E электрического поля в трех областях (I, II, III).

2. Вычислить напряженность E_A в точке A, удаленной от оси цилиндров на расстояние $r = 3R$, и указать направление вектора $\mathbf{E}_A$.

3. Построить график $E(r)$.

14.69*. На двух бесконечных параллельных плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями -4σ и 2σ ($\sigma = 40\,\text{нКл/м}^2$) (рис. 14.26).

1. Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражение для напряженности E поля в трех областях (I, II, III).

2. Вычислить напряженность E_A поля в точке A и указать направление вектора $\mathbf{E}_A$.

3. Построить график $E(x)$.

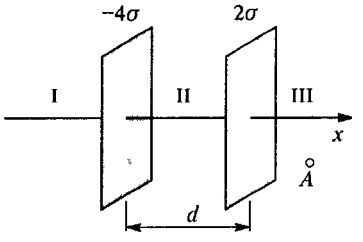


Рис. 14.26

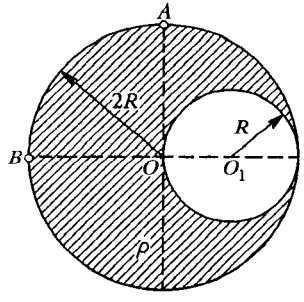


Рис. 14.27

14.70*. В шаре радиуса $2R$, несущем равномерно распределенный заряд с объемной плотностью $\rho = 10\,\text{мкКл/м}^3$, сделан сферический вырез радиусом R (рис. 14.27). Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти напряженность E поля в точках O, A и B. Радиус $R = 10\,\text{см}$.

14.71*. В бесконечном цилиндре радиуса $2R$, несущем равномерно распределенный заряд с объемной плотностью $\rho = 6\,\text{мкКл/м}^3$, сделан продольный цилиндрический вырез радиусом R (рис. 14.28). Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти напряженность E поля в точках O, A и B. Радиус $R = 10\,\text{см}$.

14.72*. В шаре радиуса $2R$, несущем равномерно распределенный заряд с объемной плотностью $\rho = 8\,\text{мкКл/м}^3$, сделаны два сферических выреза радиусом R (рис. 14.29). Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции полей, найти напряженность E поля в точках O_1 и A. Радиус $R = 10\,\text{см}$.

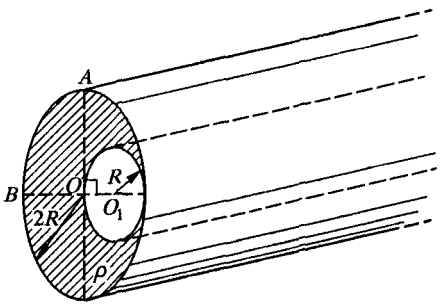


Рис. 14.28

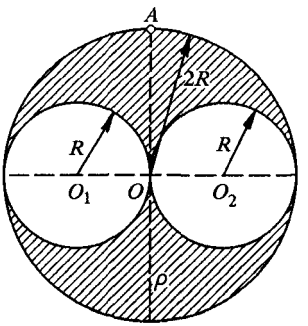


Рис. 4.29

14.73*. В бесконечном цилиндре радиусом $2R$, несущем равномерно распределенный заряд с объемной плотностью $\rho = 6\,\text{мкКл/м}^3$, сделаны два продольных цилиндрических выреза радиусом R

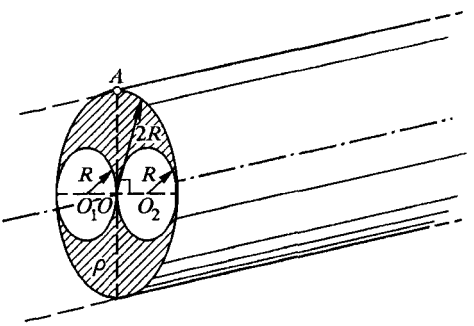


Рис. 14.30

(рис. 14.30). Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции полей, найти напряженность $\mathbf{E}$ поля в точках O_1 и A. Радиус $R = 10\,\text{см}$.

14.74*. Две бесконечные пластины толщиной d и $3d$ ($d = 1\,\text{см}$) расположены параллельно друг другу на расстоянии равном d. На пластинах равномерно распределены заряды с объемными плотностями $-\rho$ и ρ ($\rho = 20\,\text{мкКл/м}^3$) (рис. 14.31). 1. Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражения для напряженности $E(x)$ электрического

поля в пяти областях (I, II, III, IV, V). 2. Вычислить напряженность E_A поля в точке A с координатой $x = 3d$. 3. Построить график $E(x)$ в единицах $\rho d/\varepsilon_0$.

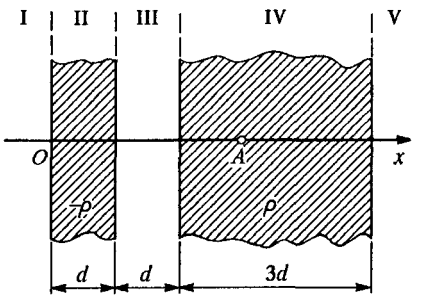


Рис. 14.31

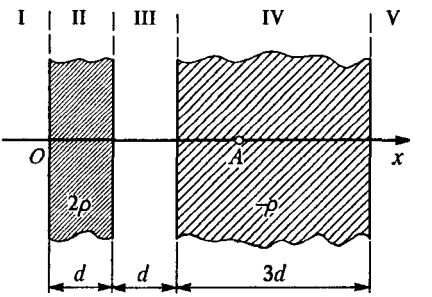


Рис. 4.32

14.75*. Две бесконечные пластины толщиной d и $3d$ ($d = 1$ см) расположены параллельно друг другу на расстоянии равном d. На пластинах равномерно распределены заряды с объемными плотностями 2ρ и $-\rho$ ($\rho = 20$ мкКл/м^3) (рис. 14.32). 1. Используя теорему Остроградского–Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражения для напряженности $E(x)$ электрического поля в пяти областях (I, II, III, IV, V). 2. Вычислить напряженность E_A поля в точке A с координатой $x = 3d$. 3. Построить график $E(x)$ в единицах $\rho d/\varepsilon_0$.

§ 15. Потенциал. Энергия системы электрических зарядов. Работа по перемещению заряда в поле

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{\Pi}{Q},$$

где П — потенциальная энергия точечного заряда, помещенного в данную точку поля, при условии, что его потенциальная энергия в бесконечности принята равной нулю.

• Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

• Потенциал электрического поля, создаваемого металлической, несущей заряд Q сферой радиусом R, на расстоянии r от центра сферы:

внутри сферы ($r < R$)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R};$$

на поверхности сферы ($r = R$)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R};$$

вне сферы ($r > R$)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Во всех приведенных для потенциала заряженной сферы формулах ε есть диэлектрическая проницаемость однородного безграничного диэлектрика, окружающего сферу.

• Потенциал электрического поля, созданного системой n точечных зарядов, в данной точке в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов φ_1, φ_2, ..., φ_n, создаваемых отдельными точечными зарядами Q_1, Q_2, ..., Q_n:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

• Энергия W взаимодействия системы точечных зарядов Q_1, Q_2, ..., Q_n определяется работой, которую эта система зарядов может совершить при удалении их относительно друг друга в бесконечность, и выражается формулой

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i,$$

где φ_i — потенциал поля, создаваемого всеми $n - 1$ зарядами (за исключением i-го) в точке, где расположен заряд Q_i.

• Потенциал связан с напряженностью электрического поля соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

В случае электрического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь выражается формулой

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

или в скалярной форме

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r},$$

а в случае однородного поля, т. е. поля, напряженность которого в каждой точке его одинакова как по модулю, так и по направлению,

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы точек двух эквипотенциальных поверхностей; d — расстояние между этими поверхностями вдоль электрической силовой линии.

• Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда Q из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1, в другую, имеющую потенциал φ_2,

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{или} \quad A = Q\int_L E_l \, \mathrm{d}l,$$

где E_l — проекция вектора напряженности $\mathbf{E}$ на направление перемещения; $\mathrm{d}l$ — перемещение.

В случае однородного поля последняя формула принимает вид

$$A = QEl\cos\alpha,$$

где l — перемещение; α — угол между направлениями вектора $\mathbf{E}$ и перемещения $\mathbf{l}$.

• Циркуляция вектора напряженности электрического поля есть величина, численно равная работе по перемещению единичного точечного положительного заряда вдоль замкнутого контура. Циркуляция выражается интегралом по замкнутому контуру $\oint E_l \, \mathrm{d}l$, где E_l — проекция вектора напряженности $\mathbf{E}$ в данной точке контура на направление касательной к контуру в той же точке.

В случае электростатического поля циркуляция вектора напряженности равна нулю:

$$\oint_l E_l \, \mathrm{d}l = 0.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Положительные заряды $Q_1 = 3$ мкКл и $Q_2 = 0{,}02$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 1{,}5$ м друг от друга. Определить работу A', которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2 = 1$ м.

Решение. Положим, что первый заряд Q_1 остается неподвижным, а второй Q_2 под действием внешних сил перемещается в поле, созданном зарядом Q_1, приближаясь к нему с расстояния $r_1 = 1{,}5$ м до $r_2 = 1$ м.

Работа A' внешней силы по перемещению заряда Q из одной точки поля с потенциалом φ_1 в другую, потенциал которой φ_2, равна по модулю и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между теми же точками:

$$A' = -A.$$

Работа A сил поля по перемещению заряда $A = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда работа A' внешних сил может быть записана в виде

$$A' = -Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Потенциалы точек начала и конца пути выразятся формулами

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Подставляя выражения φ_1 и φ_2 в формулу (1) и учитывая, что для данного случая переносимый заряд $Q = Q_2$, получим

$$A' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{2}$$

Если учесть, что $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, то после подстановки значений величин в формулу (2) и вычисления найдем

$$A' = 180 \text{ мкДж}.$$

Пример 2. Найти работу A поля по перемещению заряда $Q = 10$ нКл из точки *1* в точку *2* (рис. 15.1), находящиеся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}4$ мкКл/м^2 бесконечными параллельными плоскостями, расстояние l между которыми равно 3 см.

Решение. Возможны два способа решения задачи.

1-*й способ*. Работу сил поля по перемещению заряда Q из точки *1* поля с потенциалом φ_1 в точку *2* поля с потенциалом φ_2 найдем по формуле

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{3}$$

Для определения потенциалов в точках *1* и *2* проведем через эти точки эквипотенциальные поверхности I и II. Эти поверхности будут плоскостями, так как поле между двумя равномерно заряженными бесконечными параллельными плоскостями однородно. Для такого поля справедливо соотношение

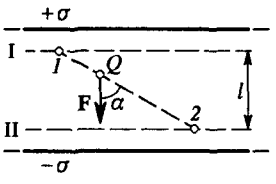


Рис. 15.1

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El, \tag{4}$$

где E — напряженность поля; l — расстояние между эквипотенциальными поверхностями.

Напряженность поля между параллельными бесконечными разноименно заряженными плоскостями $E = \sigma/\varepsilon_0$. Подставив это выражение E в формулу (4) и затем выражение $\varphi_1 - \varphi_2$ в формулу (3), получим

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l.$$

2-*й способ*. Так как поле однородно, то сила, действующая на заряд Q, при его перемещении постоянна. Поэтому работу перемещения заряда из точки *1* в точку *2* можно подсчитать по формуле

$$A = F\Delta r \cos\alpha, \tag{5}$$

где F — сила, действующая на заряд; Δr — модуль перемещения заряда Q из точки 1 в точку 2; α — угол между направлениями перемещения и силы. Но $F = QE = Q\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Подставив это выражение F в равенство (5), а также заметив, что $\Delta r \cos\alpha = l$, получим

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0} l. \qquad (6)$$

Таким образом, оба решения приводят к одному и тому же результату.

Подставив в выражение (6) значения величин Q, σ, ε_0 и l, найдем

$$A = 13{,}6 \text{ мкДж}.$$

Пример 3. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R, равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить напряженность $\mathbf{E}$ и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке O, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина l нити составляет $1/3$ длины окружности и равна 15 см.

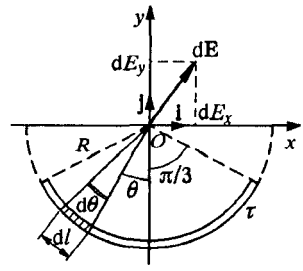


Рис. 15.2

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось y была симметрично расположена относительно концов дуги (рис. 15.2). На нити выделим элемент длины $\mathrm{d}l$. Заряд $\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}l$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в точке O. Для этого найдем сначала напряженность $\mathrm{d}\mathbf{E}$ поля, создаваемого зарядом $\mathrm{d}Q$:

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{\tau\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный от элемента $\mathrm{d}l$ к точке, напряженность в которой вычисляется. Выразим вектор $\mathrm{d}\mathbf{E}$ через проекции $\mathrm{d}E_x$ и $\mathrm{d}E_y$ на оси координат

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}E_x + \mathbf{j}\,\mathrm{d}E_y,$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы направлений (орты).

Напряженность $\mathbf{E}$ найдем интегрированием:

$$\mathbf{E} = \int_l \mathrm{d}\mathbf{E} = \mathbf{i}\int_l \mathrm{d}E_x + \mathbf{j}\int_l \mathrm{d}E_y.$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длины l. В силу симметрии интеграл $\int\limits_l \mathrm{d}E_x$ равен нулю. Тогда

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\int\limits_l \mathrm{d}E_y, \tag{7}$$

где $\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = \dfrac{\tau\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$. Так как $r = R = \mathrm{const}$ и $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$, то

$$\mathrm{d}E_y = \frac{\tau R\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Подставим найденное выражение $\mathrm{d}E_y$ в (7) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси Oy, пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/3$, а результат удвоим

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int\limits_0^{\pi/3}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathbf{j}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/3}.$$

Подставив указанные пределы и выразив R через длину дуги ($3l = 2\pi R$), получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\frac{\tau}{6\varepsilon_0 l}\sqrt{3}.$$

Из этой формулы видно, что вектор $\mathbf{E}$ совпадает с положительным направлением оси Oy. Подставив значение τ и l в последнюю формулу и сделав вычисления, найдем

$$E = 2{,}18\ \text{кВ/м}.$$

Определим потенциал электрического поля в точке O. Найдем сначала потенциал $\mathrm{d}\varphi$, создаваемый точечным зарядом $\mathrm{d}Q$ в точке O:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\tau\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Заменим r на R и произведем интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int\limits_0^l \mathrm{d}l = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как $l = 2\pi R/3$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$\varphi = 188\ \text{В}.$$

Пример 4. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 20$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстояниях $a_1 = 0{,}5$ см и $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Решение. Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно записать в виде

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}, \quad \text{или} \quad \mathrm{d}\varphi = -E\,\mathrm{d}r.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r. \tag{8}$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Подставив это выражение E в равенство (8), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}, \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{9}$$

Так как величины r_2 и r_1 входят в формулу в виде отношения, то их можно выразить в любых, но только одинаковых единицах:

$$r_1 = R + a_1 = 1{,}5 \text{ см}; \quad r_2 = R + a_2 = 3 \text{ см}.$$

Подставив значения величин τ, ε_0, r_1 и r_2 в формулу (9) и вычислив, найдем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 250 \text{ В}.$$

Пример 5. Электрическое поле создано тонким стержнем, несущим равномерно распределенный по длине заряд $\tau = 0{,}1$ мкКл/м. Определить потенциал φ поля в точке, удаленной от концов стержня на расстояние, равное длине стержня.

Решение. Заряд, находящийся на стержне, нельзя считать точечным, поэтому непосредственно применить для вычисления потенциала формулу

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{10}$$

справедливую только для точечных зарядов, нельзя. Но если разбить стержень на элементарные отрезки $\mathrm{d}l$, то заряд $\tau\,\mathrm{d}l$, находящийся на

каждом из них, можно рассматривать как точечный и тогда формула (10) будет справедлива. Применив эту формулу, получим

$$d\varphi = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{11}$$

где r — расстояние от точки, в которой определяется потенциал, до элемента стержня.

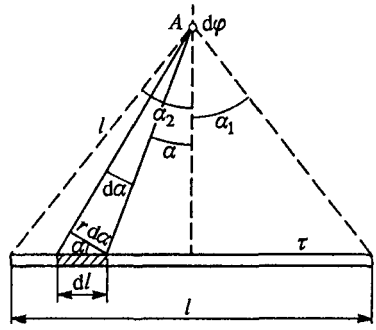


Рис. 15.3

Из рис. 15.3 следует, что $dl = \dfrac{r\, d\alpha}{\cos\alpha}$. Подставив это выражение dl в формулу (11), найдем

$$d\varphi = \frac{\tau\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от α_1 до α_2, получим потенциал, создаваемый всем зарядом, распределенным на стержне:

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

В силу симметрии расположения точки A относительно концов стержня имеем $\alpha_2 = \alpha_1$ и поэтому

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = 2\int_{0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как

$$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

(см. табл. 2), то

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/6}.$$

Подставляя пределы интегрирования, получим

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$

Сделав вычисления по этой формуле, найдем

$$\varphi = 990 \text{ В}.$$

Пример 6. Электрон со скоростью $v = 1{,}83 \cdot 10^6$ м/с влетел в однородное электрическое поле в направлении, противоположном вектору напряженности поля. Какую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы обладать энергией $E_i = 13{,}6$ эВ [5])? (Обладая такой энергией, электрон при столкновении с атомом водорода может ионизировать его. Энергия 13,6 эВ называется энергией ионизации водорода.)

Решение. Электрон должен пройти такую разность потенциалов U, чтобы приобретенная при этом энергия W в сумме с кинетической энергией T, которой обладал электрон перед вхождением в поле, составила энергию, равную энергии ионизации E_i, т. е. $W + T = E_i$. Выразив в этой формуле $W = eU$ и $T = \dfrac{mv^2}{2}$, получим $eU + \dfrac{mv^2}{2} = E_i$. Отсюда

$$U = \frac{2E_i - mv^2}{2e}.$$

Произведем вычисления в единицах СИ:

$$U = 4{,}15 \text{ В}.$$

Пример 7. Определить начальную скорость v_0 сближения протонов, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое они могут сблизиться, равно 10^{-11} см.

Решение. Между двумя протонами действуют силы отталкивания, вследствие чего движение протонов будет замедленным. Поэтому задачу можно решить как в инерциальной системе координат (связанной с центром масс двух протонов), так и в неинерциальной (связанной с одним из ускоренно движущихся протонов). Во втором случае законы Ньютона

[5]) Электрон-вольт (эВ) — энергия, которую приобретает частица, имеющая элементарный заряд (заряд электрона), прошедшая разность потенциалов 1 В.

не имеют места. Применение же принципа Даламбера затруднительно из-за того, что ускорение системы будет переменным. Поэтому удобно рассмотреть задачу в инерциальной системе отсчета.

Поместим начало координат в центр масс двух протонов. Поскольку мы имеем дело с одинаковыми частицами, то центр масс будет находиться в точке, делящей пополам отрезок, соединяющий частицы. Относительно центра масс частицы будут иметь в любой момент времени одинаковые по модулю скорости. Когда частицы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, скорость v_1 каждой частицы равна половине v_0, т. е. $v_1 = v_0/2$.

Для решения задачи применим закон сохранения энергии, согласно которому полная механическая энергия E изолированной системы постоянна, т. е.

$$E = T + \Pi,$$

где T — сумма кинетических энергий обоих протонов относительно центра масс; Π — потенциальная энергия системы зарядов.

Выразим потенциальную энергию в начальный Π_1 и конечный Π_2 моменты движения.

В начальный момент, согласно условию задачи, протоны находились на большом расстоянии, поэтому потенциальной энергией можно пренебречь ($\Pi_1 = 0$). Следовательно, для начального момента полная энергия будет равна кинетической энергии T_1 протонов, т. е.

$$E = T_1. \tag{12}$$

В конечный момент, когда протоны максимально сблизятся, скорость и кинетическая энергия равны нулю, а полная энергия будет равна потенциальной энергии Π_2, т. е.

$$E = \Pi_2. \tag{13}$$

Приравняв правые части равенств (12) и (13), получим

$$T_1 = \Pi_2. \tag{14}$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий протонов:

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = mv_1^2 = \frac{mv_0^2}{4}. \tag{15}$$

Потенциальная энергия системы двух зарядов Q_1 и Q_2, находящихся в вакууме, определяется по формуле $\Pi = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r — расстояние между зарядами. Воспользовавшись этой формулой, получим

$$\Pi_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}. \tag{16}$$

С учетом равенств (15) и (16) формула (14) примет вид

$$\frac{mv_0^2}{4} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}, \quad \text{откуда} \quad v_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$v_0 = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Пример 8. Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов $U_0 = 10$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, по линии AB, параллельной пластинам (рис. 15.4). Расстояние d между

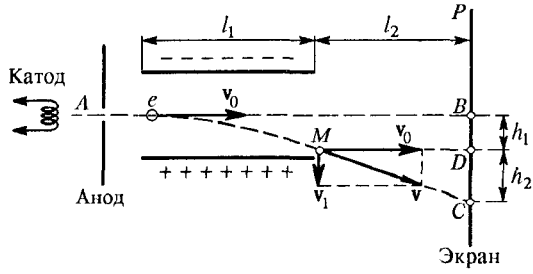


Рис. 15.4

пластинами равно 2 см. Длина l_1 пластин конденсатора в направлении полета электрона равна 20 см. Определить расстояние BC на экране P, отстоящем от конденсатора на $l_2 = 1$ м.

Решение. Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений: 1) по инерции вдоль линии AB с постоянной скоростью v_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора; 2) равномерно ускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью v, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора.

Из рис. 15.4 видно, что искомое расстояние $|BC| = h_1 + h_2$, где h_1 — расстояние, на которое сместится электрон в вертикальном направлении во время движения в конденсаторе; h_2 — расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости v_0, и точкой C, в которую электрон попадет в действительности.

Выразим отдельно h_1 и h_2.

Пользуясь формулой длины для пути равномерно ускоренного движения, найдем

$$h_1 = \frac{at^2}{2}, \tag{17}$$

где a — ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t — время полета электрона внутри конденсатора.

По второму закону Ньютона $a = F/m$, где F — сила, с которой поле действует на электрон; m — его масса. В свою очередь, $F = eE = eU_1/d$, где e — заряд электрона; U_1 — разность потенциалов между пластинами конденсатора; d — расстояние между ними.

Время полета электрона внутри конденсатора найдем из формулы пути равномерного движения $l_1 = v_0 t$, откуда

$$t = \frac{l_1}{v_0},$$

где l_1 — длина конденсатора. Выражение скорости v_0 найдем из условия равенства работы, совершенной полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии: $mv_0^2/2 = eU_0$. Отсюда

$$v_0^2 = \frac{2eU_0}{m}. \tag{18}$$

Подставляя в формулу (17) последовательно значения a, F, t и v_0^2 из соответствующих выражений, получим

$$h_1 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0}.$$

Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников MDC и векторного:

$$h_2 = \frac{v_1 l_2}{v}, \tag{19}$$

где v_1 — скорость электрона в вертикальном направлении в точке M; l_2 — расстояние от конденсатора до экрана.

Скорость v_1 найдем по формуле $v_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид

$$v_1 = \frac{eU_1 l_1}{dmv_0}.$$

Подставив выражение v_1 в формулу (19), получим $h_2 = \dfrac{eU_1 l_1 l_2}{dmv_0^2}$, или, заменив v_0^2 по формуле (18), найдем

$$h_2 = \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0}.$$

Окончательно для искомого расстояния $|BC|$ будем иметь

$$|BC| = h_1 + h_2 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0} + \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0} = \frac{U_1 l_1}{2dU_0}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right).$$

Подставив значения величин U_1, U_0, d, l_1 и l_2 в последнее выражение и произведя вычисления, получим

$$|BC| = 5{,}5 \text{ см}.$$

ЗАДАЧИ

Потенциальная энергия и потенциал поля точечных зарядов

15.1. Точечный заряд $Q = 10$ нКл, находясь в некоторой точке поля, обладает потенциальной энергией $\Pi = 10$ мкДж. Найти потенциал φ этой точки поля.

15.2. При перемещении заряда $Q = 20$ нКл между двумя точками поля внешними силами была совершена работа $A = 4$ мкДж. Определить работу A_1 сил поля и разность $\Delta\varphi$ потенциалов этих точек поля.

15.3. Электрическое поле создано точечным положительным зарядом $Q_1 = 6$ нКл. Положительный заряд Q_2 переносится из точки A этого поля в точку B (рис. 15.5). Каково изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$, приходящееся на единицу переносимого заряда, если $r_1 = 20$ см и $r_2 = 50$ см?

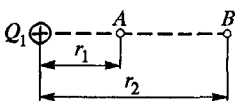


Рис. 15.5

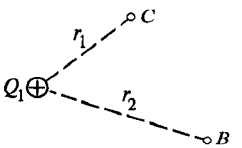


Рис. 15.6

15.4. Электрическое поле создано точечным зарядом $Q_1 = 50$ нКл. Не пользуясь понятием потенциала, вычислить работу A внешних сил по перемещению точечного заряда $Q_2 = -2$ нКл из точки C в точку B (рис. 15.6), если $r_1 = 10$ см, $r_2 = 20$ см. Определить также изменение $\Delta\Pi$ потенциальной энергии системы зарядов.

15.5. Поле создано точечным зарядом $Q = 1$ нКл. Определить потенциал φ поля в точке, удаленной от заряда на расстояние $r = 20$ см.

15.6. Определить потенциал φ электрического поля в точке, удаленной от зарядов $Q_1 = -0{,}2$ мкКл и $Q_2 = 0{,}5$ мкКл соответственно на $r_1 = 15$ см и $r_2 = 25$ см. Определить также минимальное и максимальное расстояния между зарядами, при которых возможно решение.

15.7. Заряды $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = -1$ мкКл находятся на расстоянии $d = 10$ см. Определить напряженность E и потенциал φ поля в точке, удаленной на расстояние $r = 10$ см от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно направлению от Q_1 к Q_2.

15.8. Вычислить потенциальную энергию Π системы двух точечных зарядов $Q_1 = 100$ нКл и $Q_2 = 10$ нКл, находящихся на расстоянии $d = 10$ см друг от друга.

15.9. Найти потенциальную энергию П системы трех точечных зарядов $Q_1 = 10$ нКл, $Q_2 = 20$ нКл и $Q_3 = -30$ нКл, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной длиной $a = 10$ см.

15.10. Какова потенциальная энергия П системы четырех одинаковых точечных зарядов $Q = 10$ нКл, расположенных в вершинах квадрата со стороной длиной $a = 10$ см?

15.11. Определить потенциальную энергию П системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной длиной $a = 10$ см. Заряды одинаковы по модулю $Q = 10$ нКл, но два из них отрицательны. Рассмотреть два возможных случая расположения зарядов.

15.12. Поле создано двумя точечными зарядами $+2Q$ и $-Q$, находящимися на расстоянии $d = 12$ см друг от друга. Определить геометрическое место точек на плоскости, для которых потенциал равен нулю (написать уравнение линии нулевого потенциала).

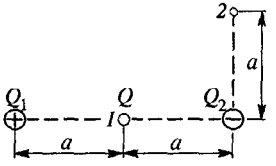


Рис. 15.7

15.13. Система состоит из трех зарядов — двух одинаковых по величине $Q_1 = |Q_2| = 10^3$ нКл и противоположных по знаку и заряда $Q = 20$ нКл, расположенного в точке *1* посередине между двумя другими зарядами системы (рис. 15.7). Определить изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ системы при переносе заряда Q из точки *1* в точку *2*. Эти точки удалены от отрицательного заряда Q_2 на расстояние $a = 0{,}2$ м.

Потенциал поля линейно распределенных зарядов

15.14. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить потенциал φ в точке, лежащей на оси кольца, на расстоянии $a = 5$ см от центра.

15.15. На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

15.16. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 1$ нКл. Определить потенциал φ электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от ближайшего его конца.

15.17. Тонкие стержни образуют квадрат со стороной длиной a. Стержни заряжены с линейной плотностью $\tau = 1{,}33$ нКл/м. Найти потенциал φ в центре квадрата.

15.18. Бесконечно длинная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине нити заряд с линейной плотностью $\tau = 0{,}01$ мкКл/м. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ двух точек поля, удаленных от нити на $r_1 = 2$ см и $r_2 = 4$ см.

Потенциал поля зарядов, распределенных по поверхности

15.19. Тонкая круглая пластина несет равномерно распределенный по плоскости заряд $Q = 1$ нКл. Радиус R пластины равен 5 см. Определить потенциал φ электрического поля в двух точках: 1) в центре пластины; 2) в точке, лежащей на оси, перпендикулярной плоскости пластины и отстоящей от центра пластины на $a = 5$ см.

15.20. Имеются две концентрические металлические сферы радиусами $R_1 = 3$ см и $R_2 = 6$ см. Пространство между сферами заполнено парафином. Заряд Q_1 внутренней сферы равен -1 нКл, внешний $Q_2 = 2$ нКл. Найти потенциал φ электрического поля на расстоянии: 1) $r_1 = 1$ см; 2) $r_2 = 5$ см; 3) $r_3 = 9$ см от центра сфер.

15.21. Металлический шар радиусом $R = 5$ см несет заряд $Q = 1$ нКл. Шар окружен слоем эбонита толщиной $d = 2$ см. Вычислить потенциал φ электрического поля на расстоянии: 1) $r_1 = 3$ см; 2) $r_2 = 6$ см; 3) $r_3 = 9$ см от центра шара. Построить график зависимости $\varphi(r)$.

15.22. Металлический шар радиусом $R_1 = 10$ см заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В. Определить потенциал φ_2 этого шара в двух случаях: 1) после того, как его окружат сферической проводящей оболочкой радиусом $R_2 = 15$ см и на короткое время соединят с ней проводником; 2) если его окружить сферической проводящей заземленной оболочкой радиусом $R_2 = 15$ см.

15.23. Заряд распределен равномерно по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от плоскости на расстояние $d = 10$ см.

15.24. Определить потенциал φ, до которого можно зарядить уединенный металлический шар радиусом $R = 10$ см, если напряженность E поля, при которой происходит пробой воздуха, равна 3 МВ/м. Найти также максимальную поверхностную плотность σ электрических зарядов перед пробоем.

15.25. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии $d = 0{,}5$ см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 0{,}2$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = -0{,}3$ мкКл/м^2. Определить разность потенциалов U между плоскостями.

15.26. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Плоскости несут равномерно распределенные по поверхностям заряды с плотностями $\sigma_1 =$

$= 0{,}2$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 0{,}5$ мкКл/м^2. Найти разность потенциалов U пластин.

15.27. Металлический шарик диаметром $d = 2$ см заряжен отрицательно до потенциала $\varphi = 150$ В. Сколько электронов находится на поверхности шарика?

15.28. Сто одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала $\varphi = 20$ В, сливаются в одну большую каплю. Каков потенциал φ_1 образовавшейся капли?

15.29. Две круглые металлические пластины радиусом $R = 10$ см каждая, заряженные разноименно, расположены одна против другой параллельно друг другу и притягиваются с силой $F = 2$ мН. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить разность потенциалов U между пластинами.

15.30. Электрическое поле создано бесконечно длинным равномерно заряженным ($\sigma = 0{,}1$ мкКл/м^2) цилиндром радиусом $R = 5$ см. Определить изменение $\Delta\Pi$ потенциальной энергии однозарядного положительного иона при перемещении его из точки *1* в точку *2* (рис. 15.8).

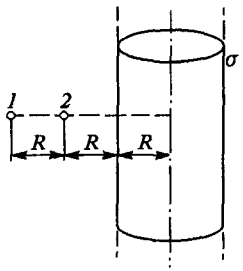


Рис. 15.8

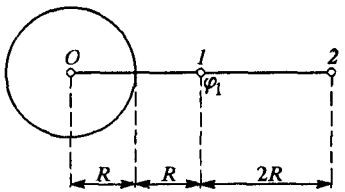


Рис. 15.9

15.31. Электрическое поле создано отрицательно заряженным металлическим шаром. Определить работу $A_{1,2}$ внешних сил по перемещению заряда $Q = 40$ нКл из точки *1* с потенциалом $\varphi_1 = -300$ В в точку *2* (рис. 15.9).

Потенциал поля зарядов, распределенных по объему

15.32. Плоская стеклянная пластинка толщиной $d = 2$ см заряжена равномерно с объемной плотностью $\rho = 10$ мкКл/м^3. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точкой, лежащей на поверхности пластины, и точкой, находящейся внутри пластины в ее середине. Считать, что размеры пластины велики по сравнению с ее толщиной.

15.33. Сплошной парафиновый шар радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1$ мкКл/м^3. Опре-

делить потенциал φ электрического поля в центре шара и на его поверхности. Построить график зависимости $\varphi(r)$.

15.34. Эбонитовый толстостенный полый шар несет равномерно распределенный по объему заряд с плотностью $\rho = 2\,\text{мкКл/м}^3$. Внутренний радиус R_1 шара равен 3 см, наружный $R_2 = 6\,\text{см}$. Определить потенциал φ шара в следующих точках: 1) на наружной поверхности шара; 2) на внутренней поверхности шара; 3) в центре шара.

Градиент потенциала и его связь с напряженностью поля

15.35. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 4\,\text{нКл/м}^2$. Определить значение и направление градиента потенциала электрического поля, созданного этой плоскостью.

15.36. Напряженность E однородного электрического поля в некоторой точке равна 600 В/м. Вычислить разность потенциалов U между этой точкой и другой, лежащей на прямой, составляющей угол $\alpha = 60°$ с направлением вектора напряженности. Расстояние Δr между точками равно 2 мм.

15.37. Напряженность E однородного электрического поля равна 120 В/м. Определить разность потенциалов U между этой точкой и другой, лежащей на той же силовой линии и отстоящей от первой на $\Delta r = 1\,\text{мм}$.

15.38. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал φ поля в точке, удаленной от заряда на $r = 12\,\text{см}$, равен 24 В. Определить значение и направление градиента потенциала в этой точке.

15.39. Бесконечная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине нити заряд с плотностью $\tau = 1\,\text{нКл/м}$. Каков градиент потенциала в точке, удаленной на расстояние $r = 10\,\text{см}$ от нити? Указать направление градиента потенциала.

15.40. Сплошной шар из диэлектрика ($\varepsilon = 3$) радиусом $R = 10\,\text{см}$ заряжен с объемной плотностью $\rho = 50\,\text{нКл/м}^3$. Напряженность электрического поля внутри и на поверхности такого шара выражается формулой $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon} r$, где r — расстояние от центра шара до точки, в которой вычисляется напряженность поля. Вычислить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центром шара и точками, лежащими на его поверхности.

Работа по перемещению зарядов в поле

15.41. Точечные заряды $Q_1 = 1\,\text{мкКл}$ и $Q_2 = 0{,}1\,\text{мкКл}$ находятся на расстоянии $r_1 = 10\,\text{см}$ друг от друга. Какую работу A совершат силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние: 1) $r_2 = 10\,\text{м}$; 2) $r_3 = \infty$?

15.42. Электрическое поле создано двумя одинаковыми положительными точечными зарядами Q. Найти работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $Q_1 = 10\,\text{нКл}$ из точки *1* с потенциалом $\varphi_1 = 300\,\text{В}$ в точку *2* (рис. 15.10).

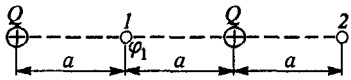


Рис. 15.10

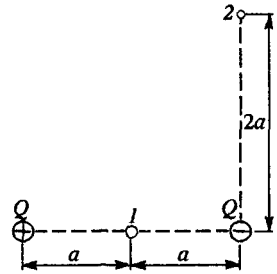


Рис. 15.11

15.43. Определить работу $A_{1,2}$ по перемещению заряда $Q_1 = 50\,\text{нКл}$ из точки *1* в точку *2* (рис. 15.11) в поле, созданном двумя точечными зарядами, модуль $|Q|$ которых равен $1\,\text{мкКл}$ и $a = 0{,}1\,\text{м}$.

15.44. Электрическое поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2\,\text{мкКл/м}^2$. В этом поле вдоль прямой, составляющей угол $\alpha = 60°$ с плоскостью, из точки *1* в точку *2*, расстояние l между которыми равно $20\,\text{см}$ (рис. 15.12), перемещается точечный электрический заряд $Q = 10\,\text{нКл}$. Определить работу A сил поля по перемещению заряда.

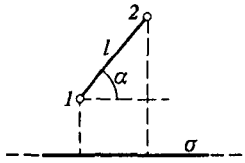


Рис. 15.12

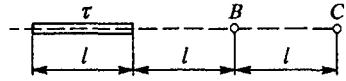


Рис. 15.13

15.45. На отрезке прямого провода равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10^3\,\text{нКл/м}$. Определить работу A сил поля по перемещению заряда $Q = 1\,\text{нКл}$ из точки B в точку C (рис. 15.13).

15.46. Тонкий стержень согнут в полукольцо. Стержень заряжен с линейной плотностью $\tau = 133\,\text{нКл/м}$. Какую работу A надо совершить, чтобы перенести заряд $Q = 6{,}7\,\text{нКл}$ из центра полукольца в бесконечность?

15.47. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом $R = 10\,\text{см}$. Он заряжен с линейной плотностью $\tau = 300\,\text{нКл/м}$. Какую работу

A надо совершить, чтобы перенести заряд $Q = 5$ нКл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии $l =$ $= 20$ см от центра его?

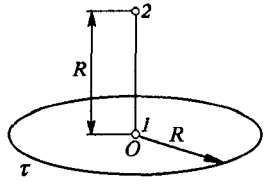


Рис. 15.14

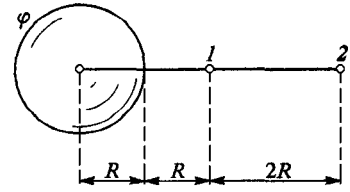


Рис. 15.15

15.48. Электрическое поле создано равномерно распределенным по кольцу зарядом ($\tau = 10^3$ нКл/м). Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $Q = 10$ нКл из точки *1* (в центре кольца) в точку *2*, находящуюся на перпендикуляре к плоскости кольца (рис. 15.14).

15.49. Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $Q = 1$ мкКл из точки *1* в точку *2* поля, созданного заряженным проводящим шаром (рис. 15.15). Потенциал φ шара равен 1 кВ.

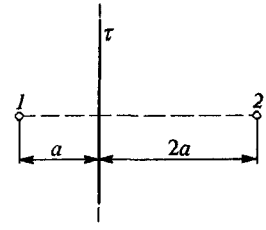


Рис. 15.16

15.50. Бесконечная прямая нить несет равномерно распределенный заряд ($\tau =$ $= 100$ нКл/м). Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $Q = 50$ нКл из точки *1* в точку *2* (рис. 15.16).

Движение заряженных частиц в электрическом поле

15.51. Электрон находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 200$ кВ/м. Какой путь пройдет электрон за время $t = 1$ нс, если его начальная скорость была равна нулю? Какой скоростью будет обладать электрон в конце этого интервала времени?

15.52. Какая ускоряющая разность потенциалов U требуется для того, чтобы сообщить скорость $v = 3 \cdot 10^7$ м/с: 1) электрону; 2) протону?

15.53. Разность потенциалов U между катодом и анодом электронной лампы равна 90 В, расстояние $r = 1$ мм. С каким ускорением a движется электрон от катода к аноду? Какова скорость v электрона в момент удара об анод? За какое время t электрон пролетает расстояние от катода до анода? Поле считать однородным.

15.54. Пылинка массой $m = 10^{-12}$ г, несущая на себе пять электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов $U = 3$ МВ. Какова кинетическая энергия T пылинки? Какую скорость v приобрела пылинка?

15.55. Заряженная частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ кВ, приобрела скорость $v = 5{,}4 \cdot 10^6$ м/с. Определить удельный заряд частицы (отношение заряда в массе).

15.56. Протон, начальная скорость v которого равна 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле ($E = 300$ В/см) так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Какой путь l должен пройти протон в направлении линий поля, чтобы его скорость удвоилась?

15.57. Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью $\sigma = 35{,}4$ нКл/м^2. По направлению силовой линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определить минимальное расстояние $l_{\min}$, на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии $l_0 = 5$ см он имел кинетическую энергию $T = 80$ эВ.

15.58. Электрон, летевший горизонтально со скоростью $v = 1{,}6 \cdot 10^6$ м/с, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $E = 90$ В/см, направленное вертикально вверх. Какова будет по модулю и направлению скорость v электрона через 1 нс?

15.59. Вдоль силовой линии однородного электрического поля движется протон. В точке поля с потенциалом φ_1 протон имел скорость $v_1 = 10^5$ м/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость протона возрастает в $n = 2$ раза. Отношение заряда протона к его массе $e/m = 9{,}6 \cdot 10^7$ Кл/кг.

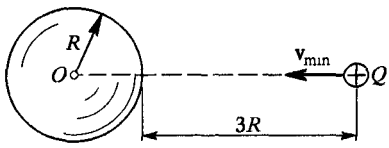


Рис. 15.17

15.60. В однородное электрическое поле напряженностью $E = 1$ кВ/м влетает вдоль силовой линии электрон со скоростью $v_0 = 10^6$ м/с. Определить расстояние l, пройденное электроном до точки, в которой его скорость v_1 будет равна половине начальной.

15.61. Какой минимальной скоростью $v_{\min}$ должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала $\varphi = 400$ В металлического шара (рис. 15.17)?

15.62. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом $\varphi_1 = 100$ В электрон имел скорость $v_1 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость v_2 электрона будет равна $v_1/2$.

15.63. Из точки *1* на поверхности бесконечно длинного отрицательно заряженного цилиндра ($\tau = 20$ нКл/м) вылетает электрон ($v_0 = 0$). Определить кинетическую энергию T электрона в точке *2*, находящейся на расстоянии $9R$ от поверхности цилиндра, где R — радиус цилиндрах (рис. 15.18).

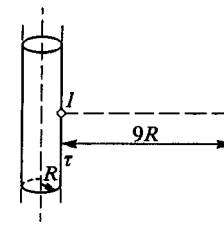


Рис. 15.18

15.64. Электрон с начальной скоростью $v_0 = 3 \cdot 10^6$ м/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью $E = 150$ В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найти: 1) силу F, действующую на электрон; 2) ускорение a, приобретаемое электроном; 3) скорость v электрона через $t = 0{,}1$ мкс.

15.65. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью $v = 10^7$ м/с, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора (поле считать однородным), если расстояние d между пластинами равно 16 мм, разность потенциалов $U = 30$ В и длина l пластин равна 6 см?

15.66. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость $v = 10^7$ м/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол $\alpha = 35°$ с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами (поле считать однородным), если длина l пластин равна 10 см и расстояние d между ними равно 2 см.

15.67. Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость $v = 10^7$ м/с, направленную параллельно пластинам, расстояние d между которыми равно 2 см. Длина l каждой пластины равна 10 см. Какую наименьшую разность потенциалов U нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора?

15.68[6]). Протон сближается с α-частицей. Скорость v_1 протона в лабораторной системе отсчета на достаточно большом удалении от α-частицы равна 300 км/с, а скорость v_2 α-частицы можно принять равной нулю. Определить минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое подойдет протон к α-частице, и скорости u_1 и u_2 обеих частиц в этот момент. Заряд α-частицы равен двум элементарным положительным зарядам, а массу m_1 ее можно считать в четыре раза большей, чем масса m_2 протона.

---

[6]) Задачи 15.68; 15.70–15.72 следует решать в движущейся инерциальной системе координат, начало отсчета которой находится в центре масс обеих частиц.

15.69. Положительно заряженная частица, заряд которой равен элементарному заряду e, прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 60$ кВ и летит на ядро атома лития, заряд которого равен трем элементарным зарядам. На какое наименьшее расстояние $r_{\min}$ частица может приблизиться к ядру? Начальное расстояние частицы от ядра можно считать практически бесконечно большим, а массу частицы — пренебрежимо малой по сравнению с массой ядра.

15.70. Два электрона, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, сближаются с относительной начальной скоростью $v = 10^7$ м/с. Определить минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое они могут подойти друг к другу.

15.71. Две одноименные заряженные частицы с зарядами Q_1 и Q_2 сближаются с большого расстояния. Векторы скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ частиц лежат на одной прямой. Определить минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое могут подойти друг к другу частицы, если их массы соответственно равны m_1 и m_2. Рассмотреть два случая: 1) $m_1 = m_2$ и 2) $m_2 \gg m_1$.

15.72. Отношение масс двух заряженных частиц равно $k = m_1/m_2$. Частицы находятся на расстоянии r_0 друг от друга. Какой кинетической энергией T_1 будет обладать частица массой m_1, если она под действием силы взаимодействия со второй частицей удалится от нее на расстояние $r \gg r_0$. Рассмотреть три случая: 1) $k = 1$; 2) $k = 0$; 3) $k \to \infty$. Заряды частиц принять равными Q_1 и Q_2. Начальными скоростями частиц пренебречь.

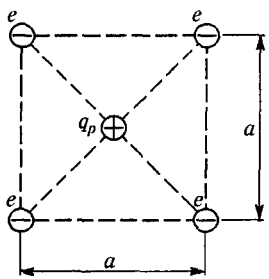


Рис. 15.19

15.73*. На расстоянии $l = 50$ см от точечного заряда $q = 20$ нКл находится центр проводящего шара радиуса $R = 10$ см. Определить потенциал φ шара, если на нем распределен заряд $Q = 6$ нКл.

15.74*. Четыре электрона и протон расположены так, как это указано на рис. 15.19. Определить потенциальную энергию П такой системы зарядов (в Дж и эВ). При расчетах принять $a = 0{,}3$ нм.

15.75*. Три протона удерживаются в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10^{-15}$ м. При освобождении протонов от удерживающих их связей, они разлетаются под действием сил отталкивания. Определить скорости v протонов на достаточно большом расстоянии l ($l \gg a$).

15.76*. Найти собственную потенциальную энергию П, которой обладает проводящий шар радиуса $R = 10$ см, несущий распределенный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/см^2.

15.77*. Металлический шар радиуса $R = 5$ см заряжен до потенциала $\varphi = 1$ кВ. Определить собственную электростатическую потенциальную энергию Π заряженного шара.

§ 16. Электрический диполь. Свойства диэлектриков

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Диполь есть система, состоящая из двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов. Вектор $\mathbf{l}$, проведенный от отрицательного к положительному заряду, называется плечом диполя.

• Электрический момент диполя

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где $|Q|$ — заряд диполя.

• Диполь называется точечным, если расстояние r от центра диполя до точки, в которой действие диполя рассматривается, много больше плеча диполя l.

Напряженность поля точечного диполя:

а) на оси диполя

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathbf{p}}{\varepsilon r^3}, \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{\varepsilon r^3};$$

б) на перпендикуляре к оси диполя

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon r^3}, \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\varepsilon r^3};$$

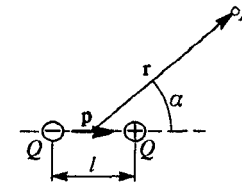


Рис. 16.1

в) в общем случае

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{3(\mathbf{pr})}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right), \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta},$$

где θ — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и электрическим дипольным моментом $\mathbf{p}$ (рис. 16.1).

• Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha.$$

• Потенциальная энергия диполя в электростатическом поле

$$\Pi = -\mathbf{pE} = -pE\cos\alpha.$$

• Механический момент, действующий на диполь с электрическим моментом $\mathbf{p}$, помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}], \quad \text{или} \quad M = pE\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$.

• Сила F_x, действующая на диполь в неоднородном электростатическом поле, обладающем осевой (вдоль оси Ox) симметрией,

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha,$$

где $\dfrac{\partial E}{\partial x}$ — величина, характеризующая степень неоднородности электростатического поля вдоль оси Ox; α — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$.

• Поляризованность (вектор поляризации) однородно поляризованного диэлектрика

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i,$$

где $\mathbf{p}_i$ — электрический дипольный момент отдельной (i-й) молекулы; N — число молекул, содержащихся в объеме ΔV.

• Связь поляризованности с напряженностью E среднего макроскопического поля в диэлектрике

$$P = \varkappa\varepsilon_0 E, \quad \text{или} \quad P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E,$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость; ε_0 — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость.

• Напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряженностью E_0 внешнего поля соотношениями

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

• Напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии выражается формулами

$$E_{\text{лок}} = E + \frac{1}{3}\frac{P}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}E = \frac{\varepsilon+2}{3\varepsilon}E_0.$$

• Индуцированный электрический момент молекулы

$$p = \alpha\varepsilon_0 E_{\text{лок}},$$

где α — поляризуемость молекулы ($\alpha = \alpha_e + \alpha_a$, где α_e — электронная поляризуемость; α_a — атомная поляризуемость).

• Связь диэлектрической восприимчивости $\varkappa$ с поляризуемостью молекулы α

$$\frac{\varkappa}{\varkappa+3} = \frac{1}{3}\alpha n,$$

где n — концентрация молекул.

• Уравнение Клаузиуса–Мосотти

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{1}{3}\alpha n, \quad \text{или} \quad \frac{M}{\rho}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{1}{3}\alpha N_{\text{A}},$$

где M — молярная масса вещества; ρ — плотность вещества.

• Формула Лоренц–Лорентца

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{1}{3}\alpha_e n, \quad \text{или} \quad \frac{M}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{1}{3}\alpha_e N_A,$$

где n — показатель преломления диэлектрика; α_e — электронная поляризуемость атома или молекулы.

• Ориентационная поляризуемость молекулы

$$\alpha_{op}=\frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT},$$

где p — электрический момент молекулы [7]); k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

• Формула Дебая–Ланжевена

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{1}{3}\left(\alpha+\frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}\right)n, \quad \text{или} \quad \frac{M}{\rho}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{1}{3}\left(\alpha+\frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}\right)N_A.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Диполь с электрическим моментом $p = 2$ нКл · м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30$ кВ/м. Вектор $\mathbf{p}$ составляет угол $\alpha_0 = 60°$ с направлением силовых линий поля. Определить произведенную внешними силами работу A поворота диполя на угол $\beta = 30°$.

Решение. Из исходного положения (рис. 16.2*а*) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30° = \pi/6$ двумя способами: или по часовой стрелке

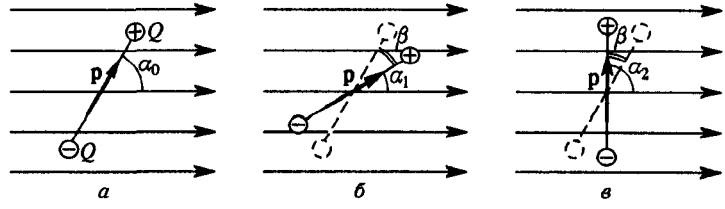


Рис. 16.2

до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$ (рис. 16.2*б*), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2$ (рис. 16.2*в*).

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля. Следовательно, работа внешних сил при этом отрицательна. Во втором случае поворот может быть произведен только под действием внешних сил и, следовательно, работа внешних сил при этом положительна.

---

[7]) Электрический дипольный момент молекулы принято выражать в единицах атомного масштаба — дебай: 1 дебай (D) $= 3{,}33 \cdot 10^{-30}$ Кл · м.

Работу, совершаемую при повороте диполя, можно вычислить двумя способами: 1) непосредственно интегрированием выражения элементарной работы; 2) с помощью соотношения между работой и изменением потенциальной энергии диполя в электрическом поле.

1-*й способ.* Элементарная работа при повороте диполя на угол α

$$\mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\alpha = pE\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

а полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = pE\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим

$$A = -pE(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha). \qquad (1)$$

Работа внешних сил при повороте диполя по часовой стрелке

$$A_1 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = -21{,}9\ \text{мкДж},$$

против часовой стрелки

$$A_2 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 30\ \text{мкДж}.$$

2-*й способ.* Работа A внешних сил связана с изменением потенциальной энергии $\Delta\Pi$ соотношением

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1,$$

где Π_1 и Π_2 — потенциальные энергии системы соответственно в начальном и конечном состояниях. Так как потенциальная энергия диполя в электрическом поле выражается формулой $\Pi = -pE\cos\alpha$, то

$$A = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha), \qquad (2)$$

что совпадает с формулой (1), полученной первым способом.

Пример 2. Три точечных заряда Q_1, Q_2 и Q_3 образуют электрически нейтральную систему, причем $Q_1 = Q_2 = 10$ нКл. Заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определить максимальные значения напряженности $E_{\max}$ и потенциала $\varphi_{\max}$ поля, создаваемого этой системой зарядов, на расстоянии $r = 1$ м от центра треугольника, длина a стороны которого равна 10 см.

Решение. Нейтральную систему, состоящую из трех точечных зарядов, можно представить в виде диполя. Действительно, «центр тяжести» зарядов Q_1 и Q_2 лежит на середине отрезка прямой, соединяющей эти заряды (рис. 16.3). В этой точке можно считать сосредоточенным заряд $Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1$. А так как система зарядов нейтральная ($Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$), то

$$Q_3 = -(Q_1 + Q_2) = -Q.$$

Так как расстояние l между зарядами Q_3 и Q, равными по значению, много меньше расстояния r ($l \ll r$) (рис. 16.4), то систему этих двух

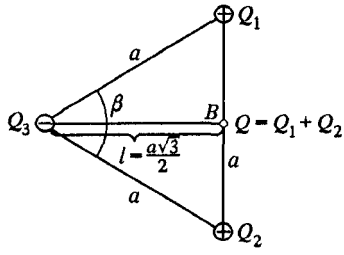


Рис. 16.3

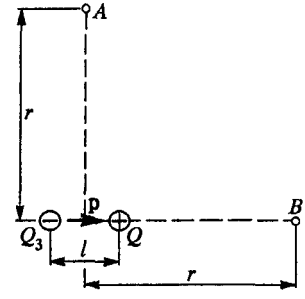


Рис. 16.4

зарядов можно считать диполем с электрическим моментом, равным

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ — плечо диполя, равное по модулю $a\sqrt{3}/2$ (см. рис. 16.3). Так как $|Q| = 2Q_1$, то электрический момент такого точечного диполя

$$p = Q_1 a\sqrt{3}.$$

Тот же результат можно получить другим способом. Систему из трех зарядов представим как два диполя с электрическими моментами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ (рис. 16.5), равными по модулю: $p_1 = |\mathbf{p}_1| = Q_1 a$; $p_2 = |\mathbf{p}_2| = Q_2 a$. Электрический момент $\mathbf{p}$ системы зарядов найдем как векторную сумму $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, т. е. $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Как это следует из рис. 16.5, имеем $p = 2p_1 \cos(\beta/2)$. Так как $p_1 = Q_1 a$ и $\beta = \pi/3$, то

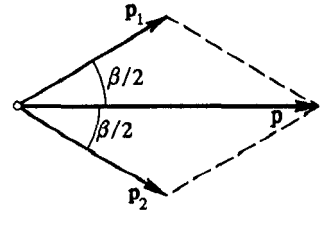


Рис. 16.5

$$p = 2Q_1 a \frac{\sqrt{3}}{2} = Q_1 a\sqrt{3},$$

что совпадает с найденным ранее значением.

Напряженность E и потенциал φ поля диполя выражаются формулами

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}; \quad \varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ (см. рис. 16.1).

Напряженность и потенциал будут иметь максимальные значения при $\alpha = 0$; следовательно,

$$E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \quad \varphi_{\max} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Так как $p = Q_1 a\sqrt{3}$, то

$$E_{\max} = \frac{2Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3}; \quad \varphi_{\max} = \frac{Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{3}.$$

Вычисления дают следующие значения:

$$E_{\max} = 3{,}12 \text{ В/м}; \quad \varphi_{\max} = 1{,}56 \text{ В}.$$

Пример 3. В атоме иода, находящемся на расстоянии $r = 1$ нм от α-частицы, индуцирован электрический момент $p = 1{,}5 \cdot 10^{-32}$ Кл · м. Определить поляризуемость α атома иода.

Решение. По определению поляризуемости, она может быть выражена по формуле

$$\alpha = \frac{p}{\varepsilon_0 E_{\text{лок}}}, \tag{3}$$

где p — индуцированный электрический момент атома; $E_{\text{лок}}$ — напряженность локального поля, в котором этот атом находится.

В данном случае таким полем является поле, созданное α-частицей. Напряженность этого поля определяется выражением

$$E_{\text{лок}} = E = \frac{2|e|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{4}$$

Подставив выражение $E_{\text{лок}}$ из равенства (4) в формулу (3), найдем

$$\alpha = \frac{2\pi r^2 p}{|e|}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$\alpha = 5{,}9 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Пример 4. Криптон находится под давлением $p = 10$ МПа при температуре $T = 200$ К. Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ε криптона; 2) его поляризованность P, если напряженность E_0 внешнего электрического поля равна 1 МВ/м. Поляризуемость α криптона равна $4{,}5 \cdot 10^{-29}$ м^3.

Решение. 1. Для определения диэлектрической проницаемости криптона воспользуемся уравнением Клаузиуса–Мосотти, записанным в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\alpha n,$$

где n — концентрация атомов криптона. Выразим из этой формулы диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon = \frac{1 + (2/3)\alpha n}{1 - (1/3)\alpha n}.$$

Так как концентрация молекул (атомов) связана с давлением и температурой соотношением $n = p/(kT)$, то

$$\varepsilon = \frac{3kT + 2\alpha p}{3kT - \alpha p}.$$

Выразив все величины, входящие в эту формулу, в единицах СИ ($\alpha = 4{,}5 \cdot 10^{-29}\,\text{м}^3$, $p = 10\,\text{МПа} = 10^7\,\text{Па}$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{Дж/К}$, $T = 200\,\text{К}$) и произведя вычисления, получим

$$\varepsilon = 1{,}17.$$

2. По определению поляризованность

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i,$$

где $\mathbf{p}_i$ — электрический дипольный момент, индуцированный в i-м атоме; N — число атомов в объеме ΔV. В однородном электрическом поле все $\mathbf{p}_i$ совпадают по модулю и направлению, поэтому геометрическую сумму можно заменить на арифметическую. Обозначив $|\mathbf{p}_i| = p$, получим

$$P = \frac{Np}{\Delta V}.$$

Отношение числа N атомов к объему ΔV есть концентрация n атомов. Тогда

$$P = np.$$

Так как электрический дипольный момент атома пропорционален напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля ($p = \alpha\varepsilon_0 E_{\text{лок}}$), то поляризованность

$$P = \alpha\varepsilon_0 n E_{\text{лок}}.$$

Выразив $E_{\text{лок}}$ через напряженность E_0 внешнего поля $\left(E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon}E_0\right)$ и n через давление p и температуру T $\left(n = \frac{p}{kT} = 3{,}6 \times \right.$ $\left. \times\, 10^{27}\text{м}^{-3}\right)$, получим

$$P = \alpha\varepsilon_0\frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon}nE_0.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления (при этом воспользуемся значением $\varepsilon = 1{,}17$ найденным в п. 1 данного примера):

$$P = 1{,}30 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2 = 1{,}30\ \text{мкКл/м}^2.$$

Пример 5. Жидкий бензол имеет плотность $\rho = 899\,\text{кг/м}^3$ и показатель преломления $n = 1{,}50$. Определить: 1) электронную поляризуемость α_e молекул бензола; 2) диэлектрическую проницаемость ε паров бензола при нормальных условиях.

Решение. 1. Для определения электронной поляризуемости воспользуемся формулой Лоренц–Лорентца:

$$\frac{M}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{1}{3}\alpha_e N_A,$$

откуда

$$\alpha_e=\frac{3M(n^2-1)}{\rho N_A(n^2+2)}. \tag{5}$$

В полученное выражение входит молярная масса M бензола. Найдем ее. Так как химическая формула бензола C_6H_6, то относительная молекулярная масса $M_r=6\cdot 12+6\cdot 1=78$. Следовательно, молярная масса $M=78\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставим в формулу (5) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$\alpha_e=\frac{3\cdot 78\cdot 10^{-3}\left((1{,}50)^2-1\right)}{899\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\left((1{,}50)^2+2\right)}\,\frac{\text{кг/моль}}{(\text{кг/м}^3)\cdot\text{моль}^{-1}}=1{,}27\cdot 10^{-28}\ \text{м}^3.$$

2. Диэлектрическую проницаемость паров бензола найдем, воспользовавшись уравнением Клаузиуса–Мосотти:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{1}{3}\alpha n, \tag{6}$$

где n — концентрация молекул бензола.

Заметим, что молекулы бензола неполярны и поэтому обладают только двумя типами поляризации: электронной и атомной, — причем атомная поляризация мала и ею можно пренебречь, считая $\alpha\approx\alpha_e$. Кроме того, при нормальных условиях ε мало отличается от единицы и приближенно можно считать $\varepsilon+2\approx 3$. Учитывая эти соображения, формулу (6) можно упростить:

$$\varepsilon-1\approx\alpha_e n,$$

откуда

$$\varepsilon=1+\alpha_e n.$$

При нормальных условиях концентрация n молекул известна и равна числу Лошмидта ($n_л=2{,}69\cdot 10^{19}$ см$^{-3}$). Выразим концентрацию молекул бензола в СИ ($n=2{,}69\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$) и произведем вычисления:

$$\varepsilon=1+1{,}27\cdot 10^{-28}\cdot 2{,}69\cdot 10^{25}=1{,}00342.$$

ЗАДАЧИ

Напряженность и потенциал поля диполя. Электрический момент диполя

16.1. Вычислить электрический момент p диполя, если его заряд $Q=10$ нКл, плечо $l=0{,}5$ см.

16.2. Расстояние l между зарядами $Q = \pm 3{,}2$ нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал φ поля, созданного диполем в точке, удаленной на $r = 8$ см как от первого, так и от второго заряда.

16.3. Диполь с электрическим моментом $p = 0{,}12$ нКл · м образован двумя точечными зарядами $Q = \pm 1$ нКл. Найти напряженность E и потенциал φ электрического поля в точках A и B (рис. 16.6), находящихся на расстоянии $r = 8$ см от центра диполя.

16.4. Определить напряженность E и потенциал φ поля, созданного диполем в точках A и B (рис. 16.6). Его электрический момент $p = 10^{-12}$ Кл · м, а расстояние r от точек A и B до центра диполя равно 10 см.

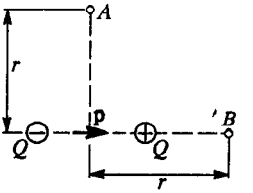


Рис. 16.6

16.5. Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл · м на расстоянии $r = 10$ см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha = 60°$ с вектором электрического момента.

16.6. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-12}$ Кл · м равномерно вращается с частотой $n = 10^3$ с$^{-1}$ относительно оси, проходящей через центр диполя и перпендикулярной его плечу. Вывести закон изменения потенциала как функцию времени в некоторой точке, отстоящей от центра диполя на $r = 1$ см и лежащей в плоскости вращения диполя. Принять, что в начальный момент времени потенциал φ_0 интересующей нас точки равен нулю. Построить график зависимости $\varphi(t)$.

16.7. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-12}$ Кл · м равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10^4$ рад/с относительно оси, перпендикулярной плечу диполя и проходящей через его центр. Определить среднюю потенциальную энергию $\langle \Pi \rangle$ заряда $Q = 1$ нКл, находящегося на расстоянии $r = 2$ см от центра диполя и лежащего в плоскости вращения, за время, равное: 1) полупериоду (от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/2$); 2) в течение времени $t \gg T$. В начальный момент считать $\Pi = 0$.

16.8. Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 10^{-12}$ Кл · м и $p_2 = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл · м находятся на расстоянии $r = 2$ см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

16.9. Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 2 \times$ $\times 10^{-11}$ Кл · м и $p_2 = 5 \cdot 10^{-11}$ Кл · м находятся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга, так что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.

16.10. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-10}$ Кл · м прикреплен к упругой нити (рис. 16.7). Когда в пространстве, где находится диполь, было создано электрическое поле напряженностью $E = 3$ кВ/м перпендикулярно плечу диполя и нити, диполь повернулся на угол $\alpha = 30°$. Определить постоянную кручения [8]) C нити.

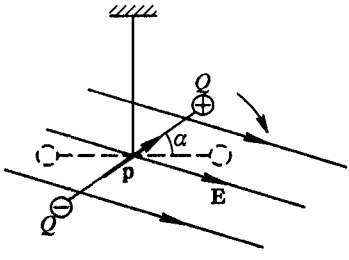


Рис. 16.7

16.11. В условиях предыдущей задачи диполь под действием поля поворачивается на малый угол. Определить постоянную кручения C нити.

16.12. Диполь с электрическим моментом $p = 20$ нКл · м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 50$ кВ/м. Вектор электрического момента составляет угол $\alpha = 60°$ с линиями поля. Какова потенциальная энергия П диполя?

Указание. За нулевую потенциальную энергию принять энергию, соответствующую такому расположению диполя, когда вектор электрического момента диполя перпендикулярен линиям поля.

16.13. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-10}$ Кл · м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E = 150$ кВ/м. Вычислить работу A, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha = 180°$.

16.14. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-10}$ Кл · м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E = 10$ кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии ΔП диполя при повороте его на угол $\alpha = 60°$.

16.15. Перпендикулярно плечу диполя с электрическим моментом $p = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$ Кл · м возбуждено однородное электрическое поле напряженностью $E = 300$ кВ/м. Под действием сил поля диполь начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через его центр. Найти угловую скорость ω диполя в момент прохождения им положения равновесия. Момент инерции J диполя относительно оси, перпендикулярной плечу и проходящей через его центр, равен $2 \cdot 10^{-9}$ кг · м^2.

16.16. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-10}$ Кл · м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E = 9$ МВ/м. Диполь повернули на малый угол и предоставили самому себе. Определить частоту ν собственных колебаний

[8]) Постоянной кручения называют величину, равную моменту силы, который вызывает закручивание нити на 1 рад.

диполя в электрическом поле. Момент инерции J диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен $4 \cdot 10^{-12}$ кг $\cdot$ м^2.

16.17. Диполь с электрическим моментом $p = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл $\cdot$ м находится в неоднородном электрическом поле. Степень неоднородности поля характеризуется величиной $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = 1$ МВ/м^2, взятой в направлении оси диполя. Вычислить силу F, действующую на диполь в этом направлении.

16.18. Диполь с электрическим моментом $p = 5 \cdot 10^{-12}$ Кл $\cdot$ м установился вдоль силовой линии в поле точечного заряда $Q = 100$ нКл на расстоянии $r = 10$ см от него. Определить для этой точки величину $|\mathrm{d}E/\mathrm{d}r|$, характеризующую степень неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу F, действующую на диполь.

16.19. Диполь с электрическим моментом $p = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл $\cdot$ м установился вдоль силовой линии в поле, созданном бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью $\tau = 500$ нКл/м на расстоянии $r = 10$ см от нее. Определить в этой точке величину $|\mathrm{d}E/\mathrm{d}r|$, характеризующую степень неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу F, действующую на диполь.

Поляризация диэлектриков

16.20. Указать, какими типами поляризации (электронной — *е*, атомной — а, ориентационной — о) обладают следующие атомы и молекулы: 1) H; 2) He; 3) O_2; 4) HCl; 5) H_2O; 6) CO; 7) CO_2; 8) CH_3; 9) CCl_4.

16.21. Молекула HF обладает электрическим моментом $p = 6{,}4 \cdot 10^{-30}$ Кл $\cdot$ м. *Межъядерное расстояние* $d = 92$ пм. Найти заряд Q такого диполя и объяснить, почему найденное значение Q существенно отличается от значения элементарного заряда $|e|$.

16.22. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов $U = 1{,}8$ кВ. Диэлектрик — стекло. Определить диэлектрическую восприимчивость $\varkappa$ стекла и поверхностную плотность σ' поляризационных (связанных) зарядов на поверхности стекла.

16.23. Металлический шар радиусом $R = 5$ см окружен равномерно слоем фарфора толщиной $d = 2$ см. Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд Q шара равен 10 нКл.

16.24. Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на гранях пластины.

Электрическое поле в диэлектрике

16.25. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, молекулы которого можно рассматривать как жесткие диполи с электрическим моментом $\mu_м = 2 \cdot 10^{-30}$ Кл · м. Концентрация n диполей равна 10^{26} м$^{-3}$. Определить напряженность E среднего макроскопического поля в таком диэлектрике, если при отсутствии диэлектрика напряженность E_0 поля между пластинами конденсатора была равна 100 МВ/м. Дезориентирующим действием теплового движения молекул пренебречь.

16.26. В электрическое поле напряженностью $E_0 = 1$ МВ/м внесли пластину диэлектрика ($\varepsilon = 3$). Определить напряженность $E_{лок}$ локального поля, действующего на отдельную молекулу в диэлектрике, полагая, что внутреннее поле является полем Лоренца.

16.27. Во сколько раз напряженность $E_{лок}$ локального поля в кристалле кубической сингонии больше напряженности E среднего макроскопического поля? Диэлектрическая проницаемость ε кристалла равна 2,5.

16.28. При какой максимальной диэлектрической проницаемости ε погрешность при замене напряженности $E_{лок}$ локального поля напряженностью E_0 внешнего поля не превысит 1%?

16.29. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если вместо напряженности $E_{лок}$ локального поля брать напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике. Расчеты выполнить для двух случаев: 1) $\varepsilon = 1{,}003$; 2) $\varepsilon = 2$.

Поляризованность диэлектрика

16.30. При какой поляризованности P диэлектрика ($\varepsilon = 5$) напряженность $E_{лок}$ локального поля равна 10 МВ/м?

16.31. Определить, при какой напряженности E среднего макроскопического поля в диэлектрике ($\varepsilon = 3$) поляризованность P достигнет значения, равного 200 мкКл/м^2.

16.32. Определить поляризованность P стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 5$ МВ/м.

16.33. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью $E_0 = 20$ кВ/м. Чему равна поляризованность P диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?

16.34. Во внешнем электрическом поле напряженностью $E_0 = 40$ МВ/м поляризованность P жидкого азота оказалась равной 109 мкКл/м^2. Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ε жидкого азота; 2) индуцированный электрический момент p одной молекулы. Плотность ρ жидкого азота принять равной 804 кг/м^3.

16.35. Связь поляризуемости α с диэлектрической восприимчивостью $\varkappa$ для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии задается выражением $\varkappa/(\varkappa+3) = \alpha n/3$, где n — концентрация молекул. При каком наибольшем значении $\varkappa$ погрешность в вычислении α не будет превышать 1%, если воспользоваться приближенной формулой $\varkappa \approx \alpha n$?

16.36. При каком наибольшем значении произведения αn формула Клаузиуса–Мосотти $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2) = \alpha n/3$ может быть заменена более простой $\varepsilon = 1 + \alpha n$ при условии, что погрешность в вычислении ε не превысит 1%?

16.37. Определить поляризуемость α молекул азота, если диэлектрическая проницаемость ε жидкого азота равна 1,445 и его плотность $\rho = 804\,\text{кг/м}^3$.

16.38. Поляризуемость α молекулы водорода можно принять равной $1{,}0 \cdot 10^{-29}\,\text{м}^3$. Определить диэлектрическую восприимчивость $\varkappa$ водорода для двух состояний: 1) газообразного при нормальных условиях; 2) жидкого, плотность ρ которого равна $70{,}8\,\text{кг/м}^3$.

16.39. Диэлектрическая восприимчивость $\varkappa$ газообразного аргона при нормальных условиях равна $5{,}54 \cdot 10^{-4}$. Определить диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 жидкого ($\rho_1 = 1{,}40\,\text{г/см}^3$) и твердого ($\rho_2 = 1{,}65\,\text{г/см}^3$) аргона.

16.40. Система состоит из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов $|Q| = 0{,}1\,\text{нКл}$, связанных квазиупругими силами. Коэффициент k упругости системы зарядов равен $1\,\text{мН/м}$. Определить поляризуемость α системы.

16.41. Вычислить поляризуемость α атома водорода и диэлектрическую проницаемость ε атомарного водорода при нормальных условиях. Радиус r электронной орбиты принять равным 53 пм.

16.42. Атом водорода находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 100\,\text{кВ/м}$. Определить электрический момент p и плечо l индуцированного диполя. Радиус r электронной орбиты равен 53 пм.

16.43. Диэлектрическая проницаемость ε аргона при нормальных условиях равна 1,00055. Определить поляризуемость α атома аргона.

16.44. Атом ксенона (поляризуемость $\alpha = 5{,}2 \cdot 10^{-29}\,\text{м}^3$) находится на расстоянии $r = 1\,\text{нм}$ от протона. Определить индуцированный в атоме ксенона электрический момент p.

16.45. Какой максимальный электрический момент $p_{\max}$ будет индуцирован у атома неона, находящегося на расстоянии $r = 1\,\text{нм}$ от молекулы воды? Электрический момент p молекулы воды равен $6{,}2 \cdot 10^{-30}\,\text{Кл} \cdot \text{м}$. Поляризуемость α атома неона равна $4{,}7 \cdot 10^{-30}\,\text{м}^3$.

16.46. Криптон при нормальных условиях находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 2\,\text{МВ/м}$. Определить объемную плотность энергии w поляризованного криптона, если поляризуемость α атома криптона равна $4{,}5 \cdot 10^{-29}\,\text{м}^3$.

16.47. Определить поляризуемость α атомов углерода в алмазе. Диэлектрическая проницаемость ε алмаза равна 5,6, плотность $\rho = 3{,}5 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$.

16.48. Показатель преломления n газообразного кислорода при нормальных условиях равен 1,000272. Определить электронную поляризуемость α_e молекулы кислорода.

16.49. Показатель преломления n газообразного хлора при нормальных условиях равен 1,000768. Определить диэлектрическую проницаемость ε жидкого хлора, плотность ρ которого равна $1{,}56 \times$ $\times 10^3\,\text{кг/м}^3$.

16.50. При нормальных условиях показатель преломления n углекислого газа CO_2 равен 1,000450. Определить диэлектрическую проницаемость ε жидкого CO_2, если его плотность $\rho = 1{,}19 \times$ $\times 10^3\,\text{кг/м}^3$.

16.51. Показатель преломления n жидкого сероуглерода CS_2 равен 1,62. Определить электронную поляризуемость α_e молекул сероуглерода, зная его плотность.

16.52. Поляризуемость α атома аргона равна $2{,}03 \cdot 10^{-29}\,\text{м}^3$. Определить диэлектрическую проницаемость ε и показатель преломления n жидкого аргона, плотность ρ которого равна $1{,}44 \times$ $\times 10^3\,\text{кг/м}^3$.

16.53. Определить показатель преломления n_1 жидкого кислорода, если показатель преломления n_2 газообразного кислорода при нормальных условиях равен 1,000272. Плотность ρ_1 жидкого кислорода равна $1{,}19 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$.

Ориентационная поляризация

16.54. Вычислить ориентационную поляризуемость $\alpha_{\text{ор}}$ молекул воды при температуре $t = 27\,^\circ\text{C}$, если электрический момент p молекулы воды равен $6{,}1 \cdot 10^{-30}\,\text{Кл} \cdot \text{м}$.

16.55. Зная, что показатель преломления n водяных паров при нормальных условиях равен 1,000252 и что молекула воды обладает электрическим моментом $p = 6{,}1 \cdot 10^{-30}\,\text{Кл} \cdot \text{м}$, определить, какую долю от общей поляризуемости (электронной и ориентационной) составляет электронная поляризуемость молекулы.

16.56. Электрический момент p молекул диэлектрика равен $5 \cdot 10^{-30}\,\text{Кл} \cdot \text{м}$. Диэлектрик ($\varepsilon = 2$) помещен в электрическое поле напряженностью $E_{\text{лок}} = 100\,\text{МВ/м}$. Определить температуру T, при которой среднее значение проекции $\langle p_E \rangle$ электрического момента на направление вектора $E_{\text{лок}}$ будет равно $1/2p$.

16.57. Диэлектрик, молекулы которого обладают электрическим моментом $p = 5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, находится при температуре $T =$ $= 300$ К в электрическом поле напряженностью $E_{\text{лок}} = 100$ МВ/м. Определить, во сколько раз число молекул, ориентированных «по полю» ($0 \leqslant \theta \leqslant 1°$), больше числа молекул, ориентированных «против поля» ($179° \leqslant \theta \leqslant 180°$). Угол θ образован векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}_{\text{лок}}$.

16.58*. Точечный заряд $Q = 3$ нКл находится на расстоянии $r = 1$ м от точечного диполя с электрическим моментом $p = 5 \times$ $\times 10^{-11}$ Кл·м. Определить потенциальную энергию П и силу F их взаимодействия в двух случаях: 1) точечный заряд находится на оси диполя; 2) точечный заряд находится на перпендикуляре к оси диполя.

16.59*. Два одинаковых диполя (рис. 16.8) с электрическими моментами $p = 2$ нКл·м находятся на расстоянии $r = 2l$ друг от друга (l — плечо диполя равное 10 см). Определить потенциальную энергию П взаимодействия диполей.

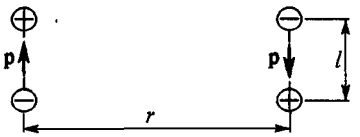


Рис. 16.8

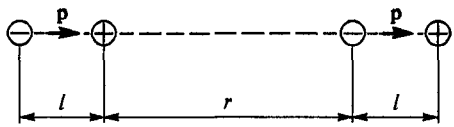


Рис. 16.9

16.60*. Два одинаково ориентированных диполя (рис. 16.9) с электрическими моментами $p = 1$ нКл·м находятся на расстоянии $r = 2l$ друг от друга (l — плечо диполя равное 10 см). Определить потенциальную энергию П и силу F взаимодействия диполей.

16.61*. Две молекулы водяного пара с электрическими дипольными моментами $p = 1{,}84$ D, ориентированные параллельно друг другу, находятся на расстоянии $r =$ $= 5$ нм (рис. 16.10). Считая молекулы точечными диполями, определить потенциальную энергию (в Дж и эВ) П их взаимодействия.

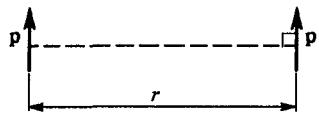


Рис. 16.10

16.62*. Аргон ($Z = 18$) находится при нормальных условиях в электрическом поле напряженностью $E = 30$ кВ/м. Определить плечо l индуцированного дипольного момента, если диэлектрическая проницаемость ε аргона при этих условиях равна 1,000554.

16.63*. Кислород (O_2) при нормальных условиях поместили в электрическое поле напряженностью $E = 10$ кВ/м. Определить индуцированный дипольный момент p (в дебаях), если диэлектрическая проницаемость ε кислорода при этих условиях равна 1,000532.

16.64*. Концентрация n молекул насыщенного водяного пара при температуре $t = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$ равна $1{,}97 \cdot 10^{25}\ \mathrm{м}^{-3}$ и его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1{,}0058$. Считая, что основной вклад в поляризацию дает ориентационная поляризация, оценить электрический дипольный момент p (в D) молекулы воды.

16.65*. Определить электрический дипольный момент p молекулы, если для связи H–O дипольный момент $p_1 = 1{,}51\,\mathrm{D}$ и валентный угол $\alpha = 104{,}5°$.

§ 17. Электрическая емкость. Конденсаторы

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Электрическая емкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi},$$

где Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника.

• Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов на обкладках конденсатора.

• Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом R, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Если сфера полая и заполнена диэлектриком, то электроемкость ее от этого не изменяется.

• Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S — площадь пластин (каждой пластины); d — расстояние между ними; ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Электрическая емкость плоского конденсатора, заполненного n слоями диэлектрика толщиной d_i каждый с диэлектрическими проницаемостями ε_i (слоистый конденсатор),

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \ldots + d_n/\varepsilon_n}.$$

• Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

• Электрическая емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной l и радиусами R_1 и R_2, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

• Электрическая емкость C последовательно соединенных конденсаторов:

в общем случае

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

где n — число конденсаторов;

в случае двух конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2};$$

в случае n одинаковых конденсаторов с электроемкостью C_1 каждый

$$C = \frac{C_1}{n}.$$

• Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов:

в общем случае

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i;$$

в случае двух конденсаторов

$$C = C_1 + C_2;$$

в случае n одинаковых конденсаторов с электроемкостью C_1 каждый

$$C = nC_1.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить электрическую емкость C плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 1{,}5$ мм, если площадь S пластин равна 100 см^2.

Решение. Емкость конденсатора, по определению, $C = Q/U$, где Q — заряд на пластинах конденсатора; U — разность потенциалов пластин. Заменив в этом равенстве общую разность потенциалов U конденсатора суммой $U_1 + U_2$ напряжений на слоях диэлектриков, получим

$$C = \frac{Q}{U_1 + U_2}. \qquad (1)$$

Приняв во внимание, что $Q = \sigma S$, $U_1 = E_1 d_1 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1$ и $U_2 = E_2 d_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$, равенство (1) можно переписать в виде

$$C = \frac{\sigma S}{\dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}, \tag{2}$$

где σ — поверхностная плотность заряда на пластинах; E_1 и E_2 — напряженности поля в первом и втором слоях диэлектрика соответственно; D — электрическое смещение поля в диэлектриках.

Умножив числитель и знаменатель равенства (2) на ε_0 и учтя, что $D = \sigma$, окончательно получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}.$$

Сделав вычисления по последней формуле, найдем

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}/5 + 1{,}5 \cdot 10^{-3}/3} \frac{(\Phi/\text{м}) \cdot \text{м}^2}{\text{м}} = 9{,}83 \cdot 10^{-11}\ \Phi = 98{,}3\ \text{пФ}.$$

Пример 2. Два плоских конденсатора одинаковой электроемкости $C_1 = C_2 = C$ соединены в батарею последовательно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}$. Как изменится разность потенциалов U_1 на пластинах первого конденсатора, если пространство между пластинами второго конденсатора, не отключая источника тока, заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$?

Решение. До заполнения второго конденсатора диэлектриком разность потенциалов на пластинах обоих конденсаторов была одинакова: $U_1 = U_2 = \mathcal{E}/2$. После заполнения электроемкость второго конденсатора возросла в ε раз:

$$C_2' = \varepsilon C_2 = \varepsilon C.$$

Электроемкость первого не изменилась, т. е. $C_1' = C$.

Так как источник тока не отключался, то общая разность потенциалов на батарее конденсаторов осталась прежней, она лишь перераспределилась между конденсаторами. На первом конденсаторе

$$U_1' = \frac{Q}{C_1'} = \frac{Q}{C}, \tag{3}$$

где Q — заряд на пластинах конденсатора. Поскольку при последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине и на всей батарее одинаков, то

$$Q = C_{\text{бат}}' \mathcal{E},$$

где $C_{\text{бат}}' = \dfrac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'} = \dfrac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = \dfrac{\varepsilon C}{1 + \varepsilon}$. Таким образом,

$$Q = \frac{\varepsilon C}{1 + \varepsilon} \mathcal{E}.$$

Подставив это выражение заряда в формулу (3), найдем

$$U_1' = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon C\mathcal{E}}{(1+\varepsilon)C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{E}.$$

Чтобы найти, как изменилась разность потенциалов на пластинах первого конденсатора, вычислим отношение

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{\varepsilon\mathcal{E}\cdot 2}{(1+\varepsilon)\mathcal{E}} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

После подстановки значения ε получим

$$\frac{U_1'}{U_1} = 1{,}75.$$

Следовательно, разность потенциалов на пластинах первого конденсатора после заполнения второго конденсатора диэлектриком возросла в 1,75 раза.

ЗАДАЧИ

Электрическая емкость проводящей сферы

17.1. Найти электроемкость C уединенного металлического шара радиусом $R = 1$ см.

17.2. Определить электроемкость C металлической сферы радиусом $R = 2$ см, погруженной в воду.

17.3. Определить электроемкость C Земли, принимая ее за шар радиусом $R = 6400$ км.

17.4. Два металлических шара радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 6$ см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд $Q = 1$ нКл. Найти поверхностную плотность σ зарядов на шарах.

17.5. Шар радиусом $R_1 = 6$ см заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, а шар радиусом $R_2 = 4$ см — до потенциала $\varphi_2 = 500$ В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

Электрическая емкость плоского конденсатора

17.6. Определить электроемкость C плоского слюдяного конденсатора, площадь S пластин которого равна 100 см^2, а расстояние между ними равно 0,1 мм.

17.7. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U = 600$ В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной $d_1 = 7$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 3$ мм. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 200 см^2. Найти: 1) электроемкость C конденсатора; 2) смещение D, напряженность E поля и падение потенциала $\Delta\varphi$ в каждом слое.

17.8. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 1,33 м, площадь S пластин равна 20 см^2. В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды толщиной $d_1 = 0{,}7$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 0{,}3$ мм. Определить электроемкость C конденсатора.

17.9. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}2$ мкКл/м^2. Расстояние d между пластинами равно 1 мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния d между пластинами до 3 мм?

17.10. В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина толщиной $d = 1$ см, которая вплотную прилегает к его пластинам. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю емкость?

17.11. Электроемкость C плоского конденсатора равна 1,5 мкФ. Расстояние d между пластинами равно 5 мм. Какова будет электроемкость C конденсатора, если на нижнюю пластину положить лист эбонита толщиной $d_1 = 3$ мм?

17.12. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластинка. Конденсатор заряжен до разности потенциалов $U_1 = 100$ В. Какова будет разность потенциалов U_2, если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора?

Электрическая емкость сферического конденсатора

17.13. Две концентрические металлические сферы радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 2{,}1$ см образуют сферический конденсатор. Определить его электроемкость C, если пространство между сферами заполнено парафином.

17.14. Конденсатор состоит из двух концентрических сфер. Радиус R_1 внутренней сферы равен 10 см, внешней $R_2 = 10{,}2$ см. Промежуток между сферами заполнен парафином. Внутренней сфере сообщен заряд $Q = 5$ мкКл. Определить разность потенциалов U между сферами.

Соединения конденсаторов

17.15. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов $U = 600$ В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком (фарфор). Определить диэлектрическую проницаемость ε фарфора, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до $U_1 = 100$ В.

17.16. Два конденсатора электроемкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС

$\mathcal{E} = 120$ В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

17.17. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 0{,}2$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 320$ В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 450$ В, напряжение U на нем изменилось до 400 В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора.

17.18. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 0{,}6$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В и соединен со вторым конденсатором электроемкостью $C_2 = 0{,}4$ мкФ, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 150$ В. Найти заряд ΔQ, перетекший с пластин первого конденсатора на второй.

17.19. Три одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно. Электроемкость C такой батареи конденсаторов равна 89 пФ. Площадь S каждой пластины равна 100 см^2. Диэлектрик — стекло. Какова толщина d стекла?

17.20. Конденсаторы соединены так, как это показано на рис. 17.1. Электроемкости конденсаторов: $C_1 = 0{,}2$ мкФ, $C_2 = 0{,}1$ мкФ, $C_3 = 0{,}3$ мкФ, $C_4 = 0{,}4$ мкФ. Определить электроемкость C батареи конденсаторов.

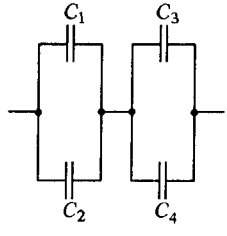


Рис. 17.1

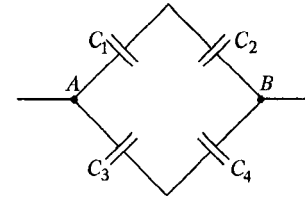


Рис. 17.2

17.21. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 0{,}2$ мкФ, $C_2 = 0{,}6$ мкФ, $C_3 = 0{,}3$ мкФ, $C_4 = 0{,}5$ мкФ соединены так, как это указано на рис. 17.2. Разность потенциалов U между точками A и B равна 320 В. Определить разность потенциалов U_i и заряд Q_i на пластинах каждого конденсатора ($i = 1, 2, 3, 4$).

17.22. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 10$ нФ, $C_2 = 40$ нФ, $C_3 = 2$ нФ и $C_4 = 30$ нФ соединены так, как это показано на рис. 17.3. Определить электроемкость C соединения конденсаторов.

17.23. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $C_4 = 1$ мкФ соединены так, как указано на рис. 17.4. Разность потенциалов на обкладках четвертого конденсатора $U_4 = 100$ В. Найти заряды и разности потенциалов на

обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов.

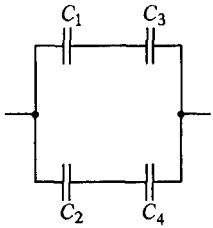


Рис. 17.3

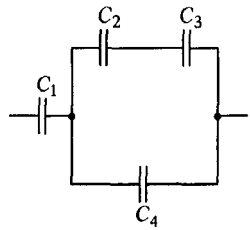


Рис. 17.4

17.24. Определить электроемкость схемы (рис. 17.5), где $C_1 = 1\,\text{пФ}$, $C_2 = 2\,\text{пФ}$, $C_3 = 2\,\text{пФ}$, $C_4 = 4\,\text{пФ}$, $C_5 = 3\,\text{пФ}$.

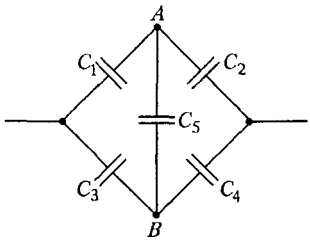


Рис. 17.5

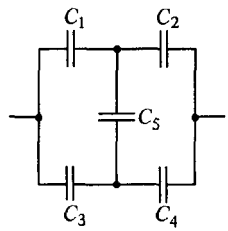


Рис. 17.6

17.25. Пять различных конденсаторов соединены согласно схеме, приведенной на рис. 17.6. Определить электроемкость C_4, при которой электроемкость всего соединения не зависит от величины электроемкости C_5. Принять $C_1 = 8\,\text{пФ}$, $C_2 = 12\,\text{пФ}$, $C_3 = 6\,\text{пФ}$.

§ 18. Энергия заряженного проводника. Энергия электрического поля

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Энергия заряженного проводника выражается через заряд Q, потенциал φ и электрическую емкость C проводника следующими соотношениями:

$$W = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\varphi.$$

• Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU,$$

где C — электрическая емкость конденсатора; U — разность потенциалов на его пластинах.

• Объемная плотность энергии (энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема)

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED,$$

где E — напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε; D — электрическое смещение.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 3$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40$ В. После отключения от источника тока конденсатор был соединен параллельно с другим незаряженным конденсатором электроемкостью $C_2 = 5$ мкФ. Определить энергию ΔW, израсходованную на образование искры в момент присоединения второго конденсатора.

Решение. Энергия, израсходованная на образование искры, равна

$$\Delta W = W_1 - W_2, \tag{1}$$

где W_1 — энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 — энергия, которую имеет батарея, составленная из первого и второго конденсаторов. Подставив в равенство (1) формулу энергии заряженного конденсатора $W = CU^2/2$ и приняв во внимание, что общая электроемкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме электроемкостей отдельных конденсаторов, получим

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)U_2^2}{2}, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — электроемкости первого и второго конденсаторов; U_1 — разность потенциалов, до которой был заряжен первый конденсатор; U_2 — разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом: $U_2 = \dfrac{Q}{C_1 + C_2} = \dfrac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}$. Подставив это выражение U_2 в формулу (2), получим

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2}.$$

После простых преобразований найдем

$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U_1^2.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$\Delta W = 1{,}5 \text{ мДж}.$$

Пример 2. Плоский воздушный конденсатор с площадью S пластины, равной $500\,\text{см}^2$, подключен к источнику тока, ЭДС $\mathcal{E}$ которого равна 300 В. Определить работу A внешних сил по раздвижению пластин от расстояния $d_1 = 1\,\text{см}$ до $d_2 = 3\,\text{см}$ в двух случаях: 1) пластины перед раздвижением отключаются от источника тока; 2) пластины в процессе раздвижения остаются подключенными к нему.

Решение. *1-й случай.* Систему двух заряженных и отключенных от источника тока пластин можно рассматривать как изолированную систему, по отношению к которой справедлив закон сохранения энергии. В этом случае работа внешних сил равна изменению энергии системы:

$$A = \Delta W = W_2 - W_1, \tag{3}$$

где W_2 — энергия поля конденсатора в конечном состоянии (пластины находятся на расстоянии d_2); W_1 — энергия поля в начальном состоянии (пластины находятся на расстоянии d_1).

Энергию в данном случае удобно выразить через заряд Q на пластинах, так как заряд пластин, отключенных от источника при их раздвижении, не изменяется. Подставив в равенство (3) выражения $W_2 = Q^2/(2C_2)$ и $W_1 = Q^2/(2C_1)$, получим

$$A = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1}, \quad \text{или} \quad A = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right).$$

Выразив в этой формуле заряд через ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока и начальную электроемкость C_1 ($Q = C_1\mathcal{E}$), найдем

$$A = \frac{C_1^2\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right). \tag{4}$$

Подставляя в формулу (4) выражения электроемкостей ($C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$) плоского конденсатора, получим

$$A = \frac{\varepsilon_0^2 S^2 \mathcal{E}^2}{2d_1^2}\left(\frac{d_2}{\varepsilon_0 S} - \frac{d_1}{\varepsilon_0 S}\right).$$

После сокращения на $\varepsilon_0 S$ формула примет вид

$$A = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1). \tag{5}$$

Произведя вычисления по формуле (5), найдем

$$A = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 500 \cdot 10^{-4} \cdot 300^2}{2(1 \cdot 10^{-2})^2}(3-1)10^{-2}\ \text{Дж} =$$

$$= 3{,}98 \cdot 10^{-6}\ \text{Дж} = 3{,}98\ \text{мкДж}.$$

2-й случай. Пластины остаются подключенными к источнику тока и система двух пластин уже не является изолированной (заряд с пластин при их раздвижении перемещается к клеммам батареи). Поэтому воспользоваться законом сохранения энергии в этом случае нельзя.

Заметим, что при раздвижении пластин конденсатора: а) разность их потенциалов остается неизменной ($U = \mathcal{E}$); б) емкость будет уменьшаться $\left(C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}\right)$. Будут уменьшаться также заряд на пластинах ($Q = CU$) и напряженность электрического поля ($E = U/d$). Так как величины E и Q, необходимые для определения работы, изменяются, то работу следует вычислять путем интегрирования.

Напишем выражение для элементарной работы:

$$\mathrm{d}A = QE_1\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

где E_1 — напряженность поля, создаваемого зарядом одной пластины.

Выразим напряженность поля E_1 и заряд Q через расстояние x между пластинами:

$$E_1 = \frac{1}{2}E = \frac{\mathcal{E}}{2x} \quad \text{и} \quad Q = C\mathcal{E}, \quad \text{или} \quad Q = \varepsilon_0 \frac{S}{x}\mathcal{E}.$$

Подставив эти выражения E_1 и Q в равенство (6), получим

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S^2\mathcal{E}^2}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от d_1 до d_2, найдем выражение искомой работы:

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E} \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 \left| -\frac{1}{x} \right|_{d_1}^{d_2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right).$$

После упрощений последняя формула примет вид

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S\mathcal{E}^2}{d_1 d_2}(d_2 - d_1).$$

Сделав вычисления по полученной формуле, найдем

$$A = 1{,}33 \text{ мкДж}.$$

Пример 3. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 1$ кВ. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Диэлектрик — стекло. Определить объемную плотность энергии поля конденсатора.

Решение. Объемная плотность энергии поля конденсатора

$$w = \frac{W}{V}, \tag{7}$$

где W — энергия поля конденсатора; V — объем, занимаемый полем, т. е. объем пространства, заключенного между пластинами конденсатора.

Энергия поля конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2}, \tag{8}$$

где U — разность потенциалов, до которой заряжены пластины конденсатора; C — его электроемкость. Но $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$, $V = Sd$. Подставив выражение C в формулу (8) и затем выражения W и V в формулу (7), получим

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2d^2}.$$

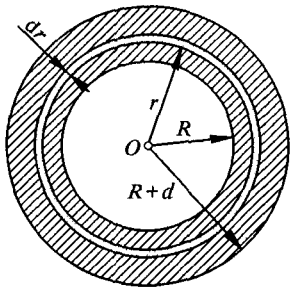


Рис. 18.1

Подставив значения величин в последнюю формулу и вычислив, найдем

$$w = 0{,}309 \text{ Дж/м}^3.$$

Пример 4. Металлический шар радиусом $R = 3$ см несет заряд $Q = 20$ нКл. Шар окружен слоем парафина толщиной $d = 2$ см. Определить энергию W электрического поля, заключенного в слое диэлектрика.

Решение. Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно. Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженного шара обладает сферической симметрией.

Выразим энергию в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом $\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}V,$$

где w — объемная плотность энергии (рис. 18.1).

Полная энергия выразится интегралом

$$W = \int w\,\mathrm{d}V = 4\pi \int_R^{R+d} wr^2\,\mathrm{d}r, \tag{9}$$

где r — радиус элементарного сферического слоя; $\mathrm{d}r$ — его толщина. Объемная плотность энергии определяется по формуле $w = \varepsilon_0\varepsilon E^2/2$, где

E — напряженность поля. В нашем случае $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ и, следовательно,

$$w = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4}.$$

Подставив это выражение плотности в формулу (9) и вынеся за знак интеграла постоянные величины, получим

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^{R+d}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{Q^2 d}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+d)}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$W = 12 \text{ мкДж}.$$

Пример 5. Определить собственную потенциальную энергию П электростатического поля, которой обладает шар радиуса $R = 3$ см, несущий равномерно распределенный по объему заряд $Q = 5$ нКл.

Решение. Собственная потенциальная энергия равномерно заряженного по объему шара равна работе A внешних сил, которую нужно совершить, «собирая» шар из дифференциально малых порций зарядов $\mathrm{d}q$, перенося их из бесконечности.

Пусть шар уже имеет некоторый заряд q и радиус r. Потенциал поверхности такого шара

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для присоединения заряда $\mathrm{d}q$ необходимо совершить работу

$$\mathrm{d}A_{\text{вн. сил}} = \varphi\,\mathrm{d}q.$$

Эта работа равна приращению собственной потенциальной энергии

$$\mathrm{d}\Pi = A_{\text{вн. сил}} = \varphi\,\mathrm{d}q = \frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Будем считать, что заряд $\mathrm{d}q$ равномерно распределяется по поверхности шара радиуса r. Тогда

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V = \rho S\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2\rho\,\mathrm{d}r,$$

где ρ — объемная плотность заряда; $\mathrm{d}V$ — объем сферического слоя. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(4/3)\pi r^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r^2$$

и

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r^4\cdot 4\pi\rho\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}r^4\,\mathrm{d}r.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от 0 до R:

$$\Pi = \int_0^R d\Pi(r) = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\frac{R^5}{5}.$$

Так как

$$\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3} \quad \text{и} \quad \rho^2 = \frac{Q^2}{(4\pi/3)^2 R^6},$$

то

$$\Pi = \frac{4\pi}{3}\frac{Q^2 R^5}{(4\pi/3)^2 R^6 5\varepsilon_0}, \quad \text{или} \quad \Pi = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Подставим числовые значения:

$$\Pi = \frac{3}{5}\frac{5\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10}9\cdot 10^9 \text{ Дж} = 4{,}5\cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 4{,}5 \text{ мкДж}.$$

ЗАДАЧИ

Энергия плоского конденсатора

18.1. Конденсатору, электроемкость C которого равна 10 пФ, сообщен заряд $Q = 1$ пКл. Определить энергию W конденсатора.

18.2. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 см, разность потенциалов $U = 6$ кВ. Заряд Q каждой пластины равен 10 нКл. Вычислить энергию W поля конденсатора и силу F взаимного притяжения пластин.

18.3. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние $d = 1$ мм, диэлектрик — слюда и площадь S каждой пластины равна 300 см^2?

18.4. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2. Найти плотность энергии w поля конденсатора.

18.5. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом $r = 10$ см каждая. Расстояние d_1 между пластинами равно 1 см. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1{,}2$ кВ и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до $d_2 = 3{,}5$ см?

18.6. Плоский воздушный конденсатор электроемкостью $C = 1{,}11$ нФ заряжен до разности потенциалов $U = 300$ В. После отключения от источника тока расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в пять раз. Определить: 1) разность

потенциалов U на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу A внешних сил по раздвижению пластин.

18.7. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 600\,\text{пФ}$ зарядили до разности потенциалов $U = 1{,}5\,\text{кВ}$ и отключили от источника тока. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор электроемкостью $C_2 = 400\,\text{пФ}$. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов.

18.8. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 1\,\text{мкФ}$, $C_2 = 2\,\text{мкФ}$, $C_3 = 3\,\text{мкФ}$ включены в цепь с напряжением $U = 1{,}1\,\text{кВ}$. Определить энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения.

18.9. Электроемкость C плоского конденсатора равна $111\,\text{пФ}$. Диэлектрик — фарфор. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 600\,\text{В}$ и отключили от источника напряжения. Какую работу A нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора? Трение пренебрежимо мало.

18.10. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (фарфор), объем V которого равен $100\,\text{см}^3$ Поверхностная плотность заряда σ на пластинах конденсатора равна $8{,}85\,\text{нКл/м}^2$. Вычислить работу A, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора. Трением диэлектрика о пластины конденсатора пренебречь.

18.11. Пластину из эбонита толщиной $d = 2\,\text{мм}$ и площадью $S = 300\,\text{см}^2$ поместили в однородное электрическое поле напряженностью $E = 1\,\text{кВ/м}$, расположив так, что силовые линии перпендикулярны ее плоской поверхности. Найти: 1) плотность σ *связанных зарядов на поверхности пластин*; 2) энергию W электрического поля, сосредоточенную в пластине.

18.12. Пластину предыдущей задачи переместили из поля в область пространства, где внешнее поле отсутствует. Пренебрегая уменьшением поля в диэлектрике с течением времени, определить энергию W электрического поля в пластине.

Энергия поля заряженной сферы

18.13. Найти энергию W уединенной сферы радиусом $R = 4\,\text{см}$, заряженной до потенциала $\varphi = 500\,\text{В}$.

18.14. Вычислить энергию W электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд $Q = 100\,\text{нКл}$, если диаметр d шара равен $20\,\text{см}$.

18.15. Уединенная металлическая сфера электроемкостью $C = 10\,\text{пФ}$ заряжена до потенциала $\varphi = 3\,\text{кВ}$. Определить энергию W поля, заключенного в сферическом слое, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы.

18.16. Электрическое поле создано заряженной ($Q = 0{,}1$ мкКл) сферой радиусом $R = 10$ см. Какова энергия W поля, заключенная в объеме, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раза больше радиуса сферы?

18.17. Уединенный металлический шар радиусом $R_1 = 6$ см несет заряд Q. Концентрическая этому шару поверхность делит пространство на две части (внутренняя конечная и внешняя бесконечная), так что энергии электрического поля обеих частей одинаковы. Определить радиус R_2 этой сферической поверхности.

18.18. Сплошной парафиновый шар радиусом $R = 10$ см заряжен равномерно по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить энергию W_1 электрического поля, сосредоточенную в самом шаре, и энергию W_2 вне его.

18.19. Эбонитовый шар равномерно заряжен по объему. Во сколько раз энергия электрического поля вне шара превосходит энергию поля, сосредоточенную в шаре?

18.20*. Два шара радиусами $R_1 = 4$ см и $R_2 = 6$ см несут равномерно распределенные по объему заряды $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = 3$ нКл. Расстояние l между центрами шаров равно 20 см. Определить потенциальную электростатическую энергию Π такой системы с учетом собственной потенциальной энергии заряженных шаров.

18.21*. После того, как на проводящую сферу радиуса $R = 10$ см и массой $m = 10$ г поместили заряд $Q = 3$ мкКл, сфера под действием электростатических сил отталкивания разорвалась на большое число осколков одинаковой массы. Определить максимальную скорость $v_{\max}$, которую может приобрести любой из этих осколков.

Глава 4
ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 19. Основные законы постоянного тока

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Сила постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t},$$

где Q — количество электричества (заряд), прошедшее через поперечное сечение проводника за время t.

• Плотность электрического тока есть векторная величина, равная отношению силы тока к площади S поперечного сечения проводника:

$$\mathbf{j} = \frac{I}{S}\mathbf{k},$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор, по направлению совпадающий с направлением движения положительных носителей заряда.

• Сопротивление однородного проводника

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление вещества проводника; l — его длина.

• Проводимость G проводника и удельная проводимость γ вещества

$$G = \frac{1}{R}, \quad \gamma = \frac{1}{\rho}.$$

• Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0 — удельные сопротивления соответственно при t и $0\,^\circ\mathrm{C}$; t — температура (по шкале Цельсия); α — температурный коэффициент сопротивления.

• Сопротивление соединения проводников:

последовательного

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i;$$

параллельного

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}.$$

Здесь R_i — сопротивление i-го проводника, n — число проводников.

• Закон Ома:

для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}_{12}}{R} = \frac{U}{R};$$

для однородного участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R};$$

для замкнутой цепи ($\varphi_1 = \varphi_2$)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathcal{E}_{12}$ — ЭДС источников тока, входящих в участок; U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $\mathcal{E}$ — ЭДС всех источников тока цепи.

• Правила (законы) Кирхгофа. *Первое правило*: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n — число токов, сходящихся в узле.

Второе правило: в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i,$$

где I_i — сила тока на i-м участке; R_i — активное сопротивление на i-м участке; $\mathcal{E}_i$ — ЭДС источников тока на i-м участке; n — число участков, содержащих активное сопротивление; k — число участков, содержащих источники тока.

• Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t,

$$A = IUt.$$

• Мощность тока

$$P = IU.$$

• Закон Джоуля–Ленца

$$Q = I^2 Rt,$$

где Q — количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t.

Закон Джоуля–Ленца справедлив при условии, что участок цепи неподвижен и в нем не совершаются химические превращения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить заряд Q, прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $Q = It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$ и проинтегрируем:

$$Q = \int_0^t I\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$Q = \int_0^t \frac{U}{R}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U = U_0 + kt, \tag{3}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Подставив это выражение U в формулу (2), найдем

$$Q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R}\right)\mathrm{d}t = \frac{U_0}{R}\int_0^t \mathrm{d}t + \frac{k}{R}\int_0^t t\,\mathrm{d}t.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}(2U_0 + kt). \tag{4}$$

Значение коэффициента пропорциональности k найдем из формулы (3), если заметим, что при $t = 20$ с $U = 4$ В:

$$k = \frac{U - U_0}{t} = 0{,}1 \text{ В/с}.$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем

$$Q = 20 \text{ Кл}.$$

Пример 2. Потенциометр с сопротивлением $R = 100$ Ом подключен к источнику тока, ЭДС $\mathcal{E}$ которого равна 150 В и внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом (рис. 19.1). Определить показание вольтметра с сопротивлением $R_в = 500$ Ом, соединенного проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с серединой обмотки потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?

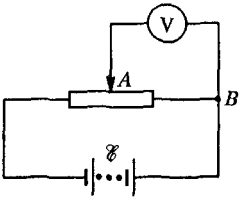


Рис. 19.1

Решение. Показание U_1 вольтметра, подключенного к точкам A и B (рис. 19.1), определяется по формуле

$$U_1 = I_1 R_1, \tag{5}$$

где I_1 — сила тока в неразветвленной части цепи; R_1 — сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра.

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для всей цепи:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \tag{6}$$

где R — сопротивление внешней цепи.

Внешнее сопротивление R есть сумма двух сопротивлений:

$$R = \frac{R}{2} + R_1. \tag{7}$$

Сопротивление R_1 параллельного соединения может быть найдено по формуле $1/R_1 = 1/R_в + 2/R$, откуда

$$R_1 = \frac{RR_в}{R + 2R_в}.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин и произведя вычисления, найдем

$$R_1 = 45{,}5 \text{ Ом}.$$

Подставив в выражение (6) правую часть равенства (7), определим силу тока:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R/2 + R_1 + r} = 1{,}03 \text{ А}.$$

Если подставить значения I_1 и R_1 в формулу (5), то найдем показание вольтметра:

$$U = 46{,}9 \text{ В}.$$

Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению силы тока I_2 на половину сопротивления потенциометра, т. е. $U_2 = I_2(R/2)$, или

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}}{R+r}\frac{R}{2}.$$

Подставив сюда значения величин $\mathcal{E}$, R и r, получим

$$U_2 = 50 \text{ В}.$$

Пример 3. Источники тока с электродвижущими силами $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ включены в цепь, как показано на рис. 19.2. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 4$ В, а $R_1 = R_4 = 2$ Ом и $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Сопротивлениями источников тока пренебречь.

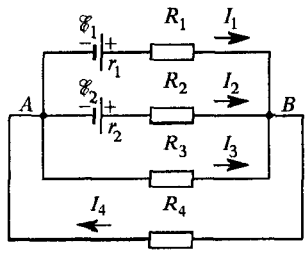


Рис. 19.2

Решение. Силы токов в разветвленной цепи определяют с помощью законов Кирхгофа. Чтобы найти четыре значения силы токов, следует составить четыре уравнения.

Указание. Перед составлением уравнений по закону Кирхгофа необходимо, во-первых, выбрать *произвольно направления токов*, текущих через сопротивления, указав их стрелками на чертеже, и, во-вторых, выбрать направление обхода контуров (последнее только для составления уравнений по второму закону Кирхгофа).

Выберем направления токов, как они показаны на рис. 19.2, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла: A и B. Но составлять уравнение по первому закону Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс; ток, отходящий от узла, — со знаком минус.

По первому закону Кирхгофа для узла B имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Недостающие три уравнения получим по второму закону Кирхгофа. Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, также меньше числа контуров (в нашем случае контуров шесть, а независимых уравнений три). Чтобы найти необходимое число независимых уравнений, следует придерживаться правила: выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае произведение IR входит в уравнение со знаком минус;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

По второму закону Кирхгофа имеем соответственно для контуров AR_1BR_2A, AR_1BR_3A, AR_3BR_4A:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \tag{8}$$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \mathcal{E}_1, \tag{9}$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \tag{10}$$

Подставив в равенства (8)–(10) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$\begin{gathered} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0, \\ 2I_1 - 4I_2 = 6, \\ 2I_1 - 4I_3 = 10, \\ 4I_3 + 2I_4 = 0. \end{gathered}$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем уравнения еще раз в следующем виде:

$$\begin{gathered} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0, \\ I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6, \\ 2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10, \\ 0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0. \end{gathered}$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} \quad \text{и} \quad I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta},$$

где Δ — определитель системы уравнений; Δ_{I_2} и Δ_{I_3} — определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов четырех вышеприведенных уравнений. Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96;$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Отсюда получаем

$$I_2 = 0, \quad I_3 = -1 \text{ А}.$$

Знак минус у значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что при произвольном выборе направлений токов, указанных на рисунке, направление тока I_3 было указано противоположно истинному. На самом деле ток I_3 течет от узла B к узлу A.

Пример 4. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 6$ А (рис. 19.3). Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 — за вторую, а также найти отношение этих количеств теплоты Q_2/Q_1.

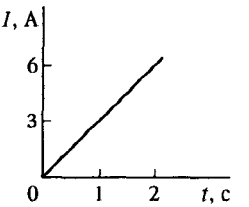


Рис. 19.3

Решение. Закон Джоуля–Ленца $Q = I^2Rt$ применим в случае постоянного тока ($I = \text{const}$). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$\mathrm{d}Q = I^2R\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I = kt, \tag{12}$$

где k — коэффициент пропорциональности, равный отношению приращения силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

С учетом равенства (12) формула (11) примет вид

$$\mathrm{d}Q = k^2Rt^2\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Для определения количества теплоты, выделившегося за конечный промежуток времени Δt, выражение (13) следует проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2:

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3).$$

При определении количества теплоты, выделившегося за первую секунду, пределы интегрирования $t_1 = 0\,\mathrm{c}$, $t_2 = 1\,\mathrm{c}$ и, следовательно,

$$Q_1 = 60\ \text{Дж},$$

а за вторую секунду — пределы интегрирования $t_1 = 1\,\mathrm{c}$, $t_2 = 2\,\mathrm{c}$ и тогда

$$Q_2 = 420\ \text{Дж}.$$

Следовательно,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 7,$$

т. е. за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз больше, чем за первую секунду.

ЗАДАЧИ

Закон Ома для участка цепи

19.1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 3\,\mathrm{A}$ в течение времени $t = 10\,\mathrm{c}$. Определить заряд Q, прошедший в проводнике.

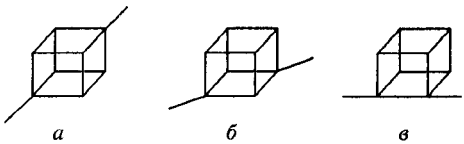
19.2. Определить плотность тока j в железном проводнике длиной $l = 10\,\mathrm{м}$, если провод находится под напряжением $U = 6\,\mathrm{В}$.

19.3. Напряжение U на шинах электростанции равно $6{,}6\,\mathrm{кВ}$. Потребитель находится на расстоянии $l = 10\,\mathrm{км}$. Определить площадь S сечения медного провода, который следует взять для устройства двухпроводной линии передачи, если сила тока I в линии равна $20\,\mathrm{A}$ и потери напряжения в проводах не должны превышать 3%.

19.4. Вычислить сопротивление R графитового проводника, изготовленного в виде прямого кругового усеченного конуса высотой $h = 20\,\mathrm{см}$ и радиусами оснований $r_1 = 12\,\mathrm{мм}$ и $r_2 = 8\,\mathrm{мм}$. Температура t проводника равна $20\,^\circ\mathrm{C}$.

19.5. На одном конце цилиндрического медного проводника сопротивлением $R_0 = 10\,\mathrm{Ом}$ (при $0\,^\circ\mathrm{C}$) поддерживается температура $t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, на другом $t_2 = 400\,^\circ\mathrm{C}$. Найти сопротивление R проводника, считая градиент температуры вдоль его оси постоянным.

19.6. Проволочный куб составлен из проводников. Сопротивление R_1 каждого проводника, составляющего ребро куба, равно



а *б* *в*

Рис. 19.4

1 Ом. Вычислить сопротивление R этого куба, если он включен в электрическую цепь, как показано на рис. 19.4*а*.

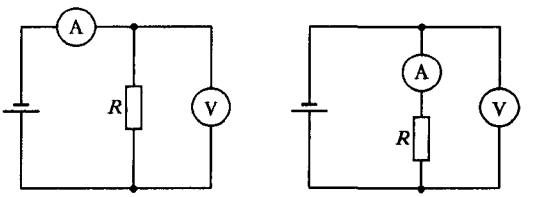
19.7. То же (см. задачу 19.6), если куб включен в цепь, как показано на рис. 19.4*б*.

19.8. То же (см. задачу 19,6), если куб включен в цепь, как показано на рис. 19.4*в*.

19.9. Катушка и амперметр соединены последовательно и присоединены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением $R_в = 1$ кОм. Показания амперметра $I = 0{,}5$ А, вольтметра $U = 100$ В. Определить сопротивление R катушки. Сколько процентов от точного значения сопротивления катушки составит погрешность, если не учитывать сопротивления вольтметра?

19.10. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до $I = 10$ А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление $R_а$ амперметра равно 0,02 Ом и сопротивление $R_ш$ шунта равно 5 мОм?

19.11. Какая из схем, изображенных на рис. 19.5*а*, *б*, более пригодна для измерения больших сопротивлений и какая — для измерения малых сопротивлений? Вычислить погрешность, до-



а *б*

Рис. 19.5

пускаемую при измерении с помощью этих схем сопротивлений $R_1 = 1$ кОм и $R_2 = 10$ Ом. Принять сопротивления вольтметра $R_в$ и амперметра $R_а$ соответственно равными 5 кОм и 2 Ом.

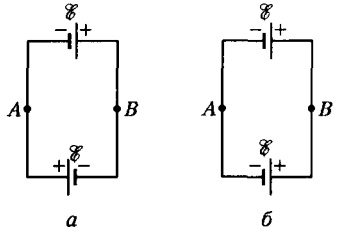
19.12. Внутреннее сопротивление r батареи аккумуляторов равно 3 Ом. Сколько процентов от точного значения ЭДС составляет погрешность, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением $R_в = 200$ Ом, принять ее равной ЭДС?

19.13. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Амперметр показал силу тока, равную $I_1 = 0{,}5$ А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока.

19.14. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС $\mathcal{E}$ каждого элемента равна 1,2 В, внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 1{,}5$ Ом. Найти силу тока I во внешней цепи.

19.15. Имеется N одинаковых гальванических элементов с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r_i каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При каком значении n сила тока I во внешней цепи, имеющей сопротивление R, будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление R_i батареи при этом значении n?

19.16. Даны 12 элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0{,}3$ Ом? Определить максимальную силу тока I_{max}.



а *б*

Рис. 19.6

19.17. Два одинаковых источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединены, как показано на рис. 19.6*а*, *б*. Определить силу тока I в цепи и разность потенциалов U между точками A и B в первом и втором случаях.

19.18. Два элемента ($\mathcal{E}_1 = 1{,}2$ В, $r_1 = 0{,}1$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 0{,}9$ В, $r_2 = 0{,}3$ Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно 0,2 Ом. Определить силу тока I в цепи.

Правила Кирхгофа

19.19. Две батареи аккумуляторов ($\mathcal{E}_1 = 10\,\text{В}$, $r_1 = 1\,\text{Ом}$; $\mathcal{E}_2 = 8\,\text{В}$, $r_2 = 2\,\text{Ом}$) и реостат ($R = 6\,\text{Ом}$) соединены, как показано на рис. 19.7. Найти силу тока в батареях и реостате.

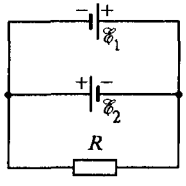


Рис. 19.7

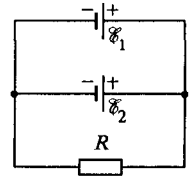


Рис. 19.8

19.20. Два источника тока ($\mathcal{E}_1 = 8\,\text{В}$, $r_1 = 2\,\text{Ом}$; $\mathcal{E}_2 = 6\,\text{В}$, $r_2 = 1{,}5\,\text{Ом}$) и реостат ($R = 10\,\text{Ом}$) соединены, как показано на рис. 19.8. Вычислить силу тока I, текущего через реостат.

19.21. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 (рис. 19.9) и напряжение U_3 на концах резистора, если $\mathcal{E}_1 = 4\,\text{В}$, $\mathcal{E}_2 = 3\,\text{В}$, $R_1 = 2\,\text{Ом}$, $R_2 = 6\,\text{Ом}$, $R_3 = 1\,\text{Ом}$. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

19.22. Три батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12\,\text{В}$, $\mathcal{E}_2 = 5\,\text{В}$ и $\mathcal{E} = 10\,\text{В}$ и одинаковыми внутренними сопротивлениями r, равными $1\,\text{Ом}$, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов I, идущих через каждую батарею.

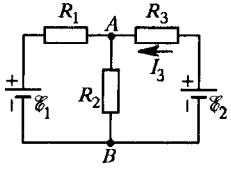


Рис. 19.9

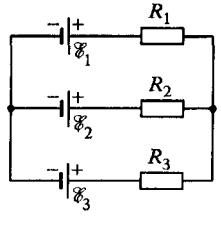


Рис. 19.10

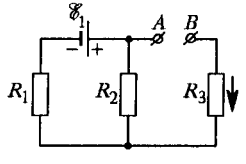


Рис. 19.11

19.23. Три источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 11\,\text{В}$, $\mathcal{E}_2 = 4\,\text{В}$ и $\mathcal{E}_3 = 6\,\text{В}$ и три реостата с сопротивлениями $R_1 = 5\,\text{Ом}$, $R_2 = 10\,\text{Ом}$ и $R_3 = 2\,\text{Ом}$ соединены, как показано на рис. 19.10. Определить силы токов I в реостатах. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало.

19.24. Три сопротивления $R_1 = 5\,\text{Ом}$, $R_2 = 1\,\text{Ом}$ и $R_3 = 3\,\text{Ом}$, а также источник тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1{,}4\,\text{В}$ соединены, как показано на рис. 19.11. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока, который надо подключить в цепь между точками A и B, чтобы в сопротивлении

R_3 шел ток силой $I = 1$ А в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлением источника тока пренебречь.

Работа и мощность тока

19.25. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение U на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление R реостата равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 120$ Вт. Найти силу тока I в цепи.

19.26. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathcal{E} = 12$ В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

19.27. К батарее аккумуляторов, ЭДС $\mathcal{E}$ которой равна 2 В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность P, которая при этом выделяется в проводнике.

19.28. ЭДС $\mathcal{E}$ батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока $I = 4$ А. Найти к.п.д. батареи. При каком значении внешнего сопротивления R к.п.д. будет равен 99%?

19.29. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС $\mathcal{E}$ батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление $r =$ $= 1$ Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность $P = 80$ Вт. Вычислить силу тока I в цепи и к.п.д. η нагревателя.

19.30. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через $t_1 = 15$ мин, если только вторая, то через $t_2 = 30$ мин. Через какое время закипит вода, если обе секции включить последовательно? параллельно?

19.31. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 =$ $= 1$ А — соответственно $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи.

19.32. Сила тока в проводнике сопротивлением $r = 100$ Ом равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10$ А в течение времени $\tau = 30$ с. Определить количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике.

19.33. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 12$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ в течение времени $t = 10$ с. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

19.34. По проводнику сопротивлением $R = 3$ Ом течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время $\tau = 8$ с, равно 200 Дж. Определить количество электричества q, протекшее за это время по проводнику. В момент

времени, принятый за начальный, сила тока в проводнике равна нулю.

19.35. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 15\,\text{Ом}$ равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $\tau = 5\,\text{с}$. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 10\,\text{кДж}$. Найти среднюю силу тока $\langle I \rangle$ в проводнике за этот промежуток времени.

19.36. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $\tau = 10\,\text{с}$. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 1\,\text{кДж}$. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если сопротивление R его равно $3\,\text{Ом}$.

§ 20. Ток в металлах, жидкостях и газах

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Плотность тока $\mathbf{j}$, средняя скорость $\langle \mathbf{v} \rangle$ упорядоченного движения носителей заряда и их концентрация n связаны соотношением

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle,$$

где e — элементарный заряд.

• Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

где γ — удельная проводимость проводника; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля.

• Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме

$$w = \gamma E^2,$$

где w — объемная плотность тепловой мощности.

• Удельная электрическая проводимость

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{e^2 n \langle l \rangle}{mu},$$

где e и m — заряд и масса электрона; n — концентрация электронов; $\langle l \rangle$ — средняя длина их свободного пробега; u — средняя скорость хаотического движения электронов. Удельная электрическая проводимость измеряется См/м (Сименс на метр).

• Закон Видемана–Франца

$$\frac{\lambda}{\gamma} = 3\frac{k^2}{e^2}T,$$

где λ — теплопроводность.

• Термоэлектродвижущая сила, возникающая в термопаре,

$$\mathcal{E} = \alpha(T_1 - T_2),$$

где α — удельная термо-ЭДС; $(T_1 - T_2)$ — разность температур спаев термопары.

• Законы электролиза Фарадея. *Первый закон*

$$m = kQ,$$

где m — масса вещества, выделившегося на электроде при прохождении через электролит электрического заряда Q; k — электрохимический эквивалент вещества.

Второй закон

$$k = \frac{M}{FZ},$$

где F — постоянная Фарадея ($F = 96{,}5$ кКл/моль); M — молярная масса ионов данного вещества; Z — валентность ионов.

Объединенный закон

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{Z}Q = \frac{1}{F}\frac{M}{Z}It,$$

где I — сила тока, проходящего через электролит; t — время, в течение которого шел ток.

• Подвижность ионов

$$b = \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{E},$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения ионов; E — напряженность электрического поля.

• Закон Ома в дифференциальной форме для электролитов и газов при самостоятельном разряде в области, далекой от насыщения,

$$\mathbf{j} = Qn(b_+ + b_-)\mathbf{E},$$

где Q — заряд иона; n — концентрация ионов; b_+ и b_- — подвижности соответственно положительных и отрицательных ионов.

• Плотность тока насыщения

$$j_{\text{нас}} = Qn_0 d,$$

где n_0 — число пар ионов, создаваемых ионизатором в единице объема в единицу времени; d — расстояние между электродами [$n_0 = N/(Vt)$, где N — число пар ионов, создаваемых ионизатором за время t в пространстве между электродами; V — объем этого пространства].

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. По железному проводнику, диаметр d сечения которого равен 0,6 мм, течет ток 16 А. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ направленного движения электронов, считая, что концентрация n свободных электронов равна концентрации n' атомов проводника.

Р е ш е н и е. Средняя скорость направленного (упорядоченного) движения электронов определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{l}{t}, \tag{1}$$

где t — время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся в отрезке проводника между сечениями I и II, пройдя через сечение II (рис. 20.1), перенесут заряд $Q = eN$ и создадут ток

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t}, \tag{2}$$

где e — элементарный заряд; N — число электронов в отрезке проводника; l — его длина.

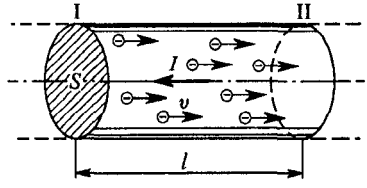


Рис. 20.1

Число свободных электронов в отрезке проводника объемом V можно выразить следующим образом:

$$N = nV = nlS, \tag{3}$$

где S — площадь сечения.

По условию задачи, $n = n'$. Следовательно,

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \rho}{M}, \tag{4}$$

где N_A — постоянная Авогадро; V_m — молярный объем металла; M — молярная масса металла; ρ — его плотность.

Подставив последовательно выражения n из формулы (4) в равенство (3) и N из формулы (3) в равенство (2), получим

$$I = \frac{N_A \rho l S e}{M t}.$$

Отсюда найдем

$$l = \frac{I M t}{N_A \rho S e}.$$

Подставив выражение l в формулу (1), сократив на t и выразив площадь S сечения проводника через диаметр d, найдем среднюю скорость направленного движения электронов:

$$\langle v \rangle = \frac{4IM}{\pi d^2 N_A \rho e}.$$

Произведем по этой формуле вычисления:

$$\langle v\rangle = \frac{4\cdot 16\cdot 56\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot(0{,}6\cdot 10^{-3})^2\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 98\cdot 10^{-9}}\times$$

$$\times\frac{1}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \frac{\text{А}\cdot(\text{кг/моль})}{\text{м}^2\cdot\text{моль}^{-1}\cdot(\text{кг/м}^3)\cdot\text{Кл}} = 4{,}20\cdot 10^{-3}\ \text{м/с} = 4{,}20\ \text{мм/с}.$$

Пример 2. В цепь источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6\,\text{В}$ включен резистор сопротивлением $R = 80\,\text{Ом}$. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2\,\text{мм}^2$; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время $t = 1\,\text{с}$. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Решение. 1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока I к площади поперечного сечения провода:

$$j = \frac{I}{S}. \tag{5}$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_1 + r_i}, \tag{6}$$

где R — сопротивление резистора; R_1 — сопротивление соединительных проводов; r_i — внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r_i из (6), получим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Подставив это выражение силы тока в (5), найдем

$$j = \frac{\mathcal{E}}{RS}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$j = \frac{6}{80\cdot 2\cdot 10^{-6}}\ \frac{\text{В}}{\text{Ом}\cdot\text{м}^2} = 3{,}75\cdot 10^4\ \text{А/м}^2.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд Q, протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд:

$$N = \frac{Q}{e},$$

или с учетом того, что $Q = It$ и $I = \mathcal{E}/R$,

$$N = \frac{\mathcal{E}t}{eR}.$$

Произведем по этой формуле вычисления:

$$\langle v\rangle = \frac{4\cdot 16\cdot 56\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot(0{,}6\cdot 10^{-3})^2\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 98\cdot 10^{-9}}\times$$

$$\times\frac{1}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \frac{\text{А}\cdot(\text{кг/моль})}{\text{м}^2\cdot\text{моль}^{-1}\cdot(\text{кг/м}^3)\cdot\text{Кл}} = 4{,}20\cdot 10^{-3}\ \text{м/с} = 4{,}20\ \text{мм/с}.$$

Пример 2. В цепь источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6\,\text{В}$ включен резистор сопротивлением $R = 80\,\text{Ом}$. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2\,\text{мм}^2$; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время $t = 1\,\text{с}$. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Решение. 1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока I к площади поперечного сечения провода:

$$j = \frac{I}{S}. \tag{5}$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_1 + r_i}, \tag{6}$$

где R — сопротивление резистора; R_1 — сопротивление соединительных проводов; r_i — внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r_i из (6), получим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Подставив это выражение силы тока в (5), найдем

$$j = \frac{\mathcal{E}}{RS}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$j = \frac{6}{80\cdot 2\cdot 10^{-6}}\ \frac{\text{В}}{\text{Ом}\cdot\text{м}^2} = 3{,}75\cdot 10^4\ \text{А/м}^2.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд Q, протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд:

$$N = \frac{Q}{e},$$

или с учетом того, что $Q = It$ и $I = \mathcal{E}/R$,

$$N = \frac{\mathcal{E}t}{eR}.$$

Подставим сюда числовые значения величин и вычислим (элементарный заряд возьмем из табл. 24: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл):

$$N = \frac{6 \cdot 1}{80 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Ом}} = 4{,}69 \cdot 10^{17} \text{ электронов.}$$

Пример 3. Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем $V = 375\,\text{см}^3$ и заполнено водородом, который частично ионизирован. Площадь пластин конденсатора $S = 250\,\text{см}^2$. При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока I, протекающего через конденсатор, достигнет значения 2 мкА, если концентрация n ионов обоих знаков в газе равна $5{,}3 \cdot 10^7\,\text{см}^{-3}$? Принять подвижность ионов $b_+ = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, $b_- = 7{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Решение. Напряжение U на пластинах конденсатора связано с напряженностью E электрического поля между пластинами и расстоянием d между ними соотношением

$$U = Ed. \tag{7}$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения плотности тока

$$j = Qn(b_+ + b_-)E,$$

где Q — заряд иона.

Отсюда

$$E = \frac{j}{Qn(b_+ + b_-)} = \frac{I}{Qn(b_+ + b_-)S}.$$

Расстояние d между пластинами, входящее в формулу (7), найдем из соотношения

$$d = \frac{V}{S}.$$

Подставив выражения E и d в (7), получим

$$U = \frac{IV}{Qn(b_+ + b_-)S^2}. \tag{8}$$

Проверим, дает ли правая часть полученной расчетной формулы единицу напряжения:

$$\frac{[I][V]}{[Q][n][b][S^2]} = \frac{1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м}^3}{1\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{м}^{-3}\left[1\ \text{м}^2/(\text{с} \cdot \text{В})\right]\ \text{м}^4} =$$

$$= \frac{1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м}^6 \cdot 1\ \text{с} \cdot 1\ \text{В}}{1\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{м}^6} = \frac{1\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{В}}{1\ \text{Кл}} = 1\ \text{В}.$$

Подставим в формулу (8) значения величин и произведем вычисления:

$$U = 110\ \text{В}.$$

Пример 4. Определить скорость u (мкм/ч), с которой растет слой никеля на плоской поверхности металла при электролизе, если плотность тока j, протекающего через электролит, равна 30 А/м. Никель считать двухвалентным.

Решение. Для решения задачи воспользуемся объединенным законом Фарадея

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{Z}It. \tag{9}$$

Будем считать, что электролитическое осаждение никеля идет равномерно по всей поверхности металла. Тогда массу m выделившегося за время t никеля можно выразить через плотность ρ, площадь S поверхности металла и толщину h слоя никеля:

$$m = \rho Sh. \tag{10}$$

Силу тока I выразим через плотность тока и площадь поверхности металла:

$$I = jS. \tag{11}$$

Подставив в формулу (9) выражения для массы (10) и силы тока (11), получим

$$\rho h = \frac{1}{F}\frac{M}{Z}jt. \tag{12}$$

При неизменной плотности тока нарастание слоя никеля будет происходить с постоянной скоростью u, определяемой отношением толщины слоя, наращенного за некоторый интервал времени, к этому интервалу ($u = h/t$). Тогда из формулы (12) следует

$$u = \frac{1}{F}\frac{Mj}{Z\rho}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу скорости:

$$\frac{[M][j]}{[F][\rho]} = \frac{1\ \text{кг/моль} \cdot 1\ \text{А/м}^2}{1\ \text{Кл/моль} \cdot 1\ \text{кг/м}^3} = \frac{1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м}}{1\ \text{Кл}} = \frac{1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м}}{1\ \text{А/с}} = 1\ \text{м/с}.$$

При этом было учтено, что валентность Z величина неименованная (безразмерная).

Выпишем значения величин, выразив их в единицах СИ: $F = 9{,}65 \times \times 10^4$ Кл/моль (см. табл. 24), $M = 58{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (см. Периодическую систему элементов Д. И. Менделеева на форзаце), $Z = 2$, $j = 30$ А/м^2, $\rho = 8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 (см. табл. 9).

Подставим числовые значения и произведем вычисления:

$$u = 1{,}04 \cdot 10^{-9}\ \text{м/с}.$$

ЗАДАЧИ

Ток в металлах

20.1. Сила тока I в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение S проводника 4 мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ свободных электронов, определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ их упорядоченного движения.

20.2. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока $I = 10$ А и сечении S проводника, равном 1 мм^2. Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости.

20.3. Плотность тока j в алюминиевом проводе равна 1 А/мм^2. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 см^3 алюминия равно числу атомов.

20.4. Плотность тока j в медном проводнике равна 3 А/мм^2. Найти напряженность E электрического поля в проводнике.

20.5. В медном проводнике длиной $l = 2$ м и площадью S поперечного сечения, равной 0,4 мм^2, идет ток. При этом ежесекундно выделяется количество теплоты $Q = 0{,}35$ Дж. Сколько электронов N проходит за 1 с через поперечное сечение этого проводника?

20.6. В медном проводнике объемом $V = 6$ см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время $t = 1$ мин выделилось количество теплоты $Q = 216$ Дж. Вычислить напряженность E электрического поля в проводнике.

Классическая теория электропроводности металлов

20.7. Металлический проводник движется с ускорением $a = 100$ м/с^2. Используя модель свободных электронов, определить напряженность E электрического поля в проводнике.

20.8. Медный диск радиусом $R = 0{,}5$ м равномерно вращается ($\omega = 10^4$ рад/с) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциала U между центром диска и его крайними точками.

20.9. Металлический стержень движется вдоль своей оси со скоростью $v = 200$ м/с. Определить заряд Q, который протечет через гальванометр, подключаемый к концам стержня, при резком его торможении, если длина l стержня равна 10 м, а сопротивление R всей цепи (включая цепь гальванометра) равно 10 мОм.

20.10. Удельная проводимость γ металла равна 10^7 См/м. Вычислить среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега электронов в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{28} м$^{-3}$.

Среднюю скорость u хаотического движения электронов принять равной 10^6 м/с.

20.11. Исходя из модели свободных электронов, определить число z соударений, которые испытывает электрон за время $t = 1$ с, находясь в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{29} м$^{-3}$. Удельную проводимость γ металла принять равной 10^7 См/м.

20.12. Исходя из классической теории электропроводности металлов, определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ электронов в металле, если отношение λ/γ теплопроводности к удельной проводимости равно $6{,}7 \cdot 10^{-6}$ В^2/К.

20.13. Определить объемную плотность тепловой мощности w в металлическом проводнике, если плотность тока $j = 10$ А/мм^2. Напряженность E электрического поля в проводнике равна 1 мВ/м.

20.14. Термопара медь–константан с сопротивлением $R_1 = 5$ Ом присоединена к гальванометру, сопротивление R_2 которого равно 100 Ом. Один спай термопары погружен в тающий лед, другой — в горячую жидкость. Сила тока I в цепи равна 37 мкА. Постоянная термопары $k = 43$ мкВ/К. Определить температуру t жидкости.

20.15. Сила тока I в цепи, состоящей из термопары с сопротивлением $R_1 = 4$ Ом и гальванометра с сопротивлением $R_3 = 80$ Ом, равна 26 мкА при разности температур Δt спаев, равной 50 °С. Определить постоянную k термопары.

Ток в жидкостях

20.16. При силе тока $I = 5$ А за время $t = 10$ мин в электролитической ванне выделилось $m = 1{,}02$ г двухвалентного металла. Определить его относительную атомную массу A_r.

20.17. Две электролитические ванны соединены последовательно. В первой ванне выделилось $m_1 = 3{,}9$ г цинка, во второй за то же время $m_2 = 2{,}24$ г железа. Цинк двухвалентен. Определить валентность железа.

20.18. Электролитическая ванна с раствором медного купороса присоединена к батарее аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Определить массу m меди, выделившейся при электролизе за время $t = 10$ мин, если ЭДС поляризации $\mathcal{E}_\text{п} = 1{,}5$ В и сопротивление R раствора равно 0,5 Ом. Медь двухвалентна.

20.19. Определить толщину h слоя меди, выделившейся за время $t = 5$ ч при электролизе медного купороса, если плотность тока $j = 80$ А/м^2.

20.20. Сила тока, проходящего через электролитическую ванну с раствором медного купороса, равномерно возрастает в течение

времени $\Delta t = 20\,\text{с}$ от $I_0 = 0$ до $I = 2\,\text{А}$. Найти массу m меди, выделившейся за это время на катоде ванны.

20.21. В электролитической ванне через раствор прошел заряд $Q = 193\,\text{кКл}$. При этом на катоде выделился металл количеством вещества $\nu = 1\,\text{моль}$. Определить валентность Z металла.

20.22. Определить количество вещества ν и число атомов N двухвалентного металла, отложившегося на катоде электролитической ванны, если через раствор в течение времени $t = 5\,\text{мин}$ шел ток силой $I = 2\,\text{А}$.

20.23. Сколько атомов двухвалентного металла выделится на $1\,\text{см}^2$ поверхности электрода за время $t = 5\,\text{мин}$ при плотности тока $j = 10\,\text{А/м}^2$?

Ток в газах

20.24. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{Дж}$. Определить потенциал ионизации U_i водорода.

20.25. Какой наименьшей скоростью $v_{\min}$ должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом азота, если потенциал ионизации U_i азота равен 14,5 В?

20.26. Какова должна быть температура T атомарного водорода, чтобы средняя кинетическая энергия поступательного движения атомов была достаточна для ионизации путем соударений? Потенциал ионизации U_1 атомарного водорода равен 13,6 В.

20.27. Посередине между электродами ионизационной камеры пролетела α-частица, двигаясь параллельно электродам, и образовала на своем пути цепочку ионов. Спустя какое время после пролета α-частицы ионы дойдут до электродов, если расстояние d между электродами равно 4 см, разность потенциалов $U = 5\,\text{кВ}$ и подвижность ионов обоих знаков в среднем $b = 2\,\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$?

20.28. Азот ионизируется рентгеновским излучением. Определить проводимость G азота, если в каждом кубическом сантиметре газа находится в условиях равновесия $n_0 = 10^7$ пар ионов. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1{,}27\,\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и отрицательных $b_- = 1{,}81\,\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

20.29. Воздух между плоскими электродами ионизационной камеры ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока I, текущего через камеру, равна 1,2 мкА. Площадь S каждого электрода равна $300\,\text{см}^2$, расстояние между ними $d = 2\,\text{см}$, разность потенциалов $U = 100$ В. Найти концентрацию n пар ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1{,}4\,\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и отрицательных $b_- = 1{,}9\,\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Заряд каждого иона равен элементарному заряду.

20.30. Объем V газа, заключенного между электродами ионизационной камеры, равен 0,5 л. Газ ионизируется рентгеновским

излучением. Сила тока насыщения $I_{\text{нас}} = 4\,\text{нА}$. Сколько пар ионов образуется в 1 с в $1\,\text{см}^3$ газа? Заряд каждого иона равен элементарному заряду.

20.31. Найти силу тока насыщения между пластинами конденсатора, если под действием ионизатора в каждом кубическом сантиметре пространства между пластинами конденсатора ежесекундно образуется $n_0 = 10^8$ пар ионов, каждый из которых несет один элементарный заряд. Расстояние d между пластинами конденсатора равно 1 см, площадь S пластины равна $100\,\text{см}^2$.

20.32. В ионизационной камере, расстояние d между плоскими электродами которой равно 5 см, проходит ток насыщения плотностью $j = 16\,\text{мкА/м}^2$. Определить число n пар ионов, образующихся в каждом кубическом сантиметре пространства камеры в 1 с.

Глава 5
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§ 21. Магнитное поле постоянного тока

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Закон Био–Савара–Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]\frac{I}{r^3},$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника с током; μ — магнитная проницаемость; μ_0 — магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м); $d\mathbf{l}$ — вектор, равный по модулю длине dl проводника и совпадающий по направлению с током (элемент проводника); I — сила тока; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, магнитная индукция в которой определяется.

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ выражается формулой

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{I \sin\alpha}{r^2}\,dl,$$

где α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

• Магнитная индукция $\mathbf{B}$ связана с напряженностью $\mathbf{H}$ магнитного поля (в случае однородной, изотропной среды) соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$$

или в вакууме

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}.$$

• Магнитная индукция в центре кругового проводника (витка) с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2}\frac{I}{R},$$

где R — радиус витка.

• Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

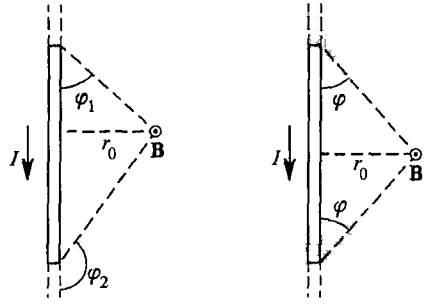
$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi}\frac{I}{r_0},$$

где r_0 — расстояние от оси проводника.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Обозначения ясны из рис. 21.1*а*. Вектор индукции $\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости чертежа, направлен к нам и поэтому изображен точкой.



а *б*

Рис. 21.1

При симметричном расположении концов проводника относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис. 21.1*б*), $-\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi$ и, следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\varphi.$$

• Магнитная индукция поля, создаваемого соленоидом в средней его части (или тороида на его оси),

$$B = \mu_0 \mu n I,$$

где n — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I — сила тока в одном витке.

• Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция B результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{B}_n$ складываемых полей, т. е.

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i.$$

В частном случае наложения двух полей

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

а модуль магнитной продукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha},$$

где α — угол между векторами $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$.

• Магнитная индукция поля, создаваемого движущимся точечным зарядом Q в вакууме

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q[\mathbf{vr}]}{r^3}, \quad \text{или} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\alpha,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость движущегося заряда; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный от заряда к точке, в которой определяется магнитная индукция $\mathbf{B}$; α — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи $I = 60\,\text{А}$, расположены на расстоянии $d = 10\,\text{см}$ друг от друга. Определить магнитную индукцию B в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии $r_1 = 5\,\text{см}$ и от другого — на расстоянии $r_2 = 12\,\text{см}$.

Решение. Для нахождения магнитной индукции в указанной точке A (рис. 21.2) определим направления векторов индукций $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически, т. е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Модуль индукции найдем по теореме косинусов:

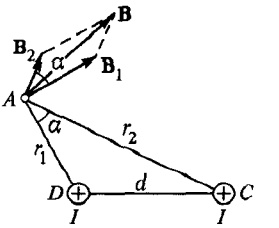


Рис. 21.2

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Значения индукций B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от провода до точки, индукцию в которой мы вычисляем: $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$, $B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$. Подставляя B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу магнитной индукции (Тл):

$$\frac{[\mu_0][I]}{[r^2]^{1/2}} = \frac{1\,\text{Гн/м}\cdot 1\,\text{А}}{1\,\text{м}} = \frac{1\,\text{Гн}\cdot(1\,\text{А})^2}{1\,\text{А}\cdot(1\,\text{м})^2} = \frac{1\,\text{Дж}}{1\,\text{А}\cdot(1\,\text{м})^2} = \frac{1\,\text{Н}}{1\,\text{А}\cdot 1\,\text{м}} = 1\,\text{Тл}.$$

Здесь мы воспользовались определяющей формулой для магнитной индукции ($B = \mathcal{M}_{\max}/p_n$), откуда следует, что

$$1\,\text{Тл} = \frac{1\,\text{Н}\cdot 1\,\text{м}}{1\,\text{А}\cdot(1\,\text{м})^2} = \frac{1\,\text{Н}}{1\,\text{А}\cdot 1\,\text{м}}.$$

Вычисляем $\cos\alpha$. Заметим, что $\alpha = \angle DAC$. Поэтому по теореме косинусов запишем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha$, где d — расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}.$$

Подставив данные, вычислим значение косинуса:

$$\cos\alpha = 0{,}576.$$

Подставив в формулу (2) значения μ_0, I, r_1, r_2 и $\cos\alpha$, найдем

$$B = 286 \text{ мкТл}.$$

Пример 2. По двум длинным прямолинейным проводам, находящимся на расстоянии $r = 5$ см друг от друга в воздухе, текут токи $I = 10$ А каждый. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого токами в точке, лежащей посередине между проводами, для случаев: 1) провода параллельны, токи текут в одном направлении (рис. 21.3*а*);

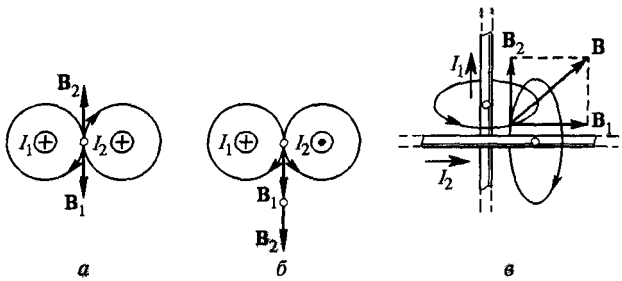


Рис. 21.3

2) провода параллельны, токи текут в противоположных направлениях (рис. 21.3*б*); 3) провода перпендикулярны, направление токов указано на рис. 21.3*в*.

Решение. Результирующая индукция магнитного поля равна векторной сумме: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$ — индукция поля, создаваемого током I_1; $\mathbf{B}_2$ — индукция поля, создаваемого током I_2.

Если $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ направлены по одной прямой, то векторная сумма может быть заменена алгебраической суммой:

$$B = B_1 + B_2. \tag{3}$$

При этом слагаемые B_1 и B_2 должны быть взяты с соответствующими знаками.

В данной задаче во всех трех случаях модули индукций B_1 и B_2 одинаковы, так как точки выбраны на равных расстояниях от проводов, по которым текут равные токи. Вычислим эти индукции по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{4}$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем модули B_1 и B_2:

$$B_1 = B_2 = 80 \text{ мкТл}.$$

1-*й случай.* Векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ направлены по одной прямой (рис. 21.3*а*); следовательно, результирующая индукция $\mathbf{B}$ определяется по формуле (3). Приняв направление вверх положительным, вниз — отрицательным, запишем: $B_1 = -80$ мкТл, $B_2 = 80$ мкТл. Подставив в формулу (3) эти значения B_1 и B_2, получим

$$B = B_1 + B_2 = 0.$$

2-*й случай.* Векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ направлены по одной прямой в одну сторону (рис. 21.3*б*). Поэтому можем записать

$$B_1 = B_2 = -80 \text{ мкТл}.$$

Подставив в формулу (3) значения B_1 и B_2, получим

$$B = B_1 + B_2 = -160 \text{ мкТл}.$$

3-*й случай.* Векторы индукций магнитных полей, создаваемых токами в точке, лежащей посередине между проводами, взаимно перпендикулярны (рис. 21.3*в*). Результирующая индукция по модулю и направлению является диагональю квадрата, построенного на векторах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$. По теореме Пифагора найдем

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}. \qquad (5)$$

Подставив в формулу (5) значения B_1 и B_2 и вычислив, получим

$$B = 113 \text{ мкТл}.$$

Пример 3. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного прямого провода, в точке, равноудаленной от концов отрезка и находящейся на расстоянии $r_0 = 20$ см от середины его (рис. 21.4). Сила тока I, текущего по проводу, равна 30 А, длина l отрезка равна 60 см.

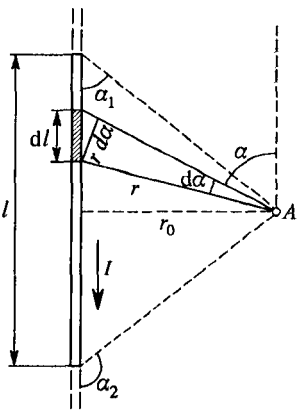


Рис. 21.4

Решение. Для определения магнитной индукции поля, создаваемого отрезком провода, воспользуемся законом Био–Савара–Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2}\, dl. \qquad (6)$$

Прежде чем интегрировать выражение (6), преобразуем его так, чтобы можно было интегрировать по углу α. Выразим длину элемента dl

проводника через $\mathrm{d}\alpha$. Согласно рис. 21.4, запишем $\mathrm{d}l = \dfrac{r\,\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha}$. Подставим это выражение $\mathrm{d}l$ в формулу (6):

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \sin\alpha \cdot r\,\mathrm{d}\alpha}{4\pi r^2 \sin\alpha} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\alpha}{4\pi r}.$$

Но r — величина переменная, зависящая от α и равная $r = \dfrac{r_0}{\sin\alpha}$. Подставив r в предыдущую формулу, найдем

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{7}$$

Чтобы определить магнитную индукцию поля, создаваемого отрезком проводника, проинтегрируем выражение (7) в пределах от α_1 до α_2:

$$\mathrm{d}B = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \tag{8}$$

Заметим, что при симметричном расположении точки A относительно отрезка провода $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$. С учетом этого формула (8) примет вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\alpha_1. \tag{9}$$

Из рис. 21.4 следует $\cos\alpha_1 = \dfrac{l/2}{\sqrt{l^2/4 + r_0^2}} = \dfrac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$. Подставив выражение $\cos\alpha_1$ в формулу (9), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}. \tag{10}$$

Подставим числовые значения в формулу (10) и произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 30}{2\cdot\pi\cdot 0{,}2}\frac{0{,}6}{\sqrt{4\cdot(0{,}2)^2 + (0{,}6)^2}}\frac{(\text{Гн/м})\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}^2} =$$

$$= 2{,}49\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = 24{,}9\ \text{мкТл}.$$

Пример 4. Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут под углом $\alpha = 2\pi/3$. Определить магнитную индукцию $\mathbf{B}$ в точке A (рис. 21.5). Расстояние $d = 5$ см.

Решение. Изогнутый провод можно рассматривать как два длинных провода, концы которых соединены в точке O. В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция $\mathbf{B}$ в точке A будет равна геометрической сумме магнитных индукций $\mathbf{B}_1$ и

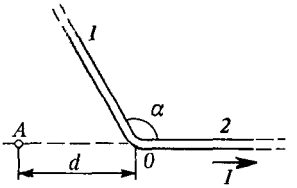


Рис. 21.5

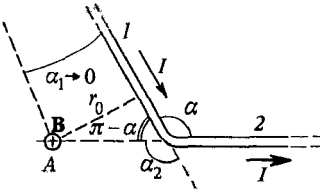


Рис. 21.06

$\mathbf{B}_2$ полей, создаваемых отрезками длинных проводов *1* и *2*, т.е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Магнитная индукция $\mathbf{B}_2$ равна нулю. Это следует из закона Био–Савара–Лапласа, согласно которому в точках, лежащих на оси проводника, $d\mathbf{B} = 0$ ($[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}] = 0$).

Магнитную индукцию $\mathbf{B}_1$ найдем, воспользовавшись формулой (8), полученной в примере 3:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

где r_0 — кратчайшее расстояние от проводника *1* до точки A (рис. 21.6).

В нашем случае $\alpha_1 \to 0$ (проводник длинный; $\cos\alpha_1 = 1$), $\alpha_2 = \alpha = 2\pi/3$ ($\cos\alpha_2 = \cos(2\pi/3) = -1/2$). Расстояние $r_0 = d\sin(\pi - \alpha) = d\sin(\pi/3) = d\sqrt{3}/2$. Тогда магнитная индукция

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d\sqrt{3}/2}\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Так как $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ ($\mathbf{B}_2 = 0$), то

$$B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi d}.$$

Вектор $\mathbf{B}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{B}_1$ и определяется правилом правого винта. На рис. 21.6 это направление отмечено значком $\times$ (перпендикулярно плоскости чертежа от нас).

Проверка единиц аналогична выполненной в примере 1.

Произведем вычисления:

$$B = \frac{\sqrt{3}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50}{4\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}}\ \frac{(\text{Гн/м})\cdot \text{А}}{\text{м}} = 3{,}46\cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 34{,}6\ \text{мкТл}.$$

Пример 5. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 10\,\text{см}$ течет ток $I = 80\,\text{А}$. Найти магнитную индукцию $\mathbf{B}$ в точке A, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20\,\text{см}$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом Био–Савара–Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3},$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого элементом тока $I d\mathbf{l}$ в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

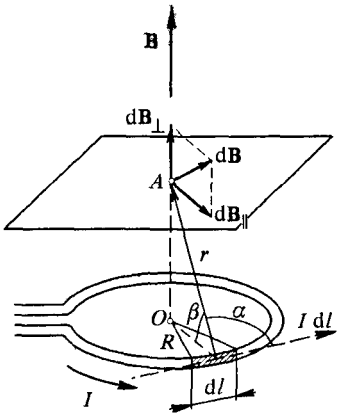


Рис. 21.7

Выделим на кольце элемент $d\mathbf{l}$ и от него в точку A проведем радиус-вектор $\mathbf{r}$ (рис. 21.7). Вектор $d\mathbf{B}$ направим в соответствии с правилом буравчика.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция $\mathbf{B}$ в точке A определяется интегралом

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B},$$

где интегрирование ведется по всем элементам $d\mathbf{l}$ кольца.

Разложим вектор $d\mathbf{B}$ на две составляющие: $d\mathbf{B}_\perp$ — перпендикулярную плоскости кольца и $d\mathbf{B}_\parallel$ — параллельную плоскости кольца, т. е. $d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_\perp + d\mathbf{B}_\parallel$. Тогда $\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B}_\perp + \int_L d\mathbf{B}_\parallel$.

Заметив, что $\int_L d\mathbf{B}_\parallel = 0$ из соображений симметрии и что векторы $d\mathbf{B}_\perp$ от различных элементов $d\mathbf{l}$ сонаправлены, заменим векторное суммирование (интегрирование) скалярным:

$$B = \int_L dB_\perp,$$

где $dB_\perp = dB\cos\beta$ и $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I dl}{r^2}$ (поскольку $d\mathbf{l}$ перпендикулярен $\mathbf{r}$ и, следовательно, $\sin\alpha = 1$). Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\cos\beta\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I\cos\beta\cdot 2\pi R}{4\pi r^2}.$$

После сокращения на 2π и замены $\cos\beta$ на R/r (рис. 21.7) получим

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}.$$

Выразим все величины в единицах СИ, произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot (0{,}1)^2}{2 \cdot (0{,}2)^3} \frac{(\text{Гн/м}) \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3} = 6{,}28 \cdot 10^{-5} \text{ Тл},$$

или $B = 62{,}8$ мкТл.

Вектор $\mathbf{B}$ направлен по оси кольца (штриховая стрелка на рис. 21.7) в соответствии с правилом буравчика.

Пример 6. Бесконечно длинный проводник изогнут так, как это изображено на рис. 21.8. Радиус дуги окружности $R = 10$ см. Определить магнитную индукцию $\mathbf{B}$ поля, создаваемого в точке O током $I = 80$ А, текущим по этому проводнику.

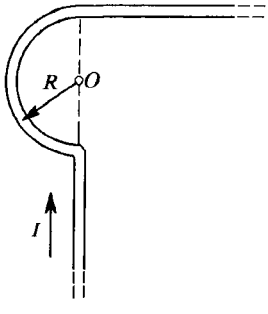


Рис. 21.8

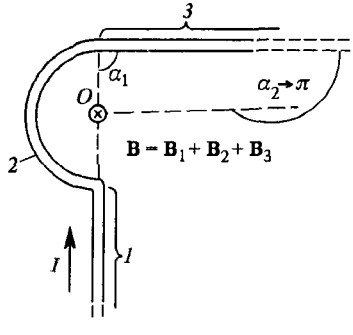


Рис. 21.9

Решение. Магнитную индукцию $\mathbf{B}$ в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей $\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i$. В нашем случае проводник можно разбить на три части (рис. 21.9): два прямолинейных проводника (*1* и *3*), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (*2*) радиуса R. Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3,$$

где $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}_3$ — магнитные индукции поля в точке O, создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках проводника.

Так как точка O лежит на оси проводника *1*, то $B_1 = 0$ и тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}_3$ направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости чертежа от нас, геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

Магнитную индукцию поля B_2 можно найти, используя выражение для магнитной индукции в центре кругового проводника с током I:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Так как магнитная индукция B_2 создается в точке O половиной такого кругового проводника с током, то, учитывая равный вклад в магнитную индукцию от каждой половинки проводника, можно написать

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, используя формулу (8) примера 3:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

В нашем случае $r_0 = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ $(\cos\alpha_1 = 0)$, $\alpha_2 \to \pi$ $(\cos\alpha_2 = -1)$. Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Используя найденные выражения для B_2 и B_3, получим

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 1).$$

Произведем вычисления:

$$B = 3{,}31 \cdot 10^{-4}\ \text{Тл} = 331\ \text{мкТл}.$$

ЗАДАЧИ

Связь между напряженностью и индукцией магнитного поля в вакууме

21.1. Напряженность H магнитного поля равна 79,6 кА/м. Определить магнитную индукцию B_0 этого поля в вакууме.

21.2. Магнитная индукция B поля в вакууме равна 10 мТл. Найти напряженность H магнитного поля.

21.3. Вычислить напряженность H магнитного поля, если его индукция в вакууме $B_0 = 0{,}05$ Тл.

Поле кругового тока и соленоида

21.4. Найти магнитную индукцию в центре тонкого кольца, по которому идет ток $I = 10$ А. Радиус R кольца равен 5 см.

21.5. По обмотке очень короткой катушки радиусом $R = 16$ см течет ток $I = 5$ А. Сколько витков N проволоки намотано на катушку, если напряженность H магнитного поля в ее центре равна 800 А/м?

21.6. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка радиусом $R = 8$ см равна 30 А/м. Определить напряженность H_1 поля витка в точке, расположенной на расстоянии $d = 6$ см от центра витка.

21.7. При какой силе тока I, текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 0{,}2$ м, магнитная индукция B в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 0{,}3$ м, станет равной 20 мкТл?

21.8. По проводнику в виде тонкого кольца радиусом $R = 10$ см течет ток. Чему равна сила тока I, если магнитная индукция B поля в точке A (рис. 21.10) равна 1 мкТл? Угол $\beta = 10°$.

21.9. Катушка длиной $l = 20$ см содержит $N = 100$ витков. По обмотке катушки идет ток $I = 5$ А. Диаметр d катушки равен 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии $a = 10$ см от ее конца.

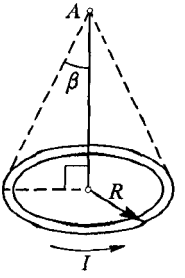


Рис. 21.10

21.10. Длинный прямой соленоид из проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм намотан так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какова напряженность H магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 4$ А? Толщиной изоляции пренебречь.

21.11. Обмотка катушки диаметром $d = 10$ см состоит из плотно прилегающих друг к другу витков тонкой проволоки. Определить минимальную длину $l_{\min}$ катушки, при которой магнитная индукция в середине ее отличается от магнитной индукции бесконечного соленоида, содержащего такое же количество витков на единицу длины, не более чем на 0,5%. Сила тока, протекающего по обмотке, в обоих случаях одинакова.

21.12. Обмотка соленоида выполнена тонким проводом с плотно прилегающими друг к другу витками. Длина l катушки равна 1 м, ее диаметр $d = 2$ см. По обмотке идет ток. Вычислить размеры участка на осевой линии, в пределах которого магнитная индукция может быть вычислена по формуле бесконечного соленоида с погрешностью, не превышающей 0,1%.

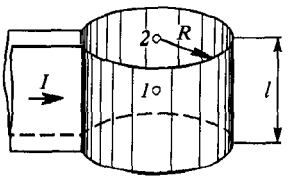


Рис. 21.11

21.13. Тонкая лента шириной $l = 40$ см свернута в трубку радиусом $R = 30$ см. По ленте течет равномерно распределенный по ее ширине ток $I = 200$ А (рис. 21.11). Определить магнитную индукцию B на оси трубки в двух точках: 1) в средней точке; 2) в точке, совпадающей с концом трубки.

Поле прямого тока

21.14. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I = 50$ А. Определить магнитную индукцию B в точке, удаленной на расстояние $r = 5$ см от проводника.

21.15. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии $r = 5$ см один от другого. По проводам текут в противоположных направлениях одинаковые токи $I = 10$ А каждый. Найти напряженность H магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 2$ см от одного и $r_2 = 3$ см от другого провода.

21.16. Расстояние d между двумя длинными параллельными проводами равно 5 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи $I = 30$ А каждый. Найти напряженность H магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 4$ см от одного и $r_2 = 3$ см от другого провода.

21.17. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А в противоположных направлениях. Расстояние d между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = 25$ см от первого и на $r_2 = 40$ см от второго провода.

21.18. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А в одном направлении. Расстояние d между проводами равно 10 см. Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние $r = 10$ см.

21.19. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом (рис. 21.12). По проводам текут токи $I_1 = 80$ А и $I_2 = 60$ А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников.

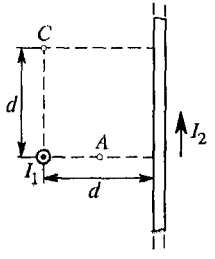


Рис. 21.12

21.20. По двум бесконечно длинным прямым проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи $I_1 = 30$ А и $I_2 = 40$ А. Расстояние d между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке C (рис. 21.12), одинаково удаленной от обоих проводов на расстояние, равное d.

21.21. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводнику течет ток $I = 20$ А. Какова магнитная индукция B в точке A (рис. 21.13), если $r = 5$ см?

21.22. По бесконечно длинному прямому проводу, изогнутому так, как это показано на рис. 21.14, течет ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию B в точке O, если $r = 10$ см.

21.23. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток $I = 100$ А. Вычислить магнитную

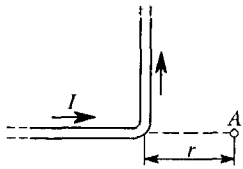


Рис. 21.13

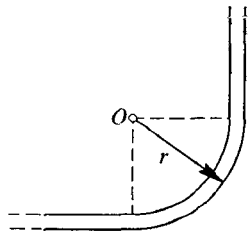


Рис. 21.14

индукцию B в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на $a = 10$ см.

21.24. По бесконечно длинному прямому проводу, согнутому под углом $\alpha = 120°$, течет ток $I = 50$ А. Найти магнитную индукцию B в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины его на расстояние $a = 5$ см.

21.25. По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток $I = 40$ А. Длина a стороны треугольника равна 30 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения высот.

21.26. По контуру в виде квадрата идет ток $I = 50$ А. Длина a стороны квадрата равна 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

21.27. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток $I = 60$ А. Длины сторон прямоугольника равны $a = 30$ см и $b = 40$ см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

21.28. Тонкий провод изогнут в виде правильного шестиугольника. Длина d стороны шестиугольника равна 10 см. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника, если по проводу течет ток $I = 25$ А.

21.29. По проводу, согнутому в виде правильного шестиугольника с длиной a стороны, равной 20 см, течет ток $I = 100$ А. Найти напряженность H магнитного поля в центре шестиугольника. Для сравнения определить напряженность H_0 поля в центре кругового провода, совпадающего с окружностью, описанной около данного шестиугольника.

21.30. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

21.31. Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 50$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10$ см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током, в случаях *а–е*, изображенных на рис. 21.15.

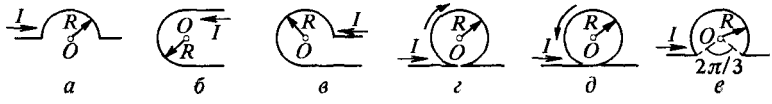


Рис. 21.15

21.32. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого

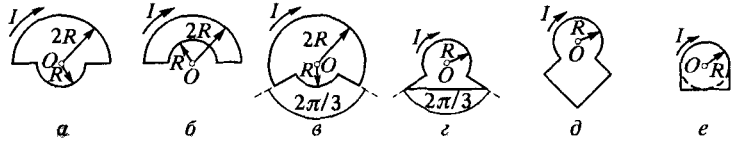


Рис. 21.16

этим током в точке O, в случаях *а*–*е*, изображенных на рис. 21.16. Радиус R изогнутой части контура равен 20 см.

Поле движущегося заряда

21.33. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом $r = 53$ пм. Вычислить силу эквивалентного кругового тока I и напряженность H поля в центре окружности.

21.34. Определить максимальную магнитную индукцию B_{max} поля, создаваемого электроном, движущимся прямолинейно со скоростью $v = 10^7$ м/с, в точке, отстоящей от траектории на расстоянии $d = 1$ нм.

21.35. На расстоянии $r = 10$ нм от траектории прямолинейно движущегося электрона максимальное значение магнитной индукции $B_{max} = 160$ мкТл. Определить скорость v электрона.

§ 22. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Закон Ампера. Сила, действующая на элемент dl проводника с током I в магнитном поле,

$$\mathbf{F} = I[\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}], \quad \text{или} \quad \mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами dl и **B**.

В случае однородного магнитного поля и прямолинейного отрезка проводника

$$\mathbf{F} = I[\mathbf{l}\mathbf{B}], \quad \text{или} \quad F = IBl\sin\alpha.$$

• Магнитный момент контура с током

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{n}IS,$$

где $\mathbf{n}S$ — вектор, равный по модулю площади S, охватываемой контуром, и совпадающий по направлению с нормалью $\mathbf{n}$ к его плоскости.

• Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m\mathbf{B}].$$

Модуль механического момента

$$M = p_m B \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$.

• Потенциальная (механическая) энергия контура с током (магнитного диполя) в магнитном поле

$$\Pi_{\text{мех}} = -\mathbf{p}_m\mathbf{B} = -p_m B\cos\alpha.$$

• Сила F_x, действующая на контур с током (магнитный диполь) в неоднородном магнитном поле, обладающим осевой (вдоль оси Ox) симметрией,

$$F_x = p_m\frac{\partial B}{\partial x}\cos\alpha,$$

где $\dfrac{\partial B}{\partial x}$ — величина, характеризующая степень неоднородности магнитного поля вдоль оси Ox; α — угол между векторами $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$.

• Магнитная индукция поля, создаваемого точечным магнитным диполем (круговым током) на оси диполя,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_m}{r^3},$$

где r — расстояние от диполя до точки, в которой определяется магнитная индукция $\mathbf{B}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. По двум параллельным прямым проводам длиной $l = 2{,}5$ м каждый, находящимся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 1$ кА. Вычислить силу F взаимодействия токов.

Решение. Взаимодействие двух проводников, по которым текут токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой проводник. Предположим, что оба тока (обозначим их I_1 и I_2) текут в одном направлении.

Вычислим силу $F_{1,2}$, с которой магнитное поле, созданное током I_1, действует на проводник с током I_2. Для этого проведем магнитную си-

ловую линию так (штриховая линия на рис. 22.1), чтобы она касалась проводника с током I_2. По касательной к силовой линии проведем вектор

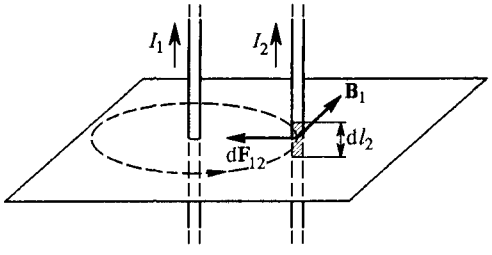


Рис. 22.1

магнитной индукции $\mathbf{B}_1$. Модуль магнитной индукции $\mathbf{B}_1$ определяется соотношением [1])

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \tag{1}$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент второго проводника с током I_2 длиной $\mathrm{d}l_2$ действует в магнитном поле сила

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_{1,2} = I_2 B_1 \,\mathrm{d}l_2 \,\sin(\widehat{\mathrm{d}\mathbf{l}_2\,\mathbf{B}_1}).$$

Так как отрезок $\mathrm{d}\mathbf{l}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{B}_1$, то

$$\sin(\widehat{\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}_1}) = 1$$

и тогда

$$\mathrm{d}F_{1,2} = I_2 B_1 \,\mathrm{d}l_2. \tag{2}$$

Подставив в выражение (2) B_1 из (1), получим

$$\mathrm{d}F_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\mathrm{d}l.$$

Силу $F_{1,2}$ взаимодействия [2]) проводников с током найдем интегрированием по всей длине второго проводника:

$$F_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\int_0^{l_2} \mathrm{d}l_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l_2.$$

---

[1]) Длинный проводник ($l \gg d$) можно приближенно рассматривать как бесконечно длинный.

[2]) По третьему закону Ньютона, сила, действующая на первый проводник со стороны второго, будет равна найденной по модулю и противоположна ей по направлению.

Заметив, что $I_1 = I_2 = I$ и $l_2 = l$, получим

$$F_{1,2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу силы (Н):

$$\frac{[\mu_0][I^2][l]}{[d]} = \frac{1\ \text{Гн/м} \cdot (1\ \text{А})^2 \cdot 1\ \text{м}}{1\ \text{м}} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{м}} = 1\ \text{Н}.$$

Произведем вычисления:

$$F_{1,2} = 2{,}5\ \text{Н}.$$

Сила $\mathbf{F}_{1,2}$ сонаправлена с силой $\mathrm{d}\mathbf{F}_{1,2}$ (рис. 22.1) и определяется (в данном случае это проще) правилом левой руки.

Пример 2. Провод в виде тонкого полукольца радиусом $R = 10\,\text{см}$ находится в однородном магнитном поле ($B = 50\,\text{мТл}$). По проводу течет ток $I = 10\,\text{А}$. Найти силу $\mathbf{F}$, действующую на провод, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

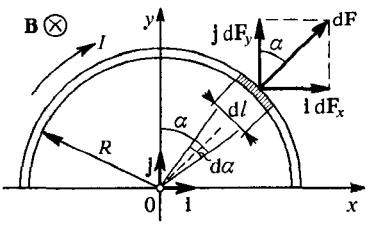


Рис. 22.2

Решение. Расположим провод в плоскости чертежа перпендикулярно линиям магнитной индукции (рис. 22.2) и выделим на нем малый элемент $\mathrm{d}l$ с током. На этот элемент тока $I\mathrm{d}l$ будет действовать по закону Ампера сила $\mathrm{d}\mathbf{F} = I[\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}]$. Направление этой силы можно определить по правилу векторного произведения или по правилу левой руки.

Используя симметрию, выберем координатные оси так, как это изображено на рис. 22.2. Силу $\mathrm{d}\mathbf{F}$ представим в виде

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}F_x + \mathbf{j}\,\mathrm{d}F_y,$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы (орты); $\mathrm{d}F_x$ и $\mathrm{d}F_y$ — проекции вектора $\mathrm{d}\mathbf{F}$ на координатные оси Ox и Oy.

Силу $\mathbf{F}$, действующую на весь провод, найдем интегрированием:

$$\mathbf{F} = \int\limits_L \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{i}\int\limits_L \mathrm{d}F_x + \mathbf{j}\int\limits_L \mathrm{d}F_y,$$

где символ L указывает на то, что интегрирование ведется по всей длине провода L.

Из соображений симметрии первый интеграл равен нулю $\left(\int\limits_L \mathrm{d}F_x = 0\right)$.

Тогда

$$\mathbf{F} = \mathbf{j}\int\limits_L \mathrm{d}F_y. \tag{3}$$

Из рис. 22.2 следует, что

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\alpha,$$

где $\mathrm{d}F$ — модуль вектора $\mathrm{d}\mathbf{F}$ ($\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l\,\sin(\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B})$). Так как вектор $\mathrm{d}\mathbf{l}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{B}$ $\left(\sin\left(\widehat{\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}}\right) = 1\right)$, то $\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l$. Выразив длину дуги $\mathrm{d}l$ через радиус R и угол α, получим

$$\mathrm{d}F = IBR\,\mathrm{d}\alpha.$$

Тогда

$$\mathrm{d}F_y = IBR\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Введем $\mathrm{d}F_y$ под интеграл соотношения (3) и проинтегрируем в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ (как это следует из рис. 22.2):

$$\mathbf{F} = \mathbf{j}IBR\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2\mathbf{j}IBR.$$

Из полученного выражения видно, что сила $\mathbf{F}$ сонаправлена с положительным направлением оси Oy (единичным вектором $\mathbf{j}$).

Найдем модуль силы $\mathbf{F}$:

$$F = |\mathbf{F}| = 2IBR.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу силы (Н):

$$[I][B][R] = 1\ \text{А}\cdot 1\ \text{Тл}\cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{А}\cdot\frac{1\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м}}{1\ \text{А}\cdot(1\ \text{м})^2}\cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{Н}.$$

Произведем вычисления:

$$F = 0{,}1\ \text{Н}.$$

Пример 3. На проволочный виток радиусом $r = 10$ см, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент $M_{\max} = 6{,}5$ мкН. Сила тока I в витке равна 2 А. Определить магнитную индукцию B поля между полюсами магнита. Действием магнитного поля Земли пренебречь.

Решение. Индукцию B магнитного поля можно определить из выражения механического момента, действующего на виток с током в магнитном поле,

$$M = p_m B\sin\alpha. \tag{4}$$

Если учесть, что максимальное значение механический момент принимает при $\alpha = \pi/2$ ($\sin\alpha = 1$), а также, что $p_m = IS$, то формула (4) примет вид

$$M_{\max} = IBS.$$

Отсюда, учитывая, что $S = \pi r^2$, находим

$$B = M_{\max}(\pi r^2 I). \tag{5}$$

Произведя вычисления по формуле (5), найдем

$$B = 104 \text{ мкТл}.$$

Пример 4. Квадратная рамка со стороной длиной $a = 2$ см, содержащая $N = 100$ витков тонкого провода, подвешена на упругой нити, постоянная кручения C которой равна 10 мкН · м/град. Плоскость рамки совпадает с направлением линии индукции внешнего магнитного поля. Определить индукцию внешнего магнитного поля, если при пропускании по рамке тока $I = 1$ А она повернулась на угол $\alpha = 60°$.

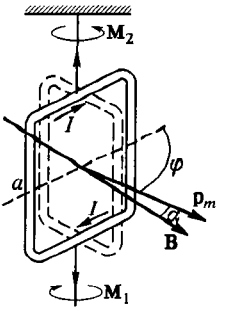


Рис. 22.3

Решение. Индукция B внешнего поля может быть найдена из условия равновесия рамки в поле. Рамка будет находиться в равновесии, если сумма механических моментов, действующих на нее, будет равна нулю:

$$\sum \mathbf{M} = 0. \tag{6}$$

В данном случае на рамку действуют два момента (рис. 22.3): $\mathbf{M}_1$ — момент сил, с которым внешнее магнитное поле действует на рамку с током, и $\mathbf{M}_2$ — момент упругих сил, возникающих при закручивании нити, на которой рамка подвешена. Следовательно, формула (6) может быть переписана в виде

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0.$$

Выразив M_1 и M_2 в этом равенстве через величины, от которых зависят моменты сил, получим

$$p_m B \sin\alpha - C\varphi = 0. \tag{7}$$

Знак минус перед моментом M_2 ставится потому, что этот момент противоположен по направлению моменту M_1.

Если учесть, что $p_m = ISN = Ia^2N$, где I — сила тока в рамке; $S = a^2$ — площадь рамки; N — число ее витков, равенство (7) перепишем в виде

$$NIa^2 B \sin\alpha - C\varphi = 0,$$

откуда

$$B = \frac{C\varphi}{NIa^2 \sin\alpha}. \tag{8}$$

Из рис. 22.3 видно, что $\alpha = \pi/2 - \varphi$, значит, $\sin\alpha = \cos\varphi$. С учетом этого равенство (8) примет вид

$$B = \frac{C\varphi}{NIa^2\cos\varphi}. \tag{9}$$

Значение постоянной кручения C, рассчитанной на градус (а не радиан, как это следовало бы выразить в СИ), запишем в виде

$$C = 10 \cdot 10^{-6}\ \text{Н} \cdot \text{м/град},$$

так как значение угла φ также дано в градусах.

Подставим данные в формулу (9) и произведем вычисления:

$$B = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{100 \cdot 1 \cdot (0{,}02)^2 \cdot 1/2}\ \frac{(\text{Н} \cdot \text{м/град}) \cdot \text{град}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 0{,}03\ \text{Тл} = 30\ \text{мТл}.$$

Пример 5. Плоский квадратный контур со стороной длиной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле индукцией $B = 1$ Тл. Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: 1) $\varphi_1 = 90°$; 2) $\varphi_2 = 3°$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Решение. На контур с током в магнитном поле действует механический момент

$$M = p_m B \sin\varphi. \tag{10}$$

По условию задачи, в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент сил равен нулю ($M = 0$), а значит, $\varphi = 0$, т. е. векторы $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$ совпадают по направлению.

Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил, определяемый формулой (10), будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменный (зависит от угла φ поворота), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\varphi. \tag{11}$$

Подставив сюда выражение M по формуле (10) и учтя, что $p_m = IS = Ia^2$, где I — сила тока в контуре, $S = a^2$ — площадь контура, получим

$$\mathrm{d}A = IBa^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{12}$$

1. Работа при повороте на угол $\varphi_1 = 90°$

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi = IBa^2 \left| -\cos\varphi \right|_0^{\pi/2} = IBa^2. \qquad (13)$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу работы (Дж):

$$[I][B][a^2] = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ Тл} \cdot (1 \text{ м})^2 = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Дж}.$$

После вычисления по формуле (13) найдем

$$A_1 = 1 \text{ Дж}.$$

2. Работа при повороте на угол $\varphi_2 = 3°$. В этом случае, учитывая, что угол φ_2 мал, заменим в выражении (12) $\sin\varphi$ на φ:

$$A_2 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2. \qquad (14)$$

Выразим угол φ_2 в радианах (см. табл. 9):

$$\varphi_2 = 3° = 3 \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0{,}0525 \text{ рад}.$$

После подстановки значений I, B, a и φ_2 в формулу (14) получим

$$A_2 = 1{,}37 \text{ мДж}.$$

ЗАДАЧИ

Сила Ампера

22.1. Прямой провод, по которому течет ток $I = 1$ кА, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. С какой силой F действует поле на отрезок провода длиной $l = 1$ м, если магнитная индукция B равна 1 Тл?

22.2. Прямой провод длиной $l = 10$ см, по которому течет ток $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. Найти угол α между направлениями вектора $\mathbf{B}$ и тока, если на провод действует сила $F = 10^{-2}$ Н.

22.3. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи $I = 1$ кА. Определить силу F, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

22.4. Тонкий провод в виде дуги, составляющей треть кольца радиусом $R = 15$ см, находится в однородном магнитном поле ($B = 20$ мТл). По проводу течет ток $I = 30$ А. Плоскость, в которой лежит дуга, перпендикулярна линиям магнитной индукции, и подводящие провода находятся вне поля. Определить силу F, действующую на провод.

22.5. По тонкому проводу в виде кольца радиусом $R = 20$ см течет ток $I = 100$ А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией $B = 20$ мТл. Найти силу F, растягивающую кольцо.

22.6. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии $d = 4$ мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи $I = 50$ А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины провода.

22.7. Шины генератора представляют собой две параллельные *медные полосы длиной* $l = 2$ *м каждая, отстоящие друг от друга* на расстоянии $d = 20$ см. Определить силу F взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток $I = 10$ кА.

22.8. По двум параллельным проводам длиной $l = 1$ м каждый текут одинаковые токи. Расстояние d между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой $F = 1$ мН. Найти силу тока I в проводах.

22.9. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 100$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной $l = 1$ м каждого провода.

22.10. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом $R = 10$ см, текут одинаковые токи $I = 10$ А в каждом. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между центрами колец равно 1 мм.

22.11. По двум одинаковым квадратным плоским контурам со стороной $a = 20$ см текут токи $I = 10$ А в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответственными сторонами контуров равно 2 мм.

Магнитный момент

22.12. По витку радиусом $r = 5$ см течет ток $I = 10$ А. Определить магнитный момент p_m кругового тока.

22.13. Очень короткая катушка содержит $N = 1000$ витков тонкого провода. Катушка имеет квадратное сечение со стороной

длиной $a = 10$ см. Найти магнитный момент p_m катушки при силе тока $I = 1$ А.

22.14. Магнитный момент p_m витка равен 0,2 Дж/Тл. Определить силу тока I в витке, если его диаметр $d = 10$ см.

22.15. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка равна 200 А/м. Магнитный момент p_m витка равен $1\ \text{А} \cdot \text{м}^2$. Вычислить силу тока I в витке и радиус R витка.

22.16. По кольцу радиусом R течет ток. На оси кольца на расстоянии $d = 1$ м от его плоскости магнитная индукция $B = 10$ нТл. Определить магнитный момент p_m кольца с током. Считать R много меньшим d.

22.17. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом $r = 53$ пм. Вычислить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока и механический момент M, действующий на круговой ток, если атом помещен в магнитное поле, линии индукции которого параллельны плоскости орбиты электрона. Магнитная индукция B поля равна 0,1 Тл.

22.18. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Найти отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона. Заряд электрона и его массу считать известными. Указать направления векторов $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{L}$.

22.19. По тонкому стержню длиной $l = 20$ см равномерно распределен заряд $Q = 240$ нКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить: 1) магнитный момент p_m, обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если стержень имеет массу $m = 12$ г.

22.20. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет заряд $Q = 10$ нКл. Кольцо равномерно вращается с частотой $n = 10\ \text{с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Найти: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого кольцом; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если масса m кольца равна 10 г.

22.21. То же, что и в предыдущей задаче, но относительно оси, совпадающей с одним из диаметров кольца.

22.22. Диск радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный по поверхности заряд $Q = 0{,}2$ мкКл. Диск равномерно вращается с частотой $n = 20\ \text{с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого диском; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если масса m диска равна 100 г.

22.23. Тонкостенная металлическая сфера радиусом $R = 10\,\text{см}$ несет равномерно распределенный по ее поверхности заряд $Q = 3\,\text{мКл}$. Сфера равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10\,\text{рад/с}$ относительно оси, проходящей через центр сферы. Найти: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемый вращением сферы; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если масса m сферы равна 100 г.

22.24. Сплошной шар радиусом $R = 10\,\text{см}$ несет заряд $Q = 200\,\text{нКл}$, равномерно распределенный по объему. Шар вращается относительно оси, проходящей через центр шара, с угловой скоростью $\omega = 10\,\text{рад/с}$. Определить: 1) магнитный момент p_m кругового тока, обусловленного вращением шара; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если масса m шара равна 10 кг.

Контур в магнитном поле

22.25. Проволочный виток радиусом $R = 5\,\text{см}$ находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 2\,\text{кА/м}$. Плоскость витка образует угол $\alpha = 60°$ с направлением поля. По витку течет ток $I = 4\,\text{А}$. Найти механический момент M, действующий на виток.

22.26. Виток диаметром $d = 20\,\text{см}$ может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток $I = 10\,\text{А}$. Найти механический момент M, который нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении [3]).

22.27. Рамка гальванометра длиной $a = 4\,\text{см}$ и шириной $b = 1{,}5\,\text{см}$, содержащая $N = 200$ витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1\,\text{Тл}$. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти: 1) механический момент M, действующий на рамку, когда по витку течет ток $I = 1\,\text{мА}$; 2) магнитный момент p_m рамки при этом токе.

22.28. Короткая катушка площадью S поперечного сечения, равной $150\,\text{см}^2$, содержит $N = 200$ витков провода, по которому течет ток $I = 4\,\text{А}$. Катушка помещена в однородное магнитное поле напряженностью $H = 8\,\text{кА/м}$. Определить магнитный момент p_m катушки, а также вращающий момент M, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол $\alpha = 60°$ с линиями индукции.

22.29. Рамка гальванометра, содержащая $N = 200$ витков тонкого провода, подвешена на упругой нити. Площадь S рамки равна

[3]) Горизонтальную составляющую $B_\text{г}$ магнитной индукции поля Земли принять равной 20 мкТл.

$1\,см^2$. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции ($B = 5\,мТл$). Когда через гальванометр был пропущен ток $I = 2\,мкА$, то рамка повернулась на угол $\alpha = 30°$. Найти постоянную кручения C нити.

22.30. По квадратной рамке из тонкой проволоки массой $m = 2\,г$ пропущен ток $I = 6\,А$. Рамка свободно подвешена за середину одной из сторон на неупругой нити. Определить период T малых колебаний такой рамки в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2\,мТл$. Затуханием колебаний пренебречь.

22.31. Тонкий провод в виде кольца массой $m = 3\,г$ свободно подвешен на неупругой нити в однородном магнитном поле. По кольцу течет ток $I = 2\,А$. Период T малых крутильных колебаний относительно вертикальной оси равен 1,2 с. Найти магнитную индукцию B поля.

22.32. На оси контура с током, магнитный момент которого p_m равен $10\,мА \cdot м^2$, находится другой такой же контур. Вектор магнитного момента второго контура перпендикулярен оси. Вычислить механический момент M, действующий на второй контур. Расстояние d между контурами равно 50 см. Размеры контуров малы по сравнению с расстоянием между ними.

22.33. Магнитное поле создано кольцевым проводником радиусом $R = 20\,см$, по которому течет ток $I = 100\,А$. На оси кольца расположено другое кольцо малых размеров с магнитным моментом $p_m = 10\,мА \cdot м^2$. Плоскости колец параллельны, а расстояние d между центрами равно 1 см. Найти силу, действующую на малое кольцо.

Магнитный диполь

22.34. Магнитное поле создано бесконечно длинным проводником с током $I = 100\,А$. На расстоянии $a = 10\,см$ от проводника находится точечный диполь, вектор магнитного момента ($p_m = 1\,мА \cdot м^2$) которого лежит в одной плоскости с проводником и перпендикулярен ему. Определить силу F, действующую на магнитный диполь.

22.35. Определить степень неоднородности магнитного поля (dB/dx), если максимальная сила F_{max}, действующая на точечный магнитный диполь, равна 1 мН. Магнитный момент p_m точечного диполя равен $2\,мА \cdot м^2$.

22.36. Проволочный виток радиусом $R = 20$ см расположен в плоскости магнитного меридиана. В центре витка установлен компас. Какой ток I течет по витку, если магнитная стрелка компаса отклонена на угол $\alpha = 9°$ от плоскости магнитного меридиана [4])?

[4]) См. сноску к задаче 22.26.

22.37. Определить число N витков катушки тангенс-гальванометра, при котором сила тока, текущего по обмотке, численно равна тангенсу угла отклонения магнитной стрелки, помещенной в центре обмотки? Радиус r катушки равен 25 см. Ось катушки перпендикулярна плоскости магнитного меридиана[4]).

22.38. Длинный прямой соленоид, содержащий $n = 5$ витков на каждый сантиметр длины, расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана[4]). Внутри соленоида, в его средней части, находится магнитная стрелка, установившаяся в магнитном поле Земли. Когда по соленоиду пустили ток, стрелка отклонилась на угол $\alpha = 60°$. Найти силу тока I.

22.39. Короткий прямой магнит расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана. На оси магнита на расстоянии $r = 50$ см от его середины (которое много больше длины магнита) находится магнитная стрелка. Вычислить магнитный момент p_m магнита, если стрелка отклонена на угол $\alpha = 6°$ от плоскости магнитного меридиана[4]).

22.40. Конденсатор электроемкостью $C = 50$ мкФ заряжается от источника тока, ЭДС $\mathcal{E}$ которой равна 80 В, и с помощью особого переключателя полностью разряжается 100 раз в секунду через обмотку тангенс-гальванометра, расположенного в плоскости магнитного меридиана[4]). На какой угол α отклонится магнитная стрелка, находящаяся в центре тангенс-гальванометра, если его обмотка имеет $N = 10$ витков радиусом $r = 25$ см?

22.41. Магнитная стрелка, помещенная в центре кругового провода радиусом $R = 10$ см, образует угол $\alpha = 20°$ с вертикальной плоскостью, в которой находится провод. Когда по проводу пустили ток $I = 3$ А, то стрелка повернулась в таком направлении, что угол α увеличился. Определить угол поворота стрелки.

22.42*. Два точечных магнитных диполя с одинаковыми магнитными моментами ($p_m = 4\,\text{мА}\cdot\text{м}^2$) находятся на расстоянии $r = 2$ м друг от друга (рис. 22.4). Определить потенциальную энергию П и силу F их взаимодействия.

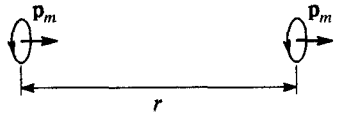


Рис. 22.4

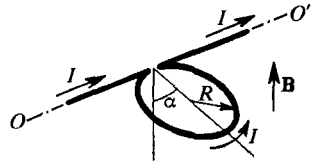


Рис. 22.5

22.43*. Тонкое проводящее кольцо радиусом $R = 10$ см и массой $m = 20$ г находится в однородном магнитном поле. Когда по кольцу пропустили ток $I = 25$ А, оно повернулось вокруг горизон-

тальной оси OO' на угол $\alpha = 15°$ (рис. 22.5). Определить магнитную индукцию B поля, силовые линии которого перпендикулярны оси и направлены вертикально вверх.

22.44*. Прямоугольная скоба из медного провода, площадь S поперечного сечения которого равна $2\,\text{мм}^2$, находится в однородном магнитном поле ($B = 10\,\text{мТл}$). Скоба может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси OO'. На какой угол α отклонится скоба от вертикали, если по ней пропустить ток $I = 20\,\text{А}$? Магнитная индукция **B** направлена вертикально вниз (рис. 22.6).

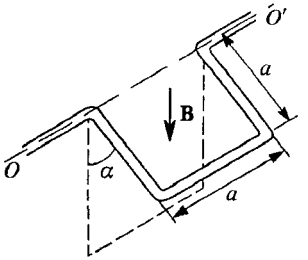


Рис. 22.6

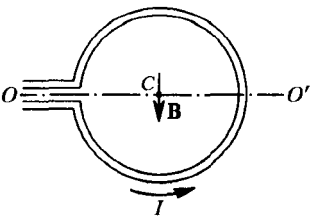


Рис. 22.7

22.45*. Проволочное кольцо (контур) массой $m = 20\,\text{г}$ может свободно вращаться вокруг оси OO', совпадающей с одним из его диаметров. По кольцу течет ток $I = 10\,\text{А}$ и оно помещено в однородное магнитное поле ($B = 12\,\text{мТл}$), силовые линии которого параллельны плоскости кольца и перпендикулярны оси OO' (рис. 22.7). Контур удерживается в этом положении внешними силами. Пренебрегая индукционными токами, определить, после освобождения контура от действия внешних сил: 1) угловое ускорение ε в начальный момент времени; 2) максимальную угловую скорость $\omega_{\max}$.

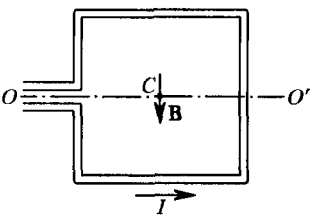


Рис. 22.8

22.46*. Квадратный проволочный контур массой $m = 40\,\text{г}$ может свободно вращаться вокруг оси OO', лежащей в плоскости контура и проходящей через середины его противоположных сторон. По контуру течет ток $I = 15\,\text{А}$ и он помещен в однородное магнитное поле ($B = 10\,\text{мТл}$), силовые линии которого параллельны плоскости контура и перпендикулярны оси OO' (рис. 22.8). Контур удерживается в этом положении внешними силами. Пренебрегая индукционными токами, определить, после освобождения контура от действия внешних сил: 1) угловое ускорение ε в начальный момент времени; 2) максимальную угловую скорость $\omega_{\max}$.

22.47*. Проволочный контур в виде правильного треугольника массой $m = 12$ г может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси OO', параллельной одной из сторон треугольника и проходящей через его центр масс. По контуру течет ток $I = 4$ А и он находится в однородном магнитном поле ($B = 8$ мТл), силовые линии которого параллельны плоскости контура и перпендикулярны оси OO' (рис. 22.9). Контур удерживается в этом положении внешними силами. Пренебрегая индукционными токами, определить, после освобождения контура от действия внешних сил: 1) угловое ускорение ε в начальный момент времени; 2) максимальную угловую скорость ω_{max}.

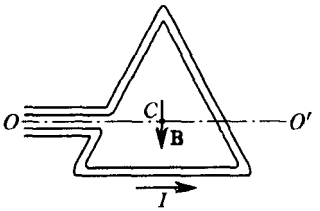


Рис. 22.9

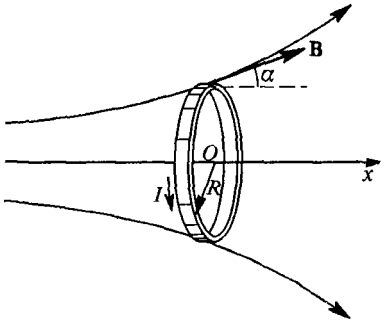


Рис. 22.10

22.48*. Тонкое кольцо массой $m = 10$ г и радиусом $R = 6$ см, по которому течет ток $I = 15$ А, поместили в неоднородное аксиально-симметричное магнитное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля. Определить ускорение a кольца, если магнитная индукция $\mathbf{B}$ ($|\mathbf{B}| = 0{,}08$ Тл) составляет с осью Ox угол $\alpha = 30°$ (рис. 22.10).

§ 23. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд Q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ (сила Лоренца), выражается формулой

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{vB}], \quad \text{или} \quad F = |Q|vB\sin\alpha,$$

где α — угол, образованный вектором скорости $\mathbf{v}$ движущейся частицы и вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 400$ В, попал в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1{,}5$ мТл. Определить: 1) радиус R кривизны траектории; 2) частоту n вращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости электрона перпендикулярен линиям индукции.

Решение. 1. Радиус кривизны траектории электрона определим, исходя из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца F. (Действием силы тяжести можно пренебречь.) Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, по второму закону Ньютона, сообщает электрону нормальное ускорение a_n: $F = ma_n$. Подставив сюда выражения F и a_n, получим

$$|e|vB\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}, \tag{1}$$

где e, v, m — заряд, скорость, масса электрона; B — магнитная индукция; R — радиус кривизны траектории; α — угол между направлениями векторов скорости $\mathbf{v}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ (в нашем случае $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$).

Из формулы (1) найдем

$$R = \frac{mv}{|e|B}. \tag{2}$$

Входящий в выражение (2) импульс mv выразим через кинетическую энергию T электрона:

$$mv = \sqrt{2mT}. \tag{3}$$

Но кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, определяется равенством $T = |e|U$. Подставив это выражение T в формулу (3), получим $mv = \sqrt{2m|e|U}$. Тогда выражение (2) для радиуса кривизны приобретает вид

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|e|}}. \tag{4}$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу длины (м):

$$\frac{[m]^{1/2}[U]^{1/2}}{[B][e]^{1/2}} = \frac{(1\text{ кг})^{1/2}\cdot(1\text{ В})^{1/2}}{1\text{ Тл}\cdot(1\text{ Кл})^{1/2}} =$$

$$= \left[\frac{1\text{ кг}\cdot 1\text{ В}}{(1\text{ Тл})^2\cdot 1\text{ Кл}}\right]^{1/2} = \left[\frac{1\text{ кг}\cdot 1\text{ В}\cdot(1\text{ А})^2\cdot(1\text{ м})^2}{(1\text{ Н})^2\cdot 1\text{ А}\cdot 1\text{ с}}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1\text{ кг}\cdot 1\text{ Дж}\cdot(1\text{ м})^2}{1\text{ Н}\cdot 1\text{ с}^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1\text{ кг}\cdot 1\text{ м}^3}{1\text{ Н}\cdot 1\text{ с}^2}\right]^{1/2} = 1\text{ м}.$$

После вычисления по формуле (4) найдем

$$R = 45 \text{ мм}.$$

2. Для определения частоты вращения воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом кривизны траектории,

$$n = \frac{v}{2\pi R}.$$

Подставив R из выражения (2) в эту формулу, получим

$$n = \frac{1}{2\pi}\frac{|e|}{m}B.$$

Произведя вычисления, найдем

$$n = 4{,}20 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 2. Электрон, имея скорость $v = 2 \cdot 10^6$ м/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 30$ мТл под углом $\alpha = 30°$ к направлению линий индукции. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

Решение. Известно, что на заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная векторам магнитной индукции $\mathbf{B}$ и скорости $\mathbf{v}$ частицы:

$$F = QvB\sin\alpha, \qquad (5)$$

где Q — заряд частицы.

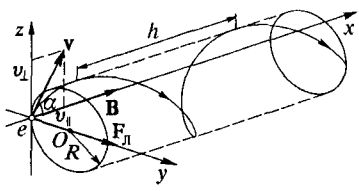


Рис 23.1

В случае, если частицей является электрон, формулу (5) можно записать в виде

$$F = |e|vB\sin\alpha.$$

Так как вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости, то модуль скорости не будет изменяться под действием этой силы. Но при постоянной скорости, как это следует из формулы (5), останется постоянным и значение силы Лоренца. Из механики известно, что постоянная сила, перпендикулярная скорости, вызывает движение по окружности. Следовательно, электрон, влетевший в магнитное поле, будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, со скоростью, равной поперечной составляющей $v_\perp$ скорости (рис. 23.1); одновременно он будет двигаться и вдоль поля со скоростью $v_\parallel$:

$$v_\perp = v\sin\alpha, \quad v_\parallel = v\cos\alpha.$$

В результате одновременного участия в движениях по окружности и по прямой электрон будет двигаться по винтовой линии.

Радиус окружности, по которой движется электрон, найдем следующим образом. Сила Лоренца F сообщает электрону нормальное ускорение a_n. По второму закону Ньютона, $F = ma_n$, где $F = |e|v_1B$ и $a_n = v_\perp^2/R$. Тогда

$$|e|v_\perp B = \frac{mv_z^2}{R},$$

откуда после сокращения на v_z находим радиус винтовой линии:

$$R = \frac{mv_\perp}{|e|B}, \quad \text{или} \quad R = \frac{mv\sin\alpha}{|e|B}.$$

Подставив значения величин m, v, e, B и α и произведя вычисления, получим

$$R = 0{,}19 \text{ мм}.$$

Шаг винтовой линии равен пути, пройденному электроном вдоль поля со скоростью v_x за время, которое понадобится электрону для того, чтобы совершить один оборот,

$$h = v_\parallel T, \tag{6}$$

где $T = 2\pi R/v_\perp$ — период вращения электрона. Подставив это выражение для T в формулу (6), найдем

$$h = \frac{2\pi Rv_\parallel}{v_\perp}, \quad \text{или} \quad h = \frac{2\pi Rv\cos\alpha}{v\sin\alpha} = 2\pi R\operatorname{ctg}\alpha.$$

Подставив в эту формулу значения величин π, R и α и вычислив, получим

$$h = 2{,}06 \text{ мм}.$$

Пример 3. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}03$ Тл по окружности радиусом $r = 10$ см. Определить скорость v электрона.

Решение. Движение электрона по окружности в однородном магнитном поле совершается под действием силы Лоренца (см. примеры 1 и 2). Поэтому можно написать

$$\frac{mv^2}{r} = |e|Bv, \tag{7}$$

откуда найдем импульс электрона:

$$p = mv = |e|Br. \tag{8}$$

Релятивистский импульс выражается формулой

$$p = \frac{m_0c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Выполнив преобразования, получим следующую формулу для определения скорости частицы:

$$\beta = \frac{p/(m_0 c)}{\sqrt{1 + \left(p/(m_0 c)\right)^2}}. \tag{9}$$

В данном случае $p = |e|Br$. Следовательно,

$$\beta = \frac{|e|Br/(m_0 c)}{\sqrt{1 + \left(|e|Br/(m_0 c)\right)^2}}. \tag{10}$$

В числитель и знаменатель формулы (10) входит выражение $|e|Br/(m_0 c)$. Вычислим его отдельно:

$$\frac{|e|Br}{m_0 c} = 1{,}76.$$

Подставив найденное значение отношения $|e|Br/(m_0 c)$ в формулу (10), получим

$$\beta = 0{,}871, \quad \text{или} \quad v = c\beta = 2{,}61 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Электрон, обладающий такой скоростью, является релятивистским (см. § 5).

Пример 4. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104$ В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 10$ кВ/м) и магнитное ($B = 0{,}1$ Тл) поля. Найти отношение заряда альфа-частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Решение. Для того чтобы найти отношение заряда Q альфа-частицы к ее массе m, воспользуемся связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии частиц:

$$QU = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$\frac{Q}{m} = \frac{v^2}{2U}. \tag{11}$$

Скорость v альфа-частицы найдем из следующих соображений. В скрещенных электрическом и магнитном полях на движущуюся заряженную частицу действуют две силы:

а) сила Лоренца $\mathbf{F}_Л = Q[\mathbf{vB}]$, направленная перпендикулярно скорости $\mathbf{v}$ и вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$;

б) кулоновская сила $\mathbf{F}_К = Q\mathbf{E}$, сонаправленная с вектором напряженности $\mathbf{E}$ электростатического поля ($Q > 0$).

Сделаем рисунок с изображением координатных осей и векторных величин. Направим вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ вдоль оси Oz (рис. 23.2), скорость $\mathbf{v}$ — в положительном направлении оси Ox, тогда $\mathbf{F}_Л$ и $\mathbf{F}_К$ будут направлены так, как это указано на рисунке.

Альфа-частица не будет испытывать отклонения, если геометрическая сумма сил $\mathbf{F}_Л + \mathbf{F}_К$ будет равна нулю. В проекции на ось Oy получим следующее равенство (при этом учтено, что вектор скорости $\mathbf{v}$ перпендикулярен вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$ и $\sin(\widehat{\mathbf{vB}}) = 1$):

$$QE - QvB = 0,$$

откуда

$$v = \frac{E}{B}.$$

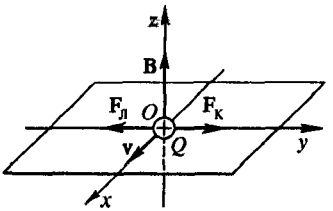


Рис. 23.2

Подставив это выражение скорости в формулу (11), получим

$$\frac{Q}{m} = \frac{E^2}{2UB^2}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу отношения заряда к массе (Кл/кг):

$$\frac{[E^2]}{[U][B^2]} = \frac{(1\,\text{В/м})^2}{1\,\text{В}\cdot(1\,\text{Тл})^2} = \frac{(1\,\text{В}\cdot\text{А})^2}{1\,\text{В}\cdot(1\,\text{Н})^2} = \frac{1\,\text{Дж}\cdot\text{Кл}}{(1\,\text{Н}\cdot\text{с})^2} = \frac{1\,\text{Кл}\cdot\text{м}}{1\,\text{Н}\cdot\text{с}^2} = 1\,\text{Кл/кг}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{Q}{m} = 4{,}81\cdot 10^7\ \text{Кл/кг}.$$

ЗАДАЧИ

Сила Лоренца

23.1. Определить силу Лоренца F, действующую на электрон, влетевший со скоростью $v = 4\cdot 10^6$ м/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к линиям индукции. Магнитная индукция B поля равна 0,2 Тл.

23.2. Вычислить радиус R дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл, если скорость v протона равна $2\cdot 10^6$ м/с.

23.3. Двукратно ионизированный атом гелия (α-частица) движется в однородном магнитном поле напряженностью $H = 100$ кА/м по окружности радиусом $R = 10$ см. Найти скорость v α-частицы.

23.4. Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}015$ Тл по окружности радиусом $R = 10$ см. Определить импульс p иона.

23.5. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл. Определить момент импульса L, которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом $R = 0{,}2$ см.

23.6. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}02$ Тл по окружности радиусом $R = 1$ см. Определить кинетическую энергию T электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

23.7. Заряженная частица влетела перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле, созданное в среде. В результате взаимодействия с веществом частица, находясь в поле, потеряла половину своей первоначальной энергии. Во сколько раз будут отличаться радиусы кривизны R траектории начала и конца пути?

23.8. Заряженная частица, двигаясь в магнитном поле по дуге окружности радиусом $R_1 = 2$ см, прошла через свинцовую пластину, расположенную на пути частицы. Вследствие потери энергии частицей радиус кривизны траектории изменился и стал равным $R_2 = 1$ см. Определить относительное изменение энергии частицы.

23.9. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить ее радиус R.

23.10. Заряженная частица, обладающая скоростью $v = 2 \times 10^6$ м/с, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}52$ Тл. Найти отношение Q/m заряда частицы к ее массе, если частица в поле описала дугу окружности радиусом $R = 4$ см. По этому отношению определить, какая это частица.

23.11. Заряженная частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов $U = 2$ кВ, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15{,}1$ мТл по окружности радиусом $R = 1$ см. Определить отношение $|q|/m$ заряда частицы к ее массе и скорость v частицы.

23.12. Заряженная частица с энергией $T = 1$ кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 1$ мм. Найти силу F, действующую на частицу со стороны поля.

23.13. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Определить силу F, действующую на электрон со стороны поля, если радиус R кривизны траектории равен 0,5 см.

23.14. Электрон движется в однородном магнитном поле напряженностью $H = 4$ кА/м со скоростью $v = 10^7$ м/с. Вектор скорости направлен перпендикулярно линиям напряженности. Найти силу F, с которой поле действует на электрон, и радиус R окружности, по которой он движется.

23.15. Протон с кинетической энергией $T = 1$ МэВ влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции ($B = 1$ Тл). Какова должна быть минимальная протяженность l поля в направлении, по которому летел протон, когда он находился вне поля, чтобы оно изменило направление движения протона на противоположное?

23.16. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10$ кА/м. Вычислить период T вращения электрона.

23.17. Определить частоту n вращения электрона по круговой орбите в магнитном поле, индукция B которого равна 0,2 Тл.

23.18. Электрон в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл движется по окружности. Найти силу I эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона.

23.19. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл, стал двигаться по окружности радиусом $R = 5$ см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

23.20. Два однозарядных иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса m_1 которого равна 12 а.е.м.[5]), описал дугу окружности радиусом $R_1 = 4$ см. Определить массу m_2 другого иона, который описал дугу окружности радиусом $R_2 = 6$ см.

23.21. Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом $R_1 = 5$ см, второй ион — по окружности радиусом $R_2 = 2{,}5$ см. Найти отношение m_1/m_2 масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

23.22. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 100$ мкТл движется электрон по винтовой линии. Определить скорость v электрона, если шаг h винтовой линии равен 20 см, а радиус $R = 5$ см.

23.23. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 9$ мТл по винтовой линии, радиус R которой равен 1 см и шаг $h = 7{,}8$ см. Определить период T обращения электрона и его скорость v.

23.24. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл движется протон. Траектория его движения представляет собой

---

[5]) а.е.м. — обозначение атомной единицы массы.

винтовую линию с радиусом $R = 10\,\text{см}$ и шагом $h = 60\,\text{см}$. Определить кинетическую энергию T протона.

23.25. Электрон влетает в однородное магнитное поле напряженностью $H = 16\,\text{кА/м}$ со скоростью $v = 8 \cdot 10^6\,\text{м/с}$. Вектор скорости составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением линий индукции. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле. Определить также шаг винтовой линии для электрона, летящего под малым углом к линиям индукции.

23.26. Определить энергию ε, которую приобретает протон, сделав $N = 40$ оборотов в магнитном поле циклотрона, если максимальное значение $U_{\max}$ переменной разности потенциалов между дуантами равно 60 кВ. Определить также относительное увеличение $\Delta m/m_0$ массы протона в сравнении с массой покоя, а также скорость v протона.

23.27. Вычислить скорость v и кинетическую энергию T α-частиц, выходящих из циклотрона, если, подходя к выходному окну, ионы движутся по окружности радиусом $R = 50\,\text{см}$. Индукция B магнитного поля циклотрона равна 1,7 Тл.

23.28. Индукция B магнитного поля циклотрона равна 1 Тл. Какова частота ν ускоряющего поля между дуантами, если в циклотроне ускоряются дейтоны?

23.29. В циклотроне требуется ускорять ионы гелия (He^{++}). Частота ν переменной разности потенциалов, приложенной к дуантам, равна 10 МГц. Какова должна быть индукция B магнитного поля, чтобы период T обращения ионов совпадал с периодом изменения разности потенциалов?

23.30. Определить число N оборотов, которые должен сделать протон в магнитном поле циклотрона, чтобы приобрести кинетическую энергию $T = 10\,\text{МэВ}$, если при каждом обороте протон проходит между дуантами разность потенциалов $U = 30\,\text{кВ}$.

23.31. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0{,}8c$ (c — скорость света в вакууме). Магнитная индукция B поля равна 0,01 Тл. Определить радиус окружности в двух случаях: 1) не учитывая увеличение массы со скоростью; 2) учитывая это увеличение.

23.32. Электрон движется в магнитном поле по окружности радиусом $R = 2\,\text{см}$. Магнитная индукция B поля равна 0,1 Тл. Определить кинетическую энергию T электрона [6]).

23.33. Электрон, влетевший в камеру Вильсона, оставил след в виде дуги окружности радиусом $R = 10\,\text{см}$. Камера находится в

---

[6]) При решении задач 23.32–23.35 учесть зависимость массы частицы от ее скорости.

однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ Тл. Определить кинетическую энергию T электрона [7]).

23.34. Кинетическая энергия T α-частицы равна 500 МэВ. Частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 80$ см. Определить магнитную индукцию B поля [7]).

23.35. Электрон, имеющий кинетическую энергию $T = 1{,}5$ МэВ, движется в однородном магнитном поле по окружности. Магнитная индукция B поля равна 0,02 Тл. Определить период τ обращения [7]).

Движение заряженных частиц в совместных магнитном и электрическом полях

23.36. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость v частицы.

23.37. Заряженная частица, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом электрическому ($E = 400$ кВ/м) и магнитному ($B = 0{,}25$ Тл) полям, не испытывает отклонения при определенной скорости v. Определить эту скорость и возможные отклонения Δv от нее, если значения электрического и магнитного полей могут быть обеспечены с точностью, не превышающей 0,2%.

23.38. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 800$ В, влетает в однородные, скрещенные под прямым углом магнитное ($B = 50$ мТл) и электрическое поля. Определить напряженность E электрического поля, если протон движется в скрещенных полях прямолинейно.

23.39. Заряженная частица движется по окружности радиусом $R = 1$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Вычислить промежуток времени Δt, в течение которого должно действовать электрическое поле, для того чтобы кинетическая энергия частицы возросла вдвое.

23.40. Протон влетает со скоростью $v = 100$ км/с в область пространства, где имеются электрическое ($E = 210$ В/м) и магнитное ($B = 3{,}3$ мТл) поля. Напряженность **E** электрического поля и магнитная индукция **B** совпадают по направлению. Определить ускорение протона для начального момента движения в поле, если направление вектора его скорости v: 1) совпадает с общим направлением векторов **E** и **B**; 2) перпендикулярно этому направлению.

---

[7]) См. сноску на с. 342.

§ 24. Закон полного тока. Магнитный поток. Магнитные цепи

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Циркуляция вектора магнитной индукции **B** вдоль замкнутого контура

$$\oint_L B_l \, \mathrm{d}l,$$

где B_l — проекция вектора магнитной индукции на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}l$ вдоль контура L. Циркуляция вектора напряженности **H** вдоль замкнутого контура

$$\oint_L H_l \, \mathrm{d}l.$$

• Закон полного тока (для магнитного поля в вакууме)

$$\oint_L B_l \, \mathrm{d}l = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

где μ_0 — магнитная постоянная; $\sum_{i=1}^{n} I_i$ — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром; n — число токов.

Закон полного тока (для произвольной среды)

$$\oint_L H_l \, \mathrm{d}l = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Магнитный поток Φ через плоский контур площадью S:

а) в случае однородного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha, \quad \text{или} \quad \Phi = B_n S,$$

где α — угол между вектором нормали **n** к плоскости контура и вектором магнитной индукции **B**; B_n — проекция вектора **B** на нормаль **n** ($B_n = B\cos\alpha$);

б) в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S B_n \, \mathrm{d}S,$$

где интегрирование ведется во всей поверхности S.

• Потокосцепление, т. е. полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида или тороида,

$$\Psi = N\Phi,$$

где Ф — магнитный поток через один виток; N — число витков соленоида или тороида.

• Магнитное поле тороида, сердечник которого составлен из двух частей, изготовленных из веществ с различными магнитными проницаемостями:

а) магнитная индукция на осевой линии тороида

$$B = \frac{IN}{l_1/(\mu_1\mu_0) + l_2/(\mu_2\mu_0)},$$

где I — сила тока в обмотке тороида; N — число ее витков; l_1 и l_2 — длины первой и второй частей сердечника тороида; μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости веществ первой и второй частей сердечника тороида; μ_0 — магнитная постоянная;

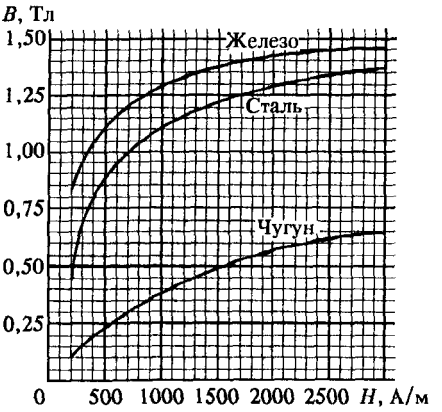


Рис. 24.1

б) напряженность магнитного поля на осевой линии тороида в первой и второй частях сердечника

$$H_1 = \frac{B}{\mu_1\mu_0}; \quad H_2 = \frac{B}{\mu_2\mu_0};$$

в) магнитный поток в сердечнике тороида

$$\Phi_m = \frac{IN}{l_1/(\mu_1\mu_0 S) + l_2/(\mu_2\mu_0 S)},$$

или по аналогии с законом Ома (формула Гопкинсона)

$$\Phi_m = \frac{F_m}{R_m},$$

где F_m — магнитодвижущая сила; R_m — полное магнитное сопротивление цепи;

г) магнитное сопротивление участка цепи

$$R_m = \frac{l}{\mu\mu_0 S}.$$

• Магнитная проницаемость μ ферромагнетика связана с магнитной индукцией B поля в нем и напряженностью H намагничивающего поля соотношением

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

• Связь между магнитной индукцией B поля в ферромагнетике и напряженностью H намагничивающего поля выражается графически (рис. 24.1).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной $l = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине. Каков магнитный поток Ф, пронизывающий рамку?

Решение. Магнитный поток Ф через поверхность площадью S определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n \, \mathrm{d}S.$$

В нашем случае вектор магнитной индукции **B** перпендикулярен плоскости рамки. Поэтому для всех точек рамки $B_n = B$. Магнитная индукция B, создаваемая бесконечно длинным прямым проводником с током, определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

где x — расстояние от провода до точки, в которой определяется B.

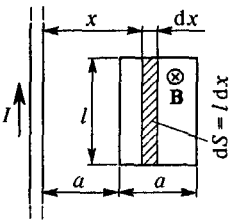


Рис. 24.2

Для вычисления магнитного потока заметим, что так как B зависит от x и элементарный поток Ф будет также зависеть от x, то

$$d\Phi = B(x)\,\mathrm{d}S.$$

Разобьем площадь рамки на узкие элементарные площадки длиной l, шириной $\mathrm{d}x$ и площадью $\mathrm{d}S = l\,\mathrm{d}x$ (рис. 24.2). В пределах этой площадки магнитную индукцию можно считать постоянной, так как все части площадки равноудалены (на расстояние x) от провода.

С учетом сделанных замечаний элементарный магнитный поток можно записать в виде

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\,\mathrm{d}x.$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = 2a$, найдем

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln x \Big|_a^{2a}.$$

Подставив пределы, получим

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln 2. \tag{1}$$

Убедимся в том, что правая часть полученного равенства дает единицу магнитного потока — вебер (Вб):

$$[\mu_0]\,[I]\,[l] = 1\ \text{Гн/м} \cdot 1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{Вб}.$$

Произведя вычисления по формуле (1), найдем

$$\Phi = 4{,}5\ \text{мкВб}.$$

Пример 2. Определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей $N = 200$ витков, идет ток $I = 5$ А. Внешний диаметр d_1 тороида равен 30 см, внутренний $d_2 = 20$ см.

Решение. Для определения напряженности магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора **H** вдоль линии магнитной индукции поля: $\oint H\,\mathrm{d}l$.

Из условия симметрии следует, что линии магнитной индукции тороида представляют собой окружности и что во всех точках этой линии напряженности одинаковы. Поэтому в выражении циркуляции напряженность H можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до $2\pi r$, где l — радиус окружности, совпадающей с линией индукции, вдоль которой вычисляется циркуляция, т. е.

$$\oint_L H\,\mathrm{d}l = H \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = 2\pi r H. \tag{2}$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint_L H_l\,\mathrm{d}l = \sum_{i=1}^{n} I_i. \tag{3}$$

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим

$$2\pi r H = \sum_{i=1}^{n} I_i. \tag{4}$$

Линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (4) примет вид $2\pi r H = NI$, откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi r}. \tag{5}$$

Для средней линии тороида $r = (1/2)(R_1 + R_2) = (1/4)(d_1 + d_2)$. Подставив это выражение r в формулу (5), найдем

$$H = \frac{2NI}{\pi(d_1 + d_2)}. \tag{6}$$

Магнитная индукция B_0 в вакууме связана с напряженностью поля соотношением $B_0 = \mu_0 H$. Следовательно,

$$B_0 = \frac{2\mu_0 NI}{\pi(d_1 + d_2)}. \tag{7}$$

Подставив значения величин в выражения (6) и (7), получим

$$H = 1{,}37 \text{ кА/м}, \quad B_0 = 1{,}6 \text{ мТл}.$$

Пример 3. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной $l_0 = 5$ мм. Длина l средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков N содержит обмотка на кольце, если при силе тока $I = 4$ А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл? Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре можно пренебречь. Явление гистерезиса не учитывать.

Решение. Пренебрегая рассеянием магнитного потока, мы можем принять, что индукция поля в воздушном зазоре равна индукции поля в чугуне. На основании закона полного тока запишем

$$IN = Hl + H_0 l_0.$$

По графику (см. рис. 24.1) находим, что при $B = 0{,}5$ Тл напряженность H магнитного поля в чугуне равна 1,2 кА/м. Так как для воздуха $\mu = 1$, то напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = 4 \cdot 10^5 \text{ А/м}.$$

Искомое число витков

$$N = \frac{Hl + H_0 l_0}{I} = 800.$$

ЗАДАЧИ

Закон полного тока

24.1. По соленоиду длиной $l = 1$ м без сердечника, имеющему $N = 10^3$ витков (см. рис. 24.2), течет ток $I = 20$ А. Определить циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль контура, изображенного на рис. 24.3*а*, *б*.

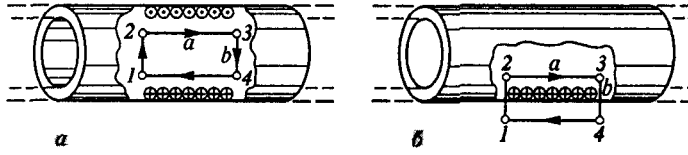


Рис. 24.3

24.2. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 10$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 20$ А, текущий в противоположном направлении.

24.3. По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью $j = 2 \cdot 10^6$ А/м^2. Найти циркуляцию вектора напряженности вдоль окружности радиусом $R = 5$ мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол $\alpha = 30°$ с вектором плотности тока.

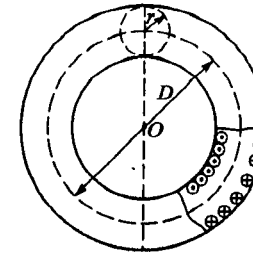


Рис. 24.4

24.4. Диаметр D тороида без сердечника по средней линии равен 30 см. В сечении тороид имеет круг радиусом $r = 5$ см. По обмотке тороида, содержащей $N = 2000$ витков, течет ток $I = 5$ А (рис. 24.4). Пользуясь законом полного тока, определить максимальное и минимальное значение магнитной индукции B в тороиде.

Магнитный поток

24.5. Найти магнитный поток Ф, создаваемый соленоидом сечением $S = 10$ см^2, если он имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр его длины при силе тока $I = 20$ А.

24.6. Плоский контур, площадь S которого равна 25 см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\beta = 30°$ с линиями индукции.

24.7. При двукратном обводе магнитного полюса вокруг проводника с током $I = 100$ А была совершена работа $A = 1$ мДж. Найти магнитный поток Ф, создаваемый полюсом.

24.8. Соленоид длиной $l = 1$ м и сечением $S = 16\,\text{см}^2$ содержит $N = 2000$ витков. Вычислить потокосцепление Ψ при силе тока I в обмотке 10 А.

24.9. Плоская квадратная рамка со стороной $a = 20$ см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 100$ А. Рамка расположена так, что ближайшая к проводу сторона параллельна ему и находится на расстоянии $l = 10$ см от провода. Определить магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

24.10. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях относительно прямого проводника с током, представленных на рис. 24.5.

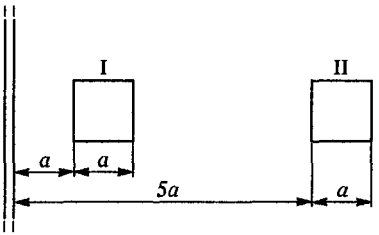


Рис. 24.5

24.11. Квадратная рамка со стороной длиной $a = 20$ см расположена в одной плоскости с прямым бесконечно длинным проводом с током. Расстояние l от провода до середины рамки равно 1 м. Вычислить относительную погрешность, которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию — равной значению ее в центре рамки.

24.12. Тороид квадратного сечения содержит $N = 1000$ витков. Наружный диаметр D тороида равен 40 см, внутренний $d = 20$ см. Найти магнитный поток Φ в тороиде, если сила тока I, протекающего по обмотке, равна 10 А.

Указание. Учесть, что магнитное поле тороида неоднородно.

Магнитная индукция в ферромагнетике

24.13. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 1$ кА/м. Определить индукцию B магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость μ железа [8]).

24.14. На железное кольцо намотано в один слой $N = 500$ витков провода. Средний диаметр d кольца равен 25 см. Определить

[8]) Для определения магнитной проницаемости воспользоваться графиком (см. рис. 24.1). Явление гистерезиса не учитывать.

магнитную индукцию B в железе и магнитную проницаемость μ железа[9]), если сила тока I в обмотке: 1) 0,5 А; 2) 2,5 А.

24.15. Замкнутый соленоид (тороид) со стальным сердечником[9]) имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток $I = 2$ А. Вычислить магнитный поток Φ в сердечнике, если его сечение $S = 4$ см^2.

24.16. Определить магнитодвижущую силу F_m, необходимую для получения магнитного потока $\Phi = 0{,}3$ мВб в железном[9]) сердечнике замкнутого соленоида (тороида). Длина l средней линии сердечника равна 120 см, площадь сечения $S = 2{,}5$ см^2.

24.17. Соленоид намотан на чугунное[9]) кольцо сечением $S = 5$ см^2. При силе тока $I = 1$ А магнитный поток $\Phi = 250$ мкВб. Определить число n витков соленоида, приходящихся на отрезок длиной 1 см средней линии кольца.

Магнитные цепи

24.18. Электромагнит изготовлен в виде тороида. Сердечник тороида со средним диаметром $d = 51$ см имеет вакуумный зазор длиной $l_0 = 2$ мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в зазоре, если, не изменяя силы тока в обмотке, зазор увеличить в $n = 3$ раза? Рассеянием магнитного поля вблизи зазора пренебречь. Магнитную проницаемость μ сердечника считать постоянной и принять равной 800.

24.19. Определить магнитодвижущую силу F_m, необходимую для создания магнитного поля индукцией $B = 1{,}4$ Тл в электромагните с железным[9]) сердечником длиной $l = 90$ см и воздушным промежутком длиной $l_0 = 5$ мм. Рассеянием магнитного потока в воздушном промежутке пренебречь.

24.20. В железном[9]) сердечнике соленоида индукция $B = 1{,}3$ Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной.

24.21. Стальной[9]) сердечник тороида, длина l которого по средней линии равна 1 м, имеет вакуумный зазор длиной $l_0 = 4$ мм. Обмотка содержит $n = 8$ витков на 1 см. При какой силе тока I индукция B в зазоре будет равна 1 Тл?

24.22. Обмотка тороида, имеющего стальной[9]) сердечник с узким вакуумным зазором, содержит $N = 1000$ витков. По обмотке течет ток $I = 1$ А. При какой длине l_0 вакуумного зазора индукция B магнитного поля в нем будет равна 0,5 Тл? Длина l тороида по средней линии равна 1 м.

---

[9]) См. сноску на с. 350.

24.23. Определить магнитодвижущую силу, при которой в узком вакуумном зазоре длиной $l_0 = 3{,}6$ мм тороида с железным[9]) сердечником, магнитная индукция B равна 1,4 Тл. Длина l тороида по средней линии равна 0,8 м.

24.24. Длина l чугунного[9]) тороида по средней линии равна 1,2 м, сечение $S = 20\,\text{см}^2$. По обмотке тороида течет ток, создающий в узком вакуумном зазоре магнитный поток $\Phi = 0{,}5$ мВб. Длина l_0 зазора равна 8 мм. Какова должна быть длина зазора, чтобы магнитный поток в нем при той же силе тока увеличился в два раза?

§ 25. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция. Индуктивность

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Работа сил магнитного поля (сил Ампера), совершаемая при перемещении контура с током в магнитном поле,

$$A_{1,2} = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где I — сила тока в контуре, которая поддерживается неизменной; Φ_2 и Φ_1 — магнитные потоки, пронизывающие контур, в конечном и начальном его положениях.

• Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея–Максвелла)

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\mathcal{E}_i$ — электродвижущая сила индукции; N — число витков контура; Ψ — потокосцепление.

Частные случаи применения основного закона электромагнитной индукции:

а) разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле,

$$U = Blv\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями векторов скорости $\mathbf{v}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$;

б) электродвижущая сила индукции $\mathcal{E}_i$, возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B

$$\mathcal{E}_i = BNS\omega\sin\omega t,$$

где ωt — мгновенное значение угла между вектором $\mathbf{B}$ и вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости рамки.

---

[9]) См. сноску на стр. 350.

• Количество электричества Q, протекающего в контуре,

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{R},$$

где R — сопротивление контура; $\Delta\Psi$ — изменение потокосцепления.

• Электродвижущая сила самоиндукции $\mathcal{E}_i$, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем,

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \quad \text{или} \quad \langle\mathcal{E}_i\rangle = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где L — индуктивность контура.

• Потокосцепление контура

$$\Psi = LI,$$

где L — индуктивность контура.

• Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0\mu n^2 V.$$

Во всех случаях вычисления индуктивности соленоида (тороида) с сердечником по приведенной формуле для определения магнитной проницаемости следует пользоваться графиком зависимости B от H (см. рис. 24.1), а затем формулой

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

• Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L:

а) после замыкания цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right),$$

где $\mathcal{E}$ — ЭДС источника тока; t — время, прошедшее после замыкания цепи;

б) после размыкания цепи

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right),$$

где I_0 — сила тока в цепи при $t = 0$; t — время, прошедшее с момента размыкания цепи.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Виток, по которому течет ток $I = 20$ А, свободно установится в однородном магнитном поле $B = 16$ мТл. Диаметр d витка равен 10 см. Какую работу нужно совершать, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

Р е ш е н и е. При медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь и считать ток в контуре неизменным. Работа сил поля в этом случае определяется выражением

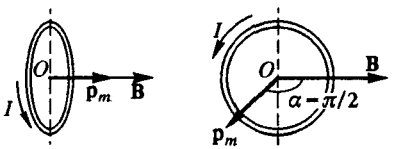
$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие контур в начальном и конечном положениях.

Работа внешних сил будет равна по модулю работе сил поля и противоположна ей по знаку, т. е.

$$A_{\text{вн}} = I(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Так как в начальном положении контур установился свободно (положение устойчивого равновесия), то момент внешних сил, действующий на контур, равен нулю. В этом положении вектор магнитного момента $\mathbf{p}_m$ контура сонаправлен с вектором $\mathbf{B}$ (рис. 25.1*а*) и магнитный поток Φ_1 максимален ($\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$), т. е. $\Phi_1 = BS$ (где S — площадь контура). В конечном положении (рис. 25.1*б*) вектор $\mathbf{p}_m$ перпендикулярен



а *б*

Рис. 25.1

вектору $\mathbf{B}$ ($\alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$) и магнитный поток $\Phi_2 = 0$. Перепишем выражение работы внешних сил $A_{\text{вн}}$ с учетом сделанных замечаний:

$$A_{\text{вн}} = I\Phi_1 = IBS.$$

Так как площадь контура $S = \pi d^2/4$, то работа

$$A_{\text{вн}} = \frac{\pi}{4} IBd^2.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу работы (Дж):

$$[I][B][d^2] = 1\ \text{А} \cdot 1\ \text{Тл} \cdot 1\ \text{м}^2 = \frac{1\ \text{А} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{1\ \text{А} \cdot \text{м}} = 1\ \text{Н} \cdot \text{м} = 1\ \text{Дж}.$$

Произведем вычисления:

$$A_{\text{вн}} = \frac{3{,}14}{4} \cdot 20 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}1)^2\ \text{Дж} = 2{,}5\ \text{мДж}.$$

П р и м е р 2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, с частотой

$n = 10\,\text{с}^{-1}$. Площадь S рамки равна $150\,\text{см}^2$. Определить мгновенное значение ЭДС $\mathcal{E}_i$, соответствующее углу поворота рамки 30°.

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея–Максвелла:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \tag{1}$$

Потокосцепление $\Psi = N\Phi$, где N — число витков, пронизываемых магнитным потоком Φ. Подставив выражение Ψ в формулу (1), получим

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \tag{2}$$

При вращении рамки магнитный поток Φ, пронизывающий рамку в момент времени t, изменяется по закону $\Phi = BS\cos\omega t$, где B — магнитная индукция; S — площадь рамки; ω — циклическая частота. Подставив в формулу (2) выражение Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = NBS\omega\sin\omega t. \tag{3}$$

Циклическая частота ω связана с частотой n вращения соотношением $\omega = 2\pi n$. Подставив выражение ω в формулу (3) и заменив ωt на угол α, получим

$$\mathcal{E}_i = 2\pi nNBS\sin\omega t. \tag{4}$$

Убедимся в том, что правая часть полученного равенства дает единицу ЭДС (В). Учтя, что 2π, N и $\sin\omega t$ — величины безразмерные и неименованные, получим

$$[n][B][S] = 1\,\text{с}^{-1}\cdot 1\,\text{Тл}\cdot 1\,\text{м}^2 = \frac{1\,\text{Н}\cdot 1\,\text{м}^2}{1\,\text{А}\cdot 1\,\text{м}\cdot 1\,\text{с}} = \frac{1\,\text{Дж}}{1\,\text{Кл}} = 1\,\text{В}.$$

Произведя вычисления по формуле (4), найдем

$$\mathcal{E}_i = 47{,}1\ \text{В}.$$

Пример 3. По соленоиду течет ток $I = 2\,\text{А}$. Магнитный поток Φ, пронизывающий поперечное сечение соленоида, равен $4\cdot 10^{-6}\,\text{Вб}$. Определить индуктивность L соленоида, если он имеет $N = 800$ витков.

Решение. Индуктивность L соленоида связана с потокосцеплением Ψ соотношением $\Psi = LI$, откуда $L = \Psi/I$. Заменив здесь потокосцепление Ψ его выражением через магнитный поток Φ и число витков N соленоида ($\Psi = \Phi N$), получим

$$L = \frac{\Phi N}{I}. \tag{5}$$

Произведя вычисления по формуле (5), получим

$$L = 1{,}6 \text{ мГн}.$$

Пример 4. При скорости изменения силы тока $\Delta I/\Delta t$ в соленоиде, равной 50 А/с, на его концах возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_i = 0{,}08$ В. Определить индуктивность L соленоида.

Решение. Индуктивность соленоида связана с ЭДС самоиндукции и скоростью изменения силы тока в его обмотке соотношением [10])

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t}.$$

Вынося постоянную величину L за знак приращения, получим

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Опустив знак минус в этом равенстве (направление ЭДС в данном случае несущественно) и выразив интересующую нас величину — индуктивность, получим

$$L = \frac{\mathcal{E}_i}{\Delta I/\Delta t}.$$

Сделав вычисления по этой формуле, найдем

$$L = 1{,}6 \text{ мГн}.$$

Пример 5. Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром $d = 0{,}2$ мм. Диаметр D соленоида равен 5 см. По соленоиду течет ток $I = 1$ А. Определить количество электричества Q, протекающее через обмотку, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Решение. Возможны два способа решения.

1-*й способ.* Количество электричества $\mathrm{d}Q$, которое протекает по проводнику за время $\mathrm{d}t$ при силе тока I, определяется равенством

$$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Полное количество электричества, протекающее через проводник за время t, будет $Q = \int_0^t I\,\mathrm{d}t$. Сила тока в данном случае убывает экспоненциально со временем и выражается формулой

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

[10]) Сравните с предыдущим примером.

Внося выражение силы тока I под знак интеграла и интегрируя от 0 до ∞ (при $t \to \infty \quad I \to 0$), получим

$$Q = \int_0^\infty I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\mathrm{d}t = I_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= I_0\left(-\frac{L}{R}\right)\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\Big|_0^\infty$$

Подставим пределы интегрирования и определим количество электричества, протекающее через обмотку:

$$Q = I_0\left(-\frac{L}{R}\right)(0-1) = \frac{I_0 L}{R}. \tag{7}$$

2-й способ. Подставив в формулу (6) вместо силы тока I выражение ее через ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ и сопротивление R соленоида, т.е. $I = \mathcal{E}_i/R$, найдем $\mathrm{d}Q = \dfrac{\mathcal{E}_i}{R}\,\mathrm{d}t$.

Но $\mathcal{E}_i$ связана со скоростью изменения потокосцепления Ψ по закону Фарадея–Максвелла: $\mathcal{E}_i = -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, тогда

$$\mathrm{d}Q = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{R}.$$

Интегрируя, получаем

$$Q = -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{R}. \tag{8}$$

Потокосцепление Ψ пропорционально силе тока в соленоиде. Следовательно, $\Psi_1 = LI_0$; $\Psi_2 = 0$, так как Ψ_2 соответствует тому моменту, когда ток в цепи обратится в нуль. Подставив выражения Ψ_1 и Ψ_2 в формулу (8), получим $Q = \Psi_1/R$, или

$$Q = \frac{I_0 L}{R},$$

что совпадает с формулой (7).

Для определения заряда, протекающего через обмотку соленоида, следует найти индуктивность L соленоида и сопротивление R обмотки соленоида, которые выражаются формулами

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l_1} S_1 = \frac{\mu_0 \pi d_1^2 N^2}{4 l_1}; \quad R = \rho \frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2},$$

где μ_0 — магнитная постоянная; N — число витков; l_1 — длина соленоида; S_1 — площадь сечения соленоида; ρ — удельное сопротивление провода; l — длина провода; S — площадь сечения провода; d — диаметр провода; d_1 — диаметр соленоида.

Подставив найденные выражения L и R в формулу (7), получим

$$Q = \frac{I_0 L}{R} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d_1^2}{4 l_1 \cdot 4\rho l} \pi d^2 I_0. \qquad (9)$$

Заметим, что длина провода l может быть выражена через диаметр d_1 соленоида соотношением $l = \pi d_1 N$, где N — число витков, тогда формуле (9) можно придать вид

$$Q = \frac{\mu_0 N^2 \pi d_1^2 \pi d^2}{16 l_1 \rho \pi d_1 N} I_0 = \frac{\pi \mu_0 N d_1 d^2}{16 \rho l_1} I_0.$$

Но l_1/N есть диаметр провода, так как витки плотно прилегают друг к другу. Следовательно,

$$Q = \frac{\pi \mu_0 d_1 d^2}{16 \rho d} I_0 = \frac{\pi \mu_0}{16 \rho} d d_1 I_0. \qquad (10)$$

Произведя вычисления по формуле (10), получим

$$Q = 363 \text{ мкКл}.$$

ЗАДАЧИ

Работа по перемещению проводника[11]) *в магнитном поле*

25.1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл находится прямой провод длиной $l = 8$ см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток $I = 2$ А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние $s = 5$ см. Найти работу A сил поля.

25.2. Плоский контур, площадь S которого равна $300\,\text{см}^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток $I = 10$ А. Определить работу A внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует.

25.3. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной длиной $a = 10$ см, течет ток $I = 20$ А, сила которого поддерживается неизменной. Плоскость квадрата составляет угол $\alpha = 20°$ с линиями индукции однородного магнитного поля ($B = 0{,}1$ Тл). Вычислить работу A, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить провод за пределы поля.

[11]) Перемещение проводника или контура с током в магнитном поле считать настолько медленным, что возникающими индукционными токами можно пренебречь.

25.4. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого провода радиусом $R = 10$ см, течет ток $I = 100$ А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, по направлению совпадающей с индукцией B_1 собственного магнитного поля кольца. Определить работу A внешних сил, которые, действуя на провод, деформировали его и придали ему форму квадрата. Сила тока при этом поддерживалась неизменной. Работой против упругих сил пренебречь.

25.5(1). Виток, по которому течет ток $I = 20$ А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}016$ Тл. Диаметр d витка равен 10 см. Определить работу A, которую нужно совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha = \pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром. То же, если угол $\alpha = 2\pi$.

25.5(2). Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см, по которой течет ток $I = 200$ А, свободно установилась в однородном магнитном поле ($B = 0{,}2$ Тл). Определить работу, которую необходимо совершить при повороте рамки вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции, на угол $\theta = 2\pi/3$.

Электродвижущая сила индукции

25.6. Магнитный поток $\Phi = 40$ мВб пронизывает замкнутый контур. Определить среднее значение ЭДС индукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающей в контуре, если магнитный поток изменится до нуля за время $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ с.

25.7. Прямой провод длиной $l = 40$ см движется в однородном магнитном поле со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно линиям индукции. Разность потенциалов U между концами провода равна 0,6 В. Вычислить индукцию B магнитного поля.

25.8. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл находится прямой провод длиной $l = 20$ см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление R всей цепи равно 0,1 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 2{,}5$ м/с.

25.9. Прямой провод длиной $l = 10$ см помещен в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Концы его замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление R всей цепи равно 0,4 Ом. Какая мощность P потребуется для того, чтобы двигать провод перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 20$ м/с?

25.10. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 0{,}5$ В и ничтожно малым внутренним сопротивлением присоединены два металлических стержня, расположенные горизонтально и параллельно друг другу. Расстояние l между стержнями равно 20 см. Стержни нахо-

дятся в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Магнитная индукция $B = 1{,}5$ Тл. По стержням под действием сил поля скользит со скоростью $v = 1$ м/с прямолинейный провод сопротивлением $R = 0{,}02$ Ом. Сопротивление стержней пренебрежимо мало. Определить: 1) ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$; 2) силу F, действующую на провод со стороны поля; 3) силу тока I в цепи; 4) мощность P_1, расходуемую на движение провода; 5) мощность P_2, расходуемую на нагревание провода; 6) мощность P_3, отдаваемую в цепь источника тока.

25.11. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной $l = 10$ см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов U на концах стержня при частоте вращения $n = 16\,\text{с}^{-1}$.

25.12. Рамка площадью $S = 200$ см^2 равномерно вращается с частотой $n = 10\,\text{с}^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0{,}2$ Тл). Каково среднее значение ЭДС индукции $\langle\mathcal{E}_i\rangle$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

25.13. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}35$ Тл равномерно с частотой $n = 480\,\text{мин}^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N = 500$ витков площадью $S = 50\,\text{см}^2$. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\max}$, возникающую в рамке.

25.14. Рамка площадью $S = 100\,\text{см}^2$ содержит $N = 10^3$ витков провода сопротивлением $R_1 = 12$ Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $R_2 = 20$ Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) с частотой $n = 8\,\text{с}^{-1}$. Определить максимальную мощность $P_{\max}$ переменного тока в цепи.

25.15. Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 0,8 Тл. Ротор имеет $N = 100$ витков площадью $S = 400\,\text{см}^2$. Определить частоту n вращения якоря, если максимальное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = 200$ В.

25.16. Короткая катушка, содержащая $N = 1000$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля. Определить мгновенное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60°$ с линиями индукции поля. Площадь S катушки равна $100\,\text{см}^2$.

Количество электричества, протекающее в контуре при изменении магнитного потока[12])

25.17. Проволочный виток радиусом $r = 4$ см, имеющий сопротивление $R = 0{,}01$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Плоскость рамки составляет угол $\alpha = 30°$ с линиями индукции поля. Какое количество электричества Q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?

25.18. Проволочное кольцо радиусом $r = 10$ см лежит на столе. Какое количество электричества Q протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление R кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции B магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

25.19. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества $Q = 10$ мкКл. Определить магнитный поток Ф, пересеченный кольцом, если сопротивление R цепи гальванометра равно 30 Ом.

25.20. Между полюсами электромагнита помещена катушка, соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна линиям индукции. Катушка сопротивлением $R_1 = 4$ Ом имеет $N = 15$ витков площадью $S = 2$ см^2. Сопротивление R_2 гальванометра равно 46 Ом. Когда ток в обмотке электромагнита выключили, по цепи гальванометра протекло количество электричества $Q = 90$ мкКл. Вычислить магнитную индукцию B поля электромагнита.

25.21. Рамка из провода сопротивлением $R = 0{,}01$ Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}05$ Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь S рамки равна 100 см^2. Найти, какое количество электричества Q протечет через рамку за время поворота ее на угол $\alpha = 30°$ в следующих трех случаях: 1) от $\alpha_0 = 0$ до $\alpha_1 = 30°$; 2) от α_1 до $\alpha_2 = 60°$; 3) от $\alpha_3 = 90°$.

25.22. Тонкий медный провод массой $m = 1$ г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле ($B = 0{,}1$ Тл) так, что плоскость его перпендикулярна линиям индукции поля. Определить количество электричества Q, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

25.23. На расстоянии $a = 1$ м от длинного прямого провода с током $I = 1$ кА находится кольцо радиусом $r = 1$ см. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий его, максимален. Определить количество электричества Q, которое протечет по кольцу,

[12]) При решении задач этого раздела собственный магнитный поток контуров можно не учитывать.

когда ток в проводнике будет выключен. Сопротивление R кольца 10 Ом.

Указание. Поле в пределах кольца считать однородным.

25.24. По длинному прямому проводу течет ток. Вблизи провода расположена квадратная рамка из тонкого провода сопротивлением $R = 0{,}02$ Ом. Провод лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам, расстояния до которых от провода соответственно равны $a_1 = 10$ см, $a_2 = 20$ см. Найти силу тока I в проводе, если при его включении через рамку протекло количество электричества $Q = 693$ мкКл.

Самоиндукция и взаимоиндукция

25.25. По катушке индуктивностью $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн течет ток $I = 0{,}6$ А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за время $\Delta t = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ с. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающую в контуре.

25.26. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на $\Delta I = 0{,}1$ А в 1 с. Индуктивность L катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$.

25.27. Индуктивность L катушки равна 2 мГн. Ток частотой $\nu = 50$ Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающую за интервал времени Δt, в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока $I_0 = 10$ А.

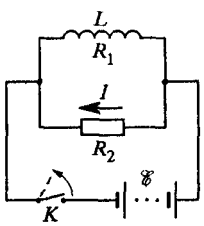


Рис. 25.2

25.28. Катушка сопротивлением $R_1 = 0{,}5$ Ом с индуктивностью $L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн соединена параллельно с проводом сопротивлением $R_2 = 2{,}5$ Ом, по которому течет постоянный ток $I = 1$ А. Определить количество электричества Q, которое будет индуцировано в катушке при размыкании цепи ключом K (рис. 25.2).

25.29. На картонный каркас длиной $l = 50$ см и площадью S сечения, равной 4 см^2, намотан в один слой провод диаметром $d = 0{,}2$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Вычислить индуктивность L получившегося соленоида.

25.30. Индуктивность L соленоида длиной $l = 1$ м, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Гн. Площадь S сечения соленоида равна 20 см^2. Определить число n витков на каждом сантиметре длины соленоида.

25.31. Сколько витков проволоки диаметром $d = 0{,}4$ мм с изоляцией ничтожной толщины нужно намотать на картонный цилиндр диаметром $D = 2$ см, чтобы получить однослойную катушку с индуктивностью $L = 1$ мГн? Витки вплотную прилегают друг к другу.

25.32. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет $N_1 = 750$ витков и индуктивность $L_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Гн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2 = 3{,}6 \cdot 10^{-2}$ Гн, обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Определить число N_2 витков катушки после перемотки.

25.33. Определить индуктивность L двухпроводной линии на участке длиной $l = 1$ км. Радиус R провода равен 1 мм, расстояние d между осевыми линиями равно 0,4 м.

Указание. Учесть только внутренний магнитный поток, т. е. поток пронизывающий контур, ограниченный проводами.

25.34. Соленоид индуктивностью $L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн содержит $N = 600$ витков. Определить магнитный поток Φ, если сила тока I, протекающего по обмотке, равна 12 А.

25.35. Индуктивность L катушки без сердечника равна 0,02 Гн. Какое потокосцепление Ψ создается, когда по обмотке течет ток $I = 5$ А?

25.36. Длинный прямой соленоид, намотанный на немагнитный каркас, имеет $N = 1000$ витков и индуктивность $L = 3 \times \times 10^{-3}$ Гн. Какой магнитный поток Φ и какое потокосцепление Ψ создает соленоид при силе тока $I = 1$ А?

25.37. Соленоид, площадь S сечения которого равна 5 см^2, содержит $N = 1200$ витков. Индукция B магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 2$ А равна 0,01 Тл. Определить индуктивность L соленоида.

25.38. Соленоид содержит $N = 1000$ витков. Площадь S сечения сердечника равна 10 см^2. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B = 1{,}5$ Тл. Найти среднюю ЭДС индукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающей в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время $t = 500$ мкс.

25.39. Обмотка соленоида с железным сердечником содержит $N = 500$ витков. Длина l сердечника равна 50 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность L соленоида, если сила тока, протекающего по обмотке, возрастет от $I_1 = 0{,}1$ А до $I_2 = 1$ А (см. рис. 24.1).

25.40. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой $\Delta I/\Delta t = 5$ А/с, во второй катушке возникает ЭДС

индукции $\mathcal{E}_i = 0{,}1$ В. Определить коэффициент M взаимной индукции катушек.

25.41. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет $N_1 = 251$ виток. Средний диаметр $\langle D \rangle$ тороида равен 8 см, диаметр d витков равен 2 см. На тороид намотана вторичная обмотка, имеющая $N_2 = 100$ витков. При замыкании первичной обмотки в ней в течение $t = 1$ мс устанавливается сила тока $I = 3$ А. Найти среднюю ЭДС индукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающей на вторичной обмотке.

Экстратоки замыкания и размыкания

25.42. В цепи шел ток $I_0 = 50$ А. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Определить силу тока I в этой цепи через $t = 0{,}01$ с после отключения ее от источника тока. Сопротивление R цепи равно 20 Ом, ее индуктивность $L = 0{,}1$ Гн.

25.43. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 1$ Гн. Через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,9 предельного значения?

25.44. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн и сопротивлением $R = 10$ Ом. Источник тока можно отключать, не разрывая цепи. Определить время t, по истечении которого сила тока уменьшится до 0,001 первоначального значения.

25.45. К источнику тока с внутренним сопротивлением $R_i = 2$ Ом подключают катушку индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и сопротивлением $R = 8$ Ом. Найти время t, в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, отличающегося от максимального на 1%.

25.46. В цепи (см. рис. 25.1) $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 95$ Ом, $L = 0{,}34$ Гн, $\mathcal{E} = 38$ В. Внутреннее сопротивление r источника тока пренебрежимо мало. Определить силу тока I в резисторе сопротивлением R_2 в следующих трех случаях: 1) до размыкания цепи ключом K; 2) в момент размыкания ($t_1 = 0$); 3) через $t_2 = 0{,}01$ с после размыкания.

Бетатрон

25.47. Средняя скорость изменения магнитного потока $\langle \Delta\Phi/\Delta t \rangle$ в бетатроне, рассчитанном на энергию $T = 60$ МэВ, составляет 50 Вб/с. Определить: 1) число N оборотов электрона на орбите за время ускоренного движения; 2) путь l, пройденный электроном, если радиус r орбиты равен 20 см.

25.48. В бетатроне скорость изменения магнитной индукции $\mathrm{d}\langle B \rangle$ [13])$/\mathrm{d}t = 60$ Тл/с. Определить: 1) напряженность E вихрево-

[13]) $\langle B \rangle$ есть среднее значение магнитной индукции в пределах круга, очерченного орбитой электрона.

го электрического поля на орбите электрона, если ее радиус $r = 0{,}5$ м; 2) силу F, действующую на электрон.

25.49. Электрон в бетатроне движется по орбите радиусом $r = 0{,}4$ м и приобретает за один оборот кинетическую энергию $T = 20$ эВ. Вычислить скорость изменения магнитной индукции $\mathrm{d}(B)/\mathrm{d}t$, считая эту скорость в течение интересующего нас промежутка времени постоянной.

§ 26. Энергия магнитного поля

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Энергия W магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре индуктивностью L, определяется формулой

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

где I — сила тока в контуре.

• Объемная (пространственная) плотность энергии однородного магнитного поля (например, поля длинного соленоида)

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

• Формула Томсона. Период собственных колебаний в контуре без активного сопротивления

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L — индуктивность контура; C — его электроемкость.

• Связь длины электромагнитной волны с периодом T и частотой ν колебаний

$$\lambda = cT, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{c}{\nu},$$

где c — скорость электромагнитных волн в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

• Скорость электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость; μ — магнитная проницаемость среды.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На стержень из немагнитного материала длиной $l = 50$ см намотан в один слой провод так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится 20 витков. Определить энергию W магнитного поля

внутри соленоида, если сила тока I в обмотке равна 0,5 А. Площадь S сечения стержня равна $2\,см^2$.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида с индуктивностью L, по обмотке которого течет ток I, выражается формулой

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{1}$$

Индуктивность соленоида в случае немагнитного сердечника зависит только от числа витков на единицу длины и от объема V сердечника: $L = \mu_0 n^2 V$, где μ_0 — магнитная постоянная. Подставив выражение индуктивности L в формулу (1), получим $W = (1/2)\mu_0 n^2 V I^2$. Учтя, что $V = lS$, запишем

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 Sl. \tag{2}$$

Сделав вычисления по формуле (2), найдем

$$W = 126 \text{ мкДж}.$$

Пример 2. По обмотке длинного соленоида со стальным сердечником течет ток $I = 2$ А. Определить объемную плотность w энергии магнитного поля в сердечнике, если число n витков на каждом сантиметре длины соленоида равно $7\,см^{-1}$.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля определяется по формуле

$$w = \frac{BH}{2\mu_0}. \tag{3}$$

Напряженность H магнитного поля найдем по формуле $H = nI$. Подставив сюда значения n ($n = 7\,см^{-1} = 700\,м^{-1}$) и I, найдем

$$H = 1400 \text{ А/м}.$$

Магнитную индукцию B определим по графику (см. рис. 24.1) зависимости B от H. Находим, что напряженности $H = 1400$ А/м соответствует магнитная индукция $B = 1{,}2$ Тл.

Произведя вычисление по формуле (3), найдем объемную плотность энергии:

$$w = 840 \text{ Дж/м}^3.$$

Пример 3. На железный сердечник длиной $l = 20$ см малого сечения ($d \ll l$) намотано $N = 200$ витков. Определить магнитную проницаемость μ железа при силе тока $I = 0{,}4$ А.

Решение. Магнитная проницаемость μ связана с магнитной индукцией B и напряженностью H магнитного поля соотношением

$$B = \mu_0 \mu H. \tag{4}$$

Эта формула не выражает линейной зависимости B от H, так как μ является функцией H. Поэтому для определения магнитной проницаемости обычно пользуются графиком зависимости $B(H)$ (см. рис. 24.1). Из формулы (4) выразим магнитную проницаемость:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}. \tag{5}$$

Напряженность H магнитного поля вычислим по формуле (катушку с малым сечением можно принять за соленоид) $H = nI$, где n — число витков, приходящихся на отрезок катушки длиной 1 м. Выразив в этой формуле n через число N витков катушки и ее длину l, получим

$$H = \frac{N}{l} I.$$

Подставив сюда значения N, l и I и произведя вычисления, найдем

$$H = 400 \text{ А/м}.$$

По графику (рис. 24.1) находим, что напряженности $H = 400$ А/м соответствует магнитная индукция $B = 1{,}05$ Тл. Подставив найденные значения B и H, а также значение μ_0 в формулу (5), вычислим магнитную проницаемость:

$$\mu = 2{,}09 \cdot 10^3.$$

Пример 4. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью $S = 100\,\text{см}^2$ каждая и катушки с индуктивностью $L = 1$ мкГн, резонирует на волну длиной $\lambda = 10$ м. Определить расстояние d между пластинами конденсатора.

Решение. Расстояние между пластинами конденсатора можно найти из формулы электроемкости плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$, где ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор, откуда

$$d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{C}. \tag{6}$$

Из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, находим электроемкость

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}. \tag{7}$$

Неизвестный в условии задачи период колебаний можно определить, зная длину волны λ, на которую резонирует контур. Из соотношения $\lambda = cT$ имеем

$$T = \frac{\lambda}{c}.$$

Подставив выражения периода T в формулу (7), а затем электроемкости C в формулу (6), получим

$$d = c^2 \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 S L}{\lambda^2}.$$

Произведя вычисления, найдем

$$d = 3{,}14 \text{ мм}.$$

Пример 5. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1{,}2$ мГн и конденсатора переменной электроемкости от $C_1 = 12$ пФ до $C_2 = 80$ пФ. Определить диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре. Активное сопротивление контура принять равным нулю.

Решение. Длина λ электромагнитной волны, которая может вызвать резонанс в колебательном контуре, связана с периодом T колебаний контура соотношением

$$\lambda = cT.$$

Период колебаний, в свою очередь, связан с индуктивностью L катушки и электроемкостью C конденсатора колебательного контура соотношением (формула Томсона) $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Следовательно,

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}. \tag{8}$$

Согласно условию задачи, индуктивность контура неизменна, а электроемкость контура может изменяться в пределах от C_1 до C_2. Этим значениям электроемкости соответствуют длины волн λ_1 и λ_2, определяющие диапазон длин волн, которые могут вызвать резонанс. После вычислений по формуле (8) получим

$$\lambda_1 = 226 \text{ м}; \quad \lambda_2 = 585 \text{ м}.$$

ЗАДАЧИ

Энергия магнитного поля соленоида и тороида

26.1. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн течет ток $I = 10$ А. Определить энергию W магнитного поля соленоида.

26.2. Индуктивность L катушки (без сердечника) равна 0,1 мГн. При какой силе тока I энергия W магнитного поля равна 10^{-4} Дж?

26.3. Соленоид содержит $N = 1000$ витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида равен 0,1 мВб. Вычислить энергию W магнитного поля.

26.4. На железное кольцо намотано в один слой $N = 200$ витков. Определить энергию W магнитного поля, если при токе $I = 2{,}5$ А магнитный поток Φ в железе равен 0,5 мВб.

26.5. По обмотке тороида течет ток силой $I = 0{,}6$ А. Витки провода диаметром $d = 0{,}4$ мм плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Найти энергию W магнитного поля в стальном сердечнике тороида, если площадь S сечения его равна 4 см^2, диаметр D средней линии равен 30 см [14]).

[14]) Для определения магнитной проницаемости следует воспользоваться графиком на рис. 24.1. *Явление гистерезиса не учитывать.*

Объемная плотность энергии

26.6. При индукции B поля, равной 1 Тл, плотность энергии w магнитного поля в железе равна 200 Дж/м^3. Определить магнитную проницаемость μ железа в этих условиях [15]).

26.7. Определить объемную плотность энергии w магнитного поля в стальном сердечнике, если индукция B магнитного поля равна 0,5 Тл [15]).

26.8. Индукция магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от $B_1 = 0{,}5$ Тл до $B_2 = 1$ Тл. Найти, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии w магнитного поля [15]).

26.9. Вычислить плотность энергии w магнитного поля в железном сердечнике замкнутого соленоида, если напряженность H намагничивающего поля равна $1{,}2 \cdot 10^3$ А/м [15]).

26.10. Напряженность магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от $H_1 = 200$ А/м до $H_2 = 800$ А/м. Определить, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии w магнитного поля [15]).

26.11. При некоторой силе тока I плотность энергии w магнитного поля соленоида (без сердечника) равна 0,2 Дж/м^3. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?

26.12. Найти плотность энергии w магнитного поля в железном сердечнике соленоида, если напряженность H намагничивающего поля равна $1{,}6 \cdot 10^3$ А/м [15]).

26.13. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии w поля, если по обмотке течет ток $I = 16$ А.

26.14. Обмотка тороида содержит $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. Сердечник немагнитный. При какой силе тока I в обмотке плотность энергии w магнитного поля равна 1 Дж/м^3?

26.15. Катушка индуктивностью $L = 1$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить период T колебаний.

26.16. Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 40$ см и площадью S сечения, равной 5 см^2. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник немагнитный. Найти период T колебаний.

26.17. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 20$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 80$ нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на

[15]) См. сноску на с. 368.

2%. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур.

26.18. Колебательный контур имеет индуктивность $L = 1{,}6$ мГн, электроемкость $C = 0{,}04$ мкФ и максимальное напряжение U_{max} на зажимах, равное 200 В. Определить максимальную силу тока I_{max} в контуре. Сопротивление контура ничтожно мало.

26.19. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 8$ пФ и катушку индуктивностью $L = 0{,}5$ мГн. Каково максимальное напряжение U_{max} на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_{max} = 40$ мА?

26.20. Катушка (без сердечника) длиной $l = 50$ см и площадью S_1 сечения, равной 3 см^2, имеет $N = 1000$ витков и соединена параллельно с конденсатором. Конденсатор состоит из двух пластин площадью $S_2 = 75$ см^2 каждая. Расстояние d между пластинами равно 5 мм. Диэлектрик — воздух. Определить период T колебаний контура.

26.21. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью $C = 1$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 1$ мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Найти частоту ν колебаний.

26.22. Индуктивность L колебательного контура равна 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

26.23. На какую длину волны λ будет резонировать контур, состоящий из катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 1{,}11$ нФ?

26.24. Для демонстрации опытов Герца с преломлением электромагнитных волн иногда берут большую призму, изготовленную из парафина. Определить показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$ и магнитная проницаемость $\mu = 1$.

26.25. Два параллельных провода, погруженных в глицерин, индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний частотой $\nu = 420$ МГц. Расстояние l между пучностями стоячих волн на проводах равно 7 см. Найти диэлектрическую проницаемость ε глицерина. Магнитную проницаемость μ принять равной единице.

§ 27. Магнитные свойства вещества

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Намагниченность **J** — величина, равная отношению суммарного магнитного момента всех молекул вещества, содержащихся в малом объ-

еме ΔV вещества (магнетика), к величине этого: объема

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{J_i},$$

где $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{J_i}$ — магнитный момент отдельной (i-й) молекулы; N — число молекул в объеме ΔV. Намагниченность J измеряется в А/м.

• Удельная намагниченность

$$\mathbf{J}_{\text{уд}} = \frac{1}{\Delta m}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{J_i},$$

где Δm — масса элемента объема ΔV вещества. Единицы измерения $J_{\text{уд}}$ — $\text{А}\cdot\text{м}^2/\text{кг}$.

• Молярная намагниченность

$$\mathbf{J}_m = \frac{1}{\Delta \nu}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{J_i},$$

где $\Delta\nu = \Delta m/M$ — количество вещества, содежащееся в объеме ΔV. Единица измерения — $\text{А}\cdot\text{м}^2/\text{моль}$.

• Соотношения намагниченностей

$$\mathbf{J}_{\text{уд}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{J}; \quad \mathbf{J}_m = \frac{M}{\rho}\mathbf{J},$$

где ρ — плотность вещества; M — молярная масса вещества.

• Связь намагниченностей изотропного магнетика с напряженностью $\mathbf{H}$ магнитного поля, в которое этот магнетик помещен:

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}; \quad \mathbf{J}_{\text{уд}} = \chi_{\text{уд}}\mathbf{H}; \quad \mathbf{J}_m = \chi_m\mathbf{H},$$

где χ, $\chi_{\text{уд}}$, χ_m — соответственно магнитная восприимчивость, удельная магнитная восприимчивость и молярная магнитная восприимчивость. χ — безразмерная величина, $\chi_{\text{уд}}$ и χ_m измеряются в $\text{м}^3/\text{кг}$ и $\text{м}^3/\text{моль}$ соответственно.

• Магнитные восприимчивости связаны соотношениями

$$\chi_{\text{уд}} = \frac{1}{\rho}\chi \quad \text{и} \quad \chi_m = \frac{M}{\rho}\chi.$$

• Магнитная индукция $\mathbf{B}$ в изотропном магнетике связана с напряженностью $\mathbf{H}$ магнитного поля и намагниченностью $\mathbf{J}$ соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H},$$

где $1 + \chi = \mu$ — магнитная проницаемость среды.

По знаку и величине магнитной восприимчивости различают три основных типа магнетиков:

1) диамагнетики — вещества, которые очень слабо намагничиваются против поля:

$$\chi < 0, \quad |\chi| \ll 1, \quad \mu < 1;$$

2) парамагнетики — вещества, которые слабо намагничиваются по полю:

$$\chi > 0, \quad \chi \ll 1, \quad \mu > 1;$$

3) ферромагнетики — вещества, которые очень сильно намагничиваются по полю:

$$\chi > 0, \quad \chi \gg 1, \quad \mu \gg 1.$$

• Орбитальное гиромагнитное отношение

$$\frac{\mathcal{M}_l}{\mathcal{L}_l} = \frac{1}{2}\frac{e}{m_e},$$

где $\mathcal{M}_l$ — орбитальный магнитный момент электрона в атоме; $\mathcal{L}_l$ — орбитальный момент импульса электрона; e — элементарный заряд; m_e — масса электрона.

• Угловая скорость прецессии электронной орбиты атома, находящегося в магнитном поле (частота Лармора),

$$\omega_{\text{L}} = \frac{1}{2}\frac{e}{m_e}B,$$

где B — магнитная индукция.

• Индуцированный магнитный момент в атоме, помещенном в магнитное поле,

$$\mathcal{M}_{\text{инд}} = -\frac{e^2}{6m_e}\left(\sum_{i=1}^{Z}\langle r_i^2\rangle\right)\mathbf{B},$$

где $\langle r_i^2\rangle$ — среднее значение квадрата расстояния электрона от ядра атома; Z — число электронов в атоме (ионе).

• Молярная намагниченность изотропного диамагнетика

$$\mathbf{J}_m = -\frac{e^2 N_{\text{A}}}{6m_e}\left(\sum_{i=1}^{Z}\langle r_i^2\rangle\right)\mathbf{B},$$

где N_{A} — постоянная Авогадро.

• Молярная магнитная восприимчивость изотропного диамагнетика (формула Ланжевена–Паули)

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 e^2 N_{\text{A}}}{6m_e}\sum_{i=1}^{Z}\langle r_i^2\rangle.$$

• Магнетон Бора μ_{B} — элементарный магнитный момент ($\mu_{\text{B}} = 9{,}27\times$ $\times 10^{-24}$ Дж/Тл)

$$\mu_{\text{B}} = \frac{e\hbar}{2m_e},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

• Молярная намагниченность изотропного парамагнетика

$$J_m = \mathcal{M}_J L(a) N_A,$$

где $\mathcal{M}_J$ — магнитный момент молекулы, $L(a)$ — функция Ланжевена.

• Функция Ланжевена

$$L(a) = \frac{\exp(a) + \exp(-a)}{\exp(a) - \exp(-a)} - \frac{1}{a},$$

где $a = \dfrac{\mathcal{M}_J B}{kT}$ (k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура).

Приближенное значение функции Ланжевена можно представить в виде знакопеременного ряда

$$L(a) = \frac{1}{3}a - \frac{1}{45}a^3 + \frac{2}{945}a^5 - \ldots$$

При $a \ll 1$ $(\mathcal{M}_J B \ll kT)$ $L(a) \approx a/3$ и молярная намагниченность

$$\mathbf{J}_m = \frac{\mathcal{M}_J^2 N_A}{3kT}\mathbf{B}, \quad \text{или} \quad \mathbf{J}_m = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_J^2 N_A}{3kT}\mathbf{H}.$$

• Молярная магнитная восприимчивость изотропного парамагнетика при $\mathcal{M}_J B \ll kT$

$$\chi_m = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_J^2}{3kT} N_A.$$

• Закон Кюри

$$\chi_m = \frac{C}{T},$$

где C — постоянная Кюри $\left(C = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M}_J^2}{3k} N_A\right)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную восприимчивость χ_m висмута, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1{,}3 \cdot 10^{-9}$ м^3/кг.

Решение. Магнитная восприимчивость χ определяется соотношением

$$\chi = \frac{J}{H},$$

где J — намагниченность, H — напряженность магнитного поля.

Намагниченность J, в свою очередь, определяется следующей формулой:

$$J = |\mathbf{J}| = \frac{|\sum \mathcal{M}_{J_i}|}{V},$$

где $\sum \mathcal{M}_{J_i}$ — суммарный магнитный момент всех молекул в объеме V (магнетик предполагается однородным).

Соответственно

$$\chi_m = \frac{J_m}{H}; \quad J_m = \frac{\sum \mathcal{M}_{J_i}}{\nu},$$

где ν — количество вещества (число молей данного вещества), и

$$\chi_{\text{уд}} = \frac{J_{\text{уд}}}{H}; \quad J_{\text{уд}} = \frac{\sum \mathcal{M}_{J_i}}{m},$$

где m — масса вещества.

1. Для определения удельной магнитной восприимчивости найдем отношение

$$\frac{\chi}{\chi_{\text{уд}}} = \frac{J}{J_{\text{уд}}} = \frac{m}{V} = \rho,$$

откуда

$$\chi = \rho\chi_{\text{уд}},$$

где ρ — плотность.

Убедимся в том, что правая часть равенства, так же как и χ, — величина безразмерная (неименованная):

$$[\rho][\chi_{\text{уд}}] = 1 \text{ кг/м}^3 \cdot 1 \text{ м}^3/\text{кг} = 1.$$

Произведем вычисления, выписав из табл. 9 плотность висмута ($\rho = 9{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3):

$$\chi = 9{,}8 \cdot 10^3 \cdot (-1{,}3 \cdot 10^{-9}) \approx -1{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

2. Для определения молярной магнитной восприимчивости найдем отношение

$$\frac{\chi_m}{\chi_{\text{уд}}} = \frac{J_m}{J_{\text{уд}}} = \frac{m}{\nu} = M,$$

где M — молярная масса.

Тогда

$$\chi_m = M\chi_{\text{уд}}.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу молярной магнитной восприимчивости (м^3/моль):

$$[M][\chi_{\text{уд}}] = 1 \text{ кг/моль} \cdot 1 \text{ м}^3/\text{кг} = 1 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Найдем сначала относительную молекулярную массу висмута: $M_r = 209$. Так как относительная молекулярная масса численно равна молярной массе M, выраженной в г/моль, то $M = 209$ г/моль $= 0{,}209$ кг/моль, что соответствует выражению молярной массы в СИ.

Произведем вычисления:

$$\chi_m \approx -2{,}7 \cdot 10^{-10}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

Пример 2. Определим частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в однородном магнитном поле ($B = 1$ Тл).

Решение. Пусть электрон движется со скоростью v по круговой орбите радиусом r в направлении, указанном стрелкой на рис. 27.1. Момент импульса $\mathcal{L}_l$ орбитального движения электрона в соответствии с правилом винта направлен перпендикулярно плоскости орбиты так, как это отмечено на рисунке.

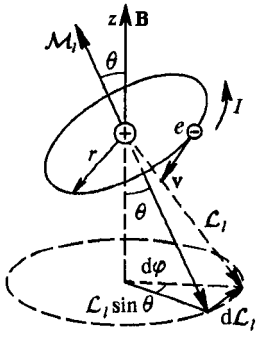


Рис. 27.1

Орбитальный магнитный момент $\mathcal{M}_l$ будет противонаправлен вектору $\mathcal{L}_l$. Под действием внешнего магнитного поля ($\mathbf{B}$), возбужденного вдоль оси Oz, на электронную орбиту будет действовать момент силы $\mathbf{M} = [\mathcal{M}_l \mathbf{B}]$, направление которого перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\mathcal{M}_l$ и $\mathbf{B}$. Под действием этого момента вектор $\mathcal{L}_l$ получит приращение $d\mathcal{L}_l = \mathbf{M}\,dt$ в направлении, совпадающем с $\mathbf{M}$, в результате чего плоскость, содержащая векторы $\mathcal{M}_l$ и $\mathbf{B}$, повернется на угол $d\varphi$. Из рис. 27.1 видно, что

$$d\varphi = \frac{d\mathcal{L}_l}{\mathcal{L}_l \sin\theta}.$$

Тогда угловая скорость прецессии (ларморова частота)

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\mathcal{L}_l}{\mathcal{L}_l \sin\theta\, dt}.$$

Так как $d\mathcal{L}_l = \mathcal{M}\,dt$, а $M = \mathcal{M}_l B \sin\theta$, то

$$\omega_L = \frac{\mathcal{M}_l B \sin\theta\, dt}{\mathcal{L}_l \sin\theta\, dt} = \frac{\mathcal{M}_l}{\mathcal{L}_l} B.$$

Воспользовавшись гиромагнитным отношением $\dfrac{\mathcal{M}_l}{\mathcal{L}_l} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|e|}{m}$, получим

$$\omega_L = \frac{1}{2}\frac{|e|}{m} B.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу угловой скорости (с^{-1}):

$$\frac{[e][B]}{[m]} = \frac{1\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{Тл}}{1\ \text{кг}} = \frac{1\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{Н}}{1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{А} \cdot \text{м}} = \frac{1\ \text{Н} \cdot \text{с}}{1\ \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{1\ \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1\ \text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = 1\ \text{с}^{-1}.$$

Произведем вычисления:

$$\omega_L = 8{,}8 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-1}.$$

Пример 3. Молекула NO имеет магнитный момент $\mathcal{M}_J = 1{,}8\mu_B$. Определить удельную парамагнитную восприимчивость $\chi_{уд}$ газообразного оксида азота при нормальных условиях.

Решение. По теории Ланжевена, магнитная восприимчивость парамагнитного вещества определяется выражением

$$\chi = \mu_0 \frac{n\mathcal{M}_J^2}{3kT}, \qquad (1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м); n — концентрация молекул (число молекул в единице объема); $\mathcal{M}_J$ — магнитный момент атома; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

Удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением

$$\chi_{уд} = \frac{\chi}{\rho}.$$

Заменив в этом выражении χ согласно (1), получим

$$\chi_{уд} = \mu_0 \frac{\mathcal{M}_J^2}{3kT} \frac{n}{\rho}.$$

Заметим, что концентрацию молекул и плотность газа можно выразить следующим образом:

$$n = \frac{N_A}{V_m} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{M}{V_m},$$

где N_A — постоянная Авогадро; M — молярная масса; V_m — молярный объем.

Тогда $n/\rho = N_A/M$ и

$$\chi_{уд} = \mu_0 \frac{N_A \mathcal{M}_J^2}{3kTM}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу удельной магнитной восприимчивости (м^3/кг):

$$\frac{[\mu_0][N_A][\mathcal{M}_J^2]}{[k][T][M]} = \frac{1\,\text{Гн/м} \cdot 1\,\text{моль}^{-1} \cdot 1\,\text{А}^2 \cdot \text{м}^4}{1\,\text{Дж/К} \cdot 1\,\text{К} \cdot 1\,\text{кг/моль}} = \frac{1\,\text{Гн} \cdot 1\,\text{А}^2 \cdot \text{м}^3}{1\,\text{Дж} \cdot \text{кг}} = 1\,\text{м}^3/\text{кг}.$$

Произведем вычисления (учтем, что $1\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ А $\cdot$ м^2 и $M = 30 \cdot 10^{-3}$ кг/моль):

$$\chi_{уд} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot (1{,}8 \cdot 9{,}27 \cdot 10^{-24})^2}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 30 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} = 6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^3/\text{кг}.$$

ЗАДАЧИ

Намагниченность. Магнитная восприимчивость

27.1. Определить намагниченность J тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора $\mu_в$ и концентрация атомов $6 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

27.2. Магнитная восприимчивость χ марганца равна $1{,}21 \cdot 10^{-4}$. Вычислить намагниченность J, удельную намагниченность $J_{уд}$ и молярную намагниченность J_m марганца в магнитном поле напряженностью $H = 10^5$ А/м. Плотность марганца считать известной.

27.3. Найти магнитную восприимчивость χ AgBr, если его молярная магнитная восприимчивость $\chi_m = 7{,}5 \cdot 10^{-10}$ м^3/моль и плотность $\rho = 6{,}47 \cdot 10^3$ кг/м^3.

27.4. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную магнитную восприимчивость χ_m платины, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = 1{,}30 \cdot 10^{-9}$ м^3/кг.

27.5. Магнитная восприимчивость χ алюминия равна $2{,}1 \cdot 10^{-5}$. Определить его удельную магнитную $\chi_{уд}$ и молярную χ_m восприимчивости.

27.6. Висмутовый шарик радиусом $R = 1$ см помещен в однородное магнитное поле ($B_0 = 0{,}5$ Тл). Определить магнитный момент p_m, приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость χ висмута равна $-1{,}5 \cdot 10^{-4}$.

27.7. Напряженность H магнитного поля в меди равна 10^6 А/м. Определить намагниченность J меди и магнитную индукцию B, если известно, что удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1{,}1 \cdot 10^{-9}$ м^3/кг.

Диа- и парамагнетизм

27.8. Определить частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в магнитном поле Земли ($B = 50$ мкТл).

27.9. Атом водорода находится в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Вычислить магнитный момент $\mathcal{M}_J$, обусловленный прецессией электронной орбиты. Принять, что среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона от ядра равно $(2/3)r_1^2$ (r_1 — радиус первой боровской орбиты).

27.10. Молярная магнитная восприимчивость χ_m оксида хрома Cr_2O_3 равна $5{,}8 \cdot 10^{-8}$ м^3/моль. Определить магнитный момент $\mathcal{M}_J$ молекулы Cr_2O_3 (в магнетонах Бора), если температура $T = 300$ К.

27.11. Удельная парамагнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ трехокисда ванадия (V_2O_3) при $t = 17\,^\circ$C равна $1{,}89 \cdot 10^{-7}$ м^3/кг. Опреде-

лить магнитный момент $\mathcal{M}_J$ (в магнетонах Бора), приходящийся на молекулу V_2O_3.

27.12. Молекула кислорода имеет магнитный момент $\mathcal{M}_J = 2{,}8\mu_B$ (где μ_B — магнетон Бора). Определить намагниченность J газообразного кислорода при нормальных условиях в слабом магнитном поле ($B_0 = 10$ мТл) и в очень сильном поле.

27.13. Определить, при каком наибольшем значении магнитной индукции B уже следует пользоваться не приближенным выражением функции Ланжевена $L(a) \approx a/3$, а точным, чтобы погрешность вычислений не превышала 1%. Для расчетов принять магнитный момент молекул равным магнетону Бора. Температура $T = 300$ К.

27.14. Определить наибольшее значение величины a, при котором погрешность, вызванная заменой точного выражения функции Ланжевена приближенным $L(a) \approx a/3$, не превышает 1%.

27.15. Определить температуру T, при которой вероятность того, что данная молекула имеет отрицательную проекцию магнитного момента на направление внешнего магнитного поля, будет равна 10^{-3}. Магнитный момент молекулы считать равным одному магнетону Бора, а магнитную индукцию B поля — равной 8 Тл.

27.16. Определить, во сколько раз число молекул, имеющих положительные проекции магнитного момента на направление вектора магнитной индукции внешнего поля ($B = 1$ Тл), больше числа молекул, имеющих отрицательную проекцию, в двух случаях: 1) $T_1 = 300$ К; 2) $T_2 = 1$ К. Магнитный момент молекулы принять равным магнетону Бора.

27.17. При температуре $T_1 = 300$ К и магнитной индукции $B_1 = 0{,}5$ Тл была достигнута определенная намагниченность J парамагнетика. Определить магнитную индукцию B_2, при которой сохранится та же намагниченность, если температуру повысить до $T_2 = 450$ К.

Ферромагнетизм

27.18. Кусок стали внесли в магнитное поле напряженностью $H = 1600$ А/м. Определить намагниченность J стали.

Указание. Необходимо воспользоваться графиком на рис. 24.1 (с. 345).

27.19. Прямоугольный ферромагнитный брусок объемом $V = 10$ см^3 приобрел в магнитном поле напряженностью $H = 800$ А/м магнитный момент $p_m = 0{,}8$ А $\cdot$ м^2. Определить магнитную проницаемость μ ферромагнетика.

27.20. Вычислить среднее число $\langle n \rangle$ магнетонов Бора, приходящихся на один атом железа, если при насыщении намагниченность железа равна $1{,}84 \cdot 10^6$ А/м.

27.21. На один атом железа в незаполненной $3d$-оболочке приходится четыре неспаренных электрона. Определить теоретическое значение намагниченности $J_{\text{нас}}$ железа при насыщении.

27.22*. Перпендикулярно плоской электронной орбите радиуса $r = 10^{-10}$ м возбуждено магнитное поле ($B = 0{,}2$ Тл). Определить: 1) изменение $\Delta\nu$ частоты вращения электрона на орбите; 2) индуцированный эквивалентный круговой ток $I_{\text{инд}}$; 3) индуцированный магнитный момент $\mathcal{M}_{\text{инд}}$.

27.23*. Оценить молярную намагниченность $J_{\text{м}}$ гелия, помещенного в однородное магнитное поле ($B = 0{,}5$ Тл). При расчетах принять, что среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2\rangle$ электронов от ядра атома гелия равно $3{,}4 \cdot 10^{-21}$ м^2.

27.24*. Основной вклад в молярную магнитную восприимчивость χ_m вносят электроны внешнего электронного слоя в атоме. Пренебрегая вкладом внутренних электронов, определить средний радиус $\langle\rho\rangle$ внешнего электронного слоя. При расчетах воспользоваться приближенным равенством $\sum\limits_{i=1}^{Z}\langle r_i^2\rangle \approx \sum\limits_{i=1}^{Z_{\text{внешн}}}\langle r_{i\text{внешн}}^2\rangle \approx$ $\approx Z_{\text{внешн}}\langle\rho\rangle^2$, где $Z_{\text{внешн}}$ — число электронов во внешнем электронном слое атома. Вычисления выполнить для атомов: 1) неона ($\chi_m = -9{,}05\cdot10^{-11}$ м^3/моль); 2) аргона ($\chi_m = -2{,}44\cdot10^{-11}$ м^3/моль).

Глава 6
ОПТИКА

§ 28. Геометрическая оптика

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Фокусное расстояние сферического зеркала

$$f = \frac{R}{2},$$

где R — радиус кривизны зеркала.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = \frac{1}{f}.$$

Формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b — расстояния от полюса зеркала соответственно до предмета и изображения.

Если изображение предмета мнимое, то величина b берется со знаком минус.

Если фокус сферического зеркала мнимый (зеркало выпуклое), то величина f берется со знаком минус.

• Закон преломления света

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2'} = n_{21},$$

где ε_1 — угол падения; ε_2' — угол преломления; $n_{21} = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления соответственно первой и второй сред.

Нижние индексы в обозначениях углов указывают, в какой среде (первой или второй) идет луч. Если луч переходит из второй среды в первую, падая на поверхность раздела под углом $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$, то по принципу обратимости световых лучей угол преломления ε_1' будет равен углу ε_1 (рис. 28.1).

• Предельный угол полного отражения при переходе света из среды более оптически плотной в среду менее оптически плотную

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (n_2 < n_1).$$

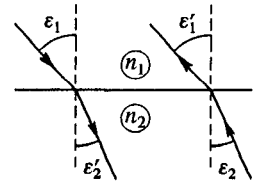


Рис. 28.1

• Оптическая сила тонкой линзы

$$D = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где f — фокусное расстояние линзы; $n_{\text{л}}$ — абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{\text{ср}}$ — абсолютный показатель преломления окружающей среды (одинаковой с обеих сторон линзы).

В приведенной формуле радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком плюс, вогнутых — со знаком минус.

• Оптическая сила двух тонких сложенных вплотную линз

$$D = D_1 + D_2.$$

• Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a — расстояние от оптического центра линзы до предмета; b — расстояние от оптического центра линзы до изображения.

Если фокус мнимый (линза рассеивающая), то величина f отрицательна.

Если изображение мнимое, то величина b отрицательна.

• Угловое увеличение лупы

$$\Gamma = \frac{D}{f},$$

где D — расстояние наилучшего зрения ($D = 25\,\text{см}$).

• Угловое увеличение телескопа

$$\Gamma = \frac{f_{\text{об}}}{f_{\text{ок}}},$$

где $f_{\text{об}}$ и $f_{\text{ок}}$ — фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра.

Расстояние от объектива до окуляра телескопа

$$L = f_{\text{об}} + f_{\text{ок}}.$$

Эти формулы можно применять только в том случае, если в телескоп наблюдают весьма удаленные предметы.

• Угловое увеличение микроскопа

$$\Gamma = \frac{D\Delta}{f_{об} f_{ок}},$$

где Δ — расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра.

Расстояние от объектива до окуляра микроскопа

$$L = f_{об} + \Delta + f_{ок}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На стеклянную призму с преломляющим углом $\theta = 50°$ падает под углом $\varepsilon_1 = 30°$ луч света. Определить угол отклонения σ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,56.

Решение. Данную задачу целесообразно решать не в общем виде, как принято, а пооперационно, производя все промежуточные вычисления. В этом случае мы несколько проигрываем в точности расчетов, но выигрываем в наглядности и простоте вычислений. Из рис. 28.2 видно, что угол отклонения

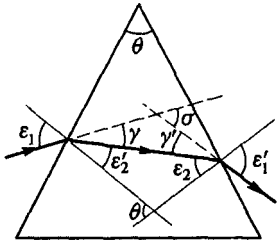


Рис. 28.2

$$\sigma = \gamma + \gamma', \qquad (1)$$

а углы γ и γ' просто выражаются через углы ε_1, ε'_2, ε'_1, ε_2, которые последовательно и будем вычислять:

1) из закона преломления $\sin\varepsilon_1 / \sin\varepsilon'_2$ имеем

$$\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\varepsilon_1}{n}\right) = 18{,}7°;$$

2) из рис. 28.2, следует, что угол падения ε_2 на вторую грань призмы равен

$$\varepsilon_2 = \theta - \varepsilon'_2 = 31{,}3°.$$

Угол ε_2 меньше предельного ($\varepsilon_{2пред} = \arcsin(1/n) = 39{,}9°$), поэтому на второй грани луч преломится и выйдет из призмы;

3) так как $\sin\varepsilon_2 / \sin\varepsilon'_1 = 1/n$, то $\varepsilon'_1 = \arcsin(n\sin\varepsilon_2) = 54{,}1°$. Теперь найдем углы γ и γ':

$$\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon'_2 = 11{,}3° \quad \text{и} \quad \gamma' = \varepsilon'_1 - \varepsilon_2 = 22{,}8°.$$

По формуле (1) находим

$$\sigma = \gamma + \gamma' = 34{,}1°.$$

Пример 2. Оптическая система представляет собой тонкую плосковыпуклую стеклянную линзу, выпуклая поверхность которой посеребрена. Определить главное фокусное расстояние f такой системы, если радиус кривизны R сферической поверхности линзы равен 60 см.

Р е ш е н и е. Пусть на линзу падает параксиальный луч KL, параллельный главной оптической оси MN линзы (рис. 28.3). Так как луч KL перпендикулярен плоской поверхности линзы, то он проходит ее без преломления. На сферическую посеребренную поверхность луч падает в точке L под углом ε_1 и отражается от нее под углом $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$. Отраженный луч падает на границу плоской поверхности линзы под углом $2\varepsilon_1$ и по выходе из линзы пересекает главную оптическую ось в точке F, образуя с осью угол ε_2. Длина полученного при этом отрезка FP и равна искомому фокусному расстоянию рассматриваемой оптической системы.

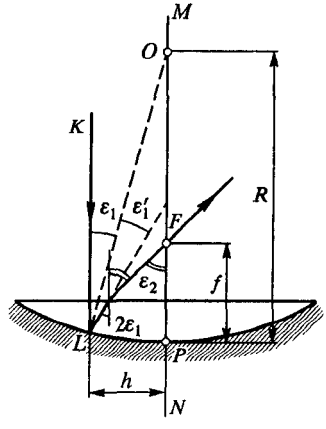


Рис. 28.3

Если учесть, что в силу параксиальности луча KL углы ε_1 и ε_2 малы, а их синусы и тангенсы практически равны самим углам, выраженным в радианах, то из рис. 28.3 следует

$$f = \frac{h}{\varepsilon_2} = \frac{R\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = R\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (2)$$

Входящее в формулу (2) отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ углов найдем, пользуясь законом преломления света, который в нашем случае записывается в виде $2\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 1/n$, откуда

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}n.$$

Подставив это отношение углов в формулу (2), найдем

$$f = \frac{R}{2n}. \qquad (3)$$

Такой же результат можно получить и из формальных соображений. Так как луч KL последовательно проходит линзу, отражается от вогнутого зеркала и еще раз проходит линзу, то данную оптическую систему можно рассматривать как центрированную систему, состоящую из сложенных вплотную двух плосковыпуклых линз и сферического зеркала. Фокусное расстояние оптической системы может быть найдено по формуле

$$f = \frac{1}{D},$$

где D — оптическая сила системы.

Как известно, оптическая сила системы равна алгебраической сумме оптических сил отдельных компонентов системы. В нашем случае

$$D = (n-1)\frac{1}{R} + \frac{2}{R} + (n-1)\frac{1}{R} = \frac{2n}{R}, \quad \text{т. е.} \quad f = \frac{1}{D} = \frac{R}{2n},$$

что совпадает с результатом, выраженным формулой (3).

ЗАДАЧИ

Отражение и преломление света

28.1. Два плоских прямоугольных зеркала образуют двугранный угол $\varphi = 179°$. На расстоянии $l = 10$ см от линии соприкосновения зеркал и на одинаковом расстоянии от каждого зеркала находится точечный источник света. Определить расстояние d между мнимыми изображениями источника в зеркалах.

28.2. На сферическое зеркало падает луч света. Найти построением ход луча после отражения в двух случаях: а) от вогнутого

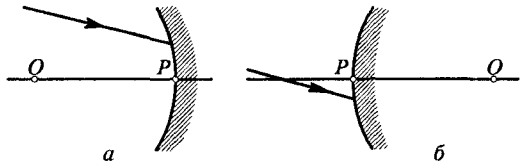


Рис. 28.4

зеркала (рис. 28.4*а*); б) от выпуклого зеркала (рис. 28.4*б*). На рисунке: P — полюс зеркала; O — оптический центр.

28.3. Вогнутое сферическое зеркало дает на экране изображение предмета, увеличенное в $\Gamma = 4$ раза. Расстояние a от предмета до зеркала равно 25 см. Определить радиус R кривизны зеркала.

28.4. Фокусное расстояние f вогнутого зеркала равна 15 см. Зеркало дает действительное изображение предмета, уменьшенное в три раза. Определить расстояние a от предмета до зеркала.

28.5. На рис. 28.5*а*, *б* указаны положения главной оптической оси MN сферического зеркала, светящейся точки S и ее изображения S'. Найти построением положения оптического центра O

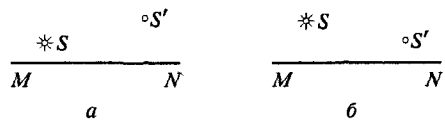


Рис. 28.5

зеркала, его полюса P и главного фокуса F. Определить, вогнутым или выпуклым является данное зеркало. Будет ли изображение действительным или мнимым?

28.6. Вогнутое зеркало дает на экране изображение Солнца в виде кружка диаметром $d = 28$ мм. Диаметр Солнца на небе в угловой мере $\beta = 32'$. Определить радиус R кривизны зеркала.

28.7. Радиус R кривизны выпуклого зеркала равен 50 см. Предмет высотой $h = 15$ см находится на расстоянии a, равном 1 м, от

зеркала. Определить расстояние b от зеркала до изображения и его высоту H.

28.8. На рис. 28.6*а*, *б* указаны положения главной оптической оси MN сферического зеркала и ход луча *1*. Построить ход луча *2* после отражения его от зеркала.

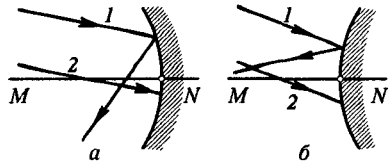


Рис. 28.6

28.9. На столе лежит лист бумаги. Луч света, падающий на бумагу под углом $\varepsilon = 30°$, дает на ней светлое пятно. Насколько сместится это пятно, если на бумагу положить плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d = 5$ см?

28.10. Луч падает под углом $\varepsilon = 60°$ на стеклянную пластинку толщиной $d = 30$ мм. Определить боковое смещение Δx луча после выхода из пластинки.

28.11. Пучок параллельных лучей падает на толстую стеклянную пластину под углом $\varepsilon = 60°$, и преломляясь переходит в стекло. Ширина a пучка в воздухе равна 10 см. Определить ширину b пучка в стекле.

28.12. Луч света переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2. Показать, что если угол между отраженным и преломленным лучами равен $\pi/2$, то выполняется условие $\operatorname{tg}\varepsilon_1 = n_2/n_1$ (ε_1 — угол падения).

28.13. Луч света падает на грань призмы с показателем преломления n под малым углом. Показать, что если преломляющий угол θ призмы мал, то угол отклонения σ лучей не зависит от угла падения и равен $\theta(n-1)$.

28.14. На стеклянную призму с преломляющим углом $\theta = 60°$ падает луч света. Определить показатель преломления n стекла, если при симметричном ходе луча в призме угол отклонения $\sigma = 40°$.

28.15. Преломляющий угол θ стеклянной призмы равен 30°. Луч света падает на грань призмы перпендикулярно ее поверхности и выходит в воздух из другой грани, отклоняясь на угол $\sigma = 20°$ от первоначального направления. Определить показатель преломления n стекла.

28.16. Луч света падает на грань стеклянной призмы перпендикулярно ее поверхности и выходит из противоположной грани, отклонившись на угол $\sigma = 25°$ от первоначального направления. Определить преломляющий угол θ призмы.

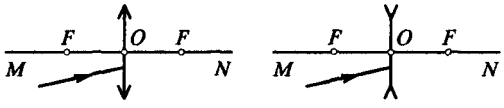
28.17. На грань стеклянной призмы с преломляющим углом $\theta = 60°$ падает луч света под углом $\varepsilon_1 = 45°$. Найти угол преломления ε_2' луча при выходе из призмы и угол отклонения σ луча от первоначального направления.

28.18. Преломляющий угол θ призмы равен 60°. Угол наименьшего отклонения луча от первоначального направления $\sigma = 30°$. Определить показатель преломления n стекла, из которого изготовлена призма.

28.19. Преломляющий угол θ призмы, имеющей форму острого клина, равен 2°. Определить угол наименьшего отклонения $\sigma_{\min}$ луча при прохождении через призму, если показатель преломления n стекла призмы равен 1,6.

Оптические системы

28.20. На тонкую линзу падает луч света. Найти построением ход луча после преломления его линзой: а) собирающей

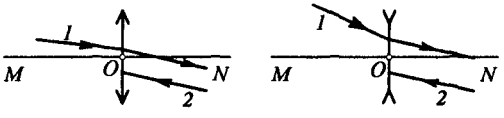


а *б*

Рис. 28.7

(рис. 28.7*а*); б) рассеивающей (рис. 28.7*б*). На рисунке: O — оптический центр линзы; F — главный фокус.

28.21. На рис. 28.8*а*, *б*, указаны положения главной оптической оси MN линзы и ход луча *1*. Построить [1]) ход луча *2* после преломления его линзой.



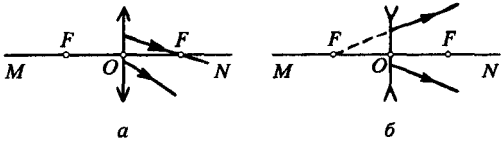
а *б*

Рис. 28.8

28.22. Найти построением положение светящейся точки, если известен ход лучей после преломления их в линзах: а) собирающей (рис. 28.9*а*); б) рассеивающей (рис. 28.9*б*). На рисунке: O — оптический центр линзы; F — ее главный фокус.

28.23. На рис. 28.10*а*, *б* указаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Найти построением [1]) положения оптического центра O

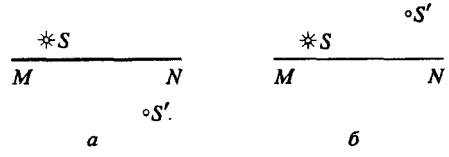
[1]) Считать, что среды по обе стороны линзы одинаковы.



а *б*

Рис. 28.9

линзы и ее фокусов F. Указать, собирающей или рассеивающей будет данная линза. Будет ли изображение действительным или мнимым?



а *б*

Рис. 28.10

28.24. Линза, расположенная на оптической скамье между лампочкой и экраном, дает на экране резко увеличенное изображение лампочки. Когда лампочку передвинули $\Delta l = 40$ см ближе к экрану, на нем появилось резко уменьшенное изображение лампочки. Определить фокусное расстояние f линзы, если расстояние l от лампочки до экрана равно 80 см.

28.25. Каково наименьшее возможное расстояние l между предметом и его действительным изображением, создаваемым собирающей линзой с главным фокусным расстоянием $f = 12$ см?

28.26. Человек движется вдоль главной оптической оси объектива фотоаппарата со скоростью $v = 5$ м/с. С какой скоростью u необходимо перемещать матовое стекло фотоаппарата, чтобы изображение человека на нем все время оставалось резким? Главное фокусное расстояние f объектива равно 20 см. Вычисления выполнить для случая, когда человек находился на расстоянии $a = 10$ м от фотоаппарата.

28.27. Из стекла требуется изготовить плосковыпуклую линзу, оптическая сила D которой равна 5 дптр. Определить радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы.

28.28. Двояковыпуклая линза имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей. При каком радиусе кривизны R поверхностей линзы главное фокусное расстояние f ее будет равно 20 см?

28.29. Отношение k радиусов кривизны поверхностей линзы равно 2. При каком радиусе кривизны R выпуклой поверхности оптическая сила D линзы равна 10 дптр?

28.30. Определить радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы, если при отношении k радиусов кривизны поверхностей линзы, равном 3, ее оптическая сила $D = -8$ дптр.

28.31. Из двух часовых стекол с одинаковыми радиусами R кривизны, равными 0,5 м, склеена двояковогнутая «воздушная» линза. Какой оптической силой D будет обладать такая линза в воде?

28.32. Линза изготовлена из стекла, показатель преломления которого для красных лучей $n_к = 1{,}50$, для фиолетовых $n_ф = 1{,}52$. Радиусы кривизны R обеих поверхностей линзы одинаковы и равны 1 м. Определить расстояние Δf между фокусами линзы для красных и фиолетовых лучей.

28.33. Определить главное фокусное расстояние f плосковыпуклой линзы, диаметр d которой равен 10 см. Толщина h в центре линзы равна 1 см, толщину у краев можно принять равной нулю.

28.34. Определить оптическую силу D мениска [2]), если радиусы кривизны R_1 и R_2 его выпуклой и вогнутой поверхностей равны соответственно 1 м и 40 см.

28.35. Главное фокусное расстояние f собирающей линзы в воздухе равно 10 см. Определить, чему оно равно: 1) в воде; 2) в коричном масле.

28.36. У линзы, находящейся в воздухе, фокусное расстояние $f_1 = 5$ см, а погруженной в раствор сахара $f_2 = 35$ см. Определить показатель преломления n раствора.

28.37. Тонкая линза, помещенная в воздухе, обладает оптической силой $D_1 = 5$ дптр, а в некоторой жидкости $D_2 = -0{,}48$ дптр. Определить показатель преломления n_2 жидкости, если показатель преломления n_1 стекла, из которого изготовлена линза, равен 1,52.

28.38. Доказать, что оптическая сила D системы двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме оптических сил D_1 и D_2 каждой из этих линз.

28.39. В вогнутое сферическое зеркало радиусом $R = 20$ см налит тонким слоем глицерин. Определить главное фокусное расстояние f такой системы.

28.40. Плосковыпуклая линза имеет оптическую силу $D_1 = 4$ дптр. Выпуклую поверхность линзы посеребрили. Найти оптическую силу D_2 такого сферического зеркала.

28.41. Поверх выпуклого сферического зеркала радиусом кривизны $R = 20$ см налили тонкий слой воды. Определить главное фокусное расстояние f такой системы.

28.42. Человек без очков читает книгу, располагая ее перед собой на расстоянии $a = 12{,}5$ см. Какой оптической силы D очки следует ему носить?

28.43. Пределы аккомодации глаза близорукого человека без очков лежат между $a_1 = 16$ см и $a_2 = 80$ см. В очках он хорошо

---

[2]) Мениском называют линзу, ограниченную двумя сферическими поверхностями, имеющими одинаковое направление кривизны.

видит удаленные предметы. На каком минимальном расстоянии d он может держать книгу при чтении в очках?

28.44. Лупа, представляющая собой двояковыпуклую линзу, изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1{,}6$. Радиусы кривизны R поверхностей линзы одинаковы и равны 12 см. Определить увеличение Γ лупы.

28.45. Лупа дает увеличение $\Gamma = 2$. Вплотную к ней приложили собирающую линзу с оптической силой $D_1 = 20$ дптр. Какое увеличение Γ_2 будет давать такая составная лупа?

28.46. Оптическая сила D объектива телескопа равна 0,5 дптр. Окуляр действует как лупа, дающая увеличение $\Gamma_1 = 10$. Какое увеличение Γ_2 дает телескоп?

28.47. При окуляре с фокусным расстоянием $f = 50$ мм телескоп дает угловое увеличение $\Gamma_1 = 60$. Какое угловое увеличение Γ_2 даст один объектив, если убрать окуляр и рассматривать действительное изображение, созданное объективом, невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения?

28.48. Фокусное расстояние f_1 объектива телескопа равно 1 м. В телескоп рассматривали здание, находящееся на расстоянии $a = 1$ км. В каком направлении и на сколько нужно передвинуть окуляр, чтобы получить резкое изображение в двух случаях: 1) если после здания будут рассматривать Луну; 2) если вместо Луны будут рассматривать близкие предметы, находящиеся на расстоянии $a_1 = 100$ м?

28.49. Телескоп наведен на Солнце. Фокусное расстояние f_1 объектива телескопа равно 3 м. Окуляр с фокусным расстоянием $f_2 = 50$ мм проецирует действительное изображение Солнца, созданное объективом, на экран, расположенный на расстоянии $b = 60$ см от окуляра. Плоскость экрана перпендикулярна оптической оси телескопа. Определить линейный диаметр d изображения Солнца на экране, если диаметр Солнца на небе виден невооруженным глазом под углом $\alpha = 32'$.

28.50. Фокусное расстояние f_1 объектива микроскопа равно 8 мм, окуляра $f_2 = 4$ см. Предмет находится на $\Delta a = 0{,}5$ мм дальше от объектива, чем главный фокус. Определить увеличение Γ микроскопа.

28.51. Фокусное расстояние f_1 объектива микроскопа равно 1 см, окуляра $f_2 = 2$ см. Расстояние от объектива до окуляра $L = 23$ см. Какое увеличение Γ дает микроскоп? На каком расстоянии a от объектива находится предмет?

28.52. Расстояние Δ между фокусами объектива и окуляра внутри микроскопа равно 16 см. Фокусное расстояние f_1 объектива равно 1 мм. С каким фокусным расстоянием f_2 следует взять окуляр, чтобы получить увеличение $\Gamma = 500$?

§ 29. Фотометрия

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Световой поток Φ_v, испускаемый изотропным[3]) точечным источником света в пределах телесного угла Ω, в вершине которого находится источник, выражается формулой

$$\Phi_v = I\Omega,$$

где I — сила света источника; $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$; θ — угол между осью конуса и его образующей.

• Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником света,

$$\Phi_0 = 4\pi I.$$

• Освещенность поверхности определяется соотношением

$$E_v = \frac{\Phi_v}{S},$$

где S — площадь поверхности, по которой равномерно распределяется падающий на нее световой поток Φ_v.

Освещенность, создаваемая изотропным точечным источником света,

$$E_v = \frac{I}{r^2}\cos\varepsilon,$$

где r — расстояние от поверхности до источника света; ε — угол падения лучей.

• Сила света любого элемента поверхности косинусного излучателя

$$I = I_0\cos\varphi,$$

где φ — угол между нормалью к элементу поверхности и направлением наблюдения; I_0 — сила света элемента поверхности по направлению нормали к этому элементу.

• Яркость светящейся поверхности

$$L_v = \frac{I}{\sigma},$$

где I — сила света в направлении наблюдения; σ — площадь проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную этому направлению.

• Светимость определяется соотношением

$$M_v = \frac{\Phi_v}{S},$$

где Φ_v — световой поток, испускаемый поверхностью; S — площадь этой поверхности.

---

[3]) Источник называется изотропным, если сила света источника одинакова во всех направлениях.

Светимость косинусных излучателей

$$M_v = \pi L_v.$$

Примечание. В соответствии с ГОСТ 26148–84 световые величины обозначаются теми же буквами, что и соответствующие им энергетические величины излучений. Отличаются обозначения только индексами: e — для энергетических величин и v — для световых. Но в обозначениях световых величин индекс v разрешается опускать в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям (например, энергетическая яркость — L_e, яркость — L_v или L).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Прожектор ближнего освещения дает пучок света в виде усеченного конуса с углом раствора $2\theta_0 = 40°$. Световой поток Φ прожектора равен $8 \cdot 10^4$ лм. Допуская, что световой поток распределен внутри конуса равномерно, определить силу света I прожектора.

Решение. Сила света I изотропного источника равна отношению светового потока Φ к телесному углу Ω, в пределах которого распространяется световой поток, т. е.

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}. \qquad (1)$$

Выразим телесный угол Ω через плоский угол θ, равный половине раствора. По определению телесного угла

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}s}{r^2},$$

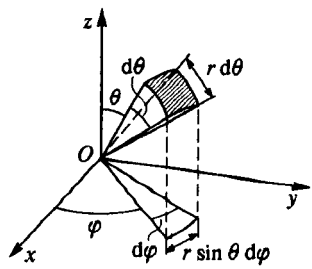


Рис. 29.1

где $\mathrm{d}s$ — элемент площади поверхности сферы радиуса r (рис. 29.1):

$$\mathrm{d}s = (r\,\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi).$$

Тогда

$$\mathrm{d}\omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах по θ от 0 до θ_0 и по φ от 0 до 2π:

$$\Omega = \int_0^{\theta_0} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = (1 - \cos\theta_0) \cdot 2\pi. \qquad (2)$$

Подставим полученное выражение Ω в формулу (1)

$$I = \frac{\Phi_v}{2\pi(1 - \cos\theta_0)}.$$

Подставим в эту формулу числовые значения ($\Phi_v = 8 \cdot 10^4$ лм; $\theta_0 = 20°$; $\cos 20° = 0{,}940$) и произведем вычисления:

$$I = 2{,}11 \cdot 10^5 \text{ кд}.$$

Пример 2. Люминесцентная цилиндрическая лампа диаметром $d = 2{,}5$ см и длиной $l = 40$ см создает на расстоянии $r = 5$ м в направлении, перпендикулярном оси лампы, освещенность $E_v = 2$ лк. Принимая лампу за косинусный излучатель, определить: 1) силу света I в данном направлении; 2) яркость L; 3) светимость M лампы.

Решение. 1. Больший из двух размеров лампы — длина — в 12 раз меньше расстояния, на котором измерена освещенность. Следовательно, для вычисления силы света в данном направлении можно принять лампу за точечный источник и применить формулу

$$E = \frac{I}{r^2}, \quad \text{откуда} \quad I = Er^2.$$

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$I = 25 \text{ кд}.$$

2. Для вычисления яркости применим формулу

$$L = \frac{I}{\sigma},$$

где σ — площадь проекции протяженного источника света на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения.

В случае цилиндрической люминесцентной лампы проекция имеет форму прямоугольника длиной l и шириной d. Следовательно,

$$L = \frac{I}{ld}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$L = 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ кд/м}^2.$$

3. Так как люминесцентную лампу можно считать косинусным излучателем, то ее светимость

$$M = \pi L = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ лк}.$$

ЗАДАЧИ[4])

Световой поток и сила света

29.1. Определить силу света I точечного источника, полный световой поток Φ которого равен 1 лм.

29.2. Лампочка, потребляющая мощность $P = 75$ Вт, создает на расстоянии $r = 3$ м при нормальном падении лучей освещенность

[4]) При решении задач по фотометрии электрические лампочки принимать за изотропные точечные источники света.

$E = 8$ лк. Определить удельную мощность p лампочки (в ваттах на канделу) и световую отдачу η лампочки (в люменах на ватт).

29.3. В вершине кругового конуса находится точечный источник света, посылающий внутри конуса световой поток $\Phi = 76$ лм. Сила света I источника равна 120 кд. Определить телесный угол Ω и угол раствора 2θ конуса.

29.4. Какую силу тока I покажет гальванометр, присоединенный к селеновому фотоэлементу, если на расстоянии $r = 75$ см от него поместить лампочку, полный световой поток Φ_0 которой равен $1{,}2 \cdot 10^3$ лм? Площадь рабочей поверхности фотоэлемента равна 10 см^2, чувствительность $i = 3 \cdot 10^{-4}$ А/лм.

Освещенность

29.5. Лампочка силой света $I = 80$ кд находится на расстоянии $a = 2$ м от собирающей линзы с диаметром $d = 12$ см и главным фокусным расстоянием $f = 40$ см. Линза дает на экране, расположенном на расстоянии $b = 30$ см от линзы, круглое светлое пятно. Найти освещенность E экрана на месте этого пятна. Поглощением света в линзе пренебречь.

29.6. При печатании фотоснимка негатив освещался в течение $t_1 = 3$ с лампочкой силой света $I_1 = 15$ кд с расстояния $r_1 = 50$ см. Определить время t_2, в течение которого нужно освещать негатив лампочкой силой света $I_2 = 60$ кд с расстояния $r_2 = 2$ м, чтобы получить отпечаток с такой же степенью почернения, как и в первом случае?

29.7. На высоте $h = 3$ м над землей и на расстоянии $r = 4$ м от стены висит лампа силой света $I = 100$ кд. Определить освещенность E_1 стены и E_2 горизонтальной поверхности земли у линии их пересечения.

29.8. На мачте высотой $h = 8$ м висит лампа силой света $I = 10^3$ кд. Принимая лампу за точечный источник света, определить, на каком расстоянии l от основания мачты освещенность E поверхности земли равна 1 лк.

29.9. Над центром круглой площадки висит лампа. Освещенность E_1 в центре площадки равна 40 лк, E_2 на краю площадки равна 5 лк. Под каким углом ε падают лучи на край площадки?

29.10. Над центром круглого стола радиусом $r = 80$ см на высоте $h = 60$ см висит лампа силой света $I = 100$ кд. Определить: 1) освещенность E_1 в центре стола; 2) освещенность E_2 на краю стола; 3) световой поток Φ, падающий на стол; 4) среднюю освещенность $\langle E \rangle$ стола.

29.11. На какой высоте h над центром круглого стола радиусом $r = 1$ м нужно повесить лампочку, чтобы освещенность на краю стола была максимальной?

29.12. Отверстие в корпусе фонаря закрыто плоским матовым стеклом размером 10×15 см. Сила света I фонаря в направлении, составляющем угол $\varphi = 60°$ с нормалью, равна 15 кд. Определить яркость L стекла.

29.13. Вычислить и сравнить между собой силы света раскаленного металлического шарика яркостью $L_1 = 3 \cdot 10^6$ кд/м^2 и шарового светильника яркостью $L_2 = 5 \cdot 10^3$ кд/м^2, если их диаметры d_1 и d_2 соответственно равны 2 мм и 20 см.

29.14. Светильник из матового стекла имеет форму шара диаметром $d = 20$ см. Сила света I шара равна 80 кд. Определить полный световой поток Ф, светимость M и яркость L светильника.

29.15. Солнце, находясь вблизи зенита, создает на горизонтальной поверхности освещенность $E = 10^5$ лк. Диаметр Солнца виден под углом $\alpha = 32'$. Определить видимую яркость L Солнца.

29.16. Длина l раскаленной добела металлической нити равна 30 см, диаметр $d = 0{,}2$ мм. Сила света I нити в перпендикулярном ей направлении равна 24 кд. Определить яркость L нити.

29.17. Яркость L светящегося куба одинакова во всех направлениях и равна $5 \cdot 10^3$ кд/м^2. Ребро a куба равно 20 см. В каком направлении сила света I куба максимальна? Определить максимальную силу света $I_{\max}$ куба.

29.18. Светящийся конус имеет одинаковую во всех направлениях яркость $B = 2 \cdot 10^3$ кд/м^2. Основание конуса не светится. Диаметр d основания равен 20 см, высота $h = 15$ см. Определить силу света I конуса в направлениях: 1) вдоль оси; 2) перпендикулярном оси.

29.19. На высоте $h = 1$ м над горизонтальной плоскостью параллельно ей расположен небольшой светящийся диск. Сила света I_0 диска в направлении его оси равна 100 кд. Принимая диск за точечный источник с косинусным распределением силы света, найти освещенность E горизонтальной плоскости в точке A, удаленной на расстояние $r = 3$ м от точки, расположенной под центром диска.

29.20. На какой высоте h над горизонтальной плоскостью (см. предыдущую задачу) нужно поместить светящийся диск, чтобы освещенность в точке A была максимальной?

29.21. Определить освещенность E, светимость M и яркость L киноэкрана, равномерно рассеивающего свет во всех направлениях, если световой поток Ф, падающий на экран из объектива киноаппарата (без киноленты), равен $1{,}75 \cdot 10^3$ лм. Размер экрана $5 \times 3{,}6$ м, коэффициент отражения $\rho = 0{,}75$.

29.22. На какой высоте h нужно повесить лампочку силой света $I = 10$ кд над листом матовой белой бумаги, чтобы яркость L

бумаги была равна 1 кд/м^2, если коэффициент отражения ρ бумаги равен 0,8?

29.23. Освещенность E поверхности, покрытой слоем сажи, равна 150 лк, яркость L одинакова во всех направлениях и равна 1 кд/м^2. Определить коэффициент отражения ρ сажи.

§ 30. Интерференция света

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n},$$

где c — скорость света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды.

• Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l — геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

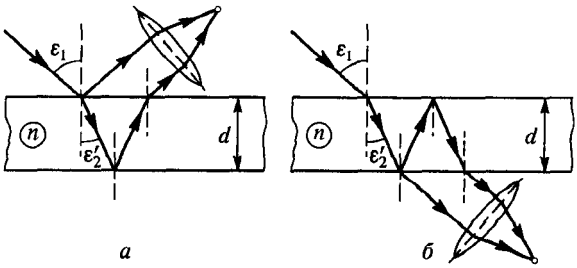
• Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_1 - L_2.$$

• Оптическая разность хода световых волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки или пленки, находящейся в воздухе (рис. 30.1a),

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon_1} + \frac{\lambda}{2}, \quad \text{или} \quad \Delta = 2dn\cos\varepsilon_2' + \frac{\lambda}{2},$$

где d — толщина пластины (пленки); ε_1 — угол падения; ε_2' — угол преломления, λ — длина световой волны в вакууме.



а *б*

Рис. 30.1

Второе слагаемое в этих формулах учитывает изменение оптической длины пути световой волны на $\lambda/2$ при отражении ее от среды оптически более плотной.

В проходящем свете (рис. 30.1*б*) отражение световой волны происходит от среды оптически менее плотной и дополнительной разности хода световых лучей не возникает.

• Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с оптической разностью хода волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}.$$

• Условие максимумов интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

• Условие минимумов интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

• Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем)

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}},$$

где k — номер кольца ($k = 1, 2, 3, \ldots$); R — радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной стеклянной пластиной.

Радиусы темных колец в отраженном свете (или светлых в проходящем)

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A, перпендикулярный экрану, и луч S_1BA, отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (рис. 30.2). Расстояние l_1 экрана от источника равно 1 м, расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм. Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана — усиление или ослабление интенсивности; 2) как изменится интенсивность в точке A, если на пути луча S_1A перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную пластину стекла ($n = 1{,}55$) толщиной $d = 6$ мкм.

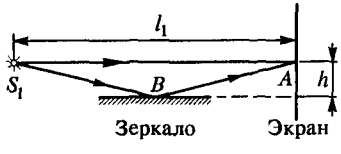


Рис. 30.2

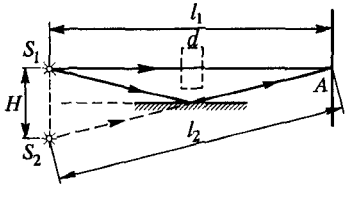


Рис. 30.3

Решение. Построим мнимое изображение S_2 источника S_1 в зеркале (рис. 30.3). Источники S_1 и S_2 являются когерентными, поэтому

при сложении волн, приходящих от этих источников на экран, возникает интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода Δ интерферирующих лучей, другими словами, от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода:

$$m = \frac{\Delta}{\lambda/2}. \tag{1}$$

Если m — целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m — целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу), или частичное ослабление (если m ближе к нечетному числу).

1. Оптическая разность хода Δ_1 будет складываться из геометрической разности $l_2 - l_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды оптически более плотной. Таким образом,

$$\Delta_1 = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

Так как $l_2 = \sqrt{l_1^2 + H^2}$ (рис. 30.3), то

$$l_2 - l_1 = l_1\sqrt{1 + \left(\frac{H}{l_1}\right)^2} - l_1 = l_1\left[\sqrt{1 + \left(\frac{H}{l_1}\right)^2} - 1\right].$$

Величина $H/l_1 \ll 1$, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой (см. табл. 3) $\sqrt{1+a} \approx 1 + a/2$ при $a \ll 1$. Применив ее, получим

$$l_2 - l_1 \approx l_1\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{l_1}\right)^2 - 1\right] = \frac{H^2}{2l_1}.$$

Подставив полученное выражение $l_2 - l_1$ в формулу (2), найдем $\Delta_1 = \frac{H^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}$. Зная Δ_1, по формуле (1) найдем m_1:

$$m_1 = \frac{H^2/(2l_1) + \lambda/2}{\lambda/2} = \frac{H^2}{l_1\lambda} + 1.$$

Так как $H = 2h$, то окончательно получим

$$m_1 = 4\frac{h^2}{l_1\lambda} + 1.$$

После вычисления найдем

$$m_1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

2. Стеклянная пластина толщиной d, поставленная на пути луча S_1A (рис. 30.3), изменит оптическую длину пути. Теперь оптическая длина пути L будет складываться из геометрической длины пути $l_1 - d$ и оптической длины пути nd луча в самой пластине, т. е.

$$L = (l_1 - d) + nd = l_1 + (n-1)d.$$

Оптическая разность хода лучей

$$\Delta_2 = l_2 - L + \frac{\lambda}{2} = l_2 - [l_1 + (n-1)d] + \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta_2 = \Delta_1 - (n-1)d.$$

Пользуясь формулой (1), найдем

$$m_2 = \frac{\Delta_2}{\lambda/2} = \frac{\Delta_1 - (n-1)d}{\lambda/2} = m_1 - 2\frac{d(n-1)}{\lambda}.$$

Произведя вычисления, получим

$$m_2 = 19{,}8.$$

Число половин длин волн оказалось дробным. Так как 19,8 ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19, то в точке A будет частичное усиление.

Пример 2. На толстую стеклянную пластину, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления n_2 вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину d пленки.

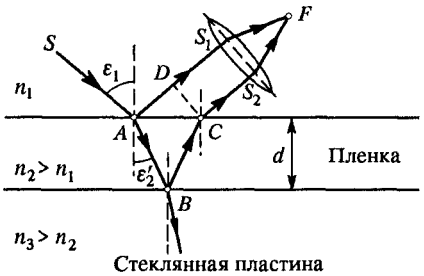


Рис. 30.4

Решение. Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA. Ход этого пучка в случае, когда угол падения $\varepsilon_1 \neq 0$, показан на рис. 30.4. В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу L, пересекаются в ее фокусе F и интерферируют между собой.

Так как показатель преломления воздуха ($n_1 = 1{,}00029$) меньше показателя преломления вещества пленки ($n_2 = 1{,}4$), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла ($n_3 = 1{,}5$), то в обоих

случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B. Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе F линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого пучка не было.

Как известно, условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволн: $\Delta = (2k+1)(\lambda/2)$.

Как видно из рис. 30.4, оптическая разность хода

$$\Delta = l_2 n_2 - l_1 n_1 = \big(|AB| + |BC|\big)n_2 - |AD|n_1.$$

Следовательно, условие минимума интенсивность света примет вид

$$\big(|AB| + |BC|\big)n_2 - |AD|n_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Если угол падения ε_1 будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \to 0$ и $|AB| + |BC| \to 2d$, где d — толщина пленки. В пределе при $\varepsilon_1 = 0$ будем иметь

$$\Delta = 2dn_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда искомая толщина пленки

$$d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = 0{,}11 \text{ мкм}, \quad d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0{,}33 \text{ мкм} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 3. На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. В возникшей при этом интерференционной картине на отрезке длиной $l = 1$ см наблюдается 10 полос. Определить преломляющий угол θ клина.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти пучки когерентны, и поэтому наблюдается устойчивая картина интерференции. Так как интерференционные полосы наблюдаются при малых углах клина, то отраженные пучки света *1* и *2* (рис. 30.5) будут практически параллельны.

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода кратна нечетному числу половины длины волны:

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Разность хода Δ двух волн складывается из разности оптических длин путей этих волн ($2dn\cos\varepsilon_2'$) и половины длины волны ($\lambda/2$). Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую

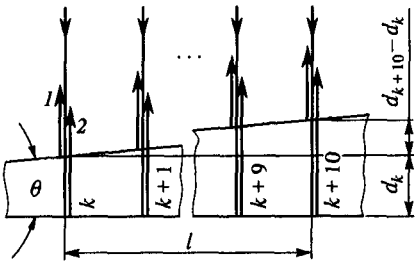


Рис. 30.5

при отражении волны от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (3) значение разности хода Δ, получим

$$2d_k n\cos\varepsilon_2' + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{4}$$

где n — коэффициент преломления стекла ($n = 1{,}5$); d_k — толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k; ε_2' — угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления ε_2' равен нулю, а $\cos\varepsilon_2' = 1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (4), после упрощения получим

$$2d_k n = k\lambda. \tag{5}$$

Пусть произвольной темной полосе номера k соответствует определенная толщина клина в этом месте d_k, а темной полосе номера $k + 10$ соответствует толщина клина d_{k+10}. Согласно условию задачи, 10 полос укладываются на отрезке длиной $l = 1$ см. Тогда искомый угол (рис. 30.5) будет равен

$$\theta = \frac{d_{k+10} - d_k}{l}, \tag{6}$$

где из-за малости преломляющего угла $\sin\theta \approx \theta$ (угол θ выражен в радианах).

Вычислив d_k и d_{k+10} из формулы (5), подставив их в формулу (6) и произведя преобразования, найдем

$$\theta = \frac{5\lambda}{nl}.$$

После вычисления получим

$$\theta = 2\cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Выразим θ в градусах. Для этого воспользуемся соотношением между радианом и секундой (см. табл. 6): 1 рад $= 2{,}06'' \cdot 10^5$, т. е.

$$\theta = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}06'' \cdot 10^5 = 41{,}2'',$$

или в соответствии с общим правилом перевода из радиан в градусы

$$\theta_{\text{град}} = \frac{180}{\pi}\theta_{\text{рад}}, \quad \theta = \frac{180}{3{,}14} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1{,}15^\circ \cdot 10^{-2} = 0{,}688' = 41{,}2''.$$

Искомый угол равен $41{,}2''$.

ЗАДАЧИ

Интерференция волн от двух когерентных источников

30.1. Сколько длин волн монохроматического света с частотой колебаний $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц уложится на пути длиной $l = 1{,}2$ мм: 1) в вакууме; 2) в стекле?

30.2. Определить длину l_1 отрезка, на котором укладывается столько же длин волн в вакууме, сколько их укладывается на отрезке $l_2 = 3$ мм в воде.

30.3. Какой длины l_1 путь пройдет фронт волны монохроматического света в вакууме за то же время, за какое он проходит путь длиной $l_2 = 1$ м в воде?

30.4. На пути световой волны, идущей в воздухе, поставили стеклянную пластину толщиной $h = 1$ мм. На сколько изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластину: 1) нормально; 2) под углом $\varepsilon = 30^\circ$?

30.5. На пути монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм находится плоскопараллельная стеклянная пластина толщиной $d = 0{,}1$ мм. Свет падает на пластину нормально. На какой угол φ следует повернуть пластину, чтобы оптическая длина пути L изменилась на $\lambda/2$?

30.6. Два параллельных пучка световых волн I и II падают на стеклянную призму с преломляющим углом $\theta = 30^\circ$ и после преломления выходят из нее (рис. 30.6). Найти оптическую разность хода Δ световых волн после преломления их призмой.

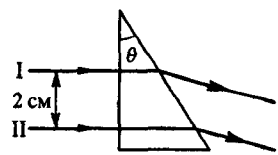


Рис. 30.6

30.7. Оптическая разность хода Δ двух интерферирующих волн монохроматического света равна $0{,}3\lambda$. Определить разность фаз $\Delta\varphi$.

30.8. Найти все длины волн видимого света (от 0,76 до 0,38 мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода Δ интерферирующих волн, равной 1,8 мкм.

30.9. Расстояние d между двумя когерентными источниками света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) равно 0,1 мм. Расстояние b между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние l от источников до экрана.

30.10. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ, испускаемой источником монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

30.11. В опыте Юнга расстояние d между щелями равно 0,8 мм, длина волны $\lambda = 640$ нм. На каком расстоянии l от щелей следует расположить экран, чтобы ширина b интерференционной полосы оказалась равной 2 мм?

30.12. В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 3 м. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определить ширину b полос интерференции на экране.

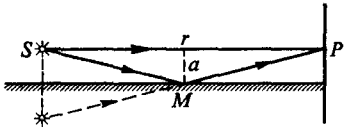


Рис. 30.7

30.13. Источник S света ($\lambda = 0{,}6$ мкм) и плоское зеркало M расположены, как показано на рис. 30.7 (зеркало Ллойда). Что будет наблюдаться в точке P экрана, где сходятся лучи SP и SMP, — свет или темнота, если $|SP| = r = 2$ м, $a = 0{,}55$ мм, $|SM| = |MP|$?

Интерференция света в тонких пленках

30.14. При некотором расположении зеркала Ллойда ширина b интерференционной полосы на экране оказалась равной 1 мм. После того как зеркало сместили параллельно самому себе на расстояние $\Delta d = 0{,}3$ мм, ширина интерференционной полосы изменилась. В каком направлении и на какое расстояние Δl следует переместить экран, чтобы ширина интерференционной полосы осталась прежней? Длина волны λ монохроматического света равна 0,6 мкм.

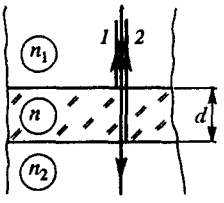


Рис. 30.8

30.15. Плоскопараллельная стеклянная пластинка толщиной $d = 1{,}2$ мкм и показателем преломления $n = 1{,}5$ помещена между двумя средами с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 30.8). Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает нормально на пластинку. Определить оптическую разность хода Δ волн *1* и *2*, отраженных от верхней и нижней поверхностей пластинки, и указать, усиление или ослабление интенсивности света происходит при интерферен-

ции в следующих случаях: 1) $n_1 < n < n_2$; 2) $n_1 > n > n_2$; 3) $n_1 < n > n_2$; 4) $n_1 > n < n_2$.

30.16. На мыльную пленку ($n = 1{,}3$), находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции?

30.17. Пучок монохроматических ($\lambda = 0{,}6$ мкм) световых волн падает под углом $\varepsilon_1 = 30°$ на находящуюся в воздухе мыльную пленку ($n = 1{,}3$). При какой наименьшей толщине d пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? максимально усилены?

30.18. На тонкий стеклянный клин ($n = 1{,}55$) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол α между поверхностями клина равен $2'$. Определить длину световой волны λ, если расстояние b между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм.

30.19. Поверхности стеклянного клина образуют между собой угол $\theta = 0{,}2'$. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Определить ширину b интерференционной полосы.

30.20. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

30.21. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками положили очень тонкую проволочку, расположенную параллельно линии соприкосновения пластинок и находящуюся на расстоянии $l = 75$ мм от нее. В отраженном свете ($\lambda = 0{,}5$ мкм) на верхней пластинке видны интерференционные полосы. Определить диаметр d поперечного сечения проволочки, если на протяжении $a = 30$ мм насчитывается $m = 16$ светлых полос.

30.22. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки приложены одна к другой так, что между ними образовался воздушный клин с углом θ, равным $30''$. На одну из пластинок падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). На каких расстояниях l_1 и l_2 от линии соприкосновения пластинок будут наблюдаться в отраженном свете первая и вторая светлые полосы (интерференционные максимумы)?

30.23. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки образуют клин с углом $\theta = 30''$. Пространство между пластинками заполнено глицерином. На клин нормально к его поверхности падает пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. В отраженном свете наблюдается интерференционная картина. Какое

число N темных интерференционных полос приходится на 1 см длины клина?

30.24. Расстояние $\Delta r_{2,1}$ между вторым и первым темным кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние $\Delta r_{10,9}$ между десятым и девятым кольцами.

30.25. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить толщину d слоя воздуха там, где в отраженном свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) видно первое светлое кольцо Ньютона.

30.26. Диаметр d_2 второго светлого кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) равен 1,2 мм. Определить оптическую силу D плосковыпуклой линзы, взятой для опыта.

30.27. Плосковыпуклая линза с оптической силой $D = 2$ дптр выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус r_4 четвертого темного кольца Ньютона в проходящем свете равен 0,7 мм. Определить длину световой волны.

30.28. Диаметры d_i и d_k двух светлых колец Ньютона соответственно равны 4,0 и 4,8 мм. Порядковые номера колец не определялись, но известно, что между двумя измеренными кольцами расположено три светлых кольца. Кольца наблюдались в отраженном свете ($\lambda = 500$ нм). Найти радиус кривизны плосковыпуклой линзы, взятой для опыта.

30.29. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Радиус r_8 восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 700$ нм) равен 2 мм. Радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы равен 1 м. Найти показатель преломления n жидкости.

30.30. На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен в отраженном свете радиус третьего темного кольца ($k = 3$). Когда пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой заполнили жидкостью, то тот же радиус стало иметь кольцо с номером, на единицу большим. Определить показатель преломления n жидкости.

30.31. В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R_1 = 1$ м, положенную выпуклой стороной на вогнутую поверхность плосковогнутой линзы с радиусом кривизны $R_2 = 2$ м. Определить радиус r_3 третьего темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете.

30.32. Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух одинаковых плосковыпуклых линз радиусом R кривизны равным 1 м, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус r_2 второго светлого

кольца, наблюдаемого в отраженном свете ($\lambda = 660$ нм) при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

Интерференционные приборы

30.33. На экране наблюдается интерференционная картина от двух когерентных источников света с длиной волны $\lambda = 480$ нм. Когда на пути одного из пучков поместили тонкую пластинку из плавленого кварца с показателем преломления $n = 1{,}46$, то интерференционная картина сместилась на $m = 69$ полос. Определить толщину d кварцевой пластинки.

30.34. В оба пучка света интерферометра Жамена были помещены цилиндрические трубки длиной $l = 10$ см, закрытые с обоих концов плоскопараллельными прозрачными пластинками; воздух из трубок был откачан. При этом наблюдалась интерференционная картина в виде светлых и темных полос. В одну из трубок был впущен водород, после чего интерференционная картина сместилась на $m = 23{,}7$ полосы. Найти показатель преломления n водорода. Длина волны λ света равна 590 нм.

30.35. В интерферометре Жамена две одинаковые трубки длиной $l = 15$ см были заполнены воздухом. Показатель преломления n_1 воздуха равен 1,000292. Когда в одной из трубок воздух заменили ацетиленом, то интерференционная картина сместилась на $m = 80$ полос. Определить показатель преломления n_2 ацетилена, если в интерферометре использовался источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}590$ мкм.

30.36. Определить перемещение зеркала в интерферометре Майкельсона, если интерференционная картина сместилась на $m = 100$ полос. Опыт проводился со светом с длиной волны $\lambda = 546$ нм.

30.37. Для измерения показателя преломления аргона в одно из плеч интерферометра Майкельсона поместили пустую стеклянную трубку длиной $l = 12$ см с плоскопараллельными торцовыми поверхностями. При заполнении трубки аргоном (при нормальных условиях) интерференционная картина сместилась на $m = 106$ полос. Определить показатель преломления n аргона, если длина волны λ света равна 639 нм.

30.38. В интерферометре Майкельсона на пути одного из интерферирующих пучков света ($\lambda = 590$ нм) поместили закрытую с обеих сторон стеклянную трубку длиной $l = 10$ см, откачанную до высокого вакуума. При заполнении трубки хлористым водородом произошло смещение интерференционной картины. Когда хлористый водород был заменен бромистым водородом, смещение интерференционной картины возросло на $\Delta m = 42$ полосы. Определить разность Δn показателей преломления бромистого и хлористого водорода.

§ 31. Дифракция света

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Радиус k-й зоны Френеля:
для сферической волны

$$\rho_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}k\lambda},$$

где a — расстояние диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника света; b — расстояние диафрагмы от экрана, на котором ведется наблюдение дифракционной картины; k — номер зоны Френеля; λ — длина волны;

для плоской волны

$$\rho_k = \sqrt{bk\lambda}.$$

• Дифракция света на одной щели при нормальном падении лучей. Условие минимумов интенсивности света

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где a — ширина щели; φ — угол дифракции; k — номер минимума; λ — длина волны.

Условие максимумов интенсивности света

$$a\sin\varphi' = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где φ' — приближенное значение угла дифракции.

• Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей. Условие главных максимумов интенсивности

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где d — период (постоянная) решетки; k — номер главного максимума; φ — угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн.

• Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,$$

где $\Delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda+\Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N — число штрихов решетки; k — порядковый номер дифракционного максимума.

• Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi},$$

линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda}.$$

Для малых углов дифракции

$$D_l \approx f D_\varphi \approx f \frac{k}{d},$$

где f — главное фокусное расстояние линзы, собирающей на экране дифрагирующие волны.

• Разрешающая сила объектива телескопа

$$R = \frac{1}{\beta} = \frac{D}{1{,}22\lambda},$$

где β — наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек в фокальной плоскости объектива могут быть видны раздельно; D — диаметр объектива; λ — длина волны.

• Формула Вульфа–Брэгга

$$2d \sin\theta = k\lambda,$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ — угол скольжения (угол между направлением пучка параллельных лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла), определяющий направление, в котором имеет место зеркальное отражение лучей (дифракционный максимум).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм.

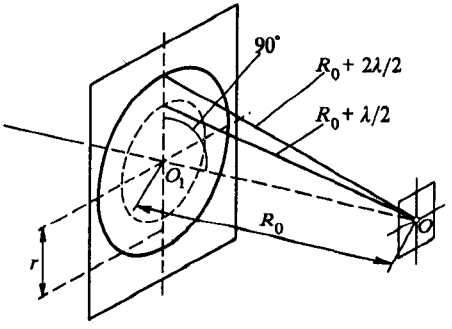


Рис. 31.1

На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана,

при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Решение. Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля.

Из рис. 31.1 следует, что расстояние от точки наблюдения O на экране до края отверстия на 2 $(\lambda/2)$ больше, чем расстояние $R_0 = b_{\max}$.

По теореме Пифагора получим

$$r^2 = \left(b_{\max} + 2\frac{\lambda}{2}\right)^2 - b_{\max}^2 = 2\lambda b_{\max} + \lambda^2.$$

Учтя, что $\lambda \ll b_{\max}$ и что членом, содержащим λ^2, можно пренебречь, последнее равенство перепишем в виде

$$r^2 = 2\lambda b_{\max}, \quad \text{откуда} \quad b_{\max} = \frac{r^2}{2\lambda}.$$

Произведя вычисления по последней формуле, найдем

$$b_{\max} = 1 \text{ м}.$$

Пример 2. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1$ м.

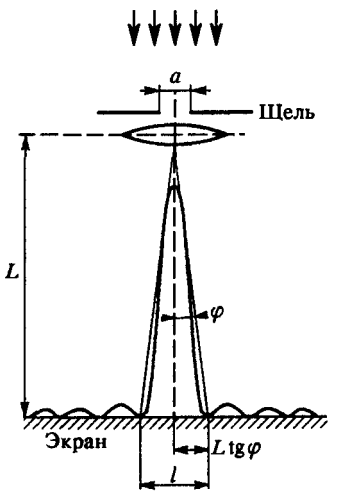


Рис. 31.2

Решение. Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (рис. 31.2).

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda, \qquad (1)$$

где k — порядок минимума; в нашем случае равен единице.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим непосредственно по чертежу: $l = 2L \operatorname{tg} \varphi$. Заметив, что при малых углах $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, перепишем эту формулу в виде

$$l = 2L \sin \varphi. \tag{2}$$

Выразим $\sin \varphi$ из формулы (1) и подставим его в равенство (2):

$$l = \frac{2Lk\lambda}{a}. \tag{3}$$

Произведя вычисления по формуле (3), получим

$$l = 1{,}2 \text{ см}.$$

Пример 3. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние l между

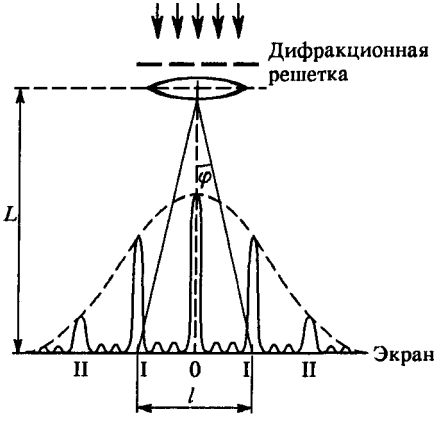


Рис. 31.3

двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см (рис. 31.3). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 см; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение. 1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k-му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \sin \varphi = k\lambda, \tag{4}$$

где k — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае $k = 1$, $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ (ввиду того, что $l/2 \ll L$), $\operatorname{tg}\varphi = (l/2)L$ (следует из рис. 31.3). С учетом последних трех равенств соотношение (4) примет вид

$$d\frac{l}{2L} = \lambda,$$

откуда постоянная решетки

$$d = \frac{2L\lambda}{l}.$$

Подставляя данные, получим

$$d = 4{,}95 \text{ мкм}.$$

2. Число штрихов на 1 см найдем из формулы

$$n = \frac{1}{d}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$n = 2{,}02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение $k_{\max}$, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90°.

Из формулы (4) запишем

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda}\sin\varphi. \tag{5}$$

Подставляя сюда значения величин, получим

$$k_{\max} = 9{,}9.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении $\sin\varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $k_{\max} = 9$.

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному $k_{\max}$, т. е. всего $2k_{\max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N = 2k_{\max} + 1.$$

Подставляя значение $k_{\max}$, найдем

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения (5) синус этого угла:

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{k_{\max}\lambda}{d}.$$

Отсюда

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{k_{\max}\lambda}{d}\right).$$

Подставив сюда значения величин λ, d, $k_{\max}$ и произведя вычисления, получим

$$\varphi_{\max} = 65{,}4°.$$

ЗАДАЧИ

Зоны Френеля

31.1. Зная формулу радиуса k-й зоны Френеля для сферической волны ($\rho_k = \sqrt{abk\lambda/(a+b)}$), вывести соответствующую формулу для плоской волны.

31.2. Вычислить радиус ρ_5 пятой зоны Френеля для плоского волнового фронта ($\lambda = 0{,}5$ мкм), если построение делается для точки наблюдения, находящейся на расстоянии $b = 1$ м от фронта волны.

31.3. Радиус ρ_4 четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус ρ_6 шестой зоны Френеля.

31.4. На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 4$ мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдений поместить экран?

31.5. Плоская световая волна ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало: 1) одну зону Френеля? 2) две зоны Френеля?

31.6. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. В результате дифракции в некоторых точках оси отверстия, находящихся на расстояниях b_i от его центра, наблюдаются максимумы интенсивности. 1. Получить вид функции $b = f(r, \lambda, n)$, где r — радиус отверстия; λ — длина волны; n — число зон Френеля, открываемых для данной точки оси отверстием. 2. Сделать то же самое для точек оси отверстия, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

31.7. Плоская световая волна ($\lambda = 0{,}7$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1{,}4$ мм. Определить расстояния b_1, b_2, b_3 от диафрагмы до трех наиболее удаленных от нее точек, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

31.8. Точечный источник S света ($\lambda = 0{,}5$ мкм), плоская диафрагма с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм и экран расположены, как это указано на рис. 31.4 ($a = 1$ м). Определить расстояние b от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывало бы для точки P три зоны Френеля.

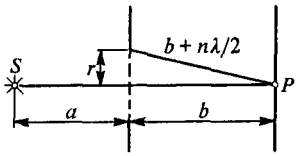


Рис. 31.4

31.9. Как изменится интенсивность в точке P (см. задачу 31.8), если убрать диафрагму?

Дифракция на щели. Дифракционная решетка

31.10. На щель шириной $a = 0{,}05$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

31.11. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол φ отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен 1°. Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

31.12. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}5$ мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол φ дифракции равен: 1) $17'$; 2) $43'$.

31.13. Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi = 18°$?

31.14. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20°$. Определить длину волны λ света.

31.15. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_1 = 14°$. На какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка?

31.16. Дифракционная решетка содержит $n = 200$ штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

31.17. На дифракционную решетку, содержащую $n = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda =$

$= 0{,}6$ мкм). Найти общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка. Определить угол φ дифракции, соответствующий последнему максимуму.

31.18. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda = 0{,}4$ мкм) спектра третьего порядка?

31.19. На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на 1 мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние L линзы до экрана равно 3 м. Границы видимости спектра $\lambda_{\text{кр}} = 780$ нм, $\lambda_{\text{ф}} = 400$ нм.

31.20. На дифракционную решетку с периодом $d = 10$ мкм под углом $\alpha = 30^\circ$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить угол φ дифракции, соответствующий второму главному максимуму.

31.21. Дифракционная картина получена с помощью дифракционной решетки длиной $l = 1{,}5$ см и периодом $d = 5$ мкм. Определить, в спектре какого наименьшего порядка этой картины получатся раздельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн $\Delta\lambda = 0{,}1$ нм, если линии лежат в крайней красной части спектра ($\lambda \approx 760$ нм).

31.22. Какой наименьшей разрешающей силой R должна обладать дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было разрешить две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм)? Какое наименьшее число N штрихов должна иметь эта решетка, чтобы разрешение было возможно в спектре второго порядка?

31.23. С помощью дифракционной решетки с периодом $d = 20$ мкм требуется разрешить дублет натрия ($\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине l решетки это возможно?

31.24. Угловая дисперсия D_φ дифракционной решетки для излучения некоторой длины волны (при малых углах дифракции) составляет 5 мин/нм. Определить разрешающую силу R этой решетки для излучения той же длины волны, если длина l решетки равна 2 см.

31.25. Определить угловую дисперсию D_φ дифракционной решетки для угла дифракции $\varphi = 30^\circ$ и длины волны $\lambda = 600$ нм. Ответ выразить в единицах СИ и в минутах на нанометр.

31.26. На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 700$ нм. За решеткой помещена собирающая

линза с главным фокусным расстоянием $f = 50$ см. В фокальной плоскости линзы расположен экран. Определить линейную дисперсию D_l такой системы для максимума третьего порядка. Ответ выразить в миллиметрах на нанометр.

31.27. Нормально поверхности дифракционной решетки падает пучок света. За решеткой помещена собирающая линза с оптической силой $D = 1$ дптр. В фокальной плоскости линзы расположен экран. Определить число n штрихов на 1 мм этой решетки, если при малых углах дифракции линейная дисперсия $D_l = 1$ мм/нм.

31.28. На дифракционную решетку нормально ее поверхности падает монохроматический свет ($\lambda = 650$ нм). За решеткой находится линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. На экране наблюдается дифракционная картина под углом дифракции $\varphi = 30°$. При каком главном фокусном расстоянии f линзы линейная дисперсия $D_l = 0{,}5$ мм/нм?

Дифракция на кристаллической решетке

31.29. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения ($\lambda = 147$ пм). Определить расстояние d между атомными плоскостями кристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается, когда излучение падает под углом $\theta = 31°30'$ к поверхности кристалла.

31.30. Какова длина волны λ монохроматического рентгеновского излучения, падающего на кристалл кальцита, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается, когда угол θ между направлением падающего излучения и гранью кристалла равен 3°? Расстояние d между атомными плоскостями кристалла принять равным 0,3 нм.

31.31. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань кристалла. Под углом $\theta = 65°$ к плоскости грани наблюдается максимум первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями кристалла 280 пм. Определить длину волны λ рентгеновского излучения.

Разрешающая сила объектива телескопа

31.32. Диаметр D объектива телескопа равен 8 см. Каково наименьшее угловое расстояние β между двумя звездами, дифракционные изображения которых в фокальной плоскости объектива получаются раздельными? При малой освещенности глаз человека наиболее чувствителен к свету с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм.

31.33. На шпиле высотного здания укреплены одна под другой две красные лампы ($\lambda = 640$ нм). Расстояние d между лампами 20 см. Здание рассматривают ночью в телескоп с расстояния $r = 15$ км. Определить наименьший диаметр D_{min} объектива, при

котором в его фокальной плоскости получатся раздельные дифракционные изображения.

§ 32. Поляризация света

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Закон Брюстера

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{\text{в}} = n_{21},$$

где $\varepsilon_{\text{в}}$ — угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована; n_{21} — относительный показатель преломления.

• Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2\alpha,$$

где I — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α — угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

• Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

• Угол поворота φ плоскости поляризации оптически активными веществами определяется соотношениями:

а) в твердых телах $\varphi = \alpha d$, где α — постоянная вращения; d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) в чистых жидкостях $\varphi = [\alpha]\rho d$, где $[\alpha]$ — удельное вращение; ρ — плотность жидкости;

в) в растворах $\varphi = [\alpha]Cd$, где C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi = 97°$ с падающим пучком (рис. 32.1). Определить показатель преломления n жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

Решение. Согласно закону Брюстера, свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{1\text{в}} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

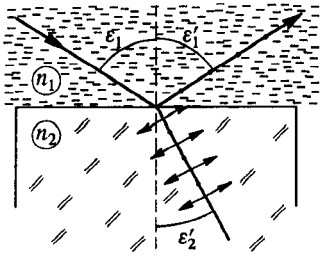


Рис. 32.1

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления этих сред. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{1в} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Согласно условию задачи, отраженный луч повернут на угол φ относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то $\varepsilon_{1в} = \varphi/2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi/2) = n_2/n_1$, откуда

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим

$$n_1 = 1{,}33.$$

Пример 2. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол α между их плоскостями пропускания равен 60°. Определить: 1) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николь (N_1); 2) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через оба николя? При прохождении каждого из николей потери на отражение и поглощение света составляют 5%.

Решение. 1. Пучок естественного света, падая на грань николя N_1 (рис. 32.2), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по

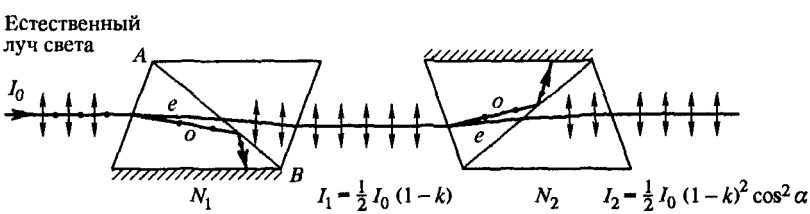


Рис. 32.2

интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний для необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний для обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок (o) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (e) проходит через николь. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе николя.

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николь N_1,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - k),$$

где $k = 0{,}05$ — относительная потеря интенсивности света в николе; I_0 — интенсивность естественного света, падающего на николь N_1.

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{I_0(1-k)/2} = \frac{2}{1-k}. \qquad (1)$$

Подставив числовые значения, найдем

$$\frac{I_0}{I_1} = 2{,}10.$$

Таким образом, интенсивность света при прохождении через николь N_1 уменьшается в 2,10 раза.

2. Пучок плоскополяризованного света интенсивности I_1 падает на николь N_2 и также расщепляется на обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается в николе, а интенсивность необыкновенного пучка света, вышедшего из николя, определяется законом Малюса (без учета поглощения в этом николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где α — угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя N_2.

Учитывая потери интенсивности во втором николе, получим

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2 \alpha}.$$

Заменив I_0/I_1 его выражением по формуле (1), получим

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставив данные, произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = 8{,}86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

Пример 3. Пучок частично-поляризованного света рассматривается через поляроид. Первоначально поляроид установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При повороте поляроида на угол $\varphi = 60°$ интенсивность

пропускаемого им света уменьшилась в $k = 2$ раза. Определить отношение $I_е/I_п$ интенсивностей естественного и линейно-поляризованного света, составляющих данный частично-поляризованный свет, а также степень поляризации P пучка света.

Решение. Отношение интенсивности $I_е$ естественного света к интенсивности $I_п$ поляризованного света найдем из следующих соображений. При первоначальном положении поляроида он полностью пропустит линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность пропущенного при этом света

$$I_1 = I_п + \frac{1}{2} I_е.$$

При втором положении поляроида интенсивность пропущенного поляризованного света определится по закону Малюса, а интенсивность пропущенного естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на поляроид. Общая интенсивность во втором случае

$$I_2 = I_п \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_е.$$

В соответствии с условием задачи $I_1 = kI_2$, или

$$I_п + \frac{1}{2} I_е = k \left(I_п \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_е \right).$$

Подставив сюда значение угла φ, k и произведя вычисления, получим

$$\frac{I_е}{I_п} = 1, \quad \text{или} \quad I_е = I_п,$$

т. е. интенсивности естественного и поляризованного света в заданном пучке равны между собой.

Степень поляризации частично-поляризованного света определяется соотношением

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{2}$$

где I_{max} и I_{min} — соответственно максимальная и минимальная интенсивности света, пропущенного через поляроид.

Максимальная интенсивность $I_{max} = I_1 = I_п + I_е/2$, или, учитывая, что $I_е = I_п$,

$$I_{max} = \frac{3}{2} I_п.$$

Минимальная интенсивность соответствует положению поляроида, при котором плоскость пропускания его перпендикулярна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При таком положении поляроида поляризованный свет будет полностью погашен и через николь

пройдет только половина интенсивности естественного света. Общая интенсивность выразится равенством

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{\text{е}} = \frac{1}{2} I_{\text{п}}.$$

Подставив найденные выражения $I_{\max}$ и $I_{\min}$ в формулу (2), получим

$$P = \frac{(3/2)I_{\text{п}} - (1/2)I_{\text{п}}}{(3/2)I_{\text{п}} + (1/2)I_{\text{п}}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, степень поляризации пучка света

$$P = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Пластинка кварца толщиной $d_1 = 1$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 20°$. Определить: 1) какова должна быть толщина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью погашен; 2) какой длины l трубку с раствором сахара массовой концентрацией $C = 0{,}4$ кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта? Удельное вращение $[\alpha]$ раствора сахара равно 0,665 град/(м · кг · м$^{-3}$).

Решение. 1. Угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой определяется соотношением $\varphi = \alpha d$.

Пользуясь этой формулой, выразим искомую толщину d_2 пластинки:

$$d_2 = \frac{\varphi_2}{\alpha}, \tag{3}$$

где φ_2 — угол поворота плоскости поляризации, при котором свет будет полностью погашен ($\varphi_2 = 90°$).

Постоянную вращения α для кварца найдем также из формулы $\varphi = \alpha d$, подставив в нее заданные в условии задачи значения d_1 и φ_1:

$$\alpha = \frac{\varphi_1}{d_1}.$$

Подставив это выражение α в формулу (3), получим

$$d_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} d_1.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем толщину пластинки:

$$d_2 = 4{,}5 \text{ мм}.$$

2. Длину трубки с сахарным раствором найдем из соотношения $\varphi_2 = [\alpha] C d$, выражающего угол поворота плоскости поляризации раствором

сахара, где d — толщина раствора сахара (принимается равной длине l трубки). Отсюда получим

$$l = \frac{\varphi_2}{[\alpha]C}.$$

Подставив сюда значения φ_2, $[\alpha]$, $C = 0{,}4\,\text{кг/л} = 400\,\text{кг/м}^3$ и произведя вычисления, найдем

$$l = 0{,}38\ \text{м}.$$

ЗАДАЧИ

Закон Брюстера. Закон Малюса

32.1. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом $\varepsilon_1 = 54°$. Определить угол преломления ε_2' пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

32.2. На какой угловой высоте φ над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?

32.3. Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмаза, погруженного в воду. При каком угле падения $\varepsilon_\text{в}$ отраженный свет полностью поляризован?

32.4. Угол Брюстера $\varepsilon_\text{в}$ при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57°. Определить скорость света в этом кристалле.

32.5. Предельный угол ε_1' полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен 43°. Определить угол Брюстера $\varepsilon_\text{в}$ для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

32.6. Пучок естественного света падает на стеклянную ($n = 1{,}6$) призму (рис. 32.3). Определить двугранный угол θ призмы, если отраженный пучок максимально поляризован.

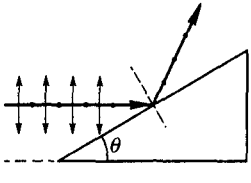


Рис. 32.3

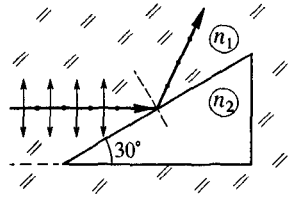


Рис. 32.4

32.7. Алмазная призма находится в некоторой среде с показателем преломления n_1. Пучок естественного света падает на призму так, как это показано на рис. 32.4. Определить показатель преломления n_1 среды, если отраженный пучок максимально поляризован.

32.8. Параллельный пучок естественного света падает на сферическую каплю воды. Найти угол φ между отраженным и падающим пучками в точке A (рис. 32.5).

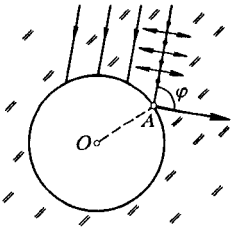


Рис. 32.5

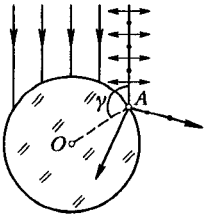


Рис. 32.6

32.9. Пучок естественного света падает на стеклянный шар ($n = 1{,}54$). Найти угол γ между преломленным и падающим пучками в точке A (рис. 32.6).

32.10. Пучок естественного света падает на стеклянный шар, находящийся в воде. Найти угол φ между отраженным и падающим пучками в точке A (рис. 32.7). Показатель преломления n стекла принять равным 1,58.

32.11. Анализатор в $k = 2$ раза уменьшает интенсивность света, приходящего к нему от поляризатора. Определить угол α между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора. Потерями интенсивности света в анализаторе пренебречь.

32.12. Угол α между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен 45°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60°?

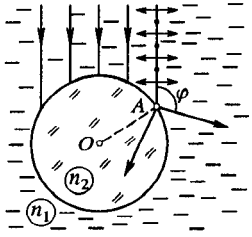


Рис. 32.7

32.13. Во сколько раз ослабляется интенсивность света, проходящего через два николя, плоскости пропускания которых образуют угол $\alpha = 30°$, если в каждом из николей в отдельности теряется 10% интенсивности падающего на него света?

32.14. В фотометре одновременно рассматривают две половины поля зрения: в одной видна эталонная светящаяся поверхность с яркостью $L_1 = 5 \cdot 10^3$ кд/м^2, в другой — испытуемая поверхность, свет от которой проходит через два николя. Граница между обеими половинами поля зрения исчезает, если второй николь повернуть относительно первого на угол $\alpha = 45°$. Найти яркость L_2 испытуемой поверхности, если известно, что в каждом из николей интенсивность падающего на него света уменьшается на 8%.

Степень поляризации света

32.15. В частично-поляризованном свете амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в $n = 2$ раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Определить степень поляризации P света.

32.16. Степень поляризации P частично-поляризованного света равна 0,5. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света, пропускаемого через анализатор, от минимальной?

32.17. На пути частично-поляризованного света, степень поляризации P которого равна 0,6, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол $\alpha = 30°$?

32.18. На николь падает пучок частично-поляризованного света. При некотором положении николя интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания николя повернули на угол $\beta = 45°$, интенсивность света возросла в $k = 1{,}5$ раза. Определить степень поляризации P света.

Вращение плоскости поляризации

32.19. Пластинку кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси, поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi = 53°$. Определить толщину d_2 пластинки, при которой данный монохроматический свет не проходит через анализатор.

32.20. Никотин (чистая жидкость), содержащийся в стеклянной трубке длиной $d = 8$ см, поворачивает плоскость поляризации желтого света натрия на угол $\varphi = 137°$. Плотность никотина $\rho = 1{,}01 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определить удельное вращение $[\alpha]$ никотина.

32.21. Раствор глюкозы с массовой концентрацией $C_1 = 280$ кг/м^3, содержащийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через этот раствор, на угол $\varphi_1 = 32°$. Определить массовую концентрацию C_2 глюкозы в другом растворе, налитом в трубку такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 24°$.

32.22. Угол φ поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении через трубку с раствором сахара равен 40°. Длина трубки $d = 15$ см. Удельное вращение $[\alpha]$ сахара равно $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад $\cdot$ м^3/(м $\cdot$ кг). Определить плотность ρ раствора.

§ 33. Оптика движущихся тел

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Эффект Доплера в релятивистском случае

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta},$$

где ν — частота электромагнитного излучения, воспринимаемого наблюдателем; ν_0 — собственная частота электромагнитного излучения, испускаемого неподвижным источником; $\beta = v/c$ — скорость источника электромагнитного излучения относительно наблюдателя; c — скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме; θ — угол между вектором $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

При движении источника вдоль прямой, соединяющей наблюдателя и источник, возможны два случая:

а) источник удаляется от наблюдателя ($\theta = 0$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

б) источник приближается к наблюдателю ($\theta = \pi$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

• Эффект Доплера в нерелятивистском случае

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\theta,$$

где $\Delta\nu$ — изменение частоты ($\Delta\nu = \nu - \nu_0$).

• Эффект Вавилова–Черенкова. При движении заряженной частицы в некоторой среде со скоростью v, большей фазовой скорости света в данной среде, возникает излучение света. Свет этот распространяется по направлениям, составляющим острый угол θ с траекторией частицы, т. е. вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы. Угол θ определяется из соотношения

$$\cos\theta = \frac{v}{nc}, \quad \text{или} \quad \cos\theta = \frac{1}{\beta n},$$

где n — показатель преломления среды, в котором движется заряженная частица.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $v = 0{,}1c$ (c — скорость распространения электромагнитных волн). Опреде-

лить длину волны λ излучения, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя.

Решение. В системе отсчета, связанной с наблюдателем, спектральный прибор зарегистрирует электромагнитное излучение частоты

$$\nu = \frac{\nu_0\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}, \tag{1}$$

где ν_0 — собственная частота монохроматического излучения источника; $\beta = v/c$; θ — угол между вектором $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Выразим частоты ν и ν_0 через длины волн λ и λ_0: $\nu = c/\lambda$ и $\nu_0 = c/\lambda_0$. Заметив, что в нашем случае $\theta = \pi$ ($\cos\theta = -1$), перепишем формулу (1) с учетом последних соотношений:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta},$$

откуда

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Подставим значения β ($\beta = v/c = 0{,}1$) и λ_0 в полученное выражение и произведем вычисления:

$$\lambda = 542 \text{ нм}.$$

Пример 2. Каким минимальным импульсом $p_{\min}$ (в единицах МэВ/c) должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова–Черенкова можно было наблюдать в воде?

Решение. Эффект Вавилова–Черенкова состоит в излучении света, возникающем при движении в веществе заряженных частиц со скоростью v, превышающей скорость распространения световых волн (фазовую скорость) в этой среде. Так как фазовая скорость света $v_\text{ф} = c/n$ (c — скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме; n — показатель преломления среды), то условием возникновения эффекта Вавилова–Черенкова является

$$v > v_\text{ф}, \quad \text{или} \quad v > \frac{c}{n}.$$

Обычно это условие записывают иначе, учитывая, что $\beta = v/c$:

$$\beta n > 1. \tag{2}$$

Поскольку черенковское излучение наблюдается для релятивистских частиц, то запишем сначала выражение для релятивистского импульса:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{или} \quad p = \frac{m_0 c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где учтено, что $v = \beta c$.

Минимальному импульсу соответствует минимальное значение $\beta_{\min}$, которое находим из условия (2):

$$\beta_{\min} = \frac{1}{n}.$$

Тогда минимальное значение импульса

$$p_{\min} = \frac{m_0 c}{\sqrt{n^2 - 1}}. \qquad (3)$$

Вычисления выполним во внесистемных единицах — МэВ/c (c — скорость распространения электромагнитного излучения). Для этого поступим следующим образом. Известно, что $m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ, отсюда запишем $m_0c = 0{,}511$ МэВ/c. Подставив в (3) $n = 1{,}33$ и найденное значение m_0c, произведем вычисления:

$$p_{\min} = 0{,}583 \text{ МэВ}/c.$$

ЗАДАЧИ

Эффект Доплера

33.1. При какой предельной скорости v (в долях скорости света) источника можно вместо релятивистской формулы $\nu = \nu_0\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$ для эффекта Доплера пользоваться приближенным выражением $\nu \approx \nu_0(1-\beta)$, если погрешность в определении частоты не должна превышать 1%?

33.2. Для определения угловой скорости вращения солнечного диска измеряли относительный сдвиг $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий восточного и западного краев Солнца. Он оказался равным $1{,}5 \times \times 10^{-5}$. Определить угловую скорость ω вращения солнечного диска. Радиус R Солнца считать известным.

33.3. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью $v = 10$ км/с. Частота ν_0 электромагнитных волн, излучаемых антенной корабля, равна 30 МГц. Определить доплеровское смещение $\Delta\nu$ частоты, воспринимаемой приемником.

33.4. При изучении спектра излучения некоторой туманности линия излучения водорода ($\lambda_\alpha = 656{,}3$ нм) оказалась смещенной на $\Delta\lambda = 2{,}5$ нм в область с большей длиной волны (красное смещение). Найти скорость v движения туманности относительно Земли и указать, удаляется она от Земли или приближается к ней.

33.5. Определить обусловленное эффектом Доплера уширение $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий излучения атомарного водорода, находящегося при температуре $T = 300$ К.

33.6. В результате эффекта Доплера происходит уширение линий γ-излучения ядер. Оценить уширение $\Delta\nu/\nu$ линий γ-излучения ядер кобальта, находящихся при температуре: 1) комнатной ($T = 290\,\text{К}$); 2) ядерного взрыва ($T = 10^7\,\text{К}$).

33.7. Два космических корабля движутся вдоль одной прямой. Скорости v_1 и v_2 их в некоторой инерциальной системе отсчета соответственно 12 и 8 км/с. Определить частоту ν сигнала электромагнитных волн, воспринимаемых вторым космическим кораблем, если антенна первого корабля излучает электромагнитные волны частотой $\nu_0 = 1\,\text{МГц}$. Рассмотреть следующие случаи: 1) космические корабли движутся навстречу друг другу; 2) космические корабли удаляются друг от друга в противоположных направлениях; 3) первый космический корабль нагоняет второй; 4) первый космический корабль удаляется от второго, движущегося в том же направлении.

33.8. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600\,\text{нм}$ падает на быстро вращающиеся в противоположных направлениях зеркала (опыт А. А. Белопольского). После $N = 10$ отражений от зеркал пучок света попадает в спектрограф. Определить изменение $\Delta\lambda$ длины волны света, падающего на зеркала нормально их поверхности. Линейная скорость v зеркал равна 0,67 км/с. Рассмотреть два случая, когда свет отражается от зеркал: 1) движущихся навстречу одно другому; 2) удаляющихся одно от другого.

33.9. Плоское зеркало удаляется от наблюдателя со скоростью v вдоль нормали к плоскости зеркала. На зеркало посылается пучок света длиной волны $\lambda_0 = 500\,\text{нм}$. Определить длину волны λ света, отраженного от зеркала, движущегося со скоростью: 1) $0{,}2c$ (c — скорость в вакууме); 2) 9 км/с.

33.10. Приемник радиолокатора регистрирует частоты биений между частотой сигнала, посылаемого передатчиком, и частотой сигнала, отраженного от движущегося объекта. Определить скорость v приближающейся по направлению к локатору ракеты, если он работает на частоту $\nu_0 = 600\,\text{МГц}$ и частота ν_1 биений равна 4 кГц.

33.11. Рассказывают, что известный физик Роберт Вуд, проехав однажды на автомашине на красный свет светофора, был остановлен блюстителем порядка. Роберт Вуд, сославшись на эффект Доплера, уверял, что он ехал достаточно быстро и красный свет светофора для него изменился на зеленый. Оценить скорость v, с которой должна была бы двигаться автомашина, чтобы красный сигнал светофора ($\lambda_1 = 650\,\text{нм}$) воспринимался как зеленый ($\lambda_2 = 550\,\text{нм}$).

33.12. Длины волн излучения релятивистских атомов, движущихся по направлению к наблюдателю, оказались в два раза меньше, чем соответствующие длины волн нерелятивистских атомов.

Определить скорость v (в долях скорости света) релятивистских атомов.

33.13. Наиболее короткая длина волны λ_1 в спектре излучения водорода равна 410 нм. С какой скоростью v должно удаляться от нас скопление атомов водорода, чтобы их излучение оказалось вследствие эффекта Доплера за пределами видимой части спектра. Граница видимой части спектра соответствует длине волны $\lambda_2 = 760$ нм.

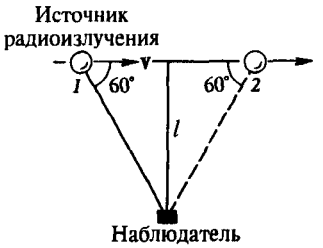


Рис. 33.1

33.14. На некотором расстоянии l от наблюдателя (рис. 33.1) прямолинейно со скоростью $v = 0{,}6c$ движется источник радиоизлучения, собственная частота ν_0 которого равна $4 \cdot 10^9$ Гц. В каких пределах изменяется частота ν сигнала, воспринимаемого наблюдателем, если наблюдение ведется в течение всего времени движения источника из положения *1* в положение *2*? Углы указаны в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Эффект Вавилова–Черенкова

33.15. Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}60$ возникло черенковское излучение?

33.16. При какой скорости v электронов (в долях скорости света) черенковское излучение происходит в среде с показателем преломления $n = 1{,}80$ под углом $\theta = 20°$ к направлению их движения?

33.17. Найти наименьшую ускоряющую разность потенциалов $U_{\min}$, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}50$ возникло черенковское излучение.

33.18. Известно, что быстрые частицы, входящие в состав космического излучения, могут вызывать эффект Вавилова–Черенкова в воздухе ($n = 1{,}00029$). Считая, что такими частицами являются электроны, определить их минимальную кинетическую энергию.

33.19. Электрон с кинетической энергией $T = 0{,}51$ МэВ движется в воде. Определить угол θ, составляемый черенковским излучением с направлением движения электрона.

33.20. Импульс релятивистского электрона равен m_0c. При каком минимальном показателе преломления $n_{\min}$ среды уже можно наблюдать эффект Вавилова–Черенкова?

33.21. Мю- и пи-мезоны имеют одинаковые импульсы $p = 100$ МэВ/c. В каких пределах должен быть заключен показатель преломления n среды, чтобы для μ-мезонов черенковское излучение наблюдалось, а для π-мезонов — нет.

Глава 7
КВАНТОВООПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ. ФИЗИКА АТОМА

§ 34. Законы теплового излучения

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Закон Стефана–Больцмана

$$R_э^* = \sigma T^4,$$

где $R_э^*$ — энергетическая светимость черного тела; T — термодинамическая температура; σ — постоянная Стефана–Больцмана $(\sigma = 5{,}67 \times \times 10^{-8}\,\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4))$.

• Энергетическая светимость серого тела

$$R_э^* = a_T \sigma T^4,$$

где a_T — коэффициент теплового излучения (степень черноты) серого тела.

• Закон смещения Вина

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где λ_m — длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения; b — постоянная закона смещения Вина $(b = 2{,}90 \times 10^{-3}\,\text{м} \cdot \text{К})$.

• Формула Планка

$$r^*_{\lambda, T} = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(2\pi\hbar c/kT\lambda)};$$

$$r^*_{\omega, T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1},$$

где $r^*_{\lambda, T}$, $r^*_{\omega, T}$ — спектральные плотности энергетической светимости черного тела; λ — длина волны; ω — циклическая частота; c — скорость света в вакууме; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; $\hbar$ — постоянная Планка $(\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\text{Дж} \cdot \text{с})$.

• Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости от температуры

$$(r^*_{\lambda, T})_{\max} = CT^5,$$

где C — постоянная $(C = 1{,}30 \cdot 10^{-5}\,\text{Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5))$.

• Связь энергетической светимости $R_э^*$ абсолютно черного тела с равновесной объемной плотностью u энергии излучения

$$R_э^* = \frac{c}{4}u,$$

где c — скорость света в вакууме.

• Давление теплового излучения связано с объемной плотностью энергии излучения соотношением

$$p = \frac{1}{3}u.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны $\lambda = 500$ нм. Принимая Солнце за черное тело, определить: 1) энергетическую светимость $R_э^*$ Солнца; 2) поток энергии Φ_e, излучаемый Солнцем; 3) массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 с.

Решение. 1. Энергетическая светимость $R_э^*$ черного тела выражается формулой Стефана–Больцмана

$$R_э^* = \sigma T^4. \tag{1}$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина: $\lambda_m = b/T$. Выразив отсюда температуру T и подставив ее в формулу (1), получим

$$R_э^* = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4. \tag{2}$$

Произведя вычисления по формуле (2), найдем

$$R_э^* = 6{,}4 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2.$$

2. Поток энергии Φ_e, излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь S его поверхности: $\Phi_e = R_э^* S$, или

$$\Phi_e = 4\pi r^2 R_э^*, \tag{3}$$

где r — радиус Солнца.

Подставив в формулу (3) значения π, r и $R_э^*$ и произведя вычисления, получим

$$\Phi_e = 3{,}9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

3. Массу электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за время $t = 1$ с, определим, применив закон пропорциональности массы

и энергии $E = mc^2$. Энергия электромагнитных волн, излучаемых за время t, равна произведению потока энергии Φ (мощности излучения) на время: $E = \Phi_e t$. Следовательно, $\Phi_e t = mc^2$, откуда $m = \Phi_e t/c^2$.

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$m = 4{,}3 \cdot 10^9 \text{ кг}.$$

Пример 2. Длина волны λ_m, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела, равна 580 нм. Определить максимальную спектральную плотность энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})_{max}$, рассчитанную на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм, вблизи λ_m.

Решение. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости пропорциональна пятой степени температуры Кельвина и выражается формулой

$$(r^*_{\lambda,T})_{max} = CT^5. \tag{4}$$

Температуру T выразим из закона смещения Вина $\lambda_m = b/T$, откуда $T = b/\lambda_m$.

Подставив полученное выражение температуры в формулу (4), найдем

$$(r^*_{\lambda,T})_{max} = C\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^5. \tag{5}$$

В табл. 24 значение C дано в единицах СИ, в которых единичный интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ м. По условию же задачи требуется вычислить спектральную плотность энергетической светимости, рассчитанную на интервал длин волн 1 нм, поэтому выпишем значение C в единицах СИ и пересчитаем его на заданный интервал длин волн:

$$C = 1{,}30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5) = 1{,}30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{К}^5) =$$
$$= 1{,}30 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм} \cdot \text{К}^5).$$

Вычисление по формуле (5) дает

$$(r^*_{\lambda,T})_{max} = 40{,}6 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм}).$$

ЗАДАЧИ

Закон Стефана–Больцмана

34.1. Определить температуру T, при которой энергетическая светимость $R^*_э$ абсолютно черного тела равна 10 кВт/м^2.

34.2. Поток энергии Φ_e, излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен 34 Вт. Принимая, что печь излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T печи, если площадь отверстия $S = 6$ см^2.

34.3. Определить энергию W, излучаемую за время $t = 1$ мин из смотрового окошка площадью $S = 8\,\text{см}^2$ плавильной печи, если ее температура $T = 1200$ К.

34.4. Температура T верхних слоев звезды Сириус равна 10^4 К. Определить поток энергии Φ_e, излучаемый с поверхности площадью $S = 1\,\text{км}^2$ этой звезды.

34.5. Определить относительное увеличение $\Delta R_э^*/R_э^*$ энергетической светимости абсолютно черного тела при увеличении его температуры на 1%.

34.6. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру абсолютно черного тела, чтобы его энергетическая светимость $R_э^*$ возросла в два раза?

34.7. Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислить его энергетическую светимость $R_э^*$ и температуру T его поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом $\theta = 32'$. Солнечная постоянная[1]) $C = 1{,}4\,\text{кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

34.8. Определить установившуюся температуру T зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Значение солнечной постоянной приведено в предыдущей задаче.

34.9. Принимая коэффициент теплового излучения a_T угля при температуре $T = 600$ К равным 0,8, определить: 1) энергетическую светимость $R_э^*$ угля; 2) энергию W, излучаемую с поверхности угля с площадью $S = 5\,\text{см}^2$ за время $t = 10$ мин.

34.10. С поверхности сажи площадью $S = 2\,\text{см}^2$ при температуре $T = 400$ К за время $t = 5$ мин излучается энергия $W = 83$ Дж. Определить коэффициент теплового излучения a_T сажи.

34.11. Муфельная печь потребляет мощность $P = 1$ кВт. Температура T ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25\,\text{см}^2$ равна 1200 К. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть w мощности рассеивается стенками.

34.12. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре $T = 280$ К. Определить коэффициент теплового излучения a_T Земли, если энергетическая светимость $R_э^*$ ее поверхности равна $325\,\text{кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$.

34.13. Мощность P излучения шара радиусом $R = 10$ см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом теплового излучения $a_T = 0{,}25$.

---

[1]) Солнечной постоянной C называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца.

34.14. На какую длину волны λ_m приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})_{max}$ абсолютно черного тела при температуре $t = 0\,^\circ C$?

34.15. Температура верхних слоев Солнца равна 5300 К. Считая Солнце абсолютно черным телом, определить длину волны λ_m, которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})_{max}$ Солнца.

34.16. Определить температуру T абсолютно черного тела, при которой максимум спектральной плотности энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})_{max}$ приходится на красную границу видимого спектра ($\lambda_1 = 750$ нм); на фиолетовую ($\lambda_2 = 380$ нм).

34.17. Максимум спектральной плотности энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})_{max}$ яркой звезды Арктур приходится на длину волны $\lambda_m = 580$ нм. Принимая, что звезда излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T поверхности звезды.

34.18. Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности $(r^*_{\lambda,T})_{max}$ сместился с $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм на $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм. Как и во сколько раз изменились энергетическая светимость $R^*_э$ тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?

34.19. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на $\Delta\lambda_m = 400$ нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2.

34.20. Эталон единицы силы света — кандела — представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадью $S = 0{,}5305$ мм^2 имеет температуру T затвердевания платины, равную 1063 °C. Определить мощность P излучателя, принимая его за абсолютно черное тело.

34.21. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})_{max}$ абсолютно черного тела равна $4{,}16 \cdot 10^{11}$ Вт/м^2. На какую длину волны λ_m она приходится?

34.22. Температура T абсолютно черного тела равна 2000 К. Определить: 1) спектральную плотность энергетической светимости $(r^*_{\lambda,T})$ для длины волны $\lambda = 600$ нм; 2) энергетическую светимость $R^*_э$ в интервале длин волн от $\lambda_1 = 590$ нм до $\lambda_2 = 610$ нм. Принять, что средняя спектральная плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для длины волны $\lambda = 600$ нм.

34.23*. Вином была получена эмпирическая формула распределения (по длинам волн) энергии в спектре излучения абсолютно

черного тела $r^*_{\lambda,T} = C_1\lambda^{-5}\exp\left(-C_2/(\lambda T)\right)$, где C_1 и C_2 — постоянные ($C_2 = 1{,}43 \cdot 10^{-2}$ м·К). Получить, используя приведенную формулу, закон смещения Вина и определить постоянную b в законе смещения.

34.24*. Распределение (по частотам) энергии в спектре излучения абсолютно черного тела было эмпирически установлено Вином $r^*_{\omega,T} = \dfrac{\alpha\omega^5}{\exp(\beta\omega/T)}$, где α и β — постоянные ($\beta = 7{,}61 \cdot 10^{-12}$ с·К). Используя эту формулу найти частоту ω_m, на которую приходится максимум энергии излучения при температуре $T = 1000$ К.

34.25*. Пренебрегая потерями на теплопроводность, найти мощность P электрического тока, подводимую к вольфрамовой нити диаметром $d = 0{,}5$ мм и длиной $l = 20$ см, для накаливания ее до температуры $T = 3000$ К. Считать, что нить излучает как абсолютно черное тело.

34.26*. Черный тонкостенный металлический куб со стороной $a = 10$ см заполнен водой при температуре $T_1 = 80\,^\circ$C. Определить время τ остывания куба до температуры $T_2 = 30\,^\circ$C, если он помещен внутрь зачерненной вакуумной камеры. Температура стенок камеры поддерживается близкой к абсолютному нулю.

34.27*. В откачанном до высокого вакуума сосуде, стенки которого поддерживаются при температуре близкой к абсолютному нулю, находится цинковый шарик диаметром $d = 1$ см. Начальная температура T шарика равна 400 К. Найти время τ, в течение которого температура шарика уменьшится в $n = 2$ раза. Плотность ρ цинка равна 6,92 г/см^3, относительная атомная масса $A_r = 65{,}4$. Считать, что при этих условиях справедлив закон Дюлонга и Пти, а шарик можно рассматривать как абсолютно черное тело.

34.28*. Оценить давление p теплового излучения в эпицентре ядерного взрыва. Температуру T в эпицентре принять равной 10^6 К.

34.29*. При какой температуре T давление p теплового излучения станет равным нормальному атмосферному давлению $p_{\text{атм}} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

34.30*. При какой концентрации n молекул идеального газа, находящегося при температуре $T = 300$ К, его давление станет равным давлению равновесного теплового излучения, находящегося при той же температуре.

34.31*. Газообразный неон, заполняющий сосуд неизменного объема, находится в равновесии с тепловым излучением. При каком давлении p неона его теплоемкость $C_{V,\text{газ}}$ станет равной теплоемкости $C_{V,\text{изл}}$ теплового излучения при температуре $T = 500$ К.

§ 35. Фотоэлектрический эффект

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Формула Эйнштейна:

а) в общем случае

$$\hbar\omega = A + T_{\max},$$

где $\varepsilon = \hbar\omega$ — энергия фотона, падающего на поверхность металла; A — работа выхода электрона из металла; $T_{\max}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона;

б) в случае, если энергия фотона много больше работы выхода ($\hbar\omega \gg A$),

$$\hbar\omega = T_{\max}.$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в двух случаях (нерелятивистском и релятивистском) выражается различными формулами:

а) если фотоэффект вызван фотоном, имеющим незначительную энергию ($\hbar\omega \approx 5$ кэВ), то

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2,$$

где m_0 — масса покоя электрона;

б) если фотоэффект вызван фотоном, обладающим большой энергией ($\hbar\omega \gg 5$ кэВ), то

$$T_{\max} = (m - m_0)c^2, \quad \text{или} \quad T_{\max} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

где $\beta = v_{\max}/c$; m — масса релятивистского электрона.

• Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}; \quad \omega_0 = \frac{A}{\hbar},$$

где λ_0 — максимальная длина волны излучения (ω_0 — минимальная циклическая частота), при которой еще возможен фотоэффект.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 155$ нм; 2) γ-излучением с длиной волны $\lambda_2 = 2{,}47$ пм.

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{\max}. \qquad (1)$$

Энергия фотона вычисляется по формуле $\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda$, работа выхода A указана в табл. 20; для серебра $A = 4{,}7$ эВ.

Кинетическая энергия фотоэлектрона в зависимости от того, какая скорость ему сообщается, может быть выражена или по классической формуле

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2, \tag{2}$$

или по релятивистской

$$T = (m - m_0)c^2. \tag{3}$$

Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия фотона ε много меньше энергии покоя электрона E_0, то может быть применена формула (2); если же ε сравнима по размеру с E_0, то вычисление по формуле (2) приводит к грубой ошибке, в этом случае кинетическую энергию фотоэлектрона необходимо выражать по формуле (3).

1. В формулу энергии фотона $\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda$ подставим значения величин $\hbar$, c и λ и, произведя вычисления, для ультрафиолетового излучения получим

$$\varepsilon_1 = 1{,}28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 8 \text{ эВ}.$$

Это значение энергии фотона много меньше энергии покоя электрона (0,51 МэВ). Следовательно, для данного случая максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена по классической формуле (2): $\varepsilon_1 = A + (1/2)m_0 v_{\max}^2$, откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A)}{m_0}}. \tag{4}$$

Выпишем величины, входящие в формулу (4): $\varepsilon_1 = 1{,}28 \cdot 10^{-18}$ Дж (вычислено выше); $A = 4{,}7$ эВ $= 4{,}7 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 0{,}75 \cdot 10^{-18}$ Дж; $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг (см. табл. 24).

Подставив числовые значения в формулу (4), найдем максимальную скорость:

$$v_{\max} = 1{,}08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

2. Вычислим теперь энергию фотона γ-излучения:

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} = 8{,}04 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 0{,}502 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода электрона ($A = 4{,}7$ эВ) пренебрежимо мала по сравнению с энергией γ-фотона, поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:

$$T_{\max} = \varepsilon_2 = 0{,}502 \text{ МэВ}.$$

Так как в данном случае кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то для вычисления скорости электрона следует

взять релятивистскую формулу кинетической энергии $T_{\max} = E_0 \times \left(1/\sqrt{1-\beta^2} - 1\right)$, где $E_0 = m_0 c^2$. Выполнив преобразования, найдем

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T_{\max})T_{\max}}}{E_0 + T_{\max}}.$$

Сделав вычисления, получим

$$\beta = 0{,}755.$$

Следовательно, максимальная скорость фотоэлектронов, вырываемых γ-излучением,

$$v_{\max} = c\beta = 226 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Определить красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов равна $0{,}65 \cdot 10^6$ м/с.

Решение. При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A + T_{\max}$ в случае красной границы запишется в виде

$$\varepsilon = A, \quad \text{или} \quad \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} = A.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \tag{5}$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A = \varepsilon - T_{\max} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{m v_{\max}^2}{2}. \tag{6}$$

Выпишем числовые значения величин, выразив их в единицах СИ: $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 400$ нм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $v_{\max} = 6{,}5 \cdot 10^5$ м/с.

Подставив эти значения величин в формулу (6) и вычислив, получим

$$A = 3{,}05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Для определения красной границы фотоэффекта подставим значения A, $\hbar$ и c в формулу (5) и вычислим:

$$\lambda_0 = 651 \text{ нм}.$$

ЗАДАЧИ

35.1. Определить работу выхода A электронов из натрия, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 500$ нм.

35.2. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 300$ нм?

35.3. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 307$ нм и максимальная кинетическая энергия T_{max} фотоэлектрона равна 1 эВ?

35.4. На поверхность лития падает монохроматический свет ($\lambda = 310$ нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Определить работу выхода A.

35.5. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_1 = 3{,}7$ В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу A выхода электронов с поверхности этой пластинки.

35.6. На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов.

35.7. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10^7 м/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

35.8. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ-излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}3$ нм.

35.9. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении γ-фотонами с энергией $\varepsilon = 1{,}53$ МэВ.

35.10. Максимальная скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ-фотонами, равна $2{,}91 \cdot 10^8$ м/с. Определить энергию ε γ-фотонов.

§ 36. Давление света. Фотоны

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

- Давление, производимое светом при нормальном падении,

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho), \quad \text{или} \quad p = w(1 + \rho),$$

где E_e — плотность потока энергии излучения, падающего на поверхность (облученность поверхности); c — скорость электромагнитного излучения в вакууме; w — объемная плотность энергии излучения; ρ — коэффициент отражения.

• Энергия фотона

$$\varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \hbar\omega,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка; ω — циклическая частота; λ — длина волны.

• Масса и импульс фотона выражаются соответственно формулами

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{2\pi\hbar}{c\lambda}; \quad p = mc = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии $\Phi_e = 0{,}6$ Вт. Определить силу F давления, испытываемую этой поверхностью, а также число N фотонов, падающих на нее за время $\Delta t = 5$ с.

Решение. Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления p на площадь S поверхности:

$$F = pS. \tag{1}$$

Световое давление может быть найдено по формуле

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho). \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) давления света в формулу (1), получим

$$F = \frac{E_e S}{c}(1 + \rho). \tag{3}$$

Так как произведение облученности E_e на площадь S поверхности равно потоку Φ_e энергии излучения, падающего на поверхность, то соотношение (3) можно записать в виде

$$F = \frac{\Phi_e}{c}(1 + \rho).$$

После подстановки значений Φ_e и c с учетом, что $\rho = 1$ (поверхность зеркальная), получим

$$F = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Н}.$$

Число N фотонов, падающих за время Δt на поверхность, определяется по формуле

$$N = \frac{\Delta W}{\varepsilon} = \frac{\Phi_e \Delta t}{\varepsilon},$$

где ΔW — энергия излучения, получаемая поверхностью за время Δt.

Выразив в этой формуле энергию фотона через длину волны ($\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda$), получим

$$N = \frac{\Phi_e \lambda \Delta t}{2\pi\hbar c}.$$

Подставив в этой формуле числовые значения величин, найдем

$$N = 10^{19} \text{ фотонов.}$$

Пример 2. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $p = 10$ мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в пучке; 2) число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с.

Решение. 1. Концентрация n фотонов в пучке может быть найдена, как частное от деления объемной плотности энергии w на энергию ε одного фотона:

$$n = \frac{w}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Из формулы $p = w(1 + \rho)$, определяющей давление света, где ρ — коэффициент отражения, найдем

$$w = \frac{p}{1 + \rho}. \tag{5}$$

Подставив выражение для w из уравнения (5) в формулу (4), получим

$$n = \frac{p}{(1 + \rho)\varepsilon}. \tag{6}$$

Энергия фотона зависит от длины волны излучения λ:

$$\varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Подставив выражение для энергии фотона в формулу (6), определим искомую концентрацию фотонов:

$$n = \frac{p\lambda}{(1 + \rho)2\pi\hbar c}. \tag{7}$$

Коэффициент отражения ρ для зачерненной поверхности принимаем равным нулю.

Подставив числовые значения в формулу (7), получим

$$n = 2{,}52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

2. Число N_1 фотонов, падающих на поверхность единичной площади в единицу времени, выражается соотношением

$$N_1 = nc.$$

Подставив сюда значения n и c, получим

$$n_1 = 7{,}56 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

ЗАДАЧИ

36.1. Определить давление p солнечного излучения на зачерненную пластинку, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца (см. сноску к задаче 34.7).

36.2. Определить поверхностную плотность I потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление p при перпендикулярном падении лучей равно 10 мкПа.

36.3. Поток энергии Φ_e, излучаемый электрической лампой, равен 600 Вт. На расстоянии $r = 1$ м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром $d = 2$ см. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий на него свет, определить силу F светового давления на зеркальце.

36.4. На зеркальце с идеально отражающей поверхностью площадью $S = 1{,}5\,\text{см}^2$ падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс p, полученный зеркальцем, если поверхностная плотность потока излучения φ, падающего на зеркальце, равна $0{,}1\,\text{МВт/м}^2$. Продолжительность облучения $t = 1$ с.

36.5. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника $d = 40$ м. Зная солнечную постоянную (см. задачу 34.7) и принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления F солнечного света на спутник.

36.6. Определить энергию ε, массу m и импульс p фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 380$ нм (фиолетовая граница видимого спектра).

36.7. Определить длину волны λ, массу m и импульс p фотона с энергией $\varepsilon = 1$ МэВ. Сравнить массу этого фотона с массой покоящегося электрона.

36.8. Определить длину волны λ фотона, импульс которого равен импульсу электрона, обладающего скоростью $v = 10^7$ м/с.

36.9. Определить длину волны λ фотона, масса которого равна массе покоя: 1) электрона; 2) протона.

36.10. Давление p монохроматического света ($\lambda = 600$ нм) на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 1$ с на поверхность площадью $S = 1\,\text{см}^2$.

36.11. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой $F = 10^{-8}$ Н. Определить число N_1 фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность.

36.12. Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 662$ нм) падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление $p = 0{,}3$ мкПа. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке.

§ 37. Эффект Комптона

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Изменение длины волны $\Delta\lambda$ фотона при рассеянии его на электроне на угол θ

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}(1 - \cos\theta), \quad \text{или} \quad \Delta\lambda = 2\frac{2\pi\hbar}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

где m_0 — масса покоя электрона отдачи; λ и λ' — длины волн.

• Комптоновская длина волны

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}.$$

(При рассеянии фотона на электроне $\lambda_C = 2{,}43$ пм.)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90°$. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,4 МэВ. Определить энергию ε фотона до рассеяния.

Решение. Для определения первичного фотона воспользуемся формулой Комптона в виде

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{2\pi\hbar}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{1}$$

Формулу (1) преобразуем следующим образом: 1) выразим длины волн λ' и λ через энергии ε' и ε соответствующих фотонов, воспользовавшись соотношением $\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda$; 2) умножим числитель и знаменатель правой части формулы на c. Тогда получим

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar c}{m_0 c^2}2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Сократив на $2\pi\hbar c$, выразим из этой формулы искомую энергию:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' m_0 c^2}{m_0 c^2 - \varepsilon' \cdot 2\sin^2(\theta/2)} = \frac{\varepsilon' E_0}{E_0 - 2\varepsilon'\sin^2(\theta/2)}, \tag{2}$$

где $E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя электрона.

Вычисления по формуле (2) удобнее вести во внесистемных единицах. Взяв из табл. 22 значение энергии покоя электрона в мегаэлектронвольтах и подставив числовые данные, получим

$$\varepsilon = 1{,}85 \text{ МэВ}.$$

Пример 2. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60°$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить: 1) энергию ε' рассеянного фотона; 2) кинетическую энергию T электрона отдачи; 3) направление его движения.

Решение. 1. Энергию рассеянного фотона найдем, воспользовавшись формулой Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

Выразив длины волн λ' и λ через энергии ε' и ε соответствующих фотонов, получим

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

Разделим обе части этого равенства на $2\pi\hbar c$: $\dfrac{1}{\varepsilon'} - \dfrac{1}{\varepsilon} = \dfrac{1 - \cos\theta}{m_0 c^2}$. Отсюда, обозначив для краткости энергию покоя электрона $m_0 c^2$ через E_0, найдем

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon/E_0)(1 - \cos\theta) + 1}. \tag{3}$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$\varepsilon' = 0{,}43 \text{ МэВ}.$$

2. Кинетическая энергия электрона отдачи, как это следует из закона сохранения энергии, равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon' = 0{,}32 \text{ МэВ}.$$

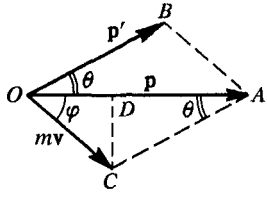


Рис. 37.1

3. Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса, согласно которому импульс падающего фотона $\mathbf{p}$ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона $\mathbf{p}'$ и электрона отдачи $m_0\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + m_0\mathbf{v}.$$

Векторная диаграмма импульсов изображена на рис. 37.1. Все векторы проведены из точки O, где находился электрон в момент соударения с фотоном. Угол φ определяет направление движения электрона отдачи.

Из треугольника OCD находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|CD|}{|OD|} = \frac{|CA|\sin\theta}{|OA| - |CA|\cos\theta},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p'\sin\theta}{p - p'\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{p/p' - \cos\theta}.$$

Так как $p = \varepsilon/c$ и $p' = \varepsilon'/c$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\varepsilon/\varepsilon' - \cos\theta}. \tag{4}$$

Преобразуем формулу (4) так, чтобы угол φ выражался непосредственно через величины ε и θ, заданные в условии задачи. Из формулы (3) следует

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon}{E_0}(1 - \cos\theta) + 1. \tag{5}$$

Заменим в формуле (4) соотношение ε/ε' по формуле (5):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{(1 + \varepsilon/E_0)(1 - \cos\theta)}.$$

Учитывая, что $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ и $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, после соответствующих преобразований получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \varepsilon/E_0}. \tag{6}$$

После вычисления по формуле (6) найдем $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}701$, откуда

$$\varphi = 35°.$$

ЗАДАЧИ

37.1. Рентгеновское излучение длиной волны $\lambda = 55{,}8$ пм рассеивается плиткой графита (комптон-эффект). Определить длину волны λ' света, рассеянного под углом $\theta = 60°$ к направлению падающего пучка света.

37.2. Определить максимальное изменение длины волны при комптоновском рассеянии: 1) на свободных электронах; 2) на свободных протонах.

37.3. Определить угол θ рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны $\Delta\lambda$ при рассеянии равно 3,62 пм.

37.4. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}4$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 90°$ на свободном электроне. Определить энергию ε' рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи.

37.5. Определить импульс p электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180°$.

37.6. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180°$? Энергия ε фотона до рассеяния равна 0,255 МэВ.

37.7. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния θ.

37.8. Угол рассеяния θ фотона равен 90°. Угол отдачи φ электрона равен 30°. Определить энергию ε падающего фотона.

37.9. Фотон ($\lambda = 1$ пм) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90°$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

37.10. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине λ_C электрона. Определить энергию ε и импульс p фотона.

37.11. Энергия ε падающего фотона равна энергии покоя электрона. Определить долю w_1 энергии падающего фотона, которую сохранит рассеянный фотон, и долю w_2 этой энергии, полученную электроном отдачи, если угол рассеяния θ равен: 1) 60°; 2) 90°; 3) 180°.

§ 38. Атом водорода и водородоподобные ионы

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Момент импульса электрона в водородоподобном атоме (H, He^+, Li^{++} и т. д.), находящемся в стационарном состоянии

$$\mathcal{L}_n = mvr = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где m — масса электрона; v — его скорость на орбите радиуса r; n — главное квантовое число; $\hbar$ — постоянная Планка.

• Энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0\hbar^2}\left(\frac{Z}{n}\right)^2,$$

где e — элементарный заряд; ε_0 — электрическая постоянная; Z — атомный номер (зарядовое число, порядковый номер атома в таблице Д. И. Менделеева).

• Радиус электронной орбиты в водородоподобном атоме

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\left(\frac{n^2}{Z}\right).$$

• Радиус первой боровской орбиты в атоме водорода

$$a = r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

• Правило частот Бора

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2},$$

где $\hbar\omega$ — энергия испускаемого или поглощаемого атомом фотона при переходе атома из одного стационарного состояния в другое; E_{n_1} и E_{n_2} — энергии стационарных состояний, характеризуемых квантовыми числами n_1 и n_2.

• Энергия ионизации атома водорода и водородоподобного атома

$$E_i = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0\hbar^2} = 2{,}16 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13{,}6 \text{ эВ}; \quad E_{i,\,z} = Z^2 E_i.$$

• Сериальная формула для водородоподобного атома

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где $\tilde{\nu}$ — спектроскопическое волновое число; λ — длина волны света, излучаемого или поглощаемого атомом (ионом) при переходе из одного стационарного состояния в другое; Z — зарядовое число; R — постоянная Ридберга ($R = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$).

• Энергия фотона, испускаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое,

$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где E_i — энергия ионизации [2]) водорода: $E_i = 2\pi\hbar Rc = 2{,}18 \times 10^{-18}$ Дж $=$ $= 13{,}6$ эВ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение. Согласно теории Бора, радиус r электронной орбиты и скорость v электрона на ней связаны равенством $mvr = n\hbar$. Так как в задаче требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число $n = 1$ и указанное выше равенство примет вид

$$mvr = \hbar. \tag{1}$$

Для определения двух неизвестных величин r и v необходимо еще одно уравнение. В качестве второго уравнения воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается

[2]) Энергия ионизации, выраженная в электрон-вольтах, равна потенциалу ионизации, выраженному в вольтах. Потенциалом ионизации называется ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти бомбардирующий электрон, чтобы приобрести энергию, достаточную для ионизации атома.

вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона можем записать

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

(e и m — заряд и масса электрона), или

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \qquad (2)$$

Совместное решение равенств (1) и (2) относительно r дает

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}.$$

Подставив сюда значения $\hbar$, e, m и произведя вычисления, найдем боровский радиус:

$$r_1 = a = 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Из равенства (1) получим выражение скорости электрона на первой орбите:

$$v = \frac{\hbar}{mr}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$v = 2{,}18 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Определить энергию ε фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) атома водорода.

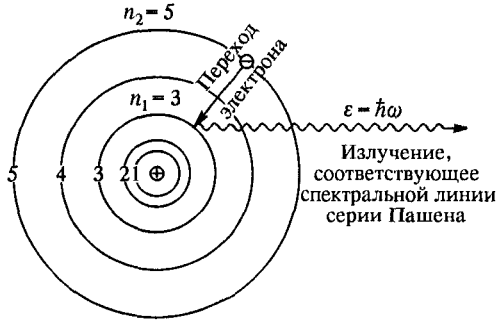


Рис. 38.1

Решение. Энергия ε фотона, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую,

$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода; $n_1 = 1, 2, 3, \ldots$ — номер орбиты, на которую переходит электрон (рис. 38.1); $n_2 = n_1 + 1$; $n_1 + 2$; $\ldots$; $n_1 + m$ — номер орбиты, с которой переходит электрон; m — номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена $n_1 = 3$; для второй линии этой серии $m = 2$, $n_2 = 5$.

Подставив числовые значения, найдем энергию фотона:

$$\varepsilon = 0{,}97 \text{ эВ}.$$

ЗАДАЧИ

38.1. Вычислить радиусы r_2 и r_3 второй и третьей орбит в атоме водорода.

38.2. Определить скорость v электрона на второй орбите атома водорода.

38.3. Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.

38.4. Определить потенциальную П, кинетическую T и полную E энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.

38.5. Определить длину волны λ, соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.

38.6. Найти наибольшую $\lambda_{\max}$ и наименьшую $\lambda_{\min}$ длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).

38.7. Вычислить энергию ε фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

38.8. Определить наименьшую $\varepsilon_{\min}$ и наибольшую $\varepsilon_{\max}$ энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).

38.9. Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только три спектральные линии. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.

38.10. Фотон с энергией $\varepsilon = 16{,}5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость v будет иметь электрон вдали от ядра атома?

38.11. Вычислить длину волны λ, которую испускает ион гелия He^+ при переходе со второго энергетического уровня на первый. Сделать такой же подсчет для иона лития Li^{++}.

38.12. Найти энергию E_i и потенциал U_i ионизации ионов He^+ и Li^{++}.

38.13. Вычислить частоты ω_1 и ω_2 вращения электрона в атоме водорода на второй и третьей орбитах. Сравнить эти частоты с частотой ν излучения при переходе электрона с третьей на вторую орбиту.

38.14. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 121{,}5$ нм. Определить радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

38.15. Определить первый потенциал U_1 возбуждения атома водорода.

38.16*. С помощью постулатов Бора дать вывод для радиуса r_n боровской орбиты электрона в водородоподобном атоме. Найти отношение r_{He^+}/r_H радиусов боровских орбит для иона гелия He^+ и атома водорода H, находящихся в основном состоянии. Будет ли изменяться и как это отношение для возбужденных состояний тех же атомов, при одинаковых номерах n орбит?

38.17*. На основании постулатов Бора дать вывод выражения для полной энергии E_n электрона в водородоподобном атоме, находящемся в основном состоянии. Вычислить полную энергию электрона в атоме водорода H и ионе гелия He^+ в основном состоянии, а также их потенциалы ионизации φ_i.

38.18*. Определить длины волн λ_H и λ_{Li}, ограничивающие серию Бальмера в спектре водорода и аналогичную серию в спектре ионизованного лития Li^{++}.

38.19*. Атом водорода переведен из основного состояния в возбужденное, характеризующееся квантовым числом $n = 3$. Определить энергию ΔE возбуждения атома (в эВ) и длины волн линий λ, которые могут появиться в спектре излучения атома водорода. Каким сериям принадлежат эти спектральные линии?

38.20*. Атомарный водород в основном состоянии возбуждается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 100$ нм. Определить длины волн λ, которые появятся в спектре излучения атома водорода, и каким сериям они принадлежат. Указать соответствующие переходы на схеме энергетических уровней.

38.21*. Определить полное число N спектральных линий, которые появятся в спектре атомарного водорода, находящегося в основном состоянии, при возбуждении его электронами с энергией $\varepsilon = 12{,}75$ эВ. Вычислить длины волн λ тех спектральных линий, которые будут соответствовать серии Бальмера.

38.22*. Какую минимальную скорость v_{min} должен иметь электрон, чтобы при неупругом столкновении с невозбужденным атомом водорода вызвать излучение только одной линии в спектре водорода? Вычислить длину волны λ этой спектральной линии.

38.23*. На возбужденный ($n = 2$) атом водорода падает фотон и вырывает из атома электрон с кинетической энергией $\varepsilon = 4$ эВ. Определить энергию падающего фотона $\varepsilon_ф$ (в эВ).

38.24*. Определить скорость v фотоэлектронов, вырываемых электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 18$ нм из покоящихся невозбужденных ионов гелия He^+.

38.25*. Найти полную энергию E_n возбужденного состояния иона гелия He^+, если при переходе в основное состояние этот ион испустил последовательно два фотона с длинами волн $\lambda_1 = 108{,}5$ нм и $\lambda_2 = 30{,}4$ нм.

§ 39. Рентгеновское излучение

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Коротковолновая граница λ_{min} сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U},$$

где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке; $\hbar$ — постоянная Планка.

• Закон Мозли:

а) в общем случае

$$\omega = CR(Z-\sigma)^2,$$

где ω — частота линий рентгеновского спектра; Z — атомный номер элемента, излучающего этот спектр; R — постоянная Ридберга ($R = 2{,}07 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$); σ — постоянная экранирования; C — постоянная;

б) для K_α-линий ($\sigma = 1$, $C = 3/4$)

$$\omega_{K_\alpha} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R'(Z-1)^2,$$

где R' — штрихованная постоянная Ридберга ($R' = 1{,}10 \cdot 10^7$ м$^{-1}$); $1/\lambda = \omega/(2\pi c)$ — волновое число[3]).

• Энергия фотона K_α-линии рентгеновского излучения

$$\varepsilon_{K_\alpha} = \frac{3}{4}E_i(Z-1)^2,$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить длину волны λ_{K_α} и энергию ε_{K_α} фотона K_α-линии рентгеновского спектра, излучаемого вольфрамом при бомбардировке его быстрыми электронами.

Решение. При бомбардировке вольфрама быстрыми электронами возникает рентгеновское излучение, имеющее линейчатый спектр. Быстрые электроны, проникая внутрь электронной оболочки атома, выбивают электроны, принадлежащие электронным слоям. Ближайший к

[3]) Волновое число $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ не следует путать с циклическим волновым числом $k = 2\pi/\lambda$.

ядру электронный слой (K-слой) содержит два электрона. Если один из этих электронов оказывается выбитым за пределы атома, то на осво-

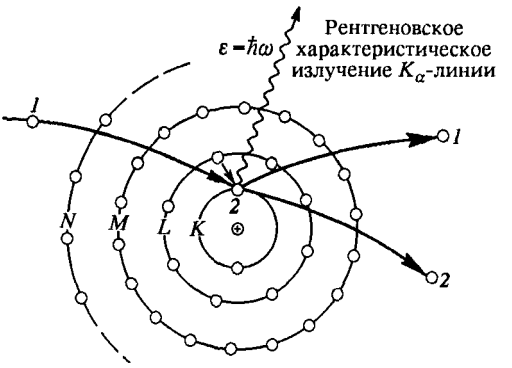


Рис. 39.1

бодившееся место переходит электрон из вышележащих слоев (L, M, N). При этом возникает соответствующая линия K-серии. При переходе электрона с L-слоя на K-слой излучается наиболее интенсивная K_α-линия рентгеновского спектра (рис. 39.1).

Длина волны этой линии определяется по закону Мозли:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R'(Z-1)^2,$$

откуда

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2}.$$

Подставив сюда значения Z (для вольфрама $Z = 74$) и R', найдем

$$\lambda_{K_\alpha} = 2{,}28 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 22{,}8 \text{ пм}.$$

Зная длину волны, определим энергию фотона по формуле

$$\varepsilon_{K_\alpha} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Подставив в эту формулу значения $\hbar$, c, λ_{K_α} и произведя вычисления, найдем

$$\varepsilon_{K_\alpha} = 54{,}4 \text{ кэВ}.$$

Заметим, что энергию фотона α-линии K-серии рентгеновского излучения можно определить также непосредственно по формуле $\varepsilon_{K_\alpha} = (3/4)E_i(Z-1)^2$, приведенной в начале параграфа.

Пример 2. Определить напряжение U, под которым работает рентгеновская трубка, если коротковолновая граница $\lambda_{\min}$ в спектре тормозного рентгеновского излучения оказалась равной 15,5 пм.

Р е ш е н и е. Тормозное рентгеновское излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении. В рентгеновской трубке электрон приобретает кинетическую энергию T, которая связана с ускоряющей разностью потенциалов U соотношением

$$T = |e|U, \tag{1}$$

где e — заряд электрона.

В соответствии с законом сохранения энергии энергия фотона не может превысить кинетической энергии электрона ($\hbar\omega \leqslant T$). Максимальная энергия фотона в этом случае определяется равенством

$$\hbar\omega_{\max} = T = |e|U. \tag{2}$$

Так как максимальная угловая частота $\omega_{\max}$ связана с минимальной длиной волны $\lambda_{\min}$ соотношением

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}},$$

то из выражений (1) и (2) находим

$$U = \frac{2\pi\hbar c}{|e|\lambda_{\min}}.$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}55 \cdot 10^{-11}} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot (\text{м/с})}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = 7{,}98 \cdot 10^{4}\ \text{В} = 79{,}8\ \text{кВ}.$$

ЗАДАЧИ

39.1. Определить скорость v электронов, падающих на антикатод рентгеновской трубки, если минимальная длина волны $\lambda_{\min}$ в сплошном спектре рентгеновского излучения равна 1 нм.

39.2. Определить коротковолновую границу $\lambda_{\min}$ сплошного спектра рентгеновского излучения, если рентгеновская трубка работает под напряжением $U = 30$ кВ.

39.3. Вычислить наибольшую длину волны $\lambda_{\max}$ в K-серии характеристического рентгеновского спектра скандия.

39.4. При исследовании линейчатого рентгеновского спектра некоторого элемента было найдено, что длина волны λ линии K_α равна 76 пм. Какой это элемент?

39.5. Какую наименьшую разность потенциалов $U_{\min}$ нужно приложить к рентгеновской трубке, антикатод которой покрыт ванадием ($Z = 23$), чтобы в спектре рентгеновского излучения появились все линии K-серии ванадия? Граница K-серии ванадия $\lambda = 226$ пм.

39.6. Определить энергию ε фотона, соответствующего линии K_α в характеристическом спектре марганца ($Z = 25$).

39.7. В атоме вольфрама электрон перешел с M-слоя на L-слой. Принимая постоянную экранирования σ равной 5,5, определить длину волны λ испущенного фотона.

39.8. Рентгеновская трубка работает под напряжением $U =$ $= 1$ МВ. Определить наименьшую длину волны $\lambda_{\min}$ рентгеновского излучения.

39.9. Вычислить длину волны λ и энергию ε фотона, принадлежащего K_α-линии в спектре характеристического рентгеновского излучения платины.

39.10. При каком наименьшем напряжении $U_{\min}$ на рентгеновской трубке начинают появляться линии серии K_α меди?

Глава 8

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 40. Строение атомных ядер

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом:

$$_{A}^{Z}\mathrm{X},$$

где X — символ химического элемента; Z — зарядовое число (атомный номер; число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число N нейтронов в ядре равно разности $A - Z$.

• Радиус ядра определяется соотношением

$$r = r_0 A^{1/3},$$

где r_0 — коэффициент пропорциональности, который можно считать для всех ядер постоянным и равным $1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Водород обогащен дейтерием. Определить массовые доли w_1 протия и w_2 дейтерия, если относительная атомная масса A_r такого водорода оказалась равной 1,122.

Решение. Массовые доли w_1 протия и w_2 дейтерия можно выразить соотношениями

$$w_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad w_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы соответственно протия и дейтерия в смеси.

Выразим из этих равенств массы m_1 и m_2

$$m_1 = w_1(m_1 + m_2); \quad m_2 = w_2(m_1 + m_2)$$

и подставим их в знаменатель формулы, определяющей молярную массу M смеси (см. § 8):

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2},$$

где M_1 и M_2 — молярные массы компонентов смеси.

После такой подстановки и простых преобразований получим

$$M = \frac{M_1 M_2}{w_1 M_2 + w_2 M_1}. \tag{1}$$

Так как молярные массы протия и дейтерия пропорциональны их относительным атомным массам, то равенство (1) можно переписать в виде

$$A_r = \frac{A_{r_1} A_{r_2}}{w_1 A_{r_2} + w_2 A_{r_1}}, \tag{2}$$

где A_{r_1} и A_{r_2} — относительные атомные массы соответственно протия и дейтерия.

Заметим далее, что сумма массовых долей всех компонентов должна быть равна единице, т. е.

$$w_1 + w_2 = 1. \tag{3}$$

Решив совместно равенства (2) и (3), найдем

$$w_1 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r (A_{r_2} - A_{r_1})}; \quad w_2 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_2}}{A_r (A_{r_1} - A_{r_2})}. \tag{4}$$

В табл. 21 найдем: $A_{r_1} = 1{,}00783$, $A_{r_2} = 2{,}01410$.

Подставив числовые значения величин в (4), получим

$$w_1 = 0{,}796 \quad \text{и} \quad w_2 = 0{,}204.$$

Пример 2. Ядро нептуния $^{234}_{93}\mathrm{Np}$ захватило электрон из K-оболочки атома (K-захват) и испустило α-частицу. Ядро какого элемента получилось в результате этих превращений?

Решение. При K-захвате из ближайшей к ядру электронной оболочки (K-оболочки) атома электрон захватывается ядром. В результате этого протон в ядре превращается в нейтрон [1]). Общее число нуклонов в ядре не изменяется, а зарядовое число уменьшится на единицу. Поэтому промежуточное ядро будет иметь зарядовое число $93 - 1 = 92$; массовое число останется прежним — 234. По таблице Д. И. Менделеева определяем, что промежуточным ядром является изотоп урана $^{234}_{92}\mathrm{U}$.

Промежуточное ядро испустило α-частицу. Так как α-частица (ядро атома изотопа гелия $^4_2\mathrm{He}$) содержит два протона и два нейтрона, то промежуточное ядро $^{234}_{92}\mathrm{U}$ при акте испускания α-частицы уменьшит зарядовое число на две единицы и массовое число на четыре единицы. Таким образом, конечное ядро будет иметь $Z = 90$ и $A = 230$, что соответствует изотопу тория $^{230}_{90}\mathrm{Th}$.

---

[1]) При K-захвате из ядра выбрасывается нейтрино, однако для решения данной задачи это существенной роли не играет.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Масса ядра

40.1. Зная постоянную Авогадро N_A, определить массу m_a нейтрального атома углерода ^{12}C и массу m, соответствующую углеродной единице массы.

40.2. Чем отличается массовое число от относительной массы ядра?

40.3. Хлор представляет собой смесь двух изотопов с относительными атомными массами $A_{r_1} = 34{,}969$ и $A_{r_2} = 36{,}966$. Вычислить относительную атомную массу A_r хлора, если массовые доли w_1 и w_2 первого и второго изотопов соответственно равны 0,754 и 0,246.

40.4. Бор представляет собой смесь двух изотопов с относительными атомными массами $A_{r_1} = 10{,}013$ и $A_{r_2} = 11{,}009$. Определить массовые доли w_1 и w_2 первого и второго изотопов в естественном боре. Относительная атомная масса A_r бора равна 10,811.

40.5. Какую часть массы нейтрального атома плутония составляет масса его электронной оболочки?

40.6. Определить массу ядра лития, если масса нейтрального атома лития равна 7,01601 а.е.м.

Состав ядра. Размеры ядра

40.7. Укажите, сколько нуклонов, протонов, нейтронов содержат следующие ядра: 1) $^{3}_{2}He$; 2) $^{10}_{5}B$; 3) $^{23}_{11}Na$; 4) $^{54}_{26}Fe$; 5) $^{104}_{47}Ag$; 6) $^{238}_{92}U$.

40.8. Напишите символические обозначения ядер изотопов водорода и назовите их.

40.9. Укажите, сколько существует изобар с массовым числом $A = 3$. Напишите символические обозначения ядер.

40.10. Какие изотопы содержат два нейтрона? (Дать символическую запись ядер.)

40.11. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы зеркальных ядер, которые получатся, если в ядрах $^{3}_{2}He$, $^{7}_{4}Be$, $^{15}_{8}O$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны — протонами. Привести символическую запись получившихся ядер.

40.12. Определить диаметры следующих ядер: 1) $^{8}_{3}Li$; 2) $^{27}_{13}Al$; 3) $^{64}_{29}Cu$; 4) $^{125}_{50}Sn$; 5) $^{216}_{84}Po$.

40.13. Определить концентрацию нуклонов в ядре.

40.14. Оценить, какую часть от объема атома кобальта составляет объем его ядра. Плотность ρ кобальта равна $4{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

40.15. Показать, что средняя плотность $\langle\rho\rangle$ ядерного вещества одинакова для всех ядер. Оценить (по порядку величины) ее значение.

40.16. Используя соотношение $Z = A/2$, которое справедливо для многих легких ядер, определить среднюю объемную плотность заряда ядра.

40.17. Два ядра $^{10}_{5}\mathrm{B}$ сблизились до расстояния, равного диаметру ядра. Считая, что масса и заряд равномерно распределены по объему ядра, определить силу F_1 гравитационного притяжения, силу F_2 кулоновского отталкивания и отношение этих сил (F_1/F_2).

Спин и магнитный момент ядра

40.18. Каково значение спина нуклона (в единицах $\hbar$)?

40.19. Что называется спином ядра? Из чего он складывается?

40.20. Какие значения может иметь спин ядра (в единицах $\hbar$)?

40.21. Какие теоретически возможные значения спина (в единицах $\hbar$) могут иметь следующие ядра: 1) $^{2}_{1}\mathrm{H}$; 2) $^{3}_{1}\mathrm{H}$; 3) $^{3}_{2}\mathrm{He}$; 4) $^{4}_{2}\mathrm{He}$?

40.22. Какие значения может иметь спин (в единицах $\hbar$) следующих ядер: 1) четно-четных; 2) четно-нечетных; 3) нечетно-четных; 4) нечетно-нечетных?

40.23. В первоначальной модели ядра предполагалось, что ядро состоит из протонов и электронов. Показать, что это предположение не оправдывается, например для ядра азота $^{14}_{7}\mathrm{N}$ (азотная катастрофа). Спин ядра азота равен $\hbar$, протона $\hbar/2$ и электрона $\hbar/2$.

40.24. Спин дейтрона, находящегося в основном состоянии, равен $\hbar$. Зная, что спиновое квантовое число протона равно $1/2$, определить теоретически возможные значения спина нейтрона.

40.25. Что такое ядерный магнетон и как он выражается?

40.26. Каково соотношение между ядерным магнетоном и магнетоном Бора?

40.27. Как выражается магнитный момент ядра?

40.28. Чем обусловлено сверхтонкое расщепление спектральных линий? В чем отличие сверхтонкого расщепления от тонкого?

Модели ядра

40.29. В чем сущность капельной модели ядра?

40.30. Какие явления объясняет капельная модель ядра?

40.31. В чем сущность оболочечной модели ядра?

40.32. Какие явления объясняет оболочечная модель ядра?

40.33. Могут ли электроны находиться в ядре? Ответ обосновать.

40.34. Какие ядра называются магическими? дважды магическими?

Ядерные силы

40.35. К какому типу взаимодействия относятся ядерные силы?

40.36. В чем проявляется короткодействующий характер ядерных сил?

40.37. Что такое зарядовая независимость?

40.38. В чем проявляется нецентральный характер ядерных сил?

40.39. Что означает свойство насыщения ядерных сил?

40.40. Что называется виртуальными частицами и какую роль они играют в объяснении ядерных сил?

Превращение ядер

40.41. Ядро радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ выбросило α-частицу (ядро атома гелия $^{4}_{2}\mathrm{He}$). Найти массовое число A и зарядовое число Z вновь образовавшегося ядра. По таблице Д. И. Менделеева определить, какому элементу это ядро соответствует.

40.42. Ядро азота $^{14}_{7}\mathrm{N}$ захватило α-частицу и испустило протон. Определить массовое число A и зарядовое число Z образовавшегося в результате этого процесса ядра. Указать, какому элементу это ядро соответствует.

40.43. Ядро цинка $^{65}_{30}\mathrm{Zn}$ захватило электрон из K-оболочки атома (K-захват). Указать, в ядро какого элемента превратилось ядро цинка (написать химический символ элемента, массовое и зарядовое число).

40.44. Ядро бериллия $^{7}_{4}\mathrm{Be}$ захватило электрон из K-оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате K-захвата?

40.45. В ядре изотопа углерода $^{14}_{6}\mathrm{C}$ один из нейтронов превратился в протон (β^--распад). Какое ядро получилось в результате такого превращения?

40.46. Два ядра гелия ($^{4}_{2}\mathrm{He}$) слились в одно ядро, и при этом был выброшен протон. Укажите, ядро какого элемента образовалось в результате такого превращения (приведите символическую запись ядра).

40.47. В ядре изотопа кремния $^{27}_{14}\mathrm{Si}$ один из протонов превратился в нейтрон (β^+-распад). Какое ядро получилось в результате такого превращения?

40.48. Ядро цинка $^{62}_{30}\mathrm{Zn}$ захватило электрон из K-оболочки и спустя некоторое время испустило позитрон. Какое ядро получилось в результате таких превращений?

40.49. Ядро плутония $^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ испытало шесть последовательных α-распадов. Написать цепочку ядерных превращений с указанием химических символов, массовых и зарядовых чисел промежуточных ядер и конечного ядра.

40.50. Покоившееся ядро радона $^{220}_{86}\mathrm{Rn}$ выбросило α-частицу со скоростью $v = 1{,}6 \cdot 10^7$ м/с. В какое ядро превратилось ядро радона? Какую скорость v_1 получило оно в результате отдачи?

§ 41. Радиоактивность

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• *Основной закон радиоактивного распада*

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

где N — число нераспавшихся атомов в момент времени t; N_0 — число нераспавшихся атомов в момент, принятый за начальный (при $t = 0$); e — основание натуральных логарифмов; λ — постоянная радиоактивного распада.

• Период полураспада $T_{1/2}$ — промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшается в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

• Число атомов, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right).$$

Если промежуток времени $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для определения числа распавшихся атомов можно применять приближенную формулу

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

Среднее время жизни τ радиоактивного ядра — промежуток времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз (e — основание натуральных логарифмов):

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

• Число атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N = \frac{m}{M} N_{\mathrm{A}},$$

где m — масса изотопа; M — его молярная масса; N_{A} — постоянная Авогадро.

• Активность A нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа) есть величина, равная отношению числа $\mathrm{d}N$ ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени $\mathrm{d}t$, за которое произошел распад. Активность определяется по формуле

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N,$$

или после замены N по основному закону радиоактивного распада

$$A = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Активность изотопа в начальный момент времени ($t = 0$)

$$A_0 = \lambda N_0.$$

Активность изотопа изменяется со временем по тому же закону, что и число нераспавшихся ядер:

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

• Массовая активность a радиоактивного источника есть величина, равная отношению его активности A к массе m этого источника, т. е.

$$a = \frac{A}{m}.$$

• Если имеется смесь ряда радиоактивных изотопов, образующихся одни из другого, и если постоянная распада λ первого члена ряда много меньше постоянных всех остальных членов ряда, то в смеси устанавливается состояние радиоактивного равновесия, при котором активности всех членов ряда равны между собой:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \ldots = \lambda_k N_k.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния ^{27}Mg массой $m = 0{,}2$ мкг, а также активность A по истечении времени $t = 1$ ч. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0, \tag{1}$$

где λ — постоянная радиоактивного распада; N_0 — количество атомов изотопа в начальный момент ($t = 0$).

Если учесть, что $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $N_0 = \dfrac{m}{M} N_{\text{А}}$, то формула (1) примет вид

$$A_0 = \frac{m N_{\text{А}}}{M T_{1/2}} \ln 2. \tag{2}$$

Выразим входящие в эту формулу величины в СИ и произведем вычисления:

$$A_0 = 5{,}15 \cdot 10^{12} \text{ Бк}.$$

Активность изотопа уменьшается со временем по закону

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{3}$$

Заменив в формуле (3) постоянную распада λ ее выражением, получим

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2\, t}{T_{1/2}}} = A_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-t/T_{1/2}}.$$

Так как $e^{\ln 2} = 2$, то окончательно будем иметь

$$A = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим

$$A = 8{,}05 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

Пример 2. При определении периода полураспада $T_{1/2}$ короткоживущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ мин в начале наблюдения ($t = 0$) было насчитано $\Delta n_1 = 250$ импульсов, а по истечении $t = 1$ ч за то же время Δt — $\Delta n_2 = 92$ импульса. Определить постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Решение. Число импульсов Δn, регистрируемых счетчиком за время Δt, пропорционально числу распавшихся атомов ΔN. Таким образом, при первом измерении

$$\Delta n_1 = k\Delta N_1 = kN_1\left(1 - e^{-\lambda \Delta t}\right), \tag{4}$$

где N_1 — количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; k — коэффициент пропорциональности (постоянный для данного прибора и данного расположения прибора относительно радиоактивного изотопа).

При повторном измерении (предполагается, что расположение приборов осталось прежним)

$$\Delta n_2 = k\Delta N_2 = kN_2\left(1 - e^{-\lambda \Delta t}\right), \tag{5}$$

где N_2 — количество радиоактивных атомов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение (4) на выражение (5) и приняв во внимание, что по условию задачи Δt одинаково в обоих случаях, а также, что N_1 и N_2 связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = e^{\lambda t}, \tag{6}$$

где t — время, прошедшее от первого до второго измерения. Для вычисления λ выражение (6) следует прологарифмировать: $\ln \dfrac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \lambda t$, откуда

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}.$$

Подставив числовые данные, получим постоянную радиоактивного распада, а затем и период полураспада:

$$\lambda = \frac{1}{1} \ln \frac{250}{92} \text{ ч}^{-1} = 1 \text{ ч}^{-1}; \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 41{,}5 \text{ мин}.$$

ЗАДАЧИ

Закон радиоактивного распада

41.1. Какова вероятность W того, что данный атом в изотопе радиоактивного иода ^{131}I распадается в течение ближайшей секунды?

41.2. Определить постоянные распада λ изотопов радия $^{219}_{88}$Ra и $^{226}_{88}$Ra.

41.3. Постоянная распада λ рубидия ^{89}Rb равна $0{,}00077\,\text{с}^{-1}$. Определить его период полураспада $T_{1/2}$.

41.4. Какая часть начального количества атомов распадется за один год в радиоактивном изотопе тория ^{229}Th?

41.5. Какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния ^{225}Ac останется через 5 сут? через 15 сут?

41.6. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

41.7. За какое время t распадается $1/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24$ ч?

41.8. За время $t = 8$ сут распалось $k = 3/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа. Определить период полураспада $T_{1/2}$.

41.9. При распаде радиоактивного полония ^{210}Po массой $m = 40$ г в течение времени $t = 10$ ч образовался гелий ^{4}He, который при нормальных условиях занял объем $V = 8{,}9\,\text{см}^3$. Определить период полураспада $T_{1/2}$ полония.

41.10. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного нуклида равен 1 ч. Определить среднюю продолжительность τ жизни этого нуклида.

41.11. Какая часть начального количества радиоактивного нуклида распадается за время t, равное средней продолжительности τ жизни этого нуклида?

Активность. Радиоактивное равновесие

41.12. Определить число N атомов, распадающихся в радиоактивном изотопе за время $t = 10$ с, если его активность $A = 10^5$ Бк. Считать активность постоянной в течение указанного времени.

41.13. Активность A препарата уменьшилась в $k = 250$ раз. Скольким периодам полураспада $T_{1/2}$ равен протекший промежуток времени t?

41.14. За время $t = 1$ сут активность изотопа уменьшилась от $A_1 = 1{,}18 \cdot 10^{11}$ Бк до $A_2 = 7{,}4 \cdot 10^9$ Бк. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого нуклида.

41.15. На сколько процентов снизится активность A изотопа иридия ^{192}Ir за время $t = 30$ сут?

41.16. Определить промежуток времени τ, в течение которого активность A изотопа стронция ^{90}Sr уменьшится в $k_1 = 10$ раз? в $k_2 = 100$ раз?

41.17. Счетчик Гейгера, установленный вблизи препарата радиоактивного изотопа серебра, регистрирует поток β-частиц. При первом измерении поток Φ_1 частиц был равен $87\,\text{с}^{-1}$, а по истечении времени $t = 1$ сут поток Φ_2 оказался равным $22\,\text{с}^{-1}$. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

41.18. Определить активность A фосфора ^{32}P массой $m = 1$ мг.

41.19. Вычислить удельную активность a кобальта ^{60}Co.

41.20. Найти отношение массовой активности a_1 стронция ^{90}Sr к массовой активности a_2 радия ^{226}Ra.

41.21. Найти массу m_1 урана ^{238}U, имеющего такую же активность A, как стронций ^{90}Sr массой $m_2 = 1$ мг.

41.22. Определить массу m_2 радона ^{222}Rn, находящегося в радиоактивном равновесии с радием ^{226}Ra массой $m_1 = 1$ г.

41.23. Уран ^{234}U является продуктом распада наиболее распространенного изотопа урана ^{238}U. Определить период полураспада $T_{1/2}$ урана ^{234}U, если его массовая доля w в естественном уране ^{238}U равна $6 \cdot 10^{-5}$.

41.24. Радиоактивный изотоп $^{22}_{11}$Na излучает γ-кванты энергией $\varepsilon = 1{,}28$ МэВ. Определить мощность P γ-излучения и энергию W, излучаемую за время $t = 5$ мин изотопом натрия массой $m = 5$ г. Считать, что при каждом акте распада излучается один γ-фотон с указанной энергией.

41.25. Точечный изотропный радиоактивный источник создает на расстоянии $r = 1$ м интенсивность I γ-излучения, равную $1{,}6 \times \times 10^{-3}\,\text{Вт/м}^2$. Принимая, что при каждом акте распада ядра излучается один γ-фотон с энергией $\varepsilon = 1{,}33$ МэВ, определить активность A источника.

41.26. Определить интенсивность I γ-излучения на расстоянии $r = 5$ см от точечного изотропного радиоактивного источника, имеющего активность $A = 1{,}48 \cdot 10^{11}$ Бк. Считать, что при каждом акте распада излучается в среднем $n = 1{,}8$ γ-фотонов с энергией $\varepsilon = 0{,}51$ МэВ каждый.

§ 42. Элементы дозиметрии ионизирующих излучений

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Закон ослабления узкого пучка моноэргетических γ-излучений при прохождении через поглощающее вещество:

а) ослабление плотности потока ионизирующих частиц или фотонов

$$J = J_0 \exp(-\mu x),$$

где J_0 — плотность потока частиц, падающих на поверхность вещества; J — плотность потока частиц после прохождения слоя вещества толщиной x; μ — линейный коэффициент ослабления (рис. 42.1);

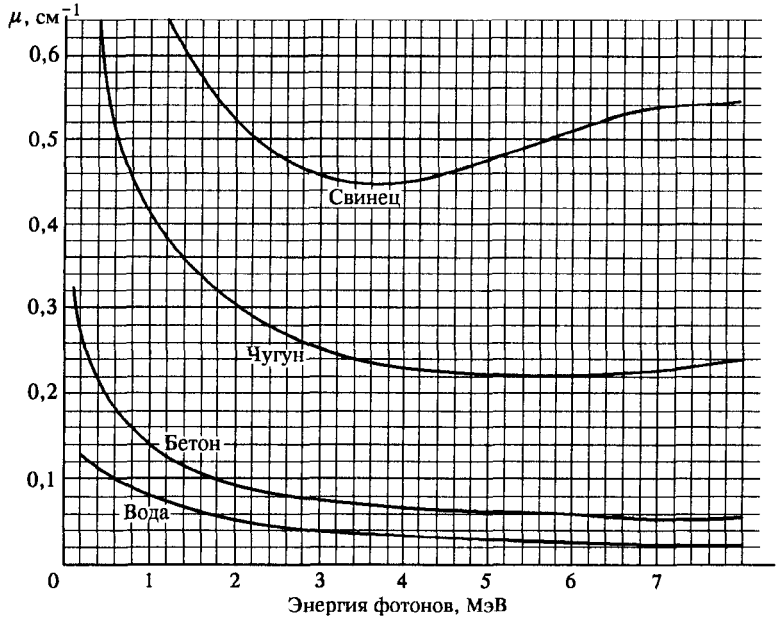


Рис. 42.1

б) ослабление интенсивности излучений

$$I = I_0 \exp(-\mu x),$$

где I — интенсивность γ-излучений в веществе на глубине x; I_0 — интенсивность γ-излучений, падающих на поверхность вещества.

• Слоем половинного ослабления называется слой, толщина $x_{1/2}$ которого такова, что интенсивность проходящих через него γ-излучений уменьшается в два раза:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{\mu}.$$

• Доза излучения (поглощенная доза излучения)

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m},$$

где ΔW — энергия ионизирующего излучения, переданная элементу облучаемого вещества; Δm — масса этого элемента.

Доза излучения выражается в греях (1 Гр = 1 Дж/кг).

Мощность дозы излучения (мощность поглощенной дозы излучения)

$$\dot{D} = \frac{\Delta D}{\Delta t},$$

где Δt — время, в течение которого была поглощена элементом облучения доза излучения ΔD.

Мощность дозы излучения выражается в греях в секунду (Гр/с).

• *Экспозиционная доза фотонного излучения* (*экспозиционная доза* γ- и рентгеновского излучения) есть величина, равная отношению суммы электрических зарядов ΔQ всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе при условии полного использования ионизирующей способности электронов, к массе Δm этого воздуха:

$$X = \frac{\Delta Q}{\Delta m}.$$

Единица экспозиционной дозы — кулон на килограмм (Кл/кг).

• Мощность экспозиционной дозы фотонного излучения $\dot{X}$ есть величина, равная отношению экспозиционной дозы ΔX фотонного излучения к интервалу времени Δt, за которое получена эта доза, т. е.

$$\dot{X} = \frac{\Delta X}{\Delta t}.$$

Мощность экспозиционной дозы выражается в амперах на килограмм (А/кг).

• Экспозиционная доза рентгеновского и γ-излучения, падающего на объект, экранированный защитным слоем толщиной x,

$$X = X_0 \exp(-\mu x),$$

где X_0 — экспозиционная доза при отсутствии защитного слоя.

• Экспозиционная доза γ-излучения, падающего за время t на объект, находящийся в воздухе на расстоянии R от точечного источника,

$$X = \frac{\dot{X} t}{R^2},$$

где $\dot{X}$ — мощность экспозиционной дозы на расстоянии, равном единице. Поглощением γ-излучения в воздухе пренебрегаем.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить толщину слоя половинного ослабления $x_{1/2}$ параллельного пучка γ-излучения для воды, если линейный коэффициент ослабления $\mu = 0{,}047\,\text{см}^{-1}$.

Решение. При прохождении γ-излучения через слой вещества происходит его поглощение за счет трех факторов: фотоэффекта, эффекта Комптона и образования пар (электрон–позитрон). В результате действия этих трех факторов интенсивность γ-излучения экспоненциально убывает в зависимости от толщины слоя:

$$I = I_0 \exp(-\mu x). \tag{1}$$

Пройдя поглощающий слой толщиной, равной толщине слоя половинного ослабления $x_{1/2}$, пучок γ-излучения будет иметь интенсивность $I = I_0/2$. Подставив значения I и x в формулу (1), получим $I_0/2 = I_0 \exp(-\mu x_{1/2})$, или после сокращения на I_0

$$\frac{1}{2} = \exp(-\mu x_{1/2}).$$

Прологарифмировав последнее выражение, получим искомое значение толщины слоя половинного ослабления:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) значения μ и $\ln 2$, найдем $x_{1/2}$

$$x_{1/2} = 14{,}7 \text{ см}.$$

Таким образом, слой воды толщиной в 14,7 см снижает интенсивность γ-излучения в два раза.

Пример 2. Точечный радиоактивный источник ^{60}Co находится в центре свинцового сферического контейнера с толщиной стенок $x = 1$ см и наружным радиусом $R = 20$ см. Определить максимальную активность $A_{\max}$ источника, который можно хранить в контейнере, если допустимая плотность потока $J_{\text{доп}}$ γ-фотонов при выходе из контейнера равна $8 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$. Принять, что при каждом акте распада ядра ^{60}Co испускается $n = 2$ γ-фотона, средняя энергия которых $\langle \varepsilon \rangle = 1{,}25$ МэВ.

Решение. Активность радиоактивного источника связана с потоком излучения γ-фотонов соотношением $\Phi = An$, где n — число γ-фотонов, испускаемых при одном акте распада, откуда

$$A = \frac{\Phi}{n}. \tag{3}$$

Поток Φ, входящий в эту формулу, выразим через плотность потока. Плотность потока на расстоянии R от точечного источника излучений

$$J_1 = \frac{\Phi}{4\pi R^2}. \tag{4}$$

После прохождения излучений через свинцовую стенку контейнера плотность потока уменьшится и выразится соотношением $J_2 = J_1 \exp(-\mu x)$. Выразив отсюда J_1 и подставив в формулу (4), найдем

$$J_2 \exp(\mu x) = \frac{\Phi}{4\pi R^2},$$

откуда

$$\Phi = 4\pi R^2 J_2 \exp(\mu x).$$

Подставив выражение Φ в (3), получим

$$A = \frac{4\pi R^2 J_2 \exp(\mu x)}{n}.$$

Если в полученной формуле принять $J_2 = J_{\text{доп}}$, то эта формула будет выражать искомую максимальную активность источника, который можно хранить в контейнере:

$$A_{\max} = \frac{4\pi R^2 J_{\text{доп}} \exp(\mu x)}{n}. \qquad (5)$$

По графику на рис. 42.1 находим, что линейный коэффициент ослабления μ для γ-фотонов с энергией $\varepsilon = 1{,}25$ МэВ равен $0{,}64\ \text{см}^{-1}$.

Выразим величины, входящие в формулу (5), в единицах СИ и, выполнив вычисления, получим

$$A = 3{,}8 \cdot 10^6 \text{ Бк}.$$

Пример 3. Космическое излучение на уровне моря на экваторе образует в воздухе объемом $V = 1\,\text{см}^3$ в среднем $N = 24$ пары ионов за время $t_1 = 10$ с. Определить экспозиционную дозу X, получаемую человеком за время $t_2 = 1$ год.

Решение. Экспозиционную дозу, получаемую человеком, можно выразить по формуле

$$X = \dot{X} t_2, \qquad (6)$$

где $\dot{X}$ — мощность экспозиционной дозы излучения.

Мощность дозы $\dot{X} = Q/(mt_1)$, где Q — заряд ионов одного знака, образуемых излучением за время t_1 в воздухе массой m. Масса воздуха может быть найдена как произведение плотности ρ воздуха на его объем V: $m = \rho V$. Заряд всех ионов одного знака найдем, помножив элементарный заряд на число ионов: $Q = eN$.

Формула (6) с учетом выражений $\dot{X}$, m и Q примет вид

$$X = \dot{X} t_2 = \frac{Q}{mt_1} t_2 = \frac{ent_2}{\rho V t_1}. \qquad (7)$$

Выразим величины, входящие в формулу (7), в единицах СИ выполнив вычисления, получим

$$X = 9{,}41 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/кг}.$$

ЗАДАЧИ

Поглощение γ-излучений[2])

42.1. Определить число N слоев половинного ослабления, уменьшающих интенсивность I узкого пучка γ-излучения в $k = 100$ раз.

42.2. Определить для бетона толщину слоя половинного ослабления $x_{1/2}$ узкого пучка γ-излучения с энергией фотонов $\varepsilon = 0{,}6$ МэВ.

42.3. На какую глубину нужно погрузить в воду источник узкого пучка γ-излучения (энергия ε γ-фотонов равна 1,6 МэВ), чтобы интенсивность I пучка, выходящего из воды, была уменьшена в $k = 1000$ раз?

42.4. Интенсивность I узкого пучка γ-излучения после прохождения через слой свинца толщиной $x = 4$ см уменьшилась в $k = 8$ раз. Определить энергию ε γ-фотонов и толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления.

42.5. Через свинец проходит узкий пучок γ-излучения. При каком значении энергии ε γ-фотонов толщина $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления будет максимальной? Определить максимальную толщину $x_{\max}$ слоя половинного ослабления для свинца.

42.6. Узкий пучок γ-излучения (энергия ε γ-фотонов равна 2,4 МэВ) проходит через бетонную плиту толщиной $x_1 = 1$ м. Какой толщины x_2 плита из чугуна дает такое же ослабление данного пучка γ-излучения?

42.7. Чугунная плита уменьшает интенсивность I узкого пучка γ-излучения (энергия ε γ-фотонов равна 2,8 МэВ) в $k = 10$ раз. Во сколько раз уменьшит интенсивность этого пучка свинцовая плита такой же толщины?

Элементы дозиметрии

42.8. Какая доля w всех молекул воздуха при нормальных условиях ионизируется рентгеновским излучением при экспозиционной дозе $X = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг?

42.9. Воздух при нормальных условиях облучается γ-излучением. Определить энергию W, поглощаемую воздухом массой $m = 5$ г при экспозиционной дозе излучения $X = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг.

42.10. Под действием космических лучей в воздухе объемом $V = 1$ см^3 на уровне моря образуется в среднем $N = 120$ пар ионов за промежуток времени $\Delta t = 1$ мин. Определить экспозиционную дозу X излучения, действию которого подвергается человек за время $t = 1$ сут.

---

[2]) При решении задач 42.2–42.7 воспользоваться графиком, изображенным на рис. 42.1.

42.11. Эффективная вместимость V ионизационной камеры карманного дозиметра равна $1\,см^3$, электроемкость $C = 2\,пФ$. Камера содержит воздух при нормальных условиях. Дозиметр был заряжен до потенциала $\varphi_1 = 150\,В$. Под действием излучения потенциал понизился до $\varphi_2 = 110\,В$. Определить экспозиционную дозу X излучения.

42.12. Мощность $\dot{X}$ экспозиционной дозы, создаваемая удаленным источником γ-излучения с энергией фотонов $\varepsilon = 2\,МэВ$, равна $8{,}6 \cdot 10^{-7}\,А/кг$. Определить толщину x свинцового экрана, снижающего мощность экспозиционной дозы до уровня предельно допустимой $\dot{X} = 8{,}6 \cdot 10^{-10}\,А/кг$ (см. рис. 42.1).

42.13. На расстоянии $l = 10$ см от точечного источника γ-излучения мощность экспозиционной дозы $\dot{X} = 8{,}6 \cdot 10^{-7}\,А/кг$. На каком наименьшем расстоянии l_{min} от источника экспозиционная доза излучения X за рабочий день продолжительностью $t = 6$ ч не превысит предельно допустимую $5{,}16 \cdot 10^{-6}\,Кл/кг$? Поглощением γ-излучения в воздухе пренебречь.

42.14. Мощность экспозиционной дозы $\dot{X}$ γ-излучения на расстоянии $r_1 = 40$ см от точечного источника равна $4{,}30 \cdot 10^{-6}\,А/кг$. Определить время t, в течение которого можно находиться на расстоянии $r_2 = 6\,м$ от источника, если предельно допустимую экспозиционную дозу X принять равной $5{,}16 \cdot 10^{-6}\,Кл/кг$. Поглощением γ-излучения в воздухе пренебречь.

§ 43. Дефект массы и энергия связи атомных ядер

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Согласно релятивистской механике, масса покоя m устойчивой системы взаимосвязанных частиц меньше суммы масс покоя $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ тех же частиц, взятых в свободном состоянии. Разность

$$\Delta m = (m_1 + m_2 + \ldots + m_k) - m \qquad (*)$$

называется дефектом массы системы частиц.

• Энергия связи прямо пропорциональна дефекту массы системы частиц:

$$E_{св} = c^2 \Delta m,$$

где c — скорость света в вакууме ($c^2 = 8{,}987 \cdot 10^{16}\,м^2/с^2 = 8{,}987 \times \times 10^{16}\,Дж/кг$).

Если энергия выражена в мегаэлектрон-вольтах, а масса в атомных единицах, то

$$c^2 = 931{,}4\ МэВ/а.е.м.$$

• Дефект массы[3]) Δm атомного ядра есть разность между суммой масс свободных протонов и нейтронов и массой образовавшегося из них ядра:

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_я,$$

где Z — зарядовое число (число протонов в ядре); m_p и m_n — массы протона и нейтрона соответственно; $m_я$ — масса ядра.

Если учесть, что

$$m_я = m_а - Zm_e; \quad m_p + m_e = m_{1_H}; \quad N = (A - Z),$$

то формулу дефекта массы ядра можно представить в виде

$$\Delta m = Zm_{1_H} + (A - Z)m_n - m_а,$$

где A — массовое число (число нуклонов в ядре).

• Удельная энергия связи (энергия связи на нуклон)

$$E_{уд} = \frac{E_{св}}{A}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи $E_{св}$ ядра $^{11}_{5}B$.

Решение. Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm_{1_H} + (A - Z)m_n - m_а. \qquad (1)$$

Вычисление дефекта массы выполним во внесистемных единицах (а.е.м.). Для ядра $^{11}_{5}B$: $Z = 5$, $A = 11$. Массы нейтральных атомов водорода ($^{1}_{1}H$) и бора ($^{11}_{5}B$), а также нейтрона (n) найдем из табл. 21.

Подставим найденные массы в выражение (1) и произведем вычисления:

$$\Delta m = (5 \cdot 1{,}00783 + (11 - 5) \cdot 1{,}00867 - 11{,}00931) \text{ а.е.м.},$$

или

$$\Delta m = 0{,}08186 \text{ а.е.м.}$$

Энергия связи ядра определяется соотношением

$$E_{св} = \Delta mc^2. \qquad (2)$$

---

[3]) Термин «дефект массы» иногда применяют в другом смысле, а именно, дефектом массы Δ называют разность между относительной массой A_r данного изотопа и его массовым числом A: $\Delta = A_r - A$ Таким образом, дефект массы Δ показывает отклонение относительной атомной массы от целочисленного значения. Эта величина прямого физического смысла не имеет, но ее использование позволяет в ряде случаев значительно упростить вычисления.

В настоящем пособии всюду имеется в виду дефект массы Δm, определяемый общей формулой (*).

Энергию связи ядра также найдем во внесистемных единицах (МэВ). Для этого дефект массы подставим в выражение (2) в а.е.м., а коэффициент пропорциональности (c^2) — в МэВ/(а.е.м.), т. е.

$$E_{\text{св}} = 931,4 \cdot 0,08186 \text{ МэВ} = 76,24 \text{ МэВ},$$

и округлим полученный результат до трех значащих цифр:

$$E_{\text{св}} = 76,2 \text{ МэВ}.$$

Пример 2. Определить удельную энергию связи ядра $^{7}_{3}\text{Li}$.

Решение. *Удельная энергия связи* есть *энергия связи ядра*, приходящаяся на один нуклон:

$$E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A},$$

или

$$E_{\text{уд}} = \frac{c^2}{A}\left(Zm_{^1_1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}}\right).$$

Подставим в эту формулу значения величин (см. табл. 21, 22) и произведем вычисления:

$$E_{\text{уд}} = \frac{931,4}{7}\left(3 \cdot 1,00783 + (7 - 3) \cdot 1,00867 - 7,01601\right) \text{ МэВ/нуклон} =$$

$$= 5,61 \text{ МэВ/нуклон}.$$

Пример 3. Определить энергию E, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $^{23}_{11}\text{Na}$.

Решение. *После отрыва нейтрона число нуклонов* A *в ядре* уменьшится на единицу, а число протонов Z останется неизменным; получится ядро ^{22}Na. Ядро ^{23}Na можно рассматривать как устойчивую систему, образовавшуюся в результате захвата свободного нейтрона ядром ^{22}Na. Энергия отрыва нейтрона от ядра ^{23}Na равна энергии связи нейтрона с ядром ^{22}Na ($E = E_{\text{св}}$).

Выразив энергию связи нейтрона через дефект массы системы, получим

$$E = E_{\text{св}} = c^2\Delta m = c^2(m_{^{22}\text{Na}} + m_n - m_{^{23}\text{Na}}).$$

При подстановке числовых значений заменяем массы ядер массами нейтральных атомов. Так как число электронов в оболочках атомов ^{22}Na и ^{23}Na одинаково, то разность масс атомов ^{22}Na и ^{23}Na от такой замены не изменится:

$$E = 931,4 \text{ МэВ/(а.е.м.)} \cdot 0,01334 \text{ а.е.м.} = 12,42 \text{ МэВ}.$$

После округления

$$E = 12,4 \text{ МэВ}.$$

ЗАДАЧИ

43.1. Используя известные значения масс нейтральных атомов ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ и электрона, определить массы m_p протона, m_d дейтона, $m_я$ ядра ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$.

43.2. Масса m_α α-частицы (ядро гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$) равна 4,00150 а.е.м. Определить массу m_a нейтрального атома гелия.

43.3. Зная массу m_a нейтрального атома изотопа лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ (см. табл. 21), определить массы m_1, m_2 и m_3 ионов лития: однозарядного $({}^{7}_{3}\mathrm{Li})^{+}$, двухзарядного $({}^{7}_{3}\mathrm{Li})^{++}$ и трехзарядного $({}^{7}_{3}\mathrm{Li})^{+++}$.

43.4. Определить дефект массы Δm и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра атома тяжелого водорода.

43.5. Определить энергию $E_{\text{св}}$, которая освободится при соединении одного протона и двух нейтронов в атомное ядро.

43.6. Определить удельную энергию связи $E_{\text{уд}}$ ядра ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$.

43.7. Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определить массу m_a нейтрального атома, имеющего это ядро.

43.8. Определить массу m_a нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра равна 26,3 МэВ.

43.9. Атомное ядро, поглотившее γ-фотон ($\lambda = 0{,}47$ пм), пришло в возбужденное состояние и распалось на отдельные нуклоны, разлетевшиеся в разные стороны. Суммарная кинетическая энергия T нуклонов равна 0,4 МэВ. Определить энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра.

43.10. Какую наименьшую энергию E нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядра ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ и ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$? Почему для ядра бериллия эта энергия меньше, чем для ядра лития?

43.11. Определить энергию E, которая выделится при образовании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ массой $m = 1$ г.

43.12. Какую наименьшую энергию E нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$?

43.13. Найти минимальную энергию E, необходимую для удаления одного протона из ядра азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$.

43.14. Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра кислорода ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$ равна 139,8 МэВ, ядра фтора ${}^{19}_{9}\mathrm{F}$ — 147,8 МэВ. Определить, какую минимальную энергию E нужно затратить, чтобы оторвать один протон от ядра фтора.

43.15. Какую наименьшую энергию связи E нужно затратить, чтобы разделить ядро ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ на две одинаковые части?

43.16. Определить наименьшую энергию E, необходимую для разделения ядра углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ на три одинаковые части.

§ 44. Ядерные реакции

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Символическая запись ядерной реакции может быть дана или в развернутом виде, например:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{6}_{3}\mathrm{Li},$$

или сокращенно

$$^{9}\mathrm{Be}(p, \alpha)^{6}\mathrm{Li}.$$

При сокращенной записи порядковый номер атома не пишут, так как он определяется химическим символом атома. В скобках на первом месте ставят обозначение бомбардирующей частицы, на втором — частицы, вылетающей из составного ядра, и за скобками — химический символ ядра-продукта.

Для обозначения частиц приняты следующие символы: p — протон, n — нейтрон, d — дейтон, t — тритон, α — α-частица, γ — γ-фотон.

• Законы сохранения:

а) числа нуклонов $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$;

б) заряда $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$;

в) релятивистской полной энергии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$;

г) импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$.

Если общее число ядер и частиц, образовавшихся в результате реакции, больше двух, то запись соответственно дополняется.

• Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2\big((m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\big),$$

где m_1 и m_2 — массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $m_3 + m_4$ — сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Если $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$, то энергия освобождается, энергетический эффект положителен, реакция экзотермическая.

Если $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$, то энергия поглощается, энергетический эффект отрицателен, реакция эндотермическая.

Энергия ядерной реакции может быть записана также в виде

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4),$$

где T_1 и T_2 — кинетические энергии соответственно ядра-мишени и бомбардирующей частицы; T_3 и T_4 — кинетические энергии вылетающей частицы и ядра-продукта реакции.

При экзотермической реакции $T_3 + T_4 > T_1 + T_2$; при эндотермической реакции $T_3 + T_4 < T_1 + T_2$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти энергию реакции

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{2}_{4}\mathrm{He} + ^{6}_{3}\mathrm{Li},$$

если известно, что кинетические энергии протона $T_{\text{н}} = 5{,}45$ МэВ, ядра гелия $T_{\text{He}} = 4$ МэВ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро-мишень ${}^{9}_{4}\text{Be}$ неподвижно.

Решение. Энергия реакции Q есть разность между суммой кинетических энергий ядер-продуктов реакции и кинетической энергией налетающего ядра:

$$Q = T_{\text{Li}} + T_{\text{He}} - T_{\text{н}}. \tag{1}$$

В этом выражении неизвестна кинетическая энергия T_{Li} лития. Для ее определения воспользуемся законом сохранения импульса

$$\mathbf{p}_{\text{н}} = \mathbf{p}_{\text{He}} + \mathbf{p}_{\text{Li}}. \tag{2}$$

Векторы $\mathbf{p}_{\text{н}}$ и $\mathbf{p}_{\text{He}}$, по условию задачи, взаимно перпендикулярны и, следовательно, вместе с вектором $\mathbf{p}_{\text{Li}}$ образуют прямоугольный треугольник. Поэтому

$$p_{\text{Li}}^2 = p_{\text{He}}^2 + p_{\text{н}}^2. \tag{3}$$

Выразим в этом равенстве импульсы ядер через их кинетические энергии. Так как кинетические энергии ядер, по условию задачи, много меньше энергий покоя этих ядер (см. табл. 21), то можно воспользоваться классической формулой

$$p^2 = 2mT. \tag{4}$$

Заменив в уравнении (3) квадраты импульсов ядер их выражениями (4), после упрощения получим

$$m_{\text{Li}} T_{\text{Li}} = m_{\text{He}} T_{\text{He}} + m_{\text{н}} T_{\text{н}},$$

откуда

$$T_{\text{Li}} = \frac{m_{\text{He}} T_{\text{He}} + m_{\text{н}} T_{\text{н}}}{m_{\text{Li}}} = 3{,}58 \text{ МэВ}.$$

Подставив числовые значения в формулу (1), найдем

$$Q = T_{\text{He}} + T_{\text{Li}} - T_{\text{н}} = 2{,}13 \text{ МэВ}.$$

Пример 2. Решить задачу предыдущего примера, считая, что кинетические энергии и направления движения ядер неизвестны.

Решение. Применим закон сохранения релятивистской полной энергии

$$E_{\text{Be}} + E_{\text{н}} = E_{\text{He}} + E_{\text{Li}}. \tag{5}$$

Релятивистская полная энергия ядра равна сумме энергии покоя и кинетической энергии:

$$E = mc^2 + T. \tag{6}$$

В формуле (6) для упрощения записи масса покоя обозначена не через m_0, а через m.

Так как ядро-мишень ^{9}Be неподвижно, то на основании формулы (6) уравнение (5) примет вид

$$m_{\text{Be}}c^2 + m_{\text{H}}c^2 + T_{\text{H}} = m_{\text{He}}c^2 + T_{\text{He}} + m_{\text{Li}}c^2 + T_{\text{Li}}. \qquad (7)$$

Определим энергию реакции:

$$Q = T_{\text{He}} + T_{\text{Li}} - T_{\text{H}} = c^2\big((m_{\text{Be}} + m_{\text{H}}) - (m_{\text{He}} + m_{\text{Li}})\big). \qquad (8)$$

При числовом подсчете массы ядер заменим массами нейтральных атомов. Легко убедиться, что такая замена не повлияет на результат вычисления. В самом деле, так как масса m ядра равна разности между массой m_{a} нейтрального атома и массой Zm_e электронов, образующих электронную оболочку, то

$$Q = c^2\big((m_{\text{Be}} + 4m_e + m_{\text{H}} - m_e) - (m_{\text{He}} - 2m_e + m_{\text{Li}} - 3m_e)\big). \qquad (9)$$

Упростив уравнение (9), найдем

$$Q = c^2\big((m_{\text{Be}} + m_{\text{H}}) - (m_{\text{He}} + m_{\text{Li}})\big).$$

Подставив числовые значения коэффициента пропорциональности c^2 (МэВ/а.е.м.) и масс нейтральных атомов (а.е.м.), получим

$$Q = 2{,}13 \text{ МэВ},$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 1.

Пример 3. Радиоактивное ядро магния ^{23}Mg выбросило позитрон и нейтрино. Определить энергию Q β^+-распада ядра.

Решение. Реакцию β^+-распада ядра магния можно записать следующим образом:

$$^{23}_{12}\text{Mg} \to {}^{23}_{11}\text{Na} + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu.$$

Принимая, что ядро магния было неподвижным, и учитывая, что масса покоя нейтрино равна нулю, напишем уравнение энергетического баланса. На основании закона сохранения релятивистской полной энергии имеем

$$c^2m_{\text{Mg}} = c^2m_{\text{Na}} + T_{\text{Na}} + c^2m_e + T_e + T_\nu.$$

Энергия распада

$$Q = T_{\text{Na}} + T_e + T_\nu = c^2(m_{\text{Mg}} - m_{\text{Na}} - m_e).$$

Выразим массы ядер магния и натрия через массы соответствующих нейтральных атомов:

$$Q = c^2\big((m_{\text{Mg}} - 12m_e) - (m_{\text{Na}} - 11m_e) - m_e\big).$$

Так как массы покоя электрона и позитрона одинаковы, то после упрощений получим

$$Q = c^2(m_{Mg} - m_{Na} - 2m_e).$$

Сделав подстановку, найдем

$$Q = 3{,}05 \text{ МэВ}.$$

ЗАДАЧИ

Законы сохранения в ядерных реакциях

44.1. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи ядерной реакции:

$$^{14}_{6}C + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + x.$$

44.2. То же, для реакции $^{27}_{13}Al + x \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{26}_{12}Mg$.

44.3. Определить энергию Q ядерных реакций:

1) $^{9}_{4}Be + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n$; 2) $^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$;

3) $^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n$; 4) $^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{7}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$;

5) $^{44}_{20}Ca + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{41}_{19}K + {}^{4}_{2}He$.

Освобождается или поглощается энергия в каждой из указанных реакций?

44.4. Найти энергию Q ядерных реакций:

1) $^{3}H(p, \gamma)^{4}He$; 2) $^{2}H(d, \gamma)^{4}He$; 3) $^{2}H(n, \gamma)^{3}H$; 4) $^{19}F(p, \alpha)^{16}O$.

44.5. При соударении γ-фотона с дейтоном последний может расщепиться на два нуклона. Написать уравнение ядерной реакции и определить минимальную энергию γ-фотона, способного вызывать такое расщепление.

44.6. Определить энергию Q ядерной реакции $^{9}Be(n, \gamma)^{10}Be$, если известно, что энергия связи $E_{св}$ ядра ^{9}Be равна 58,16 МэВ, а ядра ^{10}Be — 64,98 МэВ.

44.7. Найти энергию Q ядерной реакции $^{14}N(n, p)^{14}C$, если энергия связи $E_{св}$ ядра ^{14}N равна 104,66 МэВ, а ядра ^{14}C — 105,29 МэВ.

44.8. Определить суммарную кинетическую энергию T ядер, образовавшихся в результате реакции $^{13}C(d, \alpha)^{11}B$, если кинетическая энергия T_1 дейтона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень ^{13}C считать неподвижным.

44.9. При ядерной реакции $^{9}Be(\alpha, n)^{12}C$ освобождается энергия $Q = 5{,}70$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_1 и T_2 продуктов реакции.

44.10. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер дейтерия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_1 и T_2 и импульсы p_1 и p_2 продуктов реакции ${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \to {}_2^3\mathrm{He} + {}_0^1n$.

44.11. При реакции ${}^6\mathrm{Li}(d, p){}^7\mathrm{Li}$ освобождается энергия $Q =$ $= 5{,}028$ МэВ. Определить массу m ${}^6\mathrm{Li}$. Массы остальных атомов взять из табл. 21.

44.12. При реакции ${}^2\mathrm{H}(d, p){}^3\mathrm{H}$ освобождается энергия $Q =$ $= 4{,}033$ МэВ. Определить массу m атома ${}^3\mathrm{H}$. Массы остальных атомов взять из табл. 21.

44.13. При ядерной реакции ${}^3\mathrm{He}(d, p){}^4\mathrm{He}$ освобождается энергия $Q = 18{,}34$ МэВ. Определить относительную атомную массу A_r изотопа гелия ${}^3\mathrm{He}$. Массы остальных атомов взять из табл. 21.

Реакция деления

44.14. Определить кинетическую энергию T и скорость v теплового нейтрона при температуре t окружающей среды, равной 27 °C.

44.15. Найти отношение скорости u_1 нейтрона после столкновения его с ядром углерода ${}^{12}\mathrm{C}$ к начальной скорости v_1 нейтрона. Найти такое же отношение кинетических энергий нейтрона. Считать ядро углерода до столкновения покоящимся; столкновение — прямым, центральным, упругим.

44.16. Ядро урана ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$, захватив один нейтрон, разделилось на два осколка, причем освободилось два нейтрона. Одним из осколков оказалось ядро ксенона ${}_{54}^{140}\mathrm{Xe}$. Определить порядковый номер Z и массовое число A второго осколка.

44.17. При делении одного ядра ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ выделяется энергия $Q =$ $= 200$ МэВ. Какую долю энергии покоя ядра ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ составляет выделившаяся энергия?

44.18. Определить энергию E, которая освободится при делении всех ядер, содержащихся в ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ массой $m = 1$ г.

44.19. Сколько ядер ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ должно делиться за время $t = 1$ с, чтобы тепловая мощность P ядерного реактора была равной 1 Вт?

44.20. Определить массовый расход m_t ядерного горючего ${}^{235}\mathrm{U}$ в ядерном реакторе атомной электростанции. Тепловая мощность P электростанции равна 10 МВт. Принять энергию Q, выделяющуюся при одном акте деления, равной 200 МэВ. К.п.д. η электростанции составляет 20%.

44.21. Найти электрическую мощность P атомной электростанции, расходующей 0,1 кг ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ в сутки, если к.п.д. η станции равен 16%.

Энергия радиоактивного распада ядер

44.22. Определить энергию Q α-распада ядра полония $^{210}_{84}$Po.

44.23. Покоившееся ядро полония $^{210}_{84}$Po выбросило α-частицу с кинетической энергией $T = 5{,}3$ МэВ. Определить кинетическую энергию T ядра отдачи и полную энергию Q, выделившуюся при α-распаде.

44.24. Ядро углерода $^{14}_{6}$C выбросило отрицательно заряженную β-частицу и антинейтрино. Определить полную энергию Q β-распада ядра.

44.25. Неподвижное ядро кремния $^{31}_{14}$Si выбросило отрицательно заряженную β-частицу с кинетической энергией $T = 0{,}5$ МэВ. Пренебрегая кинетической энергией ядра отдачи, определить кинетическую энергию T_1 антинейтрино.

44.26. Определить энергию Q распада ядра углерода $^{10}_{6}$C, выбросившего позитрон и нейтрино.

44.27. Ядро атома азота $^{13}_{7}$N выбросило позитрон. Кинетическая энергия T_e позитрона равна 1 МэВ. Пренебрегая кинетической энергией ядра отдачи, определить кинетическую энергию T_ν нейтрино, выброшенного вместе с позитроном.

Элементарные частицы

44.28. Свободный нейтрон радиоактивен. Выбрасывая электрон и антинейтрино, он превращается в протон. Определить суммарную кинетическую энергию T всех частиц, возникающих в процессе превращения нейтрона. Принять, что кинетическая энергия нейтрона равна нулю и что масса покоя антинейтрино пренебрежимо мала.

44.29. Фотон с энергией $\varepsilon = 3$ МэВ в поле тяжелого ядра превратился в пару электрон–позитрон. Принимая, что кинетическая энергия частиц одинакова, определить кинетическую энергию T каждой частицы.

44.30. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии, равные 0,24 МэВ, при соударении превратились в два одинаковых фотона. Определить энергию ε фотона и соответствующую ему длину волны λ.

44.31. Нейтральный π-мезон (π^0), распадаясь, превращается в два одинаковых γ-фотона. Определить энергию ε фотона. Кинетической энергией и импульсом мезона пренебречь.

Глава 9
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 45. Волновые свойства микрочастиц

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Формула де Бройля, выражающая связь длины волн с импульсом p движущейся частицы, для двух случаев:

а) в классическом приближении ($v \ll c$; $p = m_0 v$)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p};$$

б) в релятивистском случае (скорость v частицы сравнима со скоростью c света в вакууме; $p = mv = m_0 v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

• Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией T частицы:

а) в классическом приближении $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 T}}$;

б) в релятивистском случае $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar c}{\sqrt{T(T + 2E_0)}}$, где E_0 — энергия покоя частицы ($E_0 = m_0 c^2$).

• Фазовая скорость волн де Бройля

$$v = \frac{\omega}{k},$$

где ω — циклическая частота; k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$).

• Групповая скорость волн де Бройля

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}.$$

• Соотношения де Бройля:

$$E = \hbar\omega; \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

где E — энергия движущейся частицы; $\mathbf{p}$ — импульс частицы; $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$; $\hbar$ — постоянная Планка.

• Соотношения неопределенностей:
а) для координаты и импульса частицы

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar,$$

где Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на ось x; Δx — неопределенность ее координаты;

б) для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar,$$

где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в этом состоянии.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) $U_1 = 51$ В; 2) $U_2 = 510$ кВ.

Решение. Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{1}$$

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T. Связь импульса с кинетической энергией для нерелятивистского (когда $T \ll E_0$) и для релятивистского (когда $T \approx E_0$) случаев соответственно выражается формулами:

$$p = \sqrt{2m_0 T}; \tag{2}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + T)T}. \tag{3}$$

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется соответственно в нерелятивистском и релятивистском случаях:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 T}}; \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{(1/c)\sqrt{(2E_0 + T)T}}. \tag{5}$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1 = 51$ В и $U_2 = 510$ кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим вопрос, которую из формул (4) и (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$T = |e|U.$$

В первом случае $T_1 = |e|U_1 = 51\,\text{эВ} = 0{,}51 \cdot 10^{-4}\,\text{МэВ}$, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2 = 0{,}51\,\text{МэВ}$. Следовательно, можно применить формулу (4).

Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4}m_0c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4}m_0c}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\frac{2\pi\hbar}{m_0c}.$$

Учтя, что $\dfrac{2\pi\hbar}{m_0c}$ есть комптоновская длина волны λ_C, получим

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\lambda_C.$$

Так как $\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\text{м}$, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\text{м} = 172\,\text{пм}.$$

Во втором случае кинетическая энергия $T_2 = |e|U_2 = 510\,\text{кэВ} = 0{,}51\,\text{МэВ}$, т. е. равна энергии покоя электрона. Следовательно, необходимо применить релятивистскую формулу (5).

Учтя, что $T_2 = 0{,}51\,\text{МэВ} = m_0c^2$, по формуле (5) найдем

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{(1/c)\sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}m_0c}, \quad \text{или} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_C}{\sqrt{3}}.$$

Подставив значение λ_C в последнюю формулу и произведя вычисления, получим

$$\lambda_2 = 1{,}4\,\text{пм}.$$

Пример 2. На узкую щель шириной $a = 1\,\text{мкм}$ направлен параллельный пучок электронов, имеющих скорость $v = 3{,}65 \cdot 10^6\,\text{м/с}$. Учитывая волновые свойства электронов, определить расстояние x между двумя максимумами интенсивности первого порядка в дифракционной картине, полученной на экране, отстоящем на $L = 10\,\text{см}$ от щели.

Решение. Согласно гипотезе де Бройля, длина волны λ, соответствующая частице массой m, движущейся со скоростью v, выражается формулой

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{6}$$

Дифракционный максимум при дифракции на одной щели наблюдается при условии

$$a \sin \varphi = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \tag{7}$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — порядковый номер максимумов; a — ширина щели.

Для максимумов первого порядка ($k = 1$) угол φ заведомо мал, поэтому $\sin \varphi = \varphi$ и, следовательно, формула (7) примет вид

$$a\varphi = \frac{3}{2}\lambda, \tag{8}$$

а искомая величина x, как следует из рис. 45.1,

$$x = 2L \operatorname{tg} \varphi = 2L\varphi, \tag{9}$$

так как $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$.

Подставив значение φ из соотношения (8) в формулу (9), получим

$$x = 2L\frac{3}{2}\frac{\lambda}{a} = 3\frac{L\lambda}{a}.$$

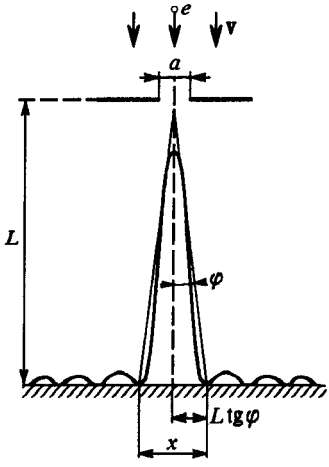


Рис. 45.1

Подстановка в последнее равенство длины волны де Бройля по формуле (6) дает

$$x = 6\frac{\pi\hbar L}{amv}. \tag{10}$$

После вычисления по формуле (10) получим

$$x = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 60 \text{ мкм}.$$

Пример 3. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения θ изменяется. Когда этот угол становится равным 64°, наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние d между атомными плоскостями кристалла равным 200 пм, определить длину волны де Бройля λ электронов и их скорость v.

Решение. К расчету дифракции электронов от кристаллической решетки применяется то же уравнение Вульфа–Брэгга, которое используется в случае рентгеновского излучения (см. § 31):

$$2d \sin \theta = k\lambda,$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ — угол скольжения; k — порядковый номер дифракционного максимума; λ — длина волны де Бройля. Очевидно, что

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k}.$$

Подставив в эту формулу значения величин и вычислив, получим

$$\lambda = 360 \text{ пм}.$$

Из формулы длины волны де Бройля $\lambda = 2\pi\hbar/(mv)$ выразим скорость электрона:

$$v = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda}.$$

Подставив в эту формулу значения π, $\hbar$, m (масса электрона), λ и произведя вычисления, найдем

$$v = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Пример 4. Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta x \Delta p \geqslant \hbar, \tag{11}$$

где Δx — неопределенность координаты электрона; Δp — неопределенность его импульса.

Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей (11) можно записать в этом случае в виде $(l/2)\Delta p \geqslant \hbar$, откуда

$$l \geqslant \frac{2\hbar}{\Delta p}. \tag{12}$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp, во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса p, т. е.

$$\Delta p \leqslant p.$$

Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Заменим Δp значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства (12) к равенству, получим

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, найдем

$$l_{min} = 124 \text{ пм}.$$

Пример 5. Используя соотношение неопределенностей энергии и времени, определить естественную ширину $\Delta\lambda$ спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное. Среднее время τ жизни атома в возбужденном состоянии принять равным 10^{-8} с, а длину волны λ излучения — равной 600 нм.

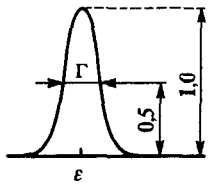


Рис. 45.2

Решение. При переходе атомов из возбужденного состояния в основное существует некоторый разброс (неопределенность) в энергии испускаемых фотонов. Это связано с тем, что энергия возбужденного состояния не является точно определенной, а имеет конечную ширину Γ (рис. 45.2). Согласно соотношению неопределенностей энергии и времени, ширина Γ энергетического уровня возбужденного состояния связана со средним временем τ жизни атомов в этом состоянии соотношением

$$\Gamma\tau \sim \hbar.$$

Тогда ширина энергетического уровня определяется выражением

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

Вследствие конечной ширины уровня энергии возбужденного состояния энергия фотонов, испускаемых атомами, также имеет разброс, равный ширине энергетического уровня, т. е. $\Delta\varepsilon = \Gamma$. Тогда

$$\Delta\varepsilon = \frac{\hbar}{\tau}. \tag{13}$$

Поскольку энергия ε фотона связана с длиной волны λ соотношением

$$\varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda},$$

то разбросу $\Delta\varepsilon$ ($\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$) энергии соответствует разброс $\Delta\lambda$ длин волн ($\Delta\lambda \ll \lambda$):

$$\Delta\varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2}\Delta\lambda \tag{14}$$

(знак минус опущен).

Входящий в это выражение конечный интервал длин волн $\Delta\lambda$ и есть естественная ширина спектральной линии. Выразив $\Delta\lambda$ из формулы (14) и заменив $\Delta\varepsilon$ согласно (13), получим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}.$$

Произведем вычисления:

$$\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-14} \text{ м}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Волны де Бройля

45.1. Определить длину волны де Бройля λ, характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость $v = 10^6$ м/с. Сделать такой же подсчет для протона.

45.2. Электрон движется со скоростью $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. Определить длину волны де Бройля λ, учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости.

45.3. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля λ была равна 0,1 нм?

45.4. Определить длину волны де Бройля λ электрона, если его кинетическая энергия $T = 1$ кэВ.

45.5. Найти длину волны де Бройля λ протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U: 1) 1 кВ; 2) 1 МВ.

45.6. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

45.7. Определить длину волны де Бройля λ электрона, находящегося на второй орбите атома водорода.

45.8. С какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля λ электрона равна его комптоновской длине волны λ_C?

45.9. Определить длину волны де Бройля λ электронов, бомбардирующих антикатод рентгеновской трубки, если граница сплошного рентгеновского спектра приходится на длину волны $\lambda = 3$ нм.

45.10. Электрон движется по окружности радиусом $r = 0{,}5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 8$ мТл. Определить длину волны де Бройля λ электрона.

45.11. На грань некоторого кристалла под углом $\alpha = 60°$ к ее поверхности падает параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость v электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями кристаллов равно 0,2 нм.

45.12. Параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью $v = 10^6$ м/с, падает нормально на диафрагму с длинной щелью шириной $a = 1$ мкм. Проходя через щель, электроны рассеиваются и образуют дифракционную картину на экране, расположенном на расстоянии $l = 50$ см от щели и параллельном плоскости диафрагмы. Определить линейное расстояние x между первыми дифракционными минимумами.

45.13. Узкий пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 30$ кВ, падает нормально на тонкий листок золота, проходит через него и рассеивается. На фотопластинке, расположенной за листком на расстоянии $l = 20$ см от него, по-

лучена дифракционная картина, состоящая из круглого центрального пятна и ряда концентрических окружностей. Радиус первой окружности $r = 3{,}4$ мм. Определить: 1) угол θ отражения электронов от микрокристаллов золота, соответствующий первой окружности (угол измеряется от поверхности кристалла); 2) длину волны де Бройля λ электронов; 3) постоянную a кристаллической решетки золота.

Фазовая и групповая скорости

45.14. Прибор зарегистрировал скорость распространения электромагнитного импульса. Какую скорость зарегистрировал прибор — фазовую или групповую?

45.15. Можно ли измерить фазовую скорость?

45.16. Волновой «пакет» образован двумя плоскими монохроматическими волнами:

$$\xi_1(x, t) = \cos(1002\,t - 3x); \quad \xi_2(x, t) = \cos(1003\,t - 3{,}01x).$$

Определить фазовые скорости v_1 и v_2 каждой волны и групповую скорость u волнового «пакета».

45.17. Известно, что фазовая скорость $v = \omega/k$. Найти выражения фазовой скорости волн де Бройля в нерелятивистском и релятивистском случаях.

45.18. Фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме (в релятивистском случае). Не противоречит ли это постулатам теории относительности?

45.19. Зная общее выражение групповой скорости, найти групповую скорость u волн де Бройля в нерелятивистском и релятивистском случаях.

45.20. Написать закон дисперсии (т. е. формулу, выражающую зависимость фазовой скорости от длины волны) волн де Бройля в нерелятивистском и релятивистском случаях.

45.21. Будут ли расплываться в вакууме волновые пакеты, образованные из волн: 1) электромагнитных; 2) де Бройля?

Соотношение неопределенностей

45.22. Определить неопределенность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неопределенность Δv в определении скорости составляет 10% от ее величины. Сравнить полученную неопределенность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

45.23. Электрон с кинетической энергией $T = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить относительную неопределенность Δv, с которой может быть определена скорость электрона.

45.24. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1%?

45.25. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неопределенность $\Delta p/p$ импульса этой частицы.

45.26. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$, найти выражение, позволяющее оценить минимальную энергию E электрона, находящегося в одномерном потенциальном ящике шириной l.

45.27. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \approx 0{,}1$ нм.

45.28. Приняв, что минимальная энергия E нуклона в ядре равна 10 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

45.29. Показать, используя соотношение неопределенностей, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными $5 \cdot 10^{-15}$ м.

45.30. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть моноэнергетический пучок электронов ($T = 10$ эВ) падает на щель шириной a. Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неопределенностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неопределенность в определении импульса $\Delta p/p$ электрона в двух случаях: 1) $a = 10$ нм; 2) $a = 0{,}1$ нм.

45.31. Пылинки массой $m = 10^{-12}$ г взвешены в воздухе и находятся в тепловом равновесии. Можно ли установить, наблюдая за движением пылинок, отклонение от законов классической механики? Принять, что воздух находится при нормальных условиях, пылинки имеют сферическую форму. Плотность вещества, из которого состоят пылинки, равна $2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

45.32. Какой смысл вкладывается в соотношение неопределенностей $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$?

45.33. Используя соотношение неопределенностей $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$, оценить ширину Γ энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: 1) в основном состоянии; 2) в возбужденном состоянии (время τ жизни атома в возбужденном состоянии равно 10^{-8} с).

45.34. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($\tau \approx 10^{-8}$ с) и длина волны излучаемого фотона ($\lambda = 0{,}6$ мкм).

45.35. В потенциальном бесконечно глубоком одномерном ящике энергия E электрона точно определена. Значит, точно определено и значение квадрата импульса электрона ($p^2 = 2mE$). С другой

стороны, электрон заперт в ограниченной области с линейными размерами l. Не противоречит ли это соотношению неопределенностей?

§ 46. Простейшие случаи движения микрочастиц

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Одномерное временно́е уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2},$$

где i — мнимая единица ($\sqrt{-1}$); m — масса частицы; $\Psi(x, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x, t) = A\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right],$$

где A — амплитуда волны де Бройля; p — импульс частицы; E — энергия частицы.

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где E — полная энергия частицы; $U(x)$ — потенциальная энергия; $\psi(x)$ — координатная (или амплитудная) часть волновой функции.

Для случая трех измерений $\psi(x, y, z)$ уравнение Шредингера записывается в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

или в операторной форме

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

При решении уравнения Шредингера следует иметь в виду стандартные условия, которым должна удовлетворять волновая функция: конечность (во всем пространстве), однозначность, непрерывность самой ψ-функции и ее первой производной.

• Вероятность $\mathrm{d}W$ обнаружить частицу в интервале от x до $x + \mathrm{d}x$ (в одномерном случае) выражается формулой

$$\mathrm{d}W = |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

где $|\psi(x)|^2$ — плотность вероятности.

Вероятность W обнаружить частицу в интервале от x_1 до x_2 находится интегрированием $\mathrm{d}W$ в указанных пределах:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

• Собственное значение энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике, определяется формулой

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

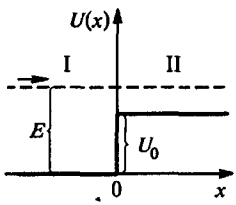
где l — ширина потенциального ящика.

Соответствующая этой энергии собственная волновая функция имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

• Коэффициент (показатель) преломления n волн де Бройля на границе низкой [1])($U_0 < E$) потенциальной ступени (рис. 46.1)

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1},$$



Низкая потенциальная ступень

Рис. 46.1

где λ_1 и λ_2 — длины волн де Бройля в областях I и II (частица движется из области I в область II); k_1 и k_2 — соответствующие значения волновых чисел.

• Коэффициенты отражения ρ и прохождения τ волн де Бройля через низкую потенциальную ступень

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2; \quad \tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

где k_1 и k_2 — волновые числа волн де Бройля в областях I и II.

• Коэффициент прозрачности D прямоугольной потенциальной ступени конечной ширины

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} d \right),$$

где U_0 — высота потенциальной ступени; E — энергия частицы; d — ширина ступени.

---

[1]) Потенциальная ступень называется низкой, если энергия E частицы больше высоты U_0 ступени, в противном случае ступень называется высокой.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислить вероят-

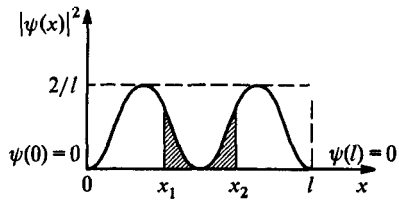


Рис. 46.2

ность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ящика.

Решение. Вероятность W обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется равенством

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 \, dx, \tag{1}$$

где $\psi_n(x)$ — нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Возбужденному состоянию ($n = 2$) отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x. \tag{2}$$

Подставив $\psi_2(x)$ в подынтегральное выражение формулы (1) и вынося постоянные величины за знак интеграла, получим

$$W = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x \, dx. \tag{3}$$

Согласно условию задачи, $x_1 = (1/3)l$ и $x_2 = (2/3)l$ (рис. 46.2). Подставим эти пределы интегрирования в формулу (3), произведем замену

$\sin^2\frac{2\pi}{l}x = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi}{l}x\right)$ и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\sin^2\frac{2\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\left(\int\limits_{l/3}^{2l/3}\mathrm{d}x - \int\limits_{l/3}^{2l/3}\cos\frac{4\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{l}\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Заметив, что $\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3}$, получим

$$W = 0{,}195.$$

Пример 2. Моноэнергетический поток электронов ($E = 100$ эВ) падает на низкую прямоугольную потенциальную ступень бесконечной ширины (рис. 46.1). Определить высоту потенциальной ступени U_0, если известно, что 4% падающих на ступень электронов отражается.

Решение. Коэффициент отражения ρ от низкой потенциальной ступени выражается формулой

$$\rho = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2,$$

где k_1 и k_2 — волновые числа, отвечающие движению электронов в областях I и II (см. рис. 46.1).

В области I кинетическая энергия электрона равна E и волновое число

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}.$$

Поскольку координата электрона не определена, то импульс электрона определяется точно и, следовательно, в данном случае можно говорить о точном значении кинетической энергии.

В области II кинетическая энергия электрона равна $E - U_0$ и волновое число

$$k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}.$$

Коэффициент отражения может быть записан в виде [2])

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E-U_0)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m(E-U_0)}}\right)^2$$

[2]) В случае низкой потенциальной ступени k_1 и k_2 действительны, а знак модуля можно опустить.

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2mE}$:

$$\rho = \left(\frac{1-\sqrt{1-U_0/E}}{1+\sqrt{1+U_0/E}}\right)^2.$$

Решая уравнение относительно $\sqrt{1-U_0/E}$, получим

$$\sqrt{1-\frac{U_0}{E}} = \frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, найдем высоту потенциальной ступени:

$$U_0 = \left(1-\left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\right)^2\right)E.$$

Подставив сюда значения величин и произведя вычисления, найдем

$$U_0 = 55{,}6 \text{ эВ}.$$

Пример 3. Электрон с энергией $E = 4{,}9$ эВ движется в положительном направлении оси x (рис. 46.3). Высота U_0 потенциальной ступени равна 5 эВ. При какой ширине d ступени вероятность W прохождения электрона через нее будет равна 0,2?

Решение. Вероятность W прохождения частицы через потенциальную ступень по своему физическому смыслу совпадает с коэффициентом прозрачности D ($W = D$). Тогда вероятность того, что электрон пройдет через прямоугольную потенциальную ступень, выразится соотношением

$$W \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}d\right), \qquad (4)$$

где m — масса электрона. Потенцируя это выражение, получим

$$\ln W = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}d.$$

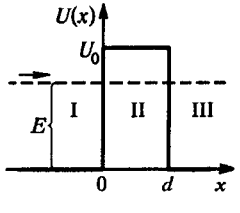


Рис. 46.3

Для удобства вычислений изменим знак у правой и левой части этого равенства и найдем d:

$$d = \frac{\hbar \ln(1/W)}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}.$$

Входящие в эту формулу величины выразим в единицах СИ и произведем вычисления:

$$d = 4{,}95 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0{,}495 \text{ нм}.$$

Учитывая, что формула (4) приближенная и вычисления носят оценочный характер, можно принять $d \approx 0{,}5$ нм.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Уравнение Шредингера

46.1. Написать уравнение Шредингера для электрона, находящегося в водородоподобном атоме.

46.2. Написать уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора. Учесть, что сила, возвращающая частицу в положение равновесия, $f = -\beta x$ (где β — коэффициент пропорциональности, x — смещение).

46.3. Временна́я часть уравнения Шредингера имеет вид $i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = E\Psi$. Найти решение уравнения.

46.4. Написать уравнение Шредингера для свободного электрона, движущегося в положительном направлении оси x со скоростью v. Найти решение этого уравнения.

46.5. Почему при физической интерпретации волновой функции говорят не о самой ψ-функции, а о квадрате ее модуля ψ^2?

46.6. Чем обусловлено требование конечности ψ-функции?

46.7. Уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(U - E)\psi = 0$. Обосновать, исходя из этого уравнения, требования, предъявляемые к волновой функции, — ее непрерывность и непрерывность первой производной от волновой функции.

46.8. Может ли $|\psi(x)|^2$ быть больше единицы?

46.9. Показать, что для ψ-функции выполняется равенство $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x)$, где $\psi^*(x)$ означает функцию, комплексно сопряженную $\psi(x)$.

46.10. Доказать, что если ψ-функция циклически зависит от времени $\left(\text{т. е. } \Psi(x, t) = \exp\left(-\dfrac{l}{\hbar}Et\right)\psi(x)\right)$, то плотность вероятности есть функция только координаты.

Одномерный бесконечно глубокий потенциальный ящик

46.11. Электрон находится в бесконечно глубоком прямоугольном одномерном потенциальном ящике шириной l (рис. 46.4). Написать уравнение Шредингера и его решение (в тригонометрической форме) для области II ($0 < x < l$).

46.12. Известна волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике шириной l: $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$. Используя граничные условия $\psi(0) = 0$ и $\psi(l) = 0$, определить коэффициент C_2 и возможные значения волнового вектора k, при котором существуют нетривиальные решения.

46.13. Электрону в потенциальном ящике шириной l отвечает волновое число $k = \pi n/l$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Используя связь энергии E электрона с волновым числом k, получить выражение для собственных значений энергии E_n.

46.14. Частица находится в потенциальном ящике. Найти отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}$ к энергии E_n частицы в трех случаях: 1) $n = 3$; 2) $n = 10$; 3) $n \to \infty$. Пояснить полученные результаты.

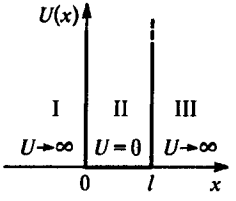


Рис. 46.4

46.15. Электрон находится в потенциальном ящике шириной $l = 0{,}5$ нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

46.16. Собственная функция, описывающая состояние частицы в потенциальном ящике, имеет вид $\psi_n(x) = C \sin(\pi n/l)x$. Используя условия нормировки, определить постоянную C.

46.17. Решение уравнения Шредингера для бесконечно глубокого одномерного прямоугольного потенциального ящика можно записать в виде $\psi(x) = C_1 \exp(ikx) + C_2 \exp(-ikx)$, где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Используя граничные условия и нормировку ψ-функции, определить: 1) коэффициенты C_1 и C_2; 2) собственные значения энергии E_n. Найти выражение для собственной нормированной ψ-функции.

46.18. Изобразить на графике вид первых трех собственных функций $\psi_n(x)$, описывающих состояние электрона в потенциальном ящике шириной l, а также вид $|\psi_n(x)|^2$. Установить соответствие между числом N узлов волновой функции (т. е. числом точек, где волновая функция обращается в нуль в интервале $0 < x < l$) и квантовым числом n. Функцию считать нормированной на единицу.

46.19. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в возбужденном состоянии $(n = 2)$. Определить, в каких точках интервала $(0 < x < l)$ плотность вероятности $|\psi_2(x)|^2$ нахождения частицы максимальна и минимальна.

46.20. Электрон находится в потенциальном ящике шириной l. В каких точках в интервале $(0 < x < l)$ плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек. Решение пояснить графически.

46.21. Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W нахождения частицы: 1) в средней трети ящика; 2) в крайней трети ящика?

46.22. В одномерном потенциальном ящике шириной l находится электрон. Вычислить вероятность W нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $1/4$, равноудаленном от стенок ящика.

46.23. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность W нахождения частицы в интервале $1/4$, равноудаленном от стенок ящика.

46.24. Вычислить отношение вероятностей W_1/W_2 нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале $1/4$, равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной l.

46.25. Показать, что собственные функции $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$ и $\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} x$, описывающие состояние частицы в потенциальном ящике, удовлетворяют условию ортогональности, т. е.

$$\int_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

46.26. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l. Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона ($0 < x < l$).

46.27. Используя выражение энергии $E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/(2ml^2)$ частицы, находящейся в потенциальном ящике, получить приближенное выражение энергии: 1) гармонического осциллятора; 2) водородоподобного атома. Сравнить полученные результаты с истинными значениями энергий.

Двух- и трехмерный потенциальный ящик

46.28. Считая, что нуклоны в ядре находятся в трехмерном потенциальном ящике кубической нормы с линейными размерами $l = 10^{-14}$ м, оценить низший энергетический уровень нуклонов в ядре.

46.29. Определить из условия нормировки коэффициент C собственной ψ-функции $\psi_{n_1 n_2}(x, y) = C \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y$, описывающей состояние электрона в двухмерном бесконечно глубоком потенциальном ящике со сторонами l_1 и l_2.

46.30. Электрон находится в основном состоянии в двухмерном квадратном бесконечно глубоком потенциальном ящике со стороной l. Определить вероятность W нахождения электрона в обла-

сти, ограниченной квадратом, который равноудален от стенок ящика и площадь которого составляет $1/4$ площади ящика.

46.31. Определить из условия нормировки коэффициент собственной ψ-функции $\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = C \sin \dfrac{\pi n_1}{l_1} x \sin \dfrac{\pi n_2}{l_2} y \times$ $\times \sin \dfrac{\pi n_3}{l_3} z$, описывающей состояние электрона в трехмерном потенциальном бесконечно глубоком ящике со сторонами l_1, l_2, l_3.

Низкая[3]) *потенциальная ступень*

46.32. Написать уравнение Шредингера для электрона с энергией E, движущегося в положительном направлении оси x для областей I и II (см. рис. 46.1), если на границе этих областей имеется низкая потенциальная ступень высотой U_0.

46.33. Написать решения уравнений Шредингера (см. предыдущую задачу) для областей I и II. Какой смысл имеют коэффициенты A_1 и B_1 для $\psi_{\mathrm{I}}(x)$ и A_2 и B_2 для $\psi_{\mathrm{II}}(x)$? Чему равен коэффициент B_2?

46.34. Зная решение уравнений Шредингера для областей I и II потенциальной ступени $\psi_{\mathrm{I}}(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)$, $\psi_{\mathrm{II}}(x) = A_2 \exp(ikx)$, определить из условий непрерывности ψ-функций и их первых производных на границе ступени отношение амплитуд вероятности B_1/A_1 и A_2/A_1.

46.35. Зная отношение амплитуд вероятности $\dfrac{B_1}{A_1} = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ для волны, отраженной от низкой потенциальной ступени, и $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2}$ для проходящей волны, найти выражение для коэффициента отражения ρ и коэффициента прохождения τ.

46.36. Считая выражение для коэффициента отражения ρ от низкой потенциальной ступени и коэффициента прохождения τ известными, показать, что $\rho + \tau = 1$.

46.37. Электрон с энергией $E = 25$ эВ встречает на своем пути низкую потенциальную ступень высотой $U_0 = 9$ эВ (см. рис. 46.1). Определить коэффициент преломления n волн де Бройля на границе ступени.

46.38. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля для протона на границе низкой потенциальной ступени (рис. 46.5). Кинетическая энергия T протона равна 16 эВ, а высота U_0 потенциальной ступени равна 9 эВ.

---

[3]) См. сноску на с. 488.

46.39. Электрон обладает энергией $E = 10$ эВ. Определить, во сколько раз изменятся его скорость v, длина волны де Бройля λ и фазовая скорость при прохождении через потенциальную ступень (см. рис. 46.1) высотой $U_0 = 6$ эВ.

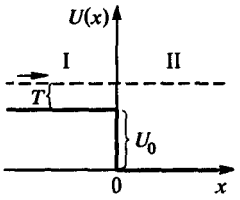


Рис. 46.5

46.40. Протон с энергией $E = 1$ МэВ изменил при прохождении потенциальной ступени дебройлевскую длину волны на 1%. Определить высоту U_0 потенциального барьера.

46.41. На пути электрона с дебройлевской длиной волны $\lambda_1 = 0{,}1$ нм находится потенциальная ступень высотой $U_0 = 120$ эВ. Определить длину волны де Бройля λ_2 после прохождения ступени.

46.42. Электрон с энергией $E = 100$ эВ попадает на потенциальную ступень высотой $U_0 = 64$ эВ. Определить вероятность W того, что электрон отразится от ступени.

46.43. Найти приближенное выражение коэффициента отражения ρ от очень низкой потенциальной ступени ($U_0 \ll E$).

46.44. Коэффициент отражения ρ протона от потенциальной ступени равен $2{,}5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота U_0 ступени от кинетической энергии T падающих на ступень протонов.

46.45. Вывести формулу, связывающую коэффициент преломления n волн де Бройля на границе низкой потенциальной ступени и коэффициент отражения ρ от него.

46.46. Определить показатель преломления n волн де Бройля при прохождении частицей потенциальной ступени с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}5$.

46.47. При каком отношении высоты U_0 потенциальной ступени и энергии E электрона, падающего на ступень, коэффициент отражения $\rho = 0{,}5$?

46.48. Электрон с энергией $E = 10$ эВ падает на потенциальную ступень. Определить высоту U_0 ступени, при которой показатель преломления n волн де Бройля и коэффициент отражения ρ численно совпадают.

46.49. Кинетическая энергия T электрона в два раза превышает высоту U_0 потенциальной ступени. Определить коэффициент отражения ρ и коэффициент прохождения τ электронов на границе ступени.

46.50. Коэффициент прохождения τ электронов через низкую потенциальную ступень равен коэффициенту отражения ρ. Определить, во сколько раз кинетическая энергия T электронов больше высоты U_0 потенциальной ступени.

46.51. Вывести формулу, связывающую коэффициент прохождения τ электронов через потенциальную ступень и показатель преломления n волн де Бройля.

46.52. Коэффициент прохождения τ протонов через потенциальную ступень равен 0,8. Определить показатель преломления n волн де Бройля на границе ступени.

46.53. Электрон с кинетической энергией T движется в положительном направлении оси x. Найти выражение для коэффициента отражения ρ и коэффициента прохождения τ на границе потенциальной ступени высотой U_0 (см. рис. 46.5).

46.54. Найти приближенное выражение для коэффициента прохождения τ через низкую потенциальную ступень при условии, что кинетическая энергия T ($T = E - U_0$) частицы в области II (см. рис. 46.1) много меньше высоты U_0 потенциальной ступени.

46.55. Вычислить коэффициент прохождения τ электрона с энергией $E = 100$ эВ через потенциальную ступень высотой $U_0 = 99{,}75$ эВ.

46.56. Показать на частном примере низкой потенциальной ступени сохранение полного числа частиц, т. е. что плотность потока N электронов, падающих на ступень, равна сумме плотности потока N_ρ электронов, отраженных от ступени, и плотности потока N_τ электронов, прошедших через ступень.

46.57. На низкую потенциальную ступень направлен моноэнергетический поток электронов с плотностью потока энергии $j_1 = 10\ \text{Вт/м}^2$. Определить плотность потока энергии j_2 электронов, прошедших ступень, если высота ее $U_0 = 0{,}91$ эВ и энергия E электронов в падающем потоке равна 1 эВ.

46.58. Моноэнергетический поток электронов падает на низкую потенциальную ступень (см. рис. 46.1). Коэффициент прохождения $\tau = 0{,}9$. Определить отношение j_2/j_1 плотностей потока энергии электронов, прошедших ступень, к падающему потоку.

46.59. На низкую потенциальную ступень падает моноэнергетический поток электронов. Концентрация n_0 электронов в падающем потоке равна $10^9\ \text{мм}^{-3}$, а их энергия $E = 100$ эВ. Определить давление, которое испытывает ступень, если ее высота $U_0 = 9{,}7$ эВ.

Высокая[4]) *потенциальная ступень*

46.60. Написать уравнение Шредингера и найти его решение для электрона, движущегося в положительном направлении оси x для областей I и II (рис. 46.6), если на границе этих областей имеется потенциальная ступень высотой U_0.

46.61. Для областей I и II высокой потенциальной ступени (см. рис. 46.6) ψ-функции имеют вид $\psi_1 = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)$

[4]) См. сноску на с. 488.

и $\psi_{II}(x) = A_2 \exp(-kx)$. Используя непрерывность ψ-функций и их первых производных на границе ступени, найти отношение амплитуд A_2/A_1.

46.62. Написать выражение для $\psi_{II}(x)$ в области II (рис. 46.6) высокой потенциальной ступени, если ψ-функция нормирована так, что $A_1 = 1$.

46.63. Амплитуда A_2 волны в области II высокой потенциальной ступени (рис. 46.6) равна $2k_1/(k_1 + ik)$ $(k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar)$. Установить выражение для плотности вероятности нахождения частицы в области II $(x > 0)$, если энергия частицы равна E, а высота потенциальной ступени равна U_0.

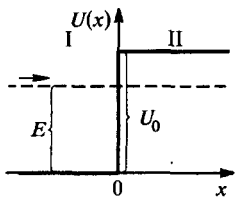


Рис. 46.6

46.64. Используя выражение для коэффициента отражения от низкой ступени $\rho = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$, где k_1 и k_2 — волновые числа, найти выражение коэффициента отражения от высокой ступени $(T < U_0)$.

46.65. Показать, что имеет место полное отражение электронов от высокой потенциальной ступени, если коэффициент отражения может быть записан в виде $\rho = \left|\dfrac{k_1 - ik}{k_1 + ik}\right|^2$.

46.66. Определить плотность вероятности $|\psi_{II}(0)|^2$ нахождения электрона в области II высокой потенциальной ступени в точке $x = 0$, если энергия электрона равна E, высота потенциальной ступени равна U_0 и ψ-функция нормирована так, что $A_1 = 1$.

Прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины

46.67. Написать уравнения Шредингера для частицы с энергией E, движущейся в положительном направлении оси x для областей I, II и III (см. рис. 46.3), если на границах этих областей имеется прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной d.

46.68. Написать решения уравнений Шредингера (см. предыдущую задачу) для областей I, II и III, пренебрегая волнами, отраженными от границ I–II и II–III, и найти коэффициент прозрачности D барьера.

46.69. Найти вероятность W прохождения электрона через прямоугольный потенциальный барьер при разности энергий $U_0 - E = 1$ эВ, если ширина барьера: 1) $d = 0{,}1$ нм; 2) $d = 0{,}5$ нм.

46.70. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0{,}5$ нм. Высота U_0 барьера больше энер-

гии E электрона на 1%. Вычислить коэффициент прозрачности D, если энергия электрона: 1) $E = 10$ эВ; 2) $E = 100$ эВ.

46.71. Ширина d прямоугольного потенциального барьера равна 0,2 нм. Разность энергий $U_0 - E = 1$ эВ. Во сколько раз изменится вероятность W прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в $n = 10$ раз?

46.72. Электрон с энергией $E = 9$ эВ движется в положительном направлении оси x. При какой ширине d потенциального барьера коэффициент прозрачности $D = 0{,}1$, если высота U_0 барьера равна 10 эВ? Изобразите на рисунке примерный вид волновой функции (ее действительную часть) в пределах каждой из областей I, II, III (см. рис. 46.3).

46.73. При какой ширине d прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности D для электронов равен 0,01? Разность энергий $U_0 - E = 10$ эВ.

46.74. Электрон с энергией E движется в положительном направлении оси x. При каком значении $U_0 - E$, выраженном в электрон-вольтах, коэффициент прозрачности $D = 10^{-3}$, если ширина d барьера равна 0,1 нм?

46.75. Электрон с энергией $E = 9$ эВ движется в положительном направлении оси x. Оценить вероятность W того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если ее высота $U_0 = 10$ эВ и ширина $d = 0{,}1$ нм.

46.76. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $d = 0{,}1$ нм. При какой разности энергий $U_0 - E$ вероятность W прохождения электрона через барьер равна 0,99?

46.77. Ядро испускает α-частицы с энергией $E = 5$ МэВ. В грубом приближении можно считать, что α-частицы проходят через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 10$ МэВ и шириной $d = 5 \cdot 10^{-15}$ м. Найти коэффициент прозрачности D барьера для α-частиц.

46.78. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 10$ кВ. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота U_0 барьера равна 20 кэВ и ширина $d = 0{,}1$ пм?

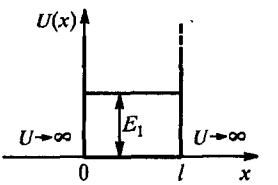


Рис. 46.7

46.79*. Электрон находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике в основном состоянии ($n = 1$). Ширина ящика $l = 0{,}3$ нм (рис. 46.7). Определить число столкновений z электрона со стенками ящика в единицу времени.

46.80*. Электрон находится в основном состоянии ($n = 1$) в бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной $l = 0{,}3$ нм (рис. 46.8). Определить силу давления F, производимую электроном на стенки ящика.

46.81*. Определить показатель преломления n ($n = \lambda_1/\lambda_2$) волн де Бройля на границе потенциальной ступени (см. рис. 46.5), если коэффициент прохождения τ через нее оказался равным 0,64. На рисунке изобразить действительные части падающей и прошедшей через ступень волн де Бройля.

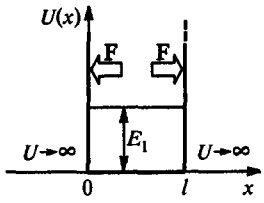


Рис. 46.8

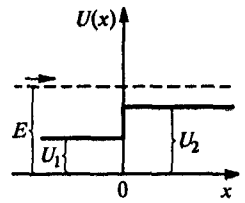


Рис. 46.9

46.82*. Электрон с энергией $E = 10$ эВ падает на потенциальную ступень (рис. 46.9). Определить показатель преломления n ($n = \lambda_1/\lambda_2$) волн де Бройля, если потенциальные энергии U_1 и U_2 соответственно равны 2 и 8 эВ. На рисунке изобразить действительные части падающей на ступень и прошедшей через нее волн де Бройля.

46.83*. Электрон с энергией $E = 20$ эВ подлетает к потенциальной ступени (рис. 46.10). Потенциальные энергии U_1 и U_2 соответственно равны 15 и 5 эВ. Определить при прохождении электрона через ступень: 1) коэффициент отражения ρ; 2) коэффициент прохождения τ; 3) показатель преломления n волн де Бройля.

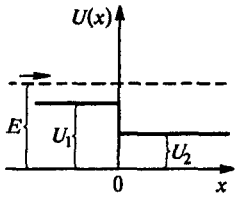


Рис. 46.10

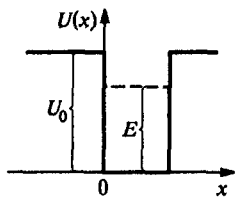


Рис. 46.11

46.84*. Металлическая поверхность представляет для свободных электронов, находящихся внутри металла, высокую потенциальную ступень (рис. 46.11). Оценить глубину d проникновения[5]) электронов за пределы поверхности металла. При расчетах принять $U_0 - E = 2{,}2$ эВ (работа выхода электронов из металла для калия). На рисунке изобразить плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ нахождения электрона внутри и вне металла.

[5]) Под глубиной проникновения понимают расстояние, на котором вероятность нахождения частицы уменьшается в e раз.

46.85*. Электрон с энергией $E = 1{,}5$ эВ находится в потенциальной яме шириной $d = 0{,}3$ нм (рис. 46.12). Высота U_0 прямоугольного потенциального барьера равна 1,65 эВ. Оценить время τ нахождения электрона в такой потенциальной яме.

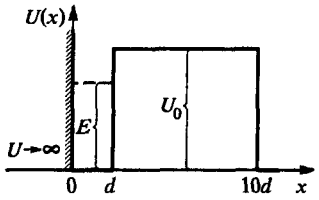


Рис. 46.12

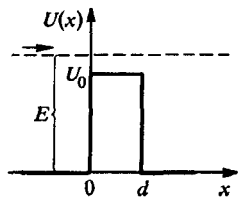


Рис. 16.13

46.86*. Электрон с энергией E проходит над потенциальным барьером (рис. 46.13) высотой $U_0 = 5$ эВ. При какой минимальной энергии $E_{\min}$ ($E_{\min} > U_0$) электрон пройдет над барьером беспрепятственно (не испытывая отражения). На рисунке изобразить действительную часть волновой функции.

§ 47. Строение атома

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Уравнение Шредингера для стационарных состояний в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)+$$
$$+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0,$$

где $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$ — волновая функция; E — полная энергия частицы; U — потенциальная энергия частицы (являющаяся функцией координат).

• В атоме водорода (или водородоподобном ионе) потенциальная энергия $U(r)$ имеет вид

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где Z — зарядовое число; e — элементарный заряд; ε_0 — электрическая постоянная.

• Собственное значение энергии E_n электрона в атоме водорода

$$E_n = -\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, n — главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

• Символическая запись ψ-функции, описывающей состояние электрона в атоме водорода,

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi),$$

где n, l, m — квантовые числа: главное, орбитальное, магнитное.

Вероятность $\mathrm{d}W$ того, что электрон находится в области, ограниченной элементом объема $\mathrm{d}V$, взятого в окрестности точки с координатами r, θ, φ,

$$\mathrm{d}W = |\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)|^2 \, \mathrm{d}V,$$

где $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r$ (в сферических координатах).

В s-состоянии ($l = 0$, $m = 0$) волновая функция сферически-симметричная (т. е. не зависит от углов θ и φ).

Нормированные собственные ψ-функции, отвечающие s-состоянию (основному) и $2s$-состоянию,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$

$$\psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right),$$

или в атомных единицах

$$\psi_{100}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\rho), \quad \psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (2 - \rho) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right),$$

где в качестве единицы длины принят боровский радиус $a = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar}{e^2 m} =$ $= 52{,}9$ пм. При таком выборе единицы длины расстояние от ядра $\rho = r/a$ будет выражаться в безразмерных единицах длины, называемых атомными единицами.

Вероятность $\mathrm{d}W$ найти электрон в атоме водорода, находящемся в s-состоянии, в интервале $(r, r + \mathrm{d}r)$ одинакова по всем направлениям и определяется формулой

$$\mathrm{d}W = |\psi_{n,0,0}(r)|^2 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r.$$

• Орбитальные момент импульса и магнитный момент электрона:

$$\mathcal{L}_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad \mathcal{M}_l = \mu_\text{в}\sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное квантовое число, которое может принимать значения 0, 1, 2, ..., $(n - 1)$; $\mu_\text{в}$ — магнетон Бора: $\left(\mu_\text{в} = \dfrac{e\hbar}{2m} = 0{,}927 \times \right.$ $\left. \times 10^{-23} \text{ Дж/Тл}\right)$.

• Проекции орбитальных момента импульса и магнитного момента на направление внешнего магнитного поля (совпадающего с осью Z):

$$\mathcal{L}_{l,z} = \hbar m_l, \quad \mathcal{M}_{l,z} = \mu_\text{в} m_l.$$

• Гиромагнитное отношение для орбитальных магнитного и механического моментов:

$$\frac{\mathcal{M}_l}{\mathcal{L}_l} = \frac{\mathcal{M}_{l,z}}{\mathcal{L}_{l,z}} = \frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}.$$

• Спин[6]) и спиновый магнитный момент электрона:

$$\mathcal{L}_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad \mathcal{M}_s = 2\mu_B\sqrt{s(s+1)},$$

где s — спиновое квантовое число ($s = 1/2$).

• Проекции спиновых момента импульса и магнитного момента на направление внешнего магнитного поля (совпадающего с осью Z):

$$\mathcal{L}_{s,z} = \hbar m_s, \quad \mathcal{M}_{s,z} = 2\mu_B m_s.$$

где m_s — спиновое магнитное квантовое число ($m_s = -1/2, +1/2$).

• Гиромагнитное отношение для спиновых магнитного и механического моментов:

$$\frac{\mathcal{M}_s}{\mathcal{L}_s} = \frac{\mathcal{M}_{s,z}}{\mathcal{L}_{s,z}} = 2\frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{e}{m}.$$

• Распределение электронов по состояниям в атоме записывается с помощью спектроскопических символов:

Значение орбитального квантового числа	0	1	2	3	4	5	6	7
Спектроскопический символ	s	p	d	f	g	h	i	k

Электронная конфигурация записывается следующим образом: число, стоящее слева перед спектроскопическим символом, означает главное квантовое число n, а сам спектроскопический символ отвечает тому или иному значению орбитального квантового числа l (например, обозначению $2p$ отвечает электрон с $n = 2$ и $l = 1$; $2p^2$ означает, что таких электронов в атоме 2, и т. д.).

• *Принцип Паули.* В атоме не может находиться два (и более) электрона, характеризуемых одинаковым набором четырех квантовых чисел: n, l, m_l, m_s.

• Полный момент импульса электрона

$$\mathcal{L}_j = \hbar\sqrt{j(j+1)},$$

где j — внутреннее квантовое число ($j = l + 1/2, l - 1/2$).

• Полный орбитальный момент атома

$$\mathcal{L}_L = \hbar\sqrt{L(L+1)},$$

где L — полное орбитальное квантовое число.

---

[6]) Спином называется собственный момент импульса электрона и других элементарных частиц. Спин не связан с перемещением частицы как целого и имеет квантовую природу. Спин выражается в единицах постоянной Планка $\hbar$.

• Полный спиновый момент атома

$$\mathcal{L}_S = \hbar\sqrt{S(S+1)},$$

где S — полное спиновое квантовое число.

• Полный момент импульса атома

$$\mathcal{L}_J = \hbar\sqrt{J(J+1)},$$

где J — полное внутреннее квантовое число.

• Символическое обозначение состояния атома (спектральный терм)

$$^{2s+1}L_J,$$

где $2S+1$ — мультиплетность. Вместо полного орбитального квантового числа L пишут символ в соответствии с таблицей:

Значение	0	1	2	3	4	5
Символ	S	P	D	F	G	H

Пример. Терм $^2P_{3/2}$ расшифровывается следующим образом: мультиплетность $2S+1=2$; следовательно, $S=1/2$, символу P соответствует $L=1$, а $J=3/2$.

• Магнитный момент атома

$$\mathcal{M}_J = g\mu_\text{в}\sqrt{J(J+1)},$$

где g — множитель (или фактор) Ланде:

$$g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

• Проекция магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля (совпадающего с осью z)

$$\mathcal{M}_{J,z} = g\mu_\text{в}m_J,$$

где m_J — полное магнитное квантовое число ($m_J = J,\ J-1,\ \ldots,\ -J$).

• Сила, действующая на атом в неоднородном магнитном поле,

$$F_z = \frac{\partial B}{\partial z}\mathcal{M}_{J,z},$$

где $\partial B/\partial z$ — градиент магнитной индукции.

• Частота ларморовой прецессии

$$\omega_\text{л} = \frac{eB}{2m},$$

где m — масса электрона.

• Энергия атома в магнитном поле

$$E = -\mathcal{M}_{J,z}B.$$

• Величина расщепления спектральной линии при эффекте Зеемана:
а) сложном (аномальном)

$$\Delta\omega = (m_J''g'' - m_J'g')\omega_{\text{л}},$$

где m_J'', m_J' и g'', g' — магнитные квантовые числа и множители Ланде соответствующих термов;
б) простом (нормальном)

$$\Delta\omega = 0,\ \pm\omega_{\text{л}}.$$

• Правила отбора для квантовых чисел S, L, J и m_S, m_L, m_J:

$$\begin{aligned} &\Delta S = 0; && \Delta m_S = 0;\\ &\Delta L = \pm 1; && \Delta m_L = 0, \pm 1;\\ &\Delta J = 0, \pm 1; && \Delta m_J = 0, \pm 1. \end{aligned}$$

Не осуществляются переходы $J = 0 \to J = 0$, а при $J = 0$ — переходы $m_J = 0 \to m_J = 0$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Атом водорода находится в состоянии $1s$. Определить вероятность W пребывания электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0{,}1a$ (где a — радиус первой боровской орбиты). Волновая функция, описывающая это состояние, считается известной.

Решение. Вероятность обнаружить электрон в окрестности точки с координатами r, θ, φ в объеме $\mathrm{d}V$ определяется равенством

$$\mathrm{d}W = |\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)|^2\,\mathrm{d}V.$$

В $1s$-состоянии волновая функция ψ сферически симметрична, т. е. зависит только от r, и поэтому

$$\mathrm{d}W = |\psi_{100}(r)|^2\,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

где $\psi_{100}(r)$ — собственная нормированная волновая функция, отвечающая основному состоянию: $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$.

Благодаря сферической симметрии ψ-функции вероятность обнаружить электрон на расстоянии r одинакова по всем направлениям. Поэтому элемент объема $\mathrm{d}V$, отвечающий одинаковой плотности вероятности, можно представить в виде объема сферического слоя радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$: $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$.

С учетом выражений $\psi_{100}(r)$ и $\mathrm{d}V$ формула (1) запишется в виде

$$\mathrm{d}W = \left|\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right|^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)r^2\,\mathrm{d}r.$$

При вычислении вероятности удобно перейти к атомным единицам, приняв в качестве единицы длины радиус первой боровской орбиты a. Если ввести безразмерную величину $\rho = r/a$, то

$$r^2 = \rho^2 a^2, \quad \mathrm{d}r = a\,\mathrm{d}\rho \quad \text{и} \quad \mathrm{d}W = 4\exp(-2\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho.$$

Вероятность найдем, интегрируя $\mathrm{d}W$ в пределах от $r_1 = 0$ до $r_2 = 0{,}1a$ (или от $\rho_1 = 0$ до $\rho_2 = 0{,}1$):

$$W = 4\int_0^{0,1} \rho^2 \exp(-2\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

Этот интеграл может быть точно вычислен интегрированием по частям, однако при малых ρ ($\rho_{\max} = 0{,}1$) выражение $\exp(-2\rho)$ можно разложить в ряд Маклорена:

$$\exp(-2\rho) = 1 - 2\rho + \frac{1}{2!}(2\rho^2) - \ldots$$

и произвести приближенное вычисление.

Пренебрегая всеми членами степени выше первой, запишем интеграл в виде

$$W = 4\int_0^{0,1}(1-2\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho = 4\int_0^{0,1}\rho^2\,\mathrm{d}\rho - 8\int_0^{0,1}\rho^3\,\mathrm{d}\rho.$$

Первый и второй интегралы дают соответственно результаты

$$4\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{0,1} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-3} \quad \text{и} \quad 8\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{0,1} = 0{,}2\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, искомая вероятность

$$W = 1{,}33\cdot 10^{-3} - 0{,}2\cdot 10^{-3} = 1{,}13\cdot 10^{-3}.$$

Пример 2. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$-состоянии. Определить изменение магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

Решение. Изменение $\Delta\mathcal{M}_l$ магнитного момента найдем как разность магнитных моментов в конечном (основном) и начальном (возбужденном) состояниях, т. е. $\Delta\mathcal{M}_l = \mathcal{M}_{l_2} - \mathcal{M}_{l_1}$.

Магнитный момент орбитального движения электрона зависит только от орбитального квантового числа l:

$$\mathcal{M}_l = \mu_{\text{в}}\sqrt{l(l+1)}.$$

Отсюда имеем: в основном состоянии $l = 0$ и $\mathcal{M}_{l_2} = 0$; в возбужденном ($3p$) состоянии $l = 1$ и $\mathcal{M}_{l_1} = \mu_{\text{в}}\sqrt{2}$. Следовательно, изменение магнитного момента

$$\Delta\mathcal{M}_l = -\mu_{\text{в}}\sqrt{2}.$$

Знак минус показывает, что в данном случае магнитный момент уменьшился. Подставив значение $\mu_в = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл, получим

$$\Delta \mathcal{M}_l = -1{,}31 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Атом водорода

47.1. Уравнение Шредингера в сферической системе координат для электрона, находящегося в водородоподобном атоме, имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)+$$
$$+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0.$$

Показать, что это уравнение разделяется на два, если волновую функцию представить в виде произведения двух функций:

$$\psi(r,\,\theta,\,\varphi)=R(r)\cdot Y(\theta,\,\varphi),$$

где $R(r)$ — радиальная и $Y(\theta,\,\varphi)$ — угловая функции.

47.2. Уравнение для радиальной $R(r)$ функции, описывающей состояние электрона в атоме водорода, имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left(\alpha+\frac{2\beta}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0,$$

где α, β и l — некоторые параметры. Используя подстановку $\chi(r)=rR(r)$, преобразовать его к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}+\left(\alpha+\frac{2\beta}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi=0.$$

47.3. Уравнение для радиальной функции $\chi(r)$ может быть преобразовано к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left(\alpha+\frac{2\beta}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi(r)=0,$$

где $\alpha=2mE/\hbar^2$; $\beta=Ze^2m/(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2$; l — целое число. Найти асимптотические решения уравнения при больших числах r. Указать, какие решения — с $E>0$ или с $E<0$ — приводят к связанным состояниям.

47.4. Найти по данным предыдущей задачи асимптотическое решение уравнения при малых r.

Указание. Считать при малых r члены α и $2\beta/r$ малыми по сравнению с $l(l+1)/r^2$. Применить подстановку $\chi(r) = r^\gamma$.

47.5. Найти решение уравнения для радиальной функции $R(r)$, описывающей основное состояние ($l = 0$), и определить энергию электрона в этом состоянии. Исходное уравнение для радиальной функции может быть записано в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left(\alpha + \frac{2\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R = 0,$$

где $\alpha = 2mE/\hbar^2$; $\beta = Ze^2m/(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2$; l — орбитальное квантовое число.

Указание. Применить подстановку $R(r) = \exp(-\gamma r)$.

47.6. Атом водорода находится в основном состоянии. Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = C\exp(-r/a)$, где C — некоторая постоянная. Найти из условия нормировки постоянную C.

47.7. Собственная функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = C\exp(-r/a)$, где $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(e^2m)$ (боровский радиус). Определить расстояние r, на котором вероятность нахождения электрона максимальна.

47.8. Электрон в атоме водорода описывается в основном состоянии волновой функцией $\psi(r) = C\exp(-r/a)$. Определить отношение вероятностей W_1/W_2 пребывания электрона в сферических слоях толщиной $\Delta r = 0{,}01a$ и радиусами $r_1 = 0{,}5a$ и $r_2 = 1{,}5a$.

47.9. Атом водорода находится в основном состоянии. Вычислить: 1) вероятность W_1 того, что электрон находится внутри области, ограниченной сферой радиуса, равного боровскому радиусу a; 2) вероятность W_2 того, что электрон находится вне этой области; 3) отношение вероятностей W_2/W_1. Волновую функцию считать известной: $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$.

47.10. Зная, что нормированная собственная волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$, найти среднее расстояние $\langle r\rangle$ электрона от ядра.

47.11. Принято электронное облако (орбиталь) графически изображать контуром, ограничивающим область, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. Вычислить в атомных единицах радиус орбитали для $1s$-состояния электрона в

атоме водорода. Волновая функция, отвечающая этому состоянию, $\psi_{100}(\rho) = \exp(-\rho)/\sqrt{\pi}$, где ρ — расстояние электрона от ядра, выраженное в атомных единицах.

Указание. Получающееся трансцендентное уравнение решить графически.

47.12. Волновая функция, описывающая $2s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}(2-\rho)\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$, где ρ — расстояние электрона от ядра, выраженное в атомных единицах. Определить: 1) расстояние ρ_1 от ядра, на которых вероятность обнаружить электрон имеет максимум; 2) расстояния ρ_2 от ядра, на которых вероятность нахождения электрона равна нулю; 3) построить графики зависимости $|\psi_{200}(\rho)|^2$ от ρ и $\rho^2|\psi_{200}(\rho)|^2$ от ρ.

47.13. Уравнение для угловой функции $Y(\theta, \varphi)$ в сферической системе координат может быть записано в виде

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}\right)=-\lambda,$$

где λ — некоторая постоянная. Показать, что это уравнение можно разделить на два, если угловую функцию представить в виде произведения двух функций: $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, где $\Theta(\theta)$ — функция, зависящая только от угла θ; $\Phi(\varphi)$ — то же, только от угла φ.

47.14. Угловая функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m_l^2\Phi = 0$. Решить уравнение и указать значения параметра m_l^2, при которых уравнение имеет решение.

47.15. Зависящая от угла φ угловая функция имеет вид $\Phi(\varphi) = C\exp(im\varphi)$. Используя условие нормировки, определить постоянную C.

47.16. Изобразить графически угловое распределение плотности вероятности нахождения электрона в атоме водорода, если угловая функция $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ имеет вид: 1) в s-состоянии ($l = 0$) $Y_{0,0} = 1/\sqrt{\pi}$; 2) в p-состоянии ($l = 1$) при трех значениях m: а) $m = 1$, $Y_{1,1} = \sqrt{3/(8\pi)}\sin\theta\cdot\exp(i\varphi)$; б) $m = 0$, $Y_{1,0} = \sqrt{3/(4\pi)}\cos\theta$; в) $m = -1$, $Y_{1,-1} = \sqrt{3/(8\pi)}\sin\theta\cdot\exp(-i\varphi)$. Для построений воспользоваться полярной системой координат.

47.17. Угловое распределение плотности вероятности нахождения электрона в атоме водорода определяется видом угловой функции $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$. Показать, что p-подоболочка имеет сферически симметричное распределение плотности вероятности. Воспользоваться данными предыдущей задачи.

Орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона

47.18. Вычислить момент импульса $\mathcal{L}_l$ орбитального движения электрона, находящегося в атоме: 1) в s-состоянии; 2) в p-состоянии.

47.19. Определить возможные значения проекции момента импульса $\mathcal{L}_{l,z}$ орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

47.20. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $\varepsilon = 10{,}2$ эВ. Определить изменение момента импульса $\Delta\mathcal{L}_l$ орбитального движения электрона. В возбужденном атоме электрон находится в p-состоянии.

47.21. Используя векторную модель атома, определить наименьший угол α, который может образовать вектор $\mathcal{L}_l$ момента импульса орбитального движения электрона в атоме с направлением внешнего магнитного поля. Электрон в атоме находится в d-состоянии.

47.22. Электрон в атоме находится в f-состоянии. Найти орбитальный момент импульса $\mathcal{L}_l$ электрона и максимальное значение проекции момента импульса $(\mathcal{L}_{l,z})_{\max}$ на направление внешнего магнитного поля.

47.23. Момент импульса $\mathcal{L}_l$ орбитального движения электрона в атоме водорода равен $1{,}83 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с. Определить магнитный момент $\mathcal{M}_l$, обусловленный орбитальным движением электрона.

47.24. Вычислить полную энергию E, орбитальный момент импульса $\mathcal{L}_l$ и магнитный момент $\mathcal{M}_l$ электрона, находящегося в $2p$-состоянии в атоме водорода.

47.25. Может ли вектор магнитного момента $\mathcal{M}_l$ орбитального движения электрона установиться строго вдоль линий магнитной индукции?

47.26. Определить возможные значения магнитного момента $\mathcal{M}_l$, обусловленного орбитальным движением электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия ε возбуждения равна 12,09 эВ.

Спиновый момент импульса и магнитный момент электрона

47.27. Вычислить спиновый момент импульса $\mathcal{L}_s$ электрона и проекцию $\mathcal{L}_{s,z}$ этого момента на направление внешнего магнитного поля.

47.28. Вычислить спиновый магнитный момент $\mathcal{M}_s$ электрона и проекцию магнитного момента $\mathcal{M}_{s,z}$ на направление внешнего поля.

47.29. Почему для обнаружения спина электрона в опытах Штерна и Герлаха используют пучки атомов, принадлежащих первой группе периодической системы, причем в основном состоянии?

47.30. Атомы серебра, обладающие скоростью $v = 0{,}6$ км/с, пропускаются через узкую щель и направляются перпендикулярно линиям индукции неоднородного магнитного поля (опыт Штерна и Герлаха). В поле протяженностью $l = 6$ см пучок расщепляется на два. Определить степень неоднородности $\partial B/\partial z$ магнитного поля, при которой расстояние b между компонентами расщепленного пучка по выходе его из поля равно 3 мм. Атомы серебра находятся в основном состоянии.

47.31. Узкий пучок атомарного водорода пропускается в опыте Штерна и Герлаха через поперечное неоднородное ($\partial B/\partial z = 2 \times 10^3$ Тл/м) магнитное поле протяженностью $l = 8$ см. Скорость v атомов водорода равна 4 км/с. Определить расстояние b между компонентами расщепленного пучка атомов по выходе его из магнитного поля. Все атомы водорода в пучке находятся в основном состоянии.

47.32. В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов цезия (в основном состоянии) проходит через поперечное неоднородное магнитное поле и попадает на экран $Э$ (рис. 47.1). Какова должна быть степень неоднородности $\partial B/\partial z$ магнитного поля, чтобы расстояние b между компонентами расщепленного пучка на экране было равно 6 мм? Принять $l_1 = l_2 = 10$ см. Скорость атомов цезия равна 300 м/с.

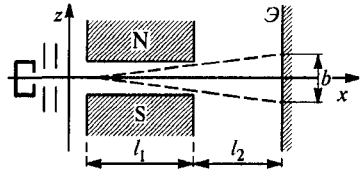


Рис. 47.1

47.33. Узкий пучок атомов рубидия (в основном состоянии) пропускается через поперечное неоднородное магнитное поле протяженностью $l_1 = 10$ см (рис. 47.1). На экране $Э$, отстоящем на расстоянии $l_2 = 20$ см от магнита, наблюдается расщепление пучка на два. Определить силу F_z, действующую на атомы рубидия, если расстояние b между компонентами пучка на экране равно 4 мм и скорость v атомов равна 500 м/с.

47.34. Узкий пучок атомов серебра при прохождении неоднородного ($\partial B/\partial z = 10^3$ Тл/м) магнитного поля протяженностью $l_1 = 4$ см расщепился на два пучка. Экран для наблюдения удален от границы магнитного поля на расстояние $l_2 = 10$ см (рис. 47.1). Определить (в магнетонах Бора) проекции $\mathcal{M}_{J,z}$ магнитного момента атома на направление вектора магнитной индукции, если расстояние b между компонентами расщепленного пучка на экране равно 2 мм и атомы серебра обладают скоростью $v = 500$ м/с.

Застройка электронных оболочек

47.35. Какое максимальное число s-, p- и d-электронов может находиться в электронных K-, L- и M-слоях атома?

47.36. Используя принцип Паули, указать, какое максимальное число $N_{\max}$ электронов в атоме могут иметь одинаковыми следующие квантовые числа: 1) n, l, m, m_s; 2) n, l, m; 3) n, l; 4) n.

47.37. Заполненный электронный слой характеризуется квантовым числом $n = 3$. Указать число N электронов в этом слое, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_s = +1/2$; 2) $m = -2$; 3) $m_s = -1/2$ и $m = 0$; 4) $m_s = +1/2$ и $l = 2$.

47.38. Найти число N электронов в атомах, у которых в основном состоянии заполнены: 1) K- и L-слои, $3s$-оболочка и наполовину $3p$-оболочка; 2) K-, L- и M-слои и $4s$-, $4p$- и $4d$-оболочки. Что это за атомы?

47.39. Написать формулы электронного строения атомов: 1) бора; 2) углерода; 3) натрия.

Векторная модель атома. Спектральные термы

47.40. Как можно согласовать использование векторной модели атома с соотношением неопределенностей для проекций момента импульса?

47.41. Электрон в атоме водорода находится в p-состоянии. Определить возможные значения квантового числа j и возможные значения (в единицах $\hbar$) полного момента импульса $\mathcal{L}_j$ электрона. Построить соответствующие векторные диаграммы.

47.42. В возбужденном атоме гелия один из электронов находится в p-состоянии, другой в d-состоянии. Найти возможные значения полного орбитального квантового числа L и соответствующего ему момента импульса $\mathcal{L}_L$ (в единицах $\hbar$). Построить соответствующие векторные диаграммы.

47.43. Определить угол φ между орбитальными моментами импульсов двух электронов, один из которых находится в d-состоянии, другой в f-состоянии, при следующих условиях: 1) полное орбитальное квантовое число $L = 3$; 2) искомый угол — максимальный; 3) искомый угол — минимальный.

47.44. Система из трех электронов, орбитальные квантовые числа l_1, l_2, l_3 которых соответственно равны 1, 2, 3, находятся в S-состоянии. Найти угол $\varphi_{1,2}$ между орбитальными моментами импульса первых двух электронов.

47.45. Каковы возможные значения полного момента импульса $\mathcal{L}_j$ электрона, находящегося в d-состоянии? Чему равны при этом углы φ между спиновым моментом импульса и орбитальным?

47.46. Спиновый момент импульса двухэлектронной системы определяется квантовым числом $S = 1$. Найти угол φ между спиновыми моментами импульса обоих электронов.

47.47. Система, состоящая из двух электронов, находится в состоянии с $L = 2$. Определить возможные значения угла φ между орбитальным моментом импульса p-электрона и полным орбитальным моментом импульса $\mathcal{L}_J$ системы.

47.48. Найти возможные значения угла между спиновым моментом импульса и полным моментом: 1) одноэлектронной системы, состоящей из d-электрона; 2) двухэлектронной системы с $J = 2$.

47.49. Определить возможные значения (в единицах $\hbar$) проекции $\mathcal{L}_{S,z}$ спинового момента импульса электронной системы, находящейся в состоянии $^3D_3$, на направление полного момента.

47.50. Определить возможные значения квантового числа J электронной системы, для которой: 1) $S = 2$ и $L = 1$; 2) $S = 1$ и $L = 3$. Найти (в единицах $\hbar$) возможные значения полного момента импульса $\mathcal{L}_J$ системы и построить соответствующие векторные диаграммы.

47.51. Определить возможные значения квантового числа J, соответствующего полному моменту импульса $\mathcal{L}_S$ электронной системы, у которой $L = 3$, а S принимает следующие значения: 1) 3/2; 2) 2; 3) 5/2; 4) 4. Построить соответствующие векторные диаграммы.

47.52. Записать основные термы для следующих атомов: 1) H; 2) He; 3) Li; 4) Be; 5) B.

47.53. Перечислить возможные термы для следующих состояний атомов: 1) ^2S; 2) ^2P; 3) ^4P; 4) ^5D.

47.54. Определить кратности вырождения следующих термов: 1) $^2D_{3/2}$; 2) $^3F_3$; 3) ^1F.

47.55. Объяснить на основе векторной модели атома наличие двух систем термов (синглетных и триплетных) в атомах с двумя валентными электронами.

47.56. Определить возможные мультиплетности $(2S+1)$ термов следующих атомов: 1) Li; 2) Be; 3) B; 4) C; 5) N.

47.57. Выписать все возможные термы для комбинации p- и d-электронов по типу связи Рассель–Саундерса. Дать их спектральные обозначения.

Магнитный момент атома. Атом в магнитном поле

47.58. Вычислить множитель Ланде g для атомов с одним валентным электроном в состояниях S и P.

47.59. Вычислить множитель Ланде g для атомов, находящихся в синглетных состояниях.

47.60. Определить магнитный момент $\mathcal{M}_J$ атома в состоянии ^1D. Ответ выразить в магнетонах Бора ($\mu_\text{в}$).

47.61. Вычислить магнитный момент $\mathcal{M}_J$ атома в состоянии $^3P_2$. Ответ выразить в магнетонах Бора.

47.62. Атом находится в состоянии $^2D_{3/2}$. Найти число возможных проекций магнитного момента на направление внешнего поля и вычислить (в магнетонах Бора) максимальную проекцию $(\mathcal{M}_{J,z})_\text{max}$.

47.63. Вычислить в магнетонах Бора магнитный момент $\mathcal{M}_J$ атома водорода в основном состоянии.

47.64. Атом находится в состоянии ^1F. Найти соответствующий магнитный момент $\mathcal{M}_J$ и возможные значения его проекции $\mathcal{M}_{J,z}$ на направление внешнего магнитного поля.

47.65. Максимальная проекция $(\mathcal{M}_{J,z})_\text{max}$ магнитного момента атома, находящегося в состоянии D_2, составляет четыре магнетона Бора. Определить мультиплетность $(2S+1)$ соответствующего терма.

47.66. На сколько составляющих расщепляется в опыте Штерна и Герлаха пучок атомов, находящихся в состояниях: 1) $^2P_{3/2}$; 2) ^1D; 3) $^5F_1$.

47.67. Определить максимальные проекции $(\mathcal{M}_{J,z})_\text{max}$ магнитных моментов атомов ванадия (^4F), марганца (^6S) и железа (^5D), если известно, что пучки этих атомов при прохождении через сильно неоднородное магнитное поле по методу Штерна и Герлаха расщепляются соответственно на 4, 6 и 9 составляющих. (В скобках указаны состояния, в которых находятся атомы.)

47.68. Вычислить частоты $\omega_\text{л}$ ларморовой прецессии электронных оболочек атомов: 1) в магнитном поле Земли ($B = 5\cdot10^{-5}$ Тл); 2) в поле, магнитная индукция B которого равна 50 Тл.

47.69. Найти угловую скорость ω прецессии магнитных моментов атомов, помещенных в магнитном поле ($B = 10^{-2}$ Тл) в случае, когда атомы находятся в состояниях: 1) ^1P; 2) $^2P_{3/2}$.

47.70. Определить максимальную энергию U_max магнитного взаимодействия атома, находящегося в состоянии ^1D с магнитным полем, индукция которого: 1) $B = 1$ Тл; 2) $B = 50$ Тл. Ответ выразить в электрон-вольтах.

Эффект Зеемана

47.71. Какое магнитное поле в случае эффекта Зеемана следует считать: 1) «слабым», 2) «сильным»?

47.72. Состояния атома характеризуются двумя спектральными термами. Указать квантовые числа S, L и возможные значения

квантового числа J для состояний: 1) ^1S и ^1P; 2) ^1D и ^1F. Изобразить для этих состояний схему энергетических уровней при отсутствии магнитного поля.

47.73. Состояние атома характеризуется двумя спектральными термами. Указать возможные значения квантового числа J для состояний: 1) ^2S и ^2P; 2) ^3P и ^2D; 3) ^3S и ^3D. Изобразить для этих состояний схему энергетических уровней с учетом спин-орбитального взаимодействия (естественного мультиплетного расщепления) при отсутствии магнитного поля.

47.74. Определить возможные значения квантового числа m_J и изобразить на схеме расщепление энергетических уровней атома в магнитном поле для состояний, определяемых спектральными термами: 1) ^2S; 2) $^2P_{3/2}$; 3) $^2D_{5/2}$; 4) ^1F.

47.75. Построить схему возможных энергетических переходов в слабом магнитном поле между состояниями атома, определяемыми следующими термами: 1) $^2P_{1/2} \to {}^2S$; 2) $^2P_{3/2} \to {}^2S$; 3) $^2D_{3/2} \to {}^2P_{3/2}$.

47.76. Вычислить смещение $\Delta\omega$ спектральных линий при сложном (аномальном) эффекте Зеемана в случае перехода атома из состояния, определяемого термом $^2P_{1/2}$, в состояние — $^2S_{1/2}$. В качестве единицы смещения принять нормальное (лоренцово) смещение $\Delta\omega = (\mu_B/\hbar)B$.

47.77*. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемым главным квантовым числом $n = 3$. Выписать спектральные обозначения возможных термов возбужденного атома водорода и найти максимальное значение полного момента импульса $(\mathcal{L}_J)_{\max}$ (в единицах $\hbar$).

47.78*. Вычислить магнитный момент атома $\mathcal{M}_J$, находящегося в состоянии $^2P_{3/2}$ и величину его максимальной проекции на направление внешнего магнитного поля (в единицах μ_B).

47.79*. Определить спектральный символ синглетного терма атома, находящегося в однородном магнитном поле ($B = 0{,}3$ Тл), если полная ширина расщепления $\Delta\widetilde{\nu}_{\text{полн}} = 0{,}843\,\text{см}^{-1}$.

47.80*. Длины волн λ_1 и λ_2 компонент дублета желтой линии натрия, обусловленной переходом $3P$–$3S$, равны 589,00 нм и 589,56 нм. Изобразить энергетическую схему перехода с указанием термов и найти величину ΔE энергетического расщепления $3P$-терма (в мэВ).

47.81*. Определить полную величину расщепления $\Delta\widetilde{\nu}$ (в см^{-1}) спектрального терма атома, находящегося в состоянии ^1D и помещенного в однородное магнитное поле ($B = 0{,}3$ Тл).

47.82*. Вычислить угловую скорость ω_J прецессии атома, находящегося в состоянии $^2P_{3/2}$, которую он приобретает при поме-

щении в однородное магнитное поле ($B = 10$ мТл). Используя векторную модель атома, вывести расчетную формулу.

47.83*. Определить минимальное изменение энергии $|\Delta E|_{\min}$ (в мэВ) атома, находящегося в состоянии ^2F, при помещении его в однородное магнитное поле ($B = 0{,}8$ Тл).

47.84*. Состояние атома характеризуется двумя спектральными термами ^2D и ^2P. 1. Указать возможные значения квантового числа J для этих термов и изобразить схему энергетических уровней с учетом спин-орбитального взаимодействия в отсутствие магнитного поля. 2. Определить возможные значения квантового числа m_J и изобразить на схеме расщепление энергетических уровней атома в слабом магнитном поле. 3. Построить, с учетом правил отбора, схему возможных энергетических переходов между термами $^2D_{3/2} \to {}^2P_{3/2}$.

§ 48. Спектры молекул

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Приведенная масса двухатомной молекулы

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы атомов, входящих в состав молекулы.

• Собственная циклическая частота осциллятора

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}},$$

где β — коэффициент квазиупругой силы.

• Нулевая собственная волновая функция одномерного квантового гармонического осциллятора

$$\psi_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right),$$

где параметр $\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$.

• Энергия колебания гармонического осциллятора

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

где n — колебательное квантовое число ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Для квантового числа n существует правило отбора, согласно которому

$$\Delta n = \pm 1.$$

• Нулевая энергия

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

• Энергия колебания ангармонического осциллятора

$$E_v = \hbar\omega\left(\left(v + \frac{1}{2}\right) - \gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

где v — колебательное квантовое число ($v = 0, 1, 2, \ldots$); γ — коэффициент ангармоничности; Δv — любое целое число. Для квантового числа v нет правила отбора, поэтому Δv может принимать любые целочисленные значения.

• Разность энергий двух соседних колебательных уровней

$$\Delta E_{v+1,\,v} = \hbar\omega\big(1 - 2\gamma(v+1)\big).$$

• Максимальное значение квантового числа v

$$v_{\max} = \frac{1}{2\gamma} - 1.$$

• Максимальная энергия колебательного движения

$$E_{\max} = \frac{\hbar\omega}{4\gamma}.$$

• Энергия диссоциации двухатомной молекулы

$$E_d = \frac{\hbar\omega}{4\gamma}(1 - 2\gamma).$$

• Момент инерции двухатомной молекулы относительно оси, проходящей через ее центр инерции перпендикулярно прямой, соединяющей ядра атомов,

$$J = \mu d^2,$$

где μ — приведенная масса молекулы; d — межъядерное расстояние.

• Вращательная постоянная

$$B = \frac{\hbar^2}{2\mu d^2}.$$

• Энергия вращательного движения двухатомной молекулы

$$E_{\mathcal{J}} = B\mathcal{J}(\mathcal{J} + 1),$$

где $\mathcal{J}$ — вращательное квантовое число ($\mathcal{J} = 0, 1, 2, \ldots$).

• Спектроскопическое волновое число

$$\widetilde{\nu} = \frac{1}{\lambda},$$

где λ — длина волны излучения.

• Энергия ε фотона излучения связана со спектроскопическим волновым числом $\tilde{\nu}$ соотношением

$$\varepsilon = 2\pi\hbar c\tilde{\nu},$$

где c — скорость распространения электромагнитного излучения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Собственная циклическая частота ω колебаний молекулы HCl равна $5{,}63 \cdot 10^{14}\,\text{с}^{-1}$, коэффициент ангармоничности $\gamma = 0{,}0201$. Определить: 1) энергию $\Delta E_{2,1}$ (в электрон-вольтах) перехода молекулы с первого на второй колебательный энергетический уровень; 2) максимальное квантовое число $v_{\max}$; 3) максимальную колебательную энергию $E_{\max}$; 4) энергию диссоциации E_d.

Решение. 1. Энергию перехода $\Delta E_{v+1,v}$ между двумя соседними уровнями найдем как разность двух значений колебательной энергии:

$$\Delta E_{v+1,v} = E_{v+1} - E_v.$$

Так как колебательная энергия двухатомной молекулы определяется соотношением

$$E_v = \hbar\omega\left(\left(v+\frac{1}{2}\right) - \gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\right), \qquad (1)$$

то

$$\Delta E_{v+1,v} = \hbar\omega\left[\left(\left(v+\frac{3}{2}\right) - \gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\left(v+\frac{1}{2}\right) - \gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right] = \hbar\omega[1 - 2\gamma(v+1)].$$

Подставив значения h, ω, γ и произведя вычисления, найдем

$$\Delta E_{2,1} = 1{,}09 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж},$$

или

$$\Delta E_{2,1} = 0{,}682\ \text{эВ}.$$

2. Максимальное квантовое число $v_{\max}$ найдем, приравняв разность соседних энергетических уровней нулю:

$$\Delta E_{v+1,v} = \hbar\omega[1 - 2\gamma(v_{\max}+1)] = 0,$$

или $1 - 2\gamma(v_{\max}+1) = 0$, откуда

$$v_{\max} = \frac{1}{2\gamma} - 1. \qquad (2)$$

Подставив сюда значение γ и округлив до ближайшего (снизу) целого значения найденного $v_{\max}$, получим

$$v_{\max} = 23.$$

3. Максимальную колебательную энергию $E_{\max}$ найдем, если в выражение (1) вместо v подставим $v_{\max}$ по формуле

$$E_{\max} = \hbar\omega\left(\left(\frac{1}{2\gamma} - 1 + \frac{1}{2}\right) - \gamma\left(\frac{1}{2\gamma} - 1 + \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Выполняя простые преобразования и пренебрегая $\gamma/4$ по сравнению с $1/(4\gamma)$, получаем

$$E_{\max} = \frac{\hbar\omega}{4\gamma}.$$

Подставим значения $\hbar$, ω, γ и произведем вычисления:

$$E_{\max} = 7{,}38 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}, \quad \text{или} \quad E_{\max} = 4{,}61 \text{ эВ}.$$

4. Энергия диссоциации есть энергия, которую необходимо затратить, чтобы отделить атомы в молекуле друг от друга и удалить их без сообщения им кинетической энергии на расстояние, на котором взаимодействие атомов пренебрежимо мало. На рис. 48.1 эта энергия отвечает переходу с нулевого колебательного уровня на самый высокий возбужденный, соответствующий $v_{\max}$.
Тогда энергия диссоциации

$$E_d = E_{\max} - E_0 = \frac{\hbar\omega}{4\gamma} - \frac{1}{2\hbar\omega},$$

или

$$E_d = \frac{\hbar\omega}{4\gamma}(1 - 2\gamma).$$

Заменив $\hbar\omega/(4\gamma)$ на $E_{\max}$, получим

$$E_d = E_{\max}(1 - 2\gamma).$$

Произведем вычисления: $E_d = 4{,}43$ эВ.

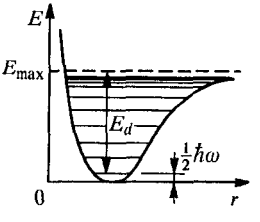


Рис. 48.1

Пример 2. Для молекулы HF определить: 1) момент инерции J, если межъядерное расстояние $d = 91{,}7$ пм; 2) вращательную постоянную B; 3) энергию, необходимую для возбуждения молекулы на первый вращательный уровень.

Решение. 1. Если воспользоваться формулой приведенной массы μ молекулы, то ее момент инерции можно выразить соотношением

$$J = \mu d^2, \quad \text{или} \quad J = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2,$$

где m_1 и m_2 — массы атомов водорода и фтора.

Приведенную массу молекулы удобно сначала выразить в а.е.м. (относительные атомные массы химических элементов приведены в табл. 30):

$$\mu = \frac{1 \cdot 19}{1 + 19} \text{ а е.м.} = 0{,}95 \text{ а.е.м.}$$

Выразив приведенную массу в единицах СИ ($\mu = 0{,}95 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}59 \cdot 10^{-27}$ кг), найдем момент инерции молекулы HF:

$$J = 1{,}33 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Вращательная постоянная B с учетом выражения для J равна

$$B = \frac{\hbar}{2\mu d^2}.$$

Подставив значения $\hbar$, μ, d и произведя вычисления, получим

$$B = 4{,}37 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}, \quad \text{или} \quad B = 2{,}73 \text{ мэВ}.$$

3. Энергия, необходимая для возбуждения молекулы на первый вращательный уровень, равна разности энергий молекулы на первом и нулевом вращательных уровнях.

Так как вращательная энергия двухатомной молекулы выражается соотношением $E_{\mathcal{J}} = B\mathcal{J}(\mathcal{J}+1)$, то разность энергий двух соседних вращательных уровней

$$\Delta E_{\mathcal{J}+1,\,\mathcal{J}} = E_{\mathcal{J}+1} - E_{\mathcal{J}} = \big((B(\mathcal{J}+1)(\mathcal{J}+2)\big) - \big(B\mathcal{J}(\mathcal{J}+1)\big)\big).$$

После упрощений получим

$$\Delta E_{\mathcal{J}+1,\,\mathcal{J}} = 2B(\mathcal{J}+1).$$

Положив здесь $\mathcal{J} = 0$, найдем значение энергии, необходимое для возбуждения молекулы с нулевого уровня на первый:

$$\Delta E_{1,0} = 2B = 5{,}46 \text{ мэВ}.$$

ЗАДАЧИ

Колебательный спектр двухатомной молекулы

48.1. Изобразить графически зависимость $\psi_0(x)$ и $|\psi_0(x)|^2$ для нулевой собственной волновой функции осциллятора.

48.2. Используя условие нормировки, определить нормировочный множитель C_0 нулевой собственной волновой функции осциллятора.

48.3. Рассматривая молекулу как квантовый гармонический осциллятор, находящийся в основном состоянии ($n = 0$), найти

амплитуду A классических колебаний, выразив ее через параметр α.

48.4. Гармонический осциллятор находится в основном состоянии ($n = 0$). Какова вероятность W обнаружения частицы в области ($-A < x < A$), где A — амплитуда классических колебаний?

48.5. Определить среднюю потенциальную энергию $\langle U(x) \rangle$ гармонического осциллятора, находящегося в основном состоянии, выразив ее через нулевую энергию E_0.

48.6. Собственная циклическая частота ω колебаний молекулы водорода равна $8{,}08 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1}$. Найти амплитуду A классических колебаний молекулы.

48.7. Зная собственную циклическую частоту ω колебаний молекулы CO ($\omega = 4{,}08 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1}$), найти коэффициент β квазиупругой силы.

48.8. Определить энергию $E_{\text{возб}}$ возбуждения молекулы HCl с нулевого колебательного энергетического уровня на первый, если известны собственная циклическая частота $\omega = 5{,}63 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1}$ и коэффициент ангармоничности $\gamma = 0{,}0201$.

48.9. Определить число N колебательных энергетических уровней, которое имеет молекула HBr, если коэффициент ангармоничности $\gamma = 0{,}0208$.

48.10. Во сколько раз отличаются максимальная и минимальная (отличная от нуля) разности двух соседних энергетических уровней для молекулы H_2 ($\gamma = 0{,}0277$)?

48.11. Определить максимальную колебательную энергию $E_{\max}$ молекулы O_2, для которой известны собственная циклическая частота $\omega = 2{,}98 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1}$ и коэффициент ангармоничности $\gamma = 9{,}46 \cdot 10^{-3}$.

48.12. Определить энергию диссоциации D (в электрон-вольтах) молекулы CO, если ее собственная частота $\omega = 4{,}08 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1}$ и коэффициент ангармоничности $\gamma = 5{,}83 \cdot 10^{-3}$. Изобразить на потенциальной кривой схему колебательных энергетических уровней и отметить на ней энергию диссоциации.

48.13. Найти коэффициент ангармоничности γ молекулы N_2, если ее энергия диссоциации $D = 9{,}80$ эВ и собственная циклическая частота $\omega = 4{,}45 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1}$. На потенциальной кривой изобразить схему энергетических уровней молекулы и отметить на ней энергию диссоциации.

48.14. Молекула NO переходит из низшего возбужденного состояния в основное. Определить длину волны λ испущенного при этом фотона, если собственная циклическая частота $\omega = 3{,}59 \times 10^{14}\ \text{с}^{-1}$ и коэффициент ангармоничности $\gamma = 8{,}73 \cdot 10^{-3}$. На потенциальной кривой изобразить схему колебательных энергетичес-

ких уровней молекулы и отметить на ней соответствующий энергетический переход.

Вращательный спектр двухатомной молекулы

48.15. Найти момент импульса $\mathcal{L}$ двухатомной молекулы, соответствующий низшему возбужденному состоянию.

48.16. Определить изменение $\Delta\mathcal{L}$ момента импульса двухатомной молекулы при переходе ее с первого вращательного уровня на второй.

48.17. Определить угловую скорость ω вращения молекулы S_2, находящейся на первом возбужденном вращательном уровне. Межъядерное расстояние $d = 189$ пм.

48.18. Вычислить вращательную постоянную B для молекулы CO, если межъядерное расстояние $d = 113$ пм. Ответ выразить в миллиэлектрон-вольтах.

48.19. Найти момент импульса $\mathcal{L}$ молекулы кислорода, вращательная энергия $E_\mathcal{J}$ которой равна 2,16 мэВ.

48.20. Найти момент инерции J и межъядерное расстояние d молекулы CO, если интервалы ΔE между соседними линиями чисто вращательного спектра испускания молекул CO равны 0,48 мэВ.

48.21. Определить для молекулы HCl вращательные квантовые числа $\mathcal{J}$ двух соседних уровней, разность энергий $\Delta E_{\mathcal{J}+1,\mathcal{J}}$ которых равна 7,86 мэВ. Межъядерное расстояние $d = 127$ пм.

48.22. Для молекулы N_2 найти: 1) момент инерции J, если межъядерное расстояние $d = 110$ пм; 2) вращательную постоянную B; 3) изменение $|\Delta E|$ энергии при переходе молекулы с третьего вращательного энергетического уровня на второй. Относительная атомная масса $A_N = 14$.

48.23. Для молекулы O_2 найти: 1) приведенную массу μ; 2) межъядерное расстояние d, если вращательная постоянная $B = 0{,}178$ мэВ; 3) угловую скорость ω вращения, если молекула находится на первом вращательном энергетическом уровне. Относительная атомная масса $A_O = 16$.

48.24. Для молекулы NO найти: 1) момент инерции J молекулы, если межъядерное расстояние $d = 115$ пм; 2) вращательную постоянную B молекулы; 3) температуру T, при которой средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы равна энергии, необходимой для ее возбуждения на первый вращательный энергетический уровень. Относительные атомные массы A_N и A_O равны соответственно 14 и 16.

48.25. Установить числовое соотношение между энергией ε излучения и спектроскопическим волновым числом $\widetilde{\nu}$.

48.26. Найти расстояние d между ядрами молекулы CH, если интервалы $\Delta\tilde{\nu}$ между соседними линиями чисто вращательного спектра испускания данной молекулы равны $29\,см^{-1}$.

48.27. Определить, на сколько изменится импульс молекул азота при испускании спектральной линии с длиной волны $\lambda = 1250\,мкм$, которая принадлежит чисто вращательному спектру.

48.28. Длины волн λ_1 и λ_2 двух соседних спектральных линий в чисто вращательном спектре молекулы HCl соответственно равны 117 и 156 мкм. Вычислить вращательную постоянную ($см^{-1}$) для молекулы HCl.

48.29. Будет ли монохроматическое электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 3\,мкм$ возбуждать вращательные и колебательные уровни молекулы HF, находящейся в основном состоянии?

48.30. Определить кратность вырождения энергетического уровня двухатомной молекулы с вращательным квантовым числом $\mathcal{J}$.

Глава 10
ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 49. Элементы кристаллографии

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Молярный объем кристалла

$$V_м = \frac{M}{\rho},$$

где M — молярная масса вещества; ρ — плотность кристалла.

Объем V элементарной ячейки в кристаллах:

а) при кубической сингонии $V = a^3$;

б) при гексагональной сингонии $V = \sqrt{3}a^2c/2$. Здесь a и c — параметры решетки.

Если для гексагональной решетки принять теоретическое значение

$$c = \sqrt{\frac{8}{3}}a, \quad \text{то} \quad V = \sqrt{2}a^3.$$

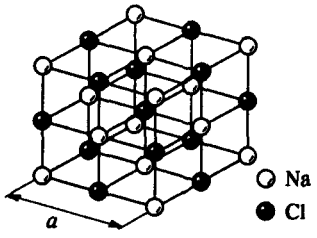


Рис. 49.1

• Число $Z_м$ элементарных ячеек в одном моле кристалла

$$Z_м = \frac{V_м}{V}, \quad \text{или} \quad Z_м = \frac{kN_A}{n},$$

где k — число одинаковых атомов в химической формуле соединения (например, в кристалле AgBr число одинаковых атомов Ag или Br в химической формуле соединения равно единице); N_A — постоянная Авогадро; n — число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку. На рис. 49.1 представлена структура NaCl; аналогичную структуру имеют соединения KBr, AgBr, MnO и др.

Число Z элементарных ячеек в единице объема кристалла

$$Z = \frac{Z_м}{V_м},$$

или в общем случае

$$Z = \rho \frac{k}{n} \frac{N_A}{M};$$

для кристалла, состоящего из одинаковых атомов ($k = 1$),

$$Z = \rho \frac{N_A}{nM}.$$

• Параметр a кубической решетки

$$a = \sqrt[3]{\frac{nM}{k\rho N_A}}.$$

Расстояние d между соседними атомами в кубической решетке:

а) в гранецентрированной $d = a/\sqrt{2}$;

б) в объемно-центрированной $d = \sqrt{3}a/2$.

• Для обозначения узлов, направлений и плоскостей в решетке вводятся специальные индексы.

Индексы узлов записывают в двойных квадратных скобках $[[mnp]]$. Для отрицательных индексов над буквой ставится знак минус, например $\bar{m}$ (рис. 49.2).

• Индексы направлений записываются в одинарных квадратных скобках $[mnp]$. Индекс направления совпадает с индексом узла, через кото-

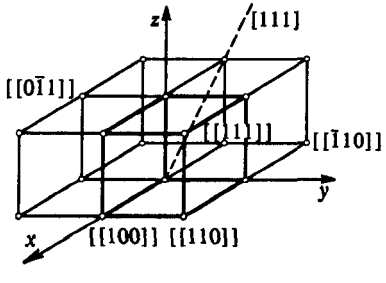


Рис. 49.2

рый проходит прямая, если эта прямая одновременно проходит и через начало координат [[000]] (рис. 49.2).

Индексы направления задают не одну прямую в кристалле, а семейство параллельных прямых. Изменение всех индексов на обратные по знаку $[\bar{m}\bar{n}\bar{p}]$ означает то же самое направление в кристалле.

• Период идентичности вдоль прямой, заданной индексами $[mnp]$, в кубической решетке выражается соотношением

$$l = a\sqrt{m^2 + n^2 + p^2},$$

где a — параметр решетки.

• Угол φ между прямыми $[m_1n_1p_1]$ и $[m_2n_2p_2]$ в кубической решетке выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

• Индексы плоскости (индексы Миллера) записывают в круглых скобках (hkl). Изменение всех индексов на обратные $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ отвечает тому же семейству плоскостей.

Индексы Миллера связаны с минимальными отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат.

• Для нахождения отрезков следует взять обратные величины индексов Миллера $(1/h;\ 1/k;\ 1/l)$ и привести их к наименьшему целому, кратному каждому из полученных чисел. Полученные значения и есть наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью (hkl) на осях координат.

Если известны отрезки, отсекаемые на осях координат, то индексы Миллера находятся аналогичным путем (см. пример 4). Индексы Миллера пропорциональны направляющим косинусам вектора нормали к данной плоскости. Поэтому индексы Миллера для некоторого семейства плоскостей совпадают с индексами направлений нормали к этим плоскостям.

• Угол между плоскостями $(h_1k_1l_1)$ и $(h_2k_2l_2)$ определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}},$$

а между прямой $[mnp]$ и плоскостью (hkl) — из формулы

$$\sin\varphi = \frac{hm + kn + lp}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить число n узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной кубической решетке.

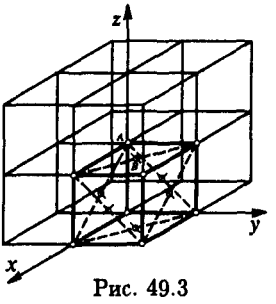


Рис. 49.3

Решение. Выделим элементарную ячейку в кубической решетке (рис. 49.3) и определим, скольким соседним элементарным ячейкам принадлежит тот или иной узел выделенной ячейки. В этой ячейке имеются узлы двух типов: A (находящиеся в вершинах куба) и B (находящиеся на гранях куба в точке пересечения диагоналей).

Узел A принадлежит одновременно восьми элементарным ячейкам. Следовательно, в данную ячейку узел A входит с долей $1/8$. Узел B входит одновременно только в две ячейки и, следовательно, в данную ячейку узел B входит с долей $1/2$. Если учесть, что число узлов типа A в ячейке равно восьми, а число узлов

типа B равно шести, т. е. числу граней, то общее число узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной решетке,

$$n = \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 1 + 3 = 4 \text{ узла.}$$

Так как число узлов равно числу атомов, то в соответствующей структуре на элементарную ячейку приходится четыре атома.

Пример 2. Определить параметр a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла кальция (решетка гранецентрированная кубической сингонии). Плотность ρ кристалла кальция равна $1{,}55 \times 10^3$ кг/м^3.

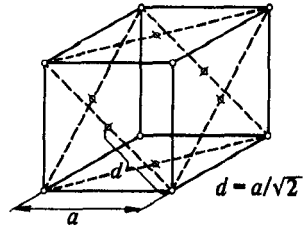


Рис. 49.4

Решение. Параметр a кубической решетки связан с объемом элементарной ячейки соотношением $V = a^3$. С другой стороны, объем элементарной ячейки равен отношению молярного объема к числу элементарных ячеек в одном моле кристалла: $V = V_м/Z_м$. Приравняв правые части приведенных выражений для V, найдем

$$a^3 = \frac{V_м}{Z_м}. \qquad (1)$$

Молярный объем кальция $V_м = M/\rho$, где ρ — плотность кальция; M — его молярная масса. Число элементарных ячеек в одном моле

$$Z_м = \frac{N_A}{n},$$

где n — число атомов, приходящихся на одну ячейку. Подставив в формулу (1) приведенные выражения для $V_м$ и $Z_м$, получим

$$a^3 = \frac{nM}{\rho N_A}.$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{\frac{nM}{\rho N_A}}. \qquad (2)$$

Подставим значения величин n, M, ρ и N_A в формулу (2), учитывая, что $n = 4$ (см. предыдущий пример). Произведя вычисления, найдем

$$a = 556 \text{ пм.}$$

Расстояние d между ближайшими соседними атомами находится из простых геометрических соображений, ясных из рис. 49.4:

$$d = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Подставив в это выражение найденное ранее значение a, получим

$$d = 393 \text{ пм}.$$

Пример 3. Написать индексы направления прямой, проходящей через узлы [[100]] и [[001]] кубической примитивной решетки.

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами.

1-*й способ.* Изобразим кубическую примитивную ячейку, отметим на ней узлы с индексами [[100]] и [[001]] и проведем через эти узлы прямую (рис. 49.5*а*).

Заданная прямая не проходит через начало координат. Но этого можно достигнуть, перенеся начало координат в один из узлов, через которые проходит прямая.

Если перенести начало координат в узел [[100]] (рис. 49.5*б*), то узел, лежащий на той же прямой и ближайший к выбранному началу координат, будет иметь индексы $[[\bar{1}01]]$, а искомое направление в этом случае определится индексами $[\bar{1}01]$.

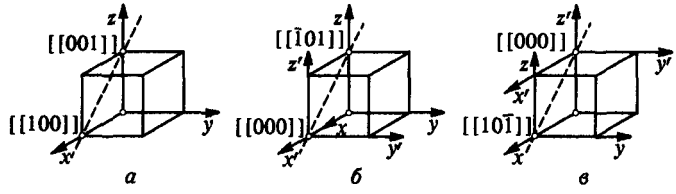


Рис. 49.5

Если же начало координат перенести в узел [[001]] (рис. 49.5*в*), то соответственно индексы искомого направления будут $[10\bar{1}]$. Итак, индексы *искомого* направления в кристалле $[\bar{1}01]$ или $[10\bar{1}]$.

2-*й способ.* Не всегда бывает легко определить, как изменятся индексы узлов при переносе начала координат. Поэтому рассмотрим аналитический метод решения.

Напишем в общем виде уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве, с индексами узлов $[[m_1 n_1 p_1]]$ и $[[m_2 n_2 p_2]]$:

$$\frac{x - m_1}{m_2 - m_1} = \frac{y - n_1}{n_2 - n_1} = \frac{z - p_1}{p_2 - p_1}. \qquad (3)$$

Величины, стоящие в знаменателе, пропорциональны направляющим косинусам прямой. Но так как эти величины целочисленны, то они и будут являться индексами направления.

Подставив в знаменатель выражения (3) значения индексов узлов $m_1 = 1$, $n_1 = 0$, $p_1 = 0$ и $m_2 = 0$, $n_2 = 0$, $p_2 = 1$, получим:

$$m_2 - m_1 = 0 - 1 = -1;$$
$$n_2 - n_1 = 0 - 0 = 0;$$
$$p_2 - p_1 = 1 - 0 = 1.$$

Таким образом, искомые индексы направления $[\bar{1}01]$.

Пример 4. Написать индексы Миллера для плоскости, содержащей узлы с индексами [[200]], [[010]] и [[001]]. Решетка кубическая, примитивная.

Решение. Возможны два способа решения задачи.

1-й способ применим в тех случаях, когда узлы, принадлежащие плоскости, лежат одновременно и на осях координат (т.е. известны отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат).

В данном случае узлы, принадлежащие плоскости, лежат на осях координат, и отрезки (в единицах постоянной решетки), отсекаемые на осях координат этой плоскостью, соответственно будут $2, 1, 1$ (рис. 49.6).

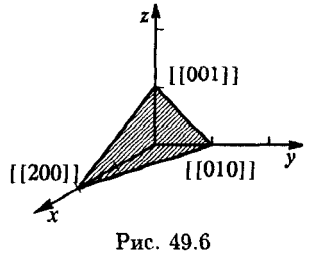


Рис. 49.6

В соответствии с общим правилом нахождения индексов Миллера напишем обратные значения полученных чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1}$ и приведем их к наименьшему целому кратному этих чисел. Для этого умножим числа на два. Полученная совокупность значений, заключенная в круглые скобки, и есть искомые индексы Миллера (1, 2, 2).

2-й способ (аналитический) особенно удобен тогда, когда известные узлы не лежат на осях координат. Этот способ является общим и применим во всех случаях.

Известно, что индексы Миллера равны наименьшим целочисленным коэффициентам при переменных в уравнении плоскости. Поэтому решение задачи по определению индексов Миллера сводится, по существу, к отысканию уравнения плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $[[m_1n_1p_1]]$, $[[m_2n_2p_2]]$, $[[m_3n_3p_3]]$, дается определителем третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x-m_1 & y-n_1 & z-p_1 \\ m_2-m_1 & n_2-n_1 & p_2-p_1 \\ m_3-m_1 & n_3-n_1 & p_3-p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае: $m_1 = 2$, $n_1 = 0$, $p_1 = 0$; $m_2 = 0$, $n_2 = 1$, $p_2 = 0$; $m_3 = 0$, $n_3 = 0$, $p_3 = 1$. Подставляя значения индексов узлов в определитель, получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 1-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель второго порядка, получим

$$(x-2)(+1) - y(-2) + z(+2) = 0, \quad \text{или} \quad x + 2y + 2z = 2.$$

Выписав коэффициенты при x, y, z и заключив их в круглые скобки, получим индексы Миллера

$$(1, 2, 2).$$

Эти значения индексов, как и следовало ожидать, совпадают со значениями, полученными первым способом.

ЗАДАЧИ

Элементарная ячейка. Параметры решетки

49.1. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку: 1) примитивной решетки кубической сингонии; 2) объемно-центрированной решетки ромбической сингонии; 3) гранецентрированной решетки кубической сингонии; 4) базоцентрированной решетки ромбической сингонии; 5) примитивной решетки гексагональной сингонии; 6) гексагональной структуры с плотной упаковкой.

49.2. Определить число элементарных ячеек кристалла объемом $V = 1\,м^3$: 1) хлористого цезия (решетка объемно-центрированная кубической сингонии); 2) меди (решетка гранецентрированная кубической сингонии); 3) кобальта, имеющего гексагональную структуру с плотной упаковкой.

49.3. Найти плотность ρ кристалла неона (при 20 К), если известно, что решетка гранецентрированная кубической сингонии. Постоянная a решетки при той же температуре равна 0,452 нм.

49.4. Найти плотность ρ кристалла стронция, если известно, что решетка гранецентрированная кубической сингонии, а расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,43 нм.

49.5. Определить относительную атомную массу A_r кристалла, если известно, что расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,304 нм. Решетка объемно-центрированная кубической сингонии. Плотность ρ кристалла равна $534\,кг/м^3$.

49.6. Найти постоянную a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла: 1) алюминия (решетка гранецентрированная кубической сингонии); 2) вольфрама (решетка объемно-центрированная кубической сингонии).

49.7. Используя метод упаковки шаров, найти отношение c/a параметров в гексагональной решетке с плотнейшей упаковкой. Указать причины отклонения этой величины в реальном кристалле от вычисленного.

49.8. Определить постоянные a и c решетки кристалла магния, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Плотность ρ кристаллического магния равна $1{,}74 \times \times 10^3\,кг/м^3$.

49.9. Вычислить постоянную a решетки кристалла бериллия, который представляет собой гексагональную структуру с плотной

упаковкой. Параметр a решетки равен 0,359 нм. Плотность ρ кристалла бериллия равна $1{,}82 \cdot 10^3$ кг/м^3.

49.10. Найти плотность ρ кристалла гелия (при температуре $T = 2$ К), который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Постоянная a решетки, определенная при той же температуре, равна 0,357 нм.

Индексы узлов, направлений и плоскостей

49.11. Определить индексы узлов, отмеченных на рис. 49.7 буквами A, B, C, D.

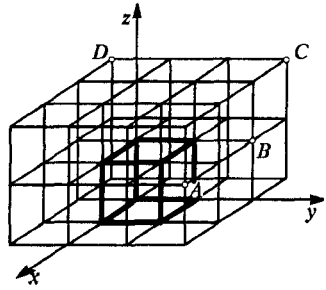


Рис 49.7

49.12. Написать индексы направления прямой, проходящей в кубической решетке через начало координат и узел с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) [[242]]; 2) [[112]].

49.13. Найти индексы направлений прямых AB, CD, KL, изображенных на рис. 49.8*а*, *б*, *в*.

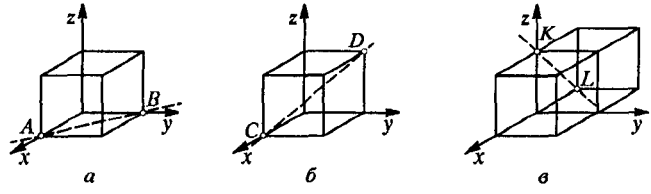


Рис. 49.8

49.14. Написать индексы направления прямой, проходящей через два узла с кристаллографическими индексами (в двух случаях): 1) [[123]] и [[321]]; 2) [[121]] и [[201]].

49.15. Вычислить период l идентичности вдоль прямой [111] в решетке кристалла NaCl, если плотность ρ кристалла равна $2{,}17 \cdot 10^3$ кг/м^3.

49.16. Вычислить угол φ между двумя направлениями в кубической решетке кристалла, которые заданы кристаллографическими индексами [110] и [111].

49.17. Написать индексы Миллера для плоскостей в примитивной кубической решетке, изображенных на рис. 49.9*а–е*.

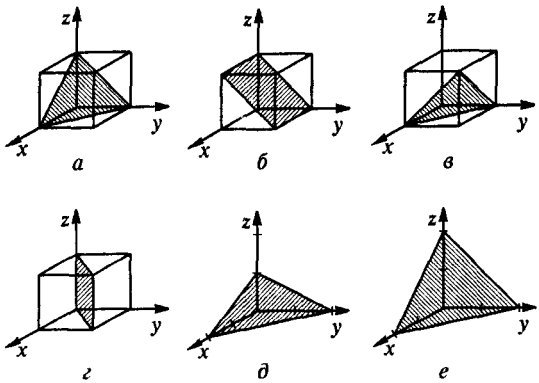


Рис. 49.9

49.18. Плоскость проходит через узлы $[[\bar{1}00]]$, $[[0\bar{1}0]]$, $[[00\bar{1}]]$ кубической решетки. Написать индексы Миллера для этой плоскости.

49.19. Система плоскостей в примитивной кубической решетке задана индексами Миллера (221). Найти наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, и изобразить эту плоскость графически.

49.20. Направление нормали к некоторой плоскости в кубической решетке задано индексами [110]. Написать индексы Миллера для этой плоскости и указать наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях.

49.21. Написать индексы Миллера для плоскостей, содержащих узлы с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) $[[111]]$, $[[1\bar{1}2]]$, $[[\bar{1}01]]$; 2) $[[1\bar{1}1]]$, $[[010]]$, $[[\bar{1}\bar{1}1]]$. Найти отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат.

49.22. Система плоскостей примитивной кубической решетки задана индексами (111). Определить расстояние d между соседними плоскостями, если параметр a решетки равен 0,3 нм.

49.23. Определить параметр a примитивной кубической решетки, если межплоскостное расстояние d для системы плоскостей, заданных индексами Миллера (212) при рентгеноструктурном измерении, оказалось равным 0,12 нм.

49.24. Три системы плоскостей в примитивной кубической решетке заданы индексами Миллера: а) (111); б) (110); в) (100). Указать, для какой системы межплоскостные расстояния d минимальны и для какой системы — максимальны. Определить отношения межплоскостных расстояний $d_{111} : d_{110} : d_{100}$.

49.25. Вычислить угол φ между нормалями к плоскостям (в кубической решетке), заданных индексами Миллера (111) и $(11\bar{1})$.

49.26. Две плоскости в кубической решетке заданы индексами Миллера (010) и (011). Определить угол φ между плоскостями.

49.27. В кубической решетке направление прямой задано индексами [011]. Определить угол φ между этой прямой и плоскостью $(1\bar{1}1)$.

49.28. Определить в кубической решетке угол φ между прямой [111] и плоскостью $(1\bar{1}1)$.

49.29. Плоскость в кубической решетке задана индексами Миллера (011), направление прямой — индексами [111]. Определить угол φ между прямой и плоскостью.

§ 50. Тепловые свойства

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

• Молярная внутренняя энергия химически простых (состоящих из одинаковых атомов) твердых тел в классической теории теплоемкости выражается формулой

$$U_{\text{м}} = 3RT,$$

где R — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура.

• Теплоемкость C системы (тела) при постоянном объеме определяется как производная от внутренней энергии U по температуре, т. е.

$$C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}.$$

• Закон Дюлонга и Пти. Молярная теплоемкость $C_{\text{м}}$ химически простых твердых тел

$$C_{\text{м}} = 3R.$$

• Закон Неймана–Коппа. Молярная теплоемкость химически сложных тел (состоящих из различных атомов)

$$C_{\text{м}} = n \cdot 3R,$$

где n — общее число частиц в химической формуле соединения.

• Среднее значение энергии $\langle\varepsilon\rangle$ квантового осциллятора, приходящейся на одну степень свободы, в квантовой теории Эйнштейна выражается формулой

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon_0 + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\hbar\omega/(kT)\right) - 1},$$

где ε_0 — нулевая энергия ($\varepsilon_0 = (1/2)\hbar\omega$); $\hbar$ — постоянная Планка; ω — циклическая частота колебаний осциллятора; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

• Молярная внутренняя энергия кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна определяется по формуле

$$U_{\text{м}} = U_{0,\,\text{м}} + 3R\frac{\Theta_{\text{E}}}{\exp\left(\Theta_{\text{E}}/T\right) - 1},$$

где $U_{0,\,\text{м}} = (3/2)R\Theta_{\text{E}}$ — молярная нулевая энергия по Эйнштейну; Θ_{E} — характеристическая температура Эйнштейна.

• Молярная теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна

$$C_{\text{м}} = 3R\left(\frac{\Theta_{\text{E}}}{T}\right)^2 \frac{\exp\left(\Theta_{\text{E}}/T\right)}{\left(\exp\left(\theta_{\text{E}}/T\right) - 1\right)^2}.$$

При низких температурах ($T \ll \Theta_{\text{E}}$)

$$C_{\text{м}} = 3R\left(\frac{\Theta_{\text{E}}}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Theta_{\text{E}}}{T}\right).$$

• Частотный спектр колебаний в квантовой теории теплоемкости Дебая задается функцией распределения частот $g(\omega)$. Число $\mathrm{d}Z$ собственных частот тела, приходящихся на интервал частот от ω до $\omega + \mathrm{d}\omega$, определяется выражением

$$\mathrm{d}Z = g(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Для трехмерного кристалла, содержащего N атомов,

$$\mathrm{d}Z = \frac{9N}{\omega_{\max}^3}\omega^2\,\mathrm{d}\omega,$$

где $\omega_{\max}$ — максимальная частота, ограничивающая спектр колебаний.

• Энергия U твердого тела связана со средней энергией $\langle\varepsilon\rangle$ квантового осциллятора и функцией распределения частот $g(\omega)$ соотношением

$$U = \int_0^{\omega_{\max}} \langle\varepsilon\rangle g(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

• *Молярная внутренняя энергия кристалла по Дебаю*

$$U_{\text{м}} = U_{0,\,\text{м}} + 3RT\cdot 3\left(\frac{T}{\Theta_{\text{D}}}\right)^3 \int_0^{\Theta_{\text{D}}/T} \frac{x^3}{\exp(x) - 1}\,\mathrm{d}x,$$

где $U_{0,\,\text{м}} = (9/8)R\Theta_{\text{D}}$ — *молярная нулевая энергия кристалла по Дебаю*; $\Theta_{\text{D}} = \hbar\omega_{\max}/k$ — характеристическая температура Дебая.

• Молярная теплоемкость кристалла по Дебаю

$$C_{\text{м}} = 3R\left(12\left(\frac{T}{\Theta_{\text{D}}}\right)^3 \int\limits_0^{\Theta_{\text{D}}/T} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\exp(x)-1} - \frac{3(\Theta_{\text{D}}/T)}{\exp(\Theta_{\text{D}}/T)-1}\right).$$

Предельный закон Дебая. В области низких температур[1]) ($T \ll \Theta_{\text{D}}$) последняя формула принимает вид

$$C_{\text{м}} = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\Theta_{\text{D}}}\right)^3.$$

• Энергия ε фонона[2]) связана с циклической частотой ω колебаний классической волны соотношением

$$\varepsilon = \hbar\omega.$$

• Квазиимпульс фонона

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

• Скорость фонона является групповой скоростью звуковых волн в кристалле

$$u = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}p}.$$

При малых значениях энергии фонона дисперсией волн можно пренебречь и тогда групповая и фазовая скорости совпадут:

$$u = v = \frac{\varepsilon}{p}.$$

Скорости продольных (v_l) и поперечных (v_t) волн в кристалле определяются по формулам

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где E и G — модули соответственно продольной и поперечной упругости.

Усредненное значение скорости звука v связано с v_l и v_t соотношением

$$\frac{3}{v^3} = \frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3}.$$

---

[1]) Считать при решении задач $T \ll \Theta_{\text{D}}$, если $T/\Theta_{\text{D}} < 0{,}1$.

[2]) Фонон — квазичастица, являющаяся квантом поля колебаний кристаллической решетки.

• *Закон Фурье.* Количество теплоты $\mathrm{d}Q$, перенесенное через поверхность площадью S, перпендикулярную направлению теплового потока, за время $\mathrm{d}t$, равно

$$\mathrm{d}Q = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S\,\mathrm{d}t,$$

где λ — теплопроводность; $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ — градиент температуры. Знак минус в формуле показывает, что направление теплового потока противоположно вектору градиента температуры.

• Теплопроводность λ, теплоемкость $\widetilde{C}$, рассчитанная на единицу объема, скорость v звука (усредненное значение) и средняя длина свободного пробега Λ фононов связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1}{3}\widetilde{C} v \Lambda.$$

• Относительное изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}\cos\theta \quad (v \ll c),$$

где v — скорость атома; c — скорость распространения электромагнитного излучения; θ — угол между вектором $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения (от атома к наблюдателю).

• Энергия отдачи ядра при испускании гамма-фотона

$$R = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{я}}c^2},$$

где $\hbar\omega$ — энергия гамма-фотона; $m_{\text{я}}$ — масса ядра.

• Естественная ширина спектральной линии

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau},$$

где τ — среднее время жизни ядра (атома) в возбужденном состоянии.

• Сила $f(x)$, возвращающая частицу в положение равновесия при ангармонических колебаниях, определяется выражением

$$f(x) = -\beta x + \gamma x^2,$$

где β — коэффициент гармоничности, связанный с равновесным расстоянием r_0 между атомами кристалла и модулем продольной упругости E соотношением

$$\beta = r_0 E;$$

γ — коэффициент ангармоничности, характеризующий асимметрию колебаний атомов в твердом теле. Для оценки по порядку величин можно принять

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{\beta}{r_0}.$$

• Коэффициент линейного расширения, по определению,

$$\alpha = \frac{1}{l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}T}.$$

Теоретически он выражается через коэффициенты β и γ формулой

$$\alpha = \frac{\gamma k}{\beta^2 r_0}, \quad \text{или приближенно} \quad \alpha = \frac{1}{2}\frac{k}{r_0^2\beta},$$

где k — постоянная Больцмана.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример. Определить количество теплоты ΔQ, необходимое для нагревания кристалла NaCl массой $m = 20\,\text{г}$ на $\Delta T = 2\,\text{К}$, в двух случаях, если нагревание происходит от температуры: 1) $T_1 = \Theta_\text{D}$; 2) $T_2 = 2\,\text{К}$. Характеристическую температуру Дебая Θ_D для NaCl принять равной 320 К.

Решение. Количество теплоты ΔQ, подводимое для нагревания тела от температуры τ_1 до τ_2, может быть вычислено по формуле

$$\Delta Q = \int_{\tau_1}^{\tau_2} C\,\mathrm{d}T, \tag{1}$$

где C — теплоемкость тела (системы).

Теплоемкость тела связана с молярной теплоемкостью $C_\text{м}$ соотношением $C = (m/M)C_\text{м}$, где m — масса тела; M — молярная масса. Подставив это выражение C в формулу (1), получим

$$\Delta Q = \frac{m}{M}\int_{\tau_1}^{\tau_2} C_\text{м}\,\mathrm{d}T. \tag{2}$$

В общем случае $C_\text{м}$ есть функция температуры, поэтому за знак интеграла ее выносить нельзя. Однако в первом случае изменением теплоемкости по сравнению с ее значением при температуре T_1 можно пренебречь и считать ее на всем интервале температур ΔT постоянной и равной $C_\text{м}(T_1)$. Ввиду этого формула (2) примет вид

$$\Delta Q = \frac{m}{M}C_\text{м}(T_1)\Delta T. \tag{3}$$

Молярная теплоемкость $C_\text{м}(T_1)$ в теории Дебая выражается формулой

$$C_\text{м}(T_1) = 3R\left(12\left(\frac{T_1}{\Theta_\text{D}}\right)^3\int_0^{\Theta_\text{D}/T_1}\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\exp(x)-1} - \frac{3(\Theta_\text{D}/T_1)}{\exp(\Theta_\text{D}/T_1)-1}\right).$$

В первом случае при $T_1 = \Theta_D$ интеграл $\int\limits_0^{\Theta_D/T_1} \frac{x^3\,dx}{\exp(x)-1} = \int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{\exp(x)-1} =$ $= 0{,}225$ (см. табл. 2) и, следовательно,

$$C_м = 2{,}87R.$$

Подставляя это значение $C_м$ в формулу (3), получим

$$\Delta Q = 2{,}87\frac{m}{M}R\Delta T. \tag{4}$$

Произведя вычисление по формуле (4), найдем

$$\Delta Q = 16{,}3 \text{ Дж}.$$

Во втором случае ($T \ll \Theta_D$) нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая, в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу абсолютной температуры. В этом случае теплоемкость сильно изменяется в пределах заданного интервала температур и ее нельзя выносить за знак интеграла в формуле (2).

Используя выражение предельного закона Дебая $C_м = \frac{12\pi^4}{5} \times$ $\times R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$, получим

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{m}{M}\frac{R}{\Theta_D^3}\int\limits_{T_2}^{T_2+\Delta T} T^3\,dT.$$

Выполним интегрирование:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{m}{M}\frac{R}{\Theta_D^3}\left(\frac{(T_2+\Delta T)^4}{4} - \frac{T_2^4}{4}\right). \tag{5}$$

С учетом того, что $T_2 + \Delta T = 2T_2$, выражение (5) примет вид

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5}\frac{m}{M}\frac{R}{\Theta_D^3}15T_2^4, \quad \text{или} \quad \Delta Q = 9\pi^4\frac{m}{M}R\frac{T_2^4}{\Theta_D^3}.$$

Подставив в последнюю формулу значения величин π, m, M, R, T и Θ_D и произведя вычисления, найдем

$$\Delta Q = 1{,}22 \text{ мДж}.$$

ЗАДАЧИ

Классическая теория теплоемкости

50.1. Вычислить удельные теплоемкости *c* кристаллов алюминия и меди по классической теории теплоемкости.

50.2. Пользуясь классической теорией, вычислить удельные теплоемкости c кристаллов NaCl и $CaCl_2$.

50.3. Вычислить по классической теории теплоемкости теплоемкость C кристалла бромида алюминия $AlBr_3$ объемом $V = 1\,м^3$. Плотность ρ кристалла бромида алюминия равна $3{,}01 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

50.4. Определить изменение ΔU внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от $t_1 = 0\,°C$ до $t_2 = 200\,°C$. Масса m кристалла равна 20 г. Теплоемкость C вычислить.

50.5. Вывести формулу для средней энергии $\langle\varepsilon\rangle$ классического линейного гармонического осциллятора при тепловом равновесии. Вычислить значение $\langle\varepsilon\rangle$ при $T = 300\,К$.

50.6. Определить энергию U и теплоемкость C системы, состоящей из $N = 10^{25}$ классических трехмерных независимых гармонических осцилляторов. Температура $T = 300\,К$.

Указание. Использовать результат решения задачи 50.5.

Теория теплоемкости Эйнштейна

50.7. Определить: 1) среднюю энергию $\langle\varepsilon\rangle$ линейного одномерного квантового осциллятора при температуре $T = \Theta_E$ ($\Theta_E = 200\,К$); 2) энергию U системы, состоящей из $N = 10^{25}$ квантовых трехмерных независимых осцилляторов, при температуре $T = \Theta_E$ ($\Theta_E = 300\,К$).

50.8. Найти частоту ν колебаний атомов серебра по теории теплоемкости Эйнштейна, если характеристическая температура Θ_E серебра равна 165 К.

50.9. Во сколько раз изменится средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle$ квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \Theta_E/2$ до $T_2 = \Theta_E$? Учесть нулевую энергию.

50.10. Определить отношение $\langle\varepsilon\rangle/\langle\varepsilon_T\rangle$ средней энергии квантового осциллятора к средней энергии теплового движения молекул идеального газа при температуре $T = \Theta_E$.

50.11. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение $\Delta U_м$ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2\,К$ от температуры $T = \Theta_E/2$.

50.12. Пользуясь теорией теплоемкости Эйнштейна, определить изменение $\Delta U_м$ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T_1 = 0{,}1\Theta_E$. Характеристическую температуру Θ_E Эйнштейна принять для данного кристалла равной 300 К.

50.13. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении теплоемкости C вместо значения, даваемого теорией Эйнштейна (при $T = \Theta_E$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти.

50.14. Вычислить по теории Эйнштейна молярную нулевую энергию $U_{0,\text{м}}$ кристалла цинка. Характеристическая температура Θ_E для цинка равна 230 К.

Теория теплоемкости Дебая

50.15. Рассматривая в дебаевском приближении твердое тело как систему из продольных и поперечных стоячих волн, установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристалла с трехмерной кристаллической решеткой. При выводе принять, что число собственных колебаний Z ограничено и равно $3N$ (N — число атомов в рассматриваемом объеме).

50.16. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = \dfrac{9N}{\omega_{\max}^3}\omega^2$ для трехмерной кристаллической решетки, вывести формулу для энергии кристалла, содержащего число N (равное постоянной Авогадро) атомов.

50.17. Используя формулу энергии трехмерного кристалла

$$U_\text{м} = 3RT \cdot 3\left(\frac{T}{\Theta_\text{D}}\right)^3 \int_0^{\Theta_\text{D}/T} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\exp(x)-1},$$

получить выражение для молярной теплоемкости.

50.18. Молярная теплоемкость трехмерного кристалла

$$C_\text{м} = 3R\left(12\left(\frac{T}{\Theta_\text{D}}\right)^3 \int_0^{\Theta_\text{D}/T} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\exp(x)-1} - \frac{3(\Theta_\text{D}/T)}{\exp(\Theta_\text{D}/T)-1}\right).$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости при низких температурах ($T \ll \Theta_\text{D}$).

50.19. Вычислить по теории Дебая молярную нулевую энергию $U_{0,\text{м}}$ кристалла меди. Характеристическая температура Θ_D меди равна 320 К.

50.20. Определить максимальную частоту $\omega_{\max}$ собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура Θ_D равна 180 К.

50.21. Вычислить максимальную частоту $\omega_{\max}$ Дебая, если известно, что молярная теплоемкость $C_\text{м}$ серебра при $T = 20$ К равна 1,7 Дж/(моль · К).

50.22. Найти отношение изменения ΔU внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0{,}1\Theta_\text{D}$ к нулевой энергии U_0. Считать $T \ll \Theta_\text{D}$.

50.23. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение $\Delta U_\text{м}$ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0{,}1\Theta_\text{D}$. Характеристическую температуру

Θ_D Дебая принять для данного кристалла равной 300 К. Считать $T \ll \Theta_D$.

50.24. Используя квантовую теорию теплоемкости Дебая, вычислить изменение $\Delta U_м$ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T = \Theta_D/2$.

50.25. При нагревании серебра массой $m = 10$ г от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К было подведено $\Delta Q = 0{,}71$ Дж теплоты. Определить характеристическую температуру Θ_D Дебая серебра. Считать $T \ll \Theta_D$.

50.26. Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении теплоемкости кристалла, если вместо значения, даваемого теорией Дебая (при $T = \Theta_D$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти.

50.27. Найти отношение Θ_E/Θ_D характеристических температур Эйнштейна и Дебая.

Указание. Использовать выражения для нулевых энергий, вычисленных по теориям Эйнштейна и Дебая.

50.28. Рассматривая в дебаевском приближении систему из продольных и поперечных стоячих волн, установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристалла с двухмерной решеткой (т. е. кристалла, состоящего из невзаимодействующих слоев). При выводе принять, что число собственных колебаний Z ограничено и равно $3N$ (N — число атомов в рассматриваемом объеме).

50.29. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = \dfrac{6N}{\omega_{max}^3}\omega$ для кристалла с двухмерной решеткой, вывести формулу для внутренней энергии U кристалла, содержащего N (равное постоянной Авогадро) атомов.

50.30. Получить выражение для молярной теплоемкости $C_м$, используя формулу для молярной внутренней энергии кристалла с двухмерной решеткой:

$$U_м = 3RT \cdot 2\left(\frac{T}{\Theta_D}\right) \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^2\,dx}{\exp(x) - 1}.$$

50.31. Молярная теплоемкость кристалла с двухмерной решеткой выражается формулой

$$C_м = 3R\left(6\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^2 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^2\,dx}{\exp(x) - 1} - \frac{2(\Theta_D/T)}{\exp(\Theta_D/T) - 1}\right)$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll \Theta_D$).

50.32. Вычислить молярную нулевую энергию $U_{0,\text{м}}$ кристаллов с двухмерной решеткой, если характеристическая температура Θ_D Дебая равна 350 К.

50.33. Рассматривая в дебаевском приближении систему из продольных и поперечных стоячих волн, установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристалла с одномерной решеткой (т. е. кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом). При выводе принять, что число собственных колебаний Z ограничено и равно $3N$ (N — число атомов в рассматриваемом объеме).

50.34. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = 3N/\omega_{\max}$ для кристалла с одномерной решеткой, вывести формулу для внутренней энергии кристалла, содержащего число N (равное постоянной Авогадро) атомов.

50.35. Получить выражение для молярной теплоемкости, используя формулу для молярной внутренней энергии кристалла с одномерной решеткой:

$$U_\text{м} = 3RT\frac{T}{\Theta_\text{D}}\int\limits_0^{\Theta_\text{D}/T}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\exp(x)-1}.$$

50.36. Молярная теплоемкость кристалла с одномерной решеткой выражается формулой

$$C_\text{м} = 3R\left(2\frac{T}{\Theta_\text{D}}\int\limits_0^{\Theta_\text{D}/T}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\exp(x)-1} - \frac{\Theta_\text{D}/T}{\exp(\Theta_\text{D}/T)-1}\right).$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll \Theta_\text{D}$).

50.37. Вычислить молярную нулевую энергию $U_{0,\text{м}}$ кристалла с одномерной решеткой, если характеристическая температура Θ_D Дебая равна 300 К.

Теплопроводность неметаллов. Фононы

50.38. Вода при температуре $T_1 = 0\,^\circ\text{C}$ покрыта слоем льда толщиной $h = 50$ см. Температура T воздуха равна $30\,^\circ\text{C}$. Определить количество теплоты Q, переданное водой за время $\tau = 1$ ч через поверхность льда площадью $S = 1\,\text{м}^2$. Теплопроводность λ льда равна 2,2 Вт/(м · К).

50.39. Какая мощность N требуется для того, чтобы поддерживать температуру $T_1 = 100\,^\circ\text{C}$ в термостате, площадь S поверхности которого равна $1{,}5\,\text{м}^2$, толщина h изолирующего слоя равна 2 см и внешняя температура $T = 20\,^\circ\text{C}$?

50.40. Найти энергию ε фонона, соответствующего максимальной частоте ω_{max} Дебая, если характеристическая температура Θ_D Дебая равна 250 К.

50.41. Определить квазиимпульс p фонона, соответствующего частоте $\omega = 0{,}1\omega_{max}$. Усредненная скорость v звука в кристалле равна 1380 м/с, характеристическая температура Θ_D Дебая равна 100 К. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь.

50.42. Длина волны λ фонона, соответствующего частоте $\omega = 0{,}01\omega_{max}$, равна 52 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Θ_D Дебая, если усредненная скорость v звука в кристалле равна 4,8 км/с.

50.43. Вычислить усредненную скорость v фононов (скорость звука) в серебре. Модули продольной E и поперечной G упругости, а также плотность ρ серебра считать известными.

50.44. Характеристическая температура Θ_D Дебая для вольфрама равна 310 К. Определить длину волны λ фононов, соответствующих частоте $\nu = 0{,}1\nu_{max}$. Усредненную скорость звука в вольфраме вычислить. Дисперсией волн в кристалле пренебречь.

50.45. Период d решетки одномерного кристалла (кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом) равен 0,3 нм. Определить максимальную энергию ε_{max} фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость v звука в кристалле равна 5 км/с.

50.46. Определить усредненную скорость v звука в кристалле, характеристическая температура Θ_D которого равна 300 К. Межатомное расстояние d в кристалле равно 0,25 нм.

50.47. Вычислить среднюю длину Λ свободного пробега фононов в кварце SiO_2 при некоторой температуре, если при той же температуре теплопроводность $\lambda = 13$ Вт/(м · К), молярная теплоемкость $C_м = 44$ Дж/(моль · К) и усредненная скорость v звука равна 5 км/с. Плотность ρ кварца равна $2{,}65 \cdot 10^3$ кг/м^3.

50.48. Найти отношение средней длины Λ свободного пробега фононов к параметру d решетки при комнатной температуре в кристалле NaCl, если теплопроводность λ при той же температуре равна 71 Вт/(м · К). Теплоемкость вычислить по закону Неймана–Коппа. Относительные атомные массы: $A_{Na} = 23$, $A_{Cl} = 35{,}5$; плотность ρ кристалла равна $2{,}17 \cdot 10^3$ кг/м^3. Усредненную скорость v звука принять равной 5 км/с.

50.49. Вычислить фононное давление p в свинце при температуре $T = 42{,}5$ К. Характеристическая температура Θ_D Дебая свинца равна 85 К.

50.50. Определить фононное давление p в меди при температуре $T = \Theta_D$, если $\Theta_D = 320$ К.

50.51. Исходя из законов сохранения энергии и импульса при испускании фотона движущимся атомом, получить формулу доплеровского смещения $\Delta\omega/\omega$ для нерелятивистского случая.

50.52. Вычислить энергию R, которую приобретает атом вследствие отдачи, в трех случаях: 1) при излучении в видимой части спектра ($\lambda = 500$ нм); 2) при рентгеновском излучении ($\lambda = 0{,}5$ нм); 3) при γ-излучении ($\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$ нм). Массу m_a атома во всех случаях считать одинаковой и равной 100 а.е.м.

50.53. Уширение спектральной линии излучения атома обусловлено эффектом Доплера и соотношением неопределенностей. Кроме того, вследствие отдачи атома происходит смещение спектральной линии. Оценить для атома водорода относительные изменения $(\Delta\lambda/\lambda)$ длины волны излучения, обусловленные каждой из трех причин. Среднюю скорость $\langle v\rangle$ теплового движения атома принять равной 3 км/с, время τ жизни атома в возбужденном состоянии — 10 нс, энергию ε излучения атома — 10 эВ.

50.54. При испускании γ-фотона свободным ядром происходит смещение и уширение спектральной линии. Уширение обусловлено эффектом Доплера и соотношением неопределенностей, а смещение — явлением отдачи. Оценить для ядра ^{57}Fe относительные изменения $(\Delta\nu/\nu)$ частоты излучения, обусловленные каждой из трех причин. При расчетах принять среднюю скорость $\langle v\rangle$ ядра (обусловленную тепловым движением) равной 300 м/с, время τ жизни ядра в возбужденном состоянии — 100 нс и энергию ε_γ γ-излучения равной 15 кэВ.

50.55. Найти энергию ΔE возбуждения свободного покоившегося ядра массы $m_я$, которую оно приобретает в результате захвата γ-фотона с энергией ε.

50.56. Свободное ядро ^{40}K испустило γ-фотон с энергией $\varepsilon_\gamma = 30$ кэВ. Определить относительное смещение $\Delta\lambda/\lambda$ спектральной линии, обусловленное отдачей ядра.

50.57. Ядро ^{67}Zn с энергией возбуждения $\Delta E = 93$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ-фотон. Найти относительное изменение $\Delta\varepsilon_\gamma/\varepsilon_\gamma$ энергии γ-фотона, возникающее вследствие отдачи свободного ядра.

50.58. Энергия связи $E_{св}$ атома, находящегося в узле кристаллической решетки, составляет 20 эВ. Масса m_a атома равна 80 а.е.м. Определить минимальную энергию ε_γ γ-фотона, при испускании которого атом вследствие отдачи может быть вырван из узла решетки.

50.59. Энергия возбуждения ΔE ядра ^{191}Ir равна 129 кэВ. При какой скорости v сближения источника и поглотителя (содержащих свободные ядра ^{191}Ir) можно вследствие эффекта Доплера

скомпенсировать сдвиг полос поглощения и испускания, обусловленных отдачей ядер?

50.60. Источник и поглотитель содержат свободные ядра ^{83}Kr. Энергия возбуждения ΔE ядер равна 9,3 кэВ. Определить скорость v сближения источника и поглотителя, при которой будет происходить резонансное поглощение γ-фотона.

50.61. Источник и поглотитель содержат ядра ^{161}Dy. Энергия возбуждения ΔE ядер равна 26 кэВ, период полураспада $T_{1/2} = 28$ нс. При какой минимальной скорости $v_{\min}$ сближения источника и поглотителя нарушается мёссбауэровское поглощение γ-фотона?

50.62. При скорости v сближения источника и поглотителя (содержащих свободные ядра ^{153}Er), равной 10 мм/с, нарушается мёссбауэровское поглощение γ-фотона с энергией $\varepsilon_\gamma = 98$ кэВ. Оценить по этим данным среднее время τ жизни возбужденных ядер ^{153}Er.

50.63. Источник γ-фотонов расположен над детектором-поглотителем на расстоянии $l = 20$ м. С какой скоростью v необходимо перемещать вверх источник, чтобы в месте расположения детектора было полностью скомпенсировано изменение энергии γ-фотонов, обусловленное их гравитационным взаимодействием с Землей?

Тепловое расширение твердых тел

50.64. Найти коэффициент объемного расширения β для анизотропного кристалла, коэффициенты линейного расширения которого по трем взаимно перпендикулярным направлениям составляют $\alpha_1 = 1{,}25\cdot10^{-5}\,\text{К}^{-1}$; $\alpha_2 = 1{,}10\cdot10^{-5}\,\text{К}^{-1}$; $\alpha_3 = 1{,}5\cdot10^{-5}\,\text{К}^{-1}$.

50.65. Вычислить максимальную силу $F_{\max}$, возвращающую атом твердого тела в положение равновесия, если коэффициент гармоничности $\beta = 50$ Н/м, а коэффициент ангармоничности $\gamma = 500$ ГПа.

50.66. Определить силу F (соответствующую максимальному смещению), возвращающую атом в положение равновесия, если амплитуда тепловых колебаний составляет 5% от среднего межатомного расстояния при данной температуре. При расчетах принять: коэффициент гармоничности $\beta = 50$ Н/м, коэффициент ангармоничности $\gamma = 500$ ГПа, среднее межатомное расстояние $r_0 = 0{,}4$ нм.

50.67. Каково максимальное изменение $\Delta\Pi_{\max}$ потенциальной энергии атомов в кристаллической решетке твердого тела при гармонических колебаниях, если амплитуда тепловых колебаний составляет 5% от среднего межатомного расстояния? Среднее расстояние r_0 между атомами принять равным 0,3 нм, модуль Юнга $E = 100$ ГПа.

50.68. Показать, что если смещение частиц в кристаллической решетке твердого тела подчиняется закону Гука $F(x) = -\beta x$, то тепловое расширение отсутствует.

50.69. Определить коэффициент гармоничности β в уравнении колебаний частиц твердого тела, если равновесное расстояние r_0 между частицами равно 0,3 нм, модуль Юнга $E = 200$ ГПа.

50.70. Оценить термический коэффициент расширения α твердого тела, считая, что коэффициент ангармоничности $\gamma \approx \beta/(2r_0)$. При оценке принять: модуль Юнга $E = 100$ ГПа, межатомное расстояние $r_0 = 0{,}3$ нм.

50.71. Вычислить коэффициент ангармоничности γ для железа, если температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}$, межатомное расстояние $r_0 = 0{,}25$ нм, модуль Юнга $E = 200$ ГПа.

50.72. Определить, на сколько процентов изменится межатомное расстояние в твердом теле (при нагревании его до $T = 400$ К) по сравнению с равновесным расстоянием $r_0 = 0{,}3$ нм, отвечающим минимуму потенциальной энергии. При расчетах принять $\gamma = \beta/(2r_0)$, модуль Юнга $E = 10$ ГПа.

50.73. Оценить термический коэффициент расширения α твердого тела, обусловленного фононным давлением (в области $T \ll \Theta_D$). При оценке принять: плотность ρ кристалла равной $10^4\ \text{кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 100$ ГПа, относительную атомную массу $A_r = 60$.

50.74*. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна и классическую теорию (закон Дюлонга и Пти), найти количество теплоты Q, необходимое для нагревания кристалла никеля массой $m = 20$ г при температуре $T_1 = 170$ К на $\Delta T = 2$ К. Характеристическая температура Эйнштейна $\Theta_E = 340$ К.

50.75*. Найти количество теплоты Q, необходимое для нагревания одного моля кристалла золота от температуры $T_1 = \Theta_E$ до температуры $T_2 = 2\Theta_E$. Расчеты выполнить, используя классическую теорию теплоемкости (закон Дюлонга и Пти) и квантовую теорию Эйнштейна. Характеристическая температура Эйнштейна $\Theta_E = 125$ К. Найти относительную погрешность, даваемую расчетами по классической теории в указанном температурном интервале.

50.76*. При не слишком низких температурах квантовая теория теплоемкости Эйнштейна достаточно хорошо согласуется с экспериментом. Определить, по Эйнштейну, изменение ΔU внутренней энергии кристалла германия массой $m = 30$ г при его нагревании от температуры $T_1 = (1/4)\Theta_E$ до $T_2 = (1/2)\Theta_E$, где $\Theta_E = 280$ К. Во сколько раз полученное значение ΔU меньше рассчитанного по классической теории (закон Дюлонга и Пти)?

50.77*. Кристалл хрома массой $m = 104$ г имеет при температурах $T_1 = 50$ К и $T_2 = 60$ К теплоемкости $C_1 = 1{,}94$ Дж/К

и $C_2 = 3{,}36$ Дж/К. Найти характеристическую температуру Дебая Θ_D и молярную теплоемкость C_M хрома при температуре $T = 30$ К.

50.78*. Определить изменение ΔU внутренней энергии кристалла никеля массой $m = 50$ г при его охлаждении от температуры $T_1 = 45$ К до $T_2 = 30$ К. Характеристическая температура Дебая $\Theta_D = 450$ К.

50.79*. Кристалл бериллия массой $m = 20$ г помещен в калориметр. Определить количество теплоты Q, подведенное к кристаллу, если его температура изменилась с $T_1 = 72$ К до $T_2 = 96$ К. Характеристическая температура Дебая $\Theta_D = 1440$ К.

50.80*. Кристалл бериллия массой $m = 40$ г находится в калориметре при температуре $T_1 = 140$ К. Определить конечную температуру T_2 кристалла, если при его охлаждении было отведено количество теплоты $Q = 124$ Дж. Характеристическая температура Дебая $\Theta_D = 1440$ К.

50.81*. Кристалл магния дважды нагревают на $\Delta T = 10$ К. Один раз нагревание происходит от температуры $T_1 = 30$ К, другой от температуры $T_2 = \Theta_D = 400$ К. Определить во сколько раз Q_2/Q_1 количество теплоты, подводимое к кристаллу во втором случае больше, чем в первом.

50.82*. Кристалл серебра массой $m = 10{,}8$ г находится в калориметре при температуре $T_1 = 15$ К. Через обмотку калориметра в течение времени $\tau = 25$ с пропускали ток $I = 4$ мА при напряжении $U = 6$ В. Определить конечную температуру T_2 кристалла. Тепловыми потерями пренебречь. Условие $T_2 \ll \Theta_D$ считать выполненным. Характеристическая температура Дебая $\Theta_D = 225$ К.

§ 51. Электрические и магнитные свойства твердых тел

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Электроны в металле (по квантовой статистике)

• Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле:

$$\text{при } T \neq 0 \quad dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{\exp\left[(\varepsilon - \varepsilon_F)/(kT)\right] + 1};$$

$$\text{при } T = 0 \quad dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon \quad (\text{при } \varepsilon < \varepsilon_F),$$

где $dn(\varepsilon)$ — концентрация электронов, энергия которых заключена в интервале значений от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$; m и ε — масса и энергия электрона; ε_F — уровень (или энергия) Ферми.

• Уровень Ферми в металле при $T = 0$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}.$$

• Температура $T_{кр}$ вырождения

$$T_{кр} = \frac{2\pi\hbar^2}{km} n^{2/3}.$$

Полупроводники

• Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = en(b_n + b_p),$$

где e — заряд электрона; n — концентрация носителей заряда (электронов и дырок); b_n и b_p — подвижности электронов и дырок.

Напряжение $U_н$ на гранях образца при эффекте Холла

$$U_н = R_н B j l,$$

где $R_н$ — постоянная Холла; B — индукция магнитного поля; l — ширина пластины; j — плотность тока.

• Постоянная Холла для полупроводников типа алмаза, кремния, германия и др., обладающих носителями заряда одного вида (n или p),

$$R_н = \frac{3\pi}{8}\frac{1}{en},$$

где n — концентрация носителей заряда.

Магнитный резонанс

• Магнитный момент ядра [3])

$$\mathcal{M}_I = g\mu_N\sqrt{I(I+1)},$$

где g — ядерный фактор Ланде (g-фактор); μ_N — ядерный магнетон ($\mu_N = e\hbar/(2m_p)$); m_p — масса протона; I — спиновое квантовое число ядра (спин ядра).

• Связь магнитного момента ядра с моментом импульса $\mathcal{L}_I$ ядра

$$\mathcal{M}_I = \gamma\mathcal{L}_I,$$

---

[3]) Магнитным моментом ядра называют также максимальное значение проекции магнитного момента ядра на направление вектора магнитной индукции внешнего поля, т.е. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{z_{max}} = g\mu_N I$.

где γ — гиромагнитное отношение ($\gamma = g\mu_N/\hbar$) и

$$\mathcal{L}_I = \hbar\sqrt{I(I+1)}.$$

• Проекция магнитного момента ядра на направление вектора магнитной индукции внешнего поля

$$\mathcal{M}_z = g\mu_N m_I,$$

где m_I — спиновое магнитное квантовое число ядра, $m_I = I, I-1, I-2, \ldots, -I$.

• Циклическая частота ω_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии,

$$\omega_0 = \gamma B_0,$$

где B_0 — магнитная индукция внешнего постоянного магнитного поля.

• Отношение заселенностей энергетических уровней (в отсутствие высокочастотного поля)

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right),$$

где N_1 — заселенность энергетического уровня E_1; N_2 — заселенность энергетического уровня E_2; $E_2 > E_1$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Кусок металла объемом $V = 20\,\text{см}^3$ находится при температуре $T = 0$. Определить число ΔN свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса $p_{\max}$ не более чем на $0{,}1p_{\max}$. Энергия Ферми $\varepsilon_F = 5$ эВ.

Решение. Для того чтобы установить распределение свободных электронов в металле по импульсам, воспользуемся распределением Ферми для свободных электронов при $T = 0$:

$$\mathrm{d}n(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{d}\varepsilon. \qquad (1)$$

Так как $\mathrm{d}n(\varepsilon)$ есть число электронов в единице объема, энергии которых заключены в интервале значений от ε до $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ ($\varepsilon < \varepsilon_F$), то оно должно быть равно числу электронов $\mathrm{d}n(p)$ в единице объема, заключенных в интервале значений импульса от p до $p + \mathrm{d}p$, т. е.

$$\mathrm{d}n(p) = \mathrm{d}n(\varepsilon). \qquad (2)$$

При этом должно соблюдаться следующее условие. Данной энергии ε соответствует определенный импульс p ($\varepsilon = p^2/(2m)$) и интервалу энергии $\mathrm{d}\varepsilon$ отвечает соответствующий ему интервал импульсов $\mathrm{d}p$ $\left(\mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{p}{m}\,\mathrm{d}p\right)$.

Заметив, что $\varepsilon^{1/2} = p/(2m)^{1/2}$, подставим в правую часть равенства (2) вместо $\mathrm{d}n(\varepsilon)$ выражение (1) с заменой ε на p и $\mathrm{d}\varepsilon$ на $\mathrm{d}p$ в соответствии с полученными соотношениями, т. е.

$$\mathrm{d}n(p) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{p}{(2m)^{1/2}} \cdot \frac{p}{m}\,\mathrm{d}p.$$

После сокращений получим искомое распределение свободных электронов в металле по импульсам при $T = 0$:

$$\mathrm{d}n(p) = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} p^2\,\mathrm{d}p.$$

Число электронов в единице объема, импульсы которых заключены в интервале от $p_{\max} - 0{,}1p_{\max}$ до $p_{\max}$, найдем интегрированием в соответствующих пределах:

$$\Delta n = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int\limits_{0{,}9p_{\max}}^{p_{\max}} p^2\,\mathrm{d}p = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} p_{\max}^3\left(1 - (0{,}9)^3\right), \text{ или } \Delta n = \frac{0{,}271}{3\pi^2}\frac{p_{\max}^3}{\hbar^2}.$$

Учитывая, что максимальный импульс $p_{\max}$ и максимальная энергия ε электронов в металле (при $T = 0$) связаны соотношением $p_{\max}^2 = 2m\varepsilon_{\mathrm{F}}$, найдем искомое число ΔN свободных электронов в металле:

$$\Delta N = \frac{0{,}271}{3\pi^2\hbar^3}(2m\varepsilon_{\mathrm{F}})^{3/2}V, \quad \text{или} \quad \Delta N = \frac{0{,}271}{3\pi^2}\left(\frac{3m\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\hbar^2}\right)^{3/2} V.$$

Подставив значения величин π, m, ε_{F}, $\hbar$ и V и произведя вычисления ($5\,\text{эВ} = 8 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж}$), получим

$$\Delta N = 2{,}9 \cdot 10^{23} \text{ электронов.}$$

Пример 2. Образец из германия n-типа в виде пластины длиной $L = 10\,\text{см}$ и шириной $l = 6\,\text{мм}$ помещен в однородное магнитное поле ($B = 0{,}1\,\text{Тл}$) перпендикулярно линиям магнитной индукции. При напряжении $U = 250\,\text{В}$, приложенном к концам пластины, возникает холловская разность потенциалов $U_{\text{н}} = 8{,}8\,\text{мВ}$. Определить: 1) постоянную Холла $R_{\text{н}}$; 2) концентрацию n_n носителей тока. Удельную проводимость γ германия принять равной $80\,\text{См/м}$.

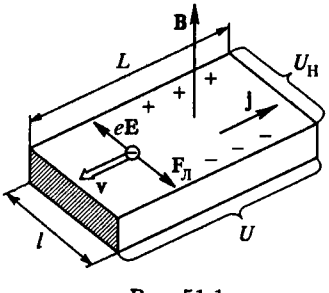


Рис. 51.1

Решение. 1. При помещении полупроводника в магнитное поле (рис. 51.1) носители тока (в полупроводнике n-типа

это электроны), перемещающиеся под действием приложенной к нему разности потенциалов U, будут отклоняться в поперечном направлении. Это отклонение, вызванное силой Лоренца, приведет к «накоплению» заряда на боковых поверхностях образца, причем создаваемое в результате этого напряжение $U_{\text{н}}$ (холловская разность потенциалов) действием своим будет уравновешивать силу Лоренца. Холловская разность потенциалов определяется соотношением

$$U_{\text{н}} = R_{\text{н}} B j l,$$

откуда постоянная Холла

$$R_{\text{н}} = \frac{U_{\text{н}}}{Bjl}. \tag{3}$$

Плотность тока j найдем, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме:

$$j = \gamma E,$$

где E — напряженность поля в образце.

Считая поле в образце однородным, можно написать $E = U/L$ и тогда

$$j = \gamma \frac{U}{L}.$$

Подставив плотность тока в выражение (3), получим

$$R_{\text{н}} = \frac{U_{\text{н}} L}{BU\gamma l}. \tag{4}$$

Убедимся в том, что правая часть равенства (4) дает единицу постоянной Холла ($\text{м}^3/\text{Кл}$):

$$\frac{[U_{\text{н}}][L]}{[B][U][\gamma][l]} = \frac{1\ \text{В} \cdot 1\ \text{м}}{1\ \text{Тл} \cdot 1\ \text{В} \cdot 1\ \text{См/м} \cdot 1\ \text{м}} = \frac{1\ \text{м}}{1\ \text{Тл} \cdot 1\ \text{См}} =$$

$$= \frac{1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м} \cdot 1\ \text{м} \cdot 1\ \text{В}}{1\ \text{Н} \cdot 1\ \text{А}} = \frac{1\ \text{Дж} \cdot 1\ \text{м}^2}{1\ \text{Н} \cdot 1\ \text{Кл}} = 1\ \text{м}^3/\text{Кл}.$$

Выразим все величины в единицах СИ ($U = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ В, $L = 0{,}1$ м, $B = 0{,}1$ Тл, $U = 250$ В, $\gamma = 80$ См/м, $l = 6 \cdot 10^{-3}$ м) и произведем вычисления:

$$R_{\text{н}} = 7{,}33 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{Кл}.$$

2. Концентрацию n носителей тока в полупроводнике одного типа (в нашем случае n-типа) можно найти из соотношения

$$R_{\text{н}} = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en},$$

где e — элементарный заряд. Отсюда

$$n = \frac{3\pi}{8 R_{\text{н}} e}.$$

Произведя вычисления, получим

$$n = 10^{23}\ \text{электронов/м}^3.$$

Пример 3. Образец из вещества, содержащего эквивалентные ядра (протоны), находится в однородном внешнем магнитном поле ($B = 1$ Тл). Определить: 1) относительную разность заселенностей энергетических уровней при температуре $T = 300$ К; 2) частоту ν_0, при которой будет происходить ядерный магнитный резонанс. Экранирующим действием электронных оболочек и соседних ядер пренебречь.

Решение. 1. В магнитном поле ядра приобретают дополнительную энергию, определяемую соотношением

$$E = -\mathcal{M}_z B, \tag{5}$$

где $\mathcal{M}_z$ — проекция магнитного момента ядра на направление вектора $\mathbf{B}$ (ось Oz). Проекция магнитного момента ядра выражается формулой

$$\mathcal{M}_z = g\mu_N m_I,$$

где g — ядерный фактор Ланде; μ_N — ядерный магнетон; m_I — спиновое магнитное квантовое число ядра.

Подставив это выражение в формулу (5), получим

$$E = -g\mu_N B m_I.$$

Спиновое магнитное квантовое число m_I протона может принимать только два значения: $m_I = +1/2$ и $m_I = -1/2$. Значение $m_I = +1/2$ соответствует нижнему энергетическому уровню:

$$E_1 = -\frac{1}{2} g\mu_N B. \tag{6}$$

Значение $m_I = -1/2$ соответствует верхнему энергетическому уровню (рис. 51.2):

$$E_2 = +\frac{1}{2} g\mu_N B. \tag{7}$$

В отсутствие магнитного поля число ядер с противоположно направленными спинами одинаково и равно $N/2$ (N — общее число ядер).

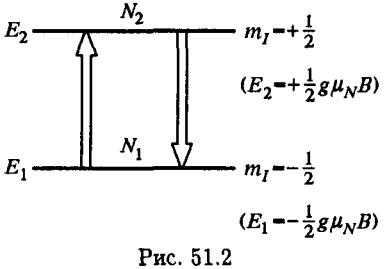


Рис. 51.2

В магнитном поле происходит перераспределение ядер по энергетическим уровням. На нижнем уровне с энергией E_1 будет находиться больше

ядер, чем на верхнем с энергией E_2. Число ядер N_1 (заселенность данного уровня), находящихся на нижнем энергетическом уровне E_1, может быть вычислено по формуле Больцмана:

$$N_1 = \frac{N}{2}\exp\left(-\frac{E_1}{kT}\right), \quad \text{или} \quad N_1 = \frac{N}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{g\mu_N B}{kT}\right).$$

Соответственно можно найти и число ядер N_2, находящихся на верхнем энергетическом уровне:

$$N_2 = \frac{N}{2}\exp\left(-\frac{E_2}{kT}\right), \quad \text{или} \quad N_2 = \frac{N}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{g\mu_N B}{kT}\right).$$

Так как $(1/2)g\mu_N B \ll kT$ (это будет показано ниже), то можно воспользоваться приближенными равенствами $\exp(-x) \approx 1-x$ и $\exp(x) \approx 1+x$, если $x \ll 1$ (см. п. 3 раздела II приложений). Тогда

$$N_1 \approx \frac{N}{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{g\mu_N B}{kT}\right) \quad \text{и} \quad N_2 \approx \frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{g\mu_N B}{kT}\right).$$

Разность ΔN заселенности энергетических уровней найдем, вычитая из первого приближенного равенства второе:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{1}{2}\frac{Ng\mu_N B}{kT}.$$

Разделив ΔN на N, получим относительную разность заселенностей энергетических уровней:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2}\frac{g\mu_N B}{kT}. \tag{8}$$

Выразим все величины в единицах СИ: $g = 5{,}58$ (для протона), $\mu_N = 5{,}05 \cdot 10^{-27}\ \text{А}\cdot\text{м}^2$, $B = 1\ \text{Тл}$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}$, $T = 300\ \text{К}$.

Подставим эти значения в формулу (8) и произведем вычисления:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{5{,}58 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot 1\ \text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Тл}}{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300\ (\text{Дж/К})\cdot\text{К}} = 3{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

Полученный результат оправдывает наше допущение, что $g\mu_N B/2 \ll kT$.

2. Под действием электромагнитного излучения, циклическая частота которого

$$\omega_0 = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \tag{9}$$

будут происходить переходы между уровнями энергии E_1 и E_2, причем электромагнитное излучение вызывает переходы $E_1 \to E_2$ и $E_2 \to E_1$ с равной вероятностью при условии одинаковой заселенности энергетических уровней. Так как нижний уровень имеет большую заселенность,

чем верхний, то переходы с поглощением электромагнитного излучения ($E_1 \to E_2$) будут происходить чаще, чем с излучением ($E_2 \to E_1$). Это и есть резонансное поглощение электромагнитного излучения, обусловленное ядерным магнетизмом (ЯМР).

Подставив в (9) выражение для энергий E_1 и E_2 согласно (6) и (7) и заменив циклическую частоту ω_0 на частоту ν_0 ($\omega_0 = 2\pi\nu_0$), найдем резонансную частоту ν_0 для внешнего магнитного поля B [4]):

$$\nu_0 = \frac{g\mu_N B}{2\pi\hbar}.$$

Подставим в это выражение числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$\nu_0 = \frac{5{,}58 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-27} \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}} \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Тл}}{\text{Дж} \cdot \text{с}} = 4{,}27 \cdot 10^7 \text{ Гц},$$

или

$$\nu_0 = 42{,}7 \text{ МГц}.$$

ЗАДАЧИ

Электроны в металле. Распределение Ферми–Дирака

51.1. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К. Энергию Ферми ε принять равной 1 эВ.

51.2. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов при $T = 0$ в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $\varepsilon_{F,1} = 4{,}72$ эВ, $\varepsilon_{F,2} = 1{,}53$ эВ.

51.3. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T = 0$ К. Уровень Ферми ε_F для натрия равен 3,12 эВ. Плотность ρ натрия равна 970 кг/м^3.

51.4. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0$, больше в алюминии, чем в меди, если уровни Ферми соответственно равны $\varepsilon_{F,1} = 11{,}7$ эВ, $\varepsilon_{F,2} = 7{,}0$ эВ?

51.5. Определить вблизи уровня Ферми интервал энергий $\Delta\varepsilon$ (в эВ) между соседними энергетическими уровнями электронов в

---

[4]) В реальных образцах магнитное поле B, действующее на ядро, отличается от внешнего постоянного поля B_0 на величину B_1 поля, создаваемого в месте нахождения ядра электронами и ядрами всех молекул образца, в том числе и той, к которой принадлежит данное ядро. В условиях данной задачи полем B_1 мы пренебрегаем.

кристаллике цезия объемом $V = 1\,\text{мм}^3$ при температуре $T = 0\,\text{К}$. При расчетах принять, что на каждый атом цезия приходится один свободный электрон.

51.6. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ электронов в металле при температуре $T = 0\,\text{К}$, если уровень Ферми $\varepsilon_\text{F} = 7\,\text{эВ}$.

51.7. Металл находится при температуре $T = 0\,\text{К}$. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $\varepsilon_\text{F}/2$ до ε_F больше числа электронов с энергией от 0 до $\varepsilon_\text{F}/2$.

51.8. Электроны в металле находятся при температуре $T = 0\,\text{К}$. Найти относительное число $\Delta N/N$ свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2%.

51.9. Оценить температуру $T_\text{кр}$ вырождения для калия, если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность ρ калия $860\,\text{кг/м}^3$.

51.10. Определить отношение концентрации n_max электронов в металле (при $T = 0\,\text{К}$), энергия которых отличается от максимальной не более чем на $\Delta\varepsilon$, к концентрации n_min электронов, энергии которых не превышают значения $\varepsilon = \Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon$ принять равным $0{,}01\varepsilon_\text{F}$.

51.11. Зная распределение $\text{d}n(\varepsilon)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $\text{d}n(p)$ электронов по импульсам. Найти частный случай распределения при $T = 0\,\text{К}$.

51.12. По функции распределения $\text{d}n(p)$ электронов в металле по импульсам установить распределение $\text{d}n(v)$ по скоростям: 1) при любой температуре T; 2) при $T = 0\,\text{К}$.

51.13. Определить максимальную скорость v_max электронов в металле при $T = 0\,\text{К}$, если уровень Ферми $\varepsilon_\text{F} = 5\,\text{эВ}$.

51.14. Выразить среднюю скорость $\langle v\rangle$ электронов в металле при $T = 0\,\text{К}$ через максимальную скорость v_max. Вычислить $\langle v\rangle$ для металла, уровень Ферми ε_F которого при $T = 0\,\text{К}$ равен 6 эВ.

51.15. Металл находится при температуре $T = 0\,\text{К}$. Определить, во сколько раз число электронов со скоростями от $v_\text{max}/2$ до v_max больше числа электронов со скоростями от 0 до $v_\text{max}/2$.

51.16. Выразить среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ электронов в металле при $T = 0\,\text{К}$ через максимальную скорость v_max электронов. Функцию распределения электронов по скоростям считать известной.

51.17. Зная распределение $\text{d}n(v)$ электронов в металле по скоростям, выразить $\langle 1/v\rangle$ через максимальную скорость v_max электронов в металле. Металл находится при $T = 0\,\text{К}$.

Полупроводники. Эффект Холла

51.18. Определить уровень Ферми ε_F в собственном полупроводнике, если энергия ΔE_0 активации равна 0,1 эВ. За нулевой уровень отсчета кинетической энергии электронов принять низший уровень зоны проводимости.

51.19. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0{,}48$ Ом · м. Определить концентрацию n носителей заряда, если подвижности b_n и b_p электронов и дырок соответственно равны 0,36 и 0,16 $м^2/(В \cdot с)$.

51.20. Удельная проводимость γ кремния с примесями равна 112 См/м. Определить подвижность b_p дырок и их концентрацию n_p, если постоянная Холла $R_н = 3{,}66 \cdot 10^{-4}$ $м^3$/Кл. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

51.21. В германии часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая дополнительный электрон примесного атома по модели Бора, оценить его энергию E связи и радиус r орбиты. Диэлектрическая проницаемость ε германия равна 16.

51.22. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной $l =$ $= 1$ см и длиной $L = 10$ см помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению L) приложено постоянное напряжение $U = 300$ В. Определить холловскую разность потенциалов $U_н$ на гранях пластины, если постоянная Холла $R_н = 0{,}1$ $м^3$/Кл, удельное сопротивление $\rho = 0{,}5$ Ом · м.

51.23. Тонкая пластина из кремния шириной $l = 2$ см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0{,}5$ Тл). При плотности тока $j = 2 \cdot 10^{-6}$ $А/мм^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов $U_н$ оказалась равной 2,8 В. Определить концентрацию n носителей заряда.

Магнитный резонанс

51.24. Определить гиромагнитное отношение γ для свободного электрона.

51.25. Свободный электрон находится в постоянном магнитном поле ($B_0 = 1$ Тл). Определить частоту ν_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии электроном (g-фактор для свободного электрона равен 2).

51.26. Определить отношение $\omega_{эпр}/\omega_{цик}$ резонансной частоты электронного парамагнитного резонанса к циклотронной частоте (g-фактор равен 2,00232).

51.27. Стандартные спектрометры для наблюдения электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) имеют на одном из диа-

пазонов фиксированную частоту $\nu_0 = 9{,}9\,\text{ГГц}$. Определить магнитную индукцию поля B_0, при которой происходит резонансное поглощение энергии радиочастотного поля свободным электроном (g-фактор равен 2).

51.28. Определить гиромагнитное отношение γ для свободного протона.

51.29. Свободный протон находится в постоянном магнитном поле ($B_0 = 1\,\text{Тл}$). Определить частоту ν_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии протоном (g-фактор равен 5,58).

51.30. В опытах по изучению магнитным резонансным методом магнитных свойств атомов ^{25}Mg в основном состоянии обнаружено резонансное поглощение энергии при магнитной индукции B_0 поля, равной 0,54 Тл, и частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 1,4 МГц. Определить ядерный g-фактор.

51.31. Методом магнитного резонанса определяют магнитный момент нейтрона. Резонансное поглощение наблюдается при магнитной индукции B_0 поля, равной 0,682 Тл, и частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 19,9 МГц. Вычислить ядерный g-фактор и магнитный момент $\mathcal{M}_n$ нейтрона. Известно, что направления спинового механического и магнитного моментов противоположны. Спин нейтрона $I = 1/2$.

51.32. Для молекулы HD, находящейся в основном состоянии, ядерный магнитный резонанс наблюдался: 1) для протонов ($I = 1/2$) в постоянном магнитном поле ($B_0 = 94\,\text{мТл}$) при частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 4 МГц; 2) для дейтонов ($I = 1$) соответственно при $B_0 = 0{,}37\,\text{Тл}$ и $\nu_0 = 2{,}42\,\text{МГц}$. Определить по этим данным g-факторы и магнитные моменты $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_d$ протона и дейтона (в единицах μ_N).

51.33. При какой частоте ν_0 переменного магнитного поля будет наблюдаться ЯМР ядер ^{19}F ($I = 1/2$; $\mathcal{M} = 2{,}63\mu_N$), если магнитная индукция B_0 постоянного поля равна 2,35 Тл?

51.34. Ядра Li ($I = 3/2$ и $g = 2{,}18$) находятся в однородном магнитном поле ($B_0 = 2\,\text{Тл}$). Температура T окружающей среды равна 80 К. Найти отношение заселенностей каждого из возможных энергетических уровней к заселенности уровня с наименьшей энергией.

51.35*. Свойства щелочных металлов хорошо описываются моделью свободных электронов (вырожденный ферми-газ). Определить для цезия: 1) энергию Ферми ε_F; 2) импульс Ферми p_F; 3) скорость Ферми v_F; 4) температуру Ферми T_F.

51.36*. Определить для лития давление p электронного газа при температуре $T = 0\,\text{К}$. При расчетах принять, что на один атом лития приходится один свободный электрон. Для лития: плотность $\rho = 534\,\text{кг/м}^3$, относительная атомная масса $A_r = 6{,}94$.

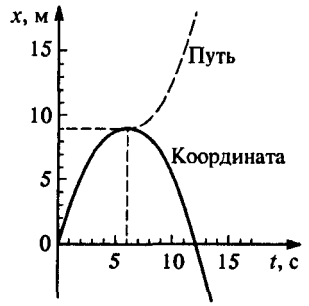
Для электронного газа считать справедливым основное уравнение классической теории для идеального газа — $p = (2/3)n\langle\varepsilon\rangle$.

51.37*. Используя модель свободных электронов (вырожденный ферми-газ), определить для меди отношение средней потенциальной энергии взаимодействия двух соседних свободных электронов к энергии Ферми $\langle\Pi\rangle/\varepsilon_F$. При расчетах принять, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

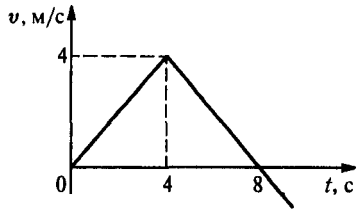
51.38*. Используя модель свободных электронов (вырожденный ферми-газ), определить для золота максимальный диаметр d_{max} винтовой линии, по которой движется электрон в однородном магнитном поле ($B = 0{,}01$ Тл). При расчетах принять, что на один атом золота приходится один свободный электрон.

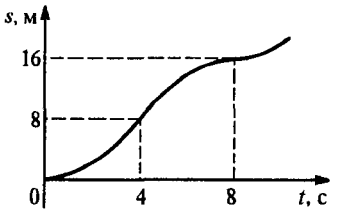
ОТВЕТЫ

§ 1. **1.1.** $v' = 122$ км/ч; $v'' = 72{,}2$ км/ч. **1.2.** 8,87 м/с. **1.3.** 64 км/ч. **1.4.** $\langle v \rangle = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) = 3{,}2$ м/с. **1.5.** $\langle v \rangle = s/(t_1 + t_2) = 2$ м/с.

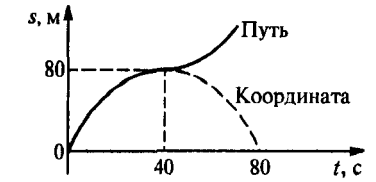


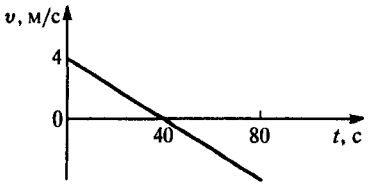
К ответу 1.8

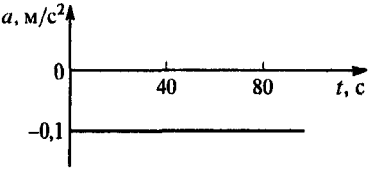




К ответу 1.9



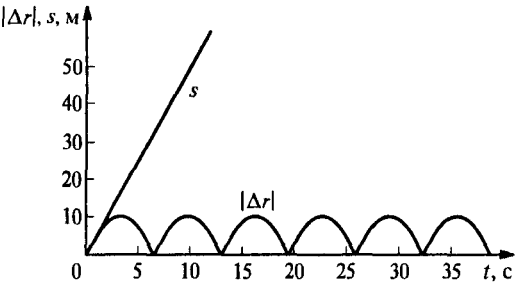




К ответу 1.10

1.6. 3,93 м/с. **1.7.** 2 м/с. **1.8.** Графики изображены на рисунке. **1.9.** Графики изображены на рисунке. **1.10.** 40 с; 80 м; $-0{,}1$ м/с^2; графики изображены на рисунке. **1.11.** а) $x = x_0 + v_0t + at^2/2$; б) $x = -x_0 - v_0t + at^2/2$; в) $x = x_0 - v_0t - at^2/2$; г) $x = -x_0 + v_0t - at^2/2$. **1.12.** 1) $x = l\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$; 2) $v = 2\pi l \Big/ \left(T\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)\right) = 48$ м/с. **1.13.** 30 с; 3 м/с;

45 м. **1.14.** Встретятся дважды: через 3,4 с на расстоянии 15 м и через 10,6 с на расстоянии 123 м. **1.15.** 0; $v_1 = 2$ м/с; $v_2 = 2$ м/с; $a_1 = -8$ м/с^2; $a_2 = 1$ м/с^2. **1.16.** 0,235 с; $v_1 = 5{,}1$ м/с; $v_2 = 0{,}286$ м/с. **1.17.** $H = (2s + gt^2)^2/(8gt^2) = 5{,}61$ м, где $s = 1$ м. **1.18.** 150 м. **1.19.** 1 с, 10 м/с (при движении вверх); 3 с, -10 м/с (при падении). **1.20.** 19,2 м. **1.21.** 19,6 м/с. **1.22.** 9,62 м; 14,6 м/с. **1.23.** $x = h + v_0 t - gt^2/2$; 7,77 м/с. **1.24.** 0,5 м/с. **1.25.** 3 м/с. **1.26.** 1) $\mathbf{v} = \mathbf{i}3At^2 + \mathbf{j}2Bt$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{i}6At + \mathbf{j}2B$. **1.27.** 2,5 м/с; 12,5 м/с^2. **1.28.** 1) 14,1 м/с; 2) -10 м/с^2; 3) 7,07 м/с^2; 4) 7,07 м/с^2. **1.29.** 1,42 м/с^2. **1.30.** 1) 8 м; 2) 6,73 м; 3) 4 м/с; 4) 3,36 м/с. **1.31.** Графики см. на рисунке. **1.32.** $\langle v \rangle = \pi R/t = 0{,}837$ м/с; $|\langle \mathbf{v} \rangle| =$



К ответу 1.31

$= 2R/t = 0{,}267$ м/с. **1.33.** 2 м/с^2; 1 м/с^2; 2,24 м/с^2. **1.34.** 7 м/с; 8,5 м/с^2. **1.35.** 0,872 с; 14,8 м/с^2. **1.36.** $y^3 - 8x = 0$; 2,77 м/с; 4,8 м/с^2. **1.37.** $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v}{R}t\right) = \cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{\pi}{2}\right)$. **1.38.** 1) $y = Rt\cos(vt/R)$, $x = Rt\sin(vt/R)$; 2) $r = R$, $\varphi = (\pi/2) - (v/R)t$. **1.39.** Случай а: 1) $x = v_0 t$, $y = -h - \frac{gt^2}{2}$; 2) $y = -h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$; случай б: 1) $x = v_0 t\cos\alpha$, $y = -h + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$; 2) $y = -h + x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; случай в: 1) $x = s + v_0 t$, $y = h - \frac{gt^2}{2}$; 2) $y = h - \frac{g(x-s)^2}{2v_0^2}$; случай г: 1) $x = s + v_0 t\cos\alpha$, $y = h - v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$; 2) $y = h - (x-s)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(x-s)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. **1.40.** 20 м/с; 28 м/с. **1.41.** $h = v^2/(2g) = 20{,}4$ м. **1.42.** $v = l\sqrt{g/(2h)} = 210$ м/с. **1.43.** 24,5 с; 2,45 км. **1.44.** 45°. **1.45.** 1) $y = h + v_0 t\sin\alpha - gt^2/2$, $x = v_0 t\cos\alpha$; $y = h + x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; 2) 9,67 с, 136 м, 242 м, 57,3 м/с. **1.46.** $v_0 =$

$= \dfrac{g(t_1+t_2)}{2\sin\alpha} = 588$ м/с; $h = gt_1t_2 = 2{,}45$ км. **1.47.** $H = v_0^2\sin^2\alpha/(2g) =$ $= 1{,}53$ км; $s = (2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha)/g = 3{,}53$ км; $R = (v_0^2\cos^2\alpha)/g = 1{,}02$ км. **1.48.** 3,58 м/с; 5,37 м/с^2; 8,22 м/с^2. **1.49.** 4,9 м/с^2; 8,49 м/с^2. **1.50.** $v =$ $= (2\pi/T)R\cos\varphi$, $a_ц = (4\pi^2/T^2)R\cos\varphi$ (T — период вращения Земли); 1) 463 м/с, 3,37 см/с^2; 2) 259 м/с, 1,88 см/с^2. **1.51.** $n = (v_1 - v_2)/(2\pi\Delta R) =$ $= 1{,}59\,\text{с}^{-1}$, где $\Delta R = 10$ см. **1.52.** 113 м/с; 35 мкм. **1.53.** $\varepsilon = 2h/(rt^2) =$ $= 8{,}33$ рад/с^2. **1.54.** 5 см/с^2; 10 см/с^2; 11 см/с^2. **1.55.** 1,2 м/с^2; 168 м/с^2; $\approx$ 168 м/с^2. **1.56.** $\varepsilon = 2\pi n/(\Delta t) = 3{,}14$ рад/с^2; $N = (1/2)n\Delta t =$ 25. **1.57.** $-0{,}523$ рад/с^2; 150. **1.58.** $\varepsilon = \pi(n_2^2 - n_1^2)/N = 1{,}26$ рад/с^2. **1.59.** $N = \pi(n_2^2 - n_1^2)/\varepsilon = 21{,}6$; $\Delta t = 2\pi(n_2 - n_1)/\varepsilon = 7{,}85$ с. **1.60.** $u =$ $= \sqrt{4\pi^2n^2R^2 + v^2} = 40{,}6$ м/с. **1.61.** $v = \pi\,\mathrm{d}l/(h\Delta t) = 0{,}754$ м/с.

§ 2.

2.1. 2,5 м/с^2. **2.2.** $a = m_2g/(m_1 + m_2) = 1{,}96$ м/с^2. **2.3.** $F =$ $= \dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g = 39{,}2$ Н. **2.4.** 2 м/с^2; 8 Н; 2 Н. **2.5.** $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m} =$ $= 1{,}40$ м/с^2; $T_1 = m_1(g+a) = 11{,}2$ Н; $T_2 = m_2(g-a) = 16{,}8$ Н. **2.6.** $\mu =$ $= \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{2l}{gt^2\cos\alpha} = 0{,}35$. **2.7.** $F_1 = -0{,}8$ Н; $F_2 = -8$ Н; $F = 0$ при $t =$ $= 1{,}67$ с. **2.8.** $\langle F\rangle = (m/\tau)\sqrt{2gh} = 626$ кН. **2.9.** 0,051. **2.10.** 1,33 кг · м/с. **2.11.** 100 Н · с; 100 кг · м/с. **2.12.** 1,4 Н · с. **2.13.** $p_1 = 2mv_0\sin\alpha =$ $= 3$ Н · с. **2.14.** 1,25 Н · с; $-1{,}25$ Н · с. **2.15.** $Q_m = m(g+a)/v = 24{,}5$ кг/с. **2.16.** $R = -Q_mv = -160$ Н; $a = -Q_mv/m = -4{,}57$ см/с^2. **2.17.** $v =$ $= \dfrac{1}{d}\sqrt{(4mg)/\pi\rho} = 10{,}2$ м/с, где ρ — плотность воздуха. **2.18.** $F_{\max} =$ $= \mu(m_1 + m_2)g = 17{,}7$ Н. **2.19.** $F_1 = \mu_1(m_1 + m_2)g = 19{,}6$ Н; $F_2 =$ $= (\mu_2 - \mu_1)(m_2/m_1)(m_1 + m_2)g = 39{,}2$ Н. **2.20.** $a = \dfrac{F}{M+m} - g =$ $= 73{,}5$ м/с^2; $T = \dfrac{3}{4}\dfrac{m}{M+m}F = 625$ Н. **2.21.** $a = \dfrac{g\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = 36{,}6$ м/с^2. **2.22.** 2,27. **2.23.** $\approx 4°$. **2.24.** 20,4 см. **2.25.** $F = \sqrt{2}\rho\dfrac{Q_v^2}{S} = 3{,}54$ кН (ρ — плотность воды). **2.26.** $F = 2\rho Sv^2\sin\varphi = 346$ Н (ρ — плотность воды). **2.27.** $t = mv_{\max}^2/N = 25$ с. **2.28.** $t = \dfrac{m}{k}\ln\dfrac{mg + kv_0}{mg} = 44{,}5$ с **2.29.** $\tau =$ $= (m/k)\ln 2 = 6{,}93$ с. **2.30.** $v = \dfrac{F}{k}(1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\tau}) = 6{,}3$ м/с. **2.31.** $F =$ $= \dfrac{kv}{1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\tau}} = 1{,}03$ кН. **2.32.** $k = \dfrac{m}{t}\dfrac{v_0 - v}{v_0v} = 4{,}7\cdot10^{-5}$ кг/м. **2.33.** $\tau =$ $= (m/k)\ln 10 = 18{,}4$ с. **2.34.** 1) 6,3 м/с; 2) $-0{,}57$ м/с. **2.35.** 1) 1 м/с; 2) 3 м/с. **2.36.** $v = -\dfrac{m}{M+m}u = -0{,}75$ м/с. **2.37.** 1) 1,5 м; 2) 0,5 м;

3) 1,5 м, 0. **2.38.** 0,4 м/с. **2.39.** $u_2 = 114$ м/с. **2.40.** $u_2 = 250$ м/с, $\varphi_2 = -36{,}6°$. **2.41.** $u_1 = 0{,}385$ м/с; $u_2 = -0{,}615$ м/с. **2.42.** $0{,}5\ \text{с}^{-1}$. **2.43.** $v_{\min} = 6{,}26$ м/с. **2.44.** $3mg$; 70°30′. **2.45.** В 6,1 раза. **2.46.** $\varphi = \arccos\dfrac{g}{4\pi^2 n^2 l} = 60{,}2°$. **2.47.** 1,42 с. **2.48.** $F = m(g \pm 4\pi^2 n^2 r)$; $F_{\max} = 1{,}02$ кН; $F_{\min} = 942$ Н. **2.49.** $v_{\min} = \sqrt{g(R-l)/\mu} = 13$ м/с; $\varphi = \operatorname{arctg}\mu = 31°$. **2.50.** 39 кН. **2.51.** $\varphi = \operatorname{arctg}(4\pi^2 n^2 r/g) = 38°50'$. Указание. При равновесии жидкости равнодействующая всех сил, действующих на частицу жидкости, находящуюся на ее поверхности, направлена по нормали к поверхности. **2.52.** $v = \sqrt{\mu g R} = 14$ м/с. **2.53.** 12,1 м/с; 16°42′. **2.54.** $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{v^2}{gR} = 58{,}2°$; $F = mg/\cos\varphi = 66{,}2$ кН. **2.55.** 1) $F = 4\pi^2 n^2 mr = 12{,}7$ кН; 2) $M = 2Fr\cos\varphi = 88{,}3$ Н·м. **2.56.** $\sigma = \rho\omega^2 R^2$; $\sigma = 8{,}9$ кН/м^2. **2.57.** $A = \mu g m s + mv^2/2 = 996$ Дж. **2.58.** $A = mh \times (g + 2h/t^2) = 4{,}72$ кДж. **2.59.** 1,35 кДж. **2.60.** 336 Дж. **2.61.** 2,94 кДж; 6 кДж. **2.62.** $T = (m/2)(v_0^2 + g^2 t^2) = 633$ Дж. **2.63.** 5 Дж; 15 Дж. **2.64.** $N = \pi\rho d^2 v^3/8 = 1{,}26$ кВт (ρ — плотность воды). **2.65.** $N = \dfrac{1}{2}\rho S v^3 = 2{,}84$ кВт (ρ — плотность воздуха). **2.66.** $N = \dfrac{1}{d}\sqrt{(m^3 g^3)/\pi\rho}$; 1) 139 кВт; 2) 313 кВт. **2.67.** 0,32 Вт; 56 Вт. **2.68.** $h = 5R/2 = 10$ м. **2.69.** $\alpha = \arccos(2/3) = 0{,}268\pi$ рад. **2.70.** $v = \sqrt{5gR} = 14$ м/с. **2.71.** $T_2 = \dfrac{m_1}{m_2}T_1 = 30$ кДж. **2.72.** $T_2 = \dfrac{m_1}{m_2}T_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ Дж $= 12$ нДж. Решение. По закону сохранения импульса, импульсы осколков после разрыва должны быть равны: $p_1 = p_2$ (1). Выразим импульс через кинетическую энергию $p = mv$, $p^2 = m^2 v^2$; $T = mv^2/2$; $2mT = m^2 v^2$. Из этих равенств найдем $p = \sqrt{2mT}$. Подставив в (1), получим $\sqrt{2m_1 T_1} = \sqrt{2m_2 T_2}$, откуда найдем T_2. **2.73.** 390 Дж. **2.74.** $T_1 = nT/(n+1) = 24$ пДж; $T_2 = T/(n+1) = 8$ пДж. **2.75.** $l = m_1^2 u_1^2/(2\mu g m_2^2) = 6{,}37$ м. **2.76.** $h = m^2 v^2/(2g(m+M)^2) = 7{,}32$ см. **2.77.** $v = \approx \dfrac{M+m}{m}\sqrt{2gh} = 701$ м/с. **2.78.** $h = l(1-\cos\varphi)(m_1/(m_1+m_2)^2) = 16$ см. **2.79.** $\Delta U = \dfrac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$; 1) 9,6 Дж; 2) 86,4 Дж. **2.80.** $u = m_1 v_1/(m_1+m_2)$; $w = m_2/(m_1+m_2)$; 1) $u = 1$ м/с; $w = 0{,}8$; 2) $u = 4$ м/с; $w = 0{,}2$. **2.81.** 1) $p_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} = -6$ кг·м/с, $p_2' = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2} = 16$ кг·м/с; 2) $\Delta p_1 = -p_2' = -16$ кг·м/с; 3) $T_1' = \dfrac{p_1^2}{2m_1}\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 9$ Дж, $T_2' =$

$= \dfrac{2m_2p_1^2}{(m_1+m_2)^2} = 16\,\text{Дж}$; 4) $|\Delta T_1| = T_2' = 16\,\text{Дж}$; 5) $w = \dfrac{|\Delta T_1|}{T_1} =$

$= \dfrac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = 0{,}64$. **2.82.** 1) $p_1' = \dfrac{m_1p_1}{m_1+m_2} = 3\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$, $p_2' =$

$= \dfrac{m_2p_1}{m_1+m_2} = 2\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; 2) $\Delta p_1 = -p_2' = -2\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; 3) $T_1' = m_1p_1^2\times$

$\times(1/2)(m_1+m_2)^{-2} = 0{,}75\,\text{Дж}$, $T_2' = \dfrac{m_2p_1^2}{2(m_1+m_2)^2} = 0{,}5\,\text{Дж}$; 4) $|\Delta T_1| =$

$= \dfrac{m_2(2m_1+m_2)p_1^2}{2(m_1+m_2)^2m_1} = 1{,}33\,\text{Дж}$; 5) $w_1 = \dfrac{T_2'}{T_1} = \dfrac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = 0{,}24$,

$w_2 = \dfrac{T_1'}{T_1} = \dfrac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} = 0{,}36$; 6) $\Delta U = \dfrac{m_2p_1^2}{2m_1(m_1+m_2)} = 0{,}833\,\text{Дж}$;

7) $w = \dfrac{\Delta U}{T_1} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} = 0{,}4$. **2.83.** $\eta = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} = 0{,}952$. **2.84.** $\eta =$

$= \dfrac{m_1}{m_1+m_2} = 0{,}833$. **2.85.** $\eta = \dfrac{m_1}{m_1+m_2} = 0{,}93$. **2.86.** $-6\,\text{м/с}$, $4\,\text{м/с}$.

2.87. $M = \dfrac{m(1+\sqrt{1-w})^2}{w} = 16{,}2\,\text{кг}$. **2.88.** $k = \dfrac{(1+\sqrt{1-w})^2}{w} = 3$.

2.89. $w = \dfrac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = 0{,}75$. **2.90.** $p_2 = \dfrac{2m_2p_1}{m_1+m_2} = 8\cdot10^{-20}\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

2.91. $u_1 = v_1\cos\alpha = 1{,}73\,\text{м/с}$; $u_2 = v_1\sin\alpha = 1\,\text{м/с}$; $\beta = \pi/2-\alpha =$

$= 60°$. **2.92.** $\alpha = \arccos\dfrac{T_1+(T_1-T_2)-(m_2/m_1)T_2}{2\sqrt{T_1(T_1-T_2)}} = 144°$. **2.93.** $T_2' =$

$= \dfrac{36}{25}T_1 = 144\,\text{Дж}$; $\Delta U = \dfrac{1}{5}T_1 = 20\,\text{Дж}$. **2.94.** $T_1' = \dfrac{1}{25}T_1 = 8\,\text{Дж}$;

$\Delta U = \dfrac{9}{5}T_1 = 360\,\text{Дж}$. **2.95.** $\Delta T_1 = -\dfrac{1}{4}(3T_1 - T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}) = -175\,\text{Дж}$;

$\Delta T_2 = \dfrac{1}{4}(T_1 + 2\sqrt{T_1T_2} - 3T_2) = 125\,\text{Дж}$; $\Delta U = \dfrac{1}{2}(T_1 + T_2 - \sqrt{T_1T_2}) =$

$= 50\,\text{Дж}$. **2.96.** $\Delta T_1 = -\dfrac{1}{4}(3T_1 + 2\sqrt{T_1T_2} - T_2) = -375\,\text{Дж}$; $\Delta T_2 =$

$= -\dfrac{1}{4}(3T_2 + 2\sqrt{T_1T_2} - T_1) = -75\,\text{Дж}$; $\Delta U = \dfrac{1}{2}(T_1+T_2) + \sqrt{T_1T_2} =$

$= 450\,\text{Дж}$. **2.97.** $T_1' = \dfrac{1}{25}T_1 = 10\,\text{Дж}$; $\Delta T_1 = -\dfrac{24}{25}T_1 = -240\,\text{Дж}$;

$T_2' = \dfrac{49}{25}T_1 = 490\,\text{Дж}$; $\Delta T_2 = \dfrac{24}{25}T_1 = 240\,\text{Дж}$. **2.98.** $T_1' = \dfrac{49}{25}T_1 =$

$= 490\,\text{Дж}$; $\Delta T_1 = \dfrac{24}{25}T_1 = 240\,\text{Дж}$; $T_2' = \dfrac{1}{25}T_1 = 10\,\text{Дж}$; $\Delta T_2 =$

$= -\dfrac{24}{25}T_1 = -240\,\text{Дж}$. **2.99.** $\mathbf{p}_1' = -\dfrac{1}{5}\mathbf{p}_1$; $|\mathbf{p}_1'| = 2\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; $\mathbf{p}_2' = \dfrac{11}{5}\mathbf{p}_2$;

$|\mathbf{p}_2'| = 22\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$. **2.100.** $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}_2$; $|\mathbf{p}_1'| = |\mathbf{p}_2'| = 10\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

2.101. $\tau = \dfrac{m}{k}\ln 2 = 10{,}4\,\text{с}$. **2.102.** $S = \dfrac{m}{k}v(1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\tau}) = 45{,}7\,\text{м}$. **2.103.** $\mu = \dfrac{m_\text{с}}{\tau}(1 - \mathrm{e}^{v_1/u}) = 1{,}68\,\text{км/с}$. **2.104.** $v = u\ln\dfrac{1}{1-\eta} = 2{,}77\,\text{км/с}$. **2.105.** $\dfrac{a}{a_\text{с}} = \mathrm{e}^{v/u} = 2{,}72$. **2.106.** $\dfrac{|\Delta m|}{m_\text{с}} = \dfrac{\mathrm{e}^{v/u} - 1}{\mathrm{e}^{v/u}} = 0{,}632$.

§ 3.

3.1. $0{,}012\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.2.** $2\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.3.** а) $J = (9/4)ml^2 = 3{,}6\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; б) $J = (3/2)ml^2 = 2{,}4\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.4.** $J = ma^2$; 1) $4\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; 2) $2\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.5.** $J_x = \dfrac{2m_1m_2}{2m_1+m_2}\left(d\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$; $J_y = 2m_1\left(d\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$; $J_z = J_x + J_y = 2m_1d^2\left(1 - \dfrac{2m_1}{2m_1+m_2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Отсюда: 1) $1{,}05\cdot 10^{-47}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $1{,}96\cdot 10^{-47}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $3{,}01\cdot 10^{-47}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; 2) $1{,}27\cdot 10^{-46}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; $8{,}70\cdot 10^{-46}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; $9{,}97\cdot 10^{-46}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.6.** 1) $J = (1/3)ml^2 = 3\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; 2) $J = (1/12)ml^2 = 0{,}75\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; 3) $J = (1/9)ml^2 = 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.7.** $4\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.8.** $J = (1/2)\tau a^2\times$ $\times(b + a/3) = 1{,}44\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.9.** $J = (m_1/3 + m_2)l_1^2 = 0{,}112\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.10.** $J = (1/3)(m_1 + 3m_2)l_1^2 + (1/12)m_2l_2^2 = 0{,}114\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.11.** 1) $J = (5/12)ma^2 = 5\cdot 10^{-5}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; 2) $J = (1/6)ma^2 = 2\cdot 10^{-5}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.12.** а) $J = 3ml^2 = 0{,}3\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; б) $J = (11/9)ml^2 = 0{,}122\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; в) $J = (5/6)ml^2 = 0{,}0833\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; г) $J = (7/9)ml^2 = 0{,}0777\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$; д) $J = (5/6)ml^2 = 0{,}0833\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.13.** $J = (1/2)mR^2$. **3.14.** $J = (3/2)mR^2 = 7{,}5\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.15.** $J = (3/4)mR^2 = 6\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.16.** $J = \dfrac{1}{2}mR^2 - \dfrac{md^2}{32R^2}(d^2 + 8l^2) = 4{,}19\cdot 10^{-2}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.17.** $J = (1/3)ma^2 = 4{,}27\cdot 10^{-2}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.18.** $J = (1/12)\sigma a^3b = 2\cdot 10^{-5}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.19.** 1) $\varepsilon = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{l} = 14{,}7\,\text{рад/с}^2$, $a_\tau = g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$; 2) $\varepsilon = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{l}\sin\alpha = 12{,}7\,\text{рад/с}^2$, $a_\tau = g\sin\alpha = 8{,}49\,\text{м/с}^2$; 3) $\varepsilon = \dfrac{12}{7}\dfrac{g}{l}\sin\alpha = 14{,}6\,\text{рад/с}^2$, $a_\tau = \dfrac{3}{7}g\sin\alpha = 3{,}64\,\text{м/с}^2$. **3.20.** 1) $65{,}3\,\text{рад/с}^2$, $9{,}8\,\text{м/с}^2$; 2) $32{,}7\,\text{рад/с}^2$, $4{,}9\,\text{м/с}^2$; 3) $59{,}9\,\text{рад/с}^2$, $7{,}99\,\text{м/с}^2$ (см. задачу 3.19). **3.21.** $M = (1/12)ml^2\varepsilon = 0{,}025\,\text{Н}\cdot\text{м}$. **3.22.** $J = mR^2\left(\dfrac{gt^2}{2s} - 1\right) = 0{,}0235\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. **3.23.** $\mu = \pi mRn/(Ft) = 0{,}31$. **3.24.** а) $a = 2g/3$; б) $a = g/2$. **3.25.** $a = \dfrac{2(m_2 - m_1)}{m + 2m_1 + 2m_2}g = 0{,}24\,\text{м/с}^2$. **3.26.** $a = \dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m}g = 1{,}96\,\text{м/с}^2$, $T_1 = \dfrac{(\mu+1)m_2 + m}{m_1 + m_2 + m}m_1g = 0{,}98\,\text{Н}$, $T_2 = \dfrac{(\mu+1)m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m}m_2g = 1{,}18\,\text{Н}$.

3.27. $T_1 = \dfrac{m_1(m+2m_2)}{m_1+m_2+m}g = 3{,}53\,\text{Н}$, $T_2 = \dfrac{m_2(m+2m_1)}{m_1+m_2+m}g = 3{,}92\,\text{Н}$. **3.28.** $M = (4/5)mR^2(B+3Ct) = -0{,}64\,\text{Н}\cdot\text{м}$. **3.29.** 1) $\omega = \dfrac{6m_2v}{(3m_2+m_1)l} =$ $= 2{,}61\,\text{рад/с}$, $u = \dfrac{3m_2v}{3m_2+m_1} = 1{,}30\,\text{м/с}$; 2) $\omega = \dfrac{3m_2v}{(m_2+m_1)l} = 1{,}43\,\text{рад/с}$, $u = \dfrac{2m_2v}{m_2+m_1} = 0{,}952\,\text{м/с}$; 3) $\omega = \dfrac{4m_2v}{(m_2+(7/3)m_1)l} = 0{,}839\,\text{рад/с}$, $u =$ $= \dfrac{3m_2v}{m_2+(7/3)m_1} = 0{,}629\,\text{м/с}$. **3.30.** 1) 4,55 рад/с, 0,909 м/с; 2) 2,27 рад/с, 0,454 м/с; 3) 3,03 рад/с, 0,303 м/с; 4) 1,52 рад/с, 0,202 м/с (см. ответы задачи 3.29). **3.31.** $\omega = \dfrac{mvr}{J+mr^2} = 1{,}02\,\text{рад/с}$. **3.32.** $\omega = \dfrac{2m_2\sqrt{2gh}}{(m_1+2m_2)R} =$ $= 0{,}129\,\text{рад/с}$. **3.33.** $\omega = \dfrac{2m_1v}{(2m_1+m_2)R} = 0{,}4\,\text{рад/с}$. **3.34.** $\varphi = -4\pi m_1 \times$ $\times(2m_1+m_2)^{-1} = -(2/3)\pi$. **3.35.** $n_2 = (J+mR^2)n_1/J = 10\,\text{мин}^{-1}$. **3.36.** $n_2 = 12Jn_1/(12J+ml^2) = 0{,}61\,\text{с}^{-1}$. **3.37.** $n_2 = 2mR^2n_1/J =$ $= 0{,}4\,\text{с}^{-1}$. **3.38.** $n_2 = (l_1/l_2)^2n_1 = 4\,\text{с}^{-1}$; $A = 2\pi^2mn_1(l_1/l_2)^2(l_1^2-l_2^2) =$ $= 5{,}92\,\text{Дж}$. **3.39.** 12,8 кВт. **3.40.** $M = \text{const} = 200\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $N = D+Et$, где $D = 3{,}2\,\text{кВт}$; $E = -0{,}8\,\text{кВт/с}$; $N = 0{,}8\,\text{кВт}$. **3.41.** $M = N/(2\pi n) =$ $= 3{,}18\,\text{Н}\cdot\text{м}$. **3.42.** $T_1 = 2N/(\pi nd) = 2{,}98\,\text{кН}$; $T_2 = N/(\pi nd) = 1{,}49\,\text{кН}$. **3.43.** $N = \pi nd(F-mg) = 214\,\text{Вт}$. **3.44.** $A = \pi^2nmR^2$; $A_1 = 7{,}11\,\text{кДж}$; $A_2 = 28{,}4\,\text{кДж}$. **3.45.** $M = T/(2\pi N) = 1{,}99\,\text{Н}\cdot\text{м}$. **3.46.** $T = M^2(\Delta t)^2 \times$ $\times\,(2J)^{-1} = 500\,\text{Дж}$. **3.47.** $T = (m/4)(2v^2+\pi^2n^2d^2) = 3{,}21\,\text{кДж}$. **3.48.** $T =$ $= 3mv^2/4 = 3\,\text{Дж}$. **3.49.** $T_1 = mv^2 = 50\,\text{Дж}$; $T_2 = 3mv^2/4 = 37{,}5\,\text{Дж}$. **3.50.** $T_1 = 10\,\text{Дж}$; $T_2 = 4\,\text{Дж}$. **3.51.** $v = \sqrt{10/(7gl)} = 3{,}74\,\text{м/с}$. **3.52.** $t =$ $= 2l/\sqrt{gh} = 4{,}04\,\text{с}$. **3.53.** $v = \sqrt{3gl(1-\cos\varphi)} = 3{,}84\,\text{м/с}$. **3.54.** 1) $\omega =$ $= \sqrt{3g/(2l)} = 3{,}83\,\text{рад/с}$, $v = \sqrt{3gl/8} = 1{,}92\,\text{м/с}$; 2) $\omega = \sqrt{3g/l} =$ $= 5{,}42\,\text{рад/с}$, $v = \sqrt{gl/3} = 1{,}81\,\text{м/с}$; 3) $\omega = 6\sqrt{g/(7l)} = 7{,}10\,\text{рад/с}$, $v = \dfrac{9}{2}\sqrt{gR/7} = 5{,}32\,\text{м/с}$. **3.55.** 1) 14 рад/с, 1,05 м/с; 2) 14 рад/с, 2,1 м/с (см. задачу 3.54). **3.56.** 1) $\omega = 2\sqrt{g/(3R)} = 8{,}08\,\text{рад/с}$, $v =$ $= 4\sqrt{gR/3} = 3{,}23\,\text{м/с}$; 2) $\omega = \sqrt{2g/(3R)} = 5{,}71\,\text{рад/с}$, $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{2gR/3} =$ $= 0{,}571\,\text{м/с}$; 3) $\omega = \sqrt{\dfrac{12(2+\sqrt{3})g}{17R}} = 11{,}4\,\text{рад/с}$, $v = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{12(2+\sqrt{3})g}{17}} =$ $= 3{,}04\,\text{м/с}$; 4) $\omega = 3\sqrt{2g/(11R)} = 8{,}95\,\text{рад/с}$, $v = 4\sqrt{2gR/11} = 2{,}39\,\text{м/с}$.

3.57. 1) $u_1 = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 = -556\,\text{м/с}$, $p_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}m_1v_1 = -3{,}71 \times$

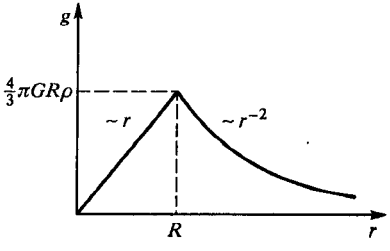
$\times 10^{-24}$ кг·м/с, $\Delta p_1 = -\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}m_1v_1 = 1{,}04\cdot 10^{-23}$ кг·м/с; 2) $v_C =$ $= \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 = 222$ м/с, $p_2' = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}m_1v_1 = 1{,}04\cdot 10^{-23}$ кг·м/с, $\omega =$ $= \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\dfrac{v_1}{d} = 4{,}08\cdot 10^{12}$ рад/с, $L_z = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_1d = 5{,}66\cdot 10^{-34}$ кг·м^2/с.

3.58. 1) $p_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2m_1T_1} = 2{,}03\cdot 10^{-24}$ кг·м/с, $T_1' = \left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \times$ $\times T_1 = 6{,}17\cdot 10^{-23}$ Дж, $\Delta T_1 = -\dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}T_1 = -4{,}94\cdot 10^{-21}$ Дж; 2) $v_C =$ $= \dfrac{\sqrt{2m_1T_1}}{m_1+m_2} = 304$ м/с; $p_2' = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2m_1T_1} = 1{,}63\cdot 10^{-23}$ кг·м/с, $T_{2\,\text{пост}}' = \dfrac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}T_1 = 2{,}47\cdot 10^{-21}$ Дж, $T_{2\,\text{вр}}' = \dfrac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}T_1 =$ $= 2{,}47\cdot 10^{-21}$ Дж, $\omega = \dfrac{2\sqrt{2m_1T_1}}{(m_1+m_2)d} = 5{,}03\cdot 10^{14}$ рад/с, $L_z = \dfrac{m_2d}{m_1+m_2}\times$ $\times \sqrt{2m_1T_1} = 9{,}84\cdot 10^{-34}$ кг·м^2/с. **3.59.** а) $X_C = \dfrac{7}{12}l = 0{,}7$ м; б) $X_C = 0$; в) $X_C = -\dfrac{3}{20}l = -0{,}18$ м. **3.60.** $X_C = 0$; $Y_C = \dfrac{m_2}{2m_1+m_2}$; 1) 52,4 пм; 2) 36,8 пм. **3.61.** $Z_C = \dfrac{m_2}{3m_1+m_2}\dfrac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$; 1) 32,2 пм; 2) 21,6 пм; 3) 68,3 пм. **3.62.** а) $X_C = 0$, $Y_C = \dfrac{2}{\pi}R = 6{,}37$ см; б) $X_C =$ $= \dfrac{2}{\pi+2}R = 3{,}89$ см, $Y_C = \dfrac{3}{\pi+2}R = 5{,}83$ см; в) $X_C = \dfrac{\pi+2}{\pi+1}R = 12{,}4$ см, $Y_C = \dfrac{\pi}{\pi+2}R = 6{,}11$ см; г) $X_C = R = 10$ см, $Y_C = \dfrac{\pi+1}{\pi+6}R = 4{,}53$ см. **3.63.** а) $X_C = R = 10$ см, $Y_C = \dfrac{4}{3\pi}R = 4{,}24$ см; б) $X_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}R = 2{,}76$ см, $Y_C = \dfrac{3}{2\pi}R = 4{,}77$ см; в) $X_C = R = 10$ см, $Y_C = \dfrac{10-3\pi}{3(4-\pi)}R = 2{,}23$ см; г) $X_C = R = 10$ см, $Y_C = \left(\dfrac{8}{3\pi}-\dfrac{1}{2}\right)R = 3{,}49$ см.

§ 4.

4.1. 66,7 пН. **4.2.** 667 пН. **4.3.** $F = G(\pi\rho d^2/6)^2 = 1{,}78$ мкН (ρ — плотность железа). **4.4.** $h = R(\sqrt{g/g_h}-1) = 13{,}6\cdot 10^6$ м. **4.5.** 2,18 м. **4.6.** 3,7 Н/кг. **4.7.** $g_\text{Л} = g/(kn) = 1{,}61$ м/с^2. **4.8.** $g = \dfrac{4}{3}\pi G\rho R = 0{,}21$ м/с^2. **4.9.** $r = \dfrac{l}{1+1/\sqrt{n}} = 54{,}3R$. **4.10.** 6,33 км/с. **4.11.** $1{,}69\cdot 10^6$ м. **4.12.** 7,27 $\times$ $\times 10^{-5}$ рад/с; $42{,}2\cdot 10^6$ м. **4.13.** 164 года. **4.14.** 7,92 км/с. **4.15.** 15 км/с.

4.16. 1,22 года. **4.17.** 65 сут. **4.18.** 255 сут. **4.19.** $v_1/v_2 = (1+e)/(1-e) = 3$, v_1 — скорость спутника в перигее; v_2 — в апогее. **4.20.** В 4 раза. **4.21.** $6{,}21 \cdot 10^{23}$ кг. **4.22.** $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг. **4.23.** 100. **4.24.** $g(r) = (4/3)\pi G\rho r$ при $r \leqslant R$, $g(r) = 4\pi G\rho R^3/(3r^2)$ при $r \geqslant R$; график зависимости $g(r)$ дан на рисунке. **4.25.** 1) $\Delta mg = \frac{8}{3}\pi G\rho mh = 15{,}4$ мН; 2) $\Delta mg = \frac{4}{3}\pi G\rho mh = 7{,}71$ мН. **4.26.** 1) $A_1 = \frac{1}{2}mgR = 31{,}2$ МДж; 2) $A_2 = mgR = 62{,}4$ МДж. **4.27.** $h = R$. **4.28.** $\varphi = -62{,}6$ МДж/кг; $\varphi = -190$ ГДж/кг. **4.29.** 1,68 км/с; 2,37 км/с. **4.30.** 436 км/с; 617 км/с. **4.31.** 130 м/с. **4.32.** $v = \sqrt{v_0^2 - gR} = 6{,}12$ км/с. **4.33.** $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR} = 10$ км/с. **4.34.** $v = \sqrt{2GM/R} = 42{,}1$ км/с. **4.35.** 72,6 км/с. **4.36.** Ракета будет двигаться по гиперболе. Указание. Перед решением задачи рекомендуется познакомиться с примером 1 (с. 78). Сравнить заданную в условии задачи скорость $v = 10$ км/с со скоростями круговой $v_{\text{кр}}$ и параболической $v_{\text{п}}$ на указанной высоте, предварительно вычислив их. Если окажется, что $v = v_{\text{кр}}$, то ракета движется по окружности; если $v_{\text{кр}} < v < v_{\text{п}}$, то ракета движется по эллипсу; если $v_{\text{кр}} = v_{\text{п}}$, то ракета движется по параболе; если $v > v_{\text{п}}$, то траектория ракеты — гипербола. **4.37.** $\sigma = 4mg/(\pi d^2) = 3{,}12$ МПа. **4.38.** 1) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) = 3{,}12$ МПа; 2) $\sigma = \frac{4mg}{\pi d^2} + \frac{1}{2}\rho gl = \frac{g}{2}\left(\frac{8m}{\pi d^2} + \rho l\right) = 6{,}45$ МПа; 3) $\sigma = \frac{4mg}{\pi d^2} + \rho gl = g\left(\frac{4m}{\pi d^2} + \rho l\right) = 9{,}78$ МПа. **4.39.** $P = \pi d^2 \sigma_{\text{упр}}/4 = 231$ Н; $\varepsilon = \sigma_{\text{упр}}/E = 1{,}47 \cdot 10^{-3}$. **4.40.** $l = \sigma_{\text{пр}}/(\rho g) = 111$ м (ρ — плотность свинца). **4.41.** $\sigma = \frac{4\pi^2 n^2 ml}{S} = 948$ МПа. **4.42.** $\sigma_{\max} = \frac{F}{S} = \frac{4\pi^2 n^2 m}{lS}\int\limits_0^l r\,dr = \frac{2\pi^2 n^2 ml}{S} = 4{,}74$ МПа. **4.43.** $E = \frac{mgl}{Sx} = 208$ ГПа.



К ответу 4.24

4.44. $\sigma = 4mg/(\pi d^2) = 78{,}5$ МПа; $\varepsilon = \dfrac{mg}{ES} = 3{,}90 \cdot 10^{-4}$; $x = \varepsilon l = 1{,}2$ мм. **4.45.** $E \approx \dfrac{mgl^3}{2\pi d^2 h^3} = 196$ ГПа. **4.46.** $x_1 = (k_2/k_1)x_2 = 4$ см. **4.47.** $k' = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 1{,}5$ кН/м; $k'' = k_1 + k_2 = 8$ кН/м. **4.48.** 1) $\tau = F/S = 637$ кПа; 2) $\gamma = \tau/G = 8{,}37$ мкрад; 3) $\Delta x = h\gamma = 1{,}68$ мкм. **4.49.** $\varphi = M/S = 8{,}34$ мкрад. **4.50.** $C = \dfrac{M}{\varphi} = 5{,}71$ мН·м/рад. **4.51.** $A = \dfrac{ESx^2}{2l} = 10$ Дж. **4.52.** $A = \dfrac{Fx_2^2}{2x_1} = 5$ Дж. **4.53.** $A = Fx + \dfrac{1}{2}kx^2 = 2{,}5$ Дж. **4.54.** $A = \dfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = 15{,}4$ Дж. **4.55.** 16,3 мм. **4.56.** $l = \sqrt{m_1^2 v^2/(km_2)} = 4{,}25$ см. **4.57.** $A = \dfrac{1}{2}\dfrac{k_2}{k_1}(k_1 + k_2)x_2^2 = 0{,}6$ Дж. **4.58.** 100 Дж (см. задачу 4.54). **4.59.** $\Pi = \dfrac{E\varepsilon^2}{2}\dfrac{m}{\rho} = 50$ Дж (ρ — плотность стали). **4.60.** $\Pi = \dfrac{ES}{l}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 160$ Дж; $w = \dfrac{\Pi}{Sl} = 0{,}4$ МДж/м^3. **4.61.** $\Pi = \dfrac{F^2 l}{2ES} = 2{,}5$ Дж; $w = \dfrac{\Pi}{Sl} = 6{,}25$ кДж/м^3. **4.62.** $\Pi = \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \times x^2 = 5$ Дж. **4.63.** $v = x\sqrt{k/m} = 7{,}07$ м/с. **4.64.** $v = \sqrt{(k/m)(x_2^2 - x_1^2)} = 22{,}5$ м/с. **4.65.** $k = mv^2/x^2 = 1{,}2$ МН/м. **4.66.** $w = \dfrac{\sigma^2}{2E} = 225$ кДж/м^3. **4.67.** 4,53 мм; 2) 453 мН/ $^{\cdot 2}$.

§ 5.

5.1. $u = c\sqrt{2\Delta l/l_0} = 134$ км/с. **5.2.** $u = c\sqrt{2\Delta\tau/\tau_0} = 1{,}34$ км/с. **5.3.** $\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{c^2}\tau_0 = 0{,}57$ с. **5.4.** 1,25. **5.5.** $l = l_0\sqrt{1 - (v_0^2/c^2)\cos^2\varphi} = 0{,}825$ м; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\varphi_0}{1 - v^2/c^2} = 59°$. **5.6.** $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 72°66'$. **5.7.** $\tau_0 = \dfrac{l}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2} = 25$ нс. **5.8.** $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tau_0^2 c^2/l^2}} = 0{,}995$. **5.10.** 1) 0,195 c; 2) 0,974 c. **5.11.** 0,268 c. **5.12.** c. **5.13.** 0,5 c. **5.14.** 0,994 c. **5.15.** 1,15. **5.16.** 0,943 c. **5.17.** $m = 2m_0$; 0,866 c. **5.18.** 0,5 %. **5.20.** $2{,}05 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с. **5.21.** $c/\sqrt{2} = 0{,}707\,c$. **5.22.** 1) $(5/3)m_0 = 1{,}67\,m_0$; 2) $v = (1/2)\,c$; 3) $2m_0/\sqrt{3} = 1{,}15\,m_0$. **5.23.** $V_C = (3/13)c = 0{,}231\,c$. **5.24.** 11,1 фг. **5.25.** 90 ТДж. **5.26.** 1) 81,6 фДж, или 0,511 МэВ; 2) 150 пДж, или 938 МэВ; 3) 596 пДж, или $3{,}73 \cdot 10^3$ МэВ. **5.27.** $6{,}57 \cdot 10^7$ кг. **5.28.** 1) $1{,}37 \cdot 10^{17}$ кг; 2) $8{,}82 \cdot 10^7$ кг. **5.29.** 20,6; 1,01. **5.30.** 1,94.

5.31. 0,341 МэВ. **5.32.** $2{,}6 \cdot 10^8$ м/с. **5.33.** 1) 298 Мм/с; 2) 18,9 Мм/с. **5.34.** 1) 13,8 Мм/с; 2) 263 Мм/с. **5.36.** 1) 0,03; 2) 0,52. **5.37.** 1) $0{,}866\,c$; 2) $0{,}9897\,c$; 3) $6\,m_0c^2$. **5.39.** $1{,}73\,m_0c$. **5.40.** $0{,}414\,m_0c^2$. **5.41.** 2,82. **5.42.** 1) 2,98; 2) 1,58. **5.43.** 1) $0{,}707\,c$; 2) $2{,}4142\,m_0$; 3) $0{,}414\,c$; 4) $2{,}1973\,m_0$; 5) $0{,}414\,m_0c^2$, $0{,}217\,m_0c^2$. **5.44.** $0{,}551\,m_0c^2$.

§ 6.

6.1. 2 с; 36°. **6.2.** 0,8 с; 1,25 Гц; π рад. **6.3.** 1) $\pi/3$ рад; 2) $3\pi/4$ рад; 3) $5\pi/3$ рад; 4) $7\pi/6$ рад. **6.4.** 1) $5\pi/6$ рад; 2) $\pi/3$ рад; 3) $5\pi/4$ рад; 4) $5\pi/3$ рад. **6.6.** $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 4$ см, $\omega = 2\pi/T = \pi\,\text{с}^{-1}$, $\varphi = \pi/2$ рад; 1) $5\pi/3$ рад; 2) $0{,}842\pi$ рад. **6.7.** $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = d/2 = 10$ см, $\omega = \pi/3\,\text{с}^{-1}$, $\varphi = \pi/2$ рад; $x = -8{,}66$ см; $\dot{x} = -5{,}24$ см/с, $\ddot{x} = 9{,}50$ см/с^2. **6.8.** 4,71 см/с; 7,40 см/с^2. **6.9.** $|\ddot{x}| = \omega\sqrt{\omega^2A^2 - \dot{x}^2} = 12$ см/с^2. **6.10.** $2\,\text{с}^{-1}$; 40 см/с^2. **6.11.** $10\,\text{с}^{-1}$; 0,628 с; 1 см; $x = A\cos\omega t$. **6.12.** $A = 2x_1^2/\sqrt{4x_1^2 - x_2^2} = 8{,}33$ см. **6.13.** $\omega = \sqrt{-\ddot{x}/x} = 4\,\text{с}^{-1}$; $T = 2\pi/\omega = 1{,}57$ с; $A = \sqrt{\dot{x}^2 + \omega^2x^2} = 7{,}07$ см; $\omega t + \varphi = \arccos(x/A) = \pi/4$ рад. **6.14.** $\pi/3$ рад. **6.15.** $2\pi/3$ рад или $4\pi/3$ рад. **6.16.** $A = 1{,}41$ см; $\varphi = \pi/4$ рад; $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$. **6.17.** $A = 2{,}24$ см; $\nu = 0{,}159$ Гц; $\varphi = 0{,}353\pi$ рад; $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = 1\,\text{с}^{-1}$. **6.18.** $A = 3{,}86$ см; $\varphi = 0{,}417\pi$ рад; $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = 2\pi/T = 4{,}19\,\text{с}^{-1}$. **6.19.** $A = 6$ см; $\varphi = \pi/3$ рад; $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = 2\pi/T = \pi\,\text{с}^{-1}$. **6.20.** 1) $A = 2{,}24$ см, $\varphi = 0{,}686\pi$ рад; 2) $A = 1{,}41$ см, $\varphi = 0{,}917\pi$ рад. **6.21.** 2 с. **6.22.** $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$, или $y = -\dfrac{1}{2}x$. **6.23.** $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$, или $y = -2x$. **6.24.** 1) $y = x$; 2) $y = \dfrac{A_2}{A_1}x$, $y = \dfrac{3}{2}x$; 3) $x^2 + y^2 = A^2$, $x^2 + y^2 = 4$; 4) $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$, $y = -2x$; 5) $x^2 + y^2 = A^2$, $x^2 + y^2 = 9$; 6) $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; 7) $y = \dfrac{A_2}{A_1}x$, $y = 3x$; 8) $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$, $y = -2x$. **6.25.** $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. **6.26.** $\dfrac{x^2}{0{,}25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. **6.27.** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, $v = 13{,}7$ м/с. **6.28.** $y = -2\dfrac{A_2}{A_1}x^2 + A_2$, $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1$. **6.29.** 1) $y = A - 2\dfrac{x^2}{A}$, $y = -x^2 + 2$; 2) $y = 2\dfrac{x^2}{A} - A$, $y = x^2 - 2$; 3) $2Ay - A_1x^2 = AA_1$, $y = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}$; 4) $x =$

$= 2\dfrac{A_1}{A}y\sqrt{1-\dfrac{y^2}{A_2}}$, $x = \dfrac{3}{2}y\sqrt{4-y^2}$. **6.30.** $y = \dfrac{A_2^2}{2A_1}(A_1 - x)$, $x = \dfrac{9}{4}(2-x)$. **6.32.** 1) $-62{,}5$ мН; 2) -125 мН. **6.33.** 2 мН; 50 мкДж. **6.34.** 4,39 мН; 877 мкДж. **6.35.** 2 с; $\pi/3$. **6.36.** 9,87 Н/м. **6.37.** 0,6 с. **6.38.** 0,8 Дж. **6.39.** $\dfrac{l_1}{l_2} = -\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2{,}25$. **6.40.** $T = 2\pi\sqrt{l/(g+a)} = 1{,}8$ с. **6.41.** $L = \dfrac{l^2 - 2d(l-d)}{l-2d} = 50$ см; $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 1{,}42$ с. **6.42.** $L = (5/6)l = 25$ см; $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 1$ с. **6.43.** $T = 2\pi\sqrt{3l/g} = 1{,}90$ с. **6.44.** $T = 2\pi\sqrt{2R/g} = 1{,}55$ с. **6.45.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}} = 1{,}35$ с. **6.46.** 36 см; 1,2 с. **6.47.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3(R^2+r^2)(R+r)}{2g(R^2+Rr+r^2)}} = 1{,}14$ с. **6.48.** $a_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(l_1 \pm \sqrt{l_1^2 - \dfrac{1}{3}l_2^2}\right)$; 10 см; 30 см. **6.49.** $a = l/(2\sqrt{3}) = 34{,}6$ см. **6.50.** а) $T = (8/3)\pi\sqrt{l/2g} = 1{,}89$ с; б) $T = 2\pi\sqrt{2l/3g} = 1{,}64$ с; в) $T = (4/3)\pi\sqrt{l/g} = 1{,}34$ с; г) $T = 2\pi\sqrt{(7/3)(l/g)} = 1{,}53$ с. **6.51.** а) $\nu = (1/2\pi)\sqrt{(3/5)(g/l)} = 0{,}386$ Гц; б) $\nu = (3/\pi)\sqrt{g(31\,l)} = 0{,}537$ Гц; в) $\nu = (1/\pi)\sqrt{(3/7)(g/l} = 0{,}652$ Гц; г) $\nu = (1/2\pi)\sqrt{(15/11)(g/l)} = 0{,}582$ Гц. **6.52.** $J_1 = \dfrac{mR^2T_1^2}{2(T_2^2 - T_1^2)} = 6{,}4\cdot 10^{-2}$ кг$\cdot$м^2. **6.53.** $T = \dfrac{4}{d}\sqrt{\dfrac{\pi m}{\rho g}} = 1{,}6$ с (ρ — плотность). **6.54.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2\rho g S}} = 0{,}86$ с (ρ — плотность ртути). **6.55.** $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 6{,}21$ м. **6.56.** 15 мин. **6.57.** 0,0023 с$^{-1}$. **6.58.** $\theta = \dfrac{2\pi}{l}\sqrt{\dfrac{l}{g}}\ln\dfrac{A_1}{A_2} = 2{,}31\cdot 10^{-3}$. **6.59.** $N = \dfrac{1}{\theta}\ln\dfrac{A_1}{A_2} = 231$. **6.60.** $N = \dfrac{1}{\theta}\ln\dfrac{A_1}{A_2} = 173$; $t = 2\pi n\sqrt{m/k} = 2$ мин 52 с. **6.61.** $9{,}16\cdot 10^{-5}$ кг/с. **6.62.** 1,005. **6.63.** 35. **6.64.** 1) 0,025; 2) 1,59 Гц; 3) 0,0157; 4) 64. **6.65.** $n = (1/2\pi)\sqrt{g/h} = 16$ с$^{-1}$. **6.66.** $v = (l/\pi)\sqrt{k/m} = 10{,}2$ м/с. **6.67.** 1002 Гц. **6.68.** $\Delta\nu = \delta^2/(4\pi^2\nu_0) = 4{,}05$ Гц. **6.69.** $\theta = 2\pi\sqrt{\Delta\nu/\nu_0} = 0{,}089$. **6.70.** $\nu_{\text{рез}} = \sqrt{2/T^2 - 1/T_0^2} = 1{,}75$ с$^{-1}$. **6.71.** 0,1 с$^{-1}$; 5 см. **6.72.** $F_0 = 2\pi\nu_0 r A_{\text{рез}} = 0{,}314$ мН. **6.73.** 510 Гц. **6.74.** 1) 5,03 Гц; 2) 4,91 Гц; 3) 6,4 мм; 4) 3,2. **6.75.** 1) 1,53; 2) 15,2.

§ 7.

7.1. 1) 100 Гц, 3,14 мм; 2) 314 м/с; 3) 3,14 м/с, $1{,}97\cdot 10^3$ м/с^2. **7.3.** $\xi(0, t) = A\cos 2\pi\nu t$; $\xi = -2$ мкм. **7.4.** 1) 350 м/с; 2) 0,79 м/с.

7.5. 1) $-0{,}1$ мм; 2) 0,363 м/с, 0,439 км/с^2. **7.6.** 5,88 см. **7.7.** $-1{,}73$ см. **7.8.** 1,26 рад. **7.9.** 1,57 рад. **7.10.** 50 Гц. **7.11.** 15 м/с. **7.12.** 1) 5,05 км/с; 2) 3,31 км/с; 3) 4,44 км/с. **7.13.** 21 м; 17 мм. **7.14.** 350 м/с. **7.15.** 339 м/с; 375 м/с. **7.16.** 1,45 км/с. **7.17.** 1,67. **7.18.** 4,8. **7.19.** $\tau = 2\dfrac{\Delta h}{\Delta T}\sqrt{\dfrac{M}{\gamma R}}\times$ $\times\left(T_0 - \sqrt{T_0 - \dfrac{\Delta T}{\Delta h}h}\right) = 24{,}3$ с. **7.20.** 1,73 мм. **7.21.** 1) $l_{\text{узл}} = (2m+1)\times$ $\times\, v/(4\nu)$; $l_{\text{узл}} = 2{,}5,\ 7{,}5,\ 12{,}5$ см, ...; $l_{\text{пучн}} = mv/(2\nu)$; $l_{\text{пучн}} =$ $= 0,\ 5,\ 10$ см, ...; 2) $l_{\text{узл}} = mv/(2\nu)$; $l_{\text{узл}} = 0,\ 5,\ 10$ см, ...; $l_{\text{пучн}} =$ $= (2m+1)v/(4\nu)$; $l_{\text{пучн}} = 2{,}5,\ 7{,}5,\ 12{,}5$ см, ... **7.22.** 1) 5 см; 2) 10 см. **7.23.** 1) 144 Гц; 2) 72 Гц. **7.24.** 343 м/с. **7.25.** 330 м/с. **7.26.** $v_1 = (l/a)v =$ $= 3{,}12$ км/с. **7.27.** 2,52 кГц. **7.28.** 1) 341 Гц; 2) 268 Гц. **7.29.** 366 Гц; 264 Гц. **7.30.** 120 км/ч; 990 Гц. **7.31.** 0,09. **7.32.** 4,1 м/с; по направлению к резонатору. **7.33.** 1) 4,5 с; 2) 5,5 с. **7.34.** 636 Гц. **7.35.** 1) 699 Гц; 2) 517 Гц. Изменится: 1) 696 Гц; 2) 515 Гц. **7.36.** $u = \dfrac{\Delta\nu}{2\nu_0 + \Delta\nu}v =$ $= 3{,}74$ м/с. **7.37.** 23,7 мкДж. **7.38.** 3,01 мДж/м^3. **7.39.** 0,251 Дж/м^3. **7.40.** 157 Вт; 60,2 мкДж/м^3.

§ 8.

8.1. 1) 18; 2) 44; 3) 58,4. **8.2.** $M = M_r k = 98\cdot 10^{-3}$ кг/моль (M_r — относительная молекулярная масса; $k = 10^{-3}$ кг/моль). **8.3.** $m_1 =$ $= M_r k/N_A$; 1) $7{,}31\cdot 10^{-26}$ кг; 2) $9{,}70\cdot 10^{-26}$ кг. **8.4.** $\rho = M_r k\nu/V =$ $= 3{,}2$ кг/м^3 (M_r — относительная молекулярная масса; $k = 10^{-3}$ кг/моль). **8.5.** $\nu = 7{,}14$ моль; $N = 4{,}30\cdot 10^{24}$ молекул. **8.6.** 0,125 моль; $7{,}52\cdot 10^{21}$ молекул. **8.7.** Известно, что молярный объем V_m любого газа при нормальных условиях равен 22,4 л/моль. Поэтому $n = V/V_m = 0{,}5$ моль; $m = M\nu = M_r k\nu = 16$ г. **8.8.** $\nu = \rho V/M = 9{,}97\cdot 10^{-3}$ моль. **8.9.** $N =$ $= N_A V/V_m = 1{,}34\cdot 10^{22}$ молекул (V_m — молярный объем идеального газа при нормальных условиях; $V_m = 22{,}4\cdot 10^{-3}$ м^3/моль). **8.10.** 1) $1{,}50\times$ $\times\, 10^{23}$ атомов; 2) $5{,}02\cdot 10^{22}$ атомов; 3) $3{,}17\cdot 10^{22}$ атомов; 4) $2{,}87\cdot 10^{21}$ атомов. **8.11.** Для определения вида газа найдем его относительную молекулярную массу: $M_r = \rho V/(k\nu) = 28$. Следовательно, данный газ — азот. **8.12.** $N = \dfrac{4}{3}\dfrac{m}{M}N_A = 2{,}87\cdot 10^{20}$ частиц. **8.13.** Пусть жидкость заполняет куб. Число молекул в кубе $N = (l/d)^3 = V/d^3$ (1) (l — длина ребра куба, d — диаметр молекулы). Число молекул можно выразить также формулой $N = \nu N_A = \dfrac{m}{M}N_A = \dfrac{\rho V}{M}N_A$ (2) (ν — количество

вещества жидкости в кубе; m — масса; ρ — плотность; M — молярная масса жидкости). Приравняв правые части (1) и (2) и выразив из полученного равенства диаметр d молекулы, найдем $d = \sqrt[3]{M/(\rho N_A)}$; $d_1 = 0{,}464$ нм; $d_2 = 0{,}290$ нм. **8.14.** Диаметр молекулы воды $d = \sqrt[3]{M/(\rho N_A)}$ (1) (см. задачу 8.13). Среднее расстояние между центрами молекул $\langle l \rangle = \sqrt[3]{V_1}$ (V_1 — объем куба, приходящегося на одну молекулу). Искомое отношение: $\langle l \rangle / d = \sqrt[3]{V_m \rho / M} = 10{,}7$. **8.15.** 1) $\nu = V/V_m = 50$ ммоль (V_m — молярный объем); $V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль; 2) $\nu_{мол} = \nu(1 - \alpha) = 35$ ммоль; 3) $\nu_{ат} = 2\nu\alpha = 30$ ммоль; 4) $\nu_{пол} = 65$ ммоль. **8.16.** $F = (l/h)pS = 32{,}3$ кН. **8.17.** $p = p_0\left(1 - \dfrac{m}{\rho V}\right) = 2{,}67$ кПа. **8.18.** $p = 2\dfrac{(p_0 + \rho g \Delta h)l}{2l + \Delta h_1 - \Delta h} - \rho g \Delta h = 47{,}2$ кПа. **8.19.** $p = \dfrac{(p_0 - \rho g \Delta h_1)V_1}{V_1 + (\pi d^2/8)(\Delta h_2 - \Delta h_1)} = 2{,}32$ кПа. **8.20.** $t_2 = \dfrac{p_2}{p_1}(t_1 + T_0) - T_0 = 473\,^\circ$C ($T_0 = 273\,^\circ$C). **8.21.** 350 К. **8.22.** $m = \rho V \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 66{,}5$ г (ρ — плотность ртути). **8.23.** $\Delta F = (\rho_{02} - \rho_{01}) g V \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} = 642$ Н. **8.24.** $\Delta F = \dfrac{\rho_0 g V (T - T_0)}{T_0} = 1{,}39$ кН ($T_0 = 273$ К; ρ_0 — плотность воздуха при нормальных условиях). **8.25.** $V = \dfrac{(l_2 - l_1) S T_1}{T_2 - T_1} - l_1 S = 106$ см^3.

8.26. Давление воздуха p_1 в цилиндрическом сосуде до понижения температуры уравнивается атмосферным давлением p_0:

$$p_0 = p_1. \qquad (1)$$

После понижения температуры атмосферное давление уравнивается суммой двух давлений — p_2 воздуха в сосуде и Δp, создаваемого столбом воды высотой Δh:

$$p_0 = p_2 + \Delta p = p_2 + \rho g \Delta h. \qquad (2)$$

Приравняв правые части формул (1) и (2) и выразив p_2, найдем

$$p_2 = p_1 - \rho g \Delta h. \qquad (3)$$

Давление, объем и температура воздуха в цилиндре связаны уравнением газового состояния

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad \text{или} \quad \frac{p_1 S h_1}{T_1} = \frac{p_2 S h_2}{T_2}.$$

Сократив на S, получим $p_1 h_1 / T_1 = p_2 h_2 / T_2$.

Подставив сюда выражение p_2 по (3), а также учтя, что $h_2 = h_1 - \Delta h$, после преобразования найдем

$$\Delta h^2 - \left(h_1 + \frac{p}{\rho g}\right)\Delta h + \frac{p_1 h_1}{\rho g}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0.$$

Решив это квадратное уравнение и отбросив второе значение Δh, не имеющее физического смысла, получим $\Delta h = 4{,}5$ см. **8.27.** $m = \dfrac{MpV}{RT} = 0{,}212$ кг. **8.28.** $V = \dfrac{\nu RT}{p} = 3{,}32\,\text{м}^3$. **8.29.** $p = \dfrac{mRT}{MV} = 1{,}16$ МПа. **8.30.** $T = \dfrac{pMV}{mR} = 275$ К. **8.31.** Относительную молекулярную массу M_r найдем из соотношения $M = M_r k$ (1) (где M — молярная масса); $k = 10^{-3}$ кг/моль. Из уравнения Клапейрона–Менделеева получим $M = \dfrac{mRT}{pV} = \dfrac{\rho RT}{p} = 44$ кг/моль. Из (1) найдем $M_r = M/k = 44$. **8.32.** $\rho = \dfrac{Mp}{RT} = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. **8.33.** $F = (M_2 - M_1)g\dfrac{pV}{RT} = 10{,}9$ кН. **8.34.** $m = \dfrac{MV}{RT}\Delta p = 8{,}3$ г. **8.35.** $\Delta m = M\dfrac{V}{R}\left(k\dfrac{p_1}{T_1} - \dfrac{p_2}{T_2}\right) = 6{,}16$ кг ($k = 7/8$). **8.36.** $V = \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)\dfrac{RT}{p} = 6{,}42\,\text{м}^3$. **8.37.** $p_1' = \dfrac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = 0{,}76$ МПа; $p_2' = \dfrac{p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1{,}12$ МПа; $p = p_1' + p_2' = 1{,}88$ МПа. **8.38.** $p = \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)\dfrac{RT}{V} = 175$ кПа. **8.39.** $\rho = \dfrac{9M_1M_2}{8M_1 + M_2}\dfrac{p}{RT} = 0{,}481$ кг/м^3. **8.40.** $p_1 = \dfrac{w_1 M_2 p}{(1 - w_1)M_1 + w_1 M_2} = 0{,}18$ МПа; $p_2 = \dfrac{(1 - w_1)M_1 p}{(1 - w_1)M_1 + w_1 M_2} = 0{,}82$ МПа. **8.41.** $M_r = M/k$ (M — молярная масса воздуха; $k = 10^{-3}$ кг/моль); $M_{\text{возд}} = \dfrac{w_1 + w_2}{w_1/M_1 + w_2/M_2} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_r = M/k = 28{,}9 \cdot 10^{-3}/10^{-3} = 28{,}9$. **8.42.** $m_1 = \dfrac{M_1}{M_2 - M_1}\left(M_2\dfrac{pV}{RT} - m\right) = 16$ г; $m_2 = \dfrac{M_2}{M_2 - M_1}\left(m - M_1\dfrac{pV}{RT}\right) = 8$ г.

8.43. $m = \dfrac{pV}{[w_1/M_1 + (1 - w_1)/M_2]RT} = 6{,}87$ г; $m_1 = w_1 m = 4{,}81$ г; $m_2 = (1 - w_1)m = 2{,}06$ г. **8.44.** $T = \dfrac{pV}{[w_1/M_1 + (1 - w_1)/M_2]mR} = 259$ К.

8.45. $n = 0{,}788$ моль; $\nu_1 = 67{,}5$ ммоль; $\nu_2 = 0{,}720$ моль.

§ 9. **9.1.** $1{,}2 \cdot 10^{20}\,\text{м}^{-3}$. **9.2.** 2 л. **9.3.** $n = \nu N_\text{А}/V = 4{,}52 \cdot 10^{28}\,\text{м}^{-3}$. **9.4.** $n = N_\text{А}/V_m = 2{,}69 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$ (где V_m — молярный объем газа при нормальных условиях). **9.5.** $m = MnV/N_\text{А} = 0{,}25\,\text{г}$. **9.6.** $n = mN_\text{А}/(VM_r k) = 7{,}52 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$ ($k = 10^{-3}\,\text{кг/моль}$). **9.7.** $\nu = nV/N_\text{А} = 9{,}97 \cdot 10^{-9}\,\text{моль}$. **9.8.** $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{M_{r,2}}{M_{r,1}} = 16$. **9.9.** $M_r = \dfrac{mN_\text{А}}{knV} = 32$ ($k = 10^{-3}\,\text{кг/моль}$). Следовательно, газ — кислород. **9.10.** $N_\text{А} = knV\dfrac{M_r}{m} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$. **9.11.** $n_1 = N_\text{А}/V_m = 2{,}69 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$; $n_2 = n_1(1-\alpha) = 1{,}61 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$; $n_3 = 2n_1\alpha = 2{,}15 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$. **9.12.** $2{,}42 \cdot 10^{17}\,\text{м}^{-3}$. **9.13.** 414 Па; 138 кПа. **9.14.** $N = \dfrac{pV}{kT} = 3{,}62 \cdot 10^{25}$ молекул. **9.15.** $\nu = \dfrac{pV}{RT} = 4{,}98\,\text{ммоль}$; $n = \nu N_\text{А}/V = 1{,}25 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$. **9.16.** $\Delta p = (N/V)kT = 4{,}14\,\text{кПа}$. **9.17.** $\nu = 4{,}97\,\text{ммоль}$; $N = 2{,}99 \cdot 10^{21}$ молекул. **9.18.** 1) $T = 7{,}25\,\text{К}$; 2) $\langle\varepsilon_\text{п}\rangle = 1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж}$. **9.19.** $\langle\varepsilon_\text{п}\rangle = 1{,}24 \cdot 10^{-20}\,\text{Дж}$; $\langle\varepsilon\rangle = 2{,}48 \cdot 10^{-20}\,\text{Дж}$; $W = \langle\varepsilon\rangle\nu N_\text{А} = (i/2)kT\nu N_\text{А} = (i/2)RT\nu = 7{,}48\,\text{МДж}$. **9.20.** $8{,}28 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж}$; $13{,}8 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж}$; $16{,}6 \times 10^{-21}\,\text{Дж}$. **9.21.** $6{,}9 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж}$; $20{,}7 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж}$; $13{,}8 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж}$; $34{,}5 \times 10^{-21}\,\text{Дж}$. **9.22.** $3{,}22 \cdot 10^{19}$. **9.23.** $\Delta p = \dfrac{3kT}{\sigma R} = 2{,}48\,\text{Па}$. **9.24.** $T = \dfrac{2}{3}\dfrac{W_m}{R} = 33{,}6\,\text{кК}$. **9.25.** 1) 500 м/с, 462 м/с, 407 м/с; 2) 1,94 км/с, 1,79 км/с, 1,58 км/с; 3) 7,90 км/с, 7,30 км/с, 6,48 км/с. **9.26.** 20,1 кК. **9.27.** 1,6 кК. **9.28.** 2 км/с. **9.29.** Гелий: 2,73 км/с и $2{,}48 \cdot 10^{-20}\,\text{Дж}$; аргон: 864 м/с и $2{,}48 \cdot 10^{-20}\,\text{Дж}$. **9.30.** 352 мкм/с. **9.31.** $1{,}37 \cdot 10^7$ раз. **9.32.** 0,92 км/с. **9.33.** 1,82 км/с.

§ 10. **10.1.** В $\text{e}^{23{,}6}$ раза. **10.2.** 1,65. **10.3.** $5{,}97 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$. **10.4.** $4{,}14 \times 10^{-21}\,\text{Н}$. **10.5.** 1,18 кПа. **10.6.** 5,88 км. **10.7.** 893 м. **10.8.** 1) 8,75 м; 2) 25,8 м. **10.9.** 6,5 м. **10.10.** $n = n_0\text{e}^{m\omega^2 r^2/(2kT)}$ (n_0 — концентрация частиц на оси ротора). **10.11.** 5,91. **10.12.** 304 кПа. **10.13.** 84 (криптон). **10.14.** 28%; 72%. **10.15.** $v_\text{в} = \sqrt{2kT/m}$. **10.16.** $f(u)\,\text{d}u = (4/\sqrt{\pi})\text{e}^{-u^2}u^2\,\text{d}u$. **10.17.** $4{,}39 \cdot 10^{-3}$. **10.18.** $6{,}63 \cdot 10^{-3}$. **10.19.** $w = \dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\dfrac{m}{kT}\right)^{3/2}v^3$. **10.20.** $w = 7{,}52 \cdot 10^{-7}$. **10.21.** $\langle v\rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$. **10.22.** $\langle v_\text{кв}\rangle = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{3kT/m}$. **10.23.** $\dfrac{\langle 1/v\rangle}{1/\langle v\rangle} = \dfrac{4}{\pi} =$

$= 1{,}27$. **10.24.** $C = \dfrac{m^2}{2k^2T^2}$. **10.25.** $v_в = \sqrt{3kT/m}$; $\langle v\rangle = 3\sqrt{\pi kT/(8m)}$. **10.26.** $6{,}0\cdot10^9$. **10.27.** $p_в = \sqrt{2mkT}$. **10.28.** 0. **10.29.** $\langle p_x\rangle = \sqrt{mkT/(2\pi)}$. **10.30.** 0,5%. **10.31.** $p = \sqrt{2mkT}$. **10.32.** $\langle\varepsilon_п\rangle = (3/2)kT$. **10.33.** $\mathrm{d}N(w) = \dfrac{3^{3/2}N}{(2\pi)^{1/2}}\mathrm{e}^{-3w/2}w^{1/2}\,\mathrm{d}w$. **10.34.** $9{,}3\cdot10^{-3}$. **10.35.** $w = \dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{3\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \times$ $\times\,\varepsilon^{3/2}$. **10.36.** $7{,}53\cdot10^{-4}$. **10.37.** $\varepsilon_{отн} = \dfrac{\varepsilon}{kT} = \left(\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\right)^{2/3}\left(\dfrac{\Delta N}{N}\right)^{2/3} =$ $= 1{,}21\cdot10^{-2}$. **10.38.** $w = \dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{2}{\pi^{1/2}}\left(\dfrac{\varepsilon_0}{kT}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\varepsilon_0/(kT)}$. **10.39.** $\varepsilon_1 =$ $= 10{,}5\,kT$. **10.40.** $\varepsilon_в = (1/2)kT$. **10.41.** $f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2\pi^{1/2}}\mathrm{e}^{-\theta/2}\theta^{1/2}\,\mathrm{d}\theta$. **10.42.** $4{,}84\cdot10^{-3}$. **10.43.** $2{,}67\cdot10^{-4}$. **10.44.** $\varepsilon = kT$. **10.45.** Уменьшится в 2 раза. **10.46.** В 3 раза. **10.47.** 3,96 см. **10.48.** 6,45 мПа. **10.49.** 95,4 нм. **10.50.** Можно, так как длина свободного пробега $\langle l\rangle = 60$ м много больше диаметра d колбы. **10.51.** 0,954 мг/м^3. **10.52.** $3{,}7\cdot10^9$ с$^{-1}$. **10.53.** $1{,}57 \times$ $\times\,10^{21}$. **10.54.** $3{,}38\cdot10^{18}$. **10.55.** 147 нс. **10.56.** 1) Не зависит; 2) $\langle l\rangle \sim$ $\sim 1/p$. **10.57.** 1) Не зависит; 2) $\langle l\rangle \sim T$. **10.58.** 1) $\langle z\rangle \sim \sqrt{p}$; 2) $\langle z\rangle \sim p$. **10.59.** 1) $\langle z\rangle \sim \sqrt{T}$; 2) $\langle z\rangle \sim 1/\sqrt{T}$. **10.60.** $7{,}23\cdot10^{-5}$ м^2/с. **10.61.** 135 нм. **10.62.** 1) $90\cdot10^{-5}$ м^2/с; 2) 0,061 м^2/с. **10.63.** 6,61. **10.64.** 1) $D \sim \sqrt{T^3}$; 2) $D \sim \sqrt{T}$. **10.65.** 1) $D \sim 1/p$; 2) $D \sim \sqrt{p}$. **10.66.** 18 мкПа$\cdot$с. **10.67.** 90 пм. **10.68.** 19 мкПа$\cdot$с. **10.69.** 1) $\eta \sim \sqrt{T}$; 2) $\eta \sim \sqrt{T}$. **10.70.** 1) Не зависит; 2) $\eta \sim \sqrt{p}$. **10.71.** $F_\tau = 16{,}8$ мН; $M = F_\tau 2\pi R^2 l = 3{,}17 \times$ $\times\,10^{-4}$ Н$\cdot$м. **10.72.** $M = \pi^2\eta n R^4/d = 0{,}58$ мН$\cdot$м. **10.73.** $F = (1/3) \times$ $\times \left(\dfrac{2\eta}{\pi RT}\right)^{1/2} pu = 0{,}89$ мкН. **10.74.** 38,6 мВт/(м$\cdot$К). **10.75.** 1) 2,5, 2,41; 2) 1,90, 1,86; 3) 1,90, 1,90; 4) 1,75, 1,38. **10.76.** 23,4 мВт/(м$\cdot$К). **10.77.** 1) $\lambda \sim \sqrt{T}$; 2) $\lambda \sim \sqrt{T}$. **10.78.** 1) Не зависит; 2) $\lambda \sim \sqrt{p}$. **10.79.** 196 Вт/м^2; 2) 35 мВт/м^2. **10.80.** $\varkappa = (ik/(3\pi d^2))\,(RT/(\pi M))^{1/2} =$ $= 22{,}9$ мВт/(м$\cdot$К). **10.81.** $\tau = \dfrac{(MRT)^{1/2}}{4\sqrt{\pi}d^2N_A p} = 1{,}7$ с. **10.82.** $p = \dfrac{z(MRT)^{1/2}}{4\sqrt{\pi}d^2N_A\tau} =$ $= 19{,}7$ Па. **10.83.** $\tau \approx \dfrac{3\pi^{3/2}}{2}L^2d^2n_{н.у.}\left(\dfrac{M}{RT}\right)^{1/2} \approx 25$ с. **10.84.** $\tau \approx$ $\approx \dfrac{3V^{2/3}}{\langle v\rangle\delta} \approx 4$ сут. **10.85.** $\langle z\rangle \approx \dfrac{3L^2}{\lambda^2} = 6\left(\pi d^2 L\dfrac{\rho}{M}N_A\right)^2 \approx 2\cdot10^7$. **10.86.** $\tau \approx \dfrac{1}{\sigma n_н v}$; где $n_н = N_н\dfrac{\rho}{M}N_A$ ($n_н$ — концентрация атомов во-

дорода; $N_н$ — число атомов водорода в одной молекуле соединения); 1) 1,7 мс; 2) 1,8 мс; 3) 1,4 мс; 4) 1,6 мс; 5) 1,6 мс.

§ 11. **11.1.** 1) 3,12 кДж/(кг · К), 5,19 кДж/(кг · К); 2) 10,4 кДж/(кг · К), 14,6 кДж/(кг · К); 3) 567 Дж/(кг · К), 756 Дж/(кг · К). **11.2.** 0,032 кг/моль, 650 Дж/(кг · К), 910 Дж/(кг · К). **11.3.** 715 Дж/(кг · К); 1,01 кДж/(кг · К). **11.4.** 4,53 кДж/(кг · К). **11.5.** 990 Дж/(кг · К). **11.6.** 526 Дж/(кг · К). **11.7.** 322 Дж/(кг · К). **11.8.** 204 Дж/(кг · К). **11.9.** 1,51. **11.10.** 1,50. **11.11.** 1,42. **11.12.** 1,50. **11.13.** 13,3 кДж/(кг · К). **11.14.** 1,42. **11.15.** 0,725. **11.16.** При постоянном давлении. **11.17.** 1,33. **11.18.** 166 Дж. **11.19.** 400 Дж. **11.20.** 6,62 кДж. **11.21.** 454 К. **11.22.** 416 Дж. **11.23.** $T_2 = T_1 n^{\gamma-1} =$ $= 754$ К; $A = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 674$ Дж. **11.24.** 1,81 кДж. **11.25.** 1) 556 кДж; 2) 556 кДж; 3) 0. **11.26.** 1) 5 МДж; 2) 0; 3) 5 МДж. **11.27.** 62,5 Дж. **11.28.** 390 К; 520 кПа. **11.29.** 1) 0,4 МДж; 2) 160 кДж; 3) 560 кДж. **11.30.** 6 кДж; 15 кДж. **11.31.** 1) 3,25 МДж; 2) 0,4 МДж; 3) 3,65 МДж. **11.32.** 1) 520 Дж; 2) 208 Дж; 3) 312 Дж. **11.33.** 1) 0,6, 0,4; 2) 0,71, 0,29; 3) 0,75, 0,25. **11.34.** 1 кДж. **11.35.** 1) 0; 2) 11,6 кДж; 3) 11,6 кДж. **11.36.** 1) 0; 2) 126 кДж; 3) 126 кДж. **11.37.** 20,8 кДж; 19,2 кДж. **11.38.** $A = Q = 1{,}28$ кДж. **11.39.** $A = Q = 2{,}06$ кДж. **11.40.** $V_2/V_1 =$ $= e^{Q/(\nu RT)} = 2{,}23$ (ν — количество вещества кислорода). **11.41.** 191 Дж. **11.42.** 1) 21 кДж; 2) 6 кДж. **11.43.** $\Delta T = T_2\left[1 - \frac{T_1 p_0}{T_2 p_1}\right]^{(\gamma-1)\gamma} = 76$ К. **11.44.** $m = \frac{M(\gamma-1)n^{\gamma-1}\Delta U}{RT_1(n^{\gamma-1}-1)} = 67{,}2$ г. **11.45.** $-3{,}8$ МДж. **11.46.** 157 К; -21 кДж. **11.47.** 1) $\Delta T = \frac{2M\Delta U}{imR} = 616$ К; 2) $p_2 = p_1(T_2 - T_1)^{\gamma(\gamma-1)} =$ $= 11{,}4$ МПа, где $T_1 = T_2 - \Delta T$. **11.48.** 2,52 МПа. **11.49.** 17,6. **11.50.** $\Delta U =$ $= 11{,}3$ кДж; $Q = 17{,}1$ кДж; $A = 5{,}8$ кДж. **11.51.** 1) $-41{,}6$ кДж; 2) $-41{,}6$ кДж; 3) 0. **11.52.** $Q = \Delta U = 7{,}5$ кДж. **11.53.** 0,193. **11.54.** 400 Дж. **11.55.** 296 К; 493 К; 986 К; 592 К; 8,9%. **11.56.** 1) 7,61 кДж; 2) 7,21 кДж; 3) 0,4 кДж; 4) 5,3%. **11.57.** $T_2 = T_3 = T_1\frac{p_2}{p_1} = 600$ К; $\eta = \frac{T_2 \ln(p_2/p_1) - (T_2 - T_1)}{T_2 \ln(p_2/p_1) + (i/2)(T_2 - T_1)} =$ $= 0{,}099 = 9{,}9\%$. **11.58.** 1) $T_1 = 600$ К; $T_2 = 120$ К; $V_2 = 1$ м^3; $V_3 =$ $= 0{,}09$ м^3; $p_3 = 5{,}56$ МПа; 2) 2 МДж; 3) 1 МДж; 4) 1 МДж; 5) 50%. **11.59.** 0,11. **11.60.** 420 К. **11.61.** 1,88. **11.62.** 28 кДж. **11.63.** 0,404; 59,6 Дж. **11.64.** 1/4. **11.65.** 14%; 1,16 раза. **11.66.** 4 Дж. **11.67.** 0,74 м^3.

11.68. 10,9%. **11.69** $\theta = \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} = 323\,\text{К}$; $\Delta S = cm_1 \ln(\theta/T_1) + cm_2 \ln(\theta/T_2) = 0{,}3\,\text{кДж/К}$ (c — удельная теплоемкость воды). **11.70.** 7,2 Дж/К. **11.71.** 2,43 Дж/К. **11.72.** 291 Дж/К. **11.73.** $m_2 = m_1 r \times \dfrac{1}{\lambda + c(t_2 - t_1)} = 251\,\text{г}$; $\Delta S = \dfrac{m_1 r}{T_1} - \dfrac{m_2\lambda}{T_2} - cm_2 \ln\dfrac{T_2}{T_1} = 610\,\text{Дж/кг}$ (r — удельная теплота парообразования; λ — удельная теплота плавления). **11.74.** $\Delta S_1 = 836\,\text{Дж/К}$; $\Delta S_2 = 0$. **11.75.** $\Delta S = (m/M) \times (C_p - C_V)\ln n = (m/M)R\ln n = 457$. **11.76.** 1) 882 К; 2) 572 К. **11.77.** 1) 2,30 кДж; 2) 340 К; 3) 1,25 кДж. **11.78.** 1) −1,73 кДж; −1,19 кДж; 2) 396 К; 3)1,19 кДж. **11.79.** 1) $\Delta U = \nu\dfrac{i}{2}R\dfrac{\Delta p}{p}T = 56{,}1\,\text{кДж}$; 2) $\Delta H = \nu\dfrac{i+2}{2}R\dfrac{\Delta p}{p}T = 78{,}5\,\text{кДж}$; 3) $\Delta S = \nu\dfrac{i}{2}R\ln\dfrac{p+\Delta p}{p} = 114\,\text{Дж/К}$. **11.80.** 1) $\Delta U = \dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 5{,}19\,\text{кДж}$; 2) $\Delta H = \dfrac{m}{M}\dfrac{i+2}{2}R \times (T_2 - T_1) = 7{,}27\,\text{кДж}$; 3) $\Delta S = \dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}R\ln\dfrac{T_2}{T_1} = 14{,}9\,\text{Дж/К}$. **11.81.** $\eta = 1 - \dfrac{\gamma}{2^\gamma - 1} = 0{,}236$. **11.82.** $\eta = \dfrac{2\gamma}{2 + 3(\gamma - 1)\ln 3} = 0{,}156$. **11.83.** $\eta = 1 - \dfrac{\gamma}{2^\gamma - 1} = 0{,}236$. **11.84.** $\Delta U = \dfrac{m}{M}(ML - RT_\text{к}) = 75{,}2\,\text{Дж}$. **11.85.** $\Delta S = m C_\text{уд} \ln\dfrac{T_\text{пл}}{T_1} + \dfrac{mr}{T_\text{пл}} = 1{,}46\,\text{Дж}$. **11.86.** $\Delta S = \dfrac{m}{M}C_m \ln\dfrac{T_\text{к}}{T_1} + \dfrac{mL}{T_\text{к}} = 697\,\text{Дж/К}$.

§ 12.

12.1. 1) 108 кПа; 2) 86,2 см^3. **12.2.** 4,78 МПа (4,99 МПа). **12.3.** 1) 8,31 МПа; 2) 5,67 МПа. **12.4.** 1) 0,0264; 2) 0,272. **12.5.** $p = \dfrac{\rho RT}{2M - \rho b} - \dfrac{\rho^2 a}{4M} = 544\,\text{МПа}$ (ρ — плотность воды; a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса; M — молярная масса). **12.6.** $T = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{Mp}{\rho} - pb + \dfrac{a\rho}{M}\right) - \dfrac{1}{R}\dfrac{ab\rho^2}{M^2} = 287\,\text{К}$ (M — молярная масса). **12.7.** 1) 174 кПа; 2) 3,94 МПа; 3) 101 МПа. **12.8.** $a = \dfrac{27}{64}\dfrac{T_\text{кр}^2 R^2}{p_\text{кр}} = 0{,}136\,\text{Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$, $b = \dfrac{1}{8}\dfrac{T_\text{кр}R}{p_\text{кр}} = 3{,}86 \cdot 10^{-5}\,\text{м}^3/\text{моль}$. **12.9.** 1) 150 К, 5 МПа; 2) 654 К, 22,6 МПа. **12.10.** $V_{m_\text{кр}} = 3b = \dfrac{3}{8}\dfrac{T_\text{кр}}{p_\text{кр}}R = 96{,}8\,\text{см}^3/\text{моль}$. **12.11.** $\varepsilon = \dfrac{M}{3b\rho} = 0{,}264$. **12.12.** $V_\text{max} = V_{m_\text{кр}}\nu = 3b\nu$; $V_\text{max} = 91{,}2\,\text{см}^3$. **12.13.** 197 кг/м^3.

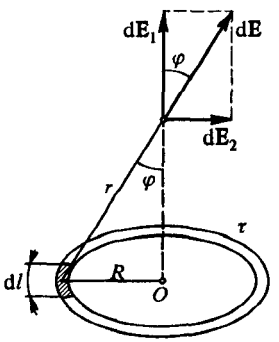
12.14. $p_{max} = p_{кр} = \dfrac{a}{27b^2} = 21{,}8$ МПа. **12.15.** В 193 раза. **12.16.** 1) 1,45 см^3; 2) 5 см^3. **12.17.** В 1,5 раза. **12.18.** $T = \dfrac{10}{3}T_{кр} = 600$ К. **12.19.** Увеличится в 2,45 раза. **12.20.** В 5 раз. **12.21.** 1) 2,61 кДж; 2) 2,55 кДж; 3) 1,94 кДж; 4) 1,45 кДж. **12.22.** 1) $9{,}43 \cdot 10^{-3}$; 2) 0,103. **12.23.** 1) 22,4 кДж; 2) 9,2 кДж. **12.24.** $U = \dfrac{m}{M}C_V T - \dfrac{m^2 a}{M^2 V} = 1{,}13$ кДж (где a — постоянная Ван-дер-Ваальса). **12.25.** $\Delta U = \dfrac{a\Delta V}{V_1 V_2} = 104$ Дж. **12.26.** $A = \left(\dfrac{m}{M}\right)^2 a\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right) =$ $= 1{,}65$ Дж. **12.27.** $\Delta T = -\dfrac{ma}{MC_V}\dfrac{\Delta V}{V_1 V_2} = -20{,}9$ К. **12.28.** $Q = \left(\dfrac{m}{M}\right)^2 a \times$ $\times \dfrac{\Delta V}{V_1 V_2} = 58{,}5$ Дж. **12.29.** 22,2 мН/м. **12.30.** 4,4 мм. **12.31.** 3 мДж. **12.32.** 0,648 мкДж. **12.33.** 3,2 кг/м^3. **12.34.** 62,5 Па. **12.35.** 73 Н. **12.36.** 58,2 мН. **12.37.** 62 мН/м. **12.38.** $\Delta p = +399$ Па. **12.39.** 22,5 мН/м. **12.40.** 22 мН/м. **12.41.** 23,1 мг. **12.42.** 6,37 см. **12.43.** 26 кПа. **12.44.** 7,3 см. **12.45.** 0,45 м/с. **12.46.** 4,33 м/с. **12.47.** $Q_V = S_1 v_1 = S_1 S_2\sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}} =$ $= 1{,}88$ л/с (v_1 — скорость жидкости в широкой части трубы). **12.48.** 100 м/с; 5 МПа. **12.49.** 5 м/с. **12.50.** 8,80 м/с. **12.51.** 31,4 Н. **12.52.** 1,4 м. **12.53.** $p = \dfrac{\rho g l^2}{4H}\left[1 - \left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2\right] = 77{,}9$ кПа (ρ — плотность воды). **12.54.** 1 м. **12.55.** $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho\langle v\rangle d}{\eta} = 5000$ (η — динамическая вязкость); движение турбулентное, так как полученное число Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ ($\mathrm{Re}_{кр} = 2300$). **12.56.** 1,94 см/с. **12.57.** $Q_{m\ max} =$ $= (1/4)\pi\eta\,\mathrm{Re}_{кр}\,d = 54{,}2$ г/с (η — динамическая вязкость масла; $\mathrm{Re}_{кр}$ — критическое число Рейнольдса). **12.58.** $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)gd^3}{18\eta^2} = 4{,}17$ (ρ_1 и ρ_2 — плотности меди и масла; η — динамическая вязкость масла); так как полученное число Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, то движение турбулентное. **12.59.** 1) $v = \dfrac{(\rho_1 - \rho_2)gd^2}{18\eta} = 6{,}71$ мм/с (ρ_1 и ρ_2 — плотность латуни и глицерина; η — динамическая вязкость глицерина); 2) обтекание шарика ламинарное. **12.60.** $v_2 = \dfrac{\rho_1 r_1 \eta_2}{\rho_2 r_2 \eta_1} v_1 = 27{,}7$ см/с (ρ_1 и η_1 — плотность и динамическая вязкость касторового масла; ρ_2 и η_2 — те же величины для глицерина).

§ 13.

13.1. $9 \cdot 10^9$ Н. **13.2.** $Q = 4l \sin(\alpha/2)\sqrt{\pi\varepsilon_0 gm \operatorname{tg}(\alpha/2)} = 50{,}1$ нКл. **13.3.** $\varepsilon = \dfrac{\rho}{\rho - \rho_0} = 2$. **13.4.** $Q = 2m\sqrt{\pi\varepsilon_0 G} = 86{,}7 \cdot 10^{-15}$ Кл (G — гравитационная постоянная). **13.5.** $v = \dfrac{|e|}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}} = 2{,}19 \cdot 10^6$ м/с; $n = v/(2\pi r) = 6{,}58 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$ (m — масса электрона; e — его заряд). **13.6.** $F = \dfrac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{1}{r_1^4} + \dfrac{1}{r_2^4}} = 287$ мН. **13.7.** $F = \dfrac{6Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 54$ мН. **13.8.** $Q_1 = 2r\sqrt{\pi\varepsilon_0}(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_2 - F_1}) = 0{,}14$ мкКл; $Q_2 = 2r\sqrt{\pi\varepsilon_0}(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_2 - F_1}) = 20$ нКл. **13.9.** 0,09 мкКл; −0,01 мкКл. **13.10.** Между зарядами на расстоянии $x = 40$ см от заряда $4Q$; положительный. **13.11.** Точка находится на расстоянии $l_1 = 20$ см от заряда Q_1; -8×10^{-8} Кл; неустойчивое. **13.12.** $Q_1 = Q\sqrt{3}/3 = -0{,}577$ нКл; не будет устойчивым. **13.13.** $Q_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right)Q = -0{,}287$ нКл. **13.14.** $F = \dfrac{Q\tau l}{4\pi\varepsilon_0(l + a)a} = 1{,}5$ мН. **13.15.** $F = \dfrac{Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = 4{,}5$ мН. **13.16.** $F = \dfrac{\sqrt{2}Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = 6{,}37$ мН. **13.17.** $F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} = 1{,}27$ мкН. **13.18.** 9 мН. **13.19.** $F = \dfrac{\sqrt{5}Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = 4{,}03$ мН. **13.20.** 1) $F_1 = \dfrac{QQ_1 l_1}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + l_1^2)^{3/2}} = 15{,}7$ кН; 2) $F_2 = \dfrac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2} = 2{,}25$ мкН. **13.21.** $F = \dfrac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0 R} = 3{,}6$ мН. **13.22.** $F = \dfrac{Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 R} = 35$ мкН.

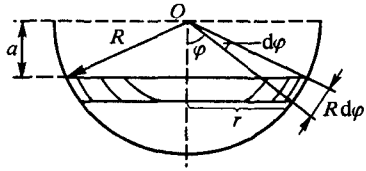
§ 14.

14.1. 4,09 кВ/м. **14.2.** 2,99 кВ/м; 607 В/м. **14.3.** 280 В/м. **14.4.** 6 см; 12 см. **14.5.** За отрицательным зарядом на расстоянии $d_1 = d(\sqrt{2} + 1)$. **14.6.** 34 кВ/м. **14.7.** $E = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\tau R\sqrt{r^2 - R^2}}{\varepsilon_0 r^3} = 2{,}71$ кВ/м. Решение. Из рисунка следует, что элемент заряда $\mathrm{d}Q$, находящийся на элементе $\mathrm{d}l$, создает напряженность $\mathrm{d}E = \dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, или $\mathrm{d}E = \dfrac{\tau\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Разложим $\mathrm{d}E$ на две составляющие: $\mathrm{d}E_1$ — по нормали к плоскости кольца и $\mathrm{d}E_2$ — параллельно ей, и просуммируем эти составляющие для всех элементов кольца. При этом составляющие, параллельные плоскости кольца, в сумме дадут нуль. Сумма вертикальных составляющих выразится интегралом $E =$

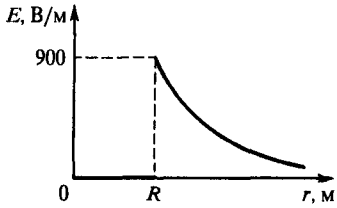


К ответу 14.7

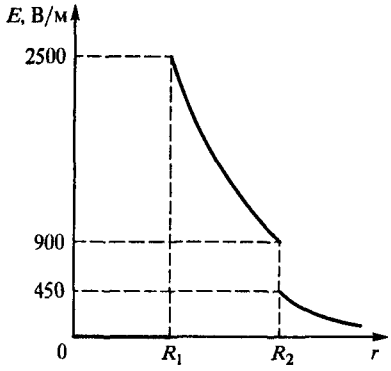
$= \dfrac{\tau \cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int\limits_0^l \mathrm{d}l$. Выражая $\cos\varphi$ через r и R, получим после интегрирования окончательную формулу, приведенную выше. **14.8.** $E = \sigma/(4\varepsilon_0) = 28{,}3$ В/м. Решение. Полусферу разобьем на дифференциально тонкие кольца (см. рисунок) с зарядом $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S = 2\pi r\sigma R\,\mathrm{d}\varphi$, тогда напряженность $\mathrm{d}E$, создаваемая таким кольцом в центре полусферы, $\mathrm{d}E = \dfrac{a\,\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ (см. задачу 14.7). Учитывая, что $r = R\sin\varphi$ и $a = R\cos\varphi$, после



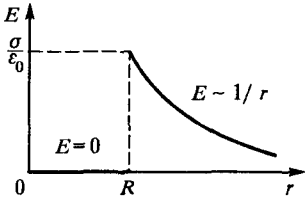
К ответу 14.8



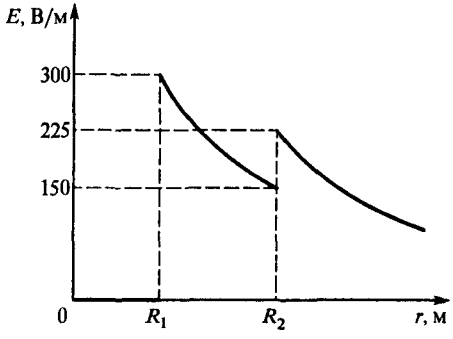
К ответу 14.9



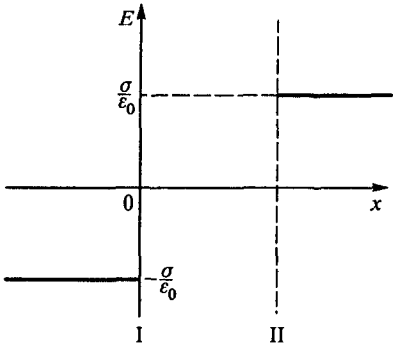
К ответу 14.10



К ответу 14.14

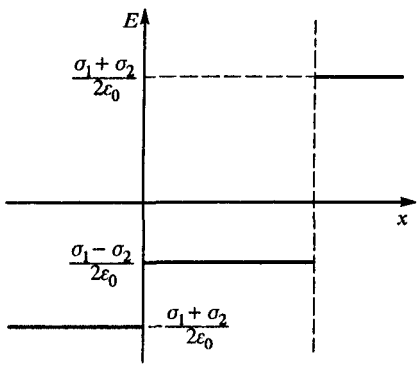


К ответу 14.15

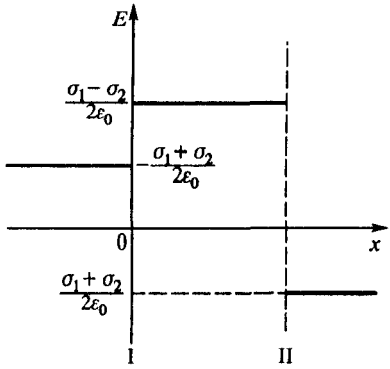


К ответу 14.21

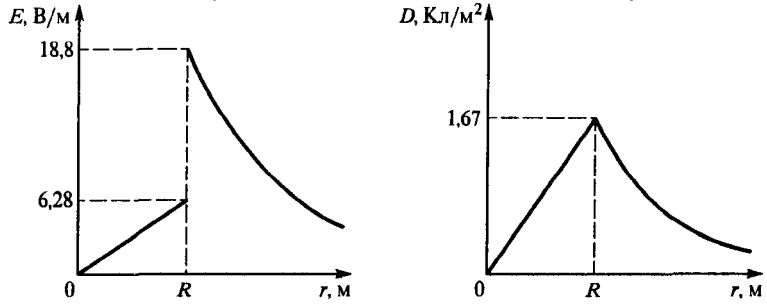
интегрирования получим $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$. **14.9.** 1) 0; 2) 900 В/м; 3) 400 В/м; график см. на рисунке. **14.10.** $E_1 = 0$; $E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = 1{,}11$ кВ/м; $E_3 = \frac{Q - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2} = 200$ В/м; график см. на рисунке. **14.11.** 5,55 нКл/м. **14.12.** 43,2 МВ/м. **14.13.** 64,3 кВ/м. **14.14.** $E_1 = 0$; $E_2 = R\sigma/(\varepsilon_0 r_2) = 75{,}5$ В/м; график см. на рисунке. **14.15.** $E_1 = 0$; $E_2 = \tau_1/(2\pi\varepsilon_0 r_2) = 200$ В/м; $E_3 = (\tau_1 + \tau_2)/(2\pi\varepsilon_0 r_3) = 180$ В/м, график см. на рисунке. **14.16.** $E = \tau/(8\pi\varepsilon_0 l) = 135$ кВ/м. **14.17.** $E = \frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{4r^2 + l^2}} = 55{,}7$ кВ/м. **14.18.** 35,6 кВ/м. **14.19.** 60,2 кВ/м. **14.20.** 38,0 кВ/м. **14.21.** 1) $E = 0$; 2) $E = \sigma/\varepsilon_0 = 113$ В/м; график см.



К ответу 14.22



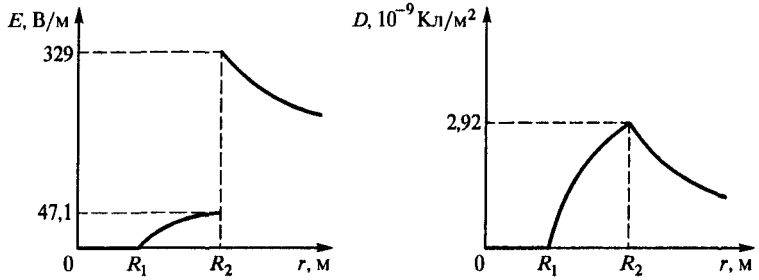
К ответу 14.23



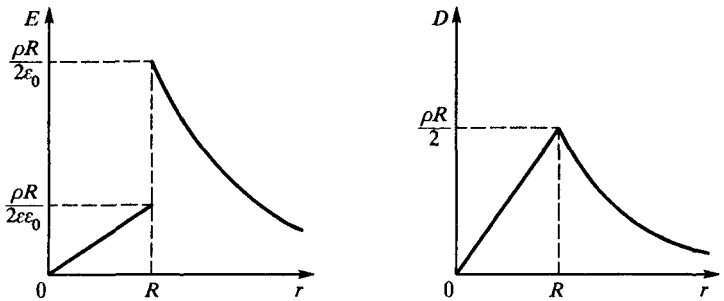
К ответу 14.27

на рисунке. **14.22.** 1) $E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_0} = 113$ В/м; 2) $E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{\varepsilon_0} =$ $= 226$ В/м; график см. на рисунке. **14.23.** 1) 396 В/м; 2) 170 В/м; график см. на рисунке. **14.24.** $E = \frac{|Q_1 - Q_2|}{2\varepsilon_0 ab} = 377$ кВ/м. **14.25.** $F =$

$= \frac{1}{2}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\varepsilon_0}S = 16{,}9$ мкН. **14.26.** $|Q| = R\sqrt{2\pi\varepsilon_0 F} = 33{,}3$ нКл. **14.27.** 1) $E_1 = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}r_1 = 3{,}78$ В/м; $D_1 = \frac{1}{3}\rho r_1 = 0{,}1$ нКл/м^2; 2) $E_2' = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}R = 6{,}28$ В/м (для $r \leqslant R$); $E_2'' = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R = 18{,}8$ В/м (для $r \geqslant R$); $D_2' = \frac{1}{3}\rho R = 167$ пКл/м^2; 3) $E_3 = \frac{1}{3}\frac{\rho R^3}{\varepsilon_0 r_2^2} = 4{,}72$ В/м; $D_3 = \frac{1}{3}\rho\frac{R^3}{r_2^2} = 41{,}7$ пКл/м^2; график см. на рисунке. **14.28.** 1) $E_1 = 0$; $D_1 = 0$; 2) $E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\left(r_2 - \frac{R_1^3}{r_2^2}\right) = 13{,}6$ В/м; $D_2 = 843$ пКл/м^2; 3) $E_3 =$



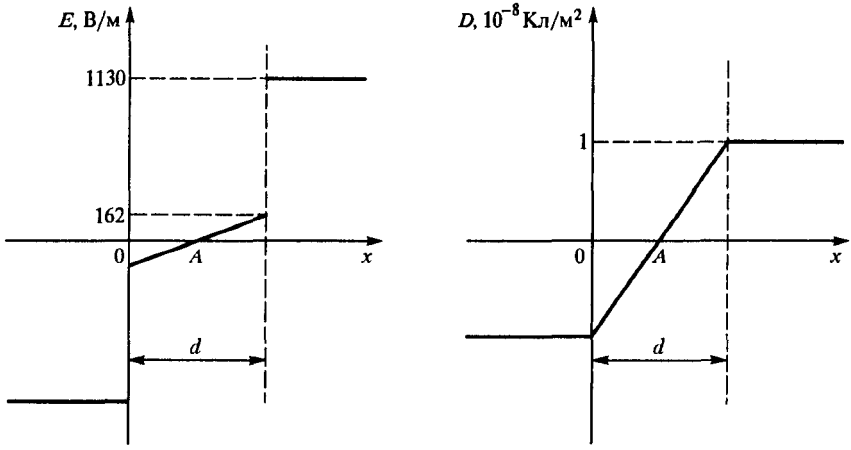
К ответу 14.28



К ответу 14.29

$= \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0\varepsilon r_3^2} = 229$ В/м; $D_3 = 2{,}02$ нКл/м^2; график см. на рисунке. **14.29.** 1) $E_1 = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}r_1 = 2{,}83$ В/м; $D_1 = 50$ пКл/м^2; 2) $E_2 = \frac{1}{2}\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}R^2 = 7{,}55$ В/м; $D_2 = 66{,}7$ пКл/м^2; график см. на рисунке. **14.30.** $E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 56{,}5$ В/м. **14.31.** $E_A = 0$; $D_A = 0$; $E_B = \frac{\rho d}{4\varepsilon_0\varepsilon} = 80{,}8$ В/м; $D_B = \frac{\rho d}{4} = 5$ нКл/м^2; $E_c' = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 162$ В/м ($x \leqslant d$); $E_c'' = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} = 1{,}13$ кВ/м ($x \leqslant d$); $D_C = \rho d/2 = 10$ нКл/м^2; график см. на рисунке.

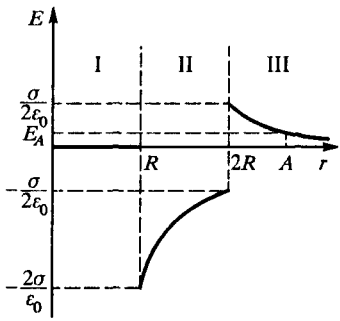
14.32. Действие индуцированного заряда эквивалентно действию точечного заряда, являющегося зеркальным изображением заряда Q; $F = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} = 0{,}9$ мкН. **14.33.** $E = \dfrac{Q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{5-2\sqrt{2}} = 3{,}32$ кВ/м (см. задачу 14.32). **14.34.** $E = \dfrac{3Q}{64\pi\varepsilon_0 a^2} = 750$ В/м. **14.35.** $Q = 2(a - l\sin\alpha)\times$



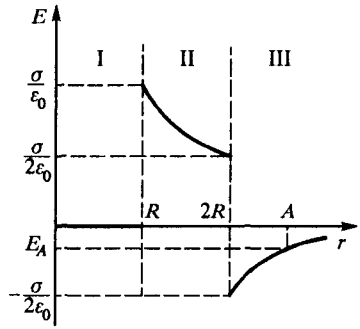
К ответу 14.31

$\times\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 20$ нКл. **14.36.** $F = \dfrac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0{,}36$ Н. **14.37.** $F = \dfrac{Q\sigma}{2\varepsilon_0} =$ $= 56{,}5$ мкН. **14.38.** $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0 F}{Q} = 1{,}06$ мкКл/м^2. **14.39.** $F_2 = \dfrac{\varepsilon_0 F_1^2 S}{2Q^2} =$ $= 4{,}92$ мН. **14.40.** $\dfrac{F}{l} = \dfrac{\sigma\tau}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 452$ нН/м. **14.41.** 1) 56,5 мН; 2) 0,9 мкН. **14.42.** $p = (1/2)\varepsilon_0\varepsilon E^2 = 27{,}9$ кПа. **14.43.** $\dfrac{F}{l} = \dfrac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r} = 3{,}6$ мН/м. **14.44.** $F = \dfrac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_l^{2l}\dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \dfrac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln 2 = 1{,}25$ мН. **14.45.** $F = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}\int\limits_{2R}^{3R}\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} =$ $= \dfrac{1}{6}\dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} = 150$ мкН. **14.46.** $F = \dfrac{\tau_1\tau_2}{\pi\varepsilon_0} = 36$ мН. **14.47.** $F = \dfrac{\tau_1\tau_2}{\varepsilon_0} =$ $= 1{,}13$ мН. **14.48.** $F = \dfrac{\tau^2}{2\varepsilon_0} = 56{,}5$ мН. **14.49.** $\Phi_E = \dfrac{\pi\sigma r^2}{2\varepsilon_0} = 1{,}78$ кВ$\cdot$м. **14.50.** $\Psi = (1/2)\sigma a^2\sin\beta = 2{,}5$ нКл. **14.51.** $\Phi_E = \dfrac{QS}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 4{,}5$ В$\cdot$м. **14.52.** $\Psi = \dfrac{Q\Omega}{4\pi} = 1{,}19$ нКл. **14.53.** $\Phi_E = \dfrac{abQ\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 2{,}7$ В$\cdot$м. **14.54.** $\Psi =$ $= \dfrac{Qa}{2}\int\limits_0^R\dfrac{r\,\mathrm{d}r}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \dfrac{Q}{2}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right) = 10$ нКл. **14.55.** $\langle E_n\rangle =$

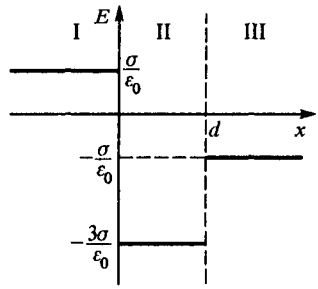
$= \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\dfrac{\sqrt{r^2-R^2}}{r}\right) = 250\,\text{кВ/м}$. **14.56.** $\Psi = \dfrac{b\tau}{\pi}\arcsin\dfrac{a}{2r} =$ $= 20\,\text{нКл}$. **14.57.** $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}(2-\sqrt{2})^{1/2} = 8{,}61\,\text{кВ/м}$; $\beta = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) =$ $= 67°30'$. **14.58.** $E = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sqrt{5} = 26{,}8\,\text{кВ/м}$; $\beta = \arcsin(1/\sqrt{5}) =$ $= 26°34'$. **14.59.** $E = \dfrac{3\sqrt{3}\,Q}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2} = 37{,}2\,\text{кВ/м}$. **14.60.** $E = \dfrac{Q}{3\pi^2\varepsilon_0 R^2}\ln 2 =$ $= 5{,}29\,\text{кВ/м}$. **14.61.** $E = \dfrac{\sigma\ln 2}{2\pi\varepsilon_0}\sin\dfrac{\theta}{2} = 936\,\text{кВ/м}$. **14.62.** $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\theta =$



К ответу 14.67



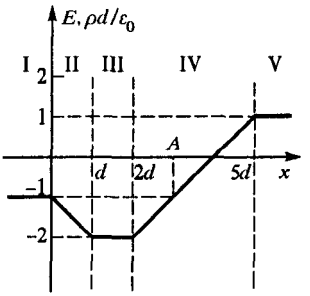
К ответу 14.68



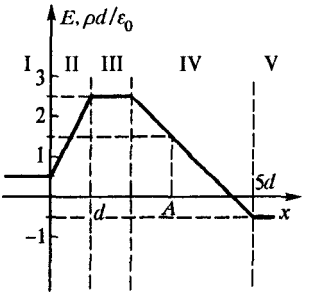
К ответу 14.69

$= 1{,}96\,\text{кВ/м}$. **14.63.** $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin^2\theta = 847\,\text{кВ/м}$. **14.64.** $E = \dfrac{\rho R}{4\varepsilon_0} =$ $= 16{,}9\,\text{кВ/м}$. **14.65.** $E = \dfrac{\rho R}{4\varepsilon_0} = 16{,}9\,\text{кВ/м}$. **14.66.** $E = \dfrac{\rho R}{4\varepsilon_0}\sin^2\theta =$ $= 2{,}82\,\text{кВ/м}$. **14.67.** 1) $E_{\text{I}} = 0$ $(r < R)$; $E_{\text{II}}(r) = -\dfrac{2\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$ $(R \leqslant r < 2R)$;

$E_{III}(r) = \dfrac{2\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$ $(r \geqslant 2R)$; 2) $E_A = \dfrac{2\sigma}{9\varepsilon_0} = 2{,}51$ кВ/м; 3) см. рисунок. **14.68.** 1) $E_I = 0$ $(r < R)$; $E_{II}(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$ $(R \leqslant r < 2R)$; $E_{III}(r) = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$ $(r \geqslant 2R)$; 2) $E_A = -\dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0} = -2{,}26$ кВ/м; 3) см. рисунок. **14.69.** 1) $E_I = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$; $E_{II} = -\dfrac{3\sigma}{\varepsilon_0}$; $E_{III} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$; 2) $E_A = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = -4{,}52$ кВ/м; 3) см. рисунок. **14.70.** $E_0 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 37{,}7$ кВ/м; $E_A = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho R}{\varepsilon_0}\sqrt{4 + \dfrac{1}{25} - \dfrac{8}{5\sqrt{5}}} = 68{,}6$ кВ/м; $E_B = \dfrac{17}{27}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 71{,}1$ кВ/м. **14.71.** $E_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 33{,}9$ кВ/м; $E_A = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R\sqrt{\dfrac{13}{5}} = 54{,}5$ кВ/м; $E_B = \dfrac{5}{6}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 56{,}5$ кВ/м. **14.72.** $E_{0_1} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 22{,}6$ кВ/м; $E_A = \dfrac{2}{3}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R\left(1 - \dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right) = 49{,}5$ кВ/м. **14.73.** $E_{0_1} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 16{,}9$ кВ/м; $E_A = \dfrac{5}{3}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R = 40{,}7$ кВ/м. **14.74.** 1) $E_I = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d =$ $= \text{const}$ $(x \leqslant 0)$; $E_{II}(x) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(x - 4d)$ $(0 \leqslant x \leqslant d)$; $E_{III}(x) = -\dfrac{2\rho}{\varepsilon_0}d =$ $= \text{const}$ $(d \leqslant x \leqslant 2d)$; $E_{IV} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(x - 4d)$ $(2d \leqslant x \leqslant 5d)$; $E_V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d =$ $= \text{const}$ $(x \geqslant 5d)$; 2) $E_A = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d = -22{,}6$ кВ/м; 3) см. рисунок.



К ответу 14.74



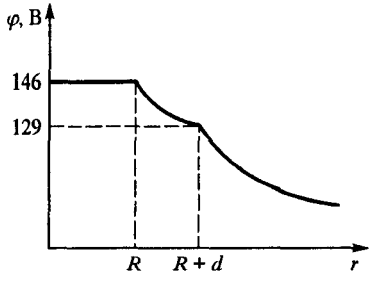
К ответу 14.75

14.75. 1) $E_I = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d = \text{const}$ $(x \leqslant 0)$; $E_{II}(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(d + 4x)$ $(0 \leqslant x \leqslant d)$; $E_{III} = \dfrac{5}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d = \text{const}$ $(d \leqslant x \leqslant 2d)$; $E_{IV} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}(9d - 2x)$ $(2d \leqslant x \leqslant 5d)$; $E_V = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d = \text{const}$ $(x \geqslant 5d)$; 2) $E_A = \dfrac{3}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}d = 33{,}9$ кВ/м; 3) см. рисунок.

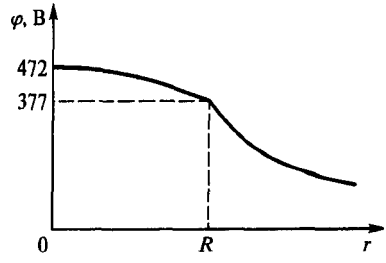
§ 15.

15.1. 1 кВ. **15.2.** $A_1 = -A = -4$ мкДж; $\Delta\varphi = A/Q = 200$ В. **15.3.** $\dfrac{\Delta\Pi}{Q_2} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right) = -162$ Дж/Кл. **15.4.** $A = 4{,}5$ мкДж. Интегрируя в пределах от r_1 до r_2 выражение $\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}r = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r$, найдем $A = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$; потенциальная энергия возрастет на $\Delta\Pi = 4{,}5$ мкДж. **15.5.** $\varphi = 45$ В. **15.6.** $\varphi = 6$ кВ, $d_{\min} = r_2 - r_1 = 10$ см; $d_{\max} = r_1 + r_2 = 40$ см. **15.7.** $E = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{1}{(r^2+d^2)^2} - \dfrac{2}{r(r^2+d^2)^{3/2}}} = 664$ кВ/м; $\varphi = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{\sqrt{r^2+l^2}}\right) = 26{,}4$ кВ. **15.8.** $\Pi = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 90$ мкДж. **15.9.** $\Pi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3) = -63$ мкДж. **15.10.** $\Pi = \dfrac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 48{,}8$ мкДж. **15.11.** $\Pi = -\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{2} = -12{,}7$ мкДж, если заряды одного знака расположены в противоположных вершинах квадрата; $\Pi = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{2} = 12{,}7$ мкДж, если в противоположных вершинах заряды разных знаков. **15.12.** $(x-10)^2 + y^2 = 8^2$. **15.13.** $\Delta\Pi = \dfrac{Q_1Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) = -498$ мкДж. **15.14.** $\varphi = \dfrac{\tau R}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+R^2}} = 505$ В. **15.15.** $\varphi = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2 = 62{,}4$ В. **15.16.** $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{l+a}{a} = 36{,}5$ В. **15.17.** 33,6 В. **15.18.** $\Delta\varphi = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_2}{r_1} = 125$ В. **15.19.** 1) $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R} = 360$ В; 2) $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+a^2} - a) = 149$ В. **15.20.** 1) 75 В; 2) 135 В; 3) 100 В. **15.21.** 1) 146 В; 2) 136 В; 3) 100 В; график см. на рисунке. **15.22.** 1) $\varphi_2 = (R_1/R_2)\varphi_1 = 200$ В; 2) $\varphi_2 = \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}\varphi_1 = 100$ В. **15.23.** $\Delta\varphi = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}d = 56{,}6$ В. **15.24.** $\varphi = ER = 300$ кВ; $\sigma = \varepsilon_0 E = 55{,}6$ мкКл/м^2. **15.25.** $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_0}d = 141$ В. **15.26.** 170 В. **15.27.** $1{,}04\cdot 10^9$. **15.28.** 432 В. **15.29.** $U = \dfrac{d}{R}\sqrt{\dfrac{2F}{\pi\varepsilon_0}} = 1{,}2$ кВ. **15.30.** $\Delta\Pi = -\dfrac{e\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{3}{2} = -229$ эВ. **15.31.** $A_{1,2} = -\dfrac{1}{2}Q\varphi_1 = 6$ мкДж. **15.32.** $\Delta\varphi = \dfrac{1}{8}\dfrac{\rho d^2}{\varepsilon_0\varepsilon} = 8{,}07$ В. **15.33.** $\varphi_1 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}R^2\left(1 + \dfrac{1}{2\varepsilon}\right) = 472$ В; $\varphi_2 =$

$= \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 = 377$ В; график см. на рисунке. **15.34.** 1) $\varphi_1 = \frac{(R_2^3 - R_1^3)\rho}{3\varepsilon_0 R_2} =$ $= 238$ В; 2) и 3) $\varphi_2 = \varphi_3 = 116$ В. **15.35.** $\operatorname{grad}\varphi = -E$; $|\operatorname{grad}\varphi| = E =$ $= \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 226$ В/м; градиент направлен к плоскости, перпендикулярно ей.



К ответу 15.21



К ответу 15.33

15.36. 0,6 В. **15.37.** 0,12 В. **15.38.** $|\operatorname{grad}\varphi| = \varphi/r = 200$ В/м; градиент направлен к заряду. **15.39.** $|\operatorname{grad}\varphi| = \tau/(2\pi\varepsilon_0 r) = 180$ В/м; градиент направлен к нити вдоль силовой линии. **15.40.** $\Delta\varphi = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} = 3{,}14$ В. **15.41.** $A_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 8{,}91$ мДж; $A_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = 9$ мДж. **15.42.** $A_{1,2} = \frac{1}{3}Q_1\varphi_1 = 1$ мкДж. **15.43.** $A_{1,2} = \frac{QQ_1}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$ $= 659$ мкДж. **15.44.** $A = \frac{\sigma Q l}{2\varepsilon_0}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1{,}96$ мкДж. **15.45.** 2,62 мкДж; см. пример 5 на с. 239. **15.46.** $A = \frac{Q\tau}{4\varepsilon_0} = 25{,}2$ мкДж. **15.47.** $A = \frac{Q\tau}{2\varepsilon_0} \times$ $\times\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right) = 47$ мкДж. **15.48.** $A_{1,2} = \frac{Q\tau}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 165$ мкДж. **15.49.** $A_{1,2} = (1/4)Q\varphi = 250$ мкДж. **15.50.** $A_{1,2} = \frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2 = 62{,}4$ мкДж. **15.51.** $s = \frac{|e|Et^2}{2m} = 1{,}76$ см; $v = |e|Et/m = 35{,}2\cdot 10^6$ м/с (m и e — масса и заряд электрона). **15.52.** 1) 2,55 кВ; 2) 4,69 МВ. **15.53.** $1{,}58\cdot 10^{16}$ м/с^2; $5{,}63\cdot 10^6$ м/с; 0,356 нс. **15.54.** 15 МэВ; 2,19 м/с. **15.55.** 24,3 МКл/кг. **15.56.** $l = \frac{3mv^2}{2eE} = 5{,}19$ мм (m — масса протона). **15.57.** $l_{\min} = l_0 -$ $- \frac{\varepsilon_0 T}{|e|\sigma} = 1$ см. **15.58.** $2{,}24\cdot 10^6$ м/с; отклонится на 45° от первоначального направления. **15.59.** $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{3}{2}\frac{m}{e}v_1^2 = 289$ В (m и e — масса и

заряд протона). **15.60.** $l = \dfrac{3}{8}\dfrac{m}{|e|}\dfrac{v_1^2}{E} = 2{,}13$ мм. **15.61.** $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{|e|}{m}\varphi} =$ $= 0{,}24 \cdot 10^6$ м/с (e/m — удельный заряд протона). **15.62.** $\varphi_2 = \varphi_1 -$ $- \dfrac{3}{8}\dfrac{m}{|e|}v_1^2 = 23{,}3$ В (m — масса электрона). **15.63.** $T = \dfrac{|e|\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln 10 =$ $= 828$ эВ. **15.64.** $F = 2{,}4 \cdot 10^{-17}$ Н; $a = 2{,}75 \cdot 10^{13}$ м/с^2; $v = 4{,}07 \cdot 10^6$ м/с. **15.65.** 5,9 мм. **15.66.** 79,6 В. **15.67.** 22,5 В. **15.68.** $r_{\min} = \dfrac{eQ\,(1 + m_1/m_2)}{2\pi\varepsilon_0 m_1 (v_1 + v_2)^2} =$ $= 767$ пм (e — заряд протона; Q — заряд α-частицы); $u_1 = u_2 =$ $= \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}v = 60$ км/с. **15.69.** $r_{\min} = \dfrac{3e}{4\pi\varepsilon_0 U} = 72$ фм. **15.70.** $r_{\min} =$ $= \dfrac{e^2}{\pi\varepsilon_0 m v^2} = 10{,}1$ пм (m — масса электрона).

15.71. $r_{\min} = \dfrac{Q_1 Q_2 (1 + m_1/m_2)}{2\pi\varepsilon_0 m_1 (v_1 + v_2)^2}$; 1) $r_{\min 1} = \dfrac{Q_1 Q_2}{\pi\varepsilon_0 m_1 (v_1 + v_2)^2}$; 2) $r_{\min 2} = \dfrac{Q_1 Q_2}{2\pi\varepsilon_0 m_1 (v_1 + v_2)^2}$. **15.72.** $T_1 = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 (1 + k)}$; 1) $T_1 = \dfrac{Q_1 Q_2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$; 2) $T_1 = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$; 3) $T_1 = 0$. **15.73.** $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{R} + \dfrac{q}{l}\right) = 900$ В. **15.74.** $\Pi = \dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = -1{,}86 \cdot 10^{-19}$ Дж. **15.75.** $v = \dfrac{e}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m a}} =$ $= 1{,}66 \cdot 10^7$ м/с. **15.76.** $\Pi = 2\pi\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0}R^3 = 7{,}10$ мкДж. **15.77.** $\Pi = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2 =$ $= 2{,}78$ мкДж.

§ 16.

16.1. 50 нКл · м. **16.2.** 6,75 кВ/м. **16.3.** $E_A = 1{,}08$ кВ/м; $\varphi_A = 0$; $E_B = 22$ кВ/м; $\varphi_B = 386$ В. **16.4.** $E_A = 9$ В/м; $\varphi_A = 0$; $E_B = 18$ В/м; $\varphi_B = 0{,}9$ В. **16.5.** 47,6 В/м; 1,8 В. **16.6.** $\varphi = A\sin\omega t$, где $A = 90$ В, $\omega =$ $= 6{,}28 \cdot 10^3$ с$^{-1}$. **16.7.** $\langle\Pi\rangle = \dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\langle\sin\omega t\rangle$; 1) $\langle\Pi\rangle = \dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{2}{T}\int\limits_0^{T/2}\sin\dfrac{2\pi}{T}t\,dt =$ $= 14{,}3$ нДж; 2) при $t \geqslant T$ $\langle\sin\omega t\rangle \to 0$ и $\langle\Pi\rangle = 0$. **16.8.** $F = \dfrac{3p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4} =$ $= 1{,}35$ мкН. **16.9.** $\Pi = \dfrac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 18$ нДж. **16.10.** $C = \dfrac{pE\sin\alpha}{\alpha} =$ $= 286$ нН · м/рад. **16.11.** $C = pE = 300$ нН · м/рад. **16.12.** $\Pi = -pE\cos\alpha =$ $= -500$ мкДж. **16.13.** $A = 2pE = 30$ мкДж. **16.14.** $\Delta\Pi = pE(1 - \cos\alpha) =$ $= 0{,}5$ мкДж. **16.15.** $\omega = \sqrt{\dfrac{2pE}{J}} = 6$ рад/с. **16.16.** $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{pE}{J}} =$ $= 239$ Гц. **16.17.** $F = p\dfrac{dE}{dx} = 0{,}2$ мН. **16.18.** $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 1{,}8$ МВ/м^2;

$F = \dfrac{Qp}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 9$ мкН. **16.19.** $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = 0{,}9$ МВ/м^2; $F = p\dfrac{dE}{dr} =$ $= 3{,}9$ мкН. **16.20.** 1) e; 2) e; 3) e; 4) e, а, о; 5) e, а, о; 6) e, а, о; 7) e, а; 8) e, а, о; 9) e, а. **16.21.** $0{,}695 \cdot 10^{-19}$ Кл; электронное облако вблизи протона лишь частично смещается к ядру атома фтора. **16.22.** 6; 47,7 мкКл/м^2. **16.23.** $\sigma_1' = -\dfrac{Q}{4\pi R^2}\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = -0{,}255$ мкКл/м^2; $\sigma_2' = \dfrac{Q}{4\pi(R+d)^2}\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = 0{,}130$ мкКл/м^2. **16.24.** $\pm 11{,}8$ мкКл/м^2. **16.25.** 77,4 МВ/м. **16.26.** 555 кВ/м. **16.27.** В 1,5 раза. **16.28.** 1,015. **16.29.** 1) 0,1%; 2) 25%. **16.30.** $P = \dfrac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\varepsilon_0 E_{\text{лок}} = 152$ мкКл/м^2. **16.31.** 11,3 МВ/м. **16.32.** $P = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0 = 37{,}9$ мкКл/м^2. **16.33.** 142 кКл/м^2. **16.34.** 1) 1,44; 2) $6{,}3 \cdot 10^{-4}$ Кл$\cdot$м. **16.35.** 0,03. **16.36.** $\alpha n \leqslant 0{,}183$. **16.37.** $\alpha = \dfrac{3M(\varepsilon-1)}{\rho N_A(\varepsilon+2)} = 2{,}24 \cdot 10^{-29}$ м^3. **16.38.** 1) $\varkappa = \alpha n = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$; 2) $\varkappa = \dfrac{3\rho N_A \alpha}{3M - \rho N_A \alpha} = 0{,}23$. **16.39.** $\varepsilon = \dfrac{3M - 2\varkappa\rho V_{0\,m}}{3M - \varkappa\rho V_{0\,m}}$; $\varepsilon_1 = 1{,}51$; $\varepsilon_2 = 1{,}61$. **16.40.** 1,13 см^3. **16.41.** $1{,}87 \cdot 10^{-30}$ м^3; $\varepsilon = 1 + \alpha n = 1{,}00005$. **16.42.** $1{,}65 \cdot 10^{-36}$ Кл$\cdot$м; $1{,}03 \cdot 10^{-17}$ м. **16.43.** $2{,}0 \cdot 10^{-29}$ м^3. **16.44.** $6{,}6 \times$ $\times 10^{-31}$ Кл$\cdot$м. **16.45.** $4{,}6 \cdot 10^{-33}$ Кл$\cdot$м. **16.46.** 11,7 мДж/м^3. **16.47.** $1{,}04 \times$ $\times\ 10^{-29}$ м^3. **16.48.** $2{,}02 \cdot 10^{-29}$ м^3. **16.49.** $\varepsilon = \dfrac{3M + 2\rho(n^2-1)V_{0\,m}}{3M - \rho(n^2-1)V_{0\,m}} =$ $= 2{,}02$. **16.50.** 2,14. **16.51.** $\alpha_e = \dfrac{3M(n^2-1)}{\rho N_A(n^2+2)} = 1{,}05 \cdot 10^{-28}$ м^3. **16.52.** $\varepsilon =$ $= \dfrac{1+2\beta}{1-\beta} = 1{,}52$, где $\beta = \dfrac{\alpha\rho N_A}{3M}$; $n = \sqrt{\varepsilon} = 1{,}23$. **16.53.** $n_1 =$ $= \sqrt{\dfrac{1+2\beta}{1-\beta}} = 1{,}20$, где $\beta = \dfrac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\dfrac{RT}{Mp}\rho_1$. **16.54.** $3{,}38 \cdot 10^{-28}$ м^3. **16.55.** 0,046. **16.56.** $T = \dfrac{9}{2}\dfrac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\dfrac{pE_0}{k} = 326$ К. **16.57.** В 1,27 раза. **16.58.** 1) $\Pi =$ $= \dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 1{,}35 \cdot 10^{-9}$ Дж; $F = \dfrac{Qp}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 2{,}7 \cdot 10^{-9}$ Н; 2) $\Pi = 0$; $F =$ $= \dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 1{,}35 \cdot 10^{-9}$ Н. **16.59.** $\Pi = -\dfrac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 l^3}\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -3{,}80$ мкДж. **16.60.** $\Pi = -\dfrac{p^2}{48\pi\varepsilon_0 l^3} = -7{,}5 \cdot 10^{-7}$ Дж; $F = -\dfrac{13}{576}\dfrac{p^2}{\pi\varepsilon_0 l^4} = -3{,}25 \times$ $\times\ 10^{-5}$ Н. **16.61.** $\Pi = \dfrac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 2{,}71 \cdot 10^{-24}$ Дж (16,9 мкэВ). **16.62.** $l =$

$= \dfrac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E}{Zen_{\text{н.у}}} = 1{,}9\cdot 10^{-18}$ м. **16.63.** $p = \dfrac{\varepsilon-1}{n_{\text{н.у.}}}\varepsilon_0 E = 52{,}6\cdot 10^{-3}$ D.

16.64. $p = \left[\dfrac{3\varepsilon_0 kT(\varepsilon-1)}{n}\right]^{1/2} = 1{,}9$ D. **16.65.** $p = 2p_1\cos\dfrac{\alpha}{2} = 1{,}85$ D.

§ 17.

17.1. 1,11 пФ. **17.2.** 180 пФ. **17.3.** 712 мкФ. **17.4.** $\sigma_1 = 49{,}8$ нКл/м^2; $\sigma_2 = 16{,}6$ нКл/м^2. **17.5.** $\varphi = \dfrac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1+R_2} = 380$ В. **17.6.** 6,2 нФ. **17.7.** 1) 88,5 пФ; 2) $D_1 = D_2 = 2{,}66$ мкКл/м^2; $E_1 = 42{,}8$ кВ/м; $E_2 = 100$ кВ/м; $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 300$ В.

17.8. $C = \varepsilon_0 S\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d-(d_1+d_2)}{\varepsilon_3}\right)^{-1} = 35{,}4$ пФ (ε_3 — диэлектрическая проницаемость воздуха). **17.9.** $\Delta U = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(d_2 - d_1) = 45{,}2$ В. **17.10.** 0,5 см. **17.11.** 2,5 мкФ. **17.12.** 700 В. **17.13.** $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 93{,}3$ пФ. **17.14.** 4,41 кВ. **17.15.** 5. **17.16.** 1) 360 мкКл, 720 мкКл, 120 В; 2) 240 мкКл, 80 В, 40 В. **17.17.** $C_2 = \dfrac{U-U_1}{U_2-U_1}C_1 = 0{,}32$ мкФ. **17.18.** $\Delta Q = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}(U_1-U_2) = 36$ мкКл. **17.19.** 2,32 мм.

17.20. $C = \dfrac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4} = 0{,}21$ мкФ. **17.21.** $U_1 = \dfrac{C_2U}{C_1+C_2} = 240$ В; $U_2 = \dfrac{C_1U}{C_1+C_2} = 80$ В; $U_3 = \dfrac{C_4U}{C_3+C_4} = 120$ В; $U_4 = \dfrac{C_3U}{C_3+C_4} = 200$ В; $Q_1 = Q_2 = \dfrac{C_1C_2U}{C_1+C_2} = 48$ мкКл; $Q_3 = Q_4 = \dfrac{C_3C_4U}{C_3+C_4} = 60$ мкКл. **17.22.** $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2} + \dfrac{C_3C_4}{C_3+C_4} = 20$ пкФ. **17.23.** 200 мкКл; 120 мкКл; 120 мкКл; 100 мкКл; 110 В; 60 В; 40 В; 220 мкКл; 210 В. **17.24.** 2 пФ. Указание. Доказать, что если $C_1/C_2 = C_3/C_4$, то $\varphi_A = \varphi_B$ и, следовательно, емкость C_5 при определении общей емкости схемы значения не имеет. **17.25.** $C_4 = C_2C_3/C_1 = 9$ пкФ.

§ 18.

18.1. 0,05 мкДж. **18.2.** 30 мкДж; 15 мН. **18.3.** 0,209 Дж. **18.4.** 2,5 Дж/м^3. **18.5.** 50 мкДж. **18.6.** 1500 В; 0,2 мДж. **18.7.** 0,27 мДж. **18.8.** 1) 0,18 Дж, 0,09 Дж, 0,06 Дж; 2) 0,605 Дж, 1,121 Дж, 1,82 Дж. **18.9.** 80 мкДж. **18.10.** $A = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\dfrac{2\varepsilon-1}{\varepsilon}V = 63{,}5$ нДж (ε — ди-

электрическая проницаемость фарфора). **18.11.** 1) $\sigma = \varepsilon_0 E \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} =$ $= 5{,}9\,\text{нКл/м}^2$ (ε — диэлектрическая проницаемость эбонита); 2) $W =$ $= \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{\varepsilon} Sd = 88{,}5\,\text{пДж}$. **18.12.** $W = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)^2 Sd = 118\,\text{пДж}$. **18.13.** 0,55 мкДж. **18.14.** 450 мкДж. **18.15.** 30 мкДж. **18.16.** $W = Q^2 \times$ $\times (16\pi\varepsilon_0\varepsilon R)^{-1} = 225\,\text{мкДж}$. **18.17.** 12 см. **18.18.** $W_1 = \dfrac{2\pi}{45}\dfrac{\rho^2}{\varepsilon_0\varepsilon} R^5 =$ $= 7{,}88\,\text{нДж}$; $W_2 = \dfrac{2\pi}{9}\dfrac{\rho^2}{\varepsilon_0} R^5 = 78{,}8\,\text{нДж}$. **18.19.** $W_1/W_2 = 5\varepsilon = 15$ (ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится шар; см. задачу 18.18). **18.20.** $\Pi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{5}\dfrac{Q_1^2}{R_1} + \dfrac{3}{5}\dfrac{Q_2^2}{R_2} + \dfrac{Q_1 Q_2}{l}\right) = 1{,}62\,\text{мкДж}$. **18.21.** $v_{\max} = \dfrac{Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mR}} = 9\,\text{м/с}$.

§ 19.

19.1. 15 Кл. **19.2.** $6{,}1\,\text{МА/м}^2$. **19.3.** $34{,}2\,\text{мм}^2$. **19.4.** 2,58 мОм. **19.5.** 18,8 Ом. **19.6.** 5/6 Ом. **19.7.** 3/4 Ом. **19.8.** 7/12 Ом. **19.9.** 250 Ом; 20%. **19.10.** 2 А. **19.11.** Для схемы а) 16,7%; 0,2%; для схемы б) 0,2%; 20%. **19.12.** 1,48%. **19.13.** 2,9 Ом; 4,5 Ом. **19.14.** 2 А. **19.15.** $n =$ $= \sqrt{NR/r_i}$; $R_i = R$. **19.16.** Четыре параллельно соединенные группы по три последовательно соединенных элемента в каждой; 7,5 А. **19.17.** а) $I = 3\,\text{А}$, $U = 0$; б) $I = 0$, $U = 1{,}2\,\text{В}$. **19.18.** 0,5 А. **19.19.** 1,6 А; 0,2 А; 1,4 А. **19.20.** 0. **19.21.** $I_3 = 0$; $U_3 = 0$. **19.22.** 3 А; 4 А; 1 А. **19.23.** 0,8 А; 0,3 А; 0,5 А. **19.24.** 3,6 В. **19.25.** 2 А. **19.26.** 15 Вт. **19.27.** 1) 0,5 Ом; 2) 2 Вт. **19.28.** 0,4; 297 Ом. **19.29.** $I_1 = 20\,\text{А}$, $\eta_1 =$ $= 0{,}17$; $I_2 = 4\,\text{А}$, $\eta_2 = 0{,}83$. **19.30.** 45 мин; 10 мин. **19.31.** 12 В; 20 Ом. **19.32.** $Q = \dfrac{I_{\max}^2 r}{\tau^2}\int\limits_0^\tau t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3} I_{\max}^2 R\tau = 100\,\text{кДж}$. **19.33.** 1 кДж (см. задачу 19.32). **19.34.** $q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3Q\tau}{R}} = 20\,\text{Кл}$. Решение. Из условия равномерности возрастания тока следует $I = kt$, или $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = kt$, где k — коэффициент пропорциональности, отсюда $\mathrm{d}q = kt\,\mathrm{d}t$ и $q = k\int\limits_0^\tau t\,\mathrm{d}t =$ $= (1/2)k\tau^2$. Значение k найдем из выражения количества теплоты, выделившегося в проводнике: $\mathrm{d}Q = I^2 R\,\mathrm{d}t = k^2 R t^2\,\mathrm{d}t$. Интегрируя, получим $Q = k^2 R\int\limits_0^\tau t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}k^2\tau^3 R$. Отсюда $k = \sqrt{\dfrac{3Q}{\tau^3 R}}$. После подста-

новки получим $q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q\tau}{R}} = 20$ Кл. **19.35.** $\langle I \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q}{R\tau}} = 10$ А (см. задачу 19.34). **19.36.** $\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{3Q}{R\tau}} = 1$ А/с (см. задачу 19.34).

§ 20.

20.1. 0,05 мм/с. **20.2.** 3,7 мкм/с. **20.3.** 0,1 мм/с. **20.4.** 0,05 В/м. **20.5.** $1{,}27 \cdot 10^{19}$ с$^{-1}$. **20.6.** 0,1 В/м. **20.7.** 568 пВ/м. **20.8.** 71 мкВ. **20.9.** 1,14 мкКл. **20.10.** 71 нм. **20.11.** $1{,}4 \cdot 10^{14}$. **20.12.** 39 мэВ. **20.13.** 10 кВт/м^3. **20.14.** 90 °С. **20.15.** $4{,}4 \cdot 10^{-5}$ В/К. **20.16.** 65,4. **20.17.** 3. **20.18.** 0,83 г. **20.19.** 54 мкм. **20.20.** 6,6 мг. **20.21.** $Z = \frac{Q}{\nu F} = 2$ (F — постоянная Фарадея). **20.22.** $\nu = \frac{It}{FZ} = 3{,}12$ ммоль; $N = N_A\nu = 1{,}87 \times \times 10^{21}$. **20.23.** $9{,}3 \cdot 10^{17}$. **20.24.** 13,6 В. **20.25.** $2{,}3 \cdot 10^6$ м/с. **20.26.** 210 кК. **20.27.** 0,8 мс. **20.28.** 0,5 нСм. **20.29.** $1{,}52 \cdot 10^{14}$ м$^{-3}$. **20.30.** $5 \cdot 10^7$ (см$^3 \cdot$ с)$^{-1}$. **20.31.** $1{,}6 \cdot 10^{-9}$ А. **20.32.** $2 \cdot 10^9$ см$^{-3} \cdot$ с$^{-1}$.

§ 21.

21.1. 0,1 Тл. **21.2.** 7,96 кА/м. **21.3.** 39,8 кА/м. **21.4.** 126 мкТл. **21.5.** 51. **21.6.** 15,4 А/м. **21.7.** $B = \frac{2Br^3}{\mu_0 R^2} = 21{,}5$ А. **21.8.** $I = \frac{2BR}{\mu_0 \sin^3\beta} = = 305$ А. **21.9.** $B = \frac{\mu_0 NI}{2l}\left(\frac{a+l}{\sqrt{d^2+(a+l)^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}\right) = 606$ мкТл. **21.10.** 8 кА/м. **21.11.** 1 м. **21.12.** $\Delta l = 68{,}4$ см; границы участка отстоят от концов катушки на 15,8 см. **21.13.** 1) 349 мкТл; 2) 251 мкТл. **21.14.** 200 мкТл. **21.15.** 132 А/м. **21.16.** 200 А/м.

21.17. $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} - \frac{I_1 I_2}{r_1^2 r_2^2}(r_1^2+r_2^2-d^2)} = 21{,}2$ мкТл. **21.18.** $B = = \frac{\mu_0}{2\pi r}\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2} = 87{,}2$ мкТл. **21.19.** $B = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 400$ мкТл. **21.20.** 50 мкТл (см. задачу 21.20). **21.21.** 40 мкТл. **21.22.** $B = \frac{\pi+4}{8\pi}\frac{\mu_0 I}{r} = = 357$ мкТл. **21.23.** $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\sqrt{2}+1) = 482$ мкТл; $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\sqrt{2}-1) = = 82{,}8$ мкТл. **21.24.** $B_1 = \sqrt{3}\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 346$ мкТл; $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}} = 116$ мкТл. **21.25.** $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} = 240$ мкТл. **21.26.** $\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\sqrt{2} = 282$ мкТл. **21.27.** $B = = \frac{2\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab} = 200$ мкТл. **21.28.** $B = \sqrt{3}\frac{\mu_0 I}{\pi a} = 173$ мкТл. **21.29.** 275 А/м; 250 А/м. **21.30.** $\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} = 1{,}15$. **21.31.** а) $B = \frac{\mu_0 I}{4R} =$

$= 157$ мкТл; б) $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 2) = 257$ мкТл; в) $B = \dfrac{\mu_0 I}{8\pi R}(3\pi + 2) =$ $= 286$ мкТл; г) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi - 1) = 214$ мкТл; д) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi + 1) =$ $= 414$ мкТл; е) $B = \dfrac{\mu_0 I}{R}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2-\sqrt{3}}{2\pi}\right) = 182$ мкТл. **21.32.** а) $B =$ $= \dfrac{3\mu_0 I}{8R} = 236$ мкТл; б) $B = \dfrac{\mu_0 I}{8R} = 78{,}5$ мкТл; в) $B = \dfrac{\mu_0 I}{3R} = 209$ мкТл; г) $B = \dfrac{\mu_0 I}{4R}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 306$ мкТл; д) $B = \dfrac{\mu_0 I}{8R}\left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 271$ мкТл; е) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 298$ мкТл. **21.33.** 1,1 мА; 10 МА/м. **21.34.** 16 мТл. **21.35.** 10^6 м/с.

§ 22.

22.1. 1 кН/м. **22.2.** $\pi/6$ рад. **22.3.** $F = \mu_0 I^2/(4\pi) = 0{,}1$ Н. **22.4.** $F = IBR\sqrt{3} = 0{,}156$ Н. **22.5.** 0,4 Н. **22.6.** 0,125 Н/м. **22.7.** 200 Н. **22.8.** 7 А. **22.9.** $F_1 = F_2 = \dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = 20$ мН/м; $F_3 = \sqrt{3}\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = 34{,}6$ мН/м. **22.10.** $F = \mu_0 I^2 r/d = 12{,}6$ мН. **22.11.** $F = 2\mu_0 I^2 a/(\pi d) = 8$ мН. **22.12.** 78,6 мА $\cdot$ м^2. **22.13.** 10 А $\cdot$ м^2. **22.14.** 25,5 А. **22.15.** $I = \sqrt[3]{4H^2 p_m/\pi} =$ $= 37$ А; $R = \sqrt[3]{\dfrac{p_m}{2\pi H}} = 9{,}27$ см. **22.16.** $p_m = \dfrac{2\pi d^3 B}{\mu_0} = 50$ мА $\cdot$ м^2. **22.17.** $9{,}4 \cdot 10^{-24}$ А $\cdot$ м^2; $9{,}4 \cdot 10^{-25}$ Н $\cdot$ м. **22.18.** $p_m/L = (1/2)(e/m) =$ $= 87{,}9$ ГКл/кг. **22.19.** 1) $p_m = Ql^2\omega/24 = 4$ нА $\cdot$ м^2; 2) $p_m/L = Q/2m =$ $= 10$ мкКл/кг. **22.20.** 1) $p_m = \pi q n R^2 = 3{,}14$ нА $\cdot$ м^2; 2) 500 нКл/кг. **22.21.** $p_m = (1/2)\pi q n R^2 = 1{,}57$ нА $\cdot$ м^2; 500 нКл/кг. **22.22.** 1) 62,8 нА $\cdot$ м^2; 2) 2 мкКл/кг. **22.23.** 1) 1 нА $\cdot$ м^2; 2) 1,5 нКл/кг. **22.24.** 1) $p_m = \dfrac{1}{5} q R^2 \omega =$ $= 4$ нА $\cdot$ м^2; 2) 10 нКл/кг. **22.25.** $M = \mu_0 \pi I H R^2 \cos\alpha = 39{,}5$ мкН $\cdot$ м. **22.26.** $M = (1/4)\pi B_\text{г} I d^2 = 6{,}28$ мкН $\cdot$ м ($B_\text{г}$ — горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли). **22.27.** 1) 12 мкН/м; 2) 120 мкА $\cdot$ м^2. **22.28.** $p_m = 12$ А $\cdot$ м^2; $M = 0{,}1$ Н $\cdot$ м. **22.29.** $C = \dfrac{NISB\cos\alpha}{\alpha} = 332$ пН $\cdot$ м/рад. **22.30.** $T = 2\pi\sqrt{m/(6IB)} = 1{,}05$ с. **22.31.** $B = 2\pi m/(IT^2) = 6{,}65$ мТл. **22.32.** $M = \mu_0 p_m^2/(2\pi d^3) = 160$ пН $\cdot$ м. **22.33.** $3\mu_0 I p_m d/(2R^3) = 5{,}89$ мН. **22.34.** $F = \mu_0 p_m I/(2\pi a^2) = 2$ мкН. **22.35.** $\dfrac{dB}{dx} = \dfrac{F_\text{max}}{p_m} = 0{,}5$ Тл/м. **22.36.** $I = 2rB_\text{г} \operatorname{tg}\alpha/\mu_0 = 1{,}01$ А ($B_\text{г}$ — горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли).

22.37. 8. **22.38.** 55 мА. **22.39.** $p_m = 2\pi r^3 B_r \operatorname{tg}\alpha/\mu_0 = 1{,}32\ \text{А}\cdot\text{м}^2$. **22.40.** 26,5°. **22.41.** 33,5°. **22.42.** $\Pi = -\dfrac{\mu_0 p_m^2}{2\pi r^3} = -4\cdot 10^{-13}$ Дж; $F = \dfrac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi r^4} = 6\cdot 10^{-13}$ Н. **22.43.** $B = \dfrac{mg}{\pi RI}\operatorname{tg}\alpha = 6{,}69$ мТл. **22.44.** $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{IB}{2\rho g S} = 29{,}8°$. **22.45.** 1) $\varepsilon = 2\pi\dfrac{IB}{m} = 37{,}7\ \text{рад/с}^2$; 2) $\omega_{\max} = 2\sqrt{\dfrac{\pi IB}{m}} = 8{,}68$ рад/с. **22.46.** 1) $\varepsilon = 6\dfrac{IB}{m} = 22{,}5\ \text{рад/с}^2$; 2) $\omega_{\max} = 2\sqrt{\dfrac{3IB}{m}} = 6{,}71$ рад/с. **22.47.** 1) $\varepsilon = 3\sqrt{3}\dfrac{IB}{m} = 13{,}9\ \text{рад/с}^2$; 2) $\omega_{\max} = (108)^{1/4}\sqrt{\dfrac{IB}{m}} = 5{,}26$ рад/с. **22.48.** $a = \dfrac{2\pi IBR}{m}\sin\alpha = 22{,}6\ \text{м/с}^2$.

§ 23.

23.1. 64 фН. **23.2.** 1,38 м. **23.3.** 0,61 Мм/с. **23.4.** $2{,}4\cdot 10^{-22}$ кг·м/с. **23.5.** $L = B|e|R^2 = 3{,}2\cdot 10^{-25}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$. **23.6.** $T = B^2r^2l^2/(2m) = 0{,}563$ фДж $= 3{,}52$ кэВ (m — масса электрона). **23.7.** $R_1/R_2 = \sqrt{T_1/T_2} = \sqrt{2}$. **23.8.** $\dfrac{\Delta T}{T} = 1 - \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 = 0{,}75$. **23.9.** 12 мм. **23.10.** $Q/m = e/m = v/(RB) = 96{,}3$ МКл/кг; протон и антипротон. **23.11.** 175 ГКл/кг; 26,5 Мм/с. **23.12.** $2T/R = 0{,}32$ пН. **23.13.** $F = B^2e^2r/m = 1{,}4$ пН. **23.14.** 8,05 фН; 1,13 см. **23.15.** $l = r = \sqrt{2mT}/(B|e|) = 14{,}5$ см (r — радиус окружности, по дуге которой электрон двигался в поле). **23.16.** 2,84 нс. **23.17.** $n = B|e|/(2\pi m) = 562$ МГц (m — масса электрона). **23.18.** $I = Be^2/(2\pi m) = 448$ пА. **23.19.** $p_m = \dfrac{Be^2R^2}{2m} = 7{,}04\ \text{пА}\cdot\text{м}^2$ (m — масса электрона). **23.20.** $m_2 = (R_2/R_1)^2 m_1 = 27$ а.е.м. **23.21.** 4. **23.22.** $v = \dfrac{B|e|}{m}\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} = 1{,}04\cdot 10^6$ м/с (m — масса электрона). **23.23.** 3,97 нс; 25 Мм/с. **23.24.** $T = \dfrac{(4\pi^2R^2 + h^2)B^2e^2}{8\pi^2 m} = 580$ фДж (m — масса протона). **23.25.** 1,96 мм; 7,1 мм; 14,2 мм. **23.26.** $\varepsilon = 2|e|UN = 4{,}8$ МэВ; $\Delta m/m_0 = \Delta mc^2/(m_0c^2) = \varepsilon/E_0 = 0{,}5\%$; $v = \sqrt{2\varepsilon/m_0} = 30$ Мм/с. Указание. Учесть, что за один оборот протон пройдет дважды между дуантами циклотрона. **23.27.** $v = QBR/m = 41$ Мм/с; $T = QBvR/2 = 34{,}9$ МэВ (m — масса α-частицы; Q — ее заряд). **23.28.** $\nu = \dfrac{|e|B}{2\pi m} = 7{,}7$ МГц. **23.29.** $B = \pi m\nu/|e| = 1{,}3$ Тл. **23.30.** $N = \dfrac{T}{2|e|U} = 167$ (см. задачу 23.26). **23.31.** 1) 13,7 см; 2) 22,8 см. **23.32.** 0,28 МэВ.

23.33. 300 МэВ. **23.34.** 4,2 Тл. **23.35.** $\tau = \dfrac{2\pi}{c^2}\dfrac{E_0+T}{|e|B} = 7{,}02$ нс. **23.36.** $\dfrac{E}{B} =$ $= 1$ Мм/с. **23.37.** $v = \dfrac{E}{B} = 1{,}6$ Мм/с; $\Delta v = \pm\left(\dfrac{\Delta E}{E}+\dfrac{\Delta B}{B}\right)v =$ $= \pm 6{,}4$ км/с. **23.38.** $E = B\sqrt{2QU/m} = 19{,}6$ кВ/м. **23.39.** $\Delta t = BR/E =$ $= 10$ мкс. **23.40.** 1) $a = \dfrac{|e|E}{m} = 20{,}1\ \dfrac{\text{Гм}}{\text{с}^2}$; 2) $a = \sqrt{\left(\dfrac{eE}{m}\right)^2+\left(\dfrac{Bev}{m}\right)^2} =$ $= 37{,}5\ \text{Гм/с}^2$.

§ 24.

24.1. а) $\oint B_l\,\mathrm{d}l = 0$; б) $\oint B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0 NI/l = 25{,}2$ мТл · м. **24.2.** $\oint B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0\sum\limits_{i=1}^{3} I_i = 6{,}28$ мкТл · м. **24.3.** $\oint H_l\,\mathrm{d}l = \pi r^2 j\sin\alpha =$ $= 78{,}6$ А. **24.4.** $B_{\max} = \dfrac{\mu_0 IN}{2\pi(D/2-r)} = 20$ мТл; $B_{\min} = \dfrac{\mu_0 IN}{2\pi(D/2+r)} =$ $= 10$ мТл. **24.5.** $\Phi = \mu_0 nIS = 25{,}2$ мкВб. **24.6.** 50 мкВб. **24.7.** 5 мкВб. **24.8.** $\Psi = \mu_0 I(N^2/l)S = 80{,}5$ мВб · виток. **24.9.** $\Phi = \dfrac{\mu_0 Ia}{\pi}\ln\dfrac{l+a}{a} =$ $= 1{,}62$ мкВб. **24.10.** 3,81. **24.11.** $\dfrac{\Delta\Phi}{\Phi} = \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{a}{l}\right)^2 = 0{,}617\%$. **24.12.** $\Phi =$ $= \dfrac{\mu_0 IN}{4\pi}(D-d)\ln\dfrac{D}{d} = 139$ мкВб. **24.13.** 1,29 Тл; $1{,}03\cdot 10^3$. **24.14.** 1) 1 Тл; $2{,}5\cdot 10^3$; 2) 1,4 Тл; 700. **24.15.** 0,53 мВб. **24.16.** 840 А. **24.17.** 15. **24.18.** В 2 раза. **24.19.** 7,1 кА. **24.20.** В 2,4 раза. **24.21.** 5 А. **24.22.** 2,25 мм. **24.23.** 5,8 кА. **24.24.** 1,8 мм.

§ 25.

25.1. 80 мкДж. **25.2.** 3 мДж. **25.3.** 6,84 мДж. **25.4.** $A =$ $= \pi IBR^2(1-\pi/4) = 67{,}5$ мДж. **25.5(2).** $A = IBa^2(1-\cos\theta) = 0{,}6$ Дж. **25.6.** $\langle\mathcal{E}_i\rangle = \Delta\Phi/\Delta t = 20$ В. **25.7.** 0,3 Тл. **25.8.** $F = B^2l^2v/R = 1$ Н. **25.9.** 10 Вт. **25.10.** 1) 0,3 В; 2) 3 Н; 3) 10 А; 4) 3 Вт; 5) 2 Вт; 6) 5 Вт. **25.11.** $U = \pi l^2 Bn = 201$ мВ. **25.12.** $\langle\mathcal{E}_i\rangle = 4nBS = 0{,}16$ В. **25.13.** $\mathcal{E}_{\max} =$ $= 2\pi nBNS = 132$ В. **25.14.** $P_{\max} = (2\pi nBNS)^2/(R_1+R_2) = 79$ Вт. **25.15.** 600 мин$^{-1}$. **25.16.** $\mathcal{E}_i = \omega BNS\cos\alpha = 1$ В. **25.17.** $Q = \dfrac{\pi Br^2}{R}\sin\alpha =$ $= 10$ мКл. **25.18.** 3,14 мкКл. **25.19.** 0,3 мВб. **25.20.** 1,5 Тл. **25.21.** $Q =$ $= \dfrac{\Delta\Phi}{R}$; 1) $Q = \dfrac{BS(1-\cos\alpha_1)}{R} = 6{,}7$ мКл; 2) $Q = \dfrac{BS(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)}{R} =$ $= 18$ мКл; 3) $Q = \dfrac{BS(\cos\alpha_2-\cos\alpha_3)}{R} = 25$ мКл. **25.22.** $Q = \dfrac{mB}{16}\rho D =$ $= 41{,}4$ мКл (D — плотность меди). **25.23.** $Q = \mu_0 Ir^2/(2aR) = 62{,}8$ мкКл.

25.24. $I = \dfrac{2\pi RQ}{\mu_0(a_2 - a_1)\ln(a_2/a_1)} = 1\,\text{кА}$. **25.25.** 0,15 В. **25.26.** 1 мВ. **25.27.** 4 В. **25.28.** $Q = L\Delta I/(R_1 + R_2) = 1{,}33\,\text{мКл}$. **25.29.** 6,28 Гн. **25.30.** 8 витков на 1 см. **25.31.** 10^3. **25.32.** 90. **25.33.** $L = \dfrac{\mu_0 l}{\pi}\ln\dfrac{d-R}{R} =$ $= 2{,}4\,\text{мГн}$. **25.34.** 80 мкВб. **25.35.** 0,1 Вб. **25.36.** 3 мкВб; 3 мВб. **25.37.** 3 мГн. **25.38.** $\langle\mathcal{E}_i\rangle = NBS/t = 3\,\text{кВ}$. **25.39.** $\dfrac{L_2}{L_1} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1} = 1/5{,}8$. Уменьшится в 5,8 раза. **25.40.** 20 мГн. **25.41.** 118 мВ. **25.42.** 6,75 А. **25.43.** $t = 0{,}23\,\text{с}$. **25.44.** $t = 0{,}69\,\text{с}$. **25.45.** $t = \dfrac{L\ln(I_0/\Delta I)}{R+r} = 0{,}23\,\text{с}$. **25.46.** 1) 0,4 А; 2) 7,6 А; 3) 0,4 А. **25.47.** 5,03 мс; 1) $1{,}2\cdot10^6$; 2) 1,51 Мм. **25.48.** 1) 12 В/м; 2) 1,92 аН. **25.49.** 40 Тл/с.

§ 26.

26.1. 10 Дж. **26.2.** 1,4 А. **26.3.** 50 мДж. **26.4.** 0,15 Дж. **26.5.** $W = \dfrac{\pi DSIB}{2d} = 324\,\text{мДж}$. **26.6.** $2\cdot10^3$. **26.7.** $25\,\text{Дж/м}^3$. **26.8.** $w_2/w_1 = B_2H_2/(B_1H_1) = 6{,}4$. Увеличилась в 6,4 раза. **26.9.** $800\,\text{Дж/м}^3$. **26.10.** Увеличилась в 10,5 раза. **26.11.** В $1{,}6\cdot10^3$ раза. **26.12.** $1{,}1\,\text{кДж/м}^3$. **26.13.** $161\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$. **26.14.** $I = \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{2w}{\mu_0}} = 1{,}26\,\text{А}$. **26.15.** $T = \pi D\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 L}{d}} =$ $= 33{,}2\,\text{нс}$. **26.16.** $T = 2\pi N\sqrt{\mu_0 SC/l} = 5{,}57\,\text{мкс}$. **26.17.** $\lambda = 2{,}38\cdot10^3 \pm$ $\pm$ 23,8 м. **26.18.** $I_{\max} = 1\,\text{А}$. **26.19.** $U_{\max} = I_{\max}\sqrt{L/C} = 317\,\text{В}$. **26.20.** 628 нс. **26.21.** 5,05 кГц. **26.22.** 51 пФ. **26.23.** 126 м. **26.24.** 1,4. **26.25.** 26.

§ 27.

27.1. $556\,\text{кА/м}$. **27.2.** 12,1 А/м; $1{,}66\,\text{мА}\cdot\text{м}^2/\text{кг}$; $91\,\text{мкА}\cdot\text{м}^2/\text{моль}$. **27.3.** $-7{,}3\cdot10^{-5}$. **27.4.** 10^{-5}; $10^{-10}\,\text{м}^3/\text{моль}$. **27.5.** $7{,}8\cdot10^{-9}\,\text{м}^3/\text{кг}$; $2{,}1\cdot10^{-10}\,\text{м}^3/\text{моль}$. **27.6.** $\dfrac{4}{3}\pi\chi\dfrac{B_0}{\mu_0}R^3 = 250\,\text{мкА}\cdot\text{м}^2$. **27.7.** $-9{,}8\,\text{А/м}$; 1,26 Тл. **27.8.** $4{,}4\cdot10^6\,\text{с}^{-1}$. **27.9.** $1{,}31\cdot10^{-29}\,\text{А}\cdot\text{м}^2$. **27.10.** $3{,}34\mu_\text{в}$. **27.11.** $2{,}24\mu_\text{в}$. **27.12.** 15,9 мА/м; 695 А/м. **27.13.** $B \geqslant 54\,\text{Тл}$. **27.14.** $a \leqslant$ $\leqslant 0{,}387$. **27.15.** 0,78 К. **27.16.** 1) В 1,0022 раза; 2) в 1,91 раза. **27.17.** 0,75 Тл. **27.18.** $991\,\text{кА/м}$. **27.19.** 101. **27.20.** $2{,}36\mu_\text{в}$. **27.21.** $3{,}13\,\text{МА/м}$. **27.22.** 1) $\Delta\nu = -\dfrac{eB}{4\pi m} = -2{,}80\cdot10^9\,\text{с}^{-1}$; 2) $I_\text{инд} = \dfrac{e^2B}{4\pi m} = 4{,}48\cdot10^{-10}\,\text{А}$; 3) $\mathcal{M}_\text{инд} = -\dfrac{e^2B}{4m}r^2 = -1{,}41\cdot10^{-19}\,\text{А}\cdot\text{м}^2$. **27.23.** $J_m = -\dfrac{e^2N_\text{А}}{3m}\langle r^2\rangle B =$

$= -4$ мкКл. **27.24.** $\langle\rho\rangle = \left(\dfrac{6m|\chi_m|}{\mu_0 e^2 N_A Z_{\text{внешн}}}\right)^{1/2}$; 1) $5{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; 2) $9{,}3 \times$ $\times 10^{-11}$ м.

§ 28.

28.1. 3,5 мм. **28.3.** 40 см. **28.4.** 60 см. **28.6.** 6 м. **28.7.** -20 см; 3 см. **28.9.** 1,1 см. **28.10.** 15,4 мм. **28.11.** 16,3 см. **28.14.** 1,53. **28.15.** 1,63. **28.16.** $35°30'$. **28.17.** $53°38'$. **28.18.** 1,41. **28.19.** $1°12'$. **28.24.** 15 см. **28.25.** 48 см. **28.26.** 2,08 мм/с. **28.27.** 10 см. **28.28.** 7,5 см. **28.30.** 12,5 см. **28.31.** $-1{,}32$ дптр. **28.32.** 3,84 см. **28.33.** 26 см. **28.34.** $-0{,}75$ дптр. **28.35.** 1) 39 см; 2) -80 см. **28.36.** 1,4. **28.37.** 1,6. **28.39.** 8,1 см. **28.40.** 24 дптр. **28.41.** -8 см. **28.42.** -4 дптр. **28.43.** 20 см. **28.44.** 2,5. **28.45.** 7. **28.46.** 80. **28.47.** 12. **28.48.** 1) К объективу на 1 мм; 2) от объектива на 9 мм. **28.49.** 30,3 см. **28.50.** 100. **28.51.** 250; 10,5 мм. **28.52.** 2 см.

§ 29.

29.1. 0,08 кд. **29.2.** 1 Вт/кд; 12,1 лм/Вт. **29.3.** $\Omega = 0{,}633$ ср; $2\theta = 52°$. **29.4.** 51 мкА. **29.5.** 180 лк. **29.6.** 12 с. **29.7.** 3,2 лк; 2,4 лк. **29.8.** 18,3 м. **29.9.** 60°. **29.10.** 1) 278 лк; 2) 60 лк; 3) 251 лм; 4) 125 лк. **29.11.** 0,707 м. Указание. По правилам дифференциального исчисления найти максимум функции $E(h) = Ih/(h^2 + r^2)^{3/2}$. **29.12.** 2 ккд/м^2. **29.13.** 9,4 кд; 157 кд. **29.14.** 2 клм; 8 клк; 2,5 ккд/м^2. **29.15.** $B = \dfrac{E}{\pi \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = 1{,}5$ Гкд/м^2. **29.16.** 400 кд/м^2. **29.17.** По диагонали куба; $I_{\max} = \sqrt{3}Ba^2 = 350$ кд. **29.18.** 1) 63 кд; 2) 30 кд. **29.19.** $E = I_0 h^2/(h^2 + r^2)^2 = 1$ лк. **29.20.** 3 м. Указание. По правилам дифференциального исчисления найти максимум функции $E(h) = \dfrac{I_0 h^2}{(h^2 + r^2)^2}$. **29.21.** 97 лк; 73 лк; 23 кд/м^2. **29.22.** 1,6 м. **29.23.** 0,02.

§ 30.

30.1. $2 \cdot 10^3$; $3 \cdot 10^3$. **30.2.** 4 мм. **30.3.** 1,33 мм. **30.4.** Увеличится; 1) на 0,50 мм; 2) на 0,548 мм. **30.5.** $\varphi = \sqrt{n\lambda/2d(n-1)} =$ $= 30$ мрад $= 1{,}72°$. Указание. При решении задачи угол поворота пластины считать малым. **30.6.** 1,73 см. **30.7.** $0{,}6\pi$. **30.8.** 1) 0,6 и 0,45 мкм; 2) 0,72; 0,51 и 0,4 мкм. **30.9.** 2 м. **30.10.** 0,5 мкм. **30.11.** $l =$ $= db/\lambda = 2{,}5$ м. **30.12.** 3,6 мм. **30.13.** Темнота; геометрическая разность хода лучей $\Delta_{\text{геом}} = \lambda = 0{,}6$ мкм. Оптическая разность хода $\Delta =$

$= \Delta_{\text{геом}} + \lambda/2$. **30.14.** $\Delta l = 2(\Delta d/\lambda)b = 1$ м; отодвинуть от источника на 1 м. **30.15.** 1) 4,8 мкм; 2) 4,8 мкм; 3) 5,1 мкм; 4) 5,1 мкм; в первых двух случаях усиление, в последних двух — ослабление. **30.16.** 0,1 мкм. **30.17.** 0,25 мкм; 0,125 мкм. **30.18.** 541 нм. **30.19.** $b = \lambda/(2n\theta) = 3{,}15$ мм. **30.20.** $10{,}3''$. **30.21.** 10 мкм. **30.22.** 3,1 мм; 5,2 мм. **30.23.** $N = 2n\theta/\lambda = 8{,}55\ \text{см}^{-1}$. **30.24.** 0,39 мм. **30.25.** 0,15 мкм. **30.26.** 1,25 дптр. **30.27.** 490 нм. **30.28.** 880 мм. **30.29.** 1,4. **30.30.** $n = (k+1)k = 1{,}33$. **30.31.** $r_k = \sqrt{\dfrac{kR_1R_2\lambda}{R_2 - R_1}} = 1{,}73$ мм. **30.32.** $r_k = \sqrt{(2k+1)R(\lambda/4)} = 0{,}704$ мм. **30.33.** $d = m\lambda/(n-1) = 72$ мкм. **30.34.** 1,00014. **30.35.** $n_2 = n_1 + m\lambda/l = 1{,}000607$. **30.36.** 27,3 мкм. **30.37.** $n = 1 + k\lambda/(2l) = 1{,}000282$. **30.38.** $\Delta n = \Delta m\lambda/(2l) = 0{,}000124$.

§ 31.

31.2. 1,58 мм. **31.3.** 3,69 мм. **31.4.** 8 зон; темное пятно. **31.5.** 1) 50 м; 2) 25 м. **31.6.** 1) $b = r^2/(n\lambda)$, $n = 1, 3, 5, \ldots$; 2) $b = r^2/(n\lambda)$, $n = 2, 4, 6, \ldots$ **31.7.** $b_1 = 1{,}4$ м; $b_2 = 0{,}7$ м; $b_3 = 0{,}47$ м. **31.8.** $b = ar^2/(ak\lambda - r^2) = 2$ м. **31.9.** Уменьшится в 4 раза. **31.10.** $2°45'$. **31.11.** 143. **31.12.** 1) Первый дифракционный минимум; 2) дифракционный максимум, соответствующий $k = 2$. **31.13.** 103. **31.14.** 580 нм. **31.15.** $21°17'$. **31.16.** 8. **31.17.** 9; 74°. **31.18.** 0,6 мкм. **31.19.** 66 см. **31.20.** $\varphi = \arcsin(\sin\alpha + m\lambda/d) = 38{,}3°$. **31.21.** 3. **31.22.** $R = \lambda/\Delta\lambda = 290$; $N = R/k$. **31.23.** $l = \lambda d/(k\delta\lambda) = 10$ мм. **31.24.** $R = D_\varphi l = 2{,}91 \cdot 10^4$. **31.25.** $D_\varphi = (\operatorname{tg}\varphi)/\lambda = 9{,}62 \cdot 10^5$ рад/м $\approx 3{,}31'$/нм. **31.26.** 1 мм/нм. **31.27.** 10^3 штрихов/мм. **31.28.** $f = D_l\lambda\cos^3\varphi/\sin\varphi = 21{,}1$ см. **31.29.** 0,28 нм. **31.30.** 31 пм. **31.31.** 506 пм. **31.32.** $1{,}6''$. **31.33.** 6 см.

§ 32.

32.1. 36°. **32.2.** 37°. **32.3.** $61°12'$. **32.4.** 194 Мм/с. **32.5.** $55°45'$. **32.6.** 32°. **32.7.** 1,52. **32.8.** 106°. **32.9.** 156°. **32.10.** 100°. **32.11.** 45°. **32.12.** В 2 раза. **32.13.** В 3,3 раза. **32.14.** 23,6 ккд/м^2. **32.15.** 0,33. **32.16.** В 3 раза. **32.17.** В 1,23 раза. **32.18.** 0,348. **32.19.** 3,4 мм. **32.20.** 169 град $\cdot$ см^3/(дм $\cdot$ г). **32.21.** 0,21 г/см^3. **32.22.** 0,4 г/см^3.

§ 33.

33.1. $v = 0{,}141c$. **33.2.** $\omega = \dfrac{c}{2R}\dfrac{\Delta\nu}{\nu} = 3{,}2 \cdot 10^{-6}$ рад/с. **33.3.** Воспринимаемая частота меньше ν_0 на 10 кГц. **33.4.** 1,1 Мм/с. **33.5.** $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} =$

$= \frac{2}{c}\sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$. **33.6.** 1) $2{,}3 \cdot 10^{-6}$; 2) $4{,}3 \cdot 10^{-4}$. **33.7.** 1) 1 000 067 Гц; 2) 999 933 Гц; 3) 1 000 013 Гц; 4) 999 987 Гц. **33.8.** $\Delta\lambda = \mp \frac{2Nv}{c}\lambda =$ $= \mp 26{,}8$ пм. **33.9.** $\lambda = \lambda_0 \frac{1+\beta}{1-\beta} = \lambda_0 \frac{c+v}{c-v} = 750$ нм; $\lambda = \lambda_0 \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) =$ $= 600{,}03$ нм. **33.10.** $v = \frac{1}{2}\frac{\Delta\nu}{\nu_0}c = 1$ км/с. **33.11.** $v = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}c =$ $= 5 \cdot 10^4$ км/с. **33.12.** $v = 0{,}6\,c$. **33.13.** $v = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 + \lambda_1^2}c = 0{,}549\,c$. **33.14.** Частота изменяется от $\nu_1 = 4{,}57$ ГГц до $\nu_2 = 2{,}46$ ГГц. **33.15.** 1,88 м/с. **33.16.** $v = 0{,}591\,c$. **33.17.** $U_{\min} = \frac{m_0 c^2}{|e|}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) = 175$ кВ. **33.18.** 29,5 МэВ. **33.19.** 30°. **33.20.** 1,41. **33.21.** $1{,}45 < n < 1{,}72$.

§ 34.

34.1. 648 К. **34.2.** 1 кК. **34.3.** 5,65 кДж. **34.4.** 5,67 ГВт. **34.5.** 4%. **34.6.** В 1,19 раза. **34.7.** 64,7 МВт/м^2; 5,8 кК. **34.8.** 396 К. **34.9.** $R_э^* = a_T \sigma T^4 = 5{,}88$ кВт/м^2; $W = R_э^* ST = 1{,}76$ кДж. **34.10.** 0,953. **34.11.** $\eta = 1 - \sigma T^4 S/P = 0{,}71$. **34.12.** $a_T = R_э^*/(\sigma T^4) = 0{,}26$. **34.13.** $T = \left(\frac{P}{4\pi a_T R_э^{*2}\sigma}\right)^{1/4} = 866$ К. **34.14.** 10,6 мкм. **34.15.** 547 нм. **34.16.** 3,8 кК; 7,6 кК. **34.17.** 4,98 кК. **34.18.** Увеличились в 81 и в 243 раза. **34.19.** 3,62 кК; 7,24 кК. **34.20.** 95,8 мВт. **34.21.** 1,45 мкм. **34.22.** 1) 30 МВт/(м$^2 \cdot$ мм); 2) 600 Вт/м^2. **34.23.** $\lambda_m = \frac{C_2}{5T}$; $b = \frac{C_2}{5} = 2{,}86 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ К. **34.24.** $\omega_m = \frac{3T}{\beta} = 3{,}94 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. **34.25.** $P = \pi\sigma T^4 ld = 1{,}44$ кВт. **34.26.** $\tau = \frac{\rho ca}{18\sigma}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right) = 1{,}51$ ч. **34.27.** $\tau = \frac{1}{6}\frac{\rho Rd}{\sigma AT^3}(n^3 - 1) = 47{,}1$ мин. **34.28.** $p = \frac{4}{3c}\sigma T^4 = 2{,}5 \cdot 10^7$ атм. **34.29.** $T = \left(\frac{3cp}{4\sigma}\right)^{1/4} = 142$ кК. **34.30.** $n = \frac{4\sigma T}{3cK} = 4{,}93 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$. **34.31.** $p = \frac{32}{3}\frac{\sigma T^4}{c} = 1{,}26 \cdot 10^{-4}$ Па.

§ 35.

35.1. 2,49 эВ. **35.2.** Не будет, так как энергия фотона (4,1 эВ) меньше работы выхода (4,7 эВ). **35.3.** 0,8. **35.4.** 2,3 эВ. **35.5.** 4 эВ. **35.6.** 760 км/с. **35.7.** 4,36 нм. **35.8.** Электрон релятивистский; $\beta = 0{,}83$; $v = \beta c = 249$ Мм/с. **35.9.** 291 Мм/с. **35.10.** 1,59 МэВ.

§ 36. **36.1.** 4,6 мкПа. **36.2.** 1,5 кВт/м^2. **36.3.** 0,1 нН. **36.4.** 10^{-7} кг · м/с. **36.5.** 11,2 мН. **36.6.** 3,27 эВ; $5{,}8 \cdot 10^{-36}$ кг; $1{,}74 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с. **36.7.** 1,24 пм; $1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг; $5{,}3 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с; $m_ф \approx 2m_e$. **36.8.** 73 пм. **36.9.** 1) 2,42 пм; 2) 1,32 фм. **36.10.** $9 \cdot 10^{15}$. **36.11.** $3{,}77 \cdot 10^{18}$. **36.12.** 10^{12} м$^{-3}$.

§ 37. **37.1.** 57 пм. **37.2.** 1) 4,84 пм; 2) 2,64 фм. **37.3.** 120° или 240°. **37.4.** 0,224 МэВ; 0,176 МэВ. **37.5.** $3{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с. Решение. Кинетическая энергия электрона отдачи $T = (2/3)E_0$; электрон релятивистский. Из соотношения $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$ находим $p = 4E_0/(3c)$. **37.6.** 0,5. **37.7.** 60°40′ или 299°20′. **37.8.** 0,37 МэВ. **37.9.** 70%. **37.10.** 0,511 МэВ; $2{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с. **37.11.** 1) $w_1 = 0{,}67$; $w_2 = 33$; 2) $w_1 = w_2 = 0{,}5$; 3) $w_1 = 0{,}33$; $w_2 = 0{,}67$.

§ 38. **38.1.** $r_n = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2/(me^2)$; $r_2 = 212$ пм; $r_3 = 477$ пм. **38.2.** $v = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar n) = 1{,}09$ Мм/с. **38.3.** $\omega = v/(2\pi r) = me^4/(32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3) = 8{,}19 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. **38.4.** −27,2 эВ; 13,6 эВ; −13,6 эВ. **38.5.** 434 нм. **38.6.** 1,87 мкм; 820 нм. **38.7.** 12,1 эВ. **38.8.** 10,2 эВ; 13,6 эВ. **38.9.** Серия Лаймана: 121,6 нм; 102,6 нм; серия Бальмера: 656,3 нм. **38.10.** 10^6 м/с. **38.11.** 30,3 нм; 13,5 нм. **38.12.** Гелий: 8,64 аДж = 54 эВ; 54 В; литий: 19,5 аДж = 122 эВ; 122 В. **38.13.** $8{,}2 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$; $2{,}4 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, $4{,}6 \times 10^{14}$ Гц. **38.14.** 212 пм. **38.15.** 10,2 В. **38.16.** $\dfrac{r_{He^+}}{r_H} = \dfrac{Z_H}{Z_{He^+}} = 0{,}5$; отношение изменяться не будет. **38.17.** $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0\hbar^2}\left(\dfrac{Z}{n}\right)^2$; $E_1 = -13{,}6$ эВ, $\varphi_1 = 13{,}6$ В (H); $E_1 = -54{,}4$ эВ, $\varphi_1 = 54{,}4$ В (He^+). **38.18.** 365 нм, 656 нм (H); 41 нм, 73 нм (Li^{++}). **38.19.** $\Delta E = \dfrac{8}{9}E_i = 12{,}1$ эВ. **38.20.** $\lambda_{3,1} = 103$ нм; $\lambda_{2,1} = 122$ нм; $\lambda_{3,2} = 656$ нм. **38.21.** $N = 6$; $\lambda_{4,2} = 486$ нм; $\lambda_{3,2} = 656$ нм.

38.22. $v_{\min} = \left(\dfrac{3E_i}{2m_e}\right)^{1/2} = 1{,}9 \cdot 10^6$ м/с; $\lambda = 122$ нм. **38.23.** $\varepsilon_ф = 7{,}4$ эВ. **38.24.** $v = 2\left[\dfrac{\pi\hbar c}{m_e}\left(\dfrac{1}{\lambda} - Z^2R\right)\right]^{1/2} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с. **38.25.** $E_n = -2\pi\hbar cR\left(\dfrac{Z}{n}\right)^2 = -2{,}18$ эВ, где $n = Z\left(\dfrac{R}{Z^2R - (\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_1\lambda_2)}\right)^{1/2} = 5$.

§ 39. **39.1.** $21 \cdot 10^6$ м/с. **39.2.** 41 пм. **39.3.** 304 пм. **39.4.** Ниобий ($Z = 41$). **39.5.** 5,5 кВ. **39.6.** 5,9 кэВ. **39.7.** 0,14 нм. **39.8.** 1,24 пм. **39.9.** 20,5 пм; 60,5 кэВ. **39.10.** 8,00 кВ.

§ 40. **40.1.** $19{,}9 \cdot 10^{-27}$ кг; $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг. **40.2.** Массовое число — число нуклонов в ядре, поэтому оно всегда целое. Относительная масса ядра определяется отношением массы ядра к 1/12 массы изотопа углерода ^{12}C. Это число целым быть не может. **40.3.** 35,439. **40.4.** 0,186; 0,814. **40.5.** $2{,}16 \cdot 10^{-4}$. **40.6.** 1,01436 а.е.м. **40.7.** 1) 3, 2, 1; 2) 10, 5, 5; 3) 23, 11, 12; 4) 54, 26, 28; 5) 104, 47, 57; 6) 238, 92, 146. **40.8.** $^1_1$H — протон; $^2_1$H — дейтон; $^3_1$H — тритон. **40.9.** Два; $^3_1$H и $^3_2$He. **40.10.** $^3_1$H; $^4_2$He. **40.11.** $^3_1$H; $^7_3$Li; $^{15}_7$N. **40.12.** 1) 5,6 фм; 2) 8,4 фм; 3) 11,2 фм; 4) 14 фм; 5) 16,8 фм. **40.13.** $n = 3/(4\pi r_0^3) = 8{,}7 \cdot 10^{47}$ нуклонов/м^3. **40.14.** $3 \cdot 10^{-17}$. **40.15.** $\langle\rho\rangle = 3m_1/(4\pi r_0^3) \approx 1{,}4 \cdot 10^{17}$ кг/м^3. Указание. Массу ядра приближенно можно выразить как произведение массового числа A (числа нуклонов в ядре) на массу m_1 одного нуклона, которую можно принять равной атомной единице массы (1 а.е.м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг). **40.16.** $\rho = 3e/(8\pi r_0^3) = 6{,}96 \cdot 10^{24}$ Кл/м^3 (e — элементарный заряд). **40.17.** $F_1 = 5{,}05 \cdot 10^{-25}$ Н; $F_2 = 735$ Н; $F_1/F_2 = 6{,}87 \cdot 10^{-28}$. **40.18.** Спин нуклона в единицах $\hbar$ равен 1/2. **40.19.** Спином ядра называется собственный момент импульса ядра. Он складывается из спинов нуклонов и их орбитальных моментов импульса. Орбитальные моменты импульса нуклонов всегда целочисленны. **40.20.** Спин ядра может иметь значения 0, 1/2, 1, 3/2 и т. д. **40.21.** 1) 0, 1; 2) 1/2, 3/2; 3) 1/2, 3/2; 4) 0, 1, 2. **40.22.** 1) 0; 2) 1/2, 3/2 и т. д.; 3) 1/2, 3/2 и т. д.; 4) 0, 1, 2. **40.23.** Если принять протон-электронную модель ядра, то в состав ядра азота $^{14}_7$N должны входить 14 протонов (они определяют массу ядра) и 7 электронов (они компенсируют заряд протонов до 7; $14 - 7 = 7$). Всего в состав ядра должна входить 21 частица. Суммарный спин нечетного числа частиц всегда будет полуцелочисленным (в единицах $\hbar$), тогда как ядро азота имеет целочисленный спин, равный $\hbar$. Это и доказывает несостоятельность протон-электронной модели ядра. **40.24.** $\hbar/2$. **40.25.** $\mu_N = e\hbar/(2m_p)$ (m_p — масса протона). **40.26.** $\mu_N/\mu_B = m_e/m_p = 1/1836$. **40.27.** $\mu_N = \mu_{z_{max}} = g\mu_N I$ (g — ядерный фактор Ланде; μ_N — ядерный магнетон, I — спиновое квантовое число ядра). **40.28.** Сверхтонкое расщепление обусловлено взаимодействием магнитных моментов ядра и электронной оболочки атома. Тонкое расщепление обусловлено взаимодействием полного спинового момента импульса в атоме с полным орбитальным моментом импульса. **40.41.** $A = 222$; $Z = 86$; $^{222}_{86}$Rn. **40.42.** $A = 17$; $Z = 8$; $^{17}_8$O. **40.43.** $^{65}_{29}$Cu. **40.44.** Образовалось ядро лития $^7_3$Li. **40.45.** $^{14}_7$N. **40.46.** $^7_3$Li. **40.47.** $^{27}_{13}$Al. **40.48.** $^{62}_{28}$Ni. **40.49.** $^{238}_{94}\text{Pu} \to {}^{234}_{92}\text{U} \to {}^{230}_{90}\text{Th} \to {}^{226}_{88}\text{Ra} \to {}^{222}_{86}\text{Rn} \to {}^{218}_{84}\text{Po} \to {}^{214}_{82}\text{Pb}$. **40.50.** $^{216}_{84}$Po; 296 км/с.

§ 41. **41.1.** 10^{-6}. **41.2.** 700 $с^{-1}$; 13,6 $пс^{-1}$. **41.3.** 15 мин. **41.4.** 9,5 × × 10^{-5}. **41.5.** 0,71; 0,36. **41.6.** В 9 раз. **41.7.** 10,5 ч. **41.8.** 4 дня. **41.9.** 138 сут. **41.10.** 1,44 года. **41.11.** 63,3%. **41.12.** 10^6 атомов. **41.13.** 8. **41.14.** 6 ч. **41.15.** На 24%. **41.16.** 93 года; 186 лет. **41.17.** 0,5 сут. **41.18.** 10,5 ТБк. **41.19.** 40,7 ТБк/г. **41.20.** 145. **41.21.** $m_2 = \dfrac{m_1 M_2 T_2}{m_1 T_1} =$ $= 425$ кг (M_1 и T_1 — молярная масса и период полураспада ^{90}Sr; M_2 и T_2 — то же для ^{238}U). **41.22.** 6,33 мкг. **41.23.** $2{,}7 \cdot 10^5$ лет. **41.24.** $W = \ln 2 \dfrac{\varepsilon m N_A t}{M T_{1/2}} = 70{,}6$ кДж (M и $T_{1/2}$ — молярная масса и период полураспада ^{22}Na). **41.25.** $A = 4\pi r^2 I/\varepsilon = 94{,}4$ ГБк. **41.26.** $I = \dfrac{nA\varepsilon}{4\pi r^2} =$ $= 0{,}6$ Вт/м^2.

§ 42. **42.1.** 6,6. **42.2.** 3,85 см. **42.3.** На глубину 115 см. **42.4.** 2 МэВ или 6,2 МэВ; 1,33 см. **42.5.** 3,6 МэВ; 1,57 см. **42.6.** 28,6 см. **42.7.** В 59 раз. **42.8.** $w = \rho X/(n_0 e) = 7{,}73 \cdot 10^{-11}$ (ρ — плотность воздуха; n_0 — концентрация молекул воздуха при нормальных условиях; e — элементарный электрический заряд). **42.9.** $W = Xm\varepsilon/e = 8{,}77$ мкДж (e — элементарный электрический заряд). **42.10.** $X = \dfrac{ne}{\rho V \Delta t} t = 21{,}4$ нКл/кг (ρ — плотность воздуха; e — элементарный электрический заряд). **42.11.** 62 мкКл/кг. **42.12.** 13 см. **42.13.** 6 м. **42.14.** 4,4 мин.

§ 43. **43.1.** 1,00728 а.е.м.; 2,01355 а.е.м.; 11,9967 а.е.м. **43.2.** 4,00260 а.е.м. **43.3.** 7,01546 а.е.м.; 7,01491 а.е.м.; 7,01436 а.е.м. **43.4.** 0,00240 а.е.м.; 2,23 МэВ. **43.5.** 8,49 МэВ. **43.6.** 7,68 МэВ/нуклон. **43.7.** 3,01604 а.е.м. **43.8.** 5,01258 а.е.м. (атом лития ^5_3Li). **43.9.** 2,2 МэВ. **43.10.** 39,2 МэВ; 37,6 МэВ. **43.11.** 682 ГДж. **43.12.** 10,6 МэВ. **43.13.** 7,55 МэВ. **43.14.** 8,0 МэВ. **43.15.** 23,8 МэВ. **43.16.** 7,26 МэВ.

§ 44. **44.1.** $A = 1$; $Z = 0$; частица — нейтрон (^1_0n). **44.2.** $A = 0$; $Z = 0$; частица — фотон. **44.3.** 1) 4,36 МэВ, освобождается; 2) 22,4 МэВ, освобождается; 3) 2,80 МэВ, поглощается; 4) 1,64 МэВ, поглощается; 5) 1,05 МэВ, поглощается. **44.4.** 1) 19,8 МэВ, освобождается; 2) 23,8 МэВ, освобождается; 3) 6,26 МэВ, освобождается; 4) 8,12 МэВ, освобождается. **44.5.** 2,23 МэВ. **44.6.** 6,82 МэВ. **44.7.** 0,63 МэВ. **44.8.** 6,7 МэВ. **44.9.** 5,26 МэВ;

0,44 МэВ. **44.10.** 0,82 МэВ; 2,44 МэВ; $|p_{\text{He}}| = |p_n| = 3{,}6 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с. **44.11.** 6,01514 а.е.м. **44.12.** 3,01604 а.е.м. **44.13.** 3,01604. **44.14.** 6,22 × $\times 10^{-21}$ Дж; 2,70 км/с. **44.15.** $\frac{u_1}{v_1} = 0{,}847$; $\frac{T_1}{T_2} = 0{,}716$. **44.16.** $^{94}_{38}$Sr. **44.17.** 0,00091. **44.18.** 82 ГДж. **44.19.** $3{,}1 \cdot 10^{10}$. **44.20.** 53 г. **44.21.** 15 МВт. **44.22.** 5,41 МэВ. **44.23.** 0,104 МэВ; 5,40 МэВ. **44.24.** 0,156 МэВ. **44.25.** 1 МэВ. **44.26.** 2,6 МэВ. **44.27.** 0,2 МэВ. **44.28.** 0,78 МэВ. **44.29.** 0,99 МэВ. **44.30.** 0,75 МэВ, 1,65 пм. **44.31.** 67,5 МэВ.

§ 45.

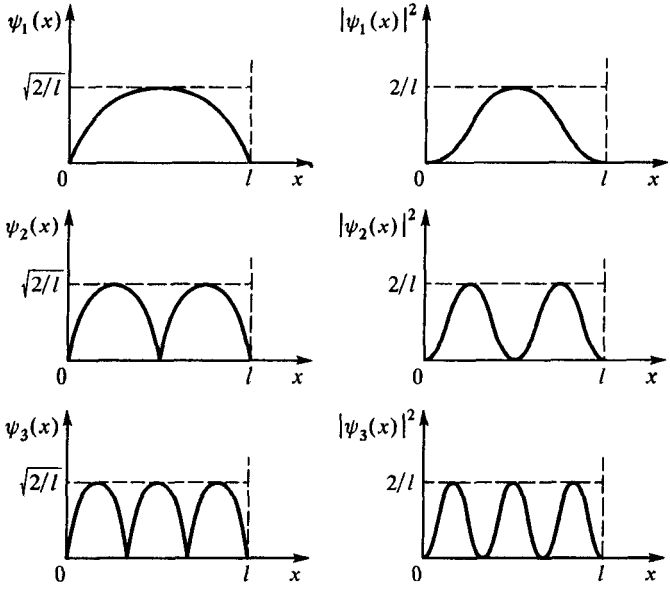
45.1. 727 пм; 0,396 пм. **45.2.** 2,7 пм. **45.3.** 150 В. **45.4.** 39 пм. **45.5.** 907 фм; 28,6 фм. **45.6.** 0,33 нм. **45.7.** 0,67 нм. **45.8.** 212 Мм/с. **45.9.** 0,06 нм. **45.10.** 0,1 нм. **45.11.** 2,1 Мм/с. **45.12.** 1,10 мм. **45.13.** 30′; 7 пм; 0,41 нм. **45.14.** Прибор зарегистрировал групповую скорость. **45.15.** Нельзя. Для измерения фазовой скорости надо пометить каким-либо импульсом данный участок монохроматической волны. Измеряя же скорость перемещения импульса, мы измеряем не фазовую, а групповую скорость. **45.16.** 334 м/с; 333,23 м/с; 100 м/с. **45.17.** $v/2$; c^2/v. **45.18.** Не противоречит. Фазовая скорость не характеризует ни скорости «сигнала», ни скорости переноса энергии и поэтому может быть как больше, так и меньше скорости света в вакууме. **45.19.** В обоих случаях групповая скорость равна скорости v частицы. **45.20.** 1) $v_\Phi = h/(2m\lambda)$; 2) $v_\Phi = \sqrt{c^2 + E_0^2\lambda^2/h^2}$, где $E_0 = m_0c^2$. **45.21.** 1) Не будет (нет дисперсии); 2) будет (дисперсия есть); $v_\Phi = f(\lambda)$. **45.22.** 0,77 нм; 0,106 нм; так как $\Delta x \gg d$, то понятие траектории в данном случае неприменимо. **45.23.** $\Delta v/v = 10^{-4}$. **45.24.** В 160 раз. **45.25.** 16%. **45.26.** $E_{\min} = 2\hbar^2/(ml^2)$. **45.27.** $E_{\min} = 2\hbar^2/(ml^2) = 15$ эВ. **45.28.** $l = 2\hbar/\sqrt{2mE} = 2{,}9$ фм. **45.29.** 80 МэВ. Решение. Из соотношения неопределенностей следует $\Delta p \geqslant \dfrac{\hbar}{d/2}$. Разумно считать $p > \Delta p$; следовательно, $p \geqslant 2\hbar/l$, где $p = \sqrt{(2E_0 + T)T}/c$ (случай релятивистский). Так как $T \gg E_0$, то $T_{\min} = 2\hbar c/d$. Так как эта энергия (80 МэВ) значительно больше энергии связи, приходящейся на один нуклон в ядре (10 МэВ), то пребывание электронов в ядре невозможно. **45.30.** 1) $1{,}2 \cdot 10^{-2}$; 2) 1,2. **45.31.** Ввиду малости $(\Delta p/p)(3 \cdot 10^{-11})$ обнаружить отклонение в поведении частицы от законов классической механики нельзя. В этом случае можно говорить о траектории движения частицы, так как если даже $\Delta\mathbf{p} \perp \mathbf{p}$, то отклонения частицы от классической траектории невозможно обнаружить. **45.32.** Это соотношение показывает, что если система пребывает в некотором энергетическом состоянии в течение промежутка времени Δt, а затем переходит в другое состояние, то существует некоторая неопределенность энергии $\Delta E \geqslant \hbar/\Delta t$. Этим, например, объясняется

естественная ширина спектральных линий. **45.33.** 1) Время пребывания электрона в основном состоянии бесконечно велико, вследствие чего $\Gamma = \Delta E = 0$; 2) в возбужденном состоянии электрон пребывает в течение $\Delta t \approx 10$ нс. Следовательно, ширина уровня $\Gamma \approx \hbar/\Delta t = 0{,}1$ мкэВ. **45.34.** $3 \cdot 10^{-8}$. **45.35.** Нет. Точно определен квадрат импульса, а сам импульс имеет неопределенность по направлению $\pm p$, что отвечает бегущей и отраженной от стенок ящика волнам.

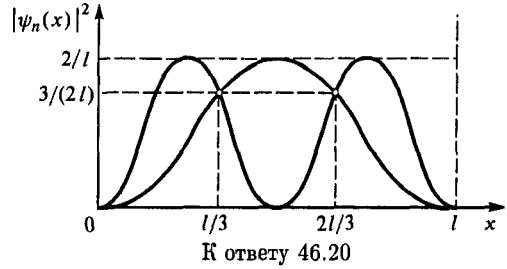
§ 46.

46.1. $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0$. **46.2.** $\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}\beta x^2\right) \times$ $\times \psi = 0$. **46.3.** $\psi = C\exp(-iEt/\hbar)$. **46.4.** $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$; $\psi(x, t) =$ $= \exp[-i(Et - p_x x)/\hbar]$. **46.5.** Квадрат модуля волновой функции имеет определенный физический смысл. Аналогично тому как в волновой оптике мерой интенсивности волны является квадрат амплитуды, так $|\psi|^2$ является мерой интенсивности электронной волны (плотностью вероятности), пропорциональной концентрации частиц. **46.6.** Только при условии конечности ψ-функции возможна физическая интерпретация $|\psi|^2$ как плотности вероятности. **46.7.** Значения энергии U и E, а также ψ конечны. Следовательно, $\mathrm{d}^2\psi/\mathrm{d}x^2$ должна быть ограничена, а это возможно, если непрерывна $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x$. Но чтобы $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x$ существовало во всей интересующей нас области, $\psi(x)$ должна быть непрерывна. **46.8.** Может. Меньше единицы должно быть выражение $|\psi(x)|^2\mathrm{d}x$, означающее вероятность обнаружения частицы в интервале от x до $x + \mathrm{d}x$. Но $|\psi(x)|^2\mathrm{d}x$ может быть меньше единицы и при условии $|\varphi(x)|^2 > 1$. **46.9.** Если $\psi(x) = a + ib$, то $\psi^*(x) = a - ib$; $|\psi(x)|^2 = a^2 + b^2$; $\psi(x)\psi^*(x) = (a+ib) \times$ $\times (a - ib) = a^2 + b^2$. Отсюда $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x)$. **46.10.** $|\psi(x, t)|^2 =$ $= \psi(x, t)\psi^*(x, t) = \exp(-iEt/\hbar)\psi(x)\psi^*(x)$ или $|\psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$. **46.11.** $\psi''(x) + (2m/\hbar^2)E\psi(x) = 0$; $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$. **46.12.** $C_2 = 0$; $k = \pi n/l$. **46.13.** $E = \pi^2\hbar^2 n^2/(2ml^2)$. **46.14.** $\frac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n} =$ $= \frac{2n+1}{n^2}$; 1) 0,78, 2) 0,21; 3) 0. При малых n отчетливо выступает дискретный характер энергетического спектра, при больших дискретный характер сглаживается и энергетический спектр становится квазинепрерывным. **46.15.** 4,48 эВ. **46.16.** $C_n = \sqrt{2/l}$. **46.17.** 1) $C_1 = -C_2 =$ $= 1/\sqrt{2l}$; 2) $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ml^2}$ и $\psi_n(x) = i\sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n}{l}x$. **46.18.** См. рисунок. Число узлов N растет с увеличением квантового числа n: $N =$ $= n - 1$, т.е. на единицу меньше, чем квантовое число. С увеличением энергии λ уменьшается, а число узлов возрастает. **46.19.** Максимальна при $x_1 = \frac{l}{4}$ и $x_3 = 3\frac{l}{4}$; минимальна при $x_2 = l/2$. **46.20.** $x_1 =$

$= (1/3)l$; $x_2 = (2/3)l$; $|\psi(x)|^2 = 3/(2l)$ (см. рисунок). **46.21.** 1) 0,609; 2) 0,195. **46.22.** 0,475. **46.23.** 0,091. **46.24.** 5,22. **46.25.** Решение. $\int\limits_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{1}{2}\cos\frac{\pi(n-m)}{l}x\,dx -$ $- \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{1}{2}\cos\frac{\pi(n+m)}{l}x\,dx$. При $n = m$ первый интеграл обращается в $l/2$,



К ответу 46.18



К ответу 46.20

а второй — в нуль. При $n \neq m$ оба интеграла дают нуль и, следовательно,

$$\int\limits_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases}$$

46.26. $\langle x \rangle = l/2$. Решение. По общему правилу нахождения среднего

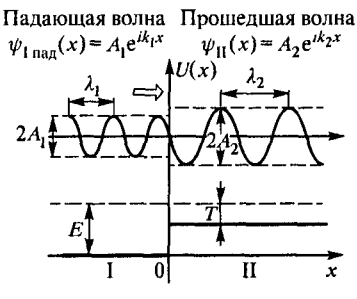
значения, $\langle x\rangle = \int\limits_0^l x|\psi_n(x)|^2 \mathrm{d}x$, где $\psi_n(x)$ — нормированная на единицу ψ-функции. В случае бесконечно глубокого прямоугольного потенциального ящика ψ-функция имеет вид $\psi_n = (\sqrt{2}/l)\sin\dfrac{\pi n}{l}x$. Следовательно, $\langle x\rangle = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin^2\dfrac{\pi n}{l}x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{l}\int\limits_0^l x\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{l}x\right)\mathrm{d}x$. Интегрируя это выражение, получаем искомый ответ. **46.27.** 1. В случае гармонического осциллятора $u_{\max} = kA^2/2$, где $A = l/2$, $k = m\omega^2$, т. е.

$$U_{\max} = \frac{1}{8}m\omega^2 l^2. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$U_{\max} = E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ml^2}. \qquad (2)$$

Исключая l из равенств (1) и (2), находим $E_n = (\pi/4)\hbar\omega n$. Полученное выражение отличается от истинного (без учета нулевой энергии) в $\pi/4$ раза. 2. В случае атома водорода $U = -Zl^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$, где $r = l/2$. Так как $|U| = 2|E|$, то $E = Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 l)$. С другой стороны, энергия электрона, находящегося в потенциальном ml ящике, $E_n = \pi^2\hbar^2/(2ml)^2$. Исключая из обоих равенств l, находим $E_n = \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{Z^2e^4m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}$. Полученное выражение отличается от истинного в $4/\pi^2$ раза. **46.28.** 6,2 МэВ. **46.29.** $C = 2/\sqrt{l_1 l_2}$. **46.30.** 0,67. **46.31.** $C = 2\sqrt{2}/\sqrt{l_1 l_2 l_3}$. **46.32.** $\psi_I''(x) + k_1^2\psi_I(x) = 0$; $\psi_{II}''(x) + k_2^2\psi_{II}(x) = 0$, где $k_1^2 = 2mE/\hbar^2$; $k_2^2 = 2m\times$ $\times(E - U_0)/\hbar^2$. **46.33.** $\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$, $\psi_{II}(x) = A_2 e^{ik_2x} +$ $+ B_2 e^{-ik_2x}$, где $k_1 = (1/\hbar)\sqrt{2mE}$ и $k_2 = (1/\hbar)\sqrt{2m(E - U_0)}$. Коэффициент A_1 — амплитуда вероятности для падающей волны (в положительном направлении оси Ox), B_1 — то же, для волны, отраженной от барьера, A_2 — амплитуда вероятности волны, прошедшей через

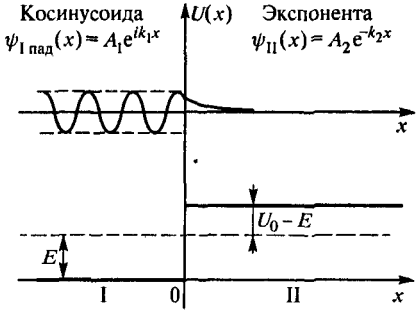


К ответу 46.33

барьер (область II), B_2 — то же, для волны, идущей справа налево в области II. Так как такая волна отсутствует, то $B_2 = 0$. На рисунке

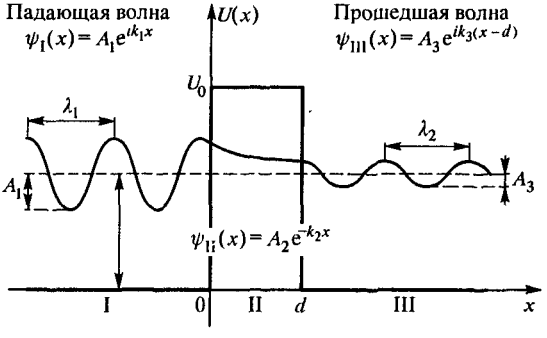
изображены действительная часть падающей волны ($\mathrm{Re}\, A_1 e^{ik_1 x}$) и действительная часть прошедшей волны ($\mathrm{Re}\, A_2 e^{ik_2 x}$). При этом были использованы следующие свойства волновых функций: 1) непрерывность самой волновой функции — $\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0)$; 2) непрерывность ее первой производной — $\psi'_{\text{I}}(0) = \psi'_{\text{II}}(0)$ (сопряжение косинусоид плавное). **46.34.** $B_1/A_1 = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$; $A_2/A_1 = 2k_1/(k_1 + k_2)$. **46.35.** $\rho = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$; $\tau = \dfrac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$. **46.36.** $\rho + \tau = \dfrac{k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2 + 4k_1 k_2}{(k_1 + k_2^2)^2} = \dfrac{k_1 + 2k_1 k_2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2} = \dfrac{(k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 1$. **46.37.** 0,8. Указание. $n = \lambda_1/\lambda_2 = k_2/k_1$. Но так как $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ и $k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$, то $n = \sqrt{1 - U_0/E}$. **46.38.** $n = \sqrt{1 + U_0/E} = 1{,}25$. **46.39.** 0,632; 1,58; 0,632. **46.40.** 20 кэВ. Указание. $\lambda_1 = \lambda_2\sqrt{1 - U_0/E}$; так как $U_0/E \ll 1$, то $\lambda_2 \approx \lambda_1[1 + U_0/(2E)]$, откуда $U_0 \approx 2\Delta\lambda E/\lambda_1$. **46.41.** $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{1 - mU_0\lambda_1^2/(2\pi^2\hbar^2)}} = 218$ пм. **46.42.** 0,0625. **46.43.** $\rho = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{U_0}{E}\right)^2$. **46.44.** 2%. **46.45.** $\rho = \left|\dfrac{1 - n}{1 + n}\right|^2$. **46.46.** 0,172 и 5,83. Решение. Коэффициент отражения $\rho = \left(\dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}}\right)^2$. Разделим числитель на $\sqrt{E}$. Далее, заменив $\sqrt{1 - U_0/E} = n$ (коэффициент преломления), получим $\rho = \left[(1-n)/(1+n)\right]^2$. Отсюда $n = \dfrac{1 \mp \sqrt{\rho}}{1 \pm \sqrt{\rho}}$. **46.47.** 0,971. Решение. Коэффициент отражения $\rho = \left[(\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0})/(\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0})\right]^2$. Разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{E}$ и обозначим $U_0/E = x$. Тогда $\rho = \left[(1 - \sqrt{1 - x})/(1 + \sqrt{1 - x})\right]^2$. При $\rho = 1/2$ находим $x = 1 - \left[(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1)\right]^2$, или $x = U_0/E$. **46.48.** 9,13 эВ. **46.49.** 0,0295, 0,97. **46.50.** В 1,03 раза. **46.51.** $\tau = 4n/(1 + n)^2$. **46.52.** 0,384; 2,61. **46.53.** $\rho = \left|\dfrac{1 - \sqrt{1 + U_0/T}}{1 + \sqrt{1 + U_0/T}}\right|^2$; $\tau = \dfrac{4\sqrt{1 + U_0/T}}{(1 + \sqrt{1 + U_0/T})^2}$. **46.54.** $\tau \approx 4\sqrt{T/U}$. **46.55.** 0,2. **46.56.** Решение. По определению, $\rho = N_\rho/N = |(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)|^2$ и $\tau = N_\tau/N = 4k_1 k_2/(k_1 + k_2)^2$. Следовательно, $\rho + \tau = N_\rho/N + N_\tau/N = 1$, откуда $N_\rho + N_\tau = N$. **46.57.** $j = 4\dfrac{(1 - U_0/E)^{3/2}}{(1 + \sqrt{1 - U_0/E})^2} j_1 = 0{,}639$ Вт/м^2. **46.58.** $\dfrac{j_2}{j_1} = \tau\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 - \tau}}{1 + \sqrt{1 - \tau}}\right)^2 = 0{,}243$. **46.59.** 48 мПа. **46.60.** Для области I $\psi''_{\text{I}}(x) + k_1^2\psi_{\text{I}}(x) = 0$; $\psi_{\text{I}}(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$, где $k_1 = (1/\hbar)\sqrt{2mE}$; для области II $\psi''_{\text{II}}(x) + k_2^2\psi_{\text{II}}(x) = 0$; $\psi_{\text{II}}(x) = A_2 e^{-kx}$, где принято $k_2 = ik$; $k =$

$= (1/\hbar)\sqrt{2m(U_0 - E)}$. На рисунке изображены действительная часть падающей волны в области I ($\mathrm{Re}\, A_1 e^{ik_1 x} = A_1 \cos kx$) и экспоненциально убывающая волновая функция в области II ($\psi_{II}(x) = A_2 e^{-k_2 x}$).



К ответу 46.60

46.61. $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{2k_1}{k_1 + ik}$. **46.62.** $\psi_{II}(x) = \dfrac{2k_1 e^{-kx}}{k_1 + ik}$. **46.63.** $|\psi_{II}(x)|^2 = \dfrac{4E}{U} \exp\left(-\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}x\right)$. **46.64.** $\rho = \left|\dfrac{k_1 - ik}{k_1 + ik}\right|^2$. **46.65.** 1. Указание. $|\rho|^2 = \rho\rho^* = \dfrac{k_1 - ik}{k_1 + ik}\dfrac{k_1 + ik}{k_1 - ik} = 1$. **46.66.** $|\psi_{II}(0)|^2 = 4E/U_0$. **46.67.** $\psi_I''(x) + k_1^2\psi_I(x) = 0$; $\psi_{II}''(x) + k_2^2\psi_{II}(x) = 0$; $\psi_{III}''(x) + k_3^2\psi_{III}(x) = 0$, где $k_1^2 = k_3^2 = 2mE/\hbar^2$, $k_2^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2$. **46.68.** $\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x}$; $\psi_{II}(x) = A_2 e^{-kx}$, $\psi_{III}(x) = A_3 e^{ik_3 x}$, где $k_1 = k_3 = (1/\hbar)\sqrt{2mE}$, $k = (1/\hbar)\times \sqrt{2m(U_0 - E)}$, A_1 — амплитуда вероятности для падающей волны,



К ответу 46.68

A_3 — то же, для волны, прошедшей через ступень. Пренебрегая отраженными волнами на границах I–II и II–III, можно написать:

$A_2 \approx A_1$ и $A_3 \approx a_2 e^{-kd}$; $D = |A_3/A_1|^2 = \exp(-2kd)$, или $D = \exp\left[-(2/\hbar)\sqrt{2m(U_0 - E)}\right]$. На рисунке изображены действительная часть падающей волны в области I ($\mathrm{Re}\, A_1 e^{ik_1 x}$), экспоненциально убывающая волновая функция в области II ($\psi_{II}(x) = A_2 e^{-kx}$) и действительная часть прошедшей волны в области III ($\mathrm{Re}\, A_3 e^{ik_3 x}$). **46.69.** 0,35; $5{,}9 \cdot 10^{-3}$. **46.70.** 0,2; $6{,}5 \cdot 10^{-3}$. **46.71.** Уменьшится в 79 раз. **46.72.** $d = \dfrac{\hbar \ln(1/D)}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}} = 0{,}22$ нм. **46.73.** 0,143 нм. **46.74.** $U_0 - E = \dfrac{1}{2m} \times \left(\dfrac{\hbar \ln(1/D)}{2d}\right)^2 = 0{,}45$ эВ. **46.75.** 0,2. **46.76.** 10^{-4} эВ. **46.77.** 0,89. **46.78.** Примерно 74. **46.79.** $Z = \dfrac{\pi\hbar}{ml^2} = 4{,}02 \cdot 10^{15}\,\mathrm{с}^{-1}$. **46.80.** $F = \dfrac{\pi\hbar^2}{ml^3} = 4{,}42$ нН. **46.81.** $n = \dfrac{(2-\tau) + 2\sqrt{1-\tau}}{\tau} = 4$. **46.82.** $n = \dfrac{\sqrt{E - U_1}}{\sqrt{E - U_2}} = 0{,}5$. **46.83.** 1) $\rho = \left|\dfrac{\sqrt{E - U_1} - \sqrt{E - U_2}}{\sqrt{E - U_1} + \sqrt{E + U_2}}\right|^2 = 0{,}072$; 2) $\tau = 4\dfrac{\sqrt{E - U_1} \cdot \sqrt{E - U_2}}{\sqrt{E - U_1} + \sqrt{E - U_2}} = 0{,}928$; 3) $n = \dfrac{\sqrt{E - U_2}}{\sqrt{E - U_1}} = 1{,}73$. **46.84.** $d = \dfrac{\hbar}{\sqrt{8m(U_0 - E)}} = 66$ пм. **46.85.** $\tau = \dfrac{2d}{\sqrt{2E/m}} e^{-(18d/\hbar)\sqrt{2m(U_0 - E)}} = 3{,}6 \cdot 10^{-11}$ с. **46.86.** $E_{\min} = U_0 + \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2md^2} = 42{,}3$ эВ.

§ 47.

47.1. Подставим в уравнение Шредингера $\psi = R \cdot Y$, тогда

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) RY = 0.$$

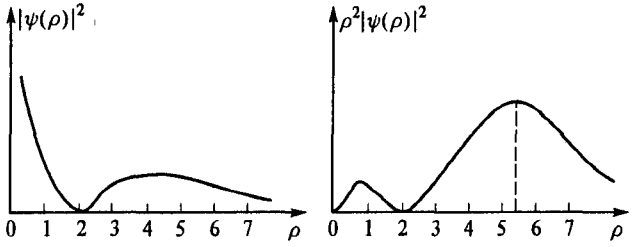
Деля на RY, умножая на r^2 и разделяя переменные, получаем

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) r^2 = -\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right].$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях r, θ и φ, что возможно только в том случае, если обе части его могут быть приравнены к одной и той же постоянной λ. После преобразования полу-

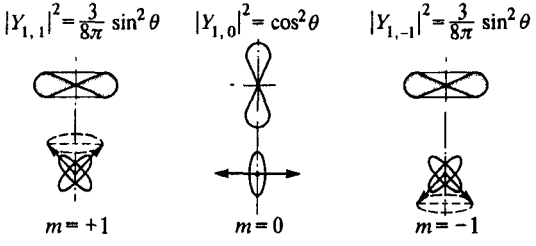
чим $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$; $\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+$ $+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\lambda Y$. Таким образом исходное уравнение распалось на два: радиальное и угловое. **47.2.** Применим подстановку $\chi(r)=rR(r)$ и найдем первую и вторую производные: $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r^2}\chi$ и $\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}=$ $=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r^3}\chi-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, после упрощений получаем $\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}+\left(\alpha+\frac{2\beta}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi=$ $=0$. **47.3.** При больших r членами $2\beta/r$ и $l(l+1)/r^2$ можно пренебречь по сравнению с α. Тогда уравнение примет вид $\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}+\alpha\chi=0$. Решение этого уравнения: $\chi(r)=C_1\mathrm{e}^{i\sqrt{\alpha}r}+C_2\mathrm{e}^{-i\sqrt{\alpha}r}$. При $\alpha>0$ $(E>0)$ функция $\chi(r)$ конечна при любых r, энергетический спектр непрерывный и движение электрона не связанное. При $\alpha<0$ $(E<0)$ выражение $\chi(r)$ преобразуется к виду $\chi(r)=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{|\alpha|}r}+C_2\mathrm{e}^{+\sqrt{|\alpha|}r}$, где введено обозначение $\alpha=-|\alpha|$ (этим подчеркивается, что $\alpha<0$). Тогда из условия конечности ψ-функции $C_2=0$ и $\chi(r)=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{|\alpha|}r}$. Решение с $E<0$ приводят к связанным состояниям. **47.4.** При малых r членами α и $2\beta/r$ можно пренебречь по сравнению с $l(l+1)/r^2$, тогда исходное уравнение примет вид $\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\chi=0$. Применим подстановку $\chi(r)=$ $=r^\gamma$, тогда $\gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2}-l(l+1)r^\gamma/r^2=0$ или $\gamma(\gamma-1)=l(l+1)$, откуда $\gamma_1=-l$ и $\gamma_2=l+1$. Из двух решений $\chi(r)=r^{-l}$ и $\chi(r)=$ $=r^{(l+1)}$ только второе удовлетворяет при малых r условию конечности функции. Поэтому решение уравнения при малых r есть $\chi(r)=r^{l+1}$. **47.5.** Применим подстановку $R(r)=\mathrm{e}^{-\gamma r}$. После сокращения на $\mathrm{e}^{-\gamma r}$ получим $\gamma^2+\alpha=(2/r)(\gamma+\beta)$. Член, содержащий l, не вошел, так как в основном состоянии $l=0$. Полученное равенство выполняется при любых r, но это возможно только тогда, когда левая и правая части равенства порознь равны нулю: $\gamma^2+\alpha=0$ и $\gamma+\beta=0$. Решая оба уравнения совместно, имеем $\beta^2+\alpha=0$. Подставляя значения α и β в это выражение, находим энергию основного состояния атома водорода: $E=-Z^2e^4m/(32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2)$. **47.6.** $C=1/\sqrt{\pi a^3}$. **47.7.** $r=$ $=\pi\varepsilon_0\hbar^2/(e^2m)$. **47.8.** 0,825. **47.9.** 0,324; 0,676; 2,09. **47.10.** $(3/2)a$. **47.11.** 2,66. **47.12.** 1) 0,76; 5,24; 2) 0,2; ∞; 3) см. рисунок. **47.13.** Под-

ставим в исходное уравнение $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ и перенесем в правую часть равенства переменные, зависящие от φ: $\frac{1}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\right] + \lambda\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$. Это равенство должно выполняться при любых θ и φ, что возможно только в том случае, если правая и левая части равны некоторой постоянной величине, которую обозначим m^2. Тогда исход-



К ответу 47.12

ное уравнение распадается на два: $\frac{1}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\right] + \lambda\sin^2\theta = m^2$; $\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = -m^2$. **47.14.** Решением уравнения является функция $\Phi(\varphi) = C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi}$. Так как встречная волна отсутствует, то $C_2 = 0$. Из условия однозначности $e^{im\varphi} = Ce^{im(\varphi+2\pi)}$, откуда $e^{i\cdot 2\pi m} = 1$ или $\cos 2\pi m + i\sin 2\pi m = 1$. Последнее равенство возможно лишь при целочисленных значениях m. Таким образом, $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, где

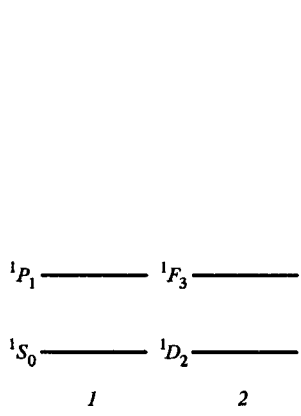


К ответу 47.16

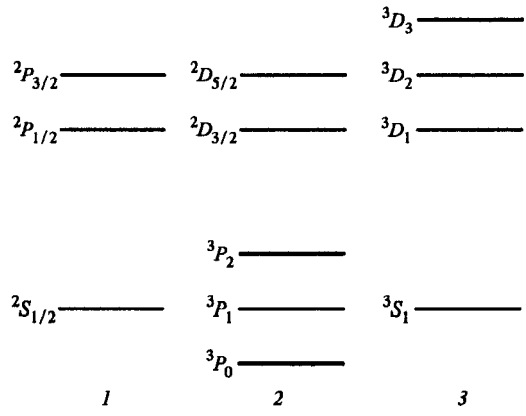
$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **47.15.** $C = 1/\sqrt{2\pi}$. **47.16.** См. рисунок. **47.17.** Согласно принципу суперпозиции состояний, $Y_{1,m} = Y_{1,0} + Y_{1,1} + Y_{1,-1}$; $|Y_{1,m}|^2 = |Y_{1,0}|^2 + |Y_{1,1}|^2 + |Y_{1,-1}|^2$, так как все смешанные функции типа $Y_{1,0}$, $Y_{1,1}$ и т. д. при интегрировании дают из-за ортого-

нальности нуль. Тогда $|Y_{1,m}|^2 = \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta + \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta = \frac{3}{4\pi}$. Отсюда видно, что плотность вероятности не зависит от углов, т. е. обладает сферической симметрией. **47.18.** 1) 0; 2) $1{,}49\cdot10^{-34}$ Дж·с. **47.19.** 0; $\pm1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с; $\pm2{,}11\cdot10^{-34}$ Дж·с. **47.20.** $1{,}49\cdot10^{-34}$ Дж·с. **47.21.** 35°21′. **47.22.** $\hbar\sqrt{12} = 3{,}46\hbar$; $3\hbar$. **47.23.** $1{,}61\cdot10^{-23}$ Дж/Тл. **47.24.** −3,4 эВ; $1{,}50\cdot10^{-34}$ Дж·с; $1{,}31\cdot10^{-23}$ Дж/Тл. **47.25.** Не может, так как максимальная проекция $\mathcal{M}_{l,z} = \hbar l$, а модуль вектора $|\boldsymbol{\mathcal{M}}_l| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, т. е. всегда $\mathcal{M}_{l,z} < \mathcal{M}_l$. Тот же результат следует и из соотношения неопределенностей. Действительно, если вектор орбитального магнитного момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}_l$ электрона установился строго вдоль линий индукции, то это значит, что все три проекции $\mathcal{M}_{l,x}$, $\mathcal{M}_{l,y}$, $\mathcal{M}_{l,z}$ вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}_l$ точно определены. Но этого не допускают соотношения неопределенностей. **47.26.** 0; $1{,}31\cdot10^{-23}$ Дж/Тл; $2{,}27\cdot10^{-23}$ Дж/Тл. **47.27.** $0{,}912\cdot10^{-34}$ Дж·с; $0{,}528\cdot10^{-34}$ Дж·с. **47.28.** $1{,}61\cdot10^{-23}$ А·м^2; $9{,}27\cdot10^{-24}$ А·м^2. **47.30.** 5,8 кТл/м. **47.31.** 4,46 мм. **47.32.** 432 Тл/м. **47.33.** $2{,}86\cdot10^{-21}$ Н. **47.34.** $-\mu_B$; $+\mu_B$. **47.35.** Два s-электрона; два s-электрона и шесть p-электронов; два s-электрона, шесть p-электронов и десять d-электронов. **47.36.** 1) 1; 2) 2; 3) $2(2l+1)$; 4) $2n^2$. **47.37.** 1) 9; 2) 4; 3) 2; 4) 3. **47.38.** 1) 15 (атом фосфора); 2) 46 (атом палладия). **47.39.** 1) $1s^22s^2p^1$; 2) $1s^22s^2p^2$; 3) $1s^22s^2p^63s^1$. **47.41.** 1/2 и 1/3; $\hbar\sqrt{3}/2$ и $\hbar\sqrt{15}/2$. **47.42.** 1, 2, 3; $\hbar\sqrt{2}$, $\hbar\sqrt{6}$, $\hbar\sqrt{12}$. **47.43.** 1) 110°45′; 2) 45°; 3) 160°35′. **47.44.** 54°45′. **47.45.** $\hbar\sqrt{35}/2$ и $\hbar\sqrt{15}/2$; 61°51′ и 135°. **47.46.** 71°31′. **47.47.** 54°45′; 106°45′ и 150°. **47.48.** 1) 46°50′ ($J = 5/2$); 116°35′ ($J = 3/2$); 2) 54°45′ ($S = 1$, $L = 3$); 106°, 45′ ($S = 1$, $L = 2$) и 150° ($S = 1$, $L = 1$). **47.49.** $\frac{2\hbar}{\sqrt{3}}$; $\frac{\hbar}{\sqrt{6}}$; $-\frac{\hbar}{\sqrt{2}}$. **47.50.** 1) 1; 2; 3; $\hbar\sqrt{2}$; $\hbar\sqrt{6}$; $\hbar\sqrt{12}$; 2) 2; 3; 4; $\hbar\sqrt{6}$; $\hbar\sqrt{12}$; $\hbar\sqrt{20}$. **47.51.** 1) 3/2; 5/2; 7/2; 9/2; 2) 1; 2; 3; 4; 5; 3) 1/2, 3/2, ..., 11/2; 4) 1, 2, ..., 7. **47.52.** 1) $^2S_{1/2}$; 2) $^1S_0$; 3) $^2S_{1/2}$; 4) $^1S_0$; 5) $^2P_{1/2}$. **47.53.** 1) $^2S_{1/2}$; 2) $^2P_{1/2}$; $^2P_{3/2}$; 3) $^4P_{1/2}$; $^4P_{3/2}$; $^4P_{5/2}$; 4) $^5D_0$; $^5D_1$; $^5D_2$; $^5D_3$; $^5D_4$. **47.54.** 1) 4; 2) 7; 3) 7. **47.56.** 1) 2; 2) 1 и 3; 3) 2 и 4; 4) 1, 3 и 5; 5) 2, 4 и 6. **47.57.** Синглетные термы: $^1P_1$, $^1D_2$, $^1F_3$; триплетные термы: $^3P_{0,1,2}$, $^3D_{1,2,3}$, $^3F_{2,3,4}$. **47.58.** 2 в S-состоянии, 2/3 и 4/3 в P-состоянии. **47.59.** 1. **47.60.** $\sqrt{6}\mu_B$. **47.61.** $(3/2)\sqrt{6}\mu_B$. **47.62.** 4; $(6/5)\mu_B$. **47.63.** $\sqrt{3}\mu_B$. **47.64.** $\mathcal{M}_J = 2\sqrt{3}\mu_B$, $\mathcal{M}_{J,z} = 3\mu_B$, $2\mu_B$, $1\mu_B$, 0, $-1\mu_B$, $-2\mu_B$, $-3\mu_B$. **47.65.** 7 ($S = 3$).

47.66. 1) 4; 2) 5; 3) не расщепляется, так как $g = 0$. **47.67.** $0{,}6\mu_в$ (ванадий); $5\mu_в$ (марганец); $6\mu_в$ (железо). **47.68.** 1) $4{,}4 \cdot 10^6\ с^{-1}$; 2) $4{,}4 \cdot 10^{12}\ с^{-1}$. **47.69.** 1) $8{,}80 \cdot 10^8$ рад/с; 2) $1{,}17 \cdot 10^9$ рад/с. **47.70.** 1) $1{,}16 \cdot 10^{-4}$ эВ; 2) $5{,}80 \cdot 10^{-3}$ эВ. **47.72.** 1) Для терма ^1S: $S = 0$, $L = 0$, $J = 0$; для терма ^1P: $S = 0$, $L = 1$, $J = 1$; 2) для терма ^1D: $S = 0$, $L = 2$, $J = 2$; для терма ^1F: $S = 0$, $L = 3$, $J = 3$. Схема энергетических уровней изображена на рисунке. **47.73.** 1) Для терма ^2S: $J = 1/2$; для

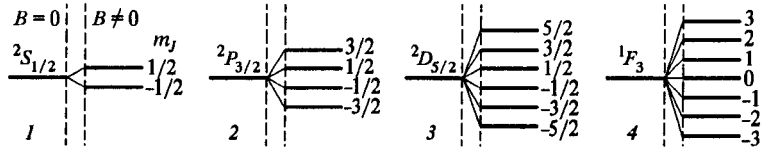


К ответу 47.72



К ответу 47.73

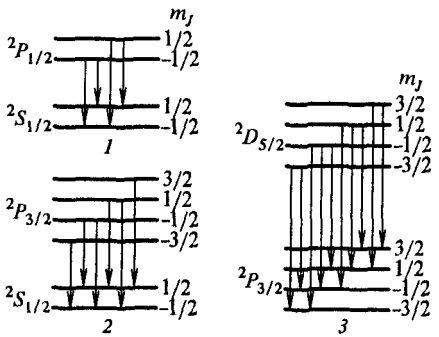
терма ^2P: $J = 1/2, 3/2$; 2) для терма ^3P: $J = 0, 1, 2$; для терма ^2D: $J = 3/2, 5/2$; 3) для терма ^3S: $J = 1$; для терма ^3D: $J = 1, 2, 3$. Схема энергетических уровней изображена на рисунке. **47.74.** 1) $-1/2$, $1/2$; 2) $-3/2$, $-1/2$, $1/2$, $3/2$; 3) $-5/2$, $-3/2$, $-1/2$, $1/2$, $3/2$, $5/2$; 4) -3,



К ответу 47.74

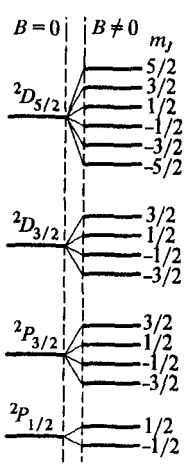
-2, -1, 0, 1, 2, 3. Магнитное расщепление энергетических уровней изображено на рисунке. **47.75.** Схемы переходов изображены на рисунке. При построении переходов учитывается правило отбора $\Delta m_J = 0, \pm 1$. **47.76.** $(4/3)\Delta\omega_0$, $-(2/3)\Delta\omega_0$, $(2/3)\Delta\omega_0$, $(4/3)\Delta\omega_0$. **47.77.** $^2S_{1/2}$; $^2S_{1/2}$,

$^2P_{3/2}$; $^2D_{3/2}$, $^2D_{5/2}$; $L_{J,\max} = \dfrac{\sqrt{35}}{2}\hbar$. **47.78.** $\mathcal{M}_J = g\mu_B\sqrt{J(J+1)} =$ $= 2\sqrt{\dfrac{3}{2}}\mu_B$; $\mathcal{M}_{Jz,\max} = \dfrac{6}{5}\mu_B$. **47.79.** $J = \pi\hbar c\Delta\tilde{\nu}/(\mu_B g B) = 3$; ^1F.

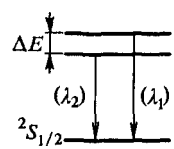


К ответу 47.75

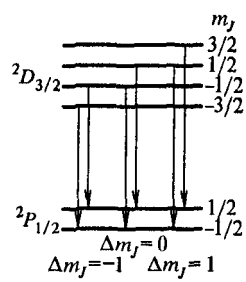
47.80. $3\,^2P_{3/2}$; $3\,^2P_{1/2}$; $3\,^2S_{1/2}$; $\Delta E = \dfrac{2\pi\hbar c}{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_2 - \lambda_1) = 2{,}00$ мэВ; энергетическую схему перехода см. на рисунке. **47.81.** $\Delta\tilde{\nu} = \mu_B g J B/(\pi\hbar c) =$ $= 0{,}56\,\text{см}^{-1}$. **47.82.** $\omega_L = g\mu_B B/\hbar = 1{,}18\cdot 10^9$ рад/с. **47.83.** $|\Delta E|_{\min} =$



К ответу 47.84(2)



К ответу 47.80



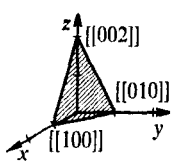
К ответу 47.84(3)

$= \mu_B g|m_J|_{\min} = B = 0{,}0199$ мэВ. **47.84.** 1) Терм $^2P\left(J = \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$; терм $^2D\left(J = \dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$; 2) терм $^2P_{1/2}\left(m_J = \pm\dfrac{1}{2}\right)$; терм $^2P_{3/2}\left(m_J = \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{3}{2}\right)$;

терм $^2D_{3/2}\left(m_J = \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}\right)$; терм $^2D_{5/2}\left(m_J = \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{5}{2}\right)$. Расщепление энергетических уровней см. на рисунке; 3) правила отбора $\Delta S = 0$ (одинаковая мультиплетность); $\Delta L = \pm 1$; $\Delta J = 0, \pm 1$; $\Delta m_J = 0, \pm 1$. Построение переходов см. на рисунке.

§ 48. **48.2.** $C_0 = (\alpha^2/\pi)^{1/4}$. **48.3.** $1/\alpha$. **48.4.** 0,84. **48.5.** $E_0/2$. **48.6.** $A = \sqrt{\hbar/(\mu\omega)} = 12{,}5$ пм. **48.7.** $\beta = \mu\omega^2 = 1{,}91$ кН/м. **48.8.** $E_{\text{возб}} = \hbar\omega(1-2\gamma) = 0{,}356$ эВ. **48.9.** 23. **48.10.** 16,2. **48.11.** $E_{\max} = \hbar\omega/(4\gamma) = 5{,}18$ эВ. **48.12.** $E_d = \hbar\omega\dfrac{1-2\gamma}{4\gamma} = 11{,}4$ эВ. **48.13.** $\gamma = \dfrac{\hbar\omega}{4E_d + 2\hbar\omega} = 7{,}36\cdot 10^{-3}$. **48.14.** $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega(1-2\gamma)} = 5{,}39$ мкм. **48.15.** $1{,}49\cdot 10^{-34}$ Дж · с. **48.16.** $1{,}10\cdot 10^{-34}$ мДж · с. **48.17.** $1{,}57\cdot 10^{11}$ с$^{-1}$. **48.18.** 0,238 мэВ. **48.19.** $3{,}66\cdot 10^{-34}$ Дж · с. **48.20.** $1{,}46\cdot 10^{-46}$ кг · м^2; 113 пм. **48.21.** 2 и 3. **48.22.** 1) $1{,}40\cdot 10^{-46}$ кг · м^2; 2) 0,259 мэВ; 3) 6 В = 1,55 нэВ. **48.23.** 1) $1{,}33\times 10^{-26}$ кг; 2) 121 пм; 3) $7{,}61\cdot 10^{11}$ с$^{-1}$. **48.24.** 1) $1{,}64\cdot 10^{-46}$ кг · м^2; 2) 0,212 мэВ; 3) $T = 4B/(3k) = 3{,}3$ К. **48.25.** 1 мэВ соответствует $8{,}06\times 10^9$ см$^{-1}$. **48.26.** 112 пм. **48.27.** $-1{,}035\hbar$ $(J = 2 \to J = 1)$. **48.28.** $B = (1/2)(1/\lambda_1 - 1/\lambda_2) = 10{,}7$ см$^{-1}$. **48.29.** Будет возбуждать только вращательные уровни. **48.30.** $2J + 1$.

§ 49. **49.1.** 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 2; 5) 1; 6) 2. **49.2.** 1) $1{,}44\times\times 10^{28}$; 2) $2{,}1\cdot 10^{28}$; 3) $4{,}54\cdot 10^{28}$. **49.3.** $1{,}46\cdot 10^3$ кг/м^3. **49.4.** $2{,}6\times\times 10^3$ кг/м^3. **49.5.** 6,95 (литий). **49.6.** 1) 0,404 нм; 0,286 нм; 2) 0,316 нм; 0,274 нм. **49.7.** 1,63. Отклонение обусловлено тем, что в реальном кристалле атомы не обладают сферической симметрией. **49.8.** 0,320 нм, 0,521 нм. **49.9.** 0,23 нм. **49.10.** 207 кг/м^3. **49.11.** A [[221]]; B [[021]]; C [[$\bar{1}$22]]; D [[$\bar{1}\bar{1}$2]]. **49.12.** 1) [121]; 2) [112]. **49.13.** [$\bar{1}$10]; [$\bar{1}$11]; [101]. **49.14.** 1) [111]; 2) [$\bar{1}2\bar{2}$] или [$1\bar{2}\bar{2}$]. **49.15.** 0,975 нм. **49.16.** 35°15′. **49.17.** а) (111); б) (011); в) (11$\bar{1}$); г) (1$\bar{1}$0); д) (112); е) (111). **49.18.** (111). **49.19.** Отрезки, отсекаемые на осях x, y, z, соответственно равны 1, 1, 2 (см. рисунок). **49.20.** (110), отрезки на осях 1, 1, ∞. **49.21.** 1) ($\bar{1}$24), отрезки на осях 4, 2, 1; 2) (012), отрезки на осях ∞, 2, 1. **49.22.** 0,173 нм. **49.23.** 0,36 нм. **49.24.** Минимальные для (111), максимальные для (100);



К ответу 49.19

$d_{111}:d_{110}:d_{100}=\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{2}}:1$. **49.25.** 70°20′. **49.26.** $\pi/4$. **49.27.** 0 (прямая лежит в плоскости). **49.28.** $\pi/2$. **49.29.** 54°40′.

§ 50. **50.1.** 925 Дж/(кг·К); 390 Дж/(кг·К). **50.2.** 825 Дж/(кг·К); 675 Дж/(кг·К). **50.3.** 1,12 МДж/К. **50.4.** 1,70 кДж. **50.5.** $\langle\varepsilon\rangle=kT$; $\langle\varepsilon\rangle=$ $=4{,}14\cdot10^{-21}$ Дж. **50.6.** 124 кДж; 414 Дж/К. **50.7.** 1) $2{,}99\cdot10^{-21}$ Дж; 2) 134 кДж. **50.8.** 3,44 ТГц. **50.9.** В 3,74 раза. **50.10.** 1,16. **50.11.** 36,1 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$. **50.12.** 0,34 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$. **50.13.** 8,8%. **50.14.** 2,87 $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$. **50.15.** $g(\omega)=6N\omega^2/\omega^3$. **50.16.** $U=3RT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\int\limits_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3\,dx}{e^x-1}$, где $\Theta_D=$ $=\frac{\hbar\omega_{max}}{k}$. **50.17.** $C=3R\left[12\,(T/\Theta_D)^3\int\limits_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3\,dx}{e^x-1}-\frac{3(\Theta_D/T)}{e^{\Theta_D/T}-1}\right]$. **50.18.** $C=\frac{12}{5}\pi^4R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$. **50.19.** 2,99 кДж/моль. **50.20.** $2{,}36\cdot10^{13}$ м$^{-1}$. **50.21.** $2{,}75\cdot10^{13}$ с$^{-1}$. **50.22.** $5{,}2\cdot10^{-3}$. **50.23.** 14,6 Дж/моль. **50.24.** $\Delta U_м=$ $=2{,}49R\Delta T=41{,}4$ Дж/моль. **50.25.** 212 К. **50.26.** 4,83%. **50.27.** 3/4. **50.28.** $g(\omega)=\frac{6N\omega}{\omega^2}$. **50.29.** $U=3RT\cdot2\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^2\int\limits_0^{\Theta_D/T}\frac{x^2\,dx}{e^x-1}$. **50.30.** $C=$ $=3R\left\{6\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^2\int\limits_0^{\Theta_D/T}\frac{x^2\,dx}{e^x-1}-\frac{2(\Theta_D/T)}{e^{\Theta_D/T}-1}\right\}$. **50.31.** $C=43{,}3R\,(T/\Theta_D)^2$. **50.32.** $U_{0,м}=R\Theta_D=2{,}91$ кДж/моль. **50.33.** $g(\omega)=3N/\omega_{max}$. **50.34.** $U=3RT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)\int\limits_0^{\Theta_D/T}\frac{x\,dx}{e^x-1}$, где $\Theta_D=\hbar\omega_{max}/k$. **50.35.** $C=$ $=3R\left\{2\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^2\int\limits_0^{\Theta_D/T}\frac{x\,dx}{e^x-1}-\frac{(\Theta_D/T)}{e^{\Theta_D/T}-1}\right\}$. **50.36.** $C=\pi^2R(T/\Theta_D)$. **50.37.** $U_{0,м}=\frac{3}{4}R\Theta_D=1{,}87$ кДж/моль. **50.38.** 475 кДж. **50.39.** 600 Вт. **50.40.** $3{,}45\cdot10^{-21}$ Дж. **50.41.** 10^{-25} Н·с. **50.42.** 443 К. **50.43.** 1,50 км/с. **50.44.** 4,8 нм. **50.45.** $1{,}1\cdot10^{-21}$ Дж. **50.46.** 3,13 км/с. **50.47.** 4,0 нм. **50.48.** 4,1. **50.49.** 46 МПа. **50.50.** 77,7 МПа. **50.51.** $\Delta\omega/\omega\approx(v/c)\cos\theta$. **50.52.** $R=\frac{2}{m_a}\left(\frac{\pi\hbar}{\lambda}\right)^2$; 1) 33 пэВ; 2) 33 мэВ; 3) 0,33 эВ. **50.53.** $2\cdot10^{-5}$; $5\cdot10^{-9}$; $7\cdot10^{-9}$. **50.54.** $2\cdot10^{-6}$; $1{,}3\cdot10^{-7}$; $4{,}4\cdot10^{-13}$. **50.55.** $\Delta E=\varepsilon_\gamma\times$ $\times[1-\varepsilon_\gamma/m_яc^3]$. **50.56.** $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\varepsilon_\gamma}{\pm2m_яc^2}=4\cdot10^{-7}$. **50.57.** $\frac{\Delta\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma}=$ $=\frac{\varepsilon_\gamma}{2m_яc^2}=7{,}45\cdot10^{-7}$. **50.58.** $\varepsilon_\gamma=\sqrt{2m_ac^2E_{св}}=1{,}73$ МэВ. **50.59.** $v=$

$= \Delta E/(m_я c) = 218$ м/с. **50.60.** $v = \Delta E/(m_я c) = 36$ м/с. **50.61.** $v = \ln 2\hbar c/(T\varepsilon_\gamma) = 0{,}19$ мм/с. **50.62.** $\tau = \hbar c/(v\varepsilon_\gamma) = 0{,}2$ нс. **50.63.** $v = gl/c = 65$ мкм/с. **50.64.** $3{,}40\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$. **50.65.** $1{,}25\cdot10^{-9}$ Н. **50.66.** Максимальная сила притяжения $0{,}8\cdot10^{-9}$ Н, отталкивания $1{,}2\cdot10^{-9}$ Н. **50.67.** $3{,}4\cdot10^{-21}$ Дж. **50.68.** Среднее смещение $\langle x\rangle$ обращается в нуль при чисто гармонических колебаниях. **50.69.** 60 Н/м. **50.70.** $2{,}5\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$. **50.71.** 540 ГПа. **50.72.** 1%. **50.73.** $3\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$. **50.74.** $Q_{кв} = \frac{m}{A} \times 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T_1}}{e^{\Theta_E/T_1}-1}\Delta T = 12{,}3$ Дж; $\Theta_{кл} = \frac{m}{A}\cdot 3R\Delta T = 17$ Дж. **50.75.** $Q_{кв} = \nu\cdot 3R\Theta_E\left(\frac{1}{e^{\Theta_E/T_2}-1} - \frac{1}{e^{\Theta_E/T_1}-1}\right) = 2{,}99$ кДж; $Q_{кл} = \nu\cdot 3R\Theta_E = 3{,}12$ кДж; $\frac{Q_{кл}-Q_{кв}}{Q_{кв}} = 0{,}043$. **50.76.** $\Delta U = \frac{m}{A} \times 3R\Theta_E\left(\frac{1}{e^{\Theta_E/T_2}-1} - \frac{1}{e^{\Theta_E/T_1}-1}\right) = 396$ Дж; $\Delta U_{кл}/\Delta U_{кв} = 1{,}81$. **50.77.** $Q_D = \left(\frac{m}{A}\cdot\frac{12\pi^4 R}{5C_1}\right)^{1/3} T_1 = 630$ К, так как $\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$; $C_м = \frac{12\pi^4 R}{5}\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 = 0{,}21$ Дж/(моль·К). **50.78.** $\Delta U = \frac{m}{A}\frac{3\pi^4 R}{5\Theta_D}\times (T_2^4 - T_1^4) = -14{,}9$ Дж. **50.79.** $Q = \frac{m}{A}\frac{3\pi^4 R}{5\Theta_D^3}(T_2^4 - T_1^4) = 21{,}0$ Дж. **50.80.** $T_2 = \Theta_D\left[\left(\frac{T_1}{\Theta_D}\right)^4 - \frac{5AQ}{3\pi^4 R\Theta_D}\right]^{1/4} = 121$ К. **50.81.** $Q_2/Q_1 = \frac{5\Theta_D^3\Delta T}{\pi^4\left[(T_1+\Delta T)^4 - T_1^4\right]} = 18{,}8$. **50.82.** $T_2 = \Theta_D\frac{5AIU\tau}{3\pi^4 mR\Theta_D} + \Theta_D\left(\frac{T_1}{\Theta_D}\right)^{1/4} = 20{,}9$ К.

§ 51.

51.1. $4{,}57\cdot10^{27}$ м$^{-3}$. **51.2.** 5,41. **51.3.** 0,9. **51.4.** В 3 раза. **51.5.** $\Delta\varepsilon = \frac{\pi^2\hbar^2}{(3\pi^2 n)^{1/3}}\frac{\Delta N}{V} = 2{,}37\cdot10^{-19}$ эВ; $n = \rho\frac{A}{N_A}$; $\Delta N = 2$ (два электрона с противоположно направленными спинами на каждом энергетическом уровне). **51.6.** $\langle\varepsilon\rangle = (3/5)\varepsilon_F = 4{,}2$ эВ. **51.7.** В 1,83 раза. **51.8.** 0,03. **51.9.** $31{,}2\cdot10^3$ К. **51.10.** В 14,9 раза. **51.11** $dn(p) = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\frac{p^2\,dp}{\exp\left(\frac{p^2/2m - \varepsilon_F}{kT}\right)}$ (при $T \neq 0$ К); $dn(p) = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}p^2\,dp$ (при $T = 0$ К). **51.12.** 1) $dn(v) =$

$= \dfrac{m}{\pi^2\hbar^3}\dfrac{v^2\,dv}{\exp\left(\dfrac{mv^2-2\varepsilon_F}{2kT}\right)}$ (при $T \neq 0$ К); 2) $dn(v) = \dfrac{m}{\pi^2\hbar^2}v^2\,dv$ (при $T = 0$ К). **51.13.** $v_{max} = \sqrt{2\varepsilon_F/m} = 1{,}32\cdot10^6$ м/с. **51.14.** $\langle v\rangle = (3/4)v_{max} = 1{,}09\cdot10^6$ м/с. **51.15.** В 7 раз. **51.16.** $\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{(3/5)v_{max}}$. **51.17.** $\left\langle\dfrac{1}{v}\right\rangle = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{v_{max}}$. **51.18.** $-0{,}05$. **51.19.** $2{,}5\cdot10^{19}$ м$^{-3}$. **51.20.** $3{,}5\cdot10^{-2}$ м^2/(В·с); $2\cdot10^{22}$ м$^{-3}$. **51.21.** 0,053 эВ; 0,85 нм. **51.22.** 1,2 В. **51.23.** $5{,}25\cdot10^{16}$ м$^{-3}$. **51.24.** $1{,}76\cdot10^{11}$ (Тл·с)$^{-1}$. **51.25.** $\nu_0 = g\mu_B B_0/(2\pi\hbar) = 28$ ГГц. **51.26.** $\dfrac{\omega_{эпр}}{\omega_{цикл}} = \dfrac{g}{2} = 1{,}00116$. **51.27.** $B_0 = \dfrac{2\pi\hbar}{2\mu_B}\nu_0 = 0{,}353$ Тл. **51.28.** $2{,}68\times$ $\times\,10^8$ (Тл·с)$^{-1}$. **51.29.** $\nu_0 = \gamma B_0/(2\pi) = 42{,}6$ МГц. **51.30.** $g = \dfrac{2\pi\hbar\nu_0}{\mu_N B_0} = 0{,}34$. **51.31.** $-3{,}82$; $-1{,}91\mu_N$. **51.32.** Для протона $g = 5{,}58$, $\mathcal{M}_p = 2{,}79\mu_N$; для дейтона $g = 0{,}86$, $\mathcal{M}_d = 0{,}86\mu_N$. **51.33.** $\nu_0 = \dfrac{\mathcal{M}_I}{2\pi\hbar I}B_0 = 94$ МГц. **51.34.** $\dfrac{N(m_1)}{N(I)} = \exp\left\{-\dfrac{g\mu_N B_0}{kT} - (I-m_I)\right\}$; $1-4\cdot10^{-5}$ $(m_I = 1/2)$; $1-4\cdot10^5$ $(m_I = -1/2)$; $1-6\cdot10^{-5}$ $(m_I = -3/2)$. **51.35.** 1) $\varepsilon_F = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\dfrac{\rho}{A}N_A\right)^{2/3} = 2{,}40\cdot10^{-19}$ Дж (1,50 эВ); 2) $P_F = \hbar\left(3\pi^2\dfrac{\rho}{A}N_A\right)^{1/3} = 7{,}61\cdot10^{-25}$ кг·м/с; 3) $v_F = \dfrac{\hbar}{m}\left(3\pi^2\dfrac{\rho}{A}N_A\right)^{1/3} = 7{,}26\cdot10^5$ м/с; 4) $T_F = \dfrac{\hbar^2}{2mk}\left(3\pi^2\dfrac{\rho}{A}N_A\right)^{2/3} = 17{,}4$ кК. **51.36.** $p = \dfrac{1}{5}\dfrac{\hbar^2}{m}(3\pi^2)^{2/3}\left(\dfrac{\rho}{A}N_A\right)^{5/3} = 1{,}38\cdot10^{10}$ Па. **51.37.** $\dfrac{\langle\Pi\rangle}{\varepsilon_F} = \dfrac{me^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2(3\pi^2)^{2/3}}\times$ $\times\left(\dfrac{A}{\rho N_A}\right)^{1/3} = 0{,}905$. **51.38.** $d_{max} = \dfrac{2\hbar}{eB}\left(3\pi^2\dfrac{\rho}{A}N_A\right)^{1/3} = 2{,}78$ мм.

I. О приближенных вычислениях

Числовые значения величин, с которыми приходится иметь дело при решении физических задач, являются большей частью приближенными.

К таким величинам относятся, в частности, многие константы, приводимые в справочниках. Например, для нормального ускорения свободного падения в справочниках дается значение 9,81 м/с, для отношения длины окружности к диаметру — 3,14, для массы электрона — $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг и т. п. При более точном вычислении или измерении эти величины оказываются равными $g = 9{,}80665$ м/с^2, $\pi = 3{,}1416$, $m_e = 9{,}106 \cdot 10^{-31}$ кг. Однако и эти значения, в свою очередь, являются приближенными или в силу недостаточной точности измерения, или в силу того, что получены путем округления еще более точных значений.

Очень часто неопытные лица при вычислениях добиваются получения такой точности результатов, которая совершенно не оправдывается точностью использованных данных. Это приводит к бесполезной затрате труда и времени.

Рассмотрим такой пример. Пусть требуется определить плотность ρ вещества некоторого тела. При взвешивании тела на весах с точностью до 0,01 г определили массу тела: $m = (9{,}38 \pm 0{,}01)$ г. Затем с точностью до 0,01 см^3 был измерен объем тела: $V = (3{,}46 \pm 0{,}01)$ см^3.

Без критического подхода к вычислениям можно получить такой результат:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{9{,}38 \text{ г}}{3{,}46 \text{ см}^3} = 2{,}71098 \text{ г/см}^3.$$

Но так как числа 9,38 и 3,46 приближенные, то последние цифры в этих числах сомнительны. Эти числа при измерении могли быть получены такими: первое — 9,39 или 9,37, второе — 3,45 или 3,47. В самом деле, при взвешивании с указанной выше точностью могла быть допущена погрешность на 0,01 как в сторону увеличения массы, так и в сторону ее уменьшения. То же самое в отношении объема.

Таким образом, плотность тела, если ее вычислять с точностью до пятого десятичного знака, как это сделано выше, могла оказаться

$$\rho = \frac{9{,}37 \text{ г}}{3{,}47 \text{ см}^3} = 2{,}70028 \text{ г/см}^3 \quad \text{или} \quad \rho = \frac{9{,}39 \text{ г}}{3{,}49 \text{ см}^3} = 2{,}72174 \text{ г/см}^3.$$

Сравнение всех трех результатов показывает, что они отличаются уже вторыми десятичными знаками и что достоверным является лишь первый десятичный знак, а второй — сомнительным. Цифры, выражающие остальные десятичные знаки, являются совершенно случайными и способны лишь ввести в заблуждение пользующегося вычисленными результатами. Следовательно, работа по вычислению большинства знаков затрачена впустую.

Во избежание бесполезных затрат труда и времени принято вычислять кроме достоверных знаков еще только один сомнительный.

В рассмотренном примере надо было вести вычисление до второго десятичного знака:

$$\rho = \frac{9{,}38 \text{ г}}{3{,}46 \text{ см}^3} = 2{,}71 \text{ г/см}^3.$$

Приближенные вычисления следует вести с соблюдением следующих правил.

1. *При сложении и вычитании* приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр*) в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных. Например, при сложении чисел

$$\begin{array}{rl} & 4{,}462 \\ & 2{,}38 \\ + & 1{,}17273 \\ & \underline{1{,}0262} \\ & 9{,}04093 \end{array}$$

следует сумму округлить до сотых долей, т. е. принять ее равной 9,04.

2. *При умножении* следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

Например, вместо вычисления выражения

$$3{,}723 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}1846$$

следует вычислять выражение

$$3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}2.$$

В окончательном результате необходимо оставлять такое же число значащих цифр, какое имеется в сомножителях, после их округления.

В промежуточных результатах следует сохранять на одну значащую цифру больше. Такое же правило соблюдается и при делении приближенных чисел.

3. *При возведении в квадрат или в куб* следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени. Например,

$$1{,}32^2 \approx 1{,}74.$$

4. *При извлечении квадратного или кубического корня* в результате нужно брать столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении. Например,

$$\sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4}.$$

5. *При вычислении сложных выражений* следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий. Например,

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3}.$$

Сомножитель 5,1 имеет наименьшее число значащих цифр — две. Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр:

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3} \approx \frac{20{,}3 \cdot 1{,}92}{10{,}3 \cdot 10^3} \approx \frac{39{,}0}{19{,}3 \cdot 10^3} \approx 3{,}79 \cdot 10^{-3}.$$

После округления результата до двух значащих цифр получаем $3{,}8 \cdot 10^{-3}$.

При вычислениях рекомендуем пользоваться калькулятором.

---

*) Значащими цифрами называются все цифры, кроме нуля, а также и нуль в двух случаях: 1) когда он стоит между значащими цифрами; 2) когда он стоит в конце числа и когда известно, что единиц соответствующего разряда в данном числе не имеется.

II. Некоторые сведения по математике

1. Формулы алгебры и тригонометрии

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$Z = a + ib \qquad Z^* = a - ib$$

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad Z^* = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$Z = \rho e^{i\varphi} \qquad Z^* = \rho e^{-i\varphi}$$

$$|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ZZ^* = |Z|^2$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x \qquad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos y \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\cos(a-b)x - \frac{1}{2}\cos(a+b)x$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\sin(a+b)x + \frac{1}{2}\sin(a-b)x$$

2. Формулы дифференциального и интегрального исчислений

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1} \qquad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \qquad \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} \text{ (при } m \neq 1) \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \qquad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n! \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}a^{-2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$$

$$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2} \qquad \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}a^{-5/2} \qquad \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x-1} = 2{,}405$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a} \qquad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = 0{,}225$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2} \qquad \int_0^2 \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = 1{,}18$$

3. Формулы для приближенных вычислений

Если $a \ll 1$, то в первом приближении можно принять:

$$\frac{1}{1\mp a} = 1 \pm a; \qquad \frac{1}{\sqrt{1\pm a}} = 1 \mp \frac{1}{2}a;$$

$$(1\mp a)^2 = 1 \pm 2a; \quad e^a = 1 + a;$$

$$\sqrt{1\pm a} = 1 \pm \frac{1}{2}a; \quad \ln(1+a) = a.$$

Если угол α мал ($\alpha < 5^\circ$ или $\alpha < 0{,}1$ рад) и выражен в радианах, то в первом приближении можно принять:

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha, \quad \cos\alpha = 1.$$

III. Некоторые сведения о единицах физических величин

4. Единицы физических величин СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

5. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований *

Множитель	Приставка	Обозначение приставки		Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское			международное	русское
10^{18}	экса	E	Э	10^{-1}	деци	d	д
10^{15}	пета	P	П	10^{-2}	санти	c	с
10^{12}	тера	T	Т	10^{-3}	милли	m	м
10^{9}	гига	G	Г	10^{-6}	микро	μ	мк
10^{6}	мега	M	М	10^{-9}	нано	n	н
10^{3}	кило	k	к	10^{-12}	пико	p	п
10^{2}	гекто	h	г	10^{-15}	фемто	f	ф
10^{1}	дека	da	да	10^{-18}	атто	a	а

Примечание. Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.).

При сложном наименовании производной единицы СИ приставку присоединяют к наименованию первой единицы, входящей в произведение или числитель дроби. Например, кПа·с/м, но не Па·кс/м.

В виде исключения из этого правила временно в обоснованных случаях, т. е. в случаях, когда это нашло широкое распространение, допускается присоединение приставки к наименованию единицы, входящей в знаменатель дроби. Например, кВ/см, А/мм^2, Бк/мл, кэВ/мкм.

Выбор десятичной кратной или дольной единицы от единицы СИ диктуется прежде всего удобством ее применения. Из многообразия кратных и дольных единиц, которые могут быть образованы при помощи приставок, выбирают единицу, приводящую к числовым значениям величины, применяемым на практике. В принципе, кратные и дольные единицы выбирают таким образом, чтобы числовые значения величины находились в диапазоне от 0,1 до 1000.

Для снижения вероятности ошибок при расчетах десятичные кратные и дольные единицы рекомендуется подставлять только в конечный результат, а в процессе вычислений все величины выражать в единицах СИ, заменяя приставки степенями числа 10.

Кроме десятичных кратных и дольных единиц допущены к использованию кратные и дольные единицы времени, плоского угла и относительных величин, не являющихся десятичными. Например, единицы времени (минута, час, сутки), единицы плоского угла (градус, минута, секунда).

*) В соответствии с международным стандартом ISO 31/0–74 десятичные кратные и дольные единицы не являются единицами СИ.

6. Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а.е.м.	10^3 кг $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время [1]	минута час сутки	мин ч сут	60 с 3 600 с 86 400 с
Плоский угол	градус минута секунда град [2]	$\ldots^{\circ}$ $\ldots'$ $\ldots''$ град	$1{,}74 \cdot 10^{-2}$ рад $2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад $(\pi/200)$ рад
Объем, вместимость	литр [3]	л	10^{-3} м^3
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ м $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м $3{,}08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	дптр	1 м$^{-1}$
Площадь	гектар	га	$10^4 \cdot$м^2
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В · А	
Реактивная мощность	вар	вар	

[1] Допускается также применять другие единицы, получившие широкое распространение. Например, неделя, месяц, год, век, тысячелетие и т. п.

[2] Допускается применять по-русски наименование «гон».

[3] Не рекомендуется применять при точных измерениях. При возможности смешения обозначения l с цифрой 1 допускается обозначение L.

Примечание. Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.

7. Соотношение между внесистемными единицами и единицами СИ

Единицы пространства и времени. Единицы механических величин

Длина	1 ангстрем (Å)= 10^{-10} м = 10^{-8} см
Время	1 сут = 86400 с 1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^7$ с
Плоский угол	$1^\circ = \pi/180$ рад = $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад $1' = \pi/108 \cdot 10^{-2}$ рад = $2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад $1'' = \pi/(648 \cdot 10^{-3})$ рад = $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
Объем, вместимость	1 л = 10^{-3} м^3 = 10^3 см^3
Масса	1 т = 10^3 кг 1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Сила	1 кгс = 9,81 Н
Работа, энергия	1 кгс · м = 9,81 Дж 1 Вт · ч = $3{,}6 \cdot 10^3$ Дж 1 эВ = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Мощность	1 л.с. = 736 Вт
Давление	1 кгс/см^2 = $9{,}81 \cdot 10^4$ Па 1 мм рт.ст. = 133 Па 1 бар = 10^5 Па 1 атм = $1{,}01 \cdot 10^5$ Па
Напряжение (механическое)	1 кгс/мм^2 = $9{,}81 \cdot 10^6$ Па
Частота вращения	1 об/с = 1 с$^{-1}$ 1 об/мин = 1/60 с$^{-1}$
Волновое число	1 см$^{-1}$ = 100 м$^{-1}$

Единицы величин молекулярной физики и термодинамики

Концентрация частиц	1 см$^{-3}$ = 10^6 м$^{-3}$
Теплота (количество теплоты)	1 кал = 4,19 Дж 1 ккал = $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж

Единицы электрических и магнитных величин

Электрический момент диполя	1 Д = $3{,}34 \cdot 10^{-30}$ Кл · м
Удельное электрическое сопротивление	1 Ом · мм^2/м = 10^{-6} Ом · м
Магнитная индукция	1 Гс = 10^{-4} Тл
Магнитный поток	1 Мкс = 10^{-8} Вб
Напряженность магнитного поля	$1\ \text{Э} = \dfrac{10^3}{4\pi}\dfrac{\text{А}}{\text{м}} = 79{,}6$ А/м

Единицы световых величин и величин энергетической фотометрии

Освещенность 1 фот $= 10^4$ лк

Единицы величин ионизирующих излучений

Доза излучения (поглощенная доза излучения)	1 рад $= 0,01$ Гр
Мощность дозы излучения (мощность поглощенной дозы излучения)	1 рад/с $= 0,01$ Гр/с 1 рад/ч $= 2,78 \cdot 10^{-6}$ Гр/с
Экспозиционная доза рентгеновского и гамма-излучений	1 Р $= 2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг
Мощность экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучений	1 Р/мин $= 4,30 \cdot 10^{-6}$ А/кг 1 Р/ч $= 7,17 \cdot 10^{-8}$ А/кг
Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа)	1 расп./с $= 1$ Бк 1 Ки $= 3,70 \cdot 10^{10}$ Бк
Плотность потока ионизирующих частиц	1 част./(с м^2) $= 1$ с$^{-1}$м$^{-2}$

Перечень некоторых кратных и дольных единиц, рекомендованных к применению ГОСТ 8.417–81

Наименование величины	Единица		Обозначения кратных и дольных единиц, рекомендованных к применению
	Наименование	Обозначение	
Длина	метр	м	км, см, мм, мкм, нм
Площадь	квадратный метр	м^2	км^2, дм^2, см^2, мм^2
Объем, вместимость	кубический метр	м^3	дм^3, см^3, мм^3
Время	секунда	с	кс, мс, мкс, нс
Частота периодического процесса	герц	Гц	ТГц, ГГц, МГц, кГц
Масса	килограмм	кг	Мг, г, мг, мкг
Сила	ньютон	Н	МН, кН, мН, мкН
Момент силы	ньютон-метр	Н·м	МН·м, кН·м, мН·м, мкН·м
Давление	паскаль	Па	ГПа, МПа, кПа, гПа, даПа, мПа, мкПа
Динамическая вязкость	паскаль-секунда	Па·с	МПа·с
Кинематическая вязкость	квадратный метр на секунду	м^2/с	мм^2/с
Механическое напряжение	ньютон на метр	Н/м	мН/м

Продолжение таблицы

Наименование величины	Единица		Обозначения кратных и дольных единиц, рекомендованных к применению
	Наименование	Обозначение	
Энергия, работа	джоуль	Дж	ТДж, ГДж, МДж, кДж, мДж
Мощность	ватт	Вт	ГВт, МВт, кВт, мВт, мкВт
Температура	кельвин	К	МК, кК, мК, мкК
Теплота (количество теплоты)	джоуль	Дж	ТДж, ГДж, МДж, кДж, мДж
Теплоемкость	джоуль на кельвин	Дж/К	кДж/К
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	кДж/(кг·К)
Энтропия	джоуль на кельвин	Дж/К	кДж/К
Удельная теплота фазового превращения	джоуль на килограмм	Дж/кг	МДж/кг, кДж/кг
Количество вещества	моль	моль	кмоль, ммоль, мкмоль
Молярная масса	килограмм на моль	кг/моль	г/моль
Молярный объем	кубический метр на моль	$м^3$/моль	$дм^3$/моль, $см^3$/моль
Молярная концентрация	моль на кубический метр	моль/$м^3$	моль/$дм^3$, моль/$см^3$
Внутренняя энергия	джоуль	Дж	ТДж, ГДж, кДж, мДж
Сила тока	ампер	А	кА, мА, мкА, нА, пА
Электрический заряд	кулон	Кл	кКл, мкКл, нКл, пКл
Пространственная плотность заряда	кулон на кубический метр	Кл/$м^3$	Кл/$мм^3$, МКл/$м^3$, Кл/$см^3$, кКл/$м^3$, мКл/$м^3$, мкКл/$м^3$
Поверхностная плотность заряда	кулон на квадратный метр	Кл/$м^2$	МКл/$м^2$, Кл/$мм^2$, Кл/$см^2$, кКл/$м^2$, мКл/$м^2$, мкКл/$м^2$
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м	МВ/м, кВ/м, В/мм, В/см, мВ/м, мкВ/м
Электрическое напряжение, электрический потенциал	вольт	В	МВ, кВ, мВ, мкВ, нВ
Электрическое смещение	кулон на квадратный метр	Кл/$м^2$	Кл/$см^2$, кКл/$см^2$, мКл/$м^2$, мкКл/$м^2$

Окончание таблицы

Наименование величины	Единица		Обозначения кратных и дольных единиц, рекомендованных к применению
	Наименование	Обозначение	
Поток электрического смещения	кулон	Кл	МКл, кКл, мКл
Электрическая емкость	фарад	Ф	мФ, мкФ, нФ, пФ
Поляризованность	кулон на квадратный метр	$Кл/м^2$	$Кл/см^2$, $кКл/м^2$, $мКл/м^2$, $мкКл/м^2$
Плотность электрического тока	ампер на квадратный метр	$А/м^2$	$МА/м^2$, $А/мм^2$, $А/см^2$, $кА/м^2$
Линейная плотность электрического тока	ампер на метр	А/м	кА/м, А/мм, А/см
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м	кА/м, А/мм, А/см
Магнитная индукция	тесла	Тл	мТл, мкТл, нТл
Индуктивность	генри	Гн	мГн, мкГн, нГн, пГн
Длина волны	метр	м	мм, мкм, нм, пм
Звуковое давление	паскаль	Па	мПа, мкПа
Поток звуковой энергии	ватт	Вт	кВт, мВт, мкВт, пВт мкВт, пВт
Интенсивность звука	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	$мВт/м^2$, $мкВт/м^2$, $пВт/м^2$
Поглощенная доза излучения	грей	Гр	ТГр, ГГр, МГр, кГр, мГр, мкГр
Активность нуклида в радиоактивном источнике	беккерель	Бк	ЭБк, ПБк, ТБк, ГБк, МБк, кБк

IV. Таблицы физических величин

8. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
То же, до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27,3 сут $= 2{,}36 \cdot 10^6$ с

9. Плотность ρ твердых тел и жидкостей

Твердое тело	Плотность, г/см^3
Алюминий	2,70
Висмут	9,80
Вольфрам	19,3
Железо (чугун, сталь)	7,87
Золото	19,3
Каменная соль	2,20
Латунь	8,55
Марганец	7,40
Медь	8,93
Никель	8,80
Платина	21,4
Свинец	11,3
Серебро	10,5
Уран	18,7
Жидкость (при 15 °C)	**Плотность, г/см^3**
Вода (дистиллированная при 4 °C)	1,00
Глицерин	1,26
Керосин	0,8
Масло (оливковое, смазочное)	0,9
Масло касторовое	0,96
Ртуть	13,6
Сероуглерод	1,26
Спирт	0,8
Эфир	0,7

10. Плотность ρ газов при нормальных условиях

Газ	Плотность, кг/м^3
Азот	1,25
Аргон	1,78
Водород	0,09
Воздух	1,29
Гелий	0,18
Кислород	1,43

11. Упругие постоянные твердых тел (округленные значения)

Вещество	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа
Алюминий	69	24
Вольфрам	380	140
Железо (сталь)	200	76
Медь	98	44
Серебро	74	27

12. Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость ν, мкПа·с	Теплопроводность λ, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	—	17,2	24,1
Гелий	0,22	—	—
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	—	8,32	15,8
Хлор	0,45	—	—

13. Критические параметры и поправки Ван-дер-Ваальса

Газ	Критическая температура $T_{кр}$, К	Критическое давление $p_{кр}$, МПа	Поправки Ван-дер-Ваальса	
			a, Н·м^4/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль
Азот	126	3,39	0,135	3,86
Аргон	151	4,86	0,134	3,22
Водяной пар	647	22,1	0,545	3,04
Кислород	155	5,08	0,136	3,17
Неон	44,4	2,72	0,209	1,70
Углекислый газ	304	7,38	0,361	4,28
Хлор	417	7,71	0,650	5,62

14. Динамическая вязкость ν жидкостей при 20 °C

Жидкость	Вязкость, мПа·с
Вода	1,00
Глицерин	1480
Масло касторовое	987
Масло машинное	100
Ртуть	1,58

15. Поверхностное натяжение σ жидкостей при 20 °C

Жидкость	Натяжение, мН/м
Вода	73
Глицерин	62
Мыльная вода	40
Ртуть	$5{,}0 \cdot 10^2$
Спирт	22

16. Скорость звука

Среда	Скорость, м/с
Вода	1450
Воздух (сухой при нормальных условиях)	332

17. Диэлектрическая проницаемость ε

Вещество	Проницаемость
Вода	81
Масло (трансформаторное)	2,2
Парафин	2,0
Слюда	7,0
Стекло	7,0
Фарфор	5,0
Эбонит	3,0

18. Удельное сопротивление ρ и температурный коэффициент α проводников

Вещество	ρ при 20 °С, нОм·м	α, $К^{-1}$
Железо	98	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$
Медь	17	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Алюминий	26	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
Графит	$3{,}9 \cdot 10^{3}$	$-0{,}8 \cdot 10^{3}$

19. Показатель преломления n

Вещество	Значение
Алмаз	2,42
Вода	1,33
Масло коричное	1,60
Сероуглерод	1,63
Стекло	1,50

Примечание. Показатели преломления стекла зависят от сорта стекла и длины волны проходящего через него излучения. Поэтому приведенное здесь значение показателя преломления следует рассматривать как условное и использовать его только в том случае, когда оно не указано в условии задачи.

20. Работа выхода A электронов из металла

Металл	A, эВ	A, 10^{-19} Дж
Калий	2,2	3,5
Литий	2,3	3,7
Натрий	2,5	4,0
Платина	6,3	10,1
Серебро	4,7	7,5
Цинк	4,0	6,4

21. Масса нейтральных атомов

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а.е.м.
(Нейтрон)	0	n	1,00867
Водород	1	^{1}H	1,00783
		^{2}H	2,01410
		^{3}H	3,01605
Гелий	2	^{3}He	3,01603
		^{4}He	4,00260
Литий	3	^{6}Li	6,01513
		^{7}Li	7,01601
Бериллий	4	^{7}Be	7,01693
		^{9}Be	9,01219
		^{10}Be	10,01354
Бор	5	^{9}B	9,01333
		^{10}B	10,01294
		^{11}B	11,00931
Углерод	6	^{10}C	10,00168
		^{12}C	12,00000
		^{13}C	13,00335
		^{14}C	14,00324
Азот	7	^{13}N	13,00574
		^{14}N	14,00307
		^{15}N	15,00011
Кислород	8	^{16}O	15,99491
		^{17}O	16,99913
		^{18}O	17,99916
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрий	11	^{22}Na	21,99444
		^{23}Na	22,98977
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
Алюминий	13	^{30}Al	29,99817
Кремний	14	^{31}Si	30,97535
Фосфор	15	^{31}P	30,97376
Калий	19	^{41}K	40,96184
Кальций	20	^{44}Ca	43,95549
Свинец	82	^{206}Pb	205,97446
Полоний	84	^{210}Po	209,98297

22. Масса m_0 и энергия покоя E_0 некоторых элементарных и легких ядер

Частица	Масса		Энергия	
	m_0, кг	m_0, а.е.м.	E_0, Дж	E_0, МэВ
Электрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8{,}16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Нейтральный мезон	$2{,}41 \cdot 10^{-28}$	0,14526	—	135
Протон	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1{,}50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}68 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1{,}51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтон	$3{,}35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3{,}00 \cdot 10^{-10}$	1876
α-частица	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5{,}96 \cdot 10^{-10}$	3733

23. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа номер	Тип распада	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}\mathrm{Ac}$	α	10 сут
Иод	$^{131}_{53}\mathrm{I}$	β^-, γ	8 сут
Иридий	$^{192}_{77}\mathrm{Ir}$	β^-, γ	75 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\mathrm{Co}$	β^-, γ	5,3 года
Магний	$^{27}_{12}\mathrm{Mg}$	β^-	10 мин
Радий	$^{219}_{88}\mathrm{Ra}$	α	10^{-3} с
Радий	$^{226}_{88}\mathrm{Ra}$	α, γ	$1{,}62 \cdot 10^3$ лет
Радон	$^{222}_{86}\mathrm{Rn}$	α	3,8 сут
Стронций	$^{90}_{38}\mathrm{Sr}$	β^-	28 лет
Торий	$^{229}_{90}\mathrm{Th}$	α, γ	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	$^{238}_{92}\mathrm{U}$	α, γ	$4{,}5 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	$^{32}_{15}\mathrm{P}$	β^-	14,3 сут
Натрий	$^{22}_{11}\mathrm{Na}$	γ	2,6 года

24. Основные физические постоянные
(округленные с точностью до трех значащих цифр)

Название	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9,81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8,31$ Дж/(К·моль)
Стандартный объем [1]	$V_m = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Фарадея	$F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Элементарный заряд	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Скорость света в вакууме [2]	$c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	$C = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R' = 1,097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
	$R = 3,29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a = 5,29 \cdot 10^{-11}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 2,16 \cdot 10^{-18}$ Дж
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Ядерный магнетон	$\gamma_N = 5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл

[1] Молярный объем идеального газа при нормальных условиях.
[2] Скорость света в вакууме, по данным измерений на 1973 г., равна $(299792,462 \pm 0,018)$ км/с.