КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Выпуск 7

А. Н. ТИХОНОВ, А. Б. ВАСИЛЬЕВА,
А. Г. СВЕШНИКОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов университетов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика» и «Физика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 5
Предисловие к первому изданию 6

Глава 1. Введение 7

§ 1. Понятие дифференциального уравнения 7
§ 2. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 12

Глава 2. Общая теория 23

§ 1. Элементарные методы интегрирования 23
§ 2. Теоремы существования и единственности решения начальной задачи для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Алгоритм ломаных Эйлера 31
§ 3. Уравнение, неразрешенное относительно производной 39
§ 4. Теорема существования и единственности решения нормальной системы 46
§ 5. Зависимость решений от начальных значений и параметров 51
§ 6. Метод последовательных приближений (метод Пикара) 59
§ 7. Принцип сжатых отображений. Теорема о неподвижной точке 63

Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения 67

§ 1. Уравнения движения маятника как пример линейного уравнения. Основные свойства линейного уравнения с постоянными коэффициентами 67
§ 2. Общие свойства линейного уравнения n-го порядка 73
§ 3. Однородное линейное уравнение n-го порядка 76
§ 4. Неоднородное линейное уравнение n-го порядка 79
§ 5. Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами 82
§ 6. Системы линейных уравнений. Общая теория 88
§ 7. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 96
§ 8. Построение решения линейного уравнения в виде степенного ряда 101

Глава 4. Краевые задачи 105

§ 1. Постановка краевых задач и их физическое содержание 105
§ 2. Неоднородная краевая задача 110
§ 3. Задачи на собственные значения 123

Глава 5. Теория устойчивости 128

§ 1. Постановка задачи 128
§ 2. Исследование на устойчивость по первому приближению 134

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание курса «Дифференциальные уравнения» представляет собой существенно переработанный текст первого издания. Не меняя основного содержания курса, мы внесли значительные изменения в характер его изложения.

В новом издании изложение узловых положений курса строится на основе общих идей метода дифференциальных неравенств, базирующегося на теореме Чаплыгина. Этот метод наглядно выделяет идейную сторону доказываемых в курсе основных теорем существования и зависимости от параметров решения начальной задачи как для одного уравнения, так и для системы уравнений. При этом во многих случаях значительно снижаются технические трудности при доказательстве соответствующих теорем, а сами доказательства становятся более алгоритмичными.

На идейной основе метода дифференциальных неравенств построено также изложение рассматриваемых в книге вопросов численных и асимптотических методов решения дифференциальных уравнений. В главу о численных методах внесены, кроме того, значительные редакционные изменения в целях улучшения изложения с методической точки зрения.

Подвергся переработке и текст гл. 4, посвященной краевым задачам. Дано доказательство теоремы существования решения неоднородной краевой задачи. Более подробно разбирается понятие обобщенной функции Грина. Внесены некоторые изменения и в характер изложения задач на собственные значения.

Помимо этих основных изменений в текст книги внесено большое количество более локальных изменений для улучшения стиля изложения. Изменен и ряд обозначений.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность Л. Д. Кудрявцеву, внимательно просмотревшему рукопись настоящего издания, а также всем лицам, приславшим свои замечания по первому изданию книги.

Авторы

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Понятие дифференциального уравнения

В настоящей книге рассматриваются дифференциальные уравнения, т. е. соотношения между неизвестной функцией, ее производными и независимыми переменными. Уравнения, содержащие производные по многим независимым переменным, называются *уравнениями в частных производных*. Уравнения, содержащие производные лишь по одной из независимых переменных, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*. Изучение свойств и методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и составляет основное содержание данной книги, лишь последняя глава посвящена некоторым специальным классам уравнений в частных производных.

Независимую переменную, производная по которой входит в обыкновенное дифференциальное уравнение, обычно обозначают буквой x (или буквой t, поскольку во многих случаях роль независимой переменной играет время). Неизвестную функцию обозначают через $y(x)$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение можно записать в виде соотношения

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{1.1}$$

В уравнение (1.1), помимо неизвестной функции, ее производных по независимому переменному x и самого независимого переменного x, могут входить и дополнительные переменные $\mu_1, \ldots, \mu_k$. В этом случае говорят, что неизвестная функция зависит от переменных $\mu_1, \ldots, \mu_k$ как от параметров.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1.1), называется *порядком уравнения*. Уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1.2}$$

и связывает три переменные величины — неизвестную функцию, ее производную и независимую переменную. Часто это соотношение

Очевидно, если $y(x)=\bar{y}(x)+i\bar{\bar{y}}(x)$, где $\bar{y}(x)$ и $\bar{\bar{y}}(x)$ — соответственно действительная и мнимая части функции $y(x)$, уравнение (1.3) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений для действительных функций:

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\operatorname{Re} f(x, \bar{y}, \bar{\bar{y}}), \qquad \frac{d\bar{\bar{y}}}{dx}=\operatorname{Im} f(x, \bar{y}, \bar{\bar{y}}).$$

Решением системы дифференциальных уравнений (1.4) называется всякая совокупность функций $y_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$, которые при подстановке в уравнения обращают их в тождества. Как правило, и как это будет видно из последующих примеров (см. § 2), если дифференциальное уравнение разрешимо, то оно обладает бесчисленным множеством решений. Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

Обычно рассматриваются системы (1.4) с правыми частями, непрерывными в некоторой области D изменения неизвестных функций y_i и независимой переменной x. Очевидно, что при этом решения $y_i(x)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые функции. Однако в приложениях иногда приходится иметь дело с уравнениями, правые части которых имеют разрывы (например, при описании ударных нагрузок, мгновенно приложенных сил и т. д.), поэтому и сами решения будут иметь разрывы производных. Тогда естественно в качестве решения (1.4) рассматривать непрерывные функции $y_i(x)$ с кусочно непрерывными производными. При подстановке в уравнения они дифференцируются всюду, за исключением точек разрыва (или отсутствия) производных. Такое решение естественно назвать *обобщенным решением*.

Всякое решение $y_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$ системы (1.4) можно интерпретировать геометрически как кривую в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, которая называется *интегральной кривой*. Подпространство переменных $y_1, \ldots, y_n$ называется *фазовым пространством*, а проекция интегральной кривой на фазовое пространство — *фазовой траекторией*.

Уравнения (1.4) определяют в каждой точке области D некоторое направление, задаваемое вектором $\boldsymbol{\tau}=(1, f_1, \ldots, f_n)$. Такая область пространства с заданным в каждой точке направлением называется *полем направлений*. Интегрирование системы уравнений (1.4) геометрически интерпретируется как нахождение кривых, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением $\boldsymbol{\tau}$, заданным в данном поле направлений.

Как отмечалось выше, дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому, интегрируя систему (1.4), мы найдем бесчисленное множество интегральных кривых, лежащих в области определения правых частей системы (1.4). Чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, представляющую собой так называемое *част-*

Предположим, что $x_1 \in [x_0, X]$ — ближайшая к x_0 точка, в которой неравенство (1.13) нарушается, т. е. $z(x_1) = y(x_1)$. Геометрически это означает, что кривые $z(x)$ и $y(x)$ при $x = x_1$ пересекаются или касаются. Но тогда должно быть $\frac{dz}{dx}(x_1) \geqslant f(x_1, y(x_1))$, что противоречит (1.12). Теорема доказана.

Сделаем существенные для дальнейшего замечания к доказанной теореме о дифференциальных неравенствах.

З а м е ч а н и я. 1. Мы предполагали $z(x_0) < y_0$, но теорема остается справедливой, если $z(x_0) = y_0$. В этом случае существование некоторой окрестности правее точки x_0, в которой выполнено неравенство (1.13), следует из того, что

$$\frac{dz}{dx}(x_0) < f(x_0, z(x_0)) = f(x_0, y_0) = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Дальнейшие рассуждения совершенно такие же, как для случая $z(x_0) < y_0$.

2. Если функция $z(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{dz}{dx} > f(x, z), \quad x \in [x_0, X], \quad z(x_0) = y_0,$$

то знак неравенства в (1.13) также изменится на противоположный.

3. Теорема остается справедливой и в том случае, когда $z(x)$ кусочно дифференцируема на $[x_0, X]$ и неравенство (1.12) выполняется для предельных значений производной $\frac{dz}{dx}$ в точках ее разрыва.

При решении ряда вопросов бывает удобно сводить задачи для дифференциальных уравнений к некоторым интегральным уравнениям.

Лемма 1.1. *Пусть $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в некотором прямоугольнике*

$$D = \{|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Тогда начальная задача

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.14}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{1.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на сегменте $|x - x_0| \leqslant a$ существует решение начальной задачи — функция $y(x)$, причем $y_0 - b \leqslant y(x) \leqslant y_0 + b$ (эти неравенства означают, что при $|x - x_0| \leqslant a$ интегральимеет следующий вид:

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m(t), \tag{1.16}$$

где $m(t)$ — количество нераспавшегося к моменту времени t вещества. Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решение (1.16) имеет вид

$$m(t) = Ce^{-\lambda t}, \tag{1.17}$$

где C — произвольная постоянная, которая может быть определена из дополнительного условия, например из начального условия $m(t_0) = m_0$, задающего количество исходного вещества в начальный момент t_0. Частное решение соответствующей начальной задачи имеет вид

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{1.18}$$

Одной из важных физических характеристик процесса радиоактивного распада является период полураспада — промежуток времени T, за который количество распадающегося вещества уменьшается вдвое. Из (1.18) найдем

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\lambda T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{\lambda}\ln 2. \tag{1.19}$$

Отметим, что уравнение (1.16) является математической моделью не только процесса радиоактивного распада, но и многих других процессов деления или размножения, характеризуемых тем, что скорость деления (размножения) пропорциональна количеству вещества в данный момент времени, причем коэффициент пропорциональности есть некоторая постоянная, характеризующая рассматриваемый процесс. Как мы убедились, типичной постановкой задач для этого класса уравнений является начальная задача (задача Коши).

2. **Движение системы материальных частиц.** Математической моделью движения системы N материальных частиц массы m_i $(i = 1, \ldots, N)$, принятой в теоретической механике, являются уравнения движения, следующие из второго закона Ньютона:

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i\left(t, \boldsymbol{r}_j, \frac{d\boldsymbol{r}_j}{dt}\right), \qquad i, j = 1, \ldots, N. \tag{1.20}$$

Здесь m_i — массы частиц, постоянные во времени, $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-векторы частиц, $\boldsymbol{F}_i$ — вектор силы, действующей на i-ю частицу и ние физического маятника в любой момент времени можно характеризовать углом φ, который составляет прямая OC с вертикальной осью z, проходящей через точку O. Для вывода уравнения движения воспользуемся вторым законом Ньютона в применении к вращательному движению (угловое ускорение пропорционально главному моменту внешних сил). Тогда, пренебрегая силами сопротивления, получим

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi, \tag{1.23}$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, а d — расстояние от точки O до центра тяжести C.

Общее уравнение (1.23) колебаний физического маятника является нелинейным. В случае малых колебаний, ограничиваясь первым членом разложения функции $\sin\varphi$, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \tag{1.24}$$

где через ω^2 обозначено отношение mgd/I. Очевидно, размерность $[\omega] = 1/\text{с}$, что и оправдывает введенное обозначение. Заметим, что в случае уравнения (1.24) возвращающая сила пропорциональна смещению от положения равновесия.

Как легко убедиться непосредственной проверкой, уравнение (1.24) имеет периодические решения частоты ω:

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{1.25}$$

где A и B — произвольные постоянные, определяющие амплитуду периодических колебаний.

При учете сил сопротивления, пропорциональных угловой скорости, уравнение (1.24) перейдет в уравнение вида

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = 0. \tag{1.26}$$

Как будет показано ниже (см. гл. 3), уравнение (1.26) определяет затухающие колебания.

3. Уравнения переноса. Пусть по трубе постоянного поперечного сечения, ось которой совпадает с осью x, движется поток воздуха, скорость которого вдоль оси трубы в точке x в момент времени t есть заданная функция $v(x, t)$. Пусть воздух переносит некоторое вещество, линейную плотность которого в сечении трубы с координатой x в момент времени t обозначим $u(x, t)$. В процессе переноса вещество осаждается на стенках трубы. Будем считать, что плотность распределения осаждающегося вещества задается выражением $f(x, t)u(x, t)$ ($f(x, t)$ — заданная функция), т. е. пропорциональна концентрации вещества (это можно рассматривать как линейное приближение к более сложному закону, справедливое при достаточно водных у рассматриваемых функций и вычисляя интегралы по теореме о среднем, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x^*, t)\big|_{t=t^*}\Delta x\Delta t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v(x, t^{**})\,u(x, t^{**})\right)\big|_{x=x^{**}}\Delta x\,\Delta t - \\ - f(x^{***}, t^{***})\,u(x^{***}, t^{***})\,\Delta x\,\Delta t, \quad (1.28)$$

где x^*, x^{**}, x^{***}, t^*, t^{**}, t^{***} — некоторые точки из отрезков $[x,\ x+\Delta x]$, $[t,\ t+\Delta t]$ соответственно. Деля затем равенство (1.28) на $\Delta x\,\Delta t$ и устремляя Δx и Δt к нулю, в силу непрерывности всех членов соотношения (1.28) получим окончательное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + fu = 0, \quad (1.29)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)\,u = 0, \quad (1.30)$$

где

$$c(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + f(x, t). \quad (1.31)$$

Уравнение (1.30) является уравнением в частных производных первого порядка. Для него можно поставить, например, следующую задачу. Пусть известна концентрация вещества при $x = x_0$

$$u(x_0,\ t) = u_0(t), \quad (1.32)$$

где $u_0(t)$ — заданная функция. Требуется определить $u(x,\ t)$ для $x \geqslant x_0$. Ниже (в гл. 8) мы увидим, что условие (1.32) однозначным образом определяет решение уравнения (1.30).

4. Задача о просачивании воды сквозь песок. Пусть вода просачивается через песок сверху вниз. Направим ось x вниз. Через $u(x,\ t)$ обозначим плотность воды в песке (t — время). Скорость движения воды v, очевидно, зависит от ее плотности, т. е. $v = v(u)$, где $v(u)$ есть заданная функция, причем v возрастает вместе с u.

Рассмотрим баланс воды в слое $[x,\ x+\Delta x]$. За время Δt изменение количества воды равно $\int\limits_x^{x+\Delta x}[u(\xi,\ t+\Delta t) - u(\xi,\ t)]\,d\xi$. Это изменение происходит за счет разности входящего потока

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(u(x, \tau))\,u(x, \tau)\,d\tau$$

и выходящего потока

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(u(x+\Delta x, \tau))\,u(x+\Delta x, \tau)\,d\tau.$$

смещением в момент времени t сечения стержня, имевшего в недеформированном состоянии координату x. Будем рассматривать стержень переменной плотности $\rho(x)$, подчиняющийся закону Гука: упругая сила, деформирующая бесконечно малый элемент стержня, заключенный между сечениями x и $x+\Delta x$, пропорциональна относительному удлинению этого элемента. Коэффициент пропорциональности (модуль упругости) также будем считать переменным вдоль стержня и обозначим его через $k(x)$. Подсчитаем относительное удлинение ε выделенного элемента. Очевидно, длина этого элемента в момент времени t равна

$$\Delta l=(x+\Delta x)+u(x+\Delta x, t)-x-u(x, t)=\Delta x+u(x+\Delta x, t)-u(x, t),$$

откуда относительное удлинение

$$\varepsilon=\frac{\Delta l-\Delta x}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x, t)-u(x, t)}{\Delta x}. \tag{1.35}$$

Переходя в выражении (1.35) к пределу при $\Delta x \to 0$, предполагая функцию $u(x, t)$ непрерывно дифференцируемой и воспользовавшись законом Гука, получим, что сила упругого напряжения в сечении x, действующая со стороны правой части на левую, равна $k(x)u_x(x, t)$. Заметим, что полученное выражение для силы упругого напряжения справедливо лишь в случае малых колебаний, когда можно применять закон Гука к бесконечно малому элементу стержня.

Чтобы получить уравнение колебаний стержня, применим второй закон Ньютона к выделенному элементу. Будем считать, что внешние силы, приложенные к стержню, распределены с плотностью $f(x, t)$, так что импульс силы, действующей на элемент Δx за промежуток времени Δt, равен

$$\Delta I=\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{1.36}$$

Кроме того, на граничные сечения выделенного элемента действуют определенные выше силы упругого напряжения. Тогда уравнение второго закона Ньютона запишется в виде

$$\int\limits_x^{x+\Delta x}[\rho(\xi)u_t(\xi, t+\Delta t)-\rho(\xi)u_t(\xi, t)]\, d\xi=$$

$$=\int\limits_t^{t+\Delta t}[k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x, \tau)-k(x)u_x(x, \tau)]\, d\tau+$$

$$+\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{1.37}$$

Это — интегродифференциальное уравнение колебаний упругого стержня. Предполагая непрерывную дифференцируемость функций, В ряде случаев интерес представляет определение частот собственных колебаний системы — частот тех установившихся периодических колебаний, которые возможны в системе при отсутствии внешних сил, как распределенных, так и сосредоточенных в граничных сечениях. Эта задача сводится к краевой задаче для однородного уравнения (1.42):

$$[k(x)u_x(x)]_x + \omega^2\rho(x)u(x) = 0. \tag{1.43}$$

Требуется определить те значения параметра ω^2, при которых уравнение (1.43) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее заданным однородным граничным условиям, например $u(0)=u(l)=0$. Такая задача носит название краевой задачи о собственных значениях.

6. **Уравнение теплопроводности.** Одним из типичных уравнений математической физики является *уравнение теплопроводности*, к выводу которого мы сейчас перейдем. Тепловое состояние тела D можно описать с помощью скалярной функции $u(M, t)$ — температуры в точке M тела в момент времени t. Теплофизические характеристики тела описываются функциями плотности $\rho(M)$ и теплоемкости $c(M)$, которые в широком интервале температуры можно считать не зависящими от температуры, а также теплопроводностью $k(M)$, являющейся коэффициентом пропорциональности между плотностью потока теплоты через элементарную площадку ΔS и градиентом температуры в направлении нормали к этой площадке:

$$\Delta q = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S. \tag{1.44}$$

Мы считаем поток теплоты направленным от более нагретой стороны площадки к менее нагретой (градиент температуры в этом направлении отрицателен), что определяет знак «минус» в формуле (1.44).

Чтобы построить математическую модель изменения температуры в рассматриваемом теле, составим уравнение баланса. Изменение количества теплоты ΔQ_1 в элементе объема ΔV за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$

$$\Delta Q_1 = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)[u(M, t+\Delta t) - u(M, t)]\,dV \tag{1.45}$$

определяется потоком теплоты ΔQ_2 через боковую поверхность $\Delta\Sigma$ рассматриваемого объема,

$$\Delta Q_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta\Sigma} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\,d\tau \tag{1.46}$$

(производная берется по направлению внешней нормали, что определяет знак «плюс» перед интегралом в (1.46)), и количеством теплоты ΔQ_3, выделяемой внешними источниками, распределенными в пространстве и во времени с плотностью $f(M, t)$,

$$\Delta Q_3 = \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} f(M, \tau)\,dV\,d\tau. \tag{1.47}$$

Имеем

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3. \tag{1.48}$$

ГЛАВА 2

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Элементарные методы интегрирования

Решение дифференциального уравнения, как правило, не удается выразить в виде элементарных функций или квадратур от них и для получения частных решений приходится прибегать к различным численным методам, эффективность которых неизмеримо возросла с появлением и развитием современных ЭВМ. Однако до появления ЭВМ стремление «проинтегрировать дифференциальное уравнение в квадратурах» определяло одно из основных направлений в исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений и привело к появлению многочисленных справочников *) по решению дифференциальных уравнений. В настоящем параграфе мы кратко остановимся на некоторых простейших и наиболее распространенных в приложениях случаях, когда удается получить решение уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \tag{2.1}$$

в квадратурах. Во многих случаях переменные x и y в (2.1) равноправны. Это дает основание наряду с уравнением (2.1) рассматривать и уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,\ y)}, \tag{2.2}$$

а также уравнение первого порядка, записанное в виде

$$f_1(x,\ y)\,dx + f_2(x,\ y)\,dy = 0.$$

1. Уравнение с разделяющимися переменными. Так называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \tag{2.3}$$

или

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0. \tag{2.4}$$

---

*) См., например, Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (5-е изд.— М.: Наука, 1976).

Легко видеть, что ряд уравнений может быть приведен к уравнению с разделяющимися переменными (2.4). Так, уравнение

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)g_2(y)\,dy = 0 \tag{2.9}$$

после деления на $g_1(y)f_2(x)$ приводится к требуемому виду. Надо иметь в виду, что при этом могут быть потеряны частные решения, обращающие в нуль произведение $g_1(y)f_2(x)$.

Пример 2.1. Простейшим уравнением с разделяющимися переменными является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{2.10}$$

Его общий интеграл имеет вид

$$y - \int f(x)\,dx = C, \tag{2.11}$$

а частное решение, удовлетворяющее начальному условию (2.7)—

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0. \tag{2.12}$$

В случае уравнения (2.10) с постоянной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = a \tag{2.13}$$

получим частное решение, удовлетворяющее начальному условию (2.7), в виде

$$y = a(x - x_0) + y_0. \tag{2.14}$$

Пример 2.2.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.15}$$

Сделаем замену искомой переменной, положив $z = y/x$. Так как при этом $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$, то уравнение (2.15) переходит в уравнение

$$x\,dz + [z - f(z)]\,dx = 0 \tag{2.16}$$

вида (2.9).

К виду (2.9) приводится и уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \tag{2.17}$$

где a и b — постоянные. Введем новую искомую переменную $z = ax + by$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

и уравнение (2.17) переходит в уравнение

$$dz - [a + bf(z)]\,dx = 0. \tag{2.18}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{2.19}$$

Заметим, что по самому способу построения формула (2.26) является доказательством единственности решения начальной задачи для уравнения (2.23), в предположении, что это решение существует. Действительно, подставляя любое решение начальной задачи в уравнение (2.23) и проводя последовательно преобразования (2.24) — (2.26), мы всегда придем к одному и тому же результату — формуле (2.26). Чтобы доказать существование решения данной задачи, достаточно путем непосредственной проверки убедиться, что для непрерывной функции $p(x)$ функция $y(x)$, определенная формулой (2.26), удовлетворяет всем условиям начальной задачи для уравнения (2.23). Очевидно, подобные рассуждения можно провести и в случае начальной задачи для уравнений с разделяющимися переменными, рассмотренных в п. 1 настоящего параграфа.

Решение линейного неоднородного уравнения (2.22) найдем методом вариации постоянной, который состоит в том, что мы используем специальную замену неизвестной функции

$$y(x) = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}, \tag{2.27}$$

где $C(x)$ — функция, подлежащая определению. Подставляя такой вид решения в уравнение, получим

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)dx} + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

откуда

$$\frac{dC}{dx} = f(x)\, e^{\int p(x)dx}.$$

Интегрируя это равенство, найдем

$$C(x) = \int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + C_1,$$

и окончательно

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx. \tag{2.28}$$

Из полученного выражения следует, что общее решение линейного неоднородного уравнения (2.22) представляется в виде суммы общего решения (2.25) линейного однородного уравнения (2.23) и частного решения неоднородного уравнения (2.22), в чем легко убедиться, подставив второе слагаемое формулы (2.28) в неоднородное уравнение (2.22).

Решение начальной задачи $y(x_0) = y_0$ для уравнения (2.22) найдем, определяя из начального условия постоянную C_1 в формуле (2.28). При этом в качестве первообразных функций, записанных

Тогда для решения начальной задачи из представления (2.29) для $x \geqslant x_0$ следует оценка

$$|y(x)| \leqslant |y_0| e^{K(x-x_0)} + \frac{M}{K}\left(e^{K(x-x_0)} - 1\right). \tag{2.31}$$

В заключение этого пункта укажем некоторые часто встречающиеся в приложениях уравнения, которые соответствующими подстановками могут быть сведены к линейному уравнению.

Рассмотрим так называемое уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)\,y^n,$$

где $n \neq 1$, иначе уравнение уже линейное. Введем новую неизвестную функцию $z = y^{1-n}$. Тогда уравнение перейдет в линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)\,z(x) = f(x),$$

общее решение которого дается формулой (2.29).

Более сложное уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y(x) + q(x)\,y^2(x) = f(x)$$

в общем случае в квадратурах не интегрируется. Однако оно обладает следующим важным свойством: если известно какое-либо частное решение $y = y_1(x)$ уравнения Риккати, то нахождение его общего решения сводится к решению линейного уравнения. Действительно, введя новую неизвестную функцию

$$z(x) = y(x) - y_1(x),$$

получим для нее уравнение Бернулли

$$\frac{dz}{dx} + [p(x) + 2q(x)\,y_1(x)]\,z(x) + q(x)\,z^2(x) = 0,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

3. Лемма о дифференциальных неравенствах. В дальнейшем будет использовано следующее утверждение.

Лемма 2.1 (*лемма о дифференциальных неравенствах*). *Пусть функция $z(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную при $x \in [x_0, X]$ производную, удовлетворяющую неравенству*

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| \leqslant N|z| + a, \tag{2.32}$$

где $N \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ — положительные постоянные. (В точках разрыва производной неравенству (2.32) удовлетворяют ее предельные значения.) Тогда имеет место оценка

$$|z(x)| \leqslant s(x), \qquad x \in (x_0, X], \tag{2.33}$$

и

$$s_2(x) = \frac{1}{N}\left(e^{N(x-x_0)} - 1\right). \tag{2.37}$$

Замечание. Оценку (2.31) легко получить из доказанной леммы.

§ 2. Теоремы существования и единственности решения начальной задачи для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Алгоритм ломаных Эйлера

В предыдущем параграфе с помощью явных формул было доказано существование и единственность решения начальной задачи для линейного уравнения (2.22). Перейдем теперь к рассмотрению соответствующих теорем для начальной задачи (задачи Коши)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.38}$$

при достаточно общих условиях, наложенных на функцию $f(x, y)$. При этом доказательство будет опять проведено конструктивным путем — одновременно с доказательством теоремы существования решения задачи (2.38) будет дан алгоритм построения функции $\bar{y}(x)$, сколь угодно точно аппроксимирующей решение исходной задачи. Идея этого метода принадлежит Эйлеру. Метод состоит в том, что интегральная кривая, являющаяся решением задачи (2.38), последовательными шагами приближенно заменяется некоторой ломаной — ломаной Эйлера.

Пусть функция $f(x, y)$ задана в области G плоскости (x, y). Построим в этой области замкнутый прямоугольник $D = \{|x - x_0| \leqslant \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ с центром в начальной точке (x_0, y_0) и поставим своей целью определение интегральной кривой $y(x)$, выходящей из данной начальной точки (x_0, y_0) и идущей в сторону возрастающих $x > x_0$.

Предположим, что в G функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|, \tag{2.39}$$

где N — постоянная, не зависящая ни от x, ни от y. Заметим, что из непрерывности функции $f(x, y)$ в замкнутой области D следует ее ограниченность в данной области:

$$|f(x, y)| \leqslant M, \qquad (x, y) \in D. \tag{2.40}$$

Искомая интегральная кривая, если она существует, пересечет либо вертикальную $x = x_0 + a$, либо горизонтальную $y = y_0 + b$ или $y = y_0 - b$ границу области D. В последнем случае абсцисса точки пересечения меньше $x_0 + a$ и искомая интегральная кривая определена не на всем отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$. Однако из простых геометри-

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 2.1. *Пусть в начальной задаче*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

функция $f(x, y)$ в области D непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y. Тогда последовательность $\tilde{y}_{(n)}(x)$, сходящаяся по невязке на отрезке $[x_0, X]$, сходится равномерно на этом отрезке к функции $y(x)$, являющейся решением начальной задачи.

Доказательство. В силу леммы 2.2 последовательность $\{\tilde{y}_{(n)}(x)\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости на отрезке $[x_0, X]$. Тем самым существует функция $y(x)$, к которой последовательность $\{\tilde{y}_{(n)}(x)\}$ сходится равномерно, и эта функция будет непрерывной, поскольку $\tilde{y}_{(n)}(x)$ непрерывны.

Подставим ε_n-приближенное решение $\tilde{y}_{(n)}(x)$ в уравнение (2.38) и заменим получающееся при этом тождество эквивалентным интегральным соотношением (см. лемму 1.1)

$$\tilde{y}_{(n)}(x) = \tilde{y}_{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left[f(\xi, \tilde{y}_{(n)}(\xi)) + \psi_n(\xi) \right] d\xi. \tag{2.58}$$

Так как $|\psi_n| \leqslant \varepsilon_n$ и $|\tilde{y}_{(n)}(x_0) - y_0| \leqslant \varepsilon_n$, то, переходя в (2.58) к пределу при $\varepsilon_n \to 0$, получим

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{2.59}$$

Из последнего тождества следует, что предельная функция $y(x)$ дифференцируема. Дифференцируя, находим

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.60}$$

Кроме того, $y(x_0) = y_0$. Таким образом, предельная функция последовательности $\{\tilde{y}_{(n)}(x)\}$ является точным решением начальной задачи (2.38). Теорема доказана.

Для доказательства теоремы существования решения начальной задачи (2.38) нам теперь остается показать, что существует сходящаяся по невязке последовательность ε_n-приближенных по невязке решений этой задачи. Сейчас мы покажем, что построенные выше ломаные Эйлера образуют такую последовательность.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия теоремы* 2.1, *то последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ сходится равномерно на отрезке $[x_0, X]$ к функции $y(x)$, являющейся решением начальной задачи.*

Доказательство. Так как начальные значения ломаных Эйлера $\bar{y}_{(n)}(x)$ по построению совпадают с y_0, то достаточно убе-

Из предыдущих рассуждений вытекает, что из сходимости последовательности решений, приближенных по неявке, следует и их сходимость по отклонению.

Заметим, что обратное утверждение неверно: если отклонения приближенных решений от точного стремятся к нулю, то сами решения могут при этом иметь сколь угодно большие невязки, более того, решения, приближенные по отклонению, могут быть не дифференцируемы и даже не непрерывны.

Замечания. 1. Метод ломаных Эйлера не только позволяет доказать существование решения рассмотренной начальной задачи, но и дает непосредственный алгоритм построения приближенного решения, сколь угодно близко аппроксимирующего точное. Этот метод легко реализовать на ЭВМ. Поэтому он является одним из эффективных методов численного решения начальных задач. При его конкретной реализации естественно возникают вопросы точности полученного приближения и ряд специфических вычислительных аспектов общей проблемы численных методов. Эти вопросы подробнее будут рассмотрены в гл. 6.

2. Мы доказали существование и единственность решения $y(x)$ начальной задачи (2.38) лишь на отрезке $[x_0, X]$. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (2.39) в исходной области G. Так как при $x = X$ интегральная кривая не вышла из области G, то, взяв точку $x = X$, $y = y(X)$ за начальную, можно, повторив проведенные выше рассуждения, продолжить решение на новый отрезок $[X, X_1]$. Можно показать, что, продолжая этот процесс, удается построить интегральную кривую, сколь угодно близко подходящую к границе области G.

Мы рассмотрели алгоритм построения интегральной кривой $y(x)$ в сторону возрастающих $x > x_0$. Очевидно, аналогичные рассуждения могут быть проведены и для построения интегральной кривой в сторону убывающих $x < x_0$. При этом соответствующий процесс построения интегральной кривой можно опять продолжать до тех пор, пока интегральная кривая не подойдет к границе области G.

3. Можно доказать существование решения начальной задачи и при одном требовании непрерывности функции $f(x, y)$ (теорема Пеано). Однако одной непрерывности функции $f(x, y)$ недостаточно для единственности решения начальной задачи. Так, например, задача

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0 \tag{2.65}$$

помимо тривиального решения $y \equiv 0$ имеет еще решение

$$y = x^2/4, \tag{2.66}$$

удовлетворяющее нулевому начальному условию. (Как легко видеть, правая часть уравнения (2.65) в окрестности точки (0, 0)

§ 3. Уравнение, неразрешенное относительно производной

1. Теорема существования и единственности решения. Перейдем теперь к рассмотрению дифференциального уравнения первого порядка общего вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.67}$$

и выясним достаточные условия существования решений этого уравнения. Функция F в области своего определения задает соотношение между неизвестной функцией y, ее производной $y' = \frac{dy}{dx}$ и независимой переменной x. Если это соотношение удается разрешить относительно производной y', то получаем одно или несколько дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.68}$$

Пусть функции $f_k(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) плоскости (x, y) удовлетворяют условиям теорем существования и единственности решения начальной задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Тогда через точку (x_0, y_0) проходит по одной и только одной интегральной кривой $y_k(x)$ каждого из этих уравнений $(k = 1, 2, \ldots)$. Все эти интегральные кривые являются решениями исходного дифференциального уравнения (2.67) (при подстановке в уравнение (2.67) функции $y_k(x)$ обращают его в тождество). Направление вектора касательной к интегральной кривой $y_k(x)$ уравнения (2.68) в точке (x_0, y_0) определяется значением функции $f_k(x_0, y_0)$. Если эти значения различны, то через точку (x_0, y_0) проходит несколько интегральных кривых уравнения (2.67) (столько, каково число уравнений (2.68), полученных при разрешении уравнения (2.67) относительно производной), но направления векторов касательных к этим кривым в точке (x_0, y_0) различны. Поэтому, чтобы выделить определенное решение уравнения (2.67), надо не только задать начальные данные — значение решения $y(x)$ в точке x_0, т. е.

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.69}$$

но и значение производной решения в этой точке $y'(x_0) = y'_0$. Очевидно, это значение не может быть задано произвольно: y'_0 должно быть корнем уравнения

$$F(x_0, y_0, y') = 0. \tag{2.70}$$

Итак, существование решения уравнения (2.67) связано с возможностью разрешить его относительно y' и существованием решений уравнений (2.68). Тем самым достаточные условия разрешимости уравнения (2.67) определяются известными из курса анализа услопорядка, разрешенные относительно производной,

$$y' = y, \tag{2.77}$$

$$y' = 2x, \tag{2.78}$$

правые части которых удовлетворяют условиям теорем 2.3 и 2.4 существования и единственности решения начальной задачи в любой точке плоскости (x, y). Общие решения уравнений (2.77) и (2.78) имеют вид

$$y = C_1 e^x \tag{2.79}$$

и

$$y = x^2 + C_2, \tag{2.80}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Как легко видеть, через любую точку плоскости (x, y) проходят как интегральная кривая семейства (2.79), так и интегральная кривая семейства (2.80), причем в точках прямой $y = 2x$ кривые этих семейств имеют общую касательную $y'(x_0) = 2x_0$ (рис. 5; *1* — кривая $y = x^2$, *2* — кривая $y = x^2 + 1$, *3* — кривая $y = (2/e)e^x$, *4* — кривая $y = (2/e)^2 e^x$, *5* — прямая $y = 2x$). (В точке (0, 0) интегральная кривая $y = x^2$ касается прямой $y \equiv 0$, являющейся частным решением уравнения (2.77), которое может быть получено из формулы (2.79) при $C_1 = 0$. Эта же интегральная кривая $y = x^2$ пересекается в точке $x = 2$, $y = 4$ с интегральной кривой $y = (2/e)^2 e^x$ семейства (2.79), причем в этой точке обе кривые имеют общую касательную $y' = 4$.) Прямая $y = 2x$ представляет собой геометрическое место точек, в которых нарушены условия единственности решения уравнения (2.76). (В этих точках не выполнено условие б), поскольку $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{y=2x} = 0$.)

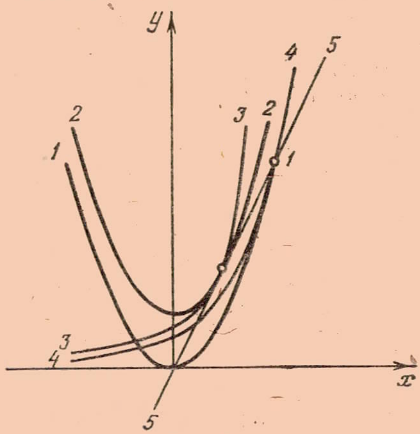

Рис. 5

2. Интегрирование уравнения, неразрешенного относительно производной, путем введения параметра. Доказанная в предыдущем пункте теорема 2.5 гарантирует при выполнении определенных условий возможность сведения исходного уравнения (2.67) к уравнению (2.68) и разрешимость последнего. Однако практическая реализация этой возможности и последующее интегрирование полученного уравнения (2.72) часто вызывают значительные трудности. Поэтому в ряде случаев представляются более удобными другие способы интегрирования уравнения (2.67). Начнем со случая, когда уравнение (2.67) легко можно разрешить относительно самой неизвестной функции

$$y(x) = f(x, y'). \tag{2.81}$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение $y' = p$ и переписать (2.81) в виде

$$y(x) = f(x, p(x)). \tag{2.82}$$

вом, что кривая $y = x^2/4$ в каждой своей точке касается какой-либо кривой (2.91). Это означает, что кривая $y = x^2/4$ представляет собой геометрическое место точек, через которое проходят два решения уравнения (2.86),

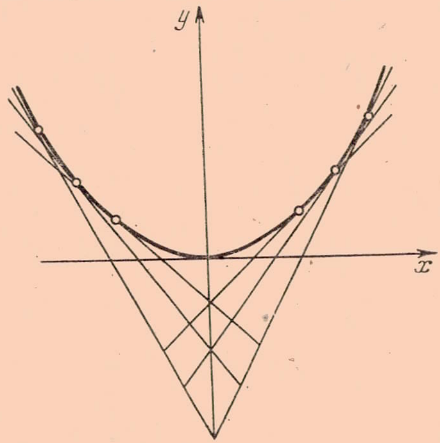

Рис. 6

имеющие общую касательную в этой точке. В точках кривой $y = x^2/4$ нарушается условие б) теоремы 2.5:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{y=x^2/4} = 2y' - x\,\Big|_{y=x^2/4} = 0. \tag{2.94}$$

Тем самым решение $y = x^2/4$ оказывается в определенном смысле особым решением уравнения (2.86).

Прежде чем переходить к рассмотрению общего случая, отметим, что поскольку в исходном уравнении (2.67) переменные x и y равноправны, то проведенные выше рассмотрения сохраняют силу и в том случае, когда исходное уравнение легко разрешить относительно независимой переменной x. Например, это имеет место в случае так называемого уравнения Лагранжа

$$x\varphi(y') + y\psi(y') = \chi(y'), \tag{2.95}$$

линейного относительно переменных x и y. Частным случаем уравнения Лагранжа и является уравнение, рассмотренное в примере 2.4.

Перейдем теперь к изложению общего метода интегрирования уравнения первого порядка (2.67), неразрешенного относительно производной, путем введения параметра. Обозначив $y' = p$, запишем уравнение (2.67) в виде

$$F(x, y, p) = 0. \tag{2.96}$$

Уравнение (2.96) определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве (x, y, p). Как известно, путем введения двух паранено по крайней мере одно из условий теоремы 2.5. Чаще всего нарушается условие б), т. е. $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Тогда при выполнении в точках особого множества условия а) и нарушении условия б) в этих точках одновременно имеют место соотношения

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0. \tag{2.104}$$

Исключив p из соотношений (2.104), получим неявное уравнение так называемой *p-дискриминантной кривой*

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{2.105}$$

Будем называть *особым решением* интегральную кривую, во всех точках (x, y) которой $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Если какая-либо из ветвей p-дискриминантной кривой представляет собой интегральную кривую уравнения (2.67), то она является его особым решением. Заметим, что не обязательно всякая p-дискриминантная кривая представляет собой особое решение уравнения (2.67), она может и не являться интегральной кривой этого уравнения. Так, например, как легко проверить, в случае примера 2.3 p-дискриминантная кривая $y = 2x$ уравнения (2.76) не является интегральной кривой, а тем самым и особым решением этого уравнения. Найденное в примере 2.4 особое решение $y = x^2/4$ уравнения (2.86) является его p-дискриминантной кривой.

В тех случаях, если множество решений уравнения (2.67) может быть записано в виде однопараметрического семейства

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2.106}$$

в котором значения постоянной C определяют различные интегральные кривые, и семейство функций (2.106) имеет огибающую $y = y(x)$, то, очевидно, эта огибающая также является интегральной кривой уравнения (2.67) и через каждую точку огибающей проходит интегральная кривая семейства (2.106), имеющая в этой точке общую касательную с огибающей. Тем самым огибающая семейства интегральных кривых (2.106) представляет собой особое решение уравнения (2.67). Как известно, огибающая однопараметрического семейства (2.106) может быть найдена путем исключения параметра C из соотношений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C}(x, y, C) = 0. \tag{2.107}$$

Полученная при этом кривая $\Psi(x, y) = 0$ называется *C-дискриминантной кривой*. Так, найденное в примере 2.4 особое решение $y = x^2/4$ уравнения (2.86) является, как легко проверить, C-дискриминантной кривой семейства решений (2.91).

В заключение заметим, что система соотношений (2.107) определяет не только огибающую семейства (2.106), но и множество

Для построения ломаной Эйлера на отрезке $[t_0, T]$ разобьем этот отрезок на n частей точками деления $t_0, t_1, \ldots, t_n = T$ и так же, как и в § 2, обозначим $t_i - t_{i-1} = h_i$, $h = \max\limits_i h_i$. На первом шаге «заморозим» функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ в точке $(t_0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ и, интегрируя полученные уравнения с постоянными правыми частями, найдем значения функций $\bar{y}_i(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$\bar{y}_i(t) = y_i^0 + f_i(t_0, y_1^0, \ldots, y_m^0)(t - t_0). \tag{2.112}$$

Найденные функции определяют в $(m+1)$-мерном пространстве переменных $t, y_1, \ldots, y_m$ на участке $[t_0, t_1]$ некоторый прямолинейный отрезок, который является первым звеном ломаной Эйлера.

Значения функций $\bar{y}_i(t)$ в точке $t = t_1$ примем за новые начальные значения и, повторяя вышеописанный алгоритм, получим ломаную Эйлера на отрезке $[t_0, T]$. При помощи оценок, аналогичных оценкам в случае одного уравнения, проведенным в § 2, можно доказать, что построенная по данному алгоритму ломаная Эйлера на отрезке $[t_0, T]$ не выйдет из области D.

Введем понятие ε-приближенного по невязке решения начальной задачи (2.109), аналогичное соответствующему понятию для случая одного уравнения.

Определение. *Непрерывная на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функция $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_m(t))$ с кусочно непрерывными производными $\frac{d\tilde{y}_i}{dt}$, график которой целиком лежит в области D, называется ε-приближенным по невязке решением начальной задачи (2.109), если*

$$\max_i |\tilde{y}_i(t_0) - y_i^0| \leqslant \varepsilon,$$

и при подстановке функций $\tilde{y}_i(t)$ в уравнения (2.109) получим

$$\frac{d\tilde{y}_i}{dt} = f_i(t, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m) + \psi_i(t), \tag{2.113}$$

где невязки $\psi_i(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\max_i \sup_{t \in [t_0, T]} |\psi_i(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{2.114}$$

Чтобы доказать теорему существования, так же, как и в случае одного уравнения, докажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\bar{y}_{(n)}(t)\}$ при $h \to 0$ образует равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, T]$ последовательность ε_n-приближенных по невязке решений начальной задачи, а предельная вектор-функция этой последовательности $\bar{y}(t)$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи (2.109). Это делается путем рассуждений, аналогичных проведенным в § 2.

где $s(t)$ — решение начальной задачи для линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{ds}{dt} = Nm^2 s + 2m\varepsilon_1, \quad s(t_0) = \rho(t_0). \tag{2.125}$$

Согласно (2.117) начальное значение $s(t_0)$ удовлетворяет неравенству $s(t_0) = \rho(t_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} z_i^2(t_0)} \leqslant 2\sqrt{m}\,\varepsilon_1$. Поэтому для $\rho(t)$ окончательно получим

$$\rho(t) \leqslant 2\sqrt{m}\,\varepsilon_1 e^{Nm^2(t-t_0)} + \frac{2\varepsilon_1}{Nm}\left(e^{Nm^2(t-t_0)} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1\left[\sqrt{m}\,e^{Nm^2T} + \frac{1}{Nm}\left(e^{Nm^2T} - 1\right)\right] = 2\varepsilon_1\Omega, \tag{2.126}$$

где постоянная Ω не зависит от ε_1. Очевидно, оценка (2.126) справедлива и для $|z_i(t)|$ $(i = 1, \ldots, m)$. Выбирая $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2\Omega)$, мы и получим утверждение леммы.

Определение. *Последовательность ε_n-приближенных по невязке решений $\tilde{y}_{(n)}(t)$ назовем сходящейся по невязке, если $\varepsilon_n \to 0$.*

Из доказанной леммы следует, что всякая последовательность $\{\tilde{y}_{(n)}(t)\}$, сходящаяся по невязке, является равномерно сходящейся на отрезке $[t_0, T]$.

Последующие теоремы доказываются полностью аналогично соответствующим теоремам в случае одного уравнения.

Теорема 2.6. *Пусть в начальной задаче*

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_m), \quad y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ в области D непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, \ldots, y_m$. Тогда последовательность $\{\tilde{y}_{(n)}(t)\}$, сходящаяся по невязке на отрезке $[t_0, T]$, сходится равномерно на этом отрезке к функции $\mathbf{y}(t)$, являющейся решением начальной задачи.

Теорема 2.7. *Если выполнены условия теоремы 2.6, то последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, T]$ к функции $y(t)$, являющейся решением начальной задачи.*

Отсюда следует

Теорема 2.8 (существования). *Если функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ в области D непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, \ldots, y_m$, то на отрезке $[t_0, T]$ существует решение начальной задачи.*

Так же как и в случае одного уравнения, имеет место

Теорема 2.9 (единственности). *При выполнении условий теоремы 2.8 начальная задача (2.109) имеет на $[t_0, T]$ единственное решение.*

Рассмотрим задачу о движении ракеты в межпланетном пространстве, испытывающей тяготение со стороны Земли, Луны, Солнца. Такая задача возникает при расчете полета ракеты к Луне. Это движение описывается системой уравнений движения четырех тел типа (1.20), где F_i $(i=1, 2, 3, 4)$ — равнодействующая сил ньютоновского притяжения, действующих на i-е тело со стороны всех остальных, причем силами, действующими на небесные тела со стороны ракеты, можно, разумеется, пренебречь. Таким образом, приходим к системе 12 уравнений второго порядка или к нормальной системе 24 уравнений с правыми частями, имеющими сложную аналитическую структуру; формул для правых частей мы здесь не выписываем. Для применения алгоритма Эйлера и других численных алгоритмов достаточно иметь возможность вычислять правые части при различных положениях движущихся тел; при этом конкретный вид аналитических формул для правых частей не имеет значения для метода интегрирования.

На приведенном здесь рис. 7 изображена одна из проекций траектории движения автоматической межпланетной станции, запущенной в СССР 4 октября 1959 г., с помощью которой впервые была сфотографирована обратная сторона Луны.

§ 5. Зависимость решений от начальных значений и параметров

В реальных задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, начальные значения обычно известны лишь с некоторым приближением, так как они определяются экспериментально или вычисляются, а это неизбежно связано с появлением погрешностей. Кроме того, в правые части уравнений могут входить какие-либо параметры, характеризующие физическую природу изучаемой системы (массы, заряды, упругие характеристики и т. п.), и значения данных параметров также определяются приближенно. В связи с этим возникает вопрос о том, как изменяется решение начальной задачи при небольших изменениях начальных значений и параметров и зависит ли оно от этих величин непрерывно. Этот вопрос мы и рассмотрим в данном параграфе. Заметим, что аналогичный вопрос можно поставить и для неограниченного промежутка (t_0, ∞), если решение на нем определено. Этот вопрос составляет содержание так называемой теории устойчивости, которой посвящена специальная глава (гл. 5).

Будем рассматривать начальную задачу для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \qquad y = (y_1, \ldots, y_m), \; f = (f_1, \ldots, f_m) \tag{2.127}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0, \; y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{m0}). \tag{2.128}$$

Пусть правая часть $f(y, t, \mu)$ определена в параллелепипеде $D = \{|t - t_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b,\ |\mu - \mu_0| \leqslant c\}$, непрерывна в D по совокупности переменных и, кроме того, удовлетворяет в D условию Липшица по y

$$|f(y_1, t, \mu) - f(y_2, t, \mu)| \leqslant N|y_1 - y_2|, \tag{2.135}$$

где N — одна и та же постоянная для всех μ из отрезка $|\mu - \mu_0| \leqslant c$.

При каждом фиксированном μ, согласно теореме существования, на отрезке $[t_0, t_0 + H]$ $\quad (H = \min\{a, b/M\}, \quad M = \sup\limits_D |f(y, t, \mu)|)$ определена интегральная кривая — решение начальной задачи (2.133), (2.134). Меняя μ, получим в силу независимости констант M и N от μ, что на $[t_0, t_0 + H]$ определено семейство интегральных кривых $y(t, \mu)$.

Будем исследовать зависимость $y(t, \mu)$ от μ. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.10. *Пусть* $f(y, t, \mu)$ *определена и непрерывна в* D *и удовлетворяет условию Липшица* (2.135) *по переменному* y. *Тогда решение* $y(t, \mu)$ *задачи* (2.133), (2.134), *определенное на отрезке* $[t_0, t_0 + H]$, *непрерывно по* μ *при любом* μ *из отрезка* $|\mu - \mu_0| \leqslant c$.

Доказательство. Теорема будет доказана, если убедимся, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $|\Delta\mu| < \delta$ справедливо неравенство

$$|y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)| < \varepsilon \tag{2.136}$$

для любых μ и $\mu + \Delta\mu$ из отрезка $|\mu - \mu_0| \leqslant c$. Воспользуемся леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах. Имеем

$$\frac{d}{dt} y(t, \mu + \Delta\mu) = f(y(t, \mu + \Delta\mu), t, \mu + \Delta\mu), \quad y(t_0, \mu + \Delta\mu) = y_0,$$

$$\frac{d}{dt} y(t, \mu) = f(y(t, \mu), t, \mu), \qquad y(t_0, \mu) = y_0.$$

Вычитая одно соотношение из другого, получим для разности $\Delta y = y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)$

$$\frac{d}{dt}\Delta y = [f(y(t, \mu + \Delta\mu), t, \mu + \Delta\mu) - f(y(t, \mu), t, \mu + \Delta\mu)] + \\ + [f(y(t, \mu), t, \mu + \Delta\mu) - f(y(t, \mu), t, \mu)], \qquad \Delta y|_{t=t_0} = 0. \tag{2.137}$$

В силу непрерывности $f(y, t, \mu)$ по совокупности аргументов и в силу того, что $|y(t, \mu) - y_0| \leqslant b$ при $|t - t_0| \leqslant H$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1(\varepsilon)$ такое, что если $|\Delta\mu| < \delta_1$, то

$$|f(y(t, \mu), t, \mu + \Delta\mu) - f(y(t, \mu), t, \mu)| < \varepsilon_1$$

Остановимся теперь на исследовании зависимости решения от параметра y_0. Пусть этот параметр меняется на отрезке $|y_0 - y_0^0| \leqslant \Delta$. Пусть $f(y, t)$ определена и непрерывна в $D\{|t - t_0| \leqslant a, |y - y_0^0| \leqslant b\}$. Тогда из геометрических соображений очевидно, что семейство интегральных кривых $y(t, y_0)$ существует на отрезке $[t_0, t_0 + \overline{H}]$, где $\overline{H} = \min\{a, (b - \Delta)/M\}$, $M = \sup\limits_D |f|$. Сведем эту задачу указанным выше способом к уже рассмотренной задаче о зависимости решения от μ (вводя $z = y - y_0$ и полагая $y_0 = \mu$). Получим тогда как следствие теоремы 2.10, что функция $y(t, y_0)$, определенная на $[t_0, t_0 + \overline{H}]$, непрерывна по y_0 при любом y_0 из промежутка $|y_0 - y_0^0| \leqslant \Delta$.

Точно так же можно рассмотреть зависимость решения от параметра t_0, который меняется на отрезке $|t_0 - t_0^0| \leqslant \delta$, и получить, что $y(t, t_0)$, определенная на отрезке $[t_0^0, t_0^0 + \overline{\overline{H}}]$, где $\overline{\overline{H}} = \min\left\{a - \delta, \frac{b}{M} - \delta\right\}$, непрерывна по t_0 при $|t_0 - t_0^0| \leqslant \delta$.

Если y является векторной величиной, то справедливы аналогичные результаты, которые могут быть доказаны, если воспользоваться той же леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах и соображениями, имевшими место при доказательстве теоремы существования для системы уравнений.

Синтезируя все сказанное, приходим к следующему утверждению для общего случая (2.127), (2.128). Пусть t_0, y_{i0} являются параметрами, меняющимися в области $|t_0 - t_0^0| \leqslant \delta$, $|y_{i0} - y_{i0}^0| \leqslant \Delta_i$, а входящий в систему вектор-параметр μ меняется в области $|\mu_k - \mu_k^0| \leqslant c_k$. Пусть правые части системы (2.127) непрерывны по совокупности аргументов в параллелепипеде

$$D = \{|t - t_0^0| \leqslant a, \quad |y_i - y_{i0}^0| \leqslant b_i, \quad |\mu_k - \mu_k^0| \leqslant c_k\} \tag{2.140}$$

и удовлетворяют в D условию Липшица по $y_1, \ldots, y_m$. Тогда функции $y_i(t, t_0, y_{10}, \ldots, y_{m0}, \mu_1, \ldots, \mu_s)$, определенные на отрезке $[t_0^0, t_0^0 + H]$, где

$$H = \min\left\{a - \delta, \frac{\min(b_i - \Delta_i)}{\max M_i} - \delta\right\}, \qquad M_i = \sup_D |f_i|,$$

и являющиеся решением задачи (2.127), (2.128), непрерывны по совокупности аргументов при

$$|t - t_0^0| \leqslant H, \quad |t_0 - t_0^0| \leqslant \delta, \quad |y_{i0} - y_{i0}^0| \leqslant \Delta_i, \quad |\mu_k - \mu_k^0| \leqslant c_k.$$

Свойство непрерывности по параметрам имеет существенное значение для возможности использования начальной задачи (2.127), (2.128) в качестве математической модели многих естественно-научных задач. Действительно, как уже отмечалось, на практике на-

Пользуясь (2.137), имеем

$$\frac{dw}{dt}=\frac{f(y(t,\mu+\Delta\mu),t,\mu+\Delta\mu)-f(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu)}{\Delta\mu}+$$
$$+\frac{f(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu)-f(y(t,\mu),t,\mu)}{\Delta\mu}=$$
$$=f_y(y(t,\mu)+\theta_1\Delta y,\ t,\ \mu+\Delta\mu)w+f_\mu(y(t,\mu),t,\mu+\theta_2\Delta\mu);\quad(2.146)$$
$$0\leqslant\theta_1\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta_2\leqslant 1.$$

Очевидно,

$$w\big|_{t=t_0}=0.\qquad(2.147)$$

Составим уравнение относительно разности $w-z$. Заметим предварительно, что, в силу непрерывности f_y и f_μ и непрерывности $y(t,\mu)$, имеет место представление

$$f_y(y(t,\mu)+\theta_1\Delta y,\ t,\ \mu+\Delta\mu)=f_y(y(t,\mu),t,\mu)+p(t,\mu,\Delta\mu),$$

где $|p|<\varepsilon_1$ при $|\Delta\mu|<\delta_1(\varepsilon_1)$ равномерно относительно t. И точно так же

$$f_\mu(y(t,\mu),t,\mu+\theta_2\Delta\mu)=f_\mu(y(t,\mu),t,\mu)+q(t,\mu,\Delta\mu),$$

где $|q|<\varepsilon_1$ при $|\Delta\mu|<\delta_2(\varepsilon_1)$ равномерно относительно t. Вычитая (2.143), (2.144) из (2.146), (2.147), получим теперь следующее уравнение относительно $w-z$:

$$\frac{d}{dt}(w-z)=f_y(y(t,\mu),t,\mu)(w-z)+p(w-z)+pz+q.\qquad(2.148)$$

При этом

$$(w-z)_{t=t_0}=0.\qquad(2.149)$$

Так как переменная z ограничена, то $|pz+q|<\varepsilon_2$ при $|\Delta\mu|<\delta_3(\varepsilon_2)$. Кроме того, так как $|f_y|\leqslant Q$, то $|f_y+p|<Q+\varepsilon_2$. Поэтому

$$\left|\frac{d}{dt}(w-z)\right|<(Q+\varepsilon_1)|w-z|+\varepsilon_2\qquad(2.150)$$

и для оценки $w-z$ можно опять воспользоваться леммой 2.1. В результате получим

$$|w-z|<\frac{\varepsilon_2}{Q+\varepsilon_1}\left(e^{(Q+\varepsilon_1)H}-1\right)<\varepsilon\qquad(2.151)$$

при $|\Delta\mu|<\delta(\varepsilon)$ для всех $t\in[t_0,\ t_0+H]$, что и требовалось.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.11. *Пусть $f(y,t,\mu)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $D=\{|t-t_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b,\ |\mu-\mu_0|\leqslant c\}$ вместе с частными производными $f_y(y,t,\mu)$ и $f_\mu(y,t,\mu)$. Тогда решение $y(t,\mu)$ начальной задачи* (2.133), (2.134) *при каждом μ из промежутка $|\mu-\mu_0|\leqslant c$ имеет производную по μ,* Все сказанное сохраняет силу и для общего случая (2.131), (2.132) при условии, что в области D (см. (2.140)) f_i обладают непрерывными частными производными по всем $y_1, \ldots, y_m$ и по тому из параметров, по которому производится дифференцирование. Так, например, производная $\frac{\partial y_i}{\partial \mu_k}$ удовлетворяет системе уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial \mu_k} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial \mu_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}, \qquad \left.\frac{\partial y_i}{\partial \mu_k}\right|_{t=t_0} = 0. \tag{2.156}$$

Вопрос о существовании и непрерывности производных высших порядков исследуется аналогично. Можно показать, что существование непрерывных частных производных до порядка k от функций f_i по $y_1, \ldots, y_m, \mu_k, \ldots, \mu_s$ обеспечивает существование непрерывных частных производных k-го порядка по параметрам $y_{10}, \ldots, y_{m0}, \mu_1, \ldots, \mu_s$ от решения задачи (2.127), (2.128).

Замечание. Имеет место

Теорема Пуанкаре. *Если функции f_i являются аналитическими функциями своих аргументов, то и решение задачи* (2.127), (2.128) *оказывается аналитически зависящим от параметров.*

§ 6. Метод последовательных приближений (метод Пикара)

Рассматривая в § 2 начальную задачу Коши для одного уравнения, мы доказали существование и единственность решения этой задачи методом ломаных Эйлера, представляющим собой одновременно и эффективный алгоритм численного решения. В настоящем параграфе мы вернемся к проблеме существования и единственности решения начальной задачи и дадим ее доказательство методом последовательных приближений, основные идеи которого восходят к исследованиям Пикара. Не являясь столь же эффективным в алгоритмическом плане, как метод ломаных Эйлера, метод последовательных приближений обладает большой общностью и находит широкие применения при исследовании вопросов существования и единственности решения задач из различных разделов математики. Поэтому знакомство с основными идеями этого метода на примере рассматриваемой в данном параграфе задачи целесообразно.

Итак, рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.157}$$

где функция $f(x, y)$ задана и непрерывна в прямоугольнике $D = \{|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$. Тогда найдется постоянная M такая, что

$$|f(x, y)| \leqslant M, \qquad (x, y) \in D. \tag{2.158}$$

Очевидно, n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда совпадает с n-м членом последовательности $\{y_{(n)}(x)\}$. Оценим члены ряда. Очевидно,

$$|y_{(1)}(x) - y_0(x)| \leqslant |y_{(1)}(x) - y_0| + |y_{(0)}(x) - y_0| \leqslant 2b,$$

$$|y_{(2)}(x) - y_{(1)}(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_{(1)}(\xi)) - f(\xi, y_{(0)}(\xi))|\, d\xi.$$

Тогда, в силу условия (2.159), имеет место оценка

$$|y_{(2)}(x) - y_{(1)}(x)| \leqslant N \int_{x_0}^{x} |y_{(1)}(\xi) - y_{(0)}(\xi)|\, d\xi \leqslant 2bN(x - x_0). \qquad (2.165)$$

Аналогично

$$|y_{(3)}(x) - y_{(2)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant N \int_{x_0}^{x} |y_{(2)}(\xi) - y_1(\xi)|\, d\xi \leqslant 2bN^2 \int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)\, d\xi = 2bN^2 \frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$

Методом индукции получим для n-го члена оценку

$$|y_{(n)}(x) - y_{(n-1)}(x)| \leqslant 2bN^{n-1} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (2.166)$$

Из оценки (2.166) следует, что на отрезке $[x_0, X]$ члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда

$$|y_{(n)}(x) - y_{(n-1)}(x)| \leqslant 2bN^{n-1} \frac{H^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (2.167)$$

что и является достаточным признаком равномерной сходимости ряда (2.164). Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет доказать следующую теорему:

Теорема 2.12 (существования). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в D и удовлетворяет условию Липшица (2.159), то на отрезке $[x_0, X]$ существует решение начальной задачи (2.157).*

Доказательство. В силу леммы 1.1 достаточно доказать существование на отрезке $[x_0, X]$ решения интегрального уравнения (2.160). Согласно лемме 2.4 последовательность $\{y_{(n)}(x)\}$, построенная по формуле (2.161), сходится равномерно на $[x_0, X]$. Так как все члены последовательности $\{y_{(n)}(x)\}$ по построению являются непрерывными функциями, то и предельная функция $y(x)$ непрерывна на $[x_0, X]$. Равномерная на $[x_0, X]$ сходимость последовательности $\{y_{(n)}\}$ является достаточным условием возможности предельного перехода в формуле (2.161). Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что предельная функция последовательности $\{y_{(n)}(x)\}$

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{(n)}(x) \qquad (2.168)$$

вычисления правой части формулы (2.61), так и выбором начального приближения.

3. Мы рассмотрели применение метода последовательных приближений для доказательства существования и единственности решения начальной задачи для одного скалярного уравнения первого порядка. Аналогичные рассмотрения могут быть проведены и в случае начальной задачи для нормальной системы.

§ 7. Принцип сжатых отображений. Теорема о неподвижной точке

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод последовательных приближений основывается на общем математическом принципе, известном под названием «принцип сжатых отображений», основные идеи которого будут изложены в настоящем параграфе.

Будем рассматривать произвольное полное метрическое пространство M. Пространство M называется метрическим, если каждой паре x, y элементов этого пространства поставлено в соответствие число $\rho(x, y)$, обладающее следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ только при $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) для любых $x, y, z \in M$ имеет место неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Число $\rho(x, y)$ обычно называется расстоянием между элементами x и y.

Последовательность $\{x_m\}$ элементов пространства M называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ и любом $p > 0$ справедливо неравенство $\rho(x_m, x_{m+p}) < \varepsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_m\}$ элементов этого пространства сходится к некоторому элементу $x \in M$, т. е. существует $x \in M$ такое, что $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x, x_m) = 0$ $\left(\text{обозначается } x = \lim\limits_{m\to\infty} x_m\right)$.

Примером полного метрического пространства является пространство непрерывных на сегменте $x \in [a, b]$ функций $y(x)$, в котором расстояние $\rho(y, z)$ между элементами $y(x)$ и $z(x)$ задается в виде

$$\rho(y, z) = \sup_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)|. \tag{2.174}$$

Выполнение свойств 1) и 2) очевидно. Проверим, что выполнено 3). Для любого $x \in [a, b]$ имеем $|y(x) - z(x)| \leqslant |y(x) - u(x)| + |u(x) - z(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |y(x) - u(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x) - z(x)|$. Но так как, в силу непрерывности, $\sup\limits_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)|$ достигается при некотором $x^* \in [a, b]$, то $\sup\limits_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)| = |y(x^*) - z(x^*)|$ и поэтому

$$\sup_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |y(x) - u(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |u(x) - z(x)|.$$

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнение движения маятника как пример линейного уравнения. Основные свойства линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка назы- [illegible]

$$[illegible] \qquad (3.1)$$

Это уравнение обладает рядом замечательных свойств, облегчающих его исследование, а в ряде случаев и решение. Изучение этих свойств и составляет содержание настоящей главы.

В приложениях линейные уравнения естественно получаются, если пренебречь членами более высокого порядка (см. § 2 гл. 1).

Ознакомимся с основными свойствами линейного уравнения на примере уравнения маятника (см. п. 2 § 2 гл. 1)

$$y'' + \alpha y' + ky = f(t), \qquad \alpha > 0,\ k > 0, \qquad (3.2)$$

которое является линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим сначала случай $f = 0$. В этом случае уравнение называется *однородным*. Физически это означает, что маятник движется свободно, на него не действуют внешние (вынуждающие) силы,

$$y'' + \alpha y' + ky = 0. \qquad (3.3)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $y = e^{\lambda t}$, где λ — некоторая не известная заранее постоянная. Подставляя искомый вид решения в (3.3) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0. \qquad (3.4)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (3.3). Ему должно удовлетворять λ для того, чтобы $e^{\lambda t}$ было решением (3.3). Решая уравнение (3.4), получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}.$$

Исследуем разные случаи.

Пользуясь тождеством (3.6), нетрудно видеть, что $y_1 = \operatorname{Re} y_{(1)}$, $y_2 = \operatorname{Im} y_{(1)}$ также являются решениями уравнения (3.2). Действительно,

$$(y_1 + iy_2)'' + \alpha (y_1 + iy_2)' + k (y_1 + iy_2) = \\ = (y_1'' + \alpha y_1' + ky_1) + i (y_2'' + \alpha y_2' + ky_2) = 0,$$

откуда, приравнивая нулю отдельно вещественную и мнимую части, получим требуемое. Возьмем линейную комбинацию y_1 и y_2:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\alpha t/2} \cos \frac{\beta}{2} t + C_2 e^{-\alpha t/2} \sin \frac{\beta}{2} t. \tag{3.9}$$

Нетрудно убедиться, что, как и прежде, C_1 и C_2 однозначно определяются условиями (3.5) и, таким образом, (3.9) является общим решением уравнения (3.3). Заметим, что в рассматриваемом случае в качестве общего решения можно по-прежнему взять (3.7), но при этом постоянные C_1, C_2 будут комплексными.

$$y = y_0^0 e^{-\alpha t/2} \cos \frac{\beta}{2} t + \frac{2}{\beta} \left(y_1^0 + \frac{\alpha}{2} y_0^0 \right) e^{-\alpha t/2} \sin \frac{\beta}{2} t \tag{3.10}$$

описывает колебательный процесс. Колебания затухают по закону $\exp[-\alpha t/2]$. С ростом t это решение также стремится к положению равновесия $y = 0$.

Если $\alpha = 0$ (сопротивление отсутствует), то получаем периодические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k}$,

$$y = y_0^0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} y_1^0 \sin \omega_0 t. \tag{3.11}$$

в) $\alpha^2 - 4k = 0$. В этом случае описанный способ дает только одно решение $y_{(1)} = e^{\lambda t}$, где $\lambda = -\alpha/2$. Нетрудно, однако, непосредственно проверить, что в этом случае решением является также $y_{(2)} = te^{\lambda t}$. Беря линейную комбинацию этих двух решений, можно удовлетворить условиям (3.5). Практически λ_1 и λ_2 не бывают в точности равны, но такое решение описывает математическую абстракцию, соответствующую случаю близких λ_1 и λ_2.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания под действием периодической вынуждающей силы. Они описываются уравнением (3.2), где $f = A \cos \omega t$ (A, $\omega = \text{const}$). Сопоставим этому уравнению следующее уравнение с комплексной неизвестной функцией z:

$$z'' + \alpha z' + kz = Ae^{i\omega t}. \tag{3.12}$$

Подставляя в это уравнение $z = \tilde{y}_1 + i\tilde{y}_2$ и приравнивая отдельно действительные и мнимые части, получим, что $\tilde{y}_1$ удовлетворяет уравнению (3.2), в котором $f = A \cos \omega t$, а $\tilde{y}_2$ — уравнению (3.2), в котором $f = A \sin \omega t$. Таким образом, для получения требуемого реперейдем снова к комплексной форме

$$z'' + kz = Ae^{i\omega_0 t}. \tag{3.18}$$

Обратим внимание на то, что корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Попытаемся искать z в виде

$$z = ate^{i\omega_0 t}. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.18), определим a и получим $z = A\frac{t}{2i\omega_0}e^{i\omega_0 t}$. $\operatorname{Re} z$ дает частное решение уравнения (3.17):

$$\tilde{y}_1 = A\frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{3.20}$$

Так как практически полное отсутствие трения и точное равенство [redacted] то решение такого типа практически [redacted] та ω близка к [redacted] (3.14) мал и амплитуда решения велика. Таким образом, физически явление резонанса состоит в том, что при $\omega \sim \omega_0$ и малом α наблюдается заметное увеличение амплитуды вынужденных колебаний (3.14).

Математически же случаем резонанса будем называть такой случай, когда в (3.2) $f(t) = S(t)e^{\varkappa t}$, где $S(t)$ — многочлен, а $\varkappa$ совпадает с корнем характеристического уравнения. В рассмотренном выше уравнении (3.18) $\varkappa = i\omega_0$, т. е. совпадает с одним из корней характеристического уравнения.

Итак, на примере уравнения второго порядка выявлен ряд характерных свойств линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Оказывается, эти закономерности имеют общий характер. Сформулируем их, пока без доказательств, для уравнения порядка n как естественное обобщение того, что наблюдалось для уравнения второго порядка. Доказательства будут даны ниже, в § 5.

Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (a_i = \text{const}). \tag{3.21}$$

Сопоставим (3.21) его характеристическое уравнение (ср. (3.4))

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{3.22}$$

Это алгебраическое уравнение порядка n и имеет корни $\lambda_k = p_k + iq_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

1. Если все λ_k действительны и различны, то, беря линейную комбинацию

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_{(k)}, \quad \text{где } y_{(k)} = e^{\lambda_k t}, \tag{3.23}$$

ченных подстановкой (3.27) *в* (3.26) *и приравниванием членов с одинаковыми степенями* t (ср. (3.12), (3.13); в этом простейшем случае $S(t)$ является константой A, т. е. многочленом нулевой степени, а многочлен $T(t)$ также является константой: $T = a$).

Если $\varkappa$ *совпадает с корнем характеристического уравнения* λ, *имеющим кратность* m (*так называемый резонансный случай*), *то частное решение* (3.26) *следует искать в виде*

$$y = T(t)t^m e^{\varkappa t}, \tag{3.28}$$

где $T(t)$ — *многочлен той же степени, что и* $S(t)$. *Коэффициенты* $T(t)$ *по-прежнему определяются подстановкой* (3.28) *в уравнение* (3.26) (ср. (3.19), где появляется множитель t в соответствии с кратностью $m = 1$ корня $i\omega_0$).

Если $\varkappa = \alpha + i\beta$ *комплексно, то действительная* (*соответственно мнимая*) *часть решения* (3.28) *является решением уравнения с правой частью* $S(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ (*соответственно* $S(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$).

Общее решение неоднородного уравнения (3.26) *представляется в виде суммы общего решения* (3.25) *однородного уравнения* (3.21) *и частного решения* (3.27) *или* (3.28) *неоднородного уравнения* (3.26) (ср. (3.15)).

Все эти утверждения в дальнейшем будут строго доказаны (см. теоремы 3.12, 3.13, 3.14, 3.15).

§ 2. Общие свойства линейного уравнения n-го порядка

Обратимся к уравнению (3.1). Если в рассматриваемой области изменения независимого переменного $a_0(x) \neq 0$, то, поделив на $a_0(x)$ и обозначая полученные коэффициенты и правую часть вновь через $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$, будем иметь

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \tag{3.29}$$

Определение. *Уравнение* (3.29) *называется* ***однородным***, *если* $f(x) \equiv 0$, *в противном случае* — ***неоднородным***.

Пусть $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны на некотором интервале X (X может быть как конечным интервалом, так и бесконечным, например, $(-\infty, \infty)$). Общая теорема существования и единственности (см. теоремы 2.8 и 2.9 § 4 гл. 2) гарантирует, что на некотором сегменте $|x - x_0| \leq H$, принадлежащем X, существует единственное решение $y(x)$ уравнения (3.29), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0. \tag{3.30}$$

Для уравнения (3.29) можно доказать более сильное утверждение.

Теорема 3.1. *Если* $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $f(x)$ *непрерывны на* X, *то решение начальной задачи* (3.29), (3.30) *существует и единственно всюду на* X.

Пользуясь этим и учитывая, что $H_n \to \overline{H}$, получим $|y_i(x_0+H_{n+m}) - y_i(x_0+H_n)| \leqslant C|H_{n+m}-H_n| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и любом m. Отсюда по критерию Коши делаем вывод о сходимости последовательности $y_i(x_0+H_n)$ к некоторому пределу $\overline{y}_i$. Будем считать этот предел значением y_i в точке $x_0+\overline{H}$, т. е. положим $y_i(x_0+\overline{H}) = \overline{y}_i$. Таким образом, интегральная кривая оказывается непрерывно продолженной вплоть до точки $x_0+\overline{H}$. В силу самой системы уравнений (3.31) тем же свойством обладают производные $\frac{dy_i}{dx}$. Тогда в случае $\overline{H} = \Delta$ теорема доказана. Рассмотрим случай $\overline{H} < \Delta$. Нетрудно убедиться, что этот случай не реализуется. Действительно, приняв $x_0+\overline{H}$, $y_i(x_0+\overline{H})$ за новую начальную точку, можно продолжить решение на участок $[x_0, x_0+\overline{H}+\delta]$, $\delta > 0$, что противоречит определению $\overline{H}$.

Итак, $\overline{H} = \Delta$, т. е. решение существует и единственно на отрезке $[x_0, x_0+\Delta]$, что и требовалось.

Дальнейшее рассмотрение системы (3.31) отложим до § 6 и вернемся снова к (3.29). Для уравнения (3.29) справедлива следующая теорема, называемая *принципом суперпозиции.*

Теорема 3.3. *Пусть в уравнении* (3.29) *правая часть* $f(x)$ *является линейной комбинацией функций* $f_i(x)$, *т. е.* $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$, *где* α_i — *постоянные числа, и пусть* $y_i(x)$ *являются решениями уравнений*

$$y_i^{(n)} + a_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y_i = f_i(x). \tag{3.33}$$

Тогда линейная комбинация $y_i(x)$ *с теми же коэффициентами* α_i, *т. е. функция* $y(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(x)$ *является решением уравнения* (3.29).

Значение этого принципа в том, что правую часть уравнения (3.29) можно представить как линейную комбинацию более простых элементов и свести решение уравнения к решению нескольких более простых уравнений (3.33). С точки зрения физики это означает, что результат сложного внешнего воздействия на некоторый объект, выражаемого функцией $f(x)$, можно представить как суперпозицию результатов отдельных элементарных воздействий.

Доказательство теоремы 3.3 основано на тождестве, справедливом для k произвольных n раз дифференцируемых функций $u_1, \ldots, u_k$ и следующем непосредственно из свойств дифференцирования

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x)\right)^{(n)} + a_1(x)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x)\right)^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x) = \\ = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[u_i^{(n)}(x) + a_1(x)\, u_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, u_i(x)\right]. \tag{3.34}$$

чальной задачи существует и единственно на X, чем будем существенно пользоваться ниже.

Определение. *Будем говорить, что* ***ф у н к ц и и*** $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ ***л и н е й н о з а в и с и м ы н а и н т е р в а л е*** X, *если существуют постоянные* $C_1, \ldots, C_p$, *не все равные нулю, такие, что имеет место тождество*

$$\sum_{i=1}^{p} C_i u_i(x) = 0, \qquad x \in X. \tag{3.37}$$

В противном случае (т. е. если (3.37) выполняется только при $C_1 = \ldots = C_p = 0$*) будем говорить, что* $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ ***л и н е й н о н е з а в и с и м ы.***

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения уравнения (3.36).

Определение. *Назовем детерминант*

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.38}$$

о п р е д е л и т е л е м В р о н с к о г о**).

Теорема 3.7. *Если решения* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *уравнения (3.36) линейно зависимы на* X, *то* $\Delta(x) \equiv 0$ *на* X.

В самом деле, согласно (3.37) имеем $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = 0$. Продифференцировав это тождество $n-1$ раз, получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x) = 0. \tag{3.39}$$

При любом $x \in X$ эти соотношения можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$, имеющую нетривиальное решение по условию линейной зависимости функций y_i. Следовательно, определитель системы $\Delta(x) = 0$ при любом $x \in X$, т. е. $\Delta(x) \equiv 0$ на X.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы видно, что она справедлива не только для решений уравнения (3.36), но для любых $n-1$ раз дифференцируемых функций.

Теорема 3.8. *Если* $\Delta(x) = 0$ *хотя бы для одного* $x_0 \in X$, *то решения* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *уравнения (3.36) линейно зависимы на* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, возьмем точку $x = x_0$, в которой $\Delta(x_0) = 0$, и составим систему линейных алгебраических

*) Иногда бывает удобно обозначение $\Delta(y_1(x), \ldots, y_n(x))$.

Замечание. Так как существует бесконечно много определителей, отличных от нуля, для каждого уравнения существует бесконечно много фундаментальных систем решений. Кроме того, линейное невырожденное преобразование $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j$ переводит одну фундаментальную систему решений в другую.

Докажем теперь основную теорему данного параграфа.

Теорема 3.11. *Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений, то любое решение $y(x)$ уравнения (3.36) представимо в виде*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{3.42}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $y(x_0) = y_1^0, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_n^0$. Определим постоянные $C_1, \ldots, C_n$ линейной системой уравнений с детерминантом, равным $\Delta(x_0) \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = y_1^0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \tag{3.43}$$

и построим $\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$. Согласно теореме 3.4 $\tilde{y}(x)$ является решением уравнения (3.36), а (3.43) означает, что это решение удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $y(x)$. Тогда, в силу единственности (ср. доказательство теоремы 3.8), $y(x) \equiv \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, что и требовалось.

Замечания. 1. *Формула* (3.42), *где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, является общим решением* уравнения (3.36) в том же смысле, как в § 1, т. е. (3.42) является формулой, содержащей все решения уравнения (3.36) и не содержащей ничего, кроме решений. В самом деле, по теореме 3.4 при любых $C_1, \ldots, C_n$ (3.42) является решением уравнения (3.36), а согласно только что доказанной теореме в (3.42) содержится любое решение уравнения (3.36).

2. На языке линейной алгебры теоремы 3.10 и 3.11 означают, что в пространстве решений линейного однородного уравнения (3.36) имеется базис из n элементов, т. е. это пространство n-мерно.

§ 4. Неоднородное линейное уравнение n-го порядка

Рассмотрим теперь уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \tag{3.44}$$

где $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны на интервале X.

Теорема 3.12. *Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения* (3.36), *а $\bar{y}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения* (3.44), *то любое решение $y(x)$*

его на $f(\xi)\Delta\xi$. Итак, $\mathscr{K}(x, \xi)$ строится как решение однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\mathscr{K}(\xi, \xi) = 0, \ \ldots, \ \mathscr{K}_x^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \quad \mathscr{K}_x^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1, \tag{3.47}$$

а решение, отвечающее элементарному воздействию, имеет вид $\mathscr{K}(x, \xi) f(\xi)\Delta\xi$. Суммируя теперь элементарные воздействия на основании того же принципа суперпозиции и переходя от суммы к интегралу, получим решение $\bar{y}(x)$, удовлетворяющее условию (3.46):

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{3.48}$$

Формула (3.48) получена на основании эвристических соображений, но нетрудно непосредственной проверкой убедиться, что (3.48) есть частное решение уравнения (3.44). В этой проверке и будет состоять доказательство следующей теоремы:

Теорема 3.13. *Выражение* (3.48), *где функция* $\mathscr{K}(x, \xi)$, *называемая импульсной функцией, удовлетворяет однородному уравнению* (3.36) *и начальным условиям* (3.47), *является частным решением неоднородного уравнения* (3.44), *удовлетворяющим нулевым начальным условиям* (3.46).

Доказательство. Найдем из (3.48) $\bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n)}$. Предварительно заметим, что так как ξ является параметром, принадлежащим тому же множеству, что и x, то (3.47) равносильно записи

$$\mathscr{K}(x, x) = 0, \ \ldots, \ \mathscr{K}_x^{(n-2)}(x, x) = 0, \quad \mathscr{K}_x^{(n-1)}(x, x) = 1.$$

Дифференцируя (3.48), имеем

$$\bar{y}'(x) = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}'_x(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \mathscr{K}(x, x) f(x) = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}'_x(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

. . . .

$$\bar{y}^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}_x^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\bar{y}^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}_x^{(n)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \mathscr{K}_x^{(n-1)}(x, x) f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \mathscr{K}_x^{(n)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Возможность дифференцирования под знаком интеграла следует из теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от x и начального значения переменной x, (см. теорему 3.10), однако вопрос о ее эффективном построении остался открытым.

Пусть в (3.36) $a_i = \text{const}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{3.49}$$

Этот класс уравнений замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к алгебраическим операциям, а именно к решению алгебраического уравнения n-й степени.

Сопоставим уравнению (3.49) многочлен относительно λ, называемый *характеристическим многочленом* уравнения (3.49):

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Лемма 3.1. *Справедливо тождество*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\lambda x} f(x)\right] + a_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[e^{\lambda x} f(x)\right] + \ldots + a_n e^{\lambda x} f(x) =$$

$$= e^{\lambda x}\left\{M(\lambda) f(x) + M'(\lambda) f'(x) + \frac{M''(\lambda) f''(x)}{2!} + \ldots + \frac{M^{(n)}(\lambda) f^{(n)}(x)}{n!}\right\}. \tag{3.50}$$

Доказательство. Это тождество доказывается непосредственным вычислением с использованием формулы Лейбница для дифференцирования произведения. Имеем

$$e^{\lambda x} f = e^{\lambda x} f,$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\cdot f\right) = e^{\lambda x}(\lambda f + f') = e^{\lambda x}(\lambda f + \lambda' f'),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\lambda x}\cdot f\right) = e^{\lambda x}(\lambda^2 f + 2\lambda f' + f'') = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 f + \frac{(\lambda^2)' f'}{1!} + \frac{(\lambda^2)'' f''}{2!}\right),$$

. . . .

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\cdot f\right) =$$

$$= e^{\lambda x}\left(\lambda^n f + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\lambda^{n-k} f^{(k)} + \ldots + f^{(n)}\right) =$$

$$= e^{\lambda x}\left(\lambda^n f + (\lambda^n)' f' + \ldots + \frac{(\lambda^n)^{(k)} f^{(k)}}{k!} + \ldots + \frac{(\lambda^n)^{(n)} f^{(n)}}{n!}\right).$$

Складывая полученные равенства, умножив их предварительно на соответствующее a_i, приходим к (3.50).

Замечания. 1. Если $f(x) = x^p$, то (3.50) принимает вид

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x} x^p\right) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x} x^p\right) + \ldots + a_n e^{\lambda x} x^p =$$

$$= e^{\lambda x}\left\{M(\lambda) x^p + pM'(\lambda) x^{p-1} + \ldots + \frac{p\ldots(p-k+1)}{k!} M^{(k)}(\lambda) x^{p-k} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + M^{(p)}(\lambda)\right\}. \tag{3.51}$$

Доказательство. 1. Воспользуемся (3.51) или (3.54). Если λ_k является корнем характеристического уравнения кратности m_k, то

$$M(\lambda_k) = M'(\lambda_k) = \ldots = M^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0\ ^{*)}.$$

Поэтому правая часть (3.51) обращается в нуль для $p=0, 1, \ldots$ $\ldots, m_k-1$, а это означает, что $x^p e^{\lambda_k x}$ $(p=0, 1, \ldots, m_k-1)$ удовлетворяет уравнению (3.49), что и требуется.

2. Предположим противное, т. е. что решения (3.57) $(k = 1, \ldots, l)$ линейно зависимы. Это означает, что справедливо тождество

$$R_1(x)\, e^{\lambda_1 x} + \ldots + R_l(x)\, e^{\lambda_l x} = 0, \qquad (3.58)$$

где через $R_j(x)$ обозначены многочлены степени m_j-1, не все равные нулю. Допустим, что отличным от нуля является R_1 (этого можно добиться соответствующей нумерацией λ), а в R_1 старший отличный от нуля член имеет степень p_1 $(p_1 \leqslant m_1-1)$, т. е.

$$R_1(x) = C_{10} + C_{11}x + \ldots + C_{1p_1}x^{p_1},$$

причем $C_{1p_1} \neq 0$.

Умножим (3.58) на $e^{-\lambda_l x}$. Получим

$$R_1(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_l)x} + \ldots + R_{l-1}(x)\, e^{(\lambda_{l-1}-\lambda_l)x} + R_l(x) = 0. \qquad (3.59)$$

Продифференцируем это тождество на единицу большее число раз, нежели степень $p_l \leqslant m_l-1$ многочлена $R_l(x)$. Предварительно заметим, что для выражения $A(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $A(x)$ — многочлен, при произвольном k имеет место тождество

$$\frac{d^k}{dx^k} A(x)\, e^{\alpha x} = B(x)\, e^{\alpha x},$$

где $B(x)$ — многочлен той же степени, что и $A(x)$, причем его старший коэффициент равен старшему коэффициенту $A(x)$, помноженному на α^k. Это тождество легко получить либо из (3.53), полагая $M(D) = D^k$, $\lambda = \alpha$, $f(x) = A(x)$, либо просто из формулы Лейбница. Итак, дифференцируя (3.59), получим

$$Q_1(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_l)x} + \ldots + Q_{l-1}(x)\, e^{(\lambda_{l-1}-\lambda_l)x} = 0,$$

или

$$Q_1(x)\, e^{\lambda_1 x} + \ldots + Q_{l-1}(x)\, e^{\lambda_{l-1} x} = 0, \qquad (3.60)$$

где $Q_1(x), \ldots, Q_{l-1}(x)$ — многочлены той же степени, что $R_1, \ldots, R_{l-1}$, причем коэффициент старшего члена $Q_1(x)$ есть $C_{1p_1}(\lambda_1-\lambda_l)^{p_l+1}$.

---

*) Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I.— 4-е изд.— М.: Наука, 1982, гл. 7, § 3.

Теорема 3.15. *Пусть $f(x)=S(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda=\text{const}$, $S(x)$ — многочлен степени s. Пусть λ не совпадает ни с одним корнем λ_k характеристического уравнения* (3.56) (*так называемый нерезонансный случай*). *Тогда существует частное решение уравнения* (3.62), *имеющее вид*

$$\bar{y}(x)=P(x)e^{\lambda x}, \tag{3.63}$$

где $P(x)$ — многочлен той же степени, что и $S(x)$. Если λ совпадает с корнем характеристического уравнения λ_k кратности m_k (так называемый резонансный случай), то существует частное решение уравнения (3.62), *имеющее вид*

$$\bar{y}(x)=T(x)\,x^{m_k}e^{\lambda x}, \tag{3.64}$$

где $T(x)$ — многочлен той же степени, что и $S(x)$.

На основании этой теоремы частное решение ищется в указанном виде, где многочлен $P(x)$ или $T(x)$ записывается с неизвестными коэффициентами. Подставляя в уравнение (3.62), сокращая на $e^{\lambda x}$ и приравнивая члены с одинаковыми степенями x, получим систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочлена $P(x)$ или $T(x)$. Эта система будет разрешимой, поскольку существование решения такого вида обеспечено теоремой 3.15.

Доказательство теоремы 3.15 приведем для резонансного случая (3.64), так как (3.63) получается из (3.64) при $m_k=0$. Подставим (3.64) в (3.62):

$$M(D)\,T(x)\,x^{m_k}e^{\lambda x}=e^{\lambda x}S(x) \tag{3.65}$$

и убедимся, что отсюда можно определить последовательно коэффициенты многочлена $T(x)$, начиная с коэффициента при старшей степени x^s. Выделим в многочленах $T(x)$ и $S(x)$ старшие члены:

$$S(x)=a_0x^s+S_1(x),\quad T(x)=b_0x^s+T_1(x).$$

Имеем тогда

$$M(D)\,b_0\,x^{s+m_k}e^{\lambda x}+M(D)\,x^{m_k}T_1(x)\,e^{\lambda x}=e^{\lambda x}a_0x^s+e^{\lambda x}S_1(x).$$

Распишем первое слагаемое слева, пользуясь формулой (3.54) и учитывая, что $M(\lambda)=M'(\lambda)=\ldots=M^{(m_k-1)}(\lambda)=0$, а $M^{(m_k)}(\lambda)\neq\neq 0$. Получим

$$b_0e^{\lambda x}\left\{\frac{M^{(m_k)}(\lambda)\,(s+m_k)\ldots(s+1)}{m_k!}\,x^s+\right.$$
$$\left.+\frac{M^{(m_k+1)}(\lambda)\,(s+m_k)\ldots s}{(m_k+1)!}\,x^{s-1}+\ldots\right\}+M(D)\,x^{m_k}T_1(x)\,e^{\lambda x}=$$
$$=e^{\lambda x}a_0x^s+e^{\lambda x}S_1(x). \tag{3.66}$$

Система (3.69) называется однородной, если $f_i(x)=0$ $(i=1, \ldots, n)$, в противном случае — неоднородной. Будем предполагать $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ непрерывными на интервале X. Как было доказано выше (см. § 2), при этих условиях на X существует единственное решение системы (3.69), удовлетворяющее начальному условию

$$y_i(x_0)=y_i^0, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{3.70}$$

Для системы уравнений справедливы теоремы, аналогичные тем, которые были доказаны для одного уравнения n-го порядка.

1. Матричная запись. В целях максимального упрощения формы изложения нам будет удобно пользоваться матричной записью. Напомним основные факты матричного исчисления, которые понадобятся для этого.

1°. Матрицей размерности $n \times m$ (или $(n \times m)$-матрицей) называется таблица чисел a_{ik} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ik} называются элементами матрицы.

В настоящем параграфе мы будем использовать квадратные матрицы (иначе $(n \times n)$-матрицы) и так называемые столбцы (или $(n \times 1)$-матрицы)

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \text{ или просто } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать матрицы a, b, c и т. д., а их элементы соответственно a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и т. д.

2°. Матрицы a и b считаются равными, если $a_{ij}=b_{ij}$. Матрица a считается равной нулю, если $a_{ij}=0$.

3°. Над $(n \times m)$-матрицами определены операции сложения и умножения на число.

Суммой матриц a и b называется матрица c (обозначается $c = a+b$) такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Произведением матрицы a на число α называется матрица c (обозначается $c=\alpha a$) такая, что $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

4°. Если a является $(n \times m)$-матрицей, а b является $(m \times p)$-матрицей, то произведением матриц a и b называется матрица c размерности $n \times p$ (обозначается $c=ab$) такая, что

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}.$$

Умножение матриц обладает сочетательным и распределительным свойствами.

Пользуясь правилом умножения 4°, правилом сложения 3° и правилом равенства матриц 2°, нетрудно убедиться в том, что (3.71) и (3.72) то же самое, что и (3.69) и (3.70).

В силу свойств умножения и дифференцирования матриц для дифференцируемых столбцов имеет место тождество (ср. (3.34)), в котором α_i — постоянные числа,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{(i)}\right)' - A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\left(u'_{(i)} - Au_{(i)}\right), \tag{3.73}$$

выражающее свойство линейности оператора $y' - Ay \equiv L[y]$ на множестве дифференцируемых столбцов.

Здесь и в дальнейшем для нумерации столбцов будем употреблять индекс, заключенный в круглые скобки, оставляя индекс без скобок для обозначения элементов (компонент).

Непосредственным следствием этого тождества является принцип суперпозиции.

Теорема 3.16. *Пусть в уравнении* (3.71) $f(x)$ *является линейной комбинацией* $f_{(i)}(x)$, *т. е.*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{(i)}(x),$$

где α_i — *постоянные числа, и пусть* $y_{(i)}(x)$ *является решением уравнения*

$$y'_{(i)} = A(x)\, y_{(i)} + f_{(i)}.$$

Тогда линейная комбинация $y_{(i)}(x)$ *с теми же коэффициентами* α_i, *т. е. столбец* $y(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{(i)}(x)$, *является решением уравнения* (3.71).

Имеют также место теоремы, аналогичные теоремам 3.4—3.6.

3. Однородное уравнение. Рассмотрим более детально однородное уравнение

$$y' = A(x)\, y. \tag{3.74}$$

Пусть имеется n столбцов

$$y_{(i)} = \begin{pmatrix} y_{(i)1} \\ \vdots \\ y_{(i)n} \end{pmatrix}.$$

Составим из этих столбцов матрицу $W(x)$:

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_{(1)1}(x) & \dots & y_{(n)1}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_{(1)n}(x) & \dots & y_{(n)n}(x) \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

Сопоставим уравнению (3.74), правая и левая части которого — столбцы, аналогичное уравнение

$$W' = A(x)\, W, \tag{3.76}$$

Введем в рассмотрение постоянный столбец $C=\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}$. Пользуясь этим столбцом и матрицей $W(x)$, составленной из $y_{(i)}$ по правилу (3.75), можно (3.81) записать в виде

$$WC=0. \tag{3.82}$$

Так как, согласно правилу матричного исчисления, 2° считается $C=0$, если все C_i $(i=1, \ldots, n)$ равны нулю, то определение линейной зависимости и независимости $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ можно сформулировать следующим образом.

Определение. *Будем говорить, что столбцы $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ линейно зависимы на интервале X, если существует постоянный столбец $C\neq 0$ такой, что тождественно на X имеет место* (3.82).

В противном случае, т. е. если (3.82) *справедливо только при $C=0$, будем говорить, что $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ линейно независимы.*

Определение. *Назовем* $\Delta(x)=\operatorname{Det} W(x)$ *определителем Вронского для $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$.*

Теперь можно сформулировать и доказать теоремы, аналогичные теоремам 3.7—3.9 из теории уравнения n-го порядка. Все эти доказательства записываются весьма компактно, если пользоваться введенной матричной записью, которая очень удобна и требует лишь некоторого навыка.

Теорема 3.19. *Если решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ уравнения* (3.74) *линейно зависимы на X, то $\Delta(x)\equiv 0$ на X.*

Доказательство. Имеем $WC=0$, $C\neq 0$. Эта запись является кратким обозначением того факта, что при каждом x величины $C_1, \ldots, C_n$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений с определителем $\Delta(x)$, и так как решение нетривиальное, то $\Delta(x)=0$ при любом $x\in X$, т. е. $\Delta(x)\equiv 0$.

Теорема 3.20. *Если $\Delta(x)=0$ хотя бы для одного $x_0\in X$, то решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ уравнения* (3.74) *линейно зависимы на* Г.

Доказательство. Запишем кратко доказательство этой теоремы, уже не давая дополнительных разъяснений, как в предыдущей. Возьмем $x_0\in X$, и пусть $\Delta(x_0)=0$. Составим уравнение $W(x_0)C=0$ относительно C. В силу $\Delta(x_0)=0$ существует решение $C\neq 0$. Положим $y(x)=W(x)C$. Согласно теореме 3.18 это решение уравнения (3.74), причем $y(x_0)=W(x_0)C=0$, а тогда, в силу теоремы единственности, $y(x)\equiv 0$ и, таким образом, $W(x)C\equiv 0$, что означает линейную зависимость $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$.

Теорема 3.21 (альтернатива). *Определитель Вронского либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ линейно зависимы, либо не обращается в нуль ни в одной точке X, и это означает, что решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ линейно независимы.*

Определение. *Фундаментальной системой решений уравнения* (3.74) *будем называть n линейно независимых решений $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ уравнения* (3.74), *а соответствующую* *решение $y(x)$ уравнения* (3.71) *представимо в виде*

$$y(x)=W(x)C+\bar{y}(x), \tag{3.85}$$

где C — некоторый постоянный столбец.

Доказательство точно такое же, как в случае уравнения n-го порядка, и мы его опускаем.

Построим частное решение $\bar{y}(x)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\bar{y}(x_0)=0$. Будем искать его в виде

$$\bar{y}(x)=W(x)C(x),$$

где $C(x)$ — неизвестный столбец. Это фактически просто замена переменных. Подставляя $\bar{y}(x)$ в (3.71), получим

$$W'C+WC'=AWC+f.$$

Так как W удовлетворяет (3.76), то $W'-AW=0$ и, следовательно, $WC'=f$. Отсюда $C'=W^{-1}f$. А так как $\bar{y}(x_0)=W(x_0)C(x_0)=0$, то $C(x_0)=0$ и, следовательно,

$$C(x)=\int_{x_0}^{x} W^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом,

$$\bar{y}(x)=\int_{x_0}^{x} W(x)W^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi=\int_{x_0}^{x}\mathscr{K}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

и справедлива

Теорема 3.26. *Частное решение $\bar{y}(x)$ уравнения* (3.71), *удовлетворяющее условию $\bar{y}(x_0)=0$, имеет вид*

$$\bar{y}(x)=\int_{x_0}^{x}\mathscr{K}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{3.86}$$

где $\mathscr{K}(x,\xi)$ — импульсная матрица, или матрицант, — решение матричного уравнения (3.76), *удовлетворяющее условию $\mathscr{K}(\xi,\xi)=E$.*

Замечания. 1. Изложенный метод построения частного решения системы линейных уравнений фактически является вариантом метода вариации постоянных, который для одного уравнения использовался в гл. 2 (с. 27—28).

2. В силу принципа суперпозиции решение $y(x)$ задачи (3.71), (3.72) имеет вид

$$y(x)=\mathscr{K}(x,x_0)y^0+\int_{x_0}^{x}\mathscr{K}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{3.87}$$

Заранее известно, что ранг этой системы равен 6 и свободных неизвестных 3.

Записывая определитель этой системы, расположив неизвестные в порядке a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, легко видеть, что правый верхний определитель 6-го порядка отличен от нуля и равен, очевидно, произведению диагональных элементов, т. е. 8, так как справа от главной диагонали — нули. Следовательно, в качестве свободных неизвестных можно взять a_0, b_0, c_0.

Первая группа уравнений (3.97) уже дает выражения для a_1, b_1, c_1 через a_0, b_0, c_0, а подставляя это во вторую группу уравнений (3.97), получим

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0 + c_0), \quad b_2 = a_0 - b_0 + c_0, \quad c_2 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0 + c_0).$$

Третья группа уравнений (3.97) обращается автоматически в тождество.

Подставляя полученные выражения в (3.96) и приводя его к виду (3.94), будем иметь

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left[a_0 \begin{pmatrix} 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ 3x + x^2 \\ x + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} + b_0 \begin{pmatrix} -x - \frac{1}{2}x^2 \\ 1 - x - x^2 \\ -\frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ -x - x^2 \\ 1 - x + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \right] e^{2x}. \tag{3.98}$$

Здесь a_0, b_0, c_0 — произвольные постоянные (можно их обозначить C_1, C_2, C_3, как в (3.94)), векторы $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ усматриваются в правой части (3.98). Таким образом, получено решение системы (3.88) в виде линейной комбинации трех линейно независимых решений $p_i(x)e^{2x}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Чтобы обосновать указанный прием, нужно фактически обосновать два момента: во-первых, то, что в выражении (3.93) число независимых констант C_{kj} равно кратности m корня λ, и, во-вторых, то, что решения вида $p_{ki}(x)e^{\lambda_k x}$ $(i = 1, \ldots, m_k;\ k = 1, \ldots, l)$ действительно образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.88). Для этого потребуется более точное представление о структуре решений, отвечающих каждому корню характеристического уравнения, чем то, которое дается формулой (3.93). Перейдем к получению такого представления. Будем иначе вести нумерацию корней характеристического уравнения или, что то же самое, характеристических чисел матрицы A, а именно будем нумеровать собственные векторы. Тем самым каждое значение λ нумеруется столько раз, сколько линейно независимых собственных векторов ему отвечает. Например, если λ_1 отвечают собственные векторы $\alpha_{(11)}, \alpha_{(12)}, \ldots, \alpha_{(1p_1)}$, а λ_2 — собственные векторы $\alpha_{(21)}$, $\alpha_{(22)}, \ldots, \alpha_{(2p_2)}$ и т. д., то будем говорить, что имеются характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_1+1}, \ldots, \lambda_{p_1+p_2}$ и т. д. (при этом $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p_1}, \lambda_{p_1+1} = \ldots = \lambda_{p_1+p_2}$). Таким образом, имеются $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, каждому из которых отвечает собственный вектор.

Дальнейшие построения основаны на следующей алгебраической теореме.

$$= \exp(\lambda_h x)\left\{e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!}e_{(k1)}\right\} -$$
$$-\left\{e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!}e_{(k1)}\right\}\exp(\lambda_k x) = 0.$$

Итак, каждому λ_k $(k=1, \ldots, s)$ отвечает q_k решений вида (3.100), и, таким образом, всего имеется $q_1+\ldots+q_s=n$ решений:

$$y_{(11)}, \ldots, y_{(1q_1)}, \ldots, y_{(s1)}, \ldots, y_{(sq_s)}. \tag{3.101}$$

Теорема 3.31. *Решения* (3.101) *образуют фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Действительно,

$$y_{(k1)}(0) = e_{(k1)}, \ldots, y_{(kq_k)}(0) = e_{(kq_k)}, \quad k = 1, \ldots, s,$$

а согласно теореме 3.29 столбцы $e_{(k1)}, \ldots, e_{(kq_k)}$ $(k=1, \ldots, s)$ в количестве $q_1+\ldots+q_s=n$ являются линейно независимыми и, следовательно, $\operatorname{Det} W(0) \neq 0$. В силу теоремы 3.19 отсюда следует, что решения (3.101) линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему решений.

Вернемся теперь к прежней нумерации корней характеристического уравнения, когда нумеруются различные по величине λ. Каждому λ может отвечать несколько групп решений вида (3.101) по числу отвечающих этому λ собственных векторов, но общее число решений в этих группах равно кратности m корня λ. Таким образом, действительно, линейная комбинация решений, отвечающих данному λ, имеет вид (3.93), где независимых констант будет m, так как число решений типа (3.101), отвечающих этому λ, есть m. Заметим, что, как видно из (3.100), (3.101), старшая степень многочленов в (3.93), вообще говоря, меньше, чем $m-1$.

При практическом вычислении фундаментальной системы решений можно пользоваться (3.100), предварительно найдя все собственные и присоединенные векторы, но проще поступать, как указано выше, подставляя (3.93) в исходное уравнение (3.88) и выделяя m свободных неизвестных C_{kj}.

§ 8. Построение решения линейного уравнения в виде степенного ряда

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами представляет собой некоторый класс уравнений, для которых фундаментальная система решений может быть выписана эффективным образом.

Как же строится фундаментальная система решений в общем случае уравнения с переменными коэффициентами? Цель настоящего параграфа — дать представление о способе построения фундаментальной системы решений, использующем теорию степенных

Приравниваем теперь коэффициенты при одинаковых степенях x. Имеем

$$\begin{aligned} &x^0) \quad a_2\cdot 2\cdot 1 = 0; && \text{отсюда } a_2 = 0, \\ &x^1) \quad a_3\cdot 3\cdot 2 + a_0 = 0; && \text{отсюда } a_3 = -\frac{a_0}{3\cdot 2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x^{k-2}) \quad a_k\cdot k\cdot (k-1) + a_{k-3} = 0; && \text{отсюда } a_k = -\frac{a_{k-3}}{k(k-1)}. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Из (3.105) видно, что

1) коэффициенты вида a_{3q} выражаются через a_0:

$$a_{3q} = -\frac{1}{3q(3q-1)}a_{3q-3} = \ldots = \frac{(-1)^q}{3q\cdot(3q-1)\ldots 3\cdot 2}a_0,$$

причем само a_0 остается неопределенным,

2) коэффициенты вида a_{3q+1} выражаются через a_1:

$$a_{3q+1} = \frac{(-1)^q}{(3q+1)\cdot 3q\ldots 4\cdot 3}a_1,$$

причем само a_1 остается неопределенным, и, наконец,

3) коэффициенты вида a_{3q+2} выражаются через a_2:

$$a_{3q+2} = \frac{(-1)^q}{(3q+2)\cdot(3q+1)\ldots 5\cdot 4}a_2 = 0,$$

так как $a_2 = 0$.

Положим $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Получим ряд

$$y_1(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{3q}x^{3q} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{3q\cdot(3q-1)\ldots 3\cdot 2}x^{3q}. \tag{3.106}$$

Полагая, напротив, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, получим ряд

$$y_2(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{3q+1}x^{3q+1} = x + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(3q+1)\cdot 3q\ldots 4\cdot 3}x^{3q+1}. \tag{3.107}$$

Теорема 3.32. *Ряды* (3.106) *и* (3.107) *сходятся, и определяемые ими функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (3.102).

Доказательство. Действительно, сходимость рядов (3.106) и (3.107) элементарно устанавливается для любого x, например, по признаку Даламбера *), и, таким образом, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены

*) Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа.— Ч. I.— 4-е изд.— М.: Наука, 1982.

ГЛАВА 4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Постановка краевых задач и их физическое содержание

В предыдущих главах изучение дифференциальных уравнений было в основном посвящено решению начальной задачи, в которой в качестве дополнительных условий задаются начальные условия, определяющие значения неизвестной функции и ее производных при фиксированном значении независимой переменной. Однако, как указывалось в гл. 1, начальные условия не являются единственно возможной формой дополнительных условий, выделяющих определенное частное решение. Во многих случаях в качестве дополнительных условий задаются граничные условия, определяющие значения неизвестной функции и ее производных (или некоторых выражений от них) при нескольких фиксированных значениях независимого переменного. Задачу определения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, будем называть краевой задачей. Исследование общих свойств и методов решения краевых задач и составляет содержание настоящей главы, при этом основное внимание будет уделено изучению краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

К краевым задачам для дифференциальных уравнений сводятся многие математические и физические задачи. Так, рассмотренная в гл. 1 задача определения состояния статического равновесия закрепленного в граничных сечениях упругого стержня с коэффициентом упругости $k(x)$ под действием внешней силы $f(x)$ сводится к краевой задаче

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{4.1}$$

Аналогично для амплитуды $u(x)$ установившихся гармонических колебаний частоты ω получим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] + \omega^2\rho(x)\,u(x) = -f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{4.2}$$

Здесь $\rho(x)$ — плотность стержня. В случае задания величины смещения граничных сечений или задания действующих на граничные сечения внешних сил однородные граничные условия называется условием *первого рода*; если $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2)$ — условием *второго рода*; если α_i и β_i одновременно отличны от нуля — условием *третьего рода*.

Краевые задачи, в которых правая часть уравнения не равна нулю, будем называть *неоднородными* краевыми задачами. Рассмотрению этих задач посвящен § 2 настоящей главы.

Краевые задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями будем называть *однородными* краевыми задачами.

Очевидно, что однородная краевая задача, например задача

$$L[y] = 0, \quad 0 < x < l, \qquad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \tag{4.10}$$

всегда имеет тождественно равное нулю, так называемое *тривиальное* решение $y(x) \equiv 0$. Может оказаться, что других решений задача не имеет. Это означает, что, решая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ начальную задачу для уравнения $L[y] = 0$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = y_1$ (в силу теоремы существования решения начальной задачи — теорема 3.1 — такое решение существует и при $y_1 \neq 0$ не равно тождественно нулю), мы при всевозможных значениях $y_1 \neq 0$ получим функцию $y(x, y_1)$, обладающую тем свойством, что $y(l, y_1) \neq 0$. Аналогичное положение будет и при задании соответствующих начальных условий на правом конце отрезка и построении интегральных кривых справа налево. Например, задача

$$y''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Если же при некотором значении $\bar{y}_1 \neq 0$ построенное указанным способом решение $y(x, \bar{y}_1)$ начальной задачи при $x = l$ удовлетворяет второму граничному условию $y(l, \bar{y}_1) = 0$, то это означает, что данная однородная краевая задача помимо тривиального имеет еще и не равное тождественно нулю решение. Такое решение однородной краевой задачи будем называть *нетривиальным*. Отметим, что в силу линейности задачи в этом случае и функция $Cy(x, \bar{y}_1)$ при любом значении постоянной $C \neq 0$ является нетривиальным решением данной однородной задачи. Например, задача

$$y'' + y = 0, \quad 0 < x < \pi, \qquad y(0) = y(\pi) = 0,$$

как легко проверить, помимо тривиального решения $y(x) \equiv 0$ имеет и нетривиальное решение $y(x) = C \sin x$.

Приведенные рассуждения справедливы и в случае более общих граничных условий (4.9).

Важным случаем однородных краевых задач являются так называемые *задачи на собственные значения*, состоящие в определении значений параметров, входящих в дифференциальное уравнение, при которых существуют нетривиальные решения однородной краевой задачи.

2. В общем случае для уравнения n-го порядка приходится рассматривать краевые задачи с граничными условиями более общего вида

$$P_i(y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0), \quad y(l), \ldots, y^{(n-1)}(l)) = 0, \tag{4.14}$$

где n — порядок уравнения, а $P_i(\cdot)$ — заданные функции от значений решения и его производных в граничных точках. Например, условиям типа (4.14) удовлетворяет задача определения периодических решений, в которой дополнительные условия имеют вид

$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l), \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}(l). \tag{4.15}$$

Отметим важные для дальнейшего свойства решений уравнения (4.8). Пусть $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\,y = f(x) \tag{4.16}$$

и

$$L[z] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz}{dx}\right] - q(x)\,z = g(x). \tag{4.17}$$

Умножая (4.16) на $z(x)$, (4.17) на $y(x)$ и вычитая почленно, получим

$$z(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - y(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz}{dx}\right] = f(x)\,z(x) - g(x)\,y(x). \tag{4.18}$$

Так как

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right] = z\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - y\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz}{dx}\right] + p(x)\left[\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\right],$$

то (4.18) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right] = f(x)\,z(x) - g(x)\,y(x). \tag{4.19}$$

Это соотношение носит название *тождества Лагранжа*. Его интегральная форма называется *формулой Грина*:

$$\int_0^l (zL[y] - yL[z])\,dx = \left\{p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right\}\Big|_0^l = \int_0^l (f(x)\,z(x) - g(x)\,y(x))\,dx. \tag{4.20}$$

Из формулы (4.19) следует, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения $(f(x) \equiv g(x) \equiv 0)$

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\,y = 0, \tag{4.21}$$

Отметим сразу, что, в силу линейности задачи (4.26), из этого предположения следует, что *если решение данной задачи существует, то оно единственно.*

Наша ближайшая цель заключается в доказательстве существования решения задачи (4.26) при сделанных предположениях о коэффициентах и правой части уравнения. При этом доказательство существования решения будет одновременно содержать и алгоритм его конструктивного построения.

Начнем с наводящих соображений. Предположим, что существует решение задачи (4.26) при специальном способе задания правой части уравнения, а именно при функции $f(x)$, отличной от нуля лишь в ε-окрестности некоторой фиксированной точки $x=\xi\in(0, l)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\xi-\varepsilon,\\ f_\varepsilon(x), & \xi-\varepsilon\leqslant x\leqslant\xi+\varepsilon,\\ 0, & x\geqslant\xi+\varepsilon,\end{cases}\tag{4.27}$$

причем функция $f_\varepsilon(x)\geqslant 0$ и

$$\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx=1.\tag{4.28}$$

Решение этой задачи будем обозначать функцией $y_\varepsilon(x, \xi)$.

Интегрируя уравнение (4.26) с так заданной функцией $f(x)$ по отрезку $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$, получим

$$p(\xi+\varepsilon)\,y_\varepsilon'(\xi+\varepsilon, \xi)-p(\xi-\varepsilon)\,y_\varepsilon'(\xi-\varepsilon, \xi)-\\ -\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)\,y_\varepsilon(x, \xi)\,dx=\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx=1.\tag{4.29}$$

Рассмотрим теперь предельный процесс при $\varepsilon\to 0$, предполагая, что (4.29) справедливо при любом ε и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx=1.\tag{4.30}$$

Будем предполагать, что предельная функция

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x, \xi)=G(x, \xi)\tag{4.31}$$

существует и непрерывна на $[0, l]$. Тогда, совершая предельный переход при $\varepsilon\to 0$ в (4.29), получим, что производная $\frac{d}{dx}G(x, \xi)$ в точке $x=\xi$ должна иметь разрыв первого рода, причем разность правого и левого предельного значений этой производной в точке $x=\xi$ определяется выражением

$$\frac{d}{dx}G(x, \xi)\Big|_{x=\xi+0}-\frac{d}{dx}G(x, \xi)\Big|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p(\xi)}.\tag{4.32}$$

где C — произвольная постоянная. В случае сделанного предположения о существовании лишь тривиальных решений однородной краевой задачи построенная таким образом функция $y_1(x)$ не удовлетворяет правому граничному условию

$$\alpha_2 y_1'(l) + \beta_2 y_1(l) \neq 0. \tag{4.37}$$

Аналогичным образом построим функцию $y_2(x)$, являющуюся решением однородного уравнения, удовлетворяющим правому граничному условию

$$\alpha_2 y_2'(l) + \beta_2 y_2(l) = 0. \tag{4.38}$$

Легко видеть, что построенные указанным образом функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Действительно, предполагая линейную зависимость функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, например,

$$y_1(x) = Cy_2(x), \tag{4.39}$$

получим, что $y_1(x)$ удовлетворяет правому граничному условию, что противоречит (4.37). Итак, мы построили два линейно независимых решения однородного уравнения (4.26), каждое из которых удовлетворяет только одному из двух однородных граничных условий.

Будем искать функцию $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2 y_2(x), & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{4.40}$$

Ясно, что при этом функция (4.40) удовлетворяет однородному уравнению (4.26) при $x \neq \xi$ и однородным граничным условиям. Для того чтобы удовлетворить условиям непрерывности функции $G(x, \xi)$ и скачка ее производной (4.32), остается найти постоянные C_1 и C_2 из соотношений

$$C_2 y_2(\xi) - C_1 y_1(\xi) = 0, \quad C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = 1/p(\xi). \tag{4.41}$$

Определитель этой линейной алгебраической системы, представляющий собой определитель Вронского линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, отличен от нуля и в силу (4.22)

$$\Delta(y_1, y_2) = C/p(x),$$

где постоянная C определяется нормировкой решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Отсюда следует, что система (4.41) разрешима единственным образом. Подставив полученные значения C_1 и C_2 в (4.40), получим окончательное выражение функции Грина краевой задачи (4.26):

$$G(x, \xi) = \frac{1}{C} \begin{cases} y_2(\xi)\, y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ y_1(\xi)\, y_2(x), & \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{4.42}$$

выражается формулой

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{4.45}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно непосредственной проверкой убедиться, что функция $y(x)$, заданная формулой (4.45), удовлетворяет всем условиям определения решения краевой задачи (4.26).

Действительно, запишем формулу (4.45) в виде

$$y(x) = \int_0^x G_1(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G_2(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $G_1(x, \xi) = \frac{1}{C} y_1(\xi) y_2(x)$, $G_2(x, \xi) = \frac{1}{C} y_2(\xi) y_1(x)$ являются непрерывными функциями x и ξ вместе с производными до второго порядка, причем условие непрерывности $G(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ можно записать в виде $G_1(\xi, \xi) = G_2(\xi, \xi)$ или

$$G_1(x, x) = G_2(x, x),$$

а условие скачка производной (4.32) — в виде

$$G'_{1x}(x, x) - G'_{2x}(x, x) = 1/p(x).$$

Пользуясь этими соотношениями между G_1 и G_2, получим в результате дифференцирования интегралов по известным правилам *)

$$y'(x) = G_1(x, x) f(x) + \int_0^x G'_{1x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi - G_2(x, x) f(x) +$$

$$+ \int_x^l G'_{2x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = \int_0^x G'_{1x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G'_{2x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$y''(x) = G'_{1x}(x, x) f(x) + \int_0^x G''_{1xx}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi -$$

$$- G'_{2x}(x, x) f(x) + \int_x^l G''_{2xx}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{f(x)}{p(x)} + \int_0^x G''_{1xx}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G''_{2xx}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

---

*) Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа.— Ч. II.— 2-е изд.— М.: Наука, 1980.

Грина. Заметим, что если функция $y(x)$ является решением краевой задачи (4.46), то любая функция $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = y(x) + C\varphi_0(x), \tag{4.50}$$

где C — произвольная постоянная, является решением той же задачи, поскольку функция $\varphi_0(x)$ — решение соответствующей однородной задачи. Поэтому, чтобы определить единственное решение краевой задачи, его надо подчинить дополнительному условию. В качестве такового поставим условие ортогональности искомого решения собственной функции $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l y(x)\,\varphi_0(x)\,dx = 0. \tag{4.51}$$

Покажем, что задача (4.46), (4.51) может иметь только одно решение. Очевидно, что в силу линейности задачи для этого достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Лемма **4.2.** *Однородная задача* (4.47), (4.51) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. По условию все решения однородной задачи (4.47) представимы в виде $y_0(x) = C\varphi_0(x)$. Условие (4.51) дает

$$\int_0^l y_0(x)\,\varphi_0(x)\,dx = C\int_0^l \varphi_0^2(x)\,dx = 0,$$

откуда $C = 0$, и лемма доказана.

Перейдем к построению так называемой *обобщенной функции Грина задачи* (4.46), (4.51). Так как существует нетривиальное решение однородной краевой задачи (4.47), то для построения нужной нам функции Грина ограничиться только решениями однородного уравнения нельзя. Поэтому определим обобщенную функцию Грина $G(x, \xi)$ как решение следующей задачи:

1. $G(x, \xi)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$L_x[G(x, \xi)] = -\varphi_0(\xi)\,\varphi_0(x) \tag{4.52}$$

при $0 < x < \xi$ и $\xi < x < l$.

2. $G(x, \xi)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и искомое решение

$$G(0, \xi) = G(l, \xi) = 0. \tag{4.53}$$

3. $G(x, \xi)$ непрерывна на $[0, l]$.

4. Первая производная $\frac{d}{dx}G(x, \xi)$ имеет разрыв первого рода при $x = \xi$, причем величина скачка равна

$$\frac{d}{dx}G(x, \xi)\Big|_{\xi-0}^{\xi+0} = \frac{1}{p(\xi)}. \tag{4.54}$$

бавив линейно независимое с φ_1 решение однородного уравнения — функцию φ_0, которая, удовлетворяя однородным условиям (4.53), не может их испортить. Поэтому обобщенную функцию Грина будем строить в виде

$$G(x, \xi) = \omega(x) + \begin{cases} C_1\varphi_1(x) + C_3\varphi_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2\varphi_1(x) + C_4\varphi_0(x), & \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{4.62}$$

подбирая постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 так, чтобы удовлетворить всем условиям. Условия (4.53) дают

$$\omega(0) + C_1\varphi_1(0) = 0, \quad \omega(l) + C_2\varphi_1(l) = 0. \tag{4.63}$$

В силу (4.61) отсюда однозначно определяются постоянные C_1 и C_2. Условия непрерывности функции $G(x, \xi)$ и скачка ее производной при $x = \xi$ приводят к уравнениям

$$\begin{gathered} (C_2 - C_1)\varphi_1(\xi) + (C_4 - C_3)\varphi_0(\xi) = 0, \\ (C_2 - C_1)\varphi_1'(\xi) + (C_4 - C_3)\varphi_0'(\xi) = 1/p(\xi). \end{gathered} \tag{4.64}$$

В силу (4.60) эта система однозначно разрешима относительно $C_2 - C_1$ и $C_4 - C_3$:

$$C_2 - C_1 = -\varphi_0(\xi), \quad C_4 - C_3 = \varphi_1(\xi). \tag{4.65}$$

Значения C_2 и C_1 были уже найдены из (4.63). Покажем, что они удовлетворяют (4.65). Применим формулу Грина к функциям $\omega(x)$ и $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l (\varphi_0(x) L[\omega] - \omega(x) L[\varphi_0])\, dx =$$

$$= \{p(x)(\varphi_0(x)\omega'(x) - \omega(x)\varphi_0'(x))\}\Big|_0^l = -\int_0^l \varphi_0(x)\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)\, dx;$$

получим

$$-p(l)\omega(l)\varphi_0'(l) + p(0)\omega(0)\varphi_0'(0) = -\varphi_0(\xi). \tag{4.66}$$

Но в силу (4.60)

$$p(l)\varphi_0'(l) = 1/\varphi_1(l), \quad p(0)\varphi_0'(0) = 1/\varphi_1(0), \tag{4.67}$$

и на основании (4.63) формула (4.66) переходит в выражение $C_2 - C_1 = -\varphi_0(\xi)$, совпадающее с (4.65). Итак, C_1 и C_2 определены однозначно. Выразим C_4 через C_3 из (4.65), получим

$$C_4 = C_3 + \varphi_1(\xi), \tag{4.68}$$

и перепишем (4.62) в виде

$$G(x, \xi) = \omega(x) + C_3\varphi_0(x) + \begin{cases} C_1\varphi_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2\varphi_1(x) + \varphi_1(\xi)\varphi_0(x), & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{4.69}$$

Пример 4.2. Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = f(x), \quad 0 < x < \pi, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Как легко видеть, соответствующая однородная краевая задача имеет нетривиальное решение $\varphi_0(x) = \sqrt{2/\pi}\sin x$ (коэффициент $\sqrt{2/\pi}$ выбран из условия нормировки (4.48)). Поэтому решение неоднородной краевой задачи существует лишь тогда, когда правая часть $f(x)$ удовлетворяет условию ортогональности (4.49)

$$\int\limits_0^\pi f(x)\sin x\,dx = 0,$$

и для того, чтобы это решение представить по формуле (4.57), нужна обобщенная функция Грина.

Перейдем к ее построению. Найдем частное решение $\omega(x)$ уравнения

$$\omega'' + \omega = -\frac{2}{\pi}\sin\xi\sin x.$$

Будем искать его в виде $\omega = Ax\cos x$. Непосредственной подстановкой в уравнение найдем значение постоянной $A = \frac{1}{\pi}\sin\xi$ и получим

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi}(\sin\xi)\,x\cos x.$$

В качестве частного решения однородного уравнения, не удовлетворяющего заданным граничным условиям, выберем функцию $\varphi_1(x) = \cos x$.

Согласно (4.62) обобщенную функцию Грина рассматриваемой задачи следует искать в виде

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\pi}(\sin\xi)x\cos x + \begin{cases} C_1\cos x + C_3\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi,\\ C_2\cos x + C_4\sin x, & \xi \leqslant x \leqslant \pi.\end{cases}$$

Требование удовлетворения граничным условиям $G(0,\xi) = 0$, $G(\pi,\xi) = 0$ дает уравнения для определения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = 0, \qquad -\sin\xi - C_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad C_1 = 0, \qquad C_2 = -\sin\xi.$$

Условия непрерывности функции $G(x,\xi)$ при $x = \xi$ и скачка ее производной в этой точке с учетом найденных значений C_1 и C_2 приводят к уравнениям для постоянных C_3 и C_4:

$$C_3\sin\xi + \sin\xi\cos\xi - C_4\sin\xi = 0,$$

$$\sin^2\xi + C_4\cos\xi - C_3\cos\xi = 1,$$

откуда $C_4 = C_3 + \cos\xi$ и выражение для $G(x,\xi)$ принимает вид

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\pi}(\sin\xi)x\cos x + C_3\sin x + \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \xi,\\ -\sin\xi\cos x + \cos\xi\sin x, & \xi \leqslant x \leqslant \pi.\end{cases}$$

В данном примере обобщенная функция Грина $G(x, \xi)$ имеет физический смысл амплитуды y установившихся колебаний закрепленного на концах упругого стержня при периодическом внешнем воздействии с резонансной частотой, которое представляет собой сумму сосредоточенной силы, приложенной в точке ξ, и силы, распределенной по всему стержню с плотностью $\sin x$ и амплитудой $\frac{2}{\pi}\sin\xi$.

Заметим, наконец, что мы рассматривали идеализированный случай точного выполнения условий ортогональности амплитуды внешнего воздействия амплитуде собственных колебаний. В реальных задачах эти строгие условия, как правило, не выполняются, что может привести к очень большим амплитудам установившихся колебаний при частоте внешнего воздействия, близкой к резонансной, или к несуществованию решения рассматриваемой задачи об установившихся колебаниях. При этом следует иметь в виду, что в случае больших амплитуд рассматриваемая линейная математическая модель, достаточно адекватно описывающая малые колебания, уже не применима и должна быть заменена более сложной нелинейной моделью.

§ 3. Задачи на собственные значения

В § 1 была поставлена задача на собственные значения, заключающаяся в определении тех значений параметра λ, при которых на $[0, l]$ существуют нетривиальные решения однородного уравнения

$$L[y]+\lambda\rho(x)y(x)=0, \tag{4.73}$$

удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$\alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0, \quad \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0. \tag{4.74}$$

Будем считать, что функция $\rho(x)>0$ непрерывна на $[0, l]$, а в отношении коэффициентов, входящих в дифференциальный оператор L, выполнены те же требования, что и в § 2. При этом функция Грина краевой задачи (4.26) существует и является симметричной функцией своих аргументов.

Задачу на собственные значения, т. е. задачу отыскания нетривиальных решений однородного уравнения (4.73), удовлетворяющих однородным граничным условиям (4.74), часто называют *задачей Штурма — Лиувилля*, а сами нетривиальные решения — собственными функциями этой задачи.

Собственные функции задачи Штурма — Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые широко используются не только при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и при решении краевых задач для уравнений в частных производных, а также для решения многих других математических проблем. Большинство этих свойств можно проще всего доказать путем сведения краевой задачи (4.73), (4.74) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Однако изучение интегральных уравнений выходит за прена функцию $y_n(x)$ и проинтегрируем результат по $[0, l]$. Получим

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] y_n(x)\,dx - \int_0^l q(x)\,y_n^2(x)\,dx + \lambda_n \int_0^l \rho(x)\,y_n^2(x)\,dx = 0. \tag{4.78}$$

Преобразуя первый интеграл по частям, в силу граничных условий окончательно получим

$$\lambda_n \int_0^l \rho(x)\,y_n^2(x)\,dx = \int_0^l p(x)\left[\frac{dy_n}{dx}\right]^2 dx + \int_0^l q(x)\,y_n^2(x)\,dx, \tag{4.79}$$

что и доказывает утверждение.

4. *Собственные функции $y_n(x)$ образуют на $[0, l]$ ортогональную с весом $\rho(x)$ систему $\{y_n(x)\}$:*

$$\int_0^l y_n(x)\,y_m(x)\,\rho(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m. \tag{4.80}$$

Действительно, так как каждому собственному значению отвечает только одна собственная функция, то остается рассмотреть случай, когда собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ соответствуют различным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Запишем для этих собственных функций уравнения

$$L[y_n] + \lambda_n \rho(x)\,y_n = 0, \qquad L[y_m] + \lambda_m \rho(x)\,y_m = 0 \tag{4.81}$$

и, применив формулу Грина, получим

$$\begin{aligned}\int_0^l \{y_n(x)\,L[y_m] - y_m(x)\,L[y_n]\}\,dx &= \\ = (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l y_n(x)\,y_m(x)\,\rho(x)\,dx &= \\ = \left[p(x)\left(y_n(x)\,y_m'(x) - y_m(x)\,y_n'(x)\right)\right]\Big|_0^l&.\end{aligned} \tag{4.82}$$

Полученное выражение, очевидно, обращается в нуль, так как обе собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют однородным граничным условиям (4.74). Так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, то отсюда и следует наше утверждение.

5. ***Теорема разложимости В. А. Стеклова.*** *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, l]$ и удовлетворяет однородным граничным условиям (4.74), то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0, l]$ ряд по собственным функциям $y_n(x)$ задачи (4.73), (4.74)*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x). \tag{4.83}$$

циями уравнения (4.87). Из установленной эквивалентности следует, что краевая задача (4.73), (4.74) и интегральное уравнение (4.87) имеют одни и те же собственные значения и собственные функции.

Так как функция Грина $G(x, \xi)$ является симметричной функцией своих аргументов, ядро $-G(x, \xi)\rho(\xi)$ интегрального уравнения (4.87), вообще говоря, несимметрично. Однако это уравнение легко свести к интегральному уравнению с симметричным ядром. Действительно, умножив (4.87) на $\sqrt{\rho(x)}$ и обозначив $v(x) = \sqrt{\rho(x)}\,y(x)$, получим интегральное уравнение

$$v(x) = \lambda \int_0^l \mathscr{K}(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi \tag{4.88}$$

с симметричным ядром

$$\mathscr{K}(x, \xi) = -G(x, \xi)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}. \tag{4.89}$$

Очевидно, краевая задача (4.73), (4.74) и интегральное уравнение (4.88) имеют общие собственные значения λ_n, а соответствующие этим собственным значениям собственные функции $y_n(x)$ краевой задачи (4.73), (4.74) и собственные функции $v_n(x)$ интегрального уравнения (4.88) связаны соотношением

$$y_n(x) = v_n(x)/\sqrt{\rho(x)}. \tag{4.90}$$

Тем самым известные из теории интегральных уравнений свойства собственных значений и собственных функций интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром дают возможность сделать заключение о свойствах собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля.

ных x (понятие фазового пространства было введено в гл. 1). Наглядное изображение здесь можно дать для случая $n=2$ (рис. 9). Тривиальное решение в фазовом пространстве изображается точкой — началом координат. Неравенство (5.8) в двумерном случае означает, что фазовая траектория при $t>0$ лежит в круге радиуса ε с центром в начале координат, а неравенство (5.9) — что начальная точка траектории лежит в круге радиуса $\delta(\varepsilon)$, т. е. траектория, начинающаяся в δ-окрестности начала координат, не выйдет из ε-окрестности начала координат при всех $t>0$; в случае асимптотической устойчивости траектория при $t\to\infty$ бесконечно приближается к началу координат.

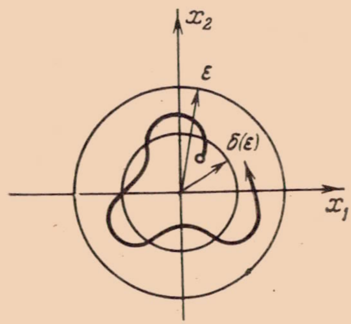

Рис. 9

З а м е ч а н и е. Вместо того чтобы говорить об устойчивости тривиального решения, часто говорят об устойчивости точки $(0, \ldots, 0)$ фазового пространства.

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{5.11}$$

где A — постоянная (2×2)-матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Система (5.11) имеет тривиальное решение $x=0$. Будем исследовать его на устойчивость. Поскольку решение системы (5.11), удовлетворяющее произвольным начальным условиям, выписывается явно, то устойчивость или неустойчивость тривиального решения можно установить непосредственно. В общем случае этого сделать нельзя. Однако результаты, которые мы получим для (5.11), подскажут направление исследования общего случая.

Получим сначала некоторые вспомогательные неравенства.

Согласно изложенному в §§ 6 и 7 гл. 3 решение $x(t, x_0)$ системы (5.11), принимающее начальное значение x_0, представимо в виде

$$x(t, x_0) = \mathscr{K}(t, 0)\, x_0, \tag{5.12}$$

где $\mathscr{K}(t, 0) = W(t)\, W^{-1}(0)$; $W(t)$ — фундаментальная матрица, имеющая в качестве столбцов два линейно независимых решения:

$$x_{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{(1)1} \\ \alpha_{(1)2} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{(2)1} \\ \alpha_{(2)2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}. \tag{5.13}$$

Здесь λ_1, λ_2 — характеристические числа матрицы A (корни харак-

$\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ справедливо $\|x\| < \varepsilon$. Дальнейшие рассуждения будут несколько различаться в зависимости от того, являются λ_i действительными или комплексно сопряженными. При действительных λ_i достаточно рассмотреть решение $x = Cx_{(1)}$. При достаточно малом $|C|$, очевидно, $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, но неравенство $\|x\| < \varepsilon$ не может быть выполнено при всех $t > 0$, так как $e^{p_1 t} \to \infty$ при $t \to \infty$. Если же λ_i комплексные, то $p_1 = p_2 = p$, $\lambda_1 = p + iq$ и рассмотрим решение $x = C \operatorname{Re} x_{(1)}$. При достаточно малом $|C|$ по-прежнему $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Возьмем одну из компонент этого решения, отличную от тождественного нуля, например $x_1 = C\beta_1(t) e^{pt}$, где $\beta_1(t)$ — некоторая вполне определенная линейная комбинация $\cos qt$ и $\sin qt$. Очевидно, x_1 не является ограниченным при $t \to \infty$, и поэтому неравенство $\|x\| < \varepsilon$ также не может быть выполненным при всех $t > 0$.

3. Осталось рассмотреть случай, когда $p_1 = 0$, $p_2 < 0$ или $p_1 = p_2 = 0$. Последнее означает, что λ_1 и λ_2 либо чисто мнимые, либо равные нулю и кратные. В случае $p_1 = 0$, $p_2 < 0$ или чисто мнимых λ_j в формуле (5.17) $p = 0$, $C_2 = 0$, так что $\|x(t, x_0)\| \leqslant C_1 \|x_0\|$ и решение устойчиво по тем же причинам, что и в 1. Асимптотической устойчивости здесь, однако, уже не будет, так как, очевидно, найдутся решения, не стремящиеся к нулю при $t \to \infty$. В случае $p_1 = 0$, $p_2 < 0$ таким решением будет, например, решение вида $x = Cx_{(1)}$, для которого при достаточно малом $|C|$ величина $\|x_0\|$ как угодно мала, однако $\|x\| = \mathrm{const} \not\to 0$ при $t \to \infty$. При чисто мнимых λ_i, очевидно, $x = C \operatorname{Re} x_{(1)} \not\to 0$ при $t \to \infty$.

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то $e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_2 t} = 1$, а $\alpha_{(j)i}$ — линейные функции t, и поэтому неравенство $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ не может выполняться для всех $t > 0$, за исключением того случая, когда все $\alpha_{(j)i}$ вырождаются в многочлены нулевой степени. Но этот случай реализуется лишь при $a_{ik} = 0$, и решение тогда имеет вид $x_1 = x_{01}$, $x_2 = x_{02}$ и, очевидно, является устойчивым, но не асимптотически.

Замечание. Нетрудно видеть, что проведенный анализ в значительной мере остается справедливым и для n-мерного случая. Так сохраняется оценка (5.15) для $\mathscr{K}_{ij}$, неравенство (5.16), в котором изменится только то, что вместо коэффициента 2 появится некоторая величина, зависящая от n. Останется справедливым неравенство (5.18). Нетрудно видеть также, что рассуждения, приведенные в 1, 2, фактически без изменений переносятся на n-мерный случай.

Подводя итоги, можно сделать вывод, что *тривиальное решение однородной системы нелинейных уравнений устойчиво и притом асимптотически, если* $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ *для всех* i, *и неустойчиво, если* $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ *хотя бы для одного* i.

При наличии характеристических чисел с равной нулю действительной частью ситуация является более сложной. Дополнительный анализ показывает, что если характеристические числа с равными ходной системы (5.19). Как будет видно ниже, это предположение оправдывается. Однако, прежде чем формулировать соответствующую теорему, докажем лемму, содержащую некоторые вспомогательные неравенства, которые потребуются при доказательстве теоремы. В дальнейшем, как это нередко делается, все встречающиеся положительные постоянные, величина которых не играет существенной роли, будем обозначать одной и той же буквой C (так, в (5.17) можно было бы написать $\|x(t, x_0)\| \leqslant (C + Ct)e^{pt}\|x_0\|$ и т. д.).

Лемма 5.1. *Имеют место следующие утверждения:*

1°. *Пусть y является вектором с компонентами*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k,$$

где $|a_{ik}(t)| < a(t)$. Тогда

$$\|y\| < Ca(t)\|x\|.$$

2°. *Пусть y является вектором с компонентами*

$$y_i = \sum_{j,l=1}^{n} a_{ijl}(t)\, x_j x_l,$$

где $|a_{ijl}(t)| < a(t)$. Тогда

$$\|y\| < Ca(t)\|x\|^2.$$

3°. *Для любой пары векторов x и y справедливо неравенство*

$$\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|).$$

4°. *Для любого вектора y справедливо неравенство*

$$\left\| \int_0^t y\, d\xi \right\| \leqslant C \int_0^t \|y\|\, d\xi.$$

5°. *Для матрицанта $\mathscr{K}(t, \xi)$ линейной системы* (5.22) *справедливо неравенство*

$$|\mathscr{K}_{ij}(t, \xi)| = |\mathscr{K}_{ij}(t - \xi, 0)| < Ce^{(p+\gamma)(t-\xi)}, \tag{5.23}$$

где $p = \max\limits_{i=1,\dots,n} (\operatorname{Re}\lambda_i)$, *$\gamma$ — положительная постоянная.*

Доказательство. 1°. Утверждение было доказано для двумерного случая (см. (5.16)). Для произвольного n, как было уже отмечено в предыдущем параграфе, доказательство проводится подобным же образом.

2°. Утверждение доказывается при помощи аналогичных соображений, поэтому доказательство опускаем.

уравнению (см. (3.87))

$$x = \mathscr{K}(t, 0)\, x_0 + \int_0^t \mathscr{K}(t, \xi)\, R_{(2)}(\xi)\, d\xi. \tag{5.25}$$

Рассмотрим некоторую окрестность Ω точки $x = 0$ фазового пространства. Пусть для определенности Ω задается равенством $\|x\| \leqslant K$, где K — некоторая постоянная. Согласно лемме 5.1 в области Ω для $R_{(2)}$ справедлива оценка $\|R_{(2)}\| < C\|x\|^2$ и от (5.25) можно перейти к неравенству

$$\|x\| \leqslant Ce^{-\alpha t}\|x_0\| + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}\|x\|^2 d\xi, \tag{5.26}$$

где $-\alpha = p + \gamma$. Так как в рассматриваемом случае $p < 0$, то при достаточно малом γ имеем $\alpha > 0$.

Рассмотрим теперь вспомогательную скалярную задачу

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha z + Cz^2, \quad z(0) = z_0 > C\|x_0\|. \tag{5.27}$$

Это уравнение элементарно интегрируется (как уравнение с разделяющимися переменными или как уравнение Бернулли), и решение имеет вид

$$z = \frac{\alpha z_0}{Cz_0 + (\alpha - Cz_0)\, e^{\alpha t}}.$$

Это решение, как нетрудно видеть, обладает следующими свойствами:

1) $z > 0$ при $t \geqslant 0$, если z_0 достаточно мало: $z_0 < \alpha/C$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ имеем $z < \dfrac{\alpha z_0}{Cz_0 + \alpha - Cz_0} = z_0$ и, следовательно, $z < \varepsilon$, если $z_0 < \varepsilon$;

3) $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Напишем теперь для $z(t)$ интегральное уравнение по типу (5.25):

$$z = z_0 e^{-\alpha t} + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} z^2 d\xi \tag{5.28}$$

и сравним $\|x\|$ и z. Убедимся, что при $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|x\| < z. \tag{5.29}$$

В самом деле, при $t = 0$ неравенство (5.29) справедливо, так как, полагая в (5.26) $t = 0$, получим $\|x_0\| < z_0$. Предположим, что при некотором значении $t = t_1$ неравенство (5.29) перестает выполняться и имеет место $\|x(t_1)\| = z(t_1)$. Из свойства 2) функции $z(t)$ следует, что при достаточно малом z_0 имеем $\|z\| \leqslant K$ для $t \geqslant 0$.

А. М. Ляпуновым был предложен также и другой метод. В этом методе заданной системе уравнений сопоставляется некоторая функция от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, называемая функцией Ляпунова, и по ее свойствам можно делать вывод об устойчивости решения.

Проиллюстрируем идею метода на простейшем примере

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 = f_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 = f_2. \tag{5.30}$$

По предыдущему мы знаем, что тривиальное решение этой системы устойчиво, так как $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$. Однако, для того чтобы убедиться в устойчивости тривиального решения, можно рассуждать и по-другому. Рассмотрим функцию $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$. Эта функция положительна всюду, кроме точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, где она обращается в нуль. В пространстве переменных x_1, x_2, V уравнение $V = 2x_1^2 + x_2^2$ определяет параболоид с вершиной в начале координат. Линии уровня этой поверхности на плоскости (x_1, x_2) представляют собой эллипсы. Зададим произвольно малое ε. Построим на плоскости (x_1, x_2) круг ω_ε радиуса ε. Возьмем одну из линий уровня — эллипс, целиком лежащий внутри круга ω_ε. Построим другой круг ω_δ, целиком лежащий внутри эллипса (рис. 10). Пусть начальная точка $A(x_{1,0}, x_{2,0})$ лежит внутри ω_δ.

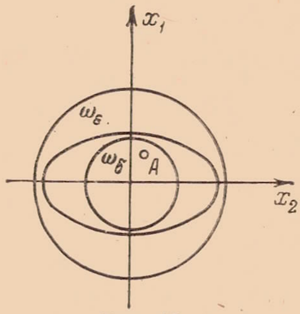

Рис. 10

Рассмотрим функцию двух переменных $W(x_1, x_2) = (\operatorname{grad} V, f)$. Легко видеть, что если вместо x_1, x_2 подставить решение $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (5.30), то полученная таким образом функция от t будет представлять собой полную производную $\frac{dV}{dt}$ от $V(x_1(t), x_2(t))$ вдоль траектории решения системы (5.30). Если эта производная вдоль любой траектории, начинающейся в ω_δ, неположительна, то это будет означать, что такая траектория не сможет покинуть ω_ε, так как иначе между $t = 0$ и значением $t = t_1$, при котором она попадает на границу ω_ε, найдется значение $t = t^*$, для которого $\frac{dV}{dt} > 0$, поскольку $V(x_1(t_1), x_2(t_1)) > V(x_{1,0}, x_{2,0})$. То, что ни одна траектория, начинающаяся в ω_δ, не покидает ни при одном $t > 0$ круг ω_ε, означает устойчивость тривиального решения.

Итак, мы должны проверить знак $\frac{dV}{dt}$ вдоль траектории. Для этого надо знать саму траекторию. Хотя в данном примере это можно сделать, но метод должен быть рассчитан на систему общего вида, для которой $x_1(t)$, $x_2(t)$ нельзя выписать явно и тем самым проверить нужное неравенство. Поэтому мы будем требовать, чтобы снова обозначим $x_{(n)}$), имеющую предел $\bar{x}$; при этом

$$\varepsilon_1 \leqslant \|\bar{x}\| \leqslant K. \tag{5.33}$$

В силу непрерывности $V(x)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} V(x_{(n)}) = V(\bar{x})$. Но из неравенства (5.32) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} V(x_{(n)}) = 0$. Таким образом, $V(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$, что противоречит (5.33).

б) Пусть при выполнении неравенства $V(x) \geqslant \varepsilon_2$ ни для какого ε_1 неравенство $\|x\| \geqslant \varepsilon_1$ не выполнено. Тогда для любого $\varepsilon_{(1)1}$ существует $x_{(1)}$, удовлетворяющее неравенству $\|x_{(1)}\| < \varepsilon_{(1)1}$, в то время как $V(x_{(1)}) \geqslant \varepsilon_2$. Возьмем последовательность $\varepsilon_{(n)1} \to 0$. Ей будет отвечать последовательность точек $x_{(n)}$ такая, что $V(x_{(n)}) \geqslant \varepsilon_2$, а $\|x_{(n)}\| \leqslant \varepsilon_{(n)1} \to 0$. Но последнее означает, что $x_{(n)} \to 0$. Поэтому, в силу непрерывности $V(x)$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} V(x_{(n)}) = V(0) = 0$. Но с другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} V(x_{(n)}) \geqslant \varepsilon_2$, т. е. $0 \geqslant \varepsilon_2$ (противоречие).

***Теорема 5.2** (об устойчивости). Пусть в Ω существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка положительно определенная функция $V(x)$ такая, что функция*

$$W(x, t) = (\operatorname{grad} V, f(t, x))$$

удовлетворяет неравенству

$$W(x, t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad t > 0,\ x \in \Omega. \tag{5.34}$$

Тогда тривиальное решение системы (5.31) *устойчиво.*

Доказательство. Зададим любое $\varepsilon > 0$. Лемма 5.2 обеспечивает (положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$) существование $\varepsilon_2(\varepsilon)$ такого, что для $\|x\| \geqslant \varepsilon$ имеем $V(x) \geqslant \varepsilon_2$. Далее, в силу непрерывности $V(x)$ (при $x = 0$) существует $\delta_1(\varepsilon_2) = \delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|x\| < \delta$ имеем $V(x) \leqslant \varepsilon_2/2$.

Возьмем начальную точку $x(0) = x_0$ в δ-сфере ω_δ фазового пространства переменных x (рис. 11 наглядно иллюстрирует ситуацию на двумерном случае), т. е. пусть $\|x(0)\| < \delta$. Тогда $V(x(0)) \leqslant \varepsilon_2/2$. Нужно доказать, что траектория останется для всех $t > 0$ в ε-сфере ω_ε (см. (5.8)).

Предположим противное, т. е. что траектория при некотором $t = t_1$ покинет ω_ε (оставаясь в Ω). Тогда $V(x(t_1)) \geqslant \varepsilon_2$. Имеем, таким образом,

$$V(x(t_1)) - V(x(0)) \geqslant \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \tag{5.35}$$

Но с другой стороны,

$$V(x(t_1)) - V(x(0)) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t^*} t_1 = \left(\operatorname{grad} V, \frac{dx}{dt}\right)_{t=t^*} t_1 =$$

$$= (\operatorname{grad} V, \ f(t^*, x(t^*)))t_1 = W(x(t^*), t^*)\, t_1 \leqslant 0 \quad (0 \leqslant t^* \leqslant t_1), \tag{5.36}$$

Возьмем $V(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2$. Тогда $W(x, t) = -6x_1^4 \sin^2 t - 4x_2^6 \leqslant 0$. Следовательно, по теореме 5.2 тривиальное решение устойчиво. Теорема 5.1 здесь ответа не дает, так как характеристические числа матрицы первого приближения являются чисто мнимыми.

Можно использовать аналогичные идеи для доказательства неустойчивости тривиального решения системы (5.31). Такого рода теоремы впервые были предложены Н. Г. Четаевым. Мы приведем здесь простейший вариант теоремы о неустойчивости.

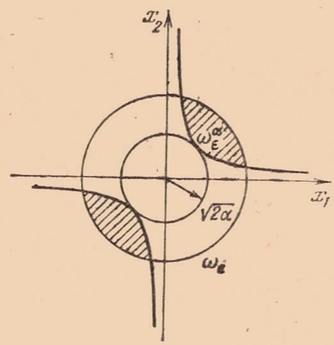

Рис. 12

***Теорема 5.4** (о неустойчивости). Пусть в Ω существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка функция $V(x)$ такая, что*

а) *в любой δ-окрестности ω_δ начала координат существует точка x, в которой $V(x) > 0$ (и, следовательно, область, в которой $V(x) > \alpha$, где $\alpha > 0$ — некоторое число),*

б) *для любого $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что из условия $x \in \omega_\varepsilon$ (ω_ε — некоторая ε-окрестность начала координат), $V(x) \geqslant \alpha$ следует неравенство $W(x, t) = (\operatorname{grad} V, f(t, x)) \geqslant \beta$, справедливое при всех $t \geqslant 0$.*

Тогда тривиальное решение системы (5.31) неустойчиво.

Доказательству теоремы предпошлем пример. Рассмотрим систему вида

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2^4, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_2 x_1^2.$$

Возьмем $V(x) = x_1 x_2$. Очевидно, в любой ω_δ существует точка (лежащая, например, в первом квадранте), где $V = x_1 x_2 > 0$. Пусть начальная точка такова, что $x_1^0 x_2^0 = \alpha > 0$. На рис. 12 заштрихована часть $\omega_\varepsilon^\alpha$ круга ω_ε, выделяемая гиперболой $x_1 x_2 = \alpha$, в которой $V \geqslant \alpha$. Очевидно, в $\omega_\varepsilon^\alpha$ справедливо неравенство $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2\alpha$, т. е. $\|x\| \geqslant \sqrt{2\alpha}$. Тогда, в силу леммы 5.2, существует $\gamma > 0$ такое, что $x_2^4 + x_1^2 \geqslant \gamma$ и, следовательно, $W(x, t) \geqslant \alpha\gamma = \beta$. По теореме 5.4 можно тем самым заключить о неустойчивости тривиального решения. Теорема 5.1 (см. замечание) в этом случае не работает, так как все элементы матрицы первого приближения равны нулю.

Доказательство теоремы 5.4 проведем от противного. Предположим, что тривиальное решение устойчиво. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant 0$, если $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$. Так как по условию а) теоремы 5.4 в ω_δ найдется точка x_0 такая, что $V(x_0) > \alpha$, возьмем ее за начальную: $x(0) = x_0$. Убедимся, что при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $V(x(t)) > \alpha$.

мой уравнений с постоянными коэффициентами (5.11):

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

Эта система обладает тривиальным решением $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. С кинематической точки зрения это состояние покоя, поэтому отвечающая этому решению точка (0, 0) фазовой плоскости называется *точкой покоя*.

Заметим, что фазовую траекторию системы (5.39) можно рассматривать как интегральную кривую уравнения

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}. \tag{5.40}$$

В точке (0, 0) правая часть уравнения (5.40) разрывна, т. е. нарушено условие теоремы существования и единственности. Точка (0, 0) является согласно терминологии гл. 2 особой точкой. Поэтому априори через точку (0, 0) может не проходить ни одной интегральной кривой уравнения (5.40), а также может проходить более одной и даже бесконечно много интегральных кривых.

Как будет показано, расположение траекторий в окрестности точки (0, 0) определяется, как и свойство ее устойчивости или неустойчивости, характеристическими числами матрицы A.

Рассмотрим разные случаи.

а) Пусть характеристические числа λ_1 и λ_2 действительны, различны и одного знака. Положим для определенности, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. В этом случае решение системы (5.39) имеет вид (см. § 7 гл. 3)

$$x = C_1\alpha_{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_{(2)}e^{\lambda_2 t}, \tag{5.41}$$

где $\alpha_{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{(i)1} \\ \alpha_{(i)2} \end{pmatrix}$ — некоторые постоянные столбцы — собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным значениям λ_i ($i = 1, 2$). Точка (0, 0) является согласно теореме 5.1 асимптотически устойчивой, и $x \to 0$ при $t \to \infty$. Исследуем характер приближения более подробно. Имеем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1\lambda_1\alpha_{(1)2}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_{(2)2}e^{\lambda_2 t}}{C_1\lambda_1\alpha_{(1)1}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_{(2)1}e^{\lambda_2 t}}.$$

Отсюда видно, что если $C_1 \neq 0$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha_{(1)2}}{\alpha_{(1)1}},$$

т. е. все интегральные траектории, кроме одной, отвечающей $C_1 = 0$, входят в (0, 0) с общей касательной, уравнение которой $\varkappa = x_2 = \frac{\alpha_{(1)2}}{\alpha_{(1)1}}x_1$ (обозначим ее I). Заметим, что прямая I сама является

Точка покоя, отвечающая случаю действительных характеристических чисел противоположного знака, называется *седлом. Седло является неустойчивой точкой покоя.*

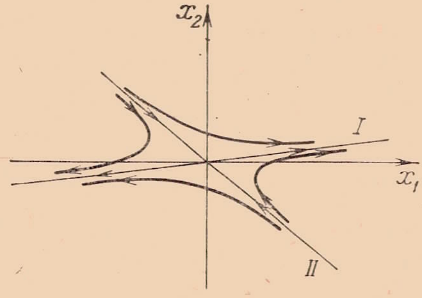

Рис. 14

Траектории *I* и *II*, проходящие через седло, называются *сепаратрисами.*

в) Пусть характеристические числа матрицы A — комплексные. В силу действительности A они будут комплексно сопряженными, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2^* = \lambda$. Соответствующие компоненты собственных векторов $\alpha_{(i)}$ будут также комплексно сопряженными, а так как мы рассматриваем действительные решения, то и произвольные постоянные должны быть комплексно сопряженными. Таким образом,

$$x_1 = C\alpha_1 e^{\lambda t} + C^*\alpha_1^* e^{\lambda^* t}, \quad x_2 = C\alpha_2 e^{\lambda t} + C^*\alpha_2^* e^{\lambda^* t}. \tag{5.42}$$

Подставляя сюда $\lambda = p + iq$, можно преобразовать эти выражения к виду

$$x_1 = e^{pt}(2\alpha\cos qt - 2\beta\sin qt), \quad x_2 = e^{pt}(2\gamma\cos qt - 2\delta\sin qt), \tag{5.43}$$

где $\alpha = \operatorname{Re}(C\alpha_1)$, $\beta = \operatorname{Im}(C\alpha_1)$, $\gamma = \operatorname{Re}(C\alpha_2)$, $\delta = \operatorname{Im}(C\alpha_2)$. Отсюда имеем

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 = e^{2pt}[(2\alpha\cos qt - 2\beta\sin qt)^2 + (2\gamma\cos qt - 2\delta\sin qt)^2].$$

Если $p = 0$ (характеристические числа — чисто мнимые), то x_1, x_2 и ρ являются периодическими функциями t периода $2\pi/q$. Это значит, что каждому C на фазовой плоскости отвечает некоторая замкнутая кривая. Эти кривые не пересекаются, так как всюду, кроме точки (0, 0), для (5.40) справедлива теорема единственности (рис. 15).

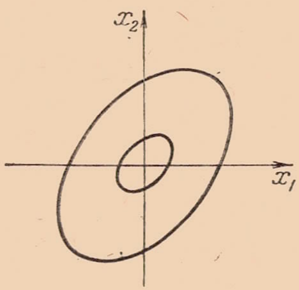

Рис. 15

Более детальное исследование показывает, что замкнутые кривые, о которых идет речь, являются эллипсами. В самом деле, определитель

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & -2\beta \\ 2\gamma & -2\delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

в противном случае существовало бы решение вида $x_1 = ax_2$ (a вещественное). Так как x_1 и x_2 выражаются по формулам (5.42), то из равенства $x_1 = ax_2$ в силу линейной независимости $e^{\lambda t}$ и $e^{\lambda^* t}$

сти изображается точкой. Точки фазовой плоскости, отвечающие решениям вида $x_i = \bar{x}_i = \mathrm{const}$, называются *точками покоя*. Соответствующей заменой переменных каждую точку покоя можно перевести в начало координат. Тогда, если f_i представима в виде (5.20), то система первого приближения (5.22) совпадает с (5.39).

Согласно теореме 5.1 в случае $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ устойчивость или неустойчивость точки (0, 0) системы (5.19) обеспечивается теми же самыми требованиями на λ, которые обеспечивают устойчивость или неустойчивость точки (0, 0) для системы первого приближения (5.22), т. е. члены $R_{(2)i}$ не влияют на устойчивость или неустойчивость точки (0, 0). Что касается расположения траекторий, то точное исследование*) показывает, что при наличии узла, седла или фокуса у системы (5.22) (во всех этих случаях $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$) качественный характер расположения траекторий системы (5.19) в достаточно малой окрестности точки (0, 0) будет тем же самым. Если же в точке (0, 0) система (5.22) имеет центр, то без дополнительного исследования членов $R_{(2)i}$ о характере расположения траекторий системы (5.19) ничего сказать нельзя.

2. Исследование расположения траекторий в окрестности точек покоя дает некоторую информацию относительно расположения фазовых траекторий на всей плоскости, но, конечно, полного решения этой сложной глобальной задачи не дает.

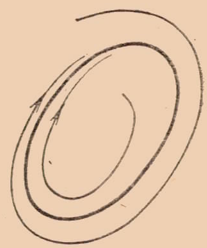

Рис. 17

Для изучения картины на фазовой плоскости, или, как иногда говорят, фазового портрета системы (5.19), важно исследовать не только точки покоя. Нередко встречаются замкнутые траектории (замкнутая траектория означает периодическое движение), обладающие тем свойством, что в окрестности таких траекторий нет других замкнутых траекторий, а все траектории как бы «наматываются» на эту единственную замкнутую траекторию, которая получила название *предельного цикла*, или, наоборот, «сматываются» с нее. Предельные циклы, таким образом могут быть устойчивыми и неустойчивыми (на рис. 17 изображен устойчивый предельный цикл). Исследование предельных циклов важно также с точки зрения существования устойчивых периодических режимов в физических системах.

Например, система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right) - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right) + x_1 \tag{5.44}$$

имеет точку покоя $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и предельный цикл $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. В существовании такого цикла легко убедиться, перейдя к полярным

*) См., например, Л. С. Понтрягин «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (5-е изд.— М.: Наука, 1983), § 30.

ГЛАВА 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При практическом решении задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, не удается получить решение в квадратурах, выраженное через элементарные или специальные функции (определенное исключение составляют линейные уравнения, рассмотренные в гл. 3). В то же время интенсивное применение дифференциальных уравнений в качестве математических моделей широкого круга естественно-научных задач требует разработки методов их исследования, позволяющих получить с достаточной точностью числовые характеристики рассматриваемой задачи. Наиболее эффективными здесь оказываются численные методы. Благодаря бурному развитию электронной вычислительной техники численные методы находят широкое применение в различных областях математики и ее приложениях, в частности, и при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. За последнее время появилось достаточно большое количество учебных пособий, посвященных этой проблеме *). В настоящей главе будут изложены лишь простейшие вопросы, относящиеся к численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 1. Разностные методы решения начальной задачи

1. Разностная схема. Понятие сходимости. Наиболее распространенными и эффективными численными методами решения многих математических задач и, в частности, начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений являются так называемые разностные методы, в основе которых лежит рассмотрение конечноразностной задачи вместо исходной дифференциальной задачи. Последняя представляет собой задачу относительно большого, но конечного числа неизвестных, являющихся значениями функции дискретного аргумента, определенной в точках разбиения отрезка интегрирования. Если значения этой функции близки к значениям точного решения исходной задачи в соответствующих точках, то

---

*) См., например, А. А. Самарский «Введение в численные методы» (М.: Наука, 1982); Г. И. Марчук «Методы вычислительной математики» (М.: Наука, 1977); Н. С. Бахвалов «Численные методы» (М.: Наука, 1975) и др.

Пусть дифференциальная задача имеет вид

$$Ly = \varphi(x). \tag{6.2}$$

Здесь символом L будем обозначать не только задание уравнения, но и задание дополнительных, например, начальных или краевых условий, записанное в определенном порядке. Через $\varphi(x)$ обозначены как правая часть уравнения, так и правые части дополнительных условий, записанные в соответствующем порядке. Так, задача (6.1) может быть записана в виде

$$Ly = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dx} y - f(x, y) \\ y(x_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \varphi(x). \tag{6.3}$$

Соответствующую разностную задачу будем записывать в виде

$$L_h u_h = \varphi_h, \tag{6.4}$$

где через L_h обозначается задание разностного уравнения и отвечающих ему дополнительных условий, а через φ_h — *входные данные* задачи, т. е. значения сеточной функции f_h — правой части разностного уравнения,— в совокупности с правыми частями дополнительных условий.

Задача определения сеточных функций u_h должна быть поставлена так, чтобы при стремлении шага h сетки к нулю сеточные функции сходились в определенном смысле к точному решению исходной задачи (6.3).

Для определения сходимости семейства сеточных функций к решению исходной задачи в пространстве $\{v_h\}$ сеточных функций необходимо задать расстояние между отдельными функциями как норму их разности. Понятие нормы в пространстве сеточных функций можно ввести по-разному. Чаще всего используется так называемая *равномерная* или *чебышёвская норма*, определяемая выражением

$$\|v_h\| = \max_i |v_i|, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.5}$$

В ряде случаев применяется *среднеквадратичная* (*гильбертова*) *норма*

$$\|v_h\|_{l_2} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 \rho_i h_i \right)^{1/2}, \tag{6.6}$$

где ρ_i — заданные весовые коэффициенты. В некоторых случаях применяются и другие нормы, например энергетические.

Определение. *Будем говорить, что семейство сеточных функций $\{u_h\}$ сходится к точному решению $y(x)$ исходной задачи, если*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - [y]_h\| = 0, \tag{6.7}$$

Оценим теперь порядок сходимости при $h \to 0$ последовательности сеточных функций, построенных по разностной схеме Эйлера, пользуясь опять-таки результатами и методами гл. 2. В гл. 2 было доказано, что как решение дифференциальной (6.3), так и решение разностной (6.9) задачи определены на сегменте $[x_0, X]$ и не выходят из области D, где задана функция $f(x, y)$. Пусть $f(x, y)$ непрерывна в области D по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по каждому из переменных, т. е. пусть имеют место оценки ($(x, y) \in D$, M и N не зависят от x, y).

$$
\begin{gathered}
|f(x, y)| < M, \quad |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < N|x_1 - x_2|, \\
|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N|y_1 - y_2|.
\end{gathered} \tag{6.10}
$$

В дальнейшем, исследуя другие разностные схемы для задачи (6.3), мы будем *предполагать*, что решение разностной задачи не выходит из D.

Итак, оценим разность между сеточной функцией, отвечающей точному решению задачи (6.1), и сеточной функцией, построенной по разностной схеме Эйлера. Для этого достаточно оценить разность между точным решением $y(x)$ задачи (6.1) и ломаной Эйлера $\bar{y}_{(n)}(x)$, которая удовлетворяет уравнению и начальному условию

$$
\frac{d\bar{y}_{(n)}}{dx} - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i)) = 0, \qquad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad \bar{y}_{(n)}(x_0) = y_0. \tag{6.11}
$$

Составим разность $z(x)$ между точным решением $y(x)$ исходной задачи (6.1) и ломаной Эйлера $\bar{y}_{(n)}(x)$:

$$
z(x) = y(x) - y_{(n)}(x). \tag{6.12}
$$

В силу (6.1), (6.11), (6.12) получим

$$
\frac{dz}{dx} = f(x, y(x)) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i)), \qquad z(x_0) = 0. \tag{6.13}
$$

Оценим правую часть (6.13), пользуясь условиями (6.10). Так как

$$
\begin{aligned}
f(x, y(x)) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i)) = f(x, y(x)) - f(x_i, y(x)) + \\
+ f(x_i, y(x)) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x)) + f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x)) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i)),
\end{aligned}
$$

то согласно обозначению (6.12) при $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$

$$
\begin{aligned}
|f(x, y(x)) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i))| < \\
< N|x - x_i| + N|z(x)| + N|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_i)|.
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

Оценим последнее слагаемое в формуле (6.14). Согласно (6.11)

$$
|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_i)| = |x - x_i|\,|f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i))|,
$$

откуда, в силу (6.10) и условия $|x - x_i| \leqslant h$, получим

$$
|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_i)| < hM. \tag{6.15}
$$

Подставляя (6.15) в (6.14), получим для производной $\frac{d}{dz}$

$h\alpha < -2$ приведенная на рис. 18, *б* ломаная Эйлера ничего общего не имеет с точным решением.

Сеточная функция u_h и решение дифференциального уравнения y удовлетворяют уравнениям разной природы. Поэтому в общем случае не удается повторить рассмотрения, приводящие для простейшей схемы Эйлера к оценке (6.17). В частности, для сеточной функции u_h, являющейся решением достаточно сложной разностной схемы, трудно предложить такой алгоритм интерполяции, чтобы полученная кривая являлась интегральной кривой дифференциального уравнения, в определенном смысле близкого к исходному, и можно было бы воспользоваться методом дифференциальных неравенств для оценки разности между решением исходного и полученного дифференциальных уравнений.

В общем случае для оценки сходимости приходится пользоваться другими путями, вводя понятия *аппроксимации* и *устойчивости* разностной схемы.

3. Порядок аппроксимации разностной схемы. Для рассмотрения понятия порядка аппроксимации разностной схемы потребуется ввести норму φ_h — правой части разностной схемы (6.4). Как уже отмечалось выше, φ_h представляет собой правую часть уравнения — сеточную функцию f_h в совокупности с дополнительными условиями для искомой сеточной функции u_h. Они могут быть и начальными, и краевыми. Занумеруем их в определенном порядке. Соответствующие правые части пусть будут $g_1, \ldots, g_q$.

Обозначим $\|u_h\|_0 = \max\limits_i |g_i|$ и введем норму $\|\varphi_h\|_1$, полагая

$$\|\varphi_h\|_1 = \max\{\|f_h\|, \|u_h\|_0\}. \tag{6.18}$$

Пусть разностная схема (6.4) однозначно разрешима при всех $h \leqslant h_0$. Если значения $[y]_h$ решения $y(x)$ исходной дифференциальной задачи на сетке ω_h точно удовлетворяют разностной схеме (6.4), то, найдя решение разностной схемы u_h, получим значение точного решения в узлах сетки $[y]_h = u_h$.

С таким положением мы встречаемся крайне редко. Как правило, при подстановке значений $[y]_h$ в разностную схему (6.4) мы не получаем тождества, а (6.4) удовлетворяется с некоторой невязкой

$$L_h[y]_h = \varphi_h + \delta\varphi_h. \tag{6.19}$$

Величина невязки $\delta\varphi_h$ разностной схемы на решении исходной задачи и является характеристикой аппроксимации разностной схемы исходной задачи.

З а м е ч а н и я. 1. Отметим принципиальное отличие введенного понятия невязки аппроксимации разностной схемой дифференциальной задачи от использованного в § 2 гл. 2 понятия невязки при подстановке приближенного решения в виде ломаной Эйлера в исходное дифференциальное уравнение. Это отличие связано с тем, Предполагая непрерывность третьих производных решения (что будет иметь место при соответствующих условиях гладкости функции $f(x, y)$ в правой части уравнения (6.1)), будем иметь

$$\begin{aligned} y(x_i+h) &= y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{6}y'''(x_i+\theta_1 h), \\ y(x_i-h) &= y(x_i)-hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)-\frac{h^3}{6}y'''(x_i+\theta_2 h). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Аппроксимируем задачу (6.3) разностной схемой (y_1 — значение сеточной функции в первом узле — пока оставим неопределенным, но это значение необходимо задать, чтобы последовательно определить $u_2, u_3, \ldots$)

$$L_h u_h = \left\{\begin{matrix} \dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}-f_i \\ u_0 \\ u_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ y_0 \\ y_1 \end{matrix}\right\}. \tag{6.25}$$

Проводя рассмотрения, аналогичные предыдущим, получим, что разностное уравнение (6.25) аппроксимирует исходное уравнение (6.1) со вторым порядком. Чтобы определить порядок аппроксимации условия в первом узле, опять воспользуемся разложением точного решения по формуле Тейлора

$$y(x_0+h)-y_1 = y(x_0)+hy'(x_0)+$$
$$+\frac{h^2}{2}+y''(x_0+\theta h)-y_1 = y_0+hf(x_0, y_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0+\theta h)-y_1. \tag{6.26}$$

Из (6.26) следует, что если выбрать

$$y_1 = y_0+hf(x_0, y_0), \tag{6.27}$$

то и второе начальное условие в (6.25) аппроксимируется со вторым порядком. Первое начальное условие выполняется точно. Отсюда следует, что при выполнении дополнительного условия (6.27) разностная схема (6.25) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком.

Естественно предположить, что для того, чтобы решение u_h разностной схемы было близко к решению исходной задачи, невязка $\delta\varphi_h$ должна быть достаточно малой. Возникает вопрос, является ли малость невязки $\delta\varphi_h$ достаточной для того, чтобы обеспечить близость u_h к решению исходной задачи, т. е., иными словами, обеспечивается ли сходимость разностной схемы, если имеет место аппроксимация? Оказывается, одной аппроксимации, вообще говоря, недостаточно, чтобы разностная схема давала приближенное решение дифференциальной задачи. Помимо аппроксимации нужны еще какие-то дополнительные свойства разностной схемы. Таким свойством является так называемая устойчивость разностной схемы.

4. Устойчивость разностной схемы. Перейдем к определению устойчивой разностной схемы. Рассмотрим разностную схему (6.4) и соответствующую так называемую *возмущенную* задачу

$$L_h\bar{u}_h = \varphi_h+\delta\varphi_h, \tag{6.28}$$

где $\delta\varphi_h$ называется *возмущением* входных данных. В дальнейшем решения $\delta u_h = \bar{u}_h - u_h$, очевидно, получим

$$\frac{\delta u_{i+1} - \delta u_i}{h} - f(x_i, \bar{u}_i) + f(x_i, u_i) = \delta f_i, \quad \delta u_0 = \varepsilon_0. \tag{6.34}$$

Отметим, что согласно введенным выше определениям

$$|\delta f_i| \leqslant \|\delta f_h\|, \quad \|\delta u_h\|_0 = |\varepsilon_0|. \tag{6.35}$$

Из (6.34) в силу оценок (6.32) и (6.35) получим

$$\begin{aligned} |\delta u_{i+1}| \leqslant |\delta u_i| + hN|\delta u_i| + h\|\delta f_h\| &= \\ = (1+hN)|\delta u_i| + h\|\delta f_h\| &\leqslant \\ \leqslant (1+hN)^2|\delta u_{i-1}| + h\{(1+hN)+1\}\|\delta f_h\|&. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Применяя этот процесс последовательных оценок, после $(i+1)$-го шага найдем

$$\begin{aligned} |\delta u_{i+1}| \leqslant (1+hN)^{i+1}|\varepsilon_0| + h\{(1+hN)^i + \ldots + 1\}\|\delta f_h\| &\leqslant \\ \leqslant (1+hN)^{i+1}\|\delta u_h\|_0 + \frac{1}{N}(1+hN)^{i+1}\|\delta f_h\|&, \end{aligned} \tag{6.37}$$

откуда получим

$$\|\delta u_h\| \leqslant (1+hN)^n\left(\|\delta u_h\|_0 + \frac{1}{N}\|\delta f_h\|\right). \tag{6.38}$$

Так как $X - x_0 = nh$, то, в силу неравенства $(1+hN)^{(X-x_0)/h} \leqslant e^{N(X-x_0)}$, окончательно будем иметь

$$\|\delta u_h\| \leqslant e^{N(X-x_0)}\left(\|\delta u_h\|_0 + \frac{1}{N}\|\delta f_h\|\right) < C\|\delta\varphi_h\|_1 \tag{6.39}$$

при любом h, что и доказывает устойчивость разностной схемы (6.28).

5. Теорема о сходимости. Введенные выше понятия порядка аппроксимации и устойчивости разностной схемы позволяют доказать следующую теорему, играющую фундаментальную роль при исследовании сходимости разностных схем.

Теорема 6.1. *Если разностная схема* (6.4) *устойчива и аппроксимирует задачу* (6.2) *с порядком k, то решения u_h при $h \to 0$ сходятся к решению $y(x)$ дифференциальной задачи, причем порядок сходимости также равен k, т. е. имеет место оценка*

$$\|u_h - [y]_h\| < Ch^k, \tag{6.40}$$

где постоянная C не зависит от h.

Доказательство. Обозначим разность значений сеточных функций u_h и $[y]_h$ через z_h:

$$z_h = u_h - [y]_h. \tag{6.41}$$

ференциального уравнения с постоянными коэффициентами в форме $e^{\lambda x}$). Имеем тогда $\lambda^{n+1}-(3+\alpha h)\lambda^n+2\lambda^{n-1}=0$ или

$$\lambda^2-(3+\alpha h)\lambda+2=0. \tag{6.47}$$

Полученное уравнение называется характеристическим (опять же по аналогии с теорией дифференциальных уравнений) для разностного уравнения (6.46). Находя из (6.47)

$$\lambda_1=\frac{3+\alpha h-\sqrt{1+6\alpha h+\alpha^2h^2}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{3+\alpha h+\sqrt{1+6\alpha h+\alpha^2h^2}}{2}, \tag{6.48}$$

получим два частных решения уравнения (6.46) в виде $u_{n(1)}=\lambda_1^n$, $u_{n(2)}=\lambda_2^n$. Попытаемся удовлетворить условиям в нулевом и в первом узле, т. е. условиям $u_0=y_1$, $u_1=y_0$, взяв линейную комбинацию этих решений (являющуюся также решением в силу линейности уравнения)

$$u_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n. \tag{6.49}$$

Имеем $C_1+C_2=y_0$, $C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=y_0$. Отсюда

$$C_1=\frac{y_0(\lambda_2-1)}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad C_2=\frac{y_0(\lambda_1-1)}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{6.50}$$

Итак, формула (6.49), где C_1 и C_2 определены формулами (6.50), дает решение разностной задачи (6.45). Нетрудно убедиться, что оно является единственным, так как, предполагая, что имеются два решения задачи (6.45), получим, что их разность в силу линейности является решением опять-таки задачи (6.45), где $y_0=0$. Отсюда последовательно получим, что все значения сеточной функции, отвечающей разности предполагаемых различных решений, равны нулю.

Исследуем построенное решение задачи (6.45) при $h\to 0$. Пользуясь известными методами анализа, нетрудно получить, что при достаточно малых h *)

$$\lambda_1=1-\alpha h+\mathcal{O}(h^2), \quad \lambda_2=2+2\alpha h+\mathcal{O}(h^2),$$

$$C_1=\frac{y_0(1+\mathcal{O}(h))}{1+\mathcal{O}(h)}, \quad C_2=\frac{y_0(\alpha h+\mathcal{O}(h^2))}{1+\mathcal{O}(h)}.$$

При $h\to 0$ и $\alpha>0$ имеем $C_1\to y_0$, а $|\lambda_1^n|<1$, и поэтому $C_1\lambda_1^n=C_1\lambda_1^{(x_n-x_0)/h}$ ограничено при $h\to 0$. В то же время $\lambda_2^n>2^n$, и

$$|C_2\lambda_2^n|>\frac{|y_0|}{2}\alpha h2^n=\frac{|y_0|}{2}\alpha h2^{(x_n-x_0)/h}. \tag{6.51}$$

---

*) Символом $\mathcal{O}(h^k)$ обозначается величина, модуль которой меньше Ch^k, где C — не зависящая от h постоянная.

Будем по-прежнему рассматривать начальную задачу (6.1) (или (6.3)):

$$Ly = \begin{Bmatrix} \dfrac{d}{dx}y - f(x, y) \\ y(x_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_0 \end{Bmatrix}. \tag{6.53}$$

Условия гладкости функции $f(x, y)$ будут сформулированы ниже.

Сопоставим задаче (6.1) разностную схему

$$L_h u_h = \begin{Bmatrix} \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} - (p_1 K_1 + \ldots + p_l K_l) \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_0 \end{Bmatrix}, \tag{6.54}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, u_i), \\ K_2 &= f(x_i + \alpha_1 h, u_i + \alpha_1 h K_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_l &= f(x_i + \alpha_{l-1} h, u_i + \alpha_{l-1} h K_{l-1}), \end{aligned} \tag{6.55}$$

а $p_1, \ldots, p_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ — некоторые параметры, выбором которых можно обеспечить требуемый порядок аппроксимации схемы (6.54) на решении задачи (6.53).

В частном случае при $l = 1$, $p = 1$ схема (6.54) переходит в схему Эйлера (6.9), имеющую первый порядок аппроксимации. Покажем, что при $l = 2$ можно так выбрать параметры p_1, p_2 и α_1, что схема (6.54) будет иметь второй порядок аппроксимации. Пусть функция $f(x, y)$ имеет в D непрерывные частные производные до второго порядка по обоим аргументам, что достаточно для существования непрерывной третьей производной от решения. Тогда решение задачи (6.53) может быть представлено по формуле Тейлора

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x^*). \tag{6.56}$$

Подставляя это выражение в схему (6.54), получим

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - (p_1 K_1 + p_2 K_2) = y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) - \\ - p_1 f(x_i, y(x_i)) - p_2 f(x_i + \alpha_1 h, y(x_i) + \alpha_1 h f(x_i, y(x_i))). \end{aligned} \tag{6.57}$$

Воспользовавшись разложением

$$\begin{aligned} f(x_i + \alpha_1 h, y(x_i) + \alpha_1 h f(x_i, y(x_i))) = f(x_i, y(x_i)) + \\ + \alpha_1 h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + \alpha_1 h f(x_i, y(x_i)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) + O(h^2) \end{aligned} \tag{6.58}$$

и очевидным соотношением

$$\begin{aligned} y''(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))\, y'(x_i) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)), \end{aligned} \tag{6.59}$$

Легко проверить, что эта схема имеет четвертый порядок аппроксимации.

В силу теоремы 6.1 для определения порядка сходимости схем Рунге — Кутта достаточно доказать их устойчивость. Это доказательство можно провести в полной аналогии с доказательством устойчивости схемы Эйлера. Действительно, все схемы типа (6.54) имеют вид

$$L_h u_h = \begin{Bmatrix} \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} - G(x_i, u_i) \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_0 \end{Bmatrix}, \tag{6.65}$$

где функция $G(x, y)$ представляет собой линейную комбинацию функций $f(x, y)$ от промежуточных значений аргумента. Поэтому оценки для функции $G(x, y)$ и ее производных легко выразить через соответствующие оценки функции $f(x, y)$ и ее производных, используемые при доказательстве устойчивости метода Эйлера, откуда и следует сделанное утверждение.

В частности, имеет место следующая

Теорема 6.2. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет в D непрерывные частные производные четвертого порядка. Тогда схема Рунге — Кутта* (6.63) *сходится с четвертым порядком точности, т. е.*

$$\|u_h - [y]_h\| < Ch^4. \tag{6.66}$$

Отметим в заключение, что схемы Рунге — Кутта допускают вычисления и с переменным шагом. Начиная с любого индекса i, можно уменьшить или увеличить последующий шаг сетки.

З а м е ч а н и е. В этом параграфе были рассмотрены численные методы решения начальной задачи (6.1) для одного скалярного уравнения первого порядка. Без существенных изменений разобранные методы переносятся на случай начальной задачи и для нормальной системы уравнений первого порядка *).

§ 2. Краевые задачи

В этом параграфе будут рассмотрены простейшие численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка этих задач и общие свойства их решений были изучены в гл. 4.

1. Метод стрельбы. Основная идея этого метода заключается в сведении решения исходной краевой задачи к многократному решению вспомогательных задач Коши для заданного дифференциаль-

*) См., например, книгу А. А. Самарского «Теория разностных схем» (М.: Наука, 1983).

точной функции, аппроксимирующей на сетке решение исходной задачи. Рассмотрим основные идеи этого метода на примере простейшей линейной краевой задачи для уравнения второго порядка

$$y'' - q(x)\,y = f(x), \tag{6.81}$$

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{6.82}$$

Легко видеть, что при $q(x) > 0$ краевая задача (6.81), (6.82) имеет единственное решение. Это утверждение является следствием общего свойства задачи на собственные значения, рассмотренной в гл. 4. Как было показано, при $q(x) > 0$ все собственные значения λ_n соответствующей задачи на собственные значения строго положительны: $\lambda_n > 0$. Поскольку $\lambda = 0$ не является собственным значением этой задачи, краевая задача (6.81) — (6.82) разрешима единственным образом.

Единственность решения задачи (6.81), (6.82) можно доказать и непосредственно, опираясь на так называемый *принцип максимума*. Предположим, что существует нетривиальное решение однородной краевой задачи (6.81), (6.82) — функция $y_0(x)$. Эта функция непрерывна на замкнутом отрезке $[0, l]$, следовательно, по известному свойству непрерывных функций принимает в некоторой точке x_0 этого отрезка свое максимальное значение M:

$$y_0(x) \leqslant M = y_0(x_0), \qquad x \in [0, l], \tag{6.83}$$

причем $M \geqslant 0$, поскольку $y_0(0) = y_0(l) = 0$. Точка x_0 может быть либо граничной, либо внутренней точкой $[0, l]$. Пусть x_0 — граничная точка. Но тогда $M = 0$, поскольку $y_0(0) = y_0(l) = 0$. Допустим теперь, что x_0 — внутренняя точка; тогда в этой точке имеется максимум и $y''(x_0) \leqslant 0$. Но из самого уравнения (см. (6.81) при $f(x) = 0$) следует

$$0 \geqslant y_0''(x_0) = q(x_0)\,y_0(x_0) = q(x_0)\,M \geqslant 0, \tag{6.84}$$

а это может выполняться лишь при $M = 0$. Итак, $M = 0$. Аналогичным образом легко показать, что и минимальное m значение функции $y_0(x)$ на замкнутом отрезке $[0, l]$ равно нулю: $m = 0$. Отсюда следует, что $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$, что и доказывает утверждение об единственности решения краевой задачи (6.81), (6.82).

Перейдем к построению разностной схемы, аппроксимирующей задачу (6.81), (6.82). Введем на отрезке $[0, l]$ сетку ω_h и рассмотрим сеточную функцию $y_{(h)}$, определенную в узлах сетки. Вторую производную $y''(x)$ аппроксимируем разностным отношением

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 \tag{6.85}$$

подставляя это разложение в левую часть уравнения (6.86):

$$\frac{1}{h^2}\Big\{y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + $$
$$+ \frac{h^4}{24}y^{(IV)}(x_i+\theta_1 h) - 2y(x_i) + y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) -$$
$$- \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(IV)}(x_i-\theta_2 h)\Big\} - q(x_i)y(x_i) \quad (0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1), \tag{6.89}$$

получим

$$y''(x_i) - q(x_i)y(x_i) + \frac{h^2}{24}\left[y^{(IV)}(x_i+\theta_1 h) + y^{(IV)}(x_i-\theta_2 h)\right] = f(x_i), \tag{6.90}$$

откуда следует, что порядок аппроксимации схемы (6.86) равен 2.

Рассмотрим вопрос об устойчивости разностной схемы (6.86) по отношению к возмущениям граничных условий и правой части уравнения. Возмущенная задача имеет вид

$$L_h\bar{y}_{(h)} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\bar{y}_{(h)i+1} - 2\bar{y}_{(h)i} + \bar{y}_{(h)i-1}}{h^2} - q_{(h)i}\bar{y}_{(h)i} \\ \bar{y}_{(h)0} \\ \bar{y}_{(h)n} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_{(h)i} + \delta f_{(h)i} \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_n \end{array}\right\}. \tag{6.91}$$

Обозначив погрешность решения

$$\delta y_{(h)i} = \bar{y}_{(h)i} - y_{(h)i} \tag{6.92}$$

и вычитая (6.91) из (6.86), получим в силу линейности

$$(2 + h^2 q_{(h)i})\,\delta y_{(h)i} = \delta y_{(h)i+1} + \delta y_{(h)i-1} - h^2\delta f_{(h)i}, \tag{6.93}$$
$$\delta y_{(h)0} = \varepsilon_0, \quad \delta y_{(h)n} = \varepsilon_n.$$

Выберем то значение $i = k$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, при котором абсолютная величина погрешности наибольшая:

$$|\delta y_{(h)k}| \geqslant |\delta y_{(h)i}|, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{6.94}$$

Из уравнения (6.93) имеем

$$(2 + h^2 q_{(h)k})\,|\delta y_{(h)k}| \leqslant |\delta y_{(h)k+1}| + |\delta y_{(h)k-1}| + h^2|\delta f_{(h)k}|. \tag{6.95}$$

Неравенство (6.95) только усилится, если заменить $|\delta y_{(h)k+1}|$ и $|\delta y_{(h)k-1}|$ на максимальное значение $|\delta y_{(h)k}|$, а $|\delta f_{(h)k}|$ — на максимальное значение $|\delta f_{(h)}|$. Тогда (6.95) дает

$$h^2 q_{(h)k}|\delta y_{(h)k}| \leqslant h^2\|\delta f_{(h)}\|. \tag{6.96}$$

Отсюда получим

$$|\delta y_{(h)k}| \leqslant \|\delta f_{(h)}\| \Big/ \min_{[0,l]} q(x), \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

Будем искать такие коэффициенты α_i, β_i, чтобы для всех значений индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ имело место соотношение

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i. \tag{6.101}$$

Подставим искомый вид решения (6.101) в уравнение (6.98); получим

$$(A_i\alpha_i - C_i)\,y_i + B_i y_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i) = 0. \tag{6.102}$$

Выражая y_i через y_{i+1} по формуле (6.101), перепишем (6.102) в виде

$$[(A_i\alpha_i - C_i)\,\alpha_{i+1} + B_i]\,y_{i+1} + [(A_i\alpha_i - C_i)\,\beta_{i+1} + A_i\beta_i + F_i] = 0. \tag{6.103}$$

Для того чтобы (6.103) удовлетворялось тождественно при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, достаточно потребовать, чтобы каждая из квадратных скобок обращалась в нуль при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Это требование дает рекуррентные соотношения для последовательного определения по заданным значениям $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$ «прогоночных» коэффициентов α_{i+1} и β_{i+1} («прямая прогонка»):

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}. \tag{6.104}$$

Легко показать, что при выполнении условий (6.100) знаменатели в формулах (6.104) отличны от нуля и, более того, $0 \leqslant \alpha_i < 1$. Действительно, перепишем второе условие (6.100) в виде

$$C_i = A_i + B_i + D_i, \qquad D_i \geqslant 0. \tag{6.105}$$

Тогда первую формулу (6.104) можно записать в виде

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{B_i + A_i\,(1 - \alpha_i) + D_i}. \tag{6.106}$$

Так как $0 \leqslant \alpha_1 < 1$, A_i, $B_i > 0$ и $D_i \geqslant 0$, отсюда следует, что и для всех α_i, вычисляемых по формуле (6.106), выполняется условие $0 \leqslant \alpha_i < 1$. Итак, все знаменатели в формуле (6.104) строго больше нуля, что позволяет найти все прогоночные коэффициенты.

Вычислив α_n и β_n из (6.101), получим

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n. \tag{6.107}$$

С другой стороны, в силу граничного условия (6.99)

$$y_n = \gamma y_{n-1} + \delta = \gamma\,(\alpha_n y_n + \beta_n) + \delta, \tag{6.108}$$

откуда

$$y_n = (\gamma\beta_n + \delta)/(1 - \gamma\alpha_n). \tag{6.109}$$

ГЛАВА 7

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

Необходимость развития приближенных методов решения дифференциальных уравнений отмечалась выше. Гл. 6 была посвящена так называемым численным методам решения дифференциальных уравнений, которые дают возможность для данного уравнения с конкретными дополнительными условиями получить с произвольной степенью точности таблицу значений решения в узлах сетки. В настоящей главе будет идти речь о другом классе приближенных методов, о так называемых асимптотических методах, которые ставят своей целью получение формулы, описывающей качественное поведение решения на некотором интервале изменения независимого переменного. Точность такой формулы имеет естественное ограничние (подробнее об этом см. ниже). Заметим сразу же, что численные и асимптотические методы не исключают, а взаимно дополняют друг друга.

§ 1. Регулярные возмущения

1. Понятие асимптотического представления. В § 5 гл. 2 подробно исследовался вопрос о зависимости решения начальной задачи от входящих в уравнение параметров. В настоящем параграфе мы положим $t_0 = 0$, чего всегда можно добиться заменой независимого переменного, и ограничимся скалярным случаем (y — скаляр, μ — скаляр), что не принципиально, а делается лишь в целях краткости изложения. Итак, рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \quad y(0, \mu) = y^0. \tag{7.1}$$

При этом будем считать, что μ изменяется в некоторой окрестности значения $\mu = 0$, чего тоже можно добиться соответствующим выбором начала отсчета по оси μ.

В гл. 2 (теорема 2.10) было доказано, что при соответствующих условиях на правую часть (7.1) решение $y(t, \mu)$ задачи (7.1) существует и является непрерывной функцией t и μ на множестве $t \in [0, T]$, $|\mu| < c$.

Доказанная теорема заключает в себе следующую возможность построения приближенного решения задачи (7.1). Рассмотрим зада-

Результаты гл. 2 позволяют получить для $y(t, \mu)$ асимптотическую формулу с остаточным членом более высокого порядка малости, чем $\mathcal{O}(\mu)$ *), если $f(y, t, \mu)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование $n+1$ непрерывных производных по μ. Сформулируем этот вывод из § 5 гл. 2 в виде отдельной теоремы.

Теорема 7.1. *Пусть в некоторой области D переменных y, t, μ функция $f(y, t, \mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка $n+1$ включительно. Тогда существует сегмент $[0, T]$, на котором для решения $y(t, \mu)$ задачи (7.1) справедливо асимптотическое представление*

$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \mu \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, 0) + \ldots + \frac{\mu^n}{n!} \frac{\partial^n y}{\partial \mu^n}(t, 0) + \varepsilon_{n+1}(t, \mu), \tag{7.5}$$

где $\varepsilon_{n+1}(t, \mu) \rightrightarrows 0$ при $\mu \to 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, причем $\varepsilon_{n+1}(t, \mu) = \mathcal{O}(\mu^{n+1})$.

Замечания. 1. Величины $\frac{\partial^k y}{\partial \mu^k}(t, 0)$ определяются из уравнений в вариациях, выписанных в § 5 гл. 2. Представление (7.5) можно получить и иначе. Подставим в (7.1) выражение для y в виде формального ряда

$$y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \ldots \tag{7.6}$$

Раскладывая после подстановки величину $f(y_0 + \mu y_1 + \ldots, t, \mu)$ также формально в степенной ряд, получим

$$\frac{dy_0}{dt} + \mu \frac{dy_1}{dt} + \ldots =$$
$$= f(y_0, t, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, t, 0)(\mu y_1 + \ldots) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(y_0, t, 0)\mu + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left((\mu y_1 + \ldots)\frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^n f(y_0, t, 0) + \ldots;$$
$$y_0(0) + \mu y_1(0) + \ldots = y^0.$$

Приравнивая члены с одинаковыми степенями μ, будем иметь

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0, t, 0), \qquad y_0(0) = y^0, \tag{7.7$'$}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, t, 0)\, y_1 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(y_0, t, 0), \qquad y_1(0) = 0, \tag{7.7$''$}$$

. . . .

Решая последовательно эти задачи, определим члены ряда (7.6). Задача (7.7′) для $y_0(t)$ совпадает с задачей (7.2), и, стало быть, в

*) См. сноску на с. 163.

и, следовательно,

$$y_1(t) = \int_0^t c(\tau)\, y_0^2(\tau)\, e^{\int_\tau^t a(t)\,dt}\, d\tau; \qquad y(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + O(\mu^2).$$

2. Существование решения возмущенной задачи. Результаты, полученные в § 5 гл. 2, обладают той особенностью, что справедливость асимптотического представления гарантируется на некотором сегменте $[0, T]$, определяемом свойствами правой части (7.1), одновременно с существованием и единственностью как невозмущенного, так и возмущенного уравнений.

Можно ставить вопрос иначе. Допустим, что решение невозмущенной задачи (7.2) существует, единственно и принадлежит некоторой области G пространства переменных (y, t) при $0 \leqslant t \leqslant T$. Величину T в данном случае можно, например, установить непосредственно из явного вида $\bar{y}(t)$. Будет ли при достаточно малых μ решение задачи (7.1) также существовать на всем $[0, T]$ и подчиняться формуле (7.3)? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 7.2. *Пусть в области* $G = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| \leqslant b,\ |\mu| \leqslant \bar{\mu}\}$ *функция* $f(y, t, \mu)$ *непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(y_1, t, \mu) - f(y_2, t, \mu)| \leqslant N|y_1 - y_2|,$$

где N *— одна и та же постоянная для всех* μ *из отрезка* $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$. *Пусть решение* $\bar{y}(t)$ *задачи (7.2) существует и единственно на* $[0, T]$ *и принадлежит* $D = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| < b\}$. *Тогда при каждом достаточно малом* μ *решение* $y(t, \mu)$ *задачи (7.1) также существует и единственно на* $[0, T]$ *и принадлежит* D, *причем имеет место равномерный относительно* t *предельный переход*

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t). \tag{7.8}$$

Доказательство. Перейдем в (7.1) к новой неизвестной функции $\Delta = y - \bar{y}(t)$, которая является решением начальной задачи (ср. (2.137)); получим

$$\frac{d\Delta}{dt} = [f(\bar{y} + \Delta, t, \mu) - f(\bar{y}, t, \mu)] + [f(\bar{y}, t, \mu) - f(\bar{y}, t, 0)], \qquad \Delta(0) = 0. \tag{7.9}$$

Рассмотрим следующую область переменных Δ, t:

$$\tilde{D} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |\Delta| < C\}, \text{ где } C = b - \beta, \quad \beta = \sup_{[0,T]} |\bar{y}(t)|.$$

При $|\Delta| < C$ имеем $|y| < |\bar{y}| + |\Delta| < \beta + C = b$, т. е. при $|\Delta| < C$ аргументы $f(y, t, \mu)$ остаются в области G. Тогда, в силу условия

§ 2. Сингулярные возмущения

В приложениях нередко встречаются случаи, когда малый параметр μ входит в уравнение таким образом, что теория предыдущего параграфа неприменима. Рассмотрим в качестве простейшего примера движение маятника (см. гл. 1, § 2),

$$\mu y'' + \alpha y' + ky = f(t), \tag{7.11}$$

где $I = \mu$ является малым параметром. В случае, разобранном в предыдущем параграфе, в целях получения приближенного выражения для решения можно было в уравнении формально положить $\mu = 0$ и взять решение полученного таким образом упрощенного уравнения. Можно ли поступить так же в случае (7.11)?

Движение маятника в (7.11) определяется заданием начального положения и скорости $y(0)=y_0^0$, $y'(0)=y_1^0$. Полагая в (7.11) $\mu = 0$, мы получим уравнение *более низкого* (первого) порядка, решение которого определяется только заданием $y(0)$. Тем самым заранее ясно, что, поступая так, мы не можем учесть все факторы, определяющие решение (7.11), и по крайней мере в окрестности начальной точки правильной модели не получим.

Таким образом, выводы предыдущего параграфа в данном случае несправедливы и, стало быть, условия теорем предыдущего параграфа нарушены. Чтобы понять, какие условия нарушены, запишем (7.11) в форме (7.1) (уравнение уже будет векторным, но, как отмечалось выше, это не принципиально):

$$z' = \frac{-\alpha z - ky + f(t)}{\mu} = f_1(z, y, t, \mu),$$

$$y' = z = f_2(z, y, t, \mu).$$

Отсюда видно, что f_1 не является непрерывной функцией μ при $\mu = 0$, т. е. не выполнено основное требование теории предыдущего параграфа — требование непрерывности правых частей. Другими словами, можно сказать, что в данном случае правая часть зависит от μ *нерегулярным*, или *сингулярным*, образом. Поэтому возмущения типа $\mu y''$, т. е. когда малый параметр входит как множитель при старшей производной, получили в литературе название *сингулярных возмущений.*

Простейшие примеры показывают, что сингулярно возмущенные системы обладают рядом свойств, коренным образом отличающих их от регулярно возмущенных систем, исследованных в § 1.

Рассмотрим уравнение

$$\mu y' = ay + b; \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \tag{7.12}$$

при начальном условии $y(0, \mu) = y^0$. Его точное решение имеет вид

$$y(t, \mu) = \left(y^0 + \frac{b}{a}\right) e^{at/\mu} - \frac{b}{a}. \tag{7.13}$$

сформулировано ниже (см. 3°, 5°). После подстановки $z=\varphi(y, t)$ во второе уравнение (7.16) получится дифференциальное уравнение относительно y и для однозначного определения y потребуется задать начальное условие. Естественно предположить, что из двух начальных условий (7.15) следует оставить лишь одно: условие на y. Итак, мы приходим к задаче

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=f(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t), \quad \bar{y}(0)=y^0, \tag{7.17}$$

где $\varphi(y, t)$ — один из корней уравнения $F(z, y, t)=0$.

2°. Будем предполагать, что функция $\varphi(y, t)$ непрерывна вместе с производной по y, когда $(y, t)\in\bar{D}$.

Определение. *Корень $z=\varphi(y, t)$ будем называть устойчивым в области $\bar{D}$, если при $(y, t)\in\bar{D}$ выполняется неравенство*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y, t), y, t)<0. \tag{7.18}$$

Замечание. Ср. требование $a<0$ в рассмотренном выше примере.

3°. Будем предполагать, что в (7.17) $\varphi(y, t)$ является устойчивым корнем.

4°. Будем предполагать, что решение $\bar{y}(t)$ задачи (7.17) определено на сегменте $0\leqslant t\leqslant T$ и принадлежит $D=\{0\leqslant t\leqslant T, |y|<b\}$.

Прежде чем производить дальнейшее исследование задачи, рассмотрим один частный случай, а именно

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z), \quad z(0, \mu)=z^0. \tag{7.19}$$

Этот случай, во-первых, интересен своей геометрической наглядностью, а во-вторых, соответствующие результаты пригодятся при рассмотрении общего случая (7.14).

Пусть $z=\varphi$ является устойчивым корнем уравнения $F(z)=0$. φ в данном случае является константой, а D — любым интервалом вещественной оси. Условие устойчивости (7.18) имеет вид $\frac{dF}{dz}(\varphi)<0$. Пусть кроме φ уравнение $F(z)=0$ имеет еще корни $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, причем φ_1 и φ_2 — два ближайших к φ корня соответственно снизу и сверху (рис. 20, на котором представлена полоса $0\leqslant t\leqslant T$, где T — любое положительное число). Проследим за полем направлений уравнения (7.19). При достаточно малом μ векторы, касательные к интегральным кривым, расположены почти параллельно оси z (за исключением малой окрестности корней уравнения $F(z)=0$). «+» и «−» на рисунке указывают знак функции $F(z)$. Заметим, что, поскольку $\frac{dF}{dz}(\varphi)\neq 0$, корень φ является простым и при $z=\varphi$ происходит смена знака функции $F(z)$.

Пусть $\varphi_1<z^0<\varphi_2$. Рассмотрим множество точек $|z-\varphi|\leqslant\varepsilon$, где ε произвольно мало (ε-окрестность корня φ). Характер поля с другой стороны,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} = 2\left[z(t_1, \mu) - \varphi\right] \frac{F(z(t_1, \mu))}{\mu} < 0$$

в силу свойства $F(z) \geqq 0$ при $z \leqq \varphi$, обеспеченного условием устойчивости $\frac{dF}{dz}(\varphi) < 0$. Противоречие приводит к выводу, что интегральная кривая останется в ε-окрестности $z = \varphi$. Так как она попадает в эту окрестность при $t = t_0 < \varepsilon$, то в силу произвольной малости ε это фактически означает справедливость (7.20).

Утверждение (7.20) можно записать также в следующей удобной для дальнейшего форме. Введем независимое переменное $\tau = t/\mu$. Тогда задача (7.19) примет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z), \qquad z(0) = z^0. \tag{7.21}$$

Утверждение (7.20) означает, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} z(\tau) = \varphi$, или, иначе, для любого ε существует $\tau_0(\varepsilon)$ такое, что при $\tau \geqslant \tau_0$ справедливо неравенство

$$|z(\tau) - \varphi| < \varepsilon. \tag{7.22}$$

Замечания. 1. Как видно из проведенных рассуждений, предельный переход (7.20) не является равномерным относительно $t \in (0, T]$, что хорошо иллюстрируется рис. 20.

2. Термин «устойчивый корень» не является случайным. Нетрудно проследить связь проделанных построений с теорией устойчивости (см. гл. 5). Действительно, $z = \varphi$ является точным решением уравнения (7.21), причем, в силу $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi) < 0$, это решение асимптотически устойчиво по Ляпунову. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену переменных $x = z - \varphi$ и воспользоваться теоремой 5.1 или теоремой 5.3, взяв в качестве функции Ляпунова $V = x^2$. То, что интегральная кривая $z = z(\tau)$ остается в ε-окрестности прямой $z = \varphi$, обеспечено устойчивостью решения $z = \varphi$ уравнения $\frac{dz}{d\tau} = F(z)$.

Вернемся к общему случаю (7.14), (7.15). При рассмотрении этого случая идеи теории устойчивости будут сочетаться с идеями теории регулярных возмущений.

Сопоставим задаче (7.14) (7.15) задачу

$$\mu \frac{dz_0}{dt} = F(z_0, y^0, 0), \qquad z_0(0) = z^0. \tag{7.23}$$

Эта задача является исследованной уже задачей типа (7.19). В силу 3° $z_0 = \varphi(y^0, 0)$ является устойчивым корнем уравнения $F(z_0, y^0, 0) = 0$.

5°. Будем предполагать, что начальное значение z^0 принадлежит области влияния корня $\varphi(y^0, 0)$ уравнения $F(z^0, y^0, 0) = 0$.

Принимая во внимание непрерывность $\varphi(y, t)$, можно, обеспечив достаточную малость $|y(t, \mu) - y^0|$, обеспечить также неравенство

$$|\varphi(y(t, \mu), t) - \varphi(y^0, 0)| < \varepsilon/3 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau_0\mu. \tag{7.31}$$

Из (7.29) — (7.31) получим, что при $t = \tau_0\mu = t_0(\mu)$

$$|z(t, \mu) - \varphi(y(t, \mu), t)| < \varepsilon. \tag{7.32}$$

2) Обозначим $\Delta(t, \mu) = z(t, \mu) - \varphi(y(t, \mu), t)$. Соотношение (7.32) говорит о том, что $\Delta(t, \mu)$ как угодно мало при $t = t_0(\mu)$. Неравенство (7.32) будет оставаться выполненным в некоторой окрестности справа от точки t_0. Величина этой окрестности заранее не известна. Может случиться, что неравенство (7.32) выполнено для всех $t \geqslant t_0$ вплоть до $t = T$, а может оказаться, что найдется значение $t_1 \leqslant T$, при котором (7.32) перейдет в равенство. Убедимся, что в первом случае при всех $t \in [t_0, T]$, а во втором при всех $t \in [t_0, t_1]$ величина $y(t, \mu)$ как угодно близка к $\bar{y}(t)$. Для этого перепишем второе уравнение (7.14) в виде

$$\frac{dy}{dt} = f(\varphi(y, t) + \Delta(t, \mu), y, t), \qquad y|_{t=t_0(\mu)} = y^0 + \delta(\mu), \tag{7.33}$$

и сравним эту задачу с задачей (7.17). Согласно полученному в предыдущем пункте величины $t_0(\mu)$, $|\delta(\mu)|$ как угодно малы при достаточно малом μ и величина $|\Delta(t, \mu)|$ как угодно мала при достаточно малом μ и $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$. Задача (7.33) является регулярно возмущенной задачей по отношению к задаче (7.17) (см. теорему 7.2 вместе с замечанием 3). Поэтому при $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$ $y(t, \mu)$ существует, принадлежит D и, кроме того, для любого $\varepsilon_1 > 0$ справедливо неравенство $|y(t, \mu) - \bar{y}(t)| < \varepsilon_1$ при $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$, если только μ достаточно мало.

3) Убедимся теперь, что неравенство (7.32) выполнено для всех $t \in [t_0, T]$, т. е. из двух возможностей, указанных в 2), реализуется только одна, а предположение о существовании точки $t_1 \leqslant T$, для которой $|\Delta(t, \mu)| = \varepsilon$, приводит к противоречию.

Пусть при $t_1 \leqslant T$ достигается равенство $|\Delta(t_1, \mu)| = \varepsilon$. Введем в рассмотрение функцию

$$V(z, y, t) = [z - \varphi(y, t)]^2.$$

В силу предположения о точке t_1 имеем $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} \geqslant 0$. Но

$$\frac{dV}{dt} = 2[z - \varphi(y, t)]\left\{\frac{F(z, y, t)}{\mu} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} f(z, y, t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}.$$

Так как $F(z, y, t)|_{t=t_1} \neq 0$, то знак $\{\cdot\}$ при достаточно малых μ определяется знаком $F(z, y, t)$, а, следовательно, в силу малости Δ — знаком

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y, t), y, t)[z - \varphi(y, t)].$$

При этом остаточный член $\varepsilon_2(t, \mu)$ в выражении для $z(t, \mu)$ не является равномерно малой величиной. Естественно предположить, что если к $\bar{z}(t)$ добавить разность $z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$, то получится формула $z(t, \mu) = \bar{z}(t) + z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0) + \varepsilon_3(t, \mu)$, где $\varepsilon_3(t, \mu) \rightrightarrows 0$ на $[0, T]$. Убедимся, что это действительно так. Величина $\varepsilon_3(t, \mu) = z(t, \mu) - \bar{z}(t) - z_0(\tau) + \varphi(y^0, 0)$. Разобьем отрезок $[0, T]$ на два участка $[0, t_0(\mu)]$ и $[t_0(\mu), T]$, где $t_0(\mu) = \tau_0\mu$ — величина, введенная при доказательстве теоремы 7.4, τ_0 достаточно велико и фиксировано при $\mu \to 0$. На $[0, t_0(\mu)]$ представим ε_3 в виде

$$\varepsilon_3(t, \mu) = [z(t, \mu) - z_0(\tau)] - [\bar{z}(t) - \varphi(y^0, 0)].$$

Здесь $|z(t, \mu) - z_0(\tau)| < \varepsilon/2$ при $\mu \to 0$ (это то же самое, что (7.30)), а

$$|\bar{z}(t) - \varphi(y^0, 0)| = |\bar{z}(t) - \bar{z}(0)| < \varepsilon/2,$$

так как $t_0(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Следовательно, на $[0, t_0(\mu)]$ имеем $|\varepsilon_3| < \varepsilon$ равномерно относительно t при $\mu \to 0$. На $[t_0(\mu), T]$ представим ε_3 в виде

$$\varepsilon_3(t, \mu) = [z(t, \mu) - \bar{z}(t)] - [z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)].$$

Здесь $|z(t, \mu) - \bar{z}(t)| < \varepsilon/2$ (см. замечание 1 к теореме 7.4 о равномерности предельного перехода (7.25) на $[t_0(\mu), T]$). И точно так же $|z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)| < \varepsilon/2$, поскольку это то же неравенство, но для частного случая (7.23), т. е. и на $[t_0(\mu), T]$ имеем $|\varepsilon_3| < \varepsilon$ равномерно относительно t при $\mu \to 0$. Таким образом, $\varepsilon_3(t, \mu) \rightrightarrows 0$ при $\mu \to 0$ на $[0, T]$.

Заметим, что разность $z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$ осуществляет поправку на «потерю» начального условия $z(0, \mu) = z^0$, которому не может удовлетворить $\bar{z}(t)$. Выражение $\bar{z}(t) + z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$ уже будет удовлетворять начальному условию при $t = 0$.

Ниже (теорема 7.5) будет доказано, что $\varepsilon_1(t, \mu) = O(\mu)$, $\varepsilon_3(t, \mu) = O(\mu)$. Более того, при достаточной гладкости правых частей (7.14) можно построить асимптотическое представление для решения задачи (7.14), (7.15) с остаточным членом $O(\mu^{n+1})$, но, в отличие от регулярного случая (см. теорему 7.1), это представление будет, помимо степенных по μ (или *регулярных*) *членов*, содержать некоторые функции (так называемые *пограничные члены*), зависящие от μ *не степенным* образом; пограничные члены имеют заметную величину в окрестности $t = 0$, а далее с ростом t быстро убывают. Введенная выше разность $z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$ представляет собой пограничный член в асимптотической формуле с остаточным членом $O(\mu)$.

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к описанию общего алгоритма построения асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи (7.14), (7.15).

Представим z и y в виде суммы двух формальных рядов (здесь и в дальнейшем под x будем понимать z и y в совокупности, Эта система совпадает, как и следовало ожидать, с вырожденной системой (7.16). Имеем также (учитывая первое из уравнений (7.41))

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = \Pi_0 F \equiv F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0) - F(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0) \equiv$$

$$\equiv F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0), \quad \frac{d}{d\tau}\Pi_0 y = 0. \qquad (7.42)$$

Начиная с $k = 1$, уравнения (7.39) и (7.40) будут линейными относительно $\bar{z}_k$, $\bar{y}_k$ и $\Pi_k z$, $\Pi_k y$. Обратим внимание на то, что система (7.39) не содержит производной от $\bar{z}_k$, а только производную от $\bar{y}_k$, а система (7.40) имеет ту особенность, что второе уравнение в ней отделяется, так как его правая часть содержит члены только предыдущих номеров.

Для того чтобы из полученных уравнений (7.39), (7.40) определить члены разложений (7.35), (7.36), нужно задать начальные условия. Для этого подставим (7.34) в (7.15):

$$\bar{x}_0(0) + \mu\bar{x}_1(0) + \ldots + \Pi_0 x(0) + \mu\Pi_1 x(0) + \ldots = x^0 \qquad (7.43)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях этих равенств. Приравнивание коэффициентов при нулевой степени μ дает

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = z^0, \quad \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0. \qquad (7.44)$$

Рассмотрим второе из этих равенств. Без каких-либо дополнительных соображений из него нельзя определить $\bar{y}_0(0)$ и $\Pi_0 y(0)$. Однако на пограничные члены, которые призваны играть роль поправок в окрестности $t = 0$, а при $t > 0$ стремиться к нулю вместе с μ, следует наложить дополнительное условие $\Pi_i x \to 0$ при $\tau \to \infty$. Отсюда приходим к выводу, что $\Pi_0 y(0) = 0$, так как иначе (см. (7.42)) $\Pi_0 y(\tau) \equiv \Pi_0 y(0) = \text{const} \neq 0$. А тогда из (7.44)

$$\bar{y}_0(0) = y^0. \qquad (7.45)$$

При этом условии решаем систему (7.41) и получаем, что $\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$ совпадают с решением $\bar{z}(t)$, $\bar{y}(t)$, которое уже встречалось в теореме 7.4. Из (7.41) получим $\bar{z}_0(0) = \varphi(\bar{y}(0), 0) = \varphi(y^0, 0)$, а тогда первое из равенств (7.44) дает начальное условие для $\Pi_0 z$. Итак, начальные условия для системы (7.42) имеют вид

$$\Pi_0 y(0) = 0, \quad \Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) = z^0 - \varphi(y^0, 0). \qquad (7.46)$$

Поэтому $\Pi_0 y(\tau) \equiv 0$, а $\Pi_0 z(\tau)$ является решением следующей начальной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = F(\varphi(y^0, 0) + \Pi_0 z, y^0, 0); \\ &\Pi_0 z(0) = z^0 - \varphi(y^0, 0). \end{aligned}\right\} \qquad (7.47)$$

В теории сингулярных возмущений доказывается, что для $\Pi_k x$ имеет место оценка

$$|\Pi_k x| < Ce^{-\varkappa t/\mu}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{7.54}$$

где $C > 0$, $\varkappa > 0$ — некоторые постоянные. Эта оценка означает экспоненциальное стремление $\Pi_k x$ к нулю при $\tau \to \infty$, это же неравенство обеспечивает сходимость интегралов в (7.53).

Основное утверждение, относящееся к только что проведенным построениям, заключается в том, что ряд (7.34) является асимптотическим рядом для решения $x(t, \mu)$ задачи (7.14), (7.15), а именно, в теории сингулярных возмущений доказывается, что разность между $x(t, \mu)$ и n-й частичной суммой ряда (7.34) имеет порядок $O(\mu^{n+1})$. Таково обобщение теоремы 7.1 на сингулярно возмущенную систему. Подробнее с этим можно ознакомиться в книге *).

Приведем доказательство асимптотического представления для решения задачи (7.14), (7.15) с остаточным членом $\mathcal{O}(\mu)$, а именно, докажем, что $z(t, \mu) = \bar{z}_0(t) + \Pi_0(z) + \Pi_0(\bar{z}) + \mathcal{O}(\mu)$, $y(t, \mu) = \bar{y}_0(t) + \mathcal{O}(\mu)$. Доказательство представления с остаточным членом $\mathcal{O}(\mu^{n+1})$ сложнее лишь в чисто техническом отношении.

Дадим формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 7.5. *Пусть выполнены условия:*

1°. $F(z, y, t)$ *и* $f(z, y, t)$ *непрерывны по совокупности аргументов в некоторой области* H.

2°. *На сегменте* $[0, T]$ *определено решение* $\bar{y}_0(t)$, $\bar{z}_0(t)$ *задачи* (7.41), (7.45), *и это решение принадлежит* H.

3°. $F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$, *существует, непрерывна и отрицательна при* $\varphi(y^0, 0)$.

4°. z^0 принадлежит области влияния $\varphi(y^0, 0)$.

5°. *При* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\Delta| < \varepsilon$, $|\delta| < \varepsilon$ (ε — *некоторое, может быть, достаточно малое, но фиксированное, не зависящее от* μ *число*) *функции* $F(\bar{z}_0 + \Pi z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)$, $f(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)$ *непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно по* Δ *и* δ.

Тогда на $0 \leqslant t \leqslant T$ *справедливы равномерные относительно* t *оценки*

$$z(t, \mu) - \bar{z}_0(t) - \Pi_0 z(t/\mu) = \mathcal{O}(\mu), \tag{7.55}$$

$$y(t, \mu) - \bar{y}_0(t) = \mathcal{O}(\mu). \tag{7.56}$$

Доказательство теоремы основано на нескольких леммах.

Лемма 7.1. *Имеет место неравенство*

$$|\Pi_0 z| < Ce^{-\varkappa t/\mu}, \tag{7.57}$$

где $C > 0$, $\varkappa > 0$ — *некоторые постоянные.*

Доказательство. Мы уже видели выше, что $\Pi_0 z \to 0$ при $\tau \to \infty$. Сейчас требуется лишь уточнить характер этого стремления к нулю. Обратим внимание на то, что (7.57) — это (7.54) при $x = z$, $k = 0$. Из (7.47) имеем (напомним, что $\varphi(y^0, 0) = \bar{z}_0(0)$, $y^0 = \bar{y}_0(0)$)

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = F_z\left(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0\right)\Pi_0 z,$$

*) Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.

так как $\sup\limits_t (te^{-\varkappa t/\mu}) = \mu e^{-1}/\varkappa$. Здесь постоянная $Ce^{-1}/\varkappa$ вновь обозначена через C. Условимся в дальнейшем все не зависящие от μ постоянные обозначать одной и той же буквой C, за исключением отдельных случаев, как это уже делалось в § 2 гл. 5.

Доказательство теоремы 7.5. Положим $\Delta = z - \bar{z}_0 - \Pi_0 z$, $\delta = y - \bar{y}_0$. Вычитая (7.58) из (7.14), получим

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\Delta}{dt} &= F\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \Delta,\ \bar{y}_0 + \delta,\ t\right) - F\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z,\ \bar{y}_0,\ t\right) + R_1, \\ \frac{d\delta}{dt} &= f\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \Delta,\ \bar{y}_0 + \delta,\ t\right) - f\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z,\ \bar{y}_0,\ t\right) + R_2. \end{aligned} \tag{7.59}$$

Очевидно

$$\Delta(0, \mu) = 0, \qquad \delta(0, \mu) = 0. \tag{7.60}$$

Систему уравнений (7.59) можно переписать в виде

$$\mu \frac{d\Delta}{dt} = a_{11}\Delta + a_{12}\delta + R_1, \qquad \frac{d\delta}{dt} = a_{21}\Delta + a_{22}\delta + R_2, \tag{7.61}$$

где

$$a_{11}(\Delta, \delta, t, \mu) = \int_0^1 F_z\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \theta\Delta,\ \bar{y}_0 + \delta,\ t\right) d\theta,$$

$$a_{12}(\Delta, \delta, t, \mu) = \int_0^1 F_y\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z,\ \bar{y}_0 + \theta\delta,\ t\right) d\theta,$$

a_{21} и a_{22} имеют аналогичную структуру. Равенство правых частей (7.59) и (7.61) легко проверить непосредственно, если заметить, что под интегралом в выражении для a_{11} стоит величина $\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dF}{d\theta}\left(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \theta\Delta,\ \bar{y}_0 + \delta,\ t\right)$ и применить аналогичные соображения к остальным коэффициентам a_{ik}.

Из первого уравнения (7.61) выразим Δ через δ (будем в дальнейшем употреблять обозначение $\Delta(t)$, $\delta(t)$, опуская зависимость от μ):

$$\Delta(t) = \int_0^t \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\xi^t a_{11}\,dt}}{\mu} \left(a_{12}\delta(\xi) + R_1\right) d\xi. \tag{7.62}$$

Подставим результат во второе уравнение:

$$\frac{d\delta}{dt} = a_{22}\delta + a_{21}\int_0^t \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\xi^t a_{11}\,dt}}{\mu} \left(a_{12}\delta(\xi) + R_1\right) d\xi + R_2.$$

Отсюда получим

$$\delta(t) = \int_0^t e^{\int_\xi^t a_{22}\,dt} R_2\,d\xi + \int_0^t e^{\int_\xi^t a_{22}\,dt} a_{21}\,d\xi \int_0^\xi \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\eta^\xi a_{11}\,dt}}{\mu} \left(a_{12}\delta(\eta) + R_1\right) d\eta.$$

Введем $u = \int\limits_0^t |\delta|\,d\eta$. Тогда $\frac{du}{dt} = |\delta|$, $\left|\frac{du}{dt}\right| = |\delta|$ и (7.69) дает

$$\left|\frac{du}{dt}\right| < C|u| + C\mu. \tag{7.70}$$

Пользуясь леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах, получим отсюда

$$|u| < \mu(e^{Ct} - 1) \leqslant \mu(e^{CT} - 1) < C\mu. \tag{7.71}$$

Следовательно, в силу (7.70) $\left|\frac{du}{dt}\right| < C\mu$, т. е.

$$|\delta| < C\mu. \tag{7.72}$$

Пользуясь теперь (7.62), оценкой (7.72), тем что $|R_1| < C\mu$, и оценкой (7.66), получим

$$|\Delta| < \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{\varkappa_1}{\mu}(t-\xi)}}{\mu} C\mu\,d\xi < C\mu. \tag{7.73}$$

Оценки (7.72) и (7.73) и составляют утверждение теоремы 7.5, которая, таким образом, доказана.

3. Построение асимптотики фундаментальной системы решений для линейного уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. В ряде задач теории колебаний, квантовой механики и др. встречается сингулярно возмущенное уравнение вида

$$\mu^2 y'' + Q^2(x) y = 0, \tag{7.74}$$

не удовлетворяющее требованиям предыдущего пункта. К типу (7.74) принадлежит, в частности, уравнение движения маятника (7.11) при отсутствии трения, т. е. в случае $\alpha = 0$. Чтобы уравнение (7.11) свелось к системе типа (7.14), для которой выполнено условие устойчивости (7.18), лежащее в основе всей теории п. 1, нужно, чтобы α было отличным от нуля. Если же $\alpha = 0$, то теория п. 1 неприменима. Как известно, в этом случае решение уравнения (7.11) носит колебательный характер (вследствие малости μ колебания будут иметь очень большую частоту), т. е. явление качественно отличается от рассмотренного в п. 1.

Пользуясь линейностью уравнения (7.74), мы не будем связывать построение асимптотики с заданием дополнительных условий, как это было сделано в предыдущем пункте, где рассматривалась начальная задача, а поставим целью построить асимптотику фундаментальной системы решений, что даст возможность получать асимптотику решений, определяемых самыми разнообразными дополнительными условиями.

Будем предполагать, что $Q(x) \neq 0$ на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ и является трижды непрерывно дифференцируемой функцией (для определенности будем считать $Q(x) > 0$).

нуля. Имеем

$$D(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \overset{*}{y}_1 \\ y_1' & \overset{*}{y}_1{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} uv & u^*v^* \\ uv' + zv & u^*v^{*\prime} + z^*v^* \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что $v' = \frac{i}{\mu} Qv$, получим далее

$$D(y_1, y_2) = vv^* \begin{vmatrix} u & u^* \\ u\frac{i}{\mu}Q + z & -u^*\frac{i}{\mu}Q + z^* \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{iQ}{\mu} \begin{vmatrix} u & u^* \\ u + \mathcal{O}(\mu) & -u^* + \mathcal{O}(\mu) \end{vmatrix} = -\frac{2iQ}{\mu}[uu^* + \mathcal{O}(\mu)] =$$

$$= -\frac{2iQ}{\mu}\left[\bar{u}^2 + \mathcal{O}(\mu)\right],$$

откуда уже ясно, что эта величина отлична от нуля.

Таким образом, y_1, и $y_2 = \overset{*}{y}_1$ действительно образуют фундаментальную систему решений, и теорема 7.6 доказана.

Замечания. 1. Можно доказать, что аналогичный результат имеет место и для уравнения $\mu^2 y'' - Q^2(x) y = 0$, с той разницей, что в (7.78) следует i заменить единицей.

2. Полученные асимптотические формулы (7.78) теряют смысл, если на $[a, b]$ имеются точки, где $Q(x)$ обращаются в нуль. Такие точки называются *точками поворота*. Термин происходит из квантовой механики, где некоторые задачи для уравнения Шредингера в одномерном случае приводятся к уравнению типа (7.74). При наличии точек поворота асимптотика строится более сложным образом и соответствующая теория выходит за рамки настоящего учебника. Метод построения асимптотики решений уравнений типа (7.74) в физике часто называется ВБК-методом по имени ученых — физиков Венцеля, Бриллюэна и Крамерса, разработавших соответствующий алгоритм.

3. Метод нами продемонстрирован на примере (7.74). Следует, однако, заметить, что этот метод распространяется на сингулярно возмущенные системы более общего вида *).

4. Метод усреднения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \mu Y(y, t), \qquad y(0, \mu) = y^0. \tag{7.86}$$

Из предыдущего известно, что при условии достаточной гладкости правой части (7.86) на некотором сегменте $[0, T]$ решение задачи (7.86) представимо асимптотически многочленом по степеням μ (теорема 7.2). Однако при решении ряда вопросов математической

---

*) См., например, С. А. Ломов «Введение в общую теорию сингулярных возмущений» (М.: Наука, 1981), где приведен подробный анализ основных идей метода, его дальнейшее развитие и связь с вопросом так называемой регуляризации сингулярно возмущенных задач.

Предположим, что кроме предельных соотношений (7.87) справедливы также соотношения

$$\frac{d\overline{Y}}{d\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial Y}{\partial \eta}(\eta, t)\, dt, \tag{7.88}$$

т. е. среднее значение производной $\frac{\partial Y}{\partial \eta}$ равно производной от среднего значения $\overline{Y}$.

Поставим в соответствие уравнению (7.86) следующее, так называемое усредненное уравнение, которое в принципе проще (7.86):

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \overline{Y}(\eta), \qquad \eta(0) = y^0. \tag{7.89}$$

Справедлива следующая

Теорема 7.7. *Пусть*

1°. *В некоторой области* $|y| \leqslant b$, $0 \leqslant t < \infty$ *функция* $Y(y, t)$ *непрерывна и равномерно ограничена вместе с производной первого порядка по* y.

2°. *При* $|y| \leqslant b$ *существует среднее значение* (7.87), *а также справедливо* (7.88), *причем предельный переход в* (7.87) *и* (7.88) *имеет место равномерно относительно* $\eta \in [-b, b]$.

3°. *Решения* y *и* η *задач* (7.86) *и* (7.89) *существуют, и принадлежат* $(-b, b)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$, *где* L — *не зависящая от* μ *постоянная.*

Тогда равномерно относительно $t \in [0, L/\mu]$ *имеет место предельный переход*

$$\lim_{\mu\to 0} (y - \eta) = 0. \tag{7.90}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$u(\eta, t) = \int_0^t [Y(\eta, t) - \overline{Y}(\eta)]\, dt, \tag{7.91}$$

а также ее производную по η

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_0^t \left[\frac{\partial Y}{\partial \eta}(\eta, t) - \frac{d\overline{Y}}{d\eta}\right] dt, \tag{7.92}$$

и докажем, что в области $|\eta| \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$ справедливы соотношения

$$\mu u = \varepsilon(\mu), \qquad \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varepsilon(\mu). \tag{7.93}$$

Здесь и в дальнейшем условимся через $\varepsilon(\mu)$ обозначать любую величину, бесконечно малую вместе с μ равномерно относительно тех других переменных, например η и t, от которых эта величина завиоткуда и следует равномерное относительно $t \in [0, L/\mu]$ стремление Δ к нулю при $\mu \to 0$.

Пользуясь этим результатом, соотношением (7.94) и оценкой (7.93), получим (7.90), и теорема 7.7 тем самым доказана.

Замечания. 1. Утверждение теоремы 7.7 остается справедливым для случая, когда в (7.86) величина y является вектор-функцией. В условиях теоремы вместо $\frac{\partial Y}{\partial y}$ естественным образом появятся производные $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}$. В доказательстве встретятся небольшие технические осложнения при оценке Δ, которые можно преодолеть, пользуясь соображениями § 4 гл. 2.

2. Теорема 7.7 была сформулирована и доказана при упрощающем предположении, что не только решение $\eta(t, \mu)$ более простой, чем исходная, усредненной системы лежит в $(-b, b)$, но и решение $y(t, \mu)$ исходной системы также лежит в $(-b, b)$. От этого последнего требования можно избавиться, наложив дополнительное требование на $\eta(t, \mu)$: $\eta \in [-b+\delta, b-\delta]$ при $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$. Отсюда неравенство $|y(t, \mu)| < b$ можно получить как следствие. В самом деле, пусть при некотором $T \leqslant L/\mu$ имеем $|y(T, \mu)| = b$, т. е. интегральная кривая выходит на границу области. Возьмем $T^* < T$, достаточно близкое к T, чтобы $y(T^*, \mu)$ отличалось от $y(T, \mu)$ не более чем на $\delta/4$. Поскольку $|y(t, \mu)| < b$ при $0 \leqslant t \leqslant T^*$, то при $0 \leqslant t \leqslant T^*$ справедлива теорема 7.7 и при достаточно малых μ $\eta(T^*, \mu)$ отличается от $y(T^*, \mu)$ не более чем на $\delta/4$. А тогда $\eta(T^*, \mu)$ отличается от $y(T, \mu)$, равного b или $-b$, не более чем на $\delta/2$, что противоречит тому, что

$$\eta \in [-b+\delta, b-\delta].$$

Противоречие приводит к выводу, что $|y(t, \mu)| < b$ для $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$, а тогда, как было доказано, (7.90) справедливо на всем $[0, L/\mu]$.

Можно было бы не предполагать также и существования решения $y(t, \mu)$, а доказать его существование в окрестности $\eta(t)$, подобно тому, как это было сделано, например, в теореме 7.2.

3. Мы привели здесь простейшую теорему метода усреднения. Существует обширная литература, посвященная методу усреднения, в которой приводятся доказательства различных более тонких и сложных теорем и строятся приближения, дающие любую асимптотическую точность *).

---

*) Подробнее с этим кругом вопросов можно ознакомиться, например, по книгам:

Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.

Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.

Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: Изд-во МГУ, 1971.

ГЛАВА 8

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнения в частных производных первого порядка традиционно рассматриваются в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений по той причине, что построение их общего решения может быть проведено методами, развитыми в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет вид

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{8.1}$$

где F — некоторая заданная функция своих аргументов, а неизвестной функцией является u, зависящая от аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Мы остановимся на двух частных случаях (8.1). Это так называемое *линейное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{8.2}$$

и *квазилинейное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{8.3}$$

где a_i, a — заданные функции своих аргументов.

§ 1. Линейное уравнение

Обратимся к изучению уравнения (8.2):

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{8.4}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ изменяются в некоторой области G, и пусть в этой области функции $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ обладают непрерывныная производная от u по t в силу (8.6) совпадает с левой частью (8.5):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{du}{dt} = A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8.9}$$

Следовательно, в силу уравнения (8.5) $\frac{du}{dt} = 0$, над характеристикой апликата u интегральной поверхности сохраняет постоянное значение, т. е. характеристика является линией уровня интегральной поверхности.

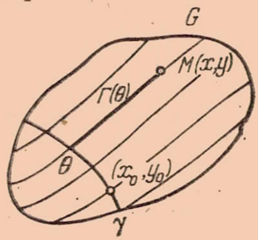

Рис. 21

Рассмотрим некоторую кривую γ, не совпадающую с характеристикой (рис. 21). Через каждую точку $M(x, y)$ области G проведем характеристику. Точка ее пересечения с кривой γ однозначно определяет эту характеристику, т. е. характеристики образуют однопараметрическое семейство. В качестве параметра можно взять, например, расстояние θ по кривой γ от некоторой фиксированной точки (x_0, y_0). Положение точки M на каждой характеристике определяется параметром t. Как видно из (8.6), t можно задать с точностью до произвольного слагаемого, поэтому будем считать, что точка пересечения каждой характеристики с кривой γ соответствует значению $t = t_0$.

Таким образом, в области G каждой точке $M(x, y)$ можно поставить в соответствие пару чисел (θ, t): θ определяет характеристику, проходящую через M, а t — значение параметра на характеристике, отвечающее точке M. Тем самым мы имеем взаимно однозначное соответствие $(x, y) \Leftrightarrow (\theta, t)$ или, аналитически,

$$\begin{aligned} x &= X(\theta, t), & y &= Y(\theta, t), \\ \theta &= \Theta(x, y), & t &= T(x, y). \end{aligned} \tag{8.10}$$

В переменных (θ, t) уравнение характеристики имеет вид $\frac{d\theta}{dt} = 0$, откуда $\theta = C$. Таким образом, вдоль характеристики

$$\Theta(x, y) = C. \tag{8.11}$$

Переменные θ, t удобны в том отношении, что, перейдя к этим переменным, мы можем легко получить решение уравнения (8.5). Обозначим

$$u(x, y) = u(X(\theta, t), Y(\theta, t)) = v(\theta, t).$$

В силу (8.10) уравнение (8.5) в переменных v, θ, t имеет вид $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (решение сохраняет свое значение вдоль характеристики). Так как $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, то v является функцией только θ, т. е. $v = F(\theta)$, а тем самым

$$u(x, y) = F(\Theta(x, y)), \tag{8.12}$$

где F — произвольная функция своего аргумента.

сти характеристику, то ее уравнение будет иметь вид $\Theta(x, y) = \xi$, а значение решения в точках этой характеристики равно $\omega[\Omega(\Theta(x, y))]$. А так как через каждую точку G проходит характеристика, то эта формула является выражением для решения в любой точке области G:

$$u(x, y) = \omega[\Omega(\Theta(x, y))]. \tag{8.15}$$

Соответствующая геометрическая картина представлена на рис. 23.

Нетрудно и непосредственно проверить, что формула (8.15) дает нужное решение: во-первых, это решение, так как содержится в (8.12), а кроме того $u(x, y)|_{\gamma_1} = \omega[\Omega(\xi)] = \omega(s)$, т. е. удовлетворяется условие (8.14).

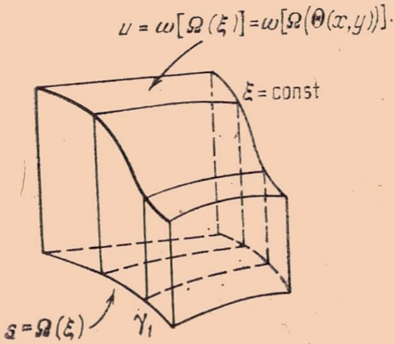

Рис. 23

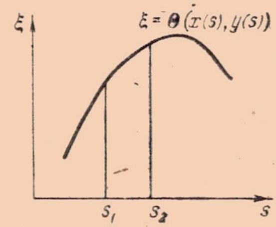

Рис. 24

Замечания. 1. Вместо $\Theta(x, y)$ во всех этих рассуждениях можно пользоваться $\varphi(x, y)$ (см. (8.13)).

2. Конечно, следует иметь в виду, что для получения $\Omega(\xi)$ нужно, чтобы ξ вдоль γ_1 зависела от s монотонно, как, например, на участке (s_1, s_2) (рис. 24). Тогда $s = \Omega(\xi)$ определено однозначно.

Пример 8.2. Рассмотрим уравнение из примера 8.1 и в качестве (8.14) возьмем условие

$$u(t, 0) = \mu(t). \tag{8.16}$$

Здесь γ_1 есть прямая $y = 0$, параметром s служит t. В этом случае

$$\varphi(t, y) = y - v_0 t, \qquad \varphi(t, y)\big|_{\gamma_1} = -v_0 t = \xi, \qquad t = \Omega(\xi) = -\xi/v_0.$$

Следовательно, искомое решение $u(t, y) = \mu\left(\dfrac{\varphi(t, y)}{-v_0}\right) = \mu\left(t - \dfrac{y}{v_0}\right)$. Таким образом, решение является бегущей волной, профиль которой однозначно определяется заданной функцией $\mu(t)$.

Пусть теперь γ_1 совпадает с какой-либо характеристикой. Здесь могут представиться разные случаи.

а) $u(x, y)\big|_{\gamma_1} = \mathrm{const} = u_0$. Тогда решение, очевидно, определяется неоднозначно, так как решением этой задачи будет любая функция $u(x, y) = f(\Theta(x, y))$, лишь бы $f\left(\Theta(x, y)\big|_{\gamma_1}\right) = u_0$. Например, можно получить $f(\Theta(x, y)) = F(\Theta(x, y)) - F\left(\Theta(x, y)\big|_{\gamma_1}\right) + u_0$ (напомним, что $F\left(\Theta(x, y)\big|_{\gamma_1}\right) = \mathrm{const}$), где F — уже произвольная функция.

а в качестве $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ можно взять начальные значения $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$; x_n будет играть роль t. Семейство решений системы (8.21) имеет вид

$$x_i = X_i\left(x_n, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0\right), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \qquad (8.22)$$

X_i выражает закон соответствия между парой точек интегральной кривой: начальной и текущей. Их можно поменять ролями, и тогда получим

$$x_i^0 = X_i\left(x_n^0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\right), \qquad i = 1, \ldots, n-1, \qquad (8.23)$$

где X_i — те же самые функции, что и в (8.22), так как выражают тот же закон соответствия.

Замечание. То, что справа в (8.22) и в (8.23) мы имеем одни и те же функции, удобно продемонстрировать на примере линейной системы с независимым переменным x_n и неизвестной вектор-функцией x с компонентами $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Формула (8.22) имеет вид (см. (3.84))

$$x = W(x_n) \times W^{-1}\left(x_n^0\right) x^0 \equiv \mathscr{K}\left(x_n, x_n^0\right) x^0.$$

Разрешая относительно x^0, получаем (8.23), т. е. $x^0 = W\left(x_n^0\right) W^{-1}(x_n)\, x = \mathscr{K}\left(x_n^0, x_n\right) x$.

Функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ (x_n^0 в (8.23) фиксировано) можно использовать в качестве Θ_i в построении общего решения (8.20). Заметим еще, что из взаимной обратимости формул (8.22) и (8.23) следует, что $\dfrac{D(X_1, \ldots, X_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0$ в G.

Определение. *Первым интегралом системы* (8.18) *называется функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, *обращающаяся тождественно в постоянную, когда точка* $x_1, \ldots, x_n$ *пробегает интегральную кривую системы* (8.18)*).

Очевидно, функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ в формулах (8.23) являются первыми интегралами системы (8.21), так как при подстановке (8.22) в правые части (8.23) они обращаются тождественно в x_i^0. Однако первыми интегралами могут быть и другие функции и, что особенно удобно при практическом решении, первые интегралы нередко могут быть получены, например, методом интегрируемых комбинаций (для получения (8.23) надо решать начальную задачу и это менее удобно).

Пример 8.3. $\dfrac{dx_1}{dx_3} = x_2$, $\dfrac{dx_2}{dx_3} = x_1$. Складывая эти уравнения, получим $\dfrac{d}{dx_3}(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)$. Отсюда $x_1 + x_2 = Ce^{x_3}$, и первым интегралом будет

$$\varphi_1 = (x_1 + x_2)\, e^{-x_3}.$$

*) Иногда первым интегралом называют не функцию φ, а соотношение $\varphi = \text{const}$.

$$a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

В каждой точке области G эти соотношения можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно $a_1, \ldots, a_n$. По условию $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$, т. е. имеется нетривиальное решение. Следовательно, определитель этой системы равен нулю всюду в G:

$$\frac{D(\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_n)} \equiv 0.$$

Отсюда по теореме анализа *) между $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ имеется функциональная зависимость и в силу условия (8.24) эта зависимость может быть представлена в разрешенном относительно ψ виде $\psi = \Psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, что и требуется.

Замечания. 1. Доказанная теорема дает обоснование приведенной выше формуле (8.20).

2. Формула (8.25) при произвольной дифференцируемой Ψ обладает тем свойством, что в ней, согласно теореме 8.3, содержится любое решение уравнения (8.4). С другой стороны, легко проверить непосредственно, что при любой дифференцируемой Ψ функция u из (8.25) удовлетворяет уравнению (8.4); тем самым формула (8.25) представляет общее решение уравнения (8.4).

Поставим теперь дополнительное условие, дающее возможность из множества (8.25) выделить одно решение. Для этого нужно задать в области G многообразие $n-1$ измерений и на этом многообразии задать значение искомого решения (в случае $n = 2$ в п. 1 задавалась кривая γ_1). Пусть это многообразие (обозначим его тоже γ_1) задается параметрически (через параметры $s_1, \ldots, s_{n-1}$) в виде $x_i = \omega_i(s_1, \ldots, s_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ и искомое решение на нем задается также как функция параметров $s_1, \ldots, s_{n-1}$:

$$u|_{\gamma_1} = \omega(s_1, \ldots, s_{n-1}) \tag{8.26}$$

(начальная задача, или задача Коши).

Пусть известны $n-1$ независимых первых интегралов φ_i. Имеем

$$\varphi_i|_{\gamma_1} = \varphi_i(\omega_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \omega_n(s_1, \ldots, s_{n-1})).$$

Обозначим $\xi_i = \varphi_i(\omega_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \omega_n(s_1, \ldots, s_{n-1}))$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Предположим, что эта система $n-1$ уравнений с $n-1$

---

*) Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I.— 4-е изд.— М.: Наука, 1982, гл. 15, теорема 15.4.

и тем самым левая часть уравнения (8.28) равна

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial u},$$

а это в силу (8.29) есть $a(x_1, \ldots, \varphi)$, т. е. уравнение (8.28) удовлетворяется.

Доказанная теорема и результаты предыдущего параграфа приводят к следующему способу построения решений уравнения (8.28). Нужно написать систему уравнений, определяющую характеристики линейного уравнения (8.29):

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{a}. \tag{8.30}$$

Интегральные кривые системы (8.30), *т. е. характеристики линейного уравнения* (8.29), *мы будем называть* ***характеристиками квазилинейного уравнения*** (8.28). Если уравнение (8.29) удовлетворяет условиям, наложенным на линейное уравнение в § 1, то эти характеристики заполняют область D переменных $x_1, \ldots, x_n, u$, так что через каждую точку D проходит одна и только одна характеристика. Далее, по формуле (8.25) строим общее решение уравнения (8.29) (только теперь независимых интегралов будет n и они будут функциями $x_1, \ldots, x_n, u$):

$$v = \Psi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u)). \tag{8.31}$$

Затем, полагая $v = 0$, получим уравнение для определения множества решений уравнения (8.28):

$$\Psi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0. \tag{8.32}$$

Замечание. Как было показано, формула (8.31) при достаточно общих предположениях содержит все решения уравнения (8.29). Можно ли сказать, что формула (8.32) содержит все решения уравнения (8.28)? Проанализируем доказательство теоремы 8.4. При проверке тождества (8.28) мы использовали тождество (8.29), и нам достаточно, чтобы (8.29) было тождеством по $x_1, \ldots, x_n$ (при этом $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$). Однако при построении $V(x_1, \ldots, x_n, u)$ требуется большее, а именно, чтобы (8.29) было тождеством по $x_1, \ldots, x_n, u$. Поэтому априори не исключена возможность, что могут быть такие решения (8.28), для которых (8.29) удовлетворяется не тождественно по $x_1, \ldots, x_n, u$, а только при $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Такие решения, вообще говоря, не содержатся в формуле (8.32). Они называются *специальными* решениями. Можно показать, что специальное решение — случай исключительный, и в дальнейшем рассмотрении мы их принимать во внимание не будем.

В отличие от линейного случая, в квазилинейном случае характеристики лежат не в пространстве $x_1, \ldots, x_n$, а в пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$, и поэтому геометрический смысл характеристики здесь иной. Докажем следующий факт.

Теорема 8.5. *Всякая интегральная поверхность $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из характеристик в том смысле, что через каждую точку*

Эти же геометрические соображения дают возможность предложить следующую процедуру для решения задачи с дополнительным условием (задачи Коши), которая ставится следующим образом: через $(n-1)$-мерное многообразие Γ_1 в пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$ провести интегральную поверхность. Это многообразие можно задать параметрически в виде

$$\begin{aligned} &x_i = \omega_i(s_1, \ldots, s_{n-1}), \qquad i = 1, \ldots, n, \\ &u = \omega(s_1, \ldots, s_{n-1}). \end{aligned} \tag{8.37}$$

Таким образом, задача по существу та же, что и для линейного уравнения.

Теперь мы должны связь (8.36) наложить не произвольным образом, а исходя из (8.37). Для этого подставим (8.37) в (8.35):

$$\varphi_i(\omega_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \omega(s_1, \ldots, s_{n-1})) = \theta_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и, исключая отсюда $s_1, \ldots, s_{n-1}$, получим искомую связь (8.36), в которой Ψ будет уже, вообще говоря, вполне определенной функцией, а (8.32) будет давать решение задачи (8.37).

Не проводя в общем виде анализа того, какие особенности могут представиться при выполнении описанной процедуры, проследим это на трехмерном случае (подобно тому, как было сделано в § 1), которому отвечает уравнение

$$A(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y, u). \tag{8.38}$$

Зададим Γ_1 (в трехмерном случае это кривая):

$$x = X(s), \quad y = Y(s), \quad u = U(s). \tag{8.39}$$

Выписываем систему (8.30), имеющую вид

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C},$$

и находим два первых интеграла $\varphi_i(x, y, u)$ $(i = 1, 2)$. Подставляя (8.39), получим

$$\varphi_i(X(s), Y(s), U(s)) = \theta_i, \qquad i = 1, 2. \tag{8.40}$$

Исключая из этих двух уравнений s, найдем связь

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = 0. \tag{8.41}$$

Тем самым уравнение искомой поверхности будет

$$\Psi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0. \tag{8.42}$$

Геометрический смысл процедуры очень простой: из каждой точки заданной кривой Γ_1 выпускается характеристика, и все такие характеристики в совокупности образуют искомую интегральную поверхность (рис. 25).

что $\varphi_1 = \text{const}$). Таким образом, другой первый интеграл имеет вид

$$\varphi_2 = ue^{-b_1(t, x-vt)}.$$

При $x = 0$ имеем (8.40):

$$\theta_1 = -vt, \qquad \theta_2 = u_0(t)\, e^{-b_1(t, -vt)}.$$

Отсюда находим связь (8.41):

$$\theta_2 = u_0\left(-\frac{\theta_1}{v}\right) e^{-b_1\left(-\frac{\theta_1}{v}, \theta_1\right)},$$

и формула (8.42) дает

$$ue^{-b_1(t, x-vt)} = u_0\left(t - \frac{x}{v}\right) e^{-b_1\left(t-\frac{x}{v}, x-vt\right)}.$$

Можно найти также явное выражение для $u(x, t)$:

$$u = u_0\left(t - \frac{x}{v}\right) e^{b_1(t, x-vt) - b_1\left(t-\frac{x}{v}, x-vt\right)}.$$

Пример 8.5. Линейное уравнение можно трактовать как квазилинейное. При этом $a = 0$ и заведомо одним из первых интегралов является u. Это соответствует установленному в § 1 факту, что вдоль характеристики $u = \text{const}$ (теорема 8.1).

Рассмотрим уравнение

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{8.45}$$

и решим его «квазилинейным» способом. Соответствующая система (8.32) дает два первых интеграла: $\varphi_1 = u$, $\varphi_2 = x^2 + y^2$. Формула (8.32) дает $\Psi(u, x^2 + y^2) = 0$, откуда $u = \psi(x^2 + y^2)$. Таким образом, решением уравнения (8.45) является произвольная гладкая поверхность вращения.

Рассмотрим теперь различные дополнительные условия:

А. Γ_1 — прямая линия, $x = s$, $y = s$, $u = s$. Описанный прием дает $\theta_1 = s$, $\theta_2 = 2s^2 \Rightarrow \theta_2 = 2\theta_1^2$, и решением задачи будет $x^2 + y^2 = 2u^2$ — конус.

Б. Γ_1 — окружность: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $u = 1$. Таким образом, Γ_1 является характеристикой уравнения (8.45), рассматриваемого как квазилинейное уравнение. В данном случае имеем $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1$, и решением будет поверхность вида $\Phi(u, x^2 + y^2) - \Phi(1, 1) = 0$. Геометрически ясно, что через заданную окружность действительно можно провести бесконечно много поверхностей вращения.

В. Рассматривая (8.45) как линейное уравнение, можно продемонстрировать случай, описанный в конце п. 1 § 1, когда решение задачи Коши не существует. Пусть γ_1 задана в виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, а $u|_{\gamma_1} = t$. Любая поверхность вращения имеет постоянную аппликату на заданной окружности γ_1, и, таким образом, условие $u|_{\gamma_1} = t$ удовлетворено быть не может.

2. Понятие о разрывных решениях. Ударные волны. В настоящем пункте мы рассмотрим одно характерное для квазилинейных уравнений явление, которого не наблюдалось для линейного случая. Продемонстрируем это явление на простейшем примере квазилинейного

Чтобы разъяснить этот кажущийся парадокс, найдем решение поставленной задачи в явном виде. Имеем $u = 1 - s$, $x = s + (1 - s)^2 t$, откуда, исключая s, получим

$$u = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t(1 - x)}}{2t} \tag{8.47}$$

(радикал берется со знаком «—», чтобы удовлетворялось условие $u(0, x) = 1 - x$).

Из выражения (8.47) непосредственно видно, что решение определено левее гиперболы: $4t(1 - x) = 1$ (рис. 27, кривая L). В точках гиперболы L подкоренное выражение обращается в нуль, а далее с ростом t становится отрицательным. Таким образом, в точках гиперболы решение перестает существовать. Заметим, что при этом $\frac{\partial u}{\partial x} \to \infty$. Нетрудно проверить, что на линии L нарушается условие $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$, фигурирующее в теореме 8.4.

Слева от гиперболы пересечения проекций характеристик не происходит и никакой «неоднозначности» в решении нет. Прямая $x = t$ «не доходит» до прямой $x = 1$, так как прямая $x = t$ сначала обязана пересечь гиперболу, а на ней решение перестает существовать.

З а м е ч а н и е. Гипербола L является местом пересечения бесконечно близких проекций, в данном случае огибающей семейства $x = s + (1 - s)^2 t$. Ее можно найти, воспользовавшись s-дискриминантной кривой этого семейства.

То, что решение существует лишь в ограниченной области, можно наблюдать и для обыкновенных дифференциальных уравнений, но разобранный сейчас случай интересен тем, что он имеет непосредственную связь с рассмотренными физическими задачами.

Обратимся к задаче п. 4 § 2 гл. 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + p(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x, 0) = u_0(x). \tag{1.33}$$

Функция $p(u)$, которую можно получить экспериментально, имеет характер, представленный на рис. 28. Таким образом, физически интересный случай качественно не слишком сильно отличается от примера $p = u^2$, который только что был исследован. Естественно ожидать, что в рассматриваемой физической задаче решение перестает существовать на некоторой линии L, при этом обратится в бесконечность производная по x, подобно тому, как в разобранном примере. Но ведь физически процесс имеет место и за линией L, т. е. для бóльших t. Возникает вопрос, каким же образом получить отвечающее данному физическому процессу решение, справедливое за линией L?

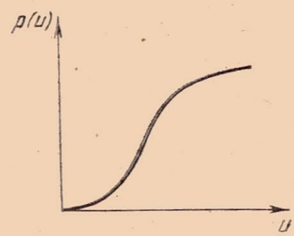

Рис. 28

Для выяснения этого вопроса мы используем физические соображения — все тот же закон сохранения количества вещества, который привел к дифференциальному уравнению (1.33).

Обозначим через u_1 предельное значение u на линии L (ее можно назвать линией разрыва), которое получено из классического решения, определенного начальными данными, т. е. предельное значение изнутри области I (до разрыва). Для построения следующего гладкого участка нам нужно найти предельное значение u_2 изнутри области II (после разрыва), которое примем за начальное для построения решения на следующем после разрыва этапе.

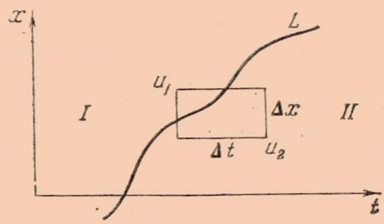

Рис. 29

Уравнение баланса запишем с этой целью в следующем виде (учитывая, что $u(x, t) = u_1$, $u(x, t + \Delta t) = u_2$, $u(x - \Delta x, t) = u_2$; см. рис. 29, где изображен бесконечно малый прямоугольник, левая верхняя вершина которого лежит в области I бесконечно близко к линии L, а остальные в области II):

$$-(u_2 - u_1)\Delta x = [v(u_1)u_1 - v(u_2)u_2]\Delta t.$$

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ и учитывая, что $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ стремится к производной $\frac{dx}{dt}$ от функции, описывающей кривую L (эту производную естественно назвать скоростью движения разрыва v_p), получим

$$v_p = \frac{v(u_1)\,u_1 - v(u_2)\,u_2}{u_1 - u_2}. \tag{8.49}$$

Зная u_1 и v_p, можно по этой формуле определить u_2.

Зная u_2, можно снова построить гладкий участок решения до новой кривой типа L. Такой кривой может, однако, и не возникнуть. Мы уже видели выше, что возникновение первого разрыва было связано с тем, что характеристики «сходились». Второго разрыва не возникает, если после разрыва характеристики окажутся «расходящимися». Аналитически возникновение или отсутствие разрыва выясняется точно так же, как это делалось выше для решения (8.48).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений 102
Аппроксимация разностной схемы, порядок аппроксимации 158
Асимптотика 180
Асимптотическая формула 178
Асимптотический ряд 180
Асимптотическое представление 178
— разложение 180

Бегущая волна 212

Возмущение правых частей (входных данных) 158, 159
— регулярное 180
— сингулярное 183
Возмущенная задача 159
Возмущенное и невозмущенное уравнения 180
Вырожденная система 184

Граничные условия первого, второго и третьего рода 107
C-дискриминантная кривая 45
p-дискриминантная кривая 45

Задача краевая 107
— на собственные значения (задача Штурма — Лиувилля) 107, 123
— начальная (задача Коши) 10

Импульсная матрица 94
— функция 81
Интеграл дифференциального уравнения 24
Интегральная кривая 9
— поверхность 210
Интегральное уравнение 11
— — Фредгольма второго рода 126
Интегрирование в квадратурах 24
— дифференциального уравнения 9
Интегро-дифференциальное уравнение 19

Качественная теория дифференциальных уравнений 150
Квадратура 24

Лемма о дифференциальных неравенствах 29
— — — — столбцов 90, 93
Линейная зависимость и независимость столбцов 90, 93
— — — — функций 77
Ломаные Эйлера 32

Матрицант 94
Матричная запись системы линейных уравнений 90
Метод вариации постоянной 27
— ВБК 203
— неопределенных коэффициентов 88
— последовательных приближений (метод Пикара) 27
— стрельбы 167
— усреднения 203
Метрическое пространство 63

Независимость первых интегралов 216
Неподвижная точка 63
Неустойчивость решения 143
Норма равномерная (чебышёвская) 153
— собственной функции 125
— среднеквадратичная (гильбертова) 153
Нормальная система дифференциальных уравнений 8

Область влияния устойчивого корня 186
Обобщенное решение квазилинейного уравнения 226
— — обыкновенного дифференциального уравнения 12, 38
Общее решение линейного неоднородного уравнения 80
— — — однородного уравнения 68, 79
— — — уравнения в частных производных 217
— — системы линейных уравнений 94
Общий интеграл 24
Обыкновенная точка 38
Однородные и неоднородные краевые задачи 107

Фазовая траектория 9
Фазовое пространство 9
Фазовый портрет 149
Фокус 148
Формальный ряд 102, 191
Формула Грина 109
Фундаментальная матрица 94
— система решений 78, 93
Функция Грина краевой задачи 112
— — обобщенная 117
— Ляпунова 140—142, 144
— положительно определенная 140

Характеристики квазилинейного уравнения в частных производных 219
— линейного уравнения в частных производных 210, 214
Характеристический многочлен 83
Характеристическое уравнение 67, 71, 84, 96, 163

Центр 148