В. И. СОБОЛЕВ

ЛЕКЦИИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. И. СОБОЛЕВ

ЛЕКЦИИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

517.2
С 54
УДК 517.0

Лекции по дополнительным главам математического анализа. Соболев В. И., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1968.

Излагаются элементы общей теории множеств, теории точечных множеств на прямой и плоскости, основы теории метрических пространств и множеств в них. Дается построение интеграла по абстрактным множествам и, как реализация этой абстрактной схемы, интеграл Лебега на числовой прямой. Излагаются также основные сведения о функциях с ограниченной вариацией и абсолютно непрерывных функциях от одной переменной, включая дифференциальные свойства таких функций.

Рассматриваются линейные нормированные пространства и простейшие свойства операторов, действующих в них. В гильбертовом пространстве строится спектральная теория вполне непрерывного симметрического оператора. Как приложение этой теории рассматриваются интегральные уравнения с симметрическим ядром. Приводится доказательство теорем Фредгольма и для интегральных уравнений с несимметрическим ядром, имеющим интегрируемый квадрат.

Рисунков 7.

Владимир Иванович Соболев

Лекции по дополнительным главам математического анализа

М., 1968 г., 288 стр. с илл.

Редакторы *С. А. Широкова* и *М. А. Смолянский*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *М. Л. Липелис*

Сдано в набор 24/IX 1967 г. Подписано к печати 5/II 1968 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 9. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 14,50. Тираж 70 000 экз. Т-00035. Цена книги 61 коп. Заказ № 1273.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы,
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-2-3

49-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой обработку лекций, которые автор неоднократно читал студентам-математикам третьего курса Воронежского университета.

Основные понятия и методы теории функций действительного переменного и функционального анализа должны быть в настоящее время необходимым элементом образования любого математика-аналитика, независимо от того, будет ли он впоследствии работать именно в этих областях математики или же будет заниматься теорией аналитических функций, дифференциальными уравнениями, математической физикой, методами вычислений и пр. Полезно знать эти основы и учителям математики. Автору кажется, что именно такой объем сведений по теории функций действительного переменного и функциональному анализу содержится в предлагаемой книге.

В течение одного года (два семестра по два часа в неделю) автору не удалось изложить полностью имеющийся в книге материал, но в разные годы он весь был рассказан. Поэтому, если в главах I — VI содержится материал, который следует излагать полностью, то главы VII — IX можно проходить выборочно, изучая подробно те вопросы, которые понадобятся студентам данного потока в последующих курсах и семинарах, и ограничиваясь усвоением определений и формулировок теорем без доказательств, относящихся к остальному содержанию этих глав. В книге имеется некоторое количество упражнений, как правило, носящих элементарный характер, целью которых является содействовать лучшему усвоению студентами вводимых в соответствующих параграфах понятий.

В математической литературе на русском языке есть ряд хороших курсов основ теории функций действительного переменного и функционального анализа. Достаточно назвать известные учебники Г. Е. Шилова, А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина, И. П. Натансона, Б. З. Вулиха и др. Все же автор надеется, что и эта книга окажется полезной для развития математического образования в нашей стране.

С рукописью книги ознакомились М. А. Красносельский, В. В. Покорный и Г. Е. Шилов и сделали ряд полезных замечаний, за которые автор приносит им благодарность. Автор благодарит также Б. Н. Садовского за участие в подборе упражнений и В. Н. Камышникова, помогавшего в подготовке рукописи к печати.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Множества. Простейшие операции над множествами

Мы будем рассматривать *множества*, или совокупности, или собрания объектов какой-либо природы. Понятие множества мы считаем достаточно простым и интуитивно ясным, и поэтому определения этого понятия, т. е. сведения его к другим понятиям, более простым и более ясным, не даем.

Мы будем рассматривать множества чисел, множества точек, множества линий, множества функций и т. д. Например, мы часто будем рассматривать множество N всех натуральных чисел, множество точек отрезка $[0,1]$, множество $C[a, b]$ всех функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, множество l_2 всех последовательностей вещественных чисел $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходится, и т. д. Каждое отдельное множество задается правилом или законом, позволяющим относительно любого объекта судить, принадлежит ли он данному множеству или нет. Множества будут обозначаться большими буквами латинского или готического алфавита: A, B, M, N, P, Q, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$ и т. д. Объекты, из которых составлено множество, называются *элементами* множества. Мы будем обозначать их малыми буквами латинского или греческого алфавита.

Если a есть элемент множества A, то пишут $a \in A$, если x не является элементом множества A, то пишут $x \overline{\in} A$. Существует одно специальное множество, так называемое *пустое множество*, которое не содержит ни одного элемента. Таково, например, множество всех вещественных корней уравнения

$$x^2 + 1 = 0.$$

Понятие пустого множества помогает более просто и более общо формулировать некоторые утверждения о множествах. Пустое множество обозначается символами $\emptyset$, или Λ, или 0.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если из $x \in A$ следует $x \in B$, и обратно: из $y \in B$ следует $y \in A$. В этом случае пишут $A = B$. Пусть снова даны два множества A и B. Если каждый элемент $x \in A$ является также элементом множества B, $x \in B$, то говорят, что *множество A включено в множество B*, или что A является *подмножеством* множества B. Говорят также, что A есть *часть* B. В этом случае пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Включение $A \subset B$ не исключает равенства этих множеств. Если же $A \subset B$, но $A \neq B$, то A называют *собственным подмножеством* или *правильной частью* множества B. Так, например, множество четных чисел $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ есть собственное подмножество множества N всех натуральных чисел; множество всех многочленов $P_n(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, есть подмножество множества $C[a, b]$ всех непрерывных на $[a, b]$ функций и т. д. Условимся также считать, что пустое множество является подмножеством любого множества[1]).

Пусть дана совокупность множеств $\{A, B, C, \ldots\}$. Рассмотрим новое множество M, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят по крайней мере в одно из множеств $A, B, C, \ldots$ Множество M называется *суммой* или *объединением* множеств $A, B, C, \ldots$ и обозначается $M = A + B + C + \ldots$ или $M = A \cup B \cup C \cup \ldots$ Итак, если $M = A \cup B \cup C \cup \ldots$, то каждый элемент множества M входит или в A, или в B, или в C и т. д. и каждый элемент, входящий в одно из этих множеств, входит в M. Отметим, что если какой-либо элемент входит в несколько множеств, то в объединение этих множеств он включается только один раз.

Если мы имеем систему множеств $\{A_\xi\}$, где множества этой системы отличаются друг от друга различными значениями индекса ξ, который может пробегать как дискретную, так и непрерывную совокупность значений, то для объединения

[1]) Это соглашение можно оправдать следующим соображением. Включение $A \subset B$ означает, что элемент, не входящий в B, не может входить в A. Но элемент, не входящий в данное множество A, не входит и в пустое множество, так как в него вообще ничего не входит. Поэтому для любого данного множества A имеем $\emptyset \subset A$.

множеств этой системы используется обозначение $\bigcup\limits_{\xi} A_{\xi}$. В частности, объединение последовательности $\{A_n\}$ множеств обозначается $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Примеры. 1. Предположим, что на плоскости выбрана некоторая система координат xOy. Пусть A — множество точек этой плоскости, лежащих над осью Ox, т. е. точек $p(x, y)$, у которых x — любое вещественное число, а $y > 0$.

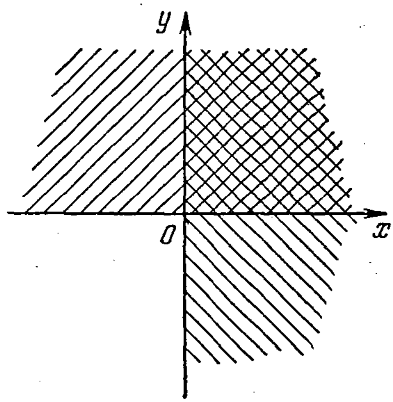

Рис. 1.

Пусть, далее, B — множество точек, лежащих правее оси Oy, т. е. точек $q(x, y)$ таких, что $x > 0$, а y — любое вещественное число. Тогда множество $C = A \bigcup B$ состоит из всех тех точек плоскости, у которых либо $x > 0$, либо $y > 0$ (рис. 1).

2. Пусть A_n — множество целых положительных чисел, кратных n. Тогда

$$M = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \bigcup A_n \bigcup \ldots$$

есть множество всех натуральных чисел, бо́льших единицы. Пусть снова дана совокупность множеств $A, B, C, \ldots$ Множество M, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B, и множеству C и т. д., называется *произведением* или *пересечением* множеств $A, B, C, \ldots$ и обозначается

$$M = A \cdot B \cdot C \ldots \quad \text{или} \quad M = A \bigcap B \bigcap C \ldots$$

Итак, если $M = A \bigcap B \bigcap C \bigcap \ldots$, то M состоит из всех тех элементов, которые входят в каждое из пересекаемых множеств. Снова, если мы имеем систему множеств $\{A_{\xi}\}$, то для обозначения пересечения этих множеств используется символ $\bigcap\limits_{\xi} A_{\xi}$, для пересечения последовательности $\{A_n\}$ множеств — символ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Примеры. 3. Если A и B — множества примера 1, то $A \cap B$ состоит из тех и только тех точек, обе координаты которых положительны.

4. Если A_n — множества примера 2), то $M = \bigcap\limits_{n=2}^{\infty} A_n$ пусто.

5. Пусть $A = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ и $B = \{3, 6, \ldots, 3n, \ldots\}$. Тогда

$$A \cap B = \{6, 12, \ldots, 6n, \ldots\}.$$

Из определения объединения и пересечения множеств ясно, что операции объединения и взятия пересечения обладают свойством коммутативности и ассоциативности. Легко показать также, что имеет место следующий закон дистрибутивности:

$$M \cap (A \cup B \cup C \cup \ldots) = \\ = (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (M \cap C) \cup \ldots \quad (1)$$

В самом деле, если $x \in M \cap (A \cup B \cup C \cup \ldots)$, то $x \in M$ и $x \in A \cup B \cup C \cup \ldots$ Из последнего следует, что x принадлежит одному из объединяемых множеств, например, C. Но так как, кроме того, $x \in M$, то $x \in M \cap C$, откуда вытекает, что $x \in (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (M \cap C) \cup \ldots$ Пусть, напротив, $x \in (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (M \cap C) \cup \ldots$ Тогда x входит в одно из объединяемых множеств, например, $x \in M \cap B$. Но в этом случае $x \in M$ и $x \in B$. Из последнего следует, что $x \in A \cup B \cup C \cup \ldots$, и так как, кроме того, $x \in M$, то

$$x \in M \cap (A \cup B \cup C \cup \ldots).$$

Итак, мы доказали, что всякий элемент, входящий в множество, стоящее в правой части равенства (1), входит и в множество, стоящее в левой части равенства (1), и обратно. Следовательно, эти множества действительно совпадают, и равенство (1) доказано.

Свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности операций объединения и пересечения множеств указывают на сходство этих операций с операциями сложения и умножения чисел. Однако между операциями сложения и умножения применительно к множествам и применительно к числам существует глубокое различие. Так, например, для множеств справедливы равенства

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A,$$

и если $A \supset B$, то выполняются равенства

$$A \cup B = A, \quad A \cap B = B,$$

не имеющие места для чисел (за исключением случая, когда одно из чисел равно нулю или единице).

Пусть даны множества A и B. Элементы множества A, не входящие в B, образуют множество, называемое *разностью* множеств A и B и обозначаемое $A - B$ или $A \setminus B$. Если B есть подмножество A, то разность $A - B$ называют также *дополнением* множества B до множества A и пишут $C_A B$. Если ясно, до какого множества берется дополнение, то пишут просто CB. Например, дополнением множества всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$ до этого отрезка будет множество иррациональных точек отрезка $[0, 1]$.

Заметим, что закон ассоциативности при комбинировании операций вычитания и прибавления множеств, вообще, не имеет места. Так, в общем случае

$$(A \setminus B) \cup B \neq A.$$

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6,\}$, то $A \setminus B = \{1, 2\}$, откуда $(A \setminus B) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq A$. Однако если $B \subset A$, то легко проверить, что $(A \setminus B) \cup B = A$, и обратно, если имеет место это равенство, то $B \subset A$.

Принцип двойственности. Пусть дана система множеств $\{A_\xi\}$, где ξ — некоторый индекс, с помощью которого множества системы отличаются одно от другого и множества Ω, причем $A_\xi \subset \Omega$ для всех ξ. Тогда

$$\bigcup_\xi CA_\xi = C(\bigcap_\xi A_\xi) \tag{1}$$

и

$$\bigcap_\xi CA_\xi = C(\bigcup_\xi A_\xi), \tag{2}$$

где дополнение берется до множества Ω.

Докажем первое из этих равенств; второе доказывается аналогично.

Пусть $a \in \bigcup_\xi CA_\xi$, тогда $a \in CA_{\xi_0}$ для некоторого ξ_0, и поэтому $a \in \Omega$ и $a \overline{\in} A_{\xi_0}$. Из последнего вытекает, что $a \overline{\in} \bigcap_\xi A_\xi$, и так как $a \in \Omega$, то, следовательно, $a \in C(\bigcap_\xi A_\xi)$. Итак,

$$\bigcup_\xi CA_\xi \subset C(\bigcap_\xi A_\xi). \qquad (\alpha)$$

Пусть, обратно, $b \in C(\bigcap_\xi A_\xi)$. Тогда $b \in \Omega$ и $b \overline{\in} \bigcap_\xi A_\xi$. Следовательно, $b \overline{\in} A_{\xi'}$ для некоторого ξ', и так как $b \in \Omega$, то $b \in CA_{\xi'}$. Но тогда $b \in \bigcup_\xi CA_\xi$, и следовательно,

$$C(\bigcap_\xi A_\xi) \subset \bigcup_\xi CA_\xi. \qquad (\beta)$$

Из сравнения (α) и (β) получаем требуемое равенство.

Замечание. Так как очевидно, что $C(CA_\xi) = A_\xi$, то равенство (2) можно вывести из равенства (1), заменив в нем A_ξ на B_ξ, где $B_\xi = CA_\xi$, и значит, $A_\xi = CB_\xi$, и взяв от обеих частей равенства (1) дополнения.

Упражнения. 1. Доказать, что

$$(A \setminus B) \cap C = A \cap C \setminus B \cap C.$$

2. Чему равны $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right]$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right)$?

3. Пусть $f(x)$ — неотрицательная на $[a, b]$ функция. Назовем подграфиком $G(f)$ этой функции множество точек плоскости вида (x, y), где $a \leqslant x \leqslant b$ и $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ для данного x. Будут ли множества $G(f_1) \cup G(f_2)$ и $G(f_1) \cap G(f_2)$ подграфиками некоторых функций? Каких именно?

4. Доказать, что если $A \cup B = A$ и $A \cap B = A$, то $A = B$.

5. Доказать, что $\bigcup_\xi A_\xi \setminus \bigcup_\xi B_\xi \subset \bigcup_\xi (A_\xi \setminus B_\xi)$.

6. Пусть Γ_λ — множество точек плоскости, лежащих на кривой $y = \frac{1}{x^\lambda}$, $0 < x < \infty$. Чему равно множество $\bigcap_{\lambda \geq 1} \Gamma_\lambda$?

7. Пусть $M_1 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ и $M_2 = \{3, 6, \ldots, 3n, \ldots\}$. Чему равно $M_1 \setminus M_2$?

§ 2. Эквивалентные множества. Мощность

Пусть даны два множества A и B, составленные из элементов любой природы. Если каждому элементу $a \in A$ по некоторому правилу или закону ставится в соответствие единственный, вполне определенный элемент $b \in B$, и обратно, в силу того же самого правила каждому элементу $b' \in B$ соответствует один-единственный элемент $a' \in A$, то говорят, что между элементами множеств A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*. Будем писать в этом случае $a \leftrightarrow B$.

Примеры. 1. Пусть A — полуокружность без крайних точек, B — бесконечная прямая $(-\infty, \infty)$. Между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Закон соответствия ясен из чертежа (рис. 2).

2. Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ и $M = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$. Соответствие $n \leftrightarrow 2n$, очевидно, взаимно однозначное.

Если между элементами множеств A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то эти множества называют *эквивалентными* и пишут $A \sim B$. Легко проверить, что

1) $A \sim A$,

2) если $A \sim B$, то $B \sim A$,

3) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

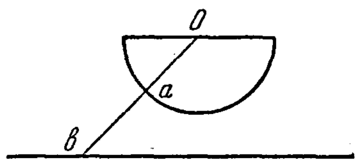

Рис. 2.

Рассмотрим два эквивалентных множества A и B, состоящих из конечного числа элементов. Ясно, что они содержат одно и то же число элементов. Поэтому можно сказать, что число элементов конечного множества есть то общее, что имеется у всех эквивалентных друг другу конечных множеств. В связи с этим становится естественным следующее определение.

Мощностью произвольного множества A называется то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных данному множеству A.

Если A — конечное множество, то его мощность совпадает с числом элементов этого множества. Мощность множества A обозначается $\overline{\overline{A}}$. В силу определения мощности, если $A \sim B$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Вернемся к примеру 2. Эти множества эквивалентны, и в то же время M есть собственное подмножество множества N. Мы сталкиваемся здесь с невозможной для конечных множеств ситуацией, когда часть множества имеет ту же мощность, что и все множество. Оказывается, что это обстоятельство характерно для бесконечных множеств, и мы увидим ниже, что в любом бесконечном множестве можно выделить правильную часть, равномощную со всем множеством.

Рассмотрим множество A, эквивалентное множеству натуральных чисел N. Из определения следует, что элементам из множества A можно поставить во взаимно однозначное соответствие числа натурального ряда, т. е. что элементы множества A можно занумеровать:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Множество A, эквивалентное множеству чисел натурального ряда, называется *счетным* множеством. Мощность счетного множества мы обозначим буквой a, т. е. $\overline{\overline{N}} = a$.

Теорема. 1. *Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество M_0 и притом такое, что $M \setminus M_0$ — бесконечно.*

Доказательство. Возьмем два произвольных различных элемента множества M и обозначим их через a_1 и b_1. Так как множество M бесконечно, то оно не исчерпывается элементами a_1 и b_1, и в нем можно взять два различных элемента a_2 и b_2, отличных от a_1 и b_1. Так как множество M бесконечно, то оно не исчерпывается элементами a_1, b_1, a_2, b_2, и в нем также можно взять два различных элемента a_3 и b_3, отличных от a_1, b_1, a_2, b_2 и т. д. до бесконечности. Мы получаем, таким образом, два счетных подмножества

$$M_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \text{ и } M_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

множества M, а так как M_1 входит в $M \setminus M_0$, то это последнее множество бесконечно, и теорема доказана.

Пусть даны два множества A и B. Если A неэквивалентно B, но в A есть подмножество, эквивалентное B, то будем говорить, что мощность A *больше* мощности B, и писать $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$. Если A и B — конечные множества, то это просто обозначает, что число элементов A больше числа элементов B.

Предыдущая теорема говорит, что из всех бесконечных множеств счетные множества имеют наименьшую мощность, если только существуют бесконечные множества, неэквивалентные счетному. Такие множества действительно существуют, как показывает следующая теорема.

Теорема 2 (Кантора). *Множество P точек отрезка* $[0, 1]$ *неэквивалентно множеству N натуральных чисел.*

Доказательство. Допустим, что множество $P=[0, 1]$ счетно, т. е. что точки этого множества можно занумеровать в последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка. Тогда по крайней мере один из этих отрезков не будет содержать точки x_1 (точка x_1 может принадлежать либо одному частичному отрезку, либо двум, являясь их общим концом). Отрезок Δ_1, не содержащий точки x_1, снова разделим на три равных отрезка. По крайней мере один из них, Δ_2, не будет содержать точки x_2. Отрезок Δ_2 второго деления, не содержащий точки x_2, снова разделим на три равных отрезка и т. д. Получим последовательность отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$, вложенных друг в друга[1]), длины которых стремятся к нулю. Пусть x_0 — точка, принадлежащая всем этим отрезкам. Тогда, с одной стороны, точка $x_0 \in [0, 1]$ и, следовательно, совпадает с одной из точек x_n последовательности (1). С другой стороны, точка x_0 не может совпадать ни с одной точкой x_n последовательности (1), так как точка x_n не принадлежит отрезку Δ_n, а точка x_0 входит в этот отрезок. Полученное противоречие доказывает, что предположение об эквивалентности P и N неверно.

Множества, эквивалентные множеству точек отрезка $[0, 1]$, называются множествами *мощности континуума*. Мощность континуума обозначается обычно буквой c, т. е. $\overline{\overline{[0, 1]}}=c$. Теорема Кантора в сочетании с предыдущей теоремой показывает, таким образом, что $c > a$.

Существуют ли множества мощности большей, чем c? Оказывается, существуют.

Теорема 3. *Множество F всех вещественных (непрерывных и разрывных) функций, заданных на отрезке* $[0, 1]$, *имеет мощность большую, чем c.*

Доказательство. Ясно, что в F есть подмножество, эквивалентное множеству вещественных чисел отрезка $[0, 1]$. Это множество функций вида $f(x)\equiv\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

---

[1]) То есть таких, что каждый следующий отрезок содержится в предыдущем.

Остается, следовательно, показать, что F и $P=[0, 1]$ не эквивалентны.

Допустим противное, т. е. что $F \sim P$. Тогда между функциями $f(x) \in F$ и числами $t \in P$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Это означает, что каждую функцию $f(x) \in F$ можно снабдить индексом $t \in [0, 1]$, т. е. $f(x) \equiv f_t(x)$, и когда t пробегает отрезок $[0, 1]$, функции $f_t(x)$ заполняют все множество F.

Рассмотрим функцию двух переменных $g(x, t)=f_t(x)$, определенную в квадрате $0 \leqslant t, x \leqslant 1$. С помощью этой функции построим функцию одной переменной

$$\varphi(x)=g(x, x)+1.$$

Функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и потому входит в множество F. Следовательно, $\varphi(x)$ есть $f_t(x)$ при некотором значении индекса t_0:

$$\varphi(x)=f_{t_0}(x),$$

или, в иной записи, $g(x, x)+1=g(x, t_0)$ (тождественно по x).

Полагая $x=t_0$, получаем

$$g(t_0, t_0)+1=g(t_0, t_0),$$

т. е.

$$1=0.$$

Полученное противоречие убеждает нас в неэквивалентности F и P.

Следующая теорема показывает, что множества с наибольшей мощностью не существует, подобно тому как не существует самого большого натурального числа.

Теорема 4. *Множество всех частей данного множества имеет мощность бо́льшую, чем мощность данного множества.*

Доказательство. Пусть M — произвольное множество и T — множество всех его подмножеств. Элементы M будем обозначать через m, элементы T, т. е. подмножества M, — через t. При этом в число подмножеств множества M мы включаем также само M и пустое множество $\varnothing$.

Ясно, что в T есть часть T_0, эквивалентная M. Это совокупность всех одноэлементных (т. е. состоящих из одного элемента $m \in M$) подмножеств множества M. Остается доказать, что M и T не эквивалентны.

Допустим противное, т. е. что $T \sim M$. Тогда каждому подмножеству $t \in T$ взаимно однозначно соответствует элемент $m \in M$. Разобьем все элементы множества M на два класса. К первому классу отнесем элементы, входящие в соответствующие им подмножества; так, элемент m', соответствующий $t' = M$, входит в первый класс. Ко второму классу отнесем элементы, не входящие в соответствующее им подмножество; так, элемент m'', соответствующий $t'' = \varnothing$, входит во второй класс. Рассмотрим совокупность всех элементов второго класса. Это будет некоторое подмножество t_0 множества M, т. е. некоторый элемент множества T. В силу эквивалентности $M \sim T$ элементу $t_0 \in T$ соответствует элемент $m_0 \in M$. Попытаемся выяснить, какому классу принадлежит элемент m_0. Предположим, что m_0 принадлежит первому классу, т. е. входит в соответствующее ему подмножество t_0. Но это невозможно, так как t_0 есть совокупность элементов второго класса. Предположим, что m_0 принадлежит второму классу, т. е. не входит в соответствующее ему подмножество t_0. Но это снова невозможно, так как в t_0 собраны все элементы второго класса.

Итак, элемент m_0 не может принадлежать ни первому, ни второму классу, в то время как любой элемент множества M, в том числе и m_0, должен принадлежать либо первому, либо второму классу. Получили противоречие, которое показывает, что предположение об эквивалентности M и T является неправильным. Следовательно, T не эквивалентно M, и теорема доказана.

Возьмем конечное множество M, содержащее n элементов, и подсчитаем, сколько у него будет подмножеств. Имеется одно пустое подмножество $\varnothing$. Кроме того, есть:

C_n^1 — одноэлементных подмножеств,
C_n^2 — двухэлементных подмножеств,
. . . .
C_n^k — k-элементных подмножеств,
. . . .
$1 = C_n^n$ — само множество.

Итого у M имеется

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n=2^n$$

подмножеств.

Если теперь M — бесконечное множество мощности α, то по аналогии со случаем конечного множества мощность множества T всех его подмножеств обозначают 2^α. Предыдущая теорема утверждает таким образом, что $2^\alpha>\alpha$. Ниже мы увидим, что $2^a=c$; можно доказать, что $2^c=f$, где f — мощность множества F всех вещественных функций.

Встает естественный вопрос: всякие ли две мощности сравнимы, как сравнимы по величине любые два натуральных числа? Иными словами, если даны два любых множества A и B мощностей α и β соответственно, то всегда ли можно утверждать, что либо $\alpha<\beta$, либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha>\beta$. Если допустить, что над любым множеством можно всегда произвести некоторую операцию, называемую *полным упорядочением* этого множества, то ответ на поставленный вопрос будет утвердительным.

Можно также доказать (уже без предположения о возможности полного упорядочения), что если $\alpha<\beta$ и $\beta<\gamma$, где α, β и γ — любые мощности, то $\alpha<\gamma$. Это доказательство основывается на следующей полезной во многих случаях теореме.

Теорема 5 (Кантора — Бернштейна). *Если даны два множества A и B и в A есть часть A', эквивалентная B, а в B есть часть B', эквивалентная A, то множества A и B эквивалентны*[1]).

Упражнения. 1. Указанием закона взаимно однозначного соответствия установить эквивалентность друг другу отрезка $[0, 1]$, полуинтервала $[0, 1)$ и интервала $(0, 1)$.

2. Если $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_{n'}\cap A_{n''}=\varnothing$ при $n'\neq n''$, $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_{n'}\cap B_{n''}=\varnothing$ при $n'\neq n''$ и $A_n\sim B_n$, то $A\sim B$. Доказать это.

3. Указанием способа нумерации доказать, что любое множество попарно непересекающихся интервалов на числовой прямой или конечно, или счетно.

---

1) Подробнее об этом см.: И. П. Натансон: «Теория функций вещественной переменной», М., Гостехиздат, 1957.

§ 3. Теоремы о счетных множествах и множествах мощности континуума

Мы приведем здесь простейшие теоремы о счетных множествах и множествах мощности континуума.

Теорема 1. *Сумма конечного или счетного множества конечных или счетных множеств есть снова конечное или счетное множество.*

Доказательство. Здесь надо различать несколько случаев. Очевидно, что сумма конечного числа конечных множеств есть конечное множество. Если мы имеем счетное множество конечных множеств, то здесь в свою очередь могут быть две возможности. Если среди элементов множеств-слагаемых есть лишь конечное число отличных друг от друга элементов, то сумма этих множеств, очевидно, конечна. Если же отличных друг от друга элементов в множествах-слагаемых будет бесконечно много, то сумма будет счетной. В самом деле, берем элементы первого множества-слагаемого A_1 и нумеруем их в каком-либо порядке. Пусть это будет

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n_1}.$$

Добавляем далее отличные от этих элементов элементы второго множества (если они есть) и нумеруем их. Получим

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n_1},\ a_{n_1+1},\ a_{n_1+2},\ \ldots,\ a_{n_2} \text{ и т. д.}$$

Так как различных элементов бесконечное множество, то этот процесс не может оборваться после конечного числа шагов, и мы получим бесконечную последовательность, т. е. счетное множество

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots.$$

Ясно, что любой элемент любого множества-слагаемого A_k попадет на некотором шаге в эту последовательность, т. е. она действительно будет суммой данных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Сумма конечного числа счетных множеств есть счетное множество; доказательство этого факта предоставляется читателю.

Докажем, что сумма счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Итак, пусть

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots\}.$$

Назовем *рангом элемента* $a_i^{(j)}$ сумму его верхнего и нижнего индексов. Будем нумеровать $a_i^{(j)}$ в порядке возрастания рангов, а если элементы имеют равные ранги, то в порядке возрастания нижнего индекса, пропуская при этом уже занумерованные элементы. Таким образом,

$$b_1 = a_1^{(1)},\ b_2 = a_1^{(2)},\ b_3 = a_2^{(1)},\ b_4 = a_1^{(3)},\ \ldots,$$

если все эти элементы различны. Если $a_2^{(2)}$ совпадает, например, с $a_2^{(1)}$, то $a_2^{(2)}$ пропускаем, и поэтому $b_5 = a_3^{(1)}$, $b_6 = a_1^{(4)}$, $b_7 = a_2^{(3)}$, если каждый из этих элементов отличен от уже занумерованных, и т. д. Ясно, что таким образом мы занумеруем элементы множества B в последовательность, т. е. B будет счетным множеством.

Лемма. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества есть счетное множество.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — счетное множество и A' — бесконечное подмножество A. Пусть a_{n_1} — элемент из A' с наименьшим номером. Обозначаем его b_1. Пусть a_{n_2} — элемент из A' с наименьшим номером, бо́льшим, чем n_1. Обозначаем его b_2. Пусть a_{n_3} — элемент из A' с наименьшим номером, бо́льшим чем n_2. Обозначаем его b_3, и т. д. Ясно, что таким образом мы занумеруем A' в последовательность

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots,$$

и теорема доказана.

Теорема 2. *Из всякого бесконечного множества можно выделить конечное или счетное подмножество так, что оставшееся множество будет эквивалентно первоначальному.*

Доказательство. Пусть M — данное бесконечное множество. По теореме 1 § 2 из множества M можно выделить два непересекающихся счетных подмножества $A = \{a_n\}$ и

$B=\{b_n\}$. Пусть $N=M\setminus(A\cup B)=(M\setminus A)\setminus B$. Тогда

$$M=N\cup(A\cup B)$$

и

$$M\setminus A=N\cup B.$$

Так как A и B — счетные множества, то $A\cup B$ также счетно, т. е. B и $A\cup B$ эквивалентны. Отсюда следует, что M и $M\setminus A$ эквивалентны потому, что любой элемент $x\in M$ взаимно однозначно соответствует или самому себе, если он входит в N, или элементу $y\in B$ (в силу эквивалентности $(A\cup B)\sim B$), если он входит в $A\cup B$, и, наоборот, каждый элемент $u\in M\setminus A$ ставится в соответствие либо самому себе, если он входит в N, либо элементу $v\in(A\cup B)$, если он входит в B. Аналогично рассматривается случай выделения конечного множества.

Замечание. Здесь мы имели частный случай следующего более общего утверждения. Пусть

$$A=\bigcup_\xi A_\xi \quad \text{и} \quad B=\bigcup_\xi B_\xi$$

(индекс ξ в обеих суммах общий). Если множества A_ξ попарно не пересекаются и множества B_ξ также попарно не пересекаются и если $A_\xi\sim B_\xi$ для всех ξ, то $A\sim B$ [1]).

Теорема 3. *Если к бесконечному множеству прибавить конечное или счетное множество, то мощность полученного множества равна мощности данного множества.*

Доказательство. В самом деле, пусть M — бесконечное множество и A — конечное или счетное множество. Достаточно рассмотреть случай, когда $M\cap A=\varnothing$. Выделим из M счетное подмножество B так, чтобы $N=M\setminus B$ было бесконечно. Имеем

$$M=N\cup B,$$

$$M\cup A=N\cup(A\cup B).$$

Так как $N\sim N$ и $B\sim(A\cup B)$, то $M\sim M\cup A$, ч. т. д.

Из доказанной выше теоремы 1 можно получить ряд следствий.

1. *Если элементы множества A снабжены конечным числом индексов, каждый из которых независимо от дру-*

---

[1]) См. упражнение 1 к § 2.

гих пробегает счетное множество значений, то A — счетное множество.

Докажем это по индукции. Пусть индекс один: $A=\{a_{k_1}\}$. Теорема тривиальна. Предположим, что теорема верна для случая $(n-1)$-го индекса, и докажем ее для случая n индексов. Пусть $A=\{a_{k_1,\,k_2,\,\dots,\,k_n}\}$, где каждый индекс k_i пробегает счетное множество. Фиксируем какое-нибудь значение последнего индекса $k_n=k_n^0$. Элементы с таким фиксированным значением последнего индекса определяются $(n-1)$-м индексом и, по предположению, образуют счетное множество. Так как различных значений последнего индекса — счетное множество, то всех элементов, принадлежащих A, будет счетное множество счетных множеств, т. е. счетное множество.

2. *Множество рациональных чисел есть счетное множество.* В самом деле, каждое рациональное число $r=\frac{p}{q}$ определяется двумя индексами, p и q, каждый из которых пробегает счетное множество значений и потому по следствию 1 множество рациональных чисел счетно.

3. *Множество рациональных точек (т. е. точек с рациональными координатами) n-мерного пространства счетно.* Доказательство непосредственно следует из следствий 1 и 2.

Переходим к множествам мощности континуума.

Легко видеть, что всякий отрезок имеет мощность континуума; эквивалентность $[a,\ b]$ и $[0,\ 1]$ следует из равенств

$$y=a+(b-a)\,x, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$x=\frac{y-a}{b-a}, \qquad a\leqslant y\leqslant b,$$

устанавливающих взаимно однозначное соответствие между точками этих отрезков.

Так как по теореме 3 добавление конечного числа точек не меняет мощности множества, то любой конечный интервал и полуинтервал имеет мощность континуума.

Любой бесконечный интервал также имеет мощность континуума. Так, например, формулы

$$y=\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{arctg} a<x<\frac{\pi}{2},$$
$$x=\operatorname{arctg} y, \qquad a<y<\infty,$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками интервалов

$$\left(\operatorname{arctg} a,\ \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad (a,\ \infty), \quad a \geqslant 0.$$

Множество иррациональных точек отрезка [0, 1] (а следовательно, и любого отрезка или интервала) имеет мощность континуума. Это вытекает из счетности множества всех рациональных чисел и теоремы 3.

Теорема 4. *Сумма конечного или счетного множества множеств мощности континуума имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $\overline{\overline{A}}_i = c$. Предположим сначала, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда $A_i \backsim [i-1,\ i)$, откуда следует, что $A \backsim [0,\ n)$, и потому мощность A равна c.

Если же множества A_i могут иметь общие точки, то ясно, что $A \backsim B \subset [0,\ n)$. С другой стороны, $[0,\ n) \backsim A_1 \subset A$, так как оба множества, $[0,\ n)$ и A_1, имеют мощность континуума. Но тогда выполняются для множеств A и $[0, n)$ условия теоремы Кантора — Бернштейна, и следовательно, эти множества эквивалентны.

Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда, как и выше, легко установить эквивалентность множества A и полуинтервала $[0,\ \infty)$. Случай, когда множества A_i могут иметь общие точки, рассматривается аналогично предыдущему. Теорема доказана полностью.

Прежде чем переходить к следующей теореме, остановимся на представлении вещественных чисел отрезка [0, 1] в виде двоичных дробей. Для любого вещественного числа α, лежащего на отрезке [0, 1], мы можем написать

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{2^k} + \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha_k = 0$ или 1, подобно тому как, представляя это число в виде десятичной дроби, мы пишем

$$\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \ldots, \tag{2}$$

где $a_k = 0$, либо 1, либо 2, ..., либо 9.

Например,

$$\frac{23}{32}=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\frac{0}{2^7}+\frac{0}{2^8}+\ldots,$$

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{0}{2^8}+\frac{1}{2^9}+\ldots.$$

Равенство (1) будем сокращенно записывать в виде

$$\alpha=0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \ldots. \tag{3}$$

Каждый из двоичных знаков α_k числа α равен либо 0, либо 1. Заметим, что двоично рациональное число вида $\frac{p}{2^k}$, например, $\frac{3}{4}$, мы можем записать в виде двоичной дроби (3) двояко, либо с нулем в периоде, либо с единицей в периоде

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\ldots=0{,}11000\ldots$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=0{,}10111\ldots$$

Если не пользоваться записью, содержащей единицу в периоде, то каждое число $\alpha\in[0,\ 1]$ однозначно представимо в виде дроби (3).

Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть* $A=\{a_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_k,\ldots}\}$ — *множество элементов, определяемых счетным числом параметров* $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k,\ \ldots$, *каждый из которых, независимо от других, может принимать два значения,* a *и* b. *Тогда множество* A *имеет мощность континуума.*

Доказательство. Элементу $a_{i_1 i_2\ldots i_k\ldots}$ ставим в соответствие двоичную дробь $0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \ldots$ по следующему правилу:

$$\alpha_k=\begin{cases}1, & \text{если}\quad i_k=a,\\ 0, & \text{если}\quad i_k=b,\end{cases}$$

и обратно: каждой двоичной дроби $0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \ldots$ по тому же закону ставим в соответствие элемент $a_{i_1 i_2\ldots i_k\ldots}\in A$. Мы получаем, таким образом, что множество A и множество всех двоичных дробей, в том числе и с единицей в периоде, эквивалентны. Множество всех возможных двоичных дробей отличается от множества всех вещественных чисел отрезка [0, 1] на множество двоичных дробей с единицей в периоде, которые изображают двоично рациональные числа и которых, следовательно, счетное множество. Так как прибавление счетного множества к множеству мощности континуума или удаление из него счетного множества не меняет мощности этого множества, то совокупность всех двоичных дробей имеет ту же мощность, что и отрезок [0, 1], т. е. c. Но тогда и множество A имеет мощность c и теорема доказана.

Теорема 6. *Множество всех последовательностей, составленных из чисел натурального ряда, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Покажем сначала, что множества всех возможных последовательностей и всех возрастающих последовательностей натуральных чисел эквивалентны. В самом деле, если дана произвольная последовательность

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k,\ \ldots,$$

то ставим ей в соответствие возрастающую последовательность

$$n_1 = m_1,\ n_2 = m_1 + m_2,\ n_3 = m_1 + m_2 + m_3,\ \ldots;$$

если же дана возрастающая последовательность

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots,$$

то ставим ей в соответствие (по тому же закону) некоторую последовательность

$$m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 - n_1,\ m_3 = n_3 - n_2,\ \ldots,$$

и требуемая эквивалентность доказана.

Рассмотрим множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел. Возрастающей последовательности

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots$$

поставим в соответствие двоичную дробь

$$\alpha = 0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_k\ \ldots,$$

полагая $\alpha_i = 1$, если i совпадает с каким-либо членом n_k последовательности, и $\alpha_i = 0$ для i, не совпадающих ни с одним членом последовательности. Обратно, дроби

$$\beta = 0,\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_k\ \ldots$$

ставим в соответствие возрастающую последовательность натуральных чисел, составленную из индексов тех двоичных знаков, которые равны 1.

Мы получаем, что множество всех возрастающих последовательностей чисел натурального ряда эквивалентно множеству всех двоичных дробей и, следовательно, имеет мощность континуума.

Следствие. *Всевозможные последовательности целых положительных чисел представляют собой всевозможные бесконечные подмножества множества N всех натуральных чисел.*

Так как конечных подмножеств, составленных из чисел натурального ряда, как нетрудно убедиться, будет счетное множество, то множество всех подмножеств натурального ряда имеет мощность континуума, т. е. $2^a = c$.

Можно доказать, что $2^c = f$, где f — мощность множества F всех вещественных функций, заданных на $[a, b]$.

Теорема 7. *Множество элементов $A = \{a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m\ldots}\}$, определяемое конечным или счетным множеством параметров, каждый из которых независимо от других пробегает континуум значений, имеет мощность континуума.*

Рассмотрим случай счетного множества параметров. Так как параметр ξ_1 принимает континуум значений, то между множеством всех значений параметра и множеством всех последовательностей натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Это же имеет место и для второго параметра ξ_2, для третьего параметра ξ_3 и т. д. Поэтому набору значений параметров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_3, \ldots$, определяющих элемент $a_{\xi_1\xi_2\xi_3\ldots}$, взаимно однозначно соответствует набор последовательностей натуральных чисел:

$$\begin{array}{l} n_1^{(1)},\ n_2^{(1)},\ n_3^{(1)},\ \ldots \\ n_1^{(2)},\ n_2^{(2)},\ n_3^{(2)},\ \ldots \\ n_1^{(3)},\ n_2^{(3)},\ n_3^{(3)},\ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

Совокупность последовательностей (1) преобразуем в одну последовательность,

$$n_1^{(1)} = p_1, \quad n_1^{(2)} = p_2, \quad n_2^{(1)} = p_3, \quad n_1^{(3)} = p_4, \ \ldots,$$

выписывая сначала числа низшего ранга, а из чисел равного ранга прежде то, у которого нижний индекс меньше (см. доказательство теоремы 1).

Обратно, если дана произвольная последовательность натуральных чисел

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots, \tag{2}$$

мы преобразуем ее в счетную совокупность последовательностей

$$\begin{gathered} n_1^{(1)}, \ n_2^{(1)}, \ n_3^{(1)}, \ \ldots, \\ n_1^{(2)}, \ n_2^{(2)}, \ n_3^{(2)}, \ \ldots, \\ n_1^{(3)}, \ n_2^{(3)}, \ n_3^{(3)}, \ \ldots, \end{gathered}$$

полагая $p_1 = n_1^{(1)}$, $p_2 = n_1^{(2)}$, $p_3 = n_2^{(1)}$, $p_4 = n_1^{(3)}$, ... и т. д.

Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между всевозможными последовательностями натуральных чисел и между всевозможными счетными совокупностями последовательностей чисел натурального ряда, а тем самым между всеми последовательностями натуральных чисел и всеми элементами $a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$. Последнее означает, что мощность множества $A = \{a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}\}$ равна c.

Следствия. 1. *Мощность множества точек открытого (замкнутого, частично открытого) параллелепипеда n-мерного пространства*

$$\begin{gathered} a_1 < x_1 < b_1, \\ a_2 < x_2 < b_2, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_n < x_n < b_n, \end{gathered}$$

где a_i, b_i — конечные числа или ∞, имеет мощность c. (Каждый из знаков $<$ может быть заменен на знак $\leqslant$, если соответствующая величина a_i или b_i конечна.)

2. *Сумма континуума множеств, каждое из которых имеет мощность континуума, есть множество мощности континуума.*

В самом деле, пусть $A = \bigcup\limits_{\xi} A_\xi$, где сначала $A_\xi \cap A_{\xi'} = \varnothing$ при $\xi \neq \xi'$. Без ограничения общности можем считать, что индекс ξ пробегает отрезок $[0, 1]$. Рассмотрим множество M

точек квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Оно имеет мощность континуума. Поставим во взаимно однозначное соответствие множество A_ξ и отрезок $y = \xi$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, лежащий в этом квадрате (рис. 3). Тогда будем иметь, что $A = \bigcup_\xi A_\xi \sim M$, откуда следует, что $\overline{\overline{A}} = c$. Случай, когда множества A_ξ могут иметь общие точки, рассматривается обычным образом (см. доказательство теоремы 4).

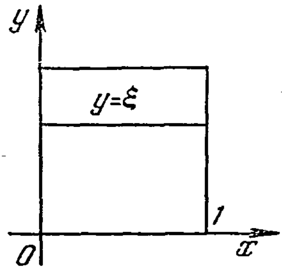

Рис. 3.

Упражнения. **1.** Доказать, что множество всех многоугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты, счетно.

2. Элементами множества M являются системы чисел вида $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где n — некоторое натуральное число, а r_i — рациональные числа. При этом изменяются не только числа r_i, но и число n. Какова мощность множества M?

3. Функция $f(x)$, заданная на полуинтервале $[a, b)$, называется *ступенчатой* на нем, если $[a, b)$ можно разбить на конечное число полуинтервалов $[a, x_1)$, $[x_1, x_2)$, ..., $[x_{n-1}, b)$, на каждом из которых $f(x)$ постоянна. Какова мощность множества всех ступенчатых на $[a, b)$ функций?

4. Доказать, что если $A = B \cup C$ и $\overline{\overline{A}} = c$, то по крайней мере одно из множеств B и C имеет мощность континуума.

5. Число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого алгебраического уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно.

6. Пользуясь теоремой Кантора — Бернштейна, доказать, что множество $C[a, b]$ имеет мощность континуума.

7. Дано некоторое множество окружностей, лежащих на плоскости и расположенных так, что эти окружности попарно не пересекаются и ни одна из них не лежит внутри другой. Какова мощность такого множества?

8. Определить мощность множества A элементов вида $a_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, где каждый индекс, независимо от другого, пробегает счетное множество значений.

ГЛАВА II.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Определения. Примеры.

Множество $X=\{x, y, z, \ldots, u, v, \ldots\}$ элементов некоторой природы называется *метрическим пространством*, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, называемое *расстоянием* между этими элементами или *метрикой* пространства X и удовлетворяющее следующим трем условиям (*аксиомам метрики*):

1) $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (*аксиома тождества*);

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);

3) $\rho(x, y)+\rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (*аксиома треугольника*).

Элементы метрического пространства X называются также *точками* этого пространства.

Примеры. 1. Пусть X — n-мерное евклидово пространство E_n. Расстояние между точками $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ и $y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ этого пространства определяется формулой

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}.$$

Аксиомы тождества и симметрии очевидны, а аксиома треугольника следует из неравенства Коши — Минковского

$$\sqrt{\sum_i (a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_i a_i^2}+\sqrt{\sum_i b_i^2}.$$

В самом деле, если $z=\{\zeta_i\}\in E_n$, то

$$\rho(x,\ z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)]^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\zeta_i)^2}=\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z).$$

2. Пусть X — множество непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$. Для двух функций $x(t)$ и $y(t)$ расстояние определяем равенством

$$\rho(x,\ y)=\max_t|x(t)-y(t)|.$$

Снова аксиомы тождества и симметрии очевидны, а аксиома треугольника проверяется следующим образом. Для любого $t\in[a,\ b]$ имеем

$$|x(t)-z(t)|=|[x(t)-y(t)]+[y(t)-z(t)]|\leqslant$$
$$\leqslant|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\leqslant\max_t|x(t)-y(t)|+$$
$$+\max_t|y(t)-z(t)|=\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z).$$

Но тогда и

$$\max_t|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z),$$

т. е.

$$\rho(x,\ z)\leqslant\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z),$$

и требуемое доказано.

Множество всех непрерывных на отрезке $[0,\ 1]$ функций с такой метрикой называется *пространством* $C[0,\ 1]$.

3. Рассмотрим множество X, элементами которого являются всевозможные последовательности вещественных чисел

$$x=\{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots\},$$

такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2<\infty.$$

Установим для таких последовательностей неравенства Буняковского — Шварца и Коши — Минковского. Возьмем любое натуральное число N. Тогда в силу неравенств Буняковского — Шварца и Коши — Минковского для конечных сумм имеем

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i \eta_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \eta_i^2},$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\xi_i + \eta_i)^2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \eta_i^2}.$$

Заменяя в правых частях этих неравенств конечные суммы на бесконечные ряды, мы только усилим неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} |\xi_i \eta_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2}, \\ &\sum_{i=1}^{N} (\xi_i + \eta_i)^2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Так как ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2$ сходятся, то в правых частях неравенств (A) стоят конечные числа. Но тогда положительные ряды $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i|$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i + \eta_i)^2$ также сходятся, и неравенства (A) в пределе при $N \to \infty$ дают

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i + \eta_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2},$$

что и требовалось доказать.

Из неравенства Коши — Минковского вытекает, в частности, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \eta_i)^2$$

сходится для любых $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}$ из рассматриваемого нами пространства.

Положим

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2}.$$

Снова аксиомы тождества и симметрии очевидны, а аксиома треугольника проверяется аналогично тому, как это было сделано для евклидова пространства E_n.

Введенное нами метрическое пространство обозначается l_2 и называется координатным гильбертовым пространством.

4. Пусть X — множество всех ограниченных последовательностей

$$x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\},$$

где $|\xi_i|\leqslant K_x$, K_x — константа, вообще зависящая от элемента x. Для двух элементов $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}$ из этого множества полагаем

$$\rho(x, y)=\sup|\xi_i-\eta_i|.$$

Без труда проверяется выполнение аксиом метрики (ср. пример 2). Полученное метрическое пространство называется пространством «m» ограниченных последовательностей.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}\subset X$ сходится к точке $x_0\in X$, и писать $x_n\to x_0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, если $\rho(x_n, x_0)\to 0$ при $n\to\infty$. Очевидно, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу, и легко показать, что одна и та же последовательность не может иметь двух различных пределов. В самом деле, пусть $x_n\to a$ и $x_n\to b$. Тогда

$$\rho(a, b)\leqslant\rho(a, x_n)+\rho(x_n, b)$$

для любого n. В пределе при $n\to\infty$ из этого неравенства получаем $\rho(a, b)\leqslant 0$, и так как расстояние $\rho(a, b)$ — неотрицательное число, то $\rho(a, b)=0$, т. е. $a=b$.

Выясним, что означает сходимость в пространствах E_n, $C[a, b]$, l_2 и m.

1. Пусть $X = E_n$. Если $x_k \to x_0$, где

$$x_k = \left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right\} \quad \text{и} \quad x_0 = \left\{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{0}\right\},$$

то

$$\rho(x_k, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)})^2} \to 0$$

при $k \to \infty$. Но это возможно тогда и только тогда, когда

$$\xi_i^{(k)} \to \xi_i^{(0)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что сходимость в E_n есть сходимость координат точек последовательности к соответствующим координатам точки-предела, т. е. так называемая *покоординатная сходимость*.

2. Пусть $X = C[a, b]$. Если $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$ сходится к $x_0(t) \in C[a, b]$, то

$$\rho(x_n, x_0) = \max_t |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$$

или, иначе, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что

$$\max_t |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \tag{1}$$

при $n \geqslant n_0$. Условие (1) эквивалентно условию

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

при $n \geqslant n_0$ и сразу для всех $t \in [a, b]$. Но условие (2) есть определение равномерной сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$ к $x_0(t)$. Таким образом, сходимость в пространстве $C[a, b]$ есть равномерная сходимость функциональной последовательности.

3. Пусть $X = l_2$. Покажем, что сходимость последовательности $\{x_n\} \in l_2$ к $x_0 \in l_2$, где $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_i^0\}$, означает, что

1) $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$ для $i = 1, 2, 3, \ldots$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что $\sqrt{\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} (\xi_i^{(n)})^2} < \varepsilon$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В самом деле, пусть $x_n \to x_0$, т. е.

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)})^2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Но тогда тем более $|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \to 0$ при $n \to \infty$, и первое условие выполняется. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n \geqslant n_0$, т. е.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)})^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } n \geqslant n_0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(0)})^2$ сходится, то существует такое N_1, что

$$\sqrt{\sum_{i=N_1+1}^{\infty} (\xi_i^{(0)})^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда в силу неравенства Коши — Минковского при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\sqrt{\sum_{i=N_1+1}^{\infty} (\xi_i^{(n)})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=N_1+1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)})^2} + \\ + \sqrt{\sum_{i=N_1+1}^{\infty} (\xi_i^{(0)})^2} \leqslant \rho(x_n, x_0) + \\ + \sqrt{\sum_{i=N_1+1}^{\infty} (\xi_i^{(0)})^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассмотрим остатки сходящихся рядов $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} (\xi_i^{(1)})^2$, $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} (\xi_i^{(2)})^2, \ldots, \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} (\xi_i^{(n_0-1)})^2$. Так как этих остатков конечное число, то найдется такое N_2, что при $N \geqslant N_2$ все эти остатки будут меньше, чем ε^2. Поэтому, если $N_0 = \max(N_1, N_2)$, то при $N \geqslant N_0$

$$\sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} (\xi_i^{(n)})^2} < \varepsilon$$

при всех n, и второе условие также выполняется.

Предоставляем читателю доказать обратное, т. е., что если выполнены условия 1) и 2), то

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

4. Пусть $X = m$. Сходимость последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \ldots\}$ к элементу $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots)$ означает покоординатную сходимость, равномерную относительно номеров координат, т. е.

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)} \quad \text{при } n \to \infty$$

равномерно относительно $i = 1, 2, 3, \ldots$. Доказательство предоставляем читателю.

Совокупность точек x метрического пространства X таких, что $\rho(x, a) < r$, где a — фиксированная точка из X, а r — фиксированное вещественное число, называется *открытым шаром радиуса* r с центром в точке a и обозначается $S(a, r)$. Совокупность точек метрического пространства, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, a) \leqslant r$, называется *замкнутым шаром* и обозначается $\bar{S}(a, r)$. Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если его можно заключить внутри некоторого шара (открытого или замкнутого).

Если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства сходится к некоторому пределу, то она ограничена. В самом деле, так как $x_n \to x_0$, то для $\varepsilon = 1$ найдется номер n_0 такой, что $\rho(x_n, x_0) < 1$ при $n \geqslant n_0$. Пусть теперь r — наибольшее из чисел 1, $\rho(x_1, x_0)$, $\rho(x_2, x_0)$, ..., $\rho(x_{n_0}, x_0)$. Тогда для любого n

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant r,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ содержится в шаре $\bar{S}(x_0, r)$ и, следовательно, ограничена. Однако существуют ограниченные последовательности, которые не сходятся. В самом деле, в пространстве l_2 возьмем последовательности

$$e_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$
$$e_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$
$$e_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ясно, что $\rho(e_i,\ e_j)=\sqrt{2}$ при $i\neq j$, и потому ни сама последовательность $\{e_n\}$, ни любая ее подпоследовательность не сходятся, хотя эта последовательность ограничена, так как $\rho(e_1,\ e_n)\leqslant\sqrt{2}$, и следовательно, $\{e_n\}\subset\bar{S}(e_1,\ \sqrt{2})$.

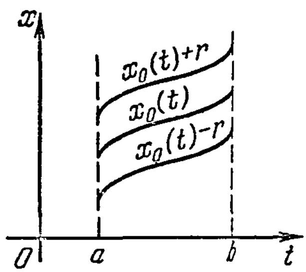

Рис. 4.

Примеры. 1. Пусть $X=E_3$ — трехмерное евклидово пространство. Шар $S(a,\ r)$ — это обычный шар радиуса r с центром в $a=(a_1,\ a_2,\ a_3)$.

2. Пусть $X=C[a,\ b]$. Шар $\bar{S}(x_0,\ r)$ в пространстве $C\,[a,b]$ — это совокупность функций $x(t)$, графики которых не выходят из полосы шириной $2r$, образованной кривыми $x_0(t)-r$ и $x_0(t)+r$ (рис. 4).

Если m и M — некоторые константы, то функции $x(t)$, удовлетворяющие неравенствам $m<x(t)<M$, лежат внутри полосы $x_1(t)\equiv m$ и $x_2(t)\equiv M$. Эта полоса есть тоже шар $S\left(\frac{M+m}{2},\frac{M-m}{2}\right)$ пространства $C\ [a,\ b]$ радиуса $\frac{M-m}{2}$ с центром в точке $x(t)=\frac{M+m}{2}$. Поэтому множество непрерывных функций, ограниченных в совокупности в том смысле, как это понимается в курсах математического анализа, ограничено как множество пространства $C\,[a,\ b]$. Легко видеть, что верно и обратное.

Упражнения. 1. Пусть $M\,[a,\ b]$ — множество всех ограниченных функций, заданных на отрезке $[a,\ b]$. Для $x\,(t),\ y\,(t)\in M\,[a,\ b]$ положим

$$\rho\,(x,\ y)=\sup_t|\,x\,(t)-y\,(t)\,|.$$

Доказать, что $M\,[a,\ b]$ — метрическое пространство.

2. Что представляет собой в пространстве m шар $S(0, 1)$ с центром в точке $0=(0, 0, 0, \ldots)$ и радиуса 1?

3. Пусть l — множество элементов x вида $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$. Если $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ — другой элемент того же пространства, то полагаем

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|.$$

Доказать, что l — метрическое пространство. Что представляет собой шар $S(0, 1)$ в этом пространстве?

§ 2. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества

Назовем *окрестностью* точки a метрического пространства X любой открытый шар с центром в этой точке. Точка $a \in X$ называется *предельной* точкой множества $M \subset X$, если любая окрестность точки a содержит хоть одну точку множества M, отличную от точки a. Если последовательность $\{x_n\} \subset X$, состоящая из попарно различных элементов, сходится к точке $a \in X$, то a является предельной точкой этой последовательности. В самом деле, если $S(a, r)$ — окрестность точки a, то, поскольку $\rho(x_n, a) \to 0$, найдутся такие номера n, и притом в бесконечном количестве, что $\rho(x_n, a) < r$, и, следовательно, точки x_n с этими номерами попадут в $S(a, r)$. Обратно, если a есть предельная точка множества M_1, найдется последовательность $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся к точке a. Действительно, пусть $S(a, r)$ — произвольная окрестность точки a. Найдется точка $x_1 \in M$, принадлежащая этой окрестности и отличная от точки a. Пусть $r_1 < \rho(a, x_1)$. Открытый шар $S(a, r_1)$ есть снова окрестность точки a и, следовательно, содержит точку $x_2 \in M$, отличную от a. Возьмем $r_2 < \rho(a, x_2)$ и рассмотрим шар $S(a, r_2)$, и т. д. Если дополнительно потребовать, чтобы $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{x_n\} \subset M$ будет сходиться к точке a. Из доказанного, в частности, следует, что любая окрестность предельной точки множества M содержит бесконечно много точек этого множества. Отсюда в свою очередь вытекает, что в метрическом пространстве конечное множество не может иметь предельных точек.

Совокупность всех предельных точек множества M называется *производным множеством* этого множества и обозначается M'. Если множество M содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*. Объединение множества M с множеством всех его предельных точек называется *замыканием* множества M. Замыкание множества M обозначается $\bar{M}$, т. е. $\bar{M}=M \cup M'$. Ясно, что множество M замкнуто тогда и только тогда, когда $M=\bar{M}$. Заметим, наконец, что если $x \in \bar{M}$, то для любого $r>0$ имеем $S(x, r) \cap M \neq \varnothing$, в чем читатель без труда может убедиться.

Покажем, что замкнутый шар $\bar{S}(a, r)$ есть замкнутое множество. Для этого докажем полезное во многих случаях утверждение: если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Прежде всего для любых трех точек $a, b, c \in X$ имеем

$$\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b)+\rho(b, c),$$

откуда

$$\rho(a, c)-\rho(b, c) \leqslant \rho(a, b).$$

Меняя ролями точки a и b, получим

$$-[\rho(a, c)-\rho(b, c)] \leqslant \rho(a, b),$$

откуда с учетом неотрицательности $\rho(a, b)$

$$|\rho(a, c)-\rho(b, c)| \leqslant \rho(a, b).$$

Теперь имеем

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant |\rho(x_n, y_n)-\rho(x_n, y)|+|\rho(x_n, y)-\rho(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(y_n, y)+\rho(x_n, x) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Доказанное свойство выражает непрерывность расстояния между двумя точками по совокупности своих аргументов относительно сходимости, введенной с помощью этого же расстояния.

Из непрерывности расстояния легко следует замкнутость шара $\bar{S}(a, r)$. В самом деле, пусть $x_n \in \bar{S}(a, r)$ и $x_n \to x_0$. Тогда $\rho(x_n, a) \leqslant r$ и при $n \to \infty$ это неравенство в пределе дает $\rho(x_0, a) \leqslant r$, т. е., что $x_0 \in \bar{S}(a, r)$. А так как каждая предельная точка шара есть предел некоторой последовательности точек шара, то замкнутость шара доказана.

Так как предельная точка любого множества пространства X есть точка того же пространства, то все пространство X есть замкнутое множество.

Установим некоторые свойства замкнутых множеств и операции замыкания.

Теорема 1. *Объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — замкнутые множества и $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$. Предположим, что a — предельная точка множества F. Тогда существует последовательность точек $\{x_n\} \subset F$, сходящаяся к точке a. Каждая точка x_n принадлежит либо множеству F_1, либо множеству $F_2, \ldots,$ либо множеству F_k. Так как точек в последовательности бесконечно много, а множеств F_i — конечное число, то найдется множество F_{i_0}, которому принадлежит целая подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Так как $\{x_{n_i}\} \to a$, $\{x_{n_i}\} \subset F_{i_0}$ и F_{i_0} — замкнуто, то $a \in F_{i_0}$, следовательно, $a \in F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, и первая часть теоремы доказана.

Пусть $\Phi = \bigcap_{\xi} F_\xi$, где все F_ξ замкнуты и a — предельная точка Φ. Любая окрестность $S(a, r)$ точки a содержит хотя бы одну точку $x \in \Phi$, которая является в то же время и точкой любого F_ξ. Но тогда a есть предельная точка для любого F_ξ, и так как все F_ξ замкнуты, то $a \in F_\xi$ при любом ξ, т. е. $a \in \Phi$. Вторая часть теоремы доказана.

Теорема 2. *Операция замыкания в любом метрическом пространстве обладает следующими свойствами:*

1) *из* $M \subset N$ *следует* $\overline{M} \subset \overline{N}$,

2) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$,

3) $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$, *т. е. замыкание любого множества замкнуто.*

4) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Доказательство. Первое свойство замыкания очевидно, так как если a есть предельная точка подмножества, то она является также предельной точкой всего множества, поэтому переходим сразу к доказательству второго свойства.

Пусть $a \in \overline{M \cup N}$, и предположим, что $a \bar{\in} \bar{M} \cup \bar{N}$. Тогда $a \bar{\in} \bar{M}$ и $a \bar{\in} \bar{N}$, т. е. a не является ни точкой множества M, ни его предельной точкой и то же самое справедливо относительно множества N. Но тогда существует окрестность $S(a, r_1)$ такая, что $S(a, r_1) \cdot M = \varnothing$. Аналогично существует окрестность $S(a, r_2)$ такая, что $S(a, r_2) \cdot N = \varnothing$. Если $r = \min(r_1, r_2)$, то $S(a, r)$ не содержит ни точек множества M, ни точек множества N и, следовательно, не содержит точек множества $M \cup N$. Но это невозможно, так как a принадлежит множеству $\overline{M \cup N}$. Итак, $a \in \bar{M} \cup \bar{N}$, и так как a — любая точка из $\overline{M \cup N}$, то

$$\overline{M \cup N} \subset \bar{M} \cup \bar{N}. \tag{1}$$

Обратное включение доказывается проще. Так как $M \subset M \cup N$ и $N \subset M \cup N$, то по свойству 1) получаем: $\bar{M} \subset \overline{M \cup N}$ и $\bar{N} \subset \overline{M \cup N}$. Но тогда

$$\bar{M} \cup \bar{N} \subset \overline{M \cup N}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}.$$

Докажем третье свойство замыкания. Так как $M \subset \bar{M}$, то по свойству 2) $\bar{M} \subset \bar{\bar{M}}$[1]. Поэтому достаточно показать, что $\bar{\bar{M}} \subset \bar{M}$. Пусть $x \in \bar{\bar{M}}$. Тогда для любого $r > 0$ имеем $S(x, r) \cap \bar{M} \neq \varnothing$, и потому найдется точка $y \in \bar{M}$ такая, что $y \in S(x, r)$. Пусть $\rho(x, y) = r'$. Тогда $S(y, r - r') \subset S(x, r)$. В самом деле, если $z \in S(y, r - r')$, то $\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < (r - r') + r' = r$, т. е. $z \in S(x, r)$. Так как $y \in \bar{M}$, то $S(y, r - r') \cap M \neq \varnothing$. Тем более $S(x, r) \cap M \neq \varnothing$, т. е. $x \in \bar{M}$, и включение $\bar{\bar{M}} \subset \bar{M}$ доказано.

Свойство 4) доказывается совсем просто. Для любого множества $M \subset X$ имеем по доказанному

$$\bar{M} = \overline{M \cup \varnothing} = \bar{M} \cup \bar{\varnothing}.$$

Это равенство означает, что $\bar{\varnothing}$ входит в любое замкнутое множество. Но это возможно лишь, если $\bar{\varnothing} = \varnothing$. Теорема полностью доказана.

Если мы рассмотрим множество $M = \{x\}$, состоящее из одной точки, то очевидно, что его производное множество

[1]) Не путать с символом мощности.

пусто, и поэтому M замкнуто. Из теоремы 1 следует тогда, что любое конечное множество замкнуто.

Множество M называется *открытым*, если для каждой точки x этого множества найдется окрестность $S(x, r)$ такая, что $S(x, r) \subset M$.

Примером открытого множества может служить открытый шар $S(a, r)$. Что этот шар — открытое множество, мы уже, по существу, установили при доказательстве свойства 3) замыканий, указав, что для произвольной точки $x \in S(a, r)$ можно построить такой шар $S(x, r_0)$, что $S(x, r_0) \subset S(a, r)$. Другим очевидным примером открытого множества является все пространство X. Об объеме класса открытых множеств можно судить по следующим двум теоремам.

Теорема 3. *Дополнение замкнутого множества до всего пространства есть открытое множество.*

Доказательство. Предположим, что F замкнуто и $G = CF$. Пусть x — произвольная точка из G; рассмотрим всевозможные ее окрестности $S(x, r)$. Тогда по крайней мере одна из таких окрестностей $S(x, r_0)$ не содержит ни одной точки множества F. В самом деле, если бы для любой окрестности $S(x, r)$ выполнялось равенство $S(x, r) \cap F \neq \emptyset$, то $x \in \overline{F} = F$, а это невозможно, так как x, будучи точкой G, не принадлежит F. Итак, для окрестности $S(x, r_0)$ имеем $S(x, r_0) \cap F = \emptyset$, т. е. $S(x, r_0) \subset G$. Таким образом, каждая точка множества G входит в него вместе с некоторой окрестностью, следовательно, G — открытое множество.

Теорема 3'. *Дополнение открытого множества до всего пространства есть замкнутое множество.*

Доказательство предоставляем читателю.

Теорема 4. *Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично.

Пусть G_ξ — открытые множества и $G = \bigcup_\xi G_\xi$. По предыдущей теореме $G_\xi = CF_\xi$, где F_ξ — замкнутое множество. Поэтому в силу принципа двойственности

$$G = \bigcup_\xi G_\xi = \bigcup_\xi CF_\xi = C\left(\bigcap_\xi F_\xi\right) = CF.$$

Так как по теореме 1 множество F замкнуто, то G открытые, что и требовалось доказать.

Мы уже говорили, что все пространство есть замкнутое множество. Тогда пустое множество $\varnothing = CX$ — открытое. Пустое множество и все пространство являются примерами множеств, которые одновременно и замкнуты, и открыты. Легко привести пример множества, которое не будет ни замкнутым, ни открытым. Так, если X есть отрезок $[0, 1]$ числовой прямой, то множество рациональных точек этого отрезка ни замкнуто, ни открыто.

Примеры. 1. Пусть $X = (-\infty, \infty)$. Любой отрезок $[a, b]$ — замкнутое множество, любой интервал (a, b) — открытое множество. Полуинтервал $[a, b)$ ни замкнут, ни открыт. Множество $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, составленное из всех натуральных чисел, есть замкнутое множество, так как $N' = \varnothing$, и поэтому

$$\bar{N} = N \cup N' = N.$$

Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ни замкнуто, ни открыто. Его замыканием будет

$$\bar{A} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

Ниже мы рассмотрим более подробно замкнутые и открытые множества числовой прямой.

2. Пусть $X = C(0, 1)$. Множество A непрерывных функций, таких, что $0 < x(t) < 1$, открыто. В самом деле, пусть $x_0(t)$ — такая функция и $\alpha_0 = \inf x_0(t)$, $\beta_0 = \sup x_0(t)$. Имеем $0 < \alpha_0 \leqslant \beta_0 < 1$. Пусть $r_0 = \min\left\{\frac{\alpha_0}{2}, \frac{1-\beta_0}{2}\right\}$. Тогда шар $S(x_0, r_0)$ целиком входит в множество A, так как для любой функции $x(t)$ из этого шара $x_0(t) - r_0 < x(t) < x_0(t) + r$ для всех t, откуда $0 < \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} \leqslant x(t) \leqslant \beta_0 + \frac{1-\beta_0}{2} < 1$. Множество π всех многочленов, заданных на $[0, 1]$, ни замкнуто, ни открыто.

3. Множество $B \subset C(0, 1)$, состоящее из непрерывных функций $x(t)$, таких, что $x(0) = 0$, замкнуто, так как если $x_0(t) \in B'$, то существует последовательность $\{x_n(t)\} \subset B$, равномерно сходящаяся к $x_0(t)$, а тогда, поскольку $x_n(t) = 0$ для всех n, $x_0(0) = \lim\limits_n x_0(0) = 0$, т. е. $x_0(t) \in B$.

4. Пусть $X = l_2$. Множество $K_0 \subset l_2$, состоящее из элементов $x = \{\xi_i\} \in l_2$, для которых $0 \leqslant \xi_n \leqslant \frac{1}{n}$, замкнуто. В самом деле, если $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \in K_0'$, то $x_0 = \lim\limits_m x_m$, $x_m = \{\xi_i^{(m)}\} \in K_0$, откуда $\xi_n^{(0)} = \lim\limits_m \xi_n^{(m)}$, следовательно, $0 \leqslant \xi_n^{(0)} \leqslant \frac{1}{n}$.

Множество K_0 называется *основным параллелепипедом* координатного гильбертова пространства.

Точка множества M метрического пространства X, не являющаяся предельной точкой этого множества, называется *изолированной* точкой множества M. Если множество M замкнуто и не содержит изолированных точек, то оно называется *совершенным*. Иными словами, множество M совершенное, если $M = M'$. Примером совершенного множества может служить замкнутый шар $\overline{S}(x_0, r)$ евклидова пространства.

Множество P метрического пространства X называется *плотным в множестве* M того же пространства, если $\overline{P} \supset M$. Множество P, плотное в самом пространстве, называется *всюду плотным*. Например, множество рациональных чисел всюду плотно на числовой прямой.

С понятием всюду плотного множества связано понятие с е п а р а б е л ь н о с т и метрического пространства. Именно, метрическое пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное, всюду плотное множество. Таким образом, например, числовая прямая есть сепарабельное метрическое пространство. Пространство $C[a, b]$ также сепарабельно. В самом деле, согласно теореме Вейерштрасса для любой непрерывной на $[a, b]$ функции существует последовательность полиномов, равномерно сходящаяся на этом отрезке к данной функции. В свою очередь любой полином есть предел равномерно сходящейся на $[a, b]$ последовательности полиномов с рациональными коэффициентами. Но тогда любая непрерывная на $[a, b]$ функция есть предел равномерно сходящейся для $a \leqslant x \leqslant b$ последовательности полиномов с рациональными коэффициентами, т. е. замыкание множества таких полиномов дает $C[a, b]$. Так как множество полиномов с рациональными коэффициентами счетно, то сепарабельность пространства $C[a, b]$ доказана.

Пространство m не сепарабельно. В самом деле, рассмотрим в m множество элементов вида $\tilde{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots\}$, где ξ_i равно нулю или единице. Множество всех таких элементов имеет мощность континуума, и если $\tilde{x} = \{\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots\}$ и $\tilde{y} = \{\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots\}$ — два разных элемента, то $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sup\limits_i (\xi_i - \eta_i) = 1$. Если бы в m существовало счетное всюду плотное множество $m_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, то, поскольку для каждого $x \in m$ нашелся бы такой элемент $x_n \in m_0$, что $\rho(x, x_n) < \frac{1}{3}$, все пространство m разместилось бы целиком в шарах $S\left(x_n, \frac{1}{3}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как шаров счетное множество, а элементов $\tilde{x}$ множество мощности континуума, то хотя бы в один шар $S\left(x_{n_0}, \frac{1}{3}\right)$ попадет больше, чем один элемент вида $\tilde{x}$. Но это невозможно, так как расстояние между двумя такими элементами равно 1, в то время как диаметр шара меньше 1.

Множество $N \subset X$ называется *нигде не плотным*, если в любом шаре $S(a, r)$ пространства X найдется другой шар $S(b, \rho) \subset S(a, r)$, не содержащий ни одной точки множества N. Примером нигде не плотного множества на числовой прямой может служить множество N натуральных чисел.

В заключение этого параграфа докажем так называемую теорему отделимости.

Теорема 5. *Пусть в метрическом пространстве X даны два замкнутых непересекающихся множества F_1 и F_2. Тогда найдутся два открытых множества G_1 и G_2 такие, что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ и $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in F_1$ и назовем *расстоянием от этой точки до множества F_2* число

$$\rho(x, F_2) = \inf_{x_2 \in F_2} \rho(x, x_2).$$

Такое число существует, так как все числа $\rho(x, x_2) \geq 0$, т. е. их множество ограничено снизу. Покажем, что в нашем случае

$$\rho(x, F_2) \neq 0.$$

Допустим противное, т. е. что $\rho(x, F_2)=0$. Это значит, что в множестве F_2 найдется такая последовательность точек $\{x_{(n)}^{2}\}$, что

$$\rho(x, x_{(n)}^{2}) \to 0.$$

Но тогда $x=\lim\limits_{n} x_{(n)}^{2}$, т. е. x есть предельная точка множества F_2, и, следовательно, в силу замкнутости F_2 будем иметь $x \in F_2$, что невозможно, ибо

$$F_1 \cdot F_2 = \varnothing.$$

Итак, $\rho(x, F_2)=\rho_x^{(2)}>0$. Аналогично $\rho(y, F_1)=\rho_y^{(1)}>0$ для произвольной точки $y \in F_2$. Рассмотрим множества

$$G_1=\bigcup_{x \in F_1} S\left(x, \frac{\rho_x^{(2)}}{3}\right) \text{ и } G_2=\bigcup_{y \in F_2} S\left(y, \frac{\rho_y^{(1)}}{3}\right).$$

Оба эти множества — открытые, как суммы открытых шаров, и очевидно, что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$. Остается доказать, что

$$G_1 \cap G_2=\varnothing.$$

Предположим противное: пусть z — точка из пересечения $G_1 \cap G_2$. Так как $z \in G_1$, то $z \in S\left(x_0, \frac{\rho_{x_0}^{(2)}}{3}\right)$ для некоторого x_0, а так как $z \in G_2$, то $z \in S\left(y_0, \frac{\rho_{y_0}^{(1)}}{3}\right)$ для некоторого y_0. Пусть наибольшим из чисел $\rho_{x_0}^{(2)}$ и $\rho_{y_0}^{(1)}$ будет, например, $\rho_{y_0}^{(1)}$. Тогда

$$\rho_{y_0}^{(1)}=\inf_{x \in F_1} \rho(y_0, x) \leqslant \rho(x_0, y_0) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_0, z)+\rho(z, y_0)<\frac{\rho_{x_0}^{(2)}}{3}+\frac{\rho_{y_0}^{(1)}}{3} \leqslant \frac{2\rho_{y_0}^{(1)}}{3}<\rho_{y_0}^{(1)},$$

и мы пришли к абсурду. Поэтому $G_1 \cap G_2=\varnothing$, и теорема полностью доказана.

Упражнения. 1. Непосредственно из определения замкнутого множества вывести, что любое конечное множество точек метрического пространства замкнуто.

2. Доказать, что для любого множества M метрического пространства множество M' замкнуто.

3. Доказать, что $(M \cup N)'=M' \cup N'$.

4. Следует ли из $\overline{A} \subset \overline{B}$, что $A \subset B$?

5. Доказать, что $\bar{M} = \bigcap F$, где F — всевозможные замкнутые множества, содержащие M.

6. В пространстве $C[a, b]$ множество M_n есть совокупность всех полиномов степени, не превышающей n. Что представляет собой M'_n?

7. Доказать включение $\overline{M \cap N} \subset \bar{M} \cap \bar{N}$. Можно ли знак включения заменить знаком равенства?

8. Обозначим через M_0 множество всех внутренних точек множества M. Доказать, что M_0 открыто.

9. Пусть M — множество точек $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ пространства l_2, у которых все координаты положительны. Будет ли M открыто?

10. Пусть $f(x)$ — функция, определенная и непрерывная на всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$. Доказать, что множество тех точек x, где $f(x) < 1$, открыто.

11. Пусть M — нигде не плотное множество метрического пространства. Каким будет его дополнение CM?

12. В пространстве $C[a, b]$ множество A состоит из функций $x(t)$, значения которых принадлежат при любом t заданному замкнутому множеству M вещественных чисел. Будет ли A замкнуто? Будет ли A открыто, если M открыто?

13. В метрическом пространстве X даны две точки a и b. Каким будет множество M тех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, a) = \rho(x, b)$, и множество N тех точек $x \in X$, для которых

$$\alpha < \rho(a, x) + \rho(b, x) < \beta,$$

где α и β — заданные вещественные числа?

14. Построить в l_2 счетное всюду плотное множество, доказав тем самым сепарабельность этого пространства.

15. Доказать, что любое открытое множество метрического пространства может быть представлено в виде счетной суммы замкнутых множеств, и что любое замкнутое множество может быть представлено в виде счетного пересечения открытых множеств.

16. Построением примера показать, что в произвольном метрическом пространстве всегда существуют два непересекающихся открытых множества, которые нельзя заключить в непересекающиеся замкнутые множества.

17. Доказать, что множество всех изолированных точек сепарабельного метрического пространства не более чем счетно.

§ 3. Полнота метрических пространств

Пусть дано метрическое пространство X. Предположим, что имеется последовательность $\{x_n\}$ точек этого пространства, сходящаяся к точке $a \in X$. Тогда $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$ и точно так же $\rho(x_{n+p}, a) \to 0$ при $n \to \infty$, $p > 0$. Отсюда следует в силу неравенства треугольника, что

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty,\ p > 0. \tag{1}$$

Если для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset X$ выполняется условие (1), то такая последовательность называется *последовательностью, сходящейся в себе*, или *фундаментальной последовательностью*. Таким образом, каждая последовательность, сходящаяся к некоторому пределу, сходится в себе.

Однако в произвольном метрическом пространстве обратное утверждение неверно, т. е. не всегда последовательность, сходящаяся в себе, сходится к некоторому пределу. Приведем пример.

Пусть X — пространство вещественных многочленов $p_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n$, определенных на отрезке $[0, 1]$ с метрикой $\rho(p_n, q_m) = \max |p_n(t) - q_m(t)|$. Тогда в этом пространстве последовательность $\{p_n(t)\}$, где $p_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} t^k$ равномерно сходится в себе, но не имеет предела в пространстве многочленов (предел этой последовательности e^t не есть многочлен).

Если в метрическом пространстве X всякая последовательность $\{x_n\} \subset X$, сходящаяся в себе, сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом того же пространства, то пространство X называется *полным*.

Примеры. 1. Пространство $X = (-\infty, \infty)$ полно. Полнота его вытекает из достаточности критерия Коши сходимости числовой последовательности.

2. Пространство $X = C(0, 1)$ полно. Пусть $\{x_n(t)\} \subset C(0, 1)$ — произвольная последовательность, сходящаяся в себе. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, зависящий только от ε, что

$$\max_t |x_{n+p}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$, $p > 0$. Отсюда вытекает, что

$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

при $n \geqslant n_0$, $p > 0$ и сразу для всех t из $[0, 1]$.

Условие (2) есть условие критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. В силу достаточности этого критерия существует функция $x(t)$, к которой равномерно сходится рассматриваемая последовательность.

Так как все функции последовательности непрерывны, то и предельная функция $x(t)$ также непрерывна. Таким образом, мы получаем, что существует такая функция $x(t) \in C(0, 1)$, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, а это и означает полноту пространства $C(0, 1)$.

3. Пространство l_2 полно.

Пусть дана последовательность $\{x_n\} \subset l_2$, $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots\}$, сходящаяся в себе. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\rho(x_n, x_{n+p}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n+p)})^2} < \varepsilon \tag{3}$$

при $n \geqslant n_0$ и $p > 0$. Тем более для каждого фиксированного i

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n+p)}| < \varepsilon \tag{4}$$

при $n \geqslant n_0$ и $p > 0$. Отметим, что в этом неравенстве n_0 не зависит от i, и оно выполняется для всех i одновременно. Условие (4) есть условие Коши для числовой последовательности $\{\xi_i^{(n)}\}$ (i — фиксировано). Поэтому существует предел

$$\xi_i^{(0)} = \lim_n \xi_i^{(n)},$$

и это имеет место для любого i.

Рассмотрим числовую последовательность

$$\{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)}, \ldots\} = x_0.$$

Покажем, что x_0 есть точка пространства l_2. Пусть N — произвольное натуральное число. Имеем:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(0)})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [(\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)}) + \xi_i^{(n)}]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)})^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(n)})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)})^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)})^2}. \tag{5}$$

Выберем n' настолько большим, что

$$\rho(x_{n'}, x_{n'+p}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n')} - \xi_i^{(n'+p)})^2} < 1,$$

и зафиксируем его. Тогда тем более

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(n')} - \xi_i^{(n'+p)})^2} < 1.$$

Пусть $p \to \infty$. В пределе получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n')})^2} \leqslant 1, \tag{6}$$

и это неравенство имеет место при любом натуральном N.

Из (5) и (6) находим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(0)})^2} \leqslant 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n')})^2} = K < \infty, \tag{7}$$

ибо $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n')})^2} < \infty$, потому что $x_{n'} \in l_2$. Так как (7) верно для любого N, то в пределе при $N \to \infty$ получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(0)})^2} \leqslant K < \infty$$

— неравенство, которое показывает, что $x_0 \in l_2$.

Из неравенства (3) вытекает

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n+p)})^2} < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$, $p > 0$. Переходя к пределу при $p \to \infty$, будем иметь

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)})^2} \leqslant \varepsilon.$$

Наконец, предельный переход при $N \to \infty$ дает

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)})^2} \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$, откуда и следует, что $x_n \to x_0$. Полнота пространства l_2 доказана.

Можно доказать, что пространство m также полно. Примером неполного пространства может служить пространство полиномов, приведенное выше.

В полных метрических пространствах имеет место аналог леммы Кантора о стягивающейся системе отрезков.

Теорема 1. *Пусть в полном метрическом пространстве X задана последовательность замкнутых шаров, вложенных друг в друга, $\bar{S}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset \bar{S}(a_n, r_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, радиусы r_n которых стремятся к нулю. Тогда существует единственная точка $a \in X$, принадлежащая всем шарам последовательности.*

Доказательство. Возьмем в первом шаре $\bar{S}(a_1, r_1)$ произвольную точку x_1, во втором шаре $\bar{S}(a_2, r_2)$ произвольную точку $x_2 \neq x_1$ и т. д. Так как $\bar{S}(a_{n+p}, r_{n+p}) \subset \bar{S}(a_n, r_n)$, то $x_{n+p} \in \bar{S}(a_n, r_n)$ для любого $p > 0$. Поэтому

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant 2r_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. Так как X — полное пространство, эта последовательность сходится к некоторой точке $a \in X$.

Как уже сказано, $x_{n+p} \in \bar{S}(a_n, r_n)$ для любого $p > 0$. Поэтому подпоследовательность $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}, \ldots\}$, сходящаяся к той же точке a, принадлежит $\bar{S}(a_n, r_n)$, и потому в силу замкнутости этого шара $a \in \bar{S}(a_n, r_n)$. Итак, a принадлежит любому шару $\bar{S}(a_n, r_n)$. Пусть b — точка пространства X, также принадлежащая всем шарам. Имеем

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < 2r_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда $\rho(a, b) = 0$, т. е. $a = b$, и теорема полностью доказана.

Назовем *диаметром* ограниченного замкнутого множества F число $d = \sup\limits_{x, y \in F} \rho(x, y)$. В силу ограниченности F

такое число существует. Верно следующее обобщение предыдущей теоремы.

Пусть в полном метрическом пространстве X задана последовательность вложенных друг в друга ограниченных замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю. Тогда в пространстве X существует единственная точка, принадлежащая всем этим замкнутым множествам.

Доказательство совершенно аналогично только что приведенному.

Сделаем два замечания. 1) Пусть X — метрическое пространство. Любое множество $M \in X$ с тем же самым расстоянием между точками a и $b \in M$, которое введено в пространстве X, есть, очевидно, также метрическое пространство.

2) Если X — полное пространство, то множество $M \subset X$, рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство, может быть и не полным. Это будет в том случае, если последовательность $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся в себе, имеет пределом точку $a \in X$, не принадлежащую M. Однако если M замкнуто, то такая возможность исключается, и мы получаем, что замкнутое множество полного метрического пространства само есть полное метрическое пространство.

Рассмотрим два метрических пространства, X и Y. Пусть M и N — множества в этих пространствах, $M \subset X$, $N \subset Y$. Говорят, что множества M и N *изометричны*, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняется расстояние между соответствующими элементами, т. е. если $x \leftrightarrow y$, $x' \leftrightarrow y'$, $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, то $\rho(x, x')_X = \rho(y, y')_Y$.

Если вместо множеств M и N взять сами пространства X и Y, то эти пространства также называются *изометричными*. Можно говорить и об изометричности двух множеств одного и того же пространства. Легко понять, что по отношению к вопросам, связанным с метрикой (замкнутость, плотность, полнота), два изометрических множества имеют одинаковые свойства, и с этой точки зрения их можно часто считать идентичными.

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о пополнении неполного метрического пространства. Пусть X_0 — неполное метрическое пространство. Тогда можно доказать, что существует полное метрическое пространство X, такое, что в нем найдется всюду плотное множество X', изометричное пространству X_0. Это пространство X с точностью до изометрии определяется однозначно и называется *пополнением* пространства X_0.

Примеры. 1. X_0 — пространство рациональных чисел. Его пополнением будет вся числовая прямая.

2. X_0 — множество многочленов, заданных на $[a, b]$ с равномерной метрикой. Его пополнение — пространство $C(a, b)$.

3. X_0 — множество элементов вида $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, где n — любое натуральное число, а ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — любые вещественные числа, с метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{m} \eta_i^2},$$

если $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$, $m > n$. Пополнением этого пространства будет пространство l_2.

Упражнения. 1. Пусть X — пространство элементов вида $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где n фиксировано, r_i — рациональные числа с метрикой

$$\rho(x, x') = \max_i |r_i - r'|.$$

Будет ли это пространство полным? Что будет являться его пополнением?

2. Рассмотрим множество X всевозможных последовательностей натуральных чисел $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$. Если $y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ — другой такой элемент, то обозначим через $k_0(x, y)$ наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$ (т. е. $n_{k_0} \neq m_{k_0}$, но $n_k = m_k$ при $k < k_0$). Положим $\rho(x, y) = \frac{1}{k_0(x, y)}$. Доказать, что X — полное метрическое пространство (так называемое *нуль-пространство Бэра*), в котором аксиома треугольника верна в усиленной форме

$$\rho(x, z) \leqslant \max[\rho(x, y), \rho(y, z)].$$

3. В пространстве l_2 построить последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств с пустым пересечением.

§ 4. Принцип сжатых отображений

Пусть даны два метрических пространства X и Y. Функцию, определенную на X со значениями в Y, будем в дальнейшем называть *оператором*, действующим из X в Y, и обозначать $y = A(x)$ или $y = Ax$, $x \in X$, $y \in Y$. Если $X = Y$, то будем говорить, что оператор действует в пространстве X.

Теорема (Банаха). *Пусть дан оператор $y = Ax$, действующий в полном метрическом пространстве X. Если для любых $x, x' \in X$*

$$\rho(Ax, Ax') = \alpha\rho(x, x'), \text{ где } 0 < \alpha < 1,$$

то в пространстве X существует единственная точка $\bar{x}$, такая, что $A\bar{x} = \bar{x}$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in X$ и построим последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, полагая $x_1 = Ax_0$,

$$x_2 = Ax_1, \quad x_3 = Ax_2, \ldots, x_n = Ax_{n-1}, \ldots$$

Тогда будем иметь

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(Ax_1, Ax_0) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_0) = \alpha\rho(Ax_0, x_0),$$
$$\rho(x_3, x_2) = \rho(Ax_2, Ax_1) \leqslant \alpha\rho(x_2, x_1) = \alpha^2\rho(Ax_0, x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^n\rho(Ax_0, x_0).$$

Отсюда

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \ldots + \alpha^n)\rho(Ax_0, x_0) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(Ax_0, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(Ax_0, x_0).$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то $\alpha^n \to 0$, а вместе с тем и $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, $p > 0$. Таким образом, $\{x_n\}$ есть сходящаяся в себе последовательность, и так как пространство X полное, то в нем существует элемент $\bar{x} = \lim x_n$. Для этого элемента $\bar{x}$ имеем

$$\rho(A\bar{x}, \bar{x}) \leqslant \rho(A\bar{x}, x_n) + \rho(x_n, \bar{x}) = \rho(A\bar{x}, Ax_{n-1}) + \rho(x_n, \bar{x}) \leqslant \alpha\rho(\bar{x}, x_{n-1}) + \rho(x_n, \bar{x}) \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $\rho(A\bar{x}, \bar{x}) = 0$, т. е. $A\bar{x} = \bar{x}$.

Пусть $\bar{x}'$ — другая точка пространства X, такая, что $A\bar{x}' = \bar{x}'$. Тогда

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}') = \rho(A\bar{x}, A\bar{x}') \leqslant \alpha\rho(\bar{x}, \bar{x}').$$

Если $\bar{x}' \neq \bar{x}$, то $\rho(\bar{x}, \bar{x}') > 0$, и предыдущее неравенство после сокращения на $\rho(\bar{x}, \bar{x}')$ даст $1 \leqslant \alpha$, что невозможно. Итак, $\bar{x}' = \bar{x}$, и теорема полностью доказана.

Доказанную теорему называют обычно **принципом сжатых отображений**, так как оператор A в условиях теоремы переводит две точки пространства X в две другие точки с меньшим расстоянием между ними. Точка $\bar{x}$ называется *неподвижной точкой* оператора A. Эта неподвижная точка является *решением операторного уравнения* $Ax = x$. Таким образом, доказанная теорема Банаха есть **теорема о существовании решения** у операторного уравнения, если оператор, входящий в уравнение, осуществляет сжатые отображения.

Точки x_n, получаемые по формуле $x_n = Ax_{n-1}$, являются *последовательными приближениями* решения $\bar{x}$ операторного уравнения. Из полученного выше неравенства

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(Ax_0, x_0)$$

переходом к пределу при $p \to \infty$ получаем

$$\rho(x_n, \bar{x}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(Ax_0, x_0),$$

что дает оценку погрешности при замене решения $\bar{x}$ его приближением x_n.

Примеры. 1. В евклидовом пространстве E_n рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Правую часть этих равенств можно рассматривать как задание оператора A, переводящего элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в элемент $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ с координатами

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — фиксированный элемент.

Имеем

$$\rho(Ax, Ax') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \eta_i')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j - \xi_j')\right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \xi_j')^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \xi_j')^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\, \rho(x, x').$$

Если $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \alpha^2 < 1$, то в силу принципа сжатых отображений оператор A имеет единственную неподвижную точку $\bar{x}$,

$$A\bar{x} = \bar{x},$$

и это означает, что система

$$\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = \xi_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет решение и притом только одно.

2. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка: найти решение уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ такое, что

$$x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

При этом будем предполагать, что $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных в некоторой окрестности G точки (t_0, x_0) и удовлетворяет в этой окрестности по переменной x условию Липшица:

$$|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant L\, |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|.$$

Задача Коши (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{2}$$

Займемся решением этого уравнения.

Пусть $|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$ есть наибольший прямоугольник с центром в точке (x_0, y_0), содержащийся в G. В пространстве $C(t_0-h, t_0+h)$, где h — некоторая постоянная, меньшая, чем a, рассмотрим замкнутый шар $\bar{S}(x_0, b)$ с центром в точке $x_0(t)\equiv x_0$ и радиуса b. Тогда всякая заданная и непрерывная на $[t_0-h, t_0+h]$ функция $x(t)$, такая, что $|x(t)-x_0|\leqslant b$, будет принадлежать этому шару.

В пространстве $C(t_0-h, t_0+h)$ рассмотрим оператор A:

$$Ax=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau.$$

Пусть $x(t)\in\bar{S}(x_0, b)$. Тогда

$$\rho(Ax, x_0)=\max|Ax(t)-x_0|=\max_t\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_t\left|\int_{t_0}^{t}\max_\tau|f(\tau, x(\tau))|\,d\tau\right|\leqslant\max_t M|t-t_0|\leqslant Mh,$$

где $M=\max|f(t, x)|$. Если $Mh\leqslant b$, т. е. $h\leqslant\frac{b}{M}$, то $Ax\in\in\bar{S}(x_0, b)$, и, следовательно, оператор A преобразует шар $\bar{S}(x_0, b)$ в себя. Покажем, что при достаточно малых h оператор A есть оператор сжатия. Имеем

$$\rho(Ax, A\tilde{x})=\max_t\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau-\int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{x}(\tau))\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_t\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau, x(\tau))-f(\tau, \tilde{x}(\tau))|\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\max_t\left|\int_{t_0}^{t}|x(\tau)-\tilde{x}(\tau)|\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\max_\tau|x(\tau)-\tilde{x}(\tau)|\cdot h=Lh\rho(x, \tilde{x})$$

и $Lh=\alpha<1$, если $h=\frac{1}{L}$. Таким образом, мы получаем, что при выполнении условий 1) $h\leqslant\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ и 2) $h<\frac{1}{L}$ оператор A дает сжатые отображения шара $\bar{S}(x_0, b)$ в себя. Так как замкнутый шар $\bar{S}(x_0, b)$ можно рассматривать как полное метрическое пространство, то мы находимся в условиях теоремы Банаха, и, следовательно, в шаре $\bar{S}(x_0, b)$ существует единственная неподвижная точка оператора A, т. е. единственное решение интегрального уравнения (2) или эквивалентной этому уравнению задачи Коши (1).

Упражнения. 1. Пусть $f(x)$ — функция, заданная и дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$, причем удовлетворяются неравенства

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Будет ли уравнение $f(x) - x = 0$ иметь решение?

2. В пространстве m_n элементов вида $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\limits_i |\xi_i - \eta_i|$ найти условия разрешимости системы

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

аналогично тому, как это было сделано выше в евклидовом пространстве E_n.

3. Пусть $F(x, y)$ — функция, непрерывная вместе с частными производными первого порядка в окрестности начала $O(0, 0)$ и такая, что $F(0, 0) = 0$, $F'_y(0, 0) \neq 0$. Доказать с помощью теоремы Банаха, что при всех достаточно малых $|x|$ уравнение $F(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y = y(x)$, тождественно удовлетворяющее этому уравнению и обращающееся в нуль при $x = 0$.

§ 5. Компактные множества в метрических пространствах

Известно, какую большую роль в математическом анализе играет принцип Коши — Больцано о возможности выделения из любой ограниченной числовой последовательности сходящейся подпоследовательности. В произвольных метрических пространствах это обстоятельство не имеет места. Однако существуют множества, называемые компактными, где такое выделение возможно.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если из любой последовательности $\{x_n\}$ элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$. Если пределы таких подпоследовательностей принадлежат M, то множество M называется *компактным в себе*. Ясно, что множество компактно в себе, если оно просто компактно и замкнуто.

Может оказаться, что все метрическое пространство X компактное (очевидно, в себе) множество. В этом случае X называется *компактом.*

Примеры. 1. Отрезок $[0, 1]$ есть компактное в себе множество числовой прямой. Интервал $(0, 1)$ компактен, но не является компактным в себе. Вообще, всякое ограниченное множество n-мерного евклидова пространства компактно, как это следует из принципа Больцано — Вейерштрасса. Если, кроме того, такое множество замкнуто, то оно компактно в себе.

2. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим множество M многочленов $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ фиксированной n-й степени, ограниченных в совокупности по модулю некоторой константой K, т. е. таких, что $|p(x)|\leqslant K$ для любого $p(x)\in M$ и для всех $x\in[0, 1]$. Тогда M — компактное множество.

Покажем прежде всего, что существует константа L такая, что $\sum\limits_{s=0}^{n}|a_s|\leqslant L$ для любого $p(x)\in M$. В самом деле, если это не так, то найдется последовательность полиномов $p_k(x)$, для которой

$$\sum_{s=0}^{n}|a_s^{(k)}|=L_k\to\infty.$$

Рассмотрим полиномы

$$q_k(x)=\frac{1}{L_k}p_k(x)=\sum_{s=0}^{n}b_s^{(k)}x^s,$$

где $b_s^{(k)}=\dfrac{a_k^{(s)}}{L_k}$. Ясно, что $\sum\limits_{s=0}^{n}|b_s^{(k)}|=1$, поэтому каждая из последовательностей $\{b_s^{(k)}\}$, $s=0, 1, \ldots, n$, ограничена, и, следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\{b_s^{(k_i)}\}$, сходящуюся к некоторому пределу $b_s^{(0)}$. Подпоследовательность индексов k_i выберем так, чтобы сходимость имела место для всех s от 0 до n. Отсюда легко следует, что $q_{k_i}(x)$ равномерно сходится к $q_0(x)=b_0^{(0)}x^n+$

$+b_1^{(0)}x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}^{(0)}x+b_n^{(0)}$. Очевидно, что $\sum\limits_{s=0}^{n}|b_s^{(0)}|=1$. С другой стороны, так как $|q_k(x)|\leqslant\frac{K}{L_k}\to 0$, последовательность $\{q_k(x)\}$, а следовательно, и любая ее подпоследовательность, равномерно сходится к нулю. Поэтому $q_0(x)\equiv 0$, откуда $b_0^{(0)}=b_1^{(0)}=\ldots=b_n^{(0)}=0$, что противоречит равенству

$$\sum_{s=0}^{n}|b_s^{(0)}|=1.$$

Итак, константа L с требуемым свойством существует. Но тогда из любой последовательности $\{p_k(x)\}\subset M$, как только что показано, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{p_{k_i}(x)\}$, и компактность множества M доказана.

Последний пример показывает, что непосредственно устанавливать компактности конкретных множеств часто весьма сложно. Поэтому целесообразно сформулировать некоторые общие признаки компактности.

Множество N метрического пространства X называется *ε-сетью* для другого множества M того же пространства, если для любого $x\in M$ найдется $y\in N$ такой, что $\rho(x, y)<\varepsilon$.

Теорема (Хаусдорфа). *Для того чтобы множество M метрического пространства X было компактным, необходимо, а в случае полноты пространства X и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon>0$ существовала конечная ε-сеть для множества M.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M компактно. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и возьмем любой элемент $x_1\in M$.

Если $\rho(x, x_1)<\varepsilon$ для любого $x\in M$, то конечная ε-сеть (из одного элемента) уже построена. В противном случае найдется элемент $x_2\in M$ такой, что $\rho(x_2, x_1)\geqslant\varepsilon$. Имеются далее две возможности: либо для любого $x\in M$ по крайней мере одно из чисел $\rho(x, x_1)$ или $\rho(x, x_2)$ меньше ε, и тогда конечная ε-сеть (из двух элементов) уже построена, либо найдется элемент $x_3\in M$ такой, что $\rho(x_3, x_1)\geqslant\varepsilon$, $\rho(x_3, x_2)\geqslant\geqslant\varepsilon$, и т. д.

Покажем, что процесс построения точек $x_1, x_2, \ldots$ оборвется после конечного числа шагов, т. е. что конечная ε-сеть будет построена. В самом деле, если бы это было не так, то мы получили бы последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

для которой $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$. Но тогда ни сама последовательность $\{x_n\}$, ни любая ее подпоследовательность не может сходиться, что противоречит компактности множества M.

Заметим, что для компактного множества M мы построили конечную ε-сеть, точки которой принадлежат самому множеству.

Достаточность. Пусть при любом $\varepsilon > 0$ существует ε-сеть для множества M. Возьмем числовую последовательность $\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и для каждого n построим ε_n-сеть $N_n = \{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_{m_n}^{(n)}\}$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \in M$. Так как N_1 есть ε_1-сеть для M, то каков бы ни был элемент $x \in M$, будем иметь, что $\rho(x, z_i^{(1)}) < \varepsilon$ хотя бы для одного $z_i^{(1)} \in N_1$. Поэтому любой элемент $x \in M$ попадает хотя бы в один шар $S(z_i^{(1)}, \varepsilon_1)$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$, т. е. все множество M, а тем более вся последовательность $\{x_n\}$, разместится в этих шарах. Так как шаров конечное число, а последовательность $\{x_n\}$ бесконечна, то найдется хотя бы один шар $S(z_i^{(1)}, \varepsilon_1)$, который будет содержать бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}$ нашей последовательности.

Так как N_2 есть ε_2-сеть для множества M, то, повторяя предыдущие рассуждения, мы получим, что существует подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\}$ последовательности $\{x_n^{(1)}\}$, входящая целиком в один из шаров $S(z_i^{(2)}, \varepsilon_2)$, и т. д. Мы получим, таким образом, подпоследовательности

$$\begin{array}{l}
x_1^{(1)}, \; x_2^{(1)}, \; x_3^{(1)}, \; \ldots, \; x_k^{(1)} \; \ldots, \\
x_1^{(2)}, \; x_2^{(2)}, \; x_3^{(2)}, \; \ldots, \; x_k^{(2)}, \; \ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1^{(m)}, \; x_2^{(m)}, \; x_3^{(m)}, \; \ldots, \; x_k^{(m)}, \; \ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

выделенные из данной последовательности, причем каждая следующая подпоследовательность есть часть предыдущей, и m-я подпоследовательность целиком содержится в некотором шаре $S(z_i^{(m)}, \varepsilon_m)$. Составим диагональную подпоследовательность

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_k^{(k)},\ \ldots$$

Покажем, что эта последовательность сходится в себе. В самом деле, так как $x_k^{(k)}$ и $x_{k+p}^{(k+p)}$ при $p>0$ входят в k-ю подпоследовательность, а k-я подпоследовательность содержится в шаре $S(z_i^{(k)}, \varepsilon_k)$, то

$$\rho(x_{k+p}^{(k+p)},\ x_k^{(k)}) \leqslant \varepsilon_k \to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

По предположению, пространство X полное. Поэтому из сходимости в себе последовательности $\{x_k^{(k)}\}$ следует ее сходимость к некоторому пределу, а это и доказывает возможность выделения из любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся подпоследовательности, т. е. компактность множества M.

Следствие. *Для того чтобы множество M, расположенное в полном метрическом пространстве X, было компактным, достаточно, чтобы при любом $\varepsilon>0$ существовала компактная ε-сеть для M.*

Для доказательства достаточно показать, что в этом случае существует при любом $\varepsilon>0$ конечная ε-сеть для M. Пусть $\varepsilon>0$ задано и N — компактная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для M, которая, по условию, существует. Так как N — компактное множество, то в силу необходимости условия Хаусдорфа существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть N_0 для N. Легко доказать, что N_0 есть конечная ε-сеть для N. В самом деле, возьмем любое $x\in M$. Найдется $y\in N$ такое, что $\rho(x, y)<\frac{\varepsilon}{2}$. Для данного $y\in N$ найдется $z\in N_0$ такое, что $\rho(y, z)<\frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\rho(z, x)<\varepsilon$, и требуемое доказано.

Пример. Рассмотрим основной параллелепипед Q координатного гильбертова пространства l_2, т. е. совокупность таких точек $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ этого пространства, для которых $\{\xi_i\}\leqslant\frac{1}{i}$. Покажем, что Q — компактное множество.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon^2$. Тогда для любого $x \in Q$ имеем

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon^2.$$

Рассмотрим множество Q_N элементов вида

$$x_N = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, 0, 0, \ldots\},$$

где

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, \xi_{N+1}, \ldots\} \in Q.$$

Так как

$$\rho(x, x_N) = \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} \xi_i^2} < \varepsilon,$$

то Q_N образует ε-сеть для Q. С другой стороны, ставя в соответствие элементу $x_N = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, 0, 0, \ldots\} \in Q_N$ элемент $y_N = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ N-мерного евклидова пространства, мы получим в этом пространстве множество P, которое, очевидно, будет изометричным множеству Q_N. Это множество P ограничено, потому что

$$\rho(y, 0) = \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} = K$$

для любого $y \in P$. Как ограниченное множество N-мерного евклидова пространства, P компактно. Но тогда компактно и Q_N, потому что если одно из двух изометричных множеств компактно, то компактно и второе.

Таким образом, мы получаем, что при любом $\varepsilon > 0$ существует компактная ε-сеть для множества Q, откуда в силу следствия из теоремы Хаусдорфа следует компактность этого множества.

Критерий компактности в пространстве $C\,[a, b]$. Рассмотрим множество $Q = \{x(t)\} \subset C[a, b]$. Функции $x(t)$ этого множества называются *равномерно ограниченными,* если

$|x(t)| \leqslant K$ для любой $x(t) \in Q$, и называются *равностепенно непрерывными*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|x(t') - x(t'')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t' - t''| < \delta$$

сразу для всех функций $x(t) \in Q$ и независимо от положения точек t' и t'' на отрезке $[a, b]$.

Теорема (Арчела). *Для того чтобы множество $Q \subset C[a, b]$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы функции этого семейства были равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Мы докажем только достаточность условия Арчела.

Включим пространство $C[a, b]$ в более широкое пространство $M[a, b]$ ограниченных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|.$$

Сходимость в пространстве $M[a, b]$ есть равномерная на $[a, b]$ сходимость, и так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть также непрерывная функция, то $C[a, b]$ является замкнутым подмножеством пространства $M[a, b]$. Поэтому если какое-либо множество $Q \subset C[a, b]$ окажется компактным в пространстве $M[a, b]$, то оно будет компактным и в $C[a, b]$, ибо пределы последовательностей функций из этого множества не могут выйти из пространства $C[a, b]$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta > 0$ — число, соответствующее данному ε в условиях теоремы Арчела. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками деления $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ на части так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_i |t_{i-1} - t_i| < \delta,$$

и зафиксируем эти точки деления.

Возьмем любую функцию $x(t) \in Q$ и поставим ей в соответствие ступенчатую функцию $\tilde{x}(t)$, определенную равенствами:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t_{i-1}), & t_{i-1} \leqslant t < t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ x(t_{n-1}), & t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n. \end{cases}$$

Так как на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ колебание функции $x(t)$ будет меньше ε, то

$$\rho(x, \tilde{x}(t)) = \sup_t |x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon,$$

и следовательно, множество N, составленное из всех функций $\tilde{x}(t)$, соответствующих $x(t) \in Q$, образует в пространстве $M[a, b]$ ε-сеть для множества Q.

Рассмотрим теперь множество ступенчатых функций N. Каждая ступенчатая функция $\tilde{x}(t) \in N$ однозначно определяется n числами, своими значениями в фиксированных точках t_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Принимая эти числа за координаты точки z из n-мерного евклидова пространства E_n, мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством N и некоторым множеством $P \subset E_n$. Множество P ограничено, так как для любой точки $z \in P$

$$\rho(z, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x(t_{i-1})]^2} \leqslant K\sqrt{n} = K_1,$$

где через K обозначена константа, ограничивающая модули функций $x(t) \in Q$. Как ограниченное множество n-мерного евклидова пространства, P компактно. Но тогда компактно и N в смысле равномерной сходимости на $[a, b]$. В самом деле, если $\{z_n\} \subset P$ и $\tilde{x}_n(t) \in N$ — функции, соответствующие z_n, то

$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \sup_i |x_n(t_{i-1}) - x_m(t_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_n(t_{i-1}) - x_m(t_{i-1})]^2} = \rho(z_n, z_m).$$

Поэтому сходимость последовательности $\{z_n\} \subset P$ влечет за собой равномерную сходимость соответствующей последовательности $\{\tilde{x}_n(t)\} \subset N$, и компактность множества $N \subset \subset M[a, b]$ доказана.

Итак, для множества Q равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций мы построили в $M[a, b]$ компактную ε-сеть. Но тогда Q также компактно в $M[a, b]$, а следовательно, и в $C[a, b]$, и достаточная часть теоремы Арчела доказана.

Если на компактных в себе множествах метрического пространства мы будем рассматривать функции точек этого пространства, принимающие числовые значения и непрерывные относительно сходимости, определяемой метрикой пространства, то такие функции обладают рядом свойств, присущих вещественным функциям вещественной переменной, непрерывным на отрезке числовой прямой. Так, например, имеет место следующая

Теорема (Вейерштрасса). *Функция $f(x)$, непрерывная на компактном в себе множестве Q метрического пространства X, ограничена на Q и достигает на этом множестве свою точную верхнюю и точную нижнюю границы.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ не ограничена сверху на Q. Тогда для любого n найдется точка $x_n \in Q$ такая, что

$$f(x_n) \geqslant n.$$

В силу компактности в себе множества Q, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся в точке $x_0 \in Q$. Но тогда, с одной стороны, согласно выбору точек x_n имеем $f(x_{n_i}) \geqslant n_i$ и, следовательно, $f(x_{n_i}) \to \infty$, а с другой стороны, в силу непрерывности функции, $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$.

Мы пришли к противоречию, которое и доказывает ограниченность сверху $f(x)$.

Аналогично доказывается, что $f(x)$ ограничена снизу на Q.

Так как множество чисел $\{f(x)\}$, где $x \in Q$, ограничено, то существуют числа $\alpha = \inf\limits_Q f(x)$ и $\beta = \sup\limits_Q f(x)$. Покажем, что точная верхняя граница β достигается в некоторой точке $\bar{x} \in Q$.

По определению точной верхней границы, для любого n найдется такая точка $x_n \in Q$, что

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \beta.$$

Так как множество Q компактно в себе, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся к точке $\bar{x} \in Q$. Тогда, во-первых, в силу непрерывности $f(x)$ имеем $f(x_{n_i}) \to f(\bar{x})$, во-вторых, неравенство

$$\beta - \frac{1}{n_i} < f(x_{n_i}) \leqslant \beta$$

показывает, что $f(x_{n_i}) \to \beta$. Но из этих двух фактов следует, что

$$f(\bar{x}) = \beta,$$

что и требовалось доказать.

На некомпактных в себе множествах теорема Вейерштрасса может оказаться неверной. Простейшие примеры этого даются в курсах математического анализа. Например, функция $f(x) = x^2$, непрерывная на интервале $(0,1)$, не достигает на нем ни наименьшего, ни наибольшего значения. Более сложный пример приводится ниже.

Рассмотрим в пространстве l_2 множество S_1 элементов $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leqslant 1$. Множество S_1 не компактно, так как последовательность элементов $e_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}$, $e_3 = \{0, 0, 1, 0, \ldots\}, \ldots$ принадлежит S_1, но поскольку $\rho(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ при $i \neq j$, то ни сама последовательность, ни любая ее подпоследовательность не сходятся. На S_1 определим функцию $f(x)$, полагая

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i} \xi_i^2$$

для $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots\}$. Эта функция ограничена на S_1, так как

$$0 \leqslant f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leqslant 1,$$

и непрерывна на этом множестве.

В самом деле,

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{i}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{i}\eta_i^2\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^2\right|+\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\eta_i^2\right|=|\rho^2(x,\,0)-\rho^2(y,\,0)|+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\left|\xi_i-\eta_i\right|\,|\xi_i+\eta_i|\leqslant|\rho^2(x,\,0)-\rho^2(y,\,0)|+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}(\xi_i+\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}<|\rho^2(x,\,0)-\rho^2(y,\,0)|+$$

$$+\rho(x,y)\cdot 2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}}=|\rho^2(x,0)-\rho^2(y,0)|+\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\rho(x,y).$$

Если теперь $x_n\to x_0$, то в силу непрерывности расстояния $\rho(x_n,\,0)\to\rho(x_0,\,0)$, и предыдущее неравенство показывает, что $f(x_n)\to f(x_0)$, т. е. что $f(x)$ непрерывна. Для элемента e_k имеем $f(e_k)=\frac{k-1}{k}=1-\frac{1}{k}$, откуда следует, что $\sup\limits_{S_1}f(x)=$ $=1$. Но эта точная верхняя граница не достигается. В самом деле, если $x\in S_1$ и $x=0$, то $f(0)=0<1$. Если же $x\in S_1$ и $x\neq 0$, то хотя бы одна координата ξ_i этого элемента отлична от нуля, и тогда

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{i}\xi_i^2=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\xi_i^2\leqslant 1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\xi_i^2<1.$$

Упражнения. 1. Пусть $M=\{x(t)\}$ — ограниченное множество пространства $C[a,b]$. Доказать, что множество функций вида $y(t)=\int\limits_a^t x(\tau)\,d\tau$ компактно.

2. Может ли компактное множество быть неограниченным?

3. Привести пример компактного в пространстве m множества, все точки которого имеют бесконечное множество координат, отличных от нуля.

4. Доказать, что всякий компакт есть сепарабельное метрическое пространство.

5. Будет ли компактным в пространстве $C[a,\,b]$ множество всех степеней $x^n,\,n=1,\,2,\,3,\ldots$?

ГЛАВА III

ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Строение открытых и замкнутых множеств

Так как числовая прямая и плоскость являются полными метрическими пространствами, то для линейных и плоских точечных множеств верны все результаты, полученные для множеств, расположенных в произвольных метрических пространствах. Однако можно получить некоторые дополнительные результаты, касающиеся структуры точечных множеств, расположенных на прямой или плоскости.

Рассмотрим сначала линейные множества.

Пусть A — ограниченное снизу множество на числовой прямой I и пусть $\alpha = \inf A$. Покажем, что $\alpha \in \bar{A}$.

Если $\alpha \in A$, то $\alpha \in \bar{A}$. Предположим, что $\alpha \bar{\in} A$. Тогда, по определению точной нижней границы, для любого n найдется точка $x_n \in A$ такая, что

$$\alpha \leqslant x_n < \alpha + \frac{1}{n} \cdot$$

Из этого неравенства вытекает, что $x_n \to \alpha$, и, следовательно, $\alpha \in A' \subset \bar{A}$. Итак, всегда $\alpha \in \bar{A}$. Аналогично показывая, что $\beta = \sup A \in \bar{A}$ для ограниченного сверху множества A. Если A ограничено, то отрезок $[\alpha, \beta]$ будем называть *наименьшим* отрезком, содержащим A. Отметим, что когда A — замкнутое множество, то

$$\alpha = \inf A \in A \quad \text{и} \quad \beta = \sup A \in A.$$

Теорема 1. *Всякое ограниченное открытое множество $G \subset I$ есть сумма конечного или счетного числа* *интервалов, которые попарно не пересекаются, но могут иметь общие концы.*

Доказательство. Пусть $x \in G$. Рассмотрим множество $F = [x, \infty) \cap CG$. Так как $[x, \infty)$ и CG замкнуты, то F — замкнутое множество, и так как G ограничено, то F непусто, ибо каждая точка $y > \sup G$ принадлежит F.

Множество F ограничено снизу точкой x. Пусть $b = \inf F$. Очевидно, что $b \geqslant x$, и поскольку $x \in G$, а $b \in F$, то $b > x$. Нетрудно убедиться, что все точки полуинтервала $[x, b)$ входят в G. Если бы это было не так, то нашлась бы точка y, $x < y < b$ такая, что $y \overline{\in} G$. Но тогда имели бы $y \in [x, \infty)$, $y \in CG$, и следовательно, $y \in F$, что несовместимо с неравенством $y < b = \inf F$. Наконец, так как $b \in F$, то $b \overline{\in} G$.

Аналогично, рассматривая множество $\Phi = (-\infty, x] \cap CG$ и полагая $a = \sup \Phi$, получим, что $(a, x] \subset G$, но $a \overline{\in} G$.

Итак, каждая точка $x \in G$ попадает в интервал (a, b), целиком входящий в G, концы которого не принадлежат G. Будем называть такие интервалы *составляющими* интервалами открытого множества G.

Легко проверить, что составляющие интервалы попарно не пересекаются. В самом деле, если бы два таких интервала, (a, b) и (a', b'), пересекались, то конец одного, например a', попал бы внутрь другого интервала (a, b), и мы получили бы, что, с одной стороны, a', как конец составляющего интервала, не принадлежит G, а с другой стороны, как внутренняя точка составляющего интервала (a, b), точка a' принадлежит G, что невозможно.

Остается показать, что составляющих интервалов не более чем счетное число. Рассмотрим составляющие интервалы, длины которых $\geqslant 1$. Так как G — ограниченное множество и, следовательно, расположено на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, то таких интервалов будет конечное число. Занумеруем их в какой-либо последовательности

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{n_1}, b_{n_1}).$$

Рассмотрим составляющие интервалы, длины которых < 1, но $\geqslant \frac{1}{2}$. Таких интервалов тоже конечное число, и мы можем их занумеровать:

$$(a_{n_1+1}, b_{n_1+1}), (a_{n_1+2}, b_{n_1+2}), \ldots, (a_{n_2}, b_{n_2}) \text{ и т. д.}$$

Этот процесс либо оборвется после конечного числа шагов, и тогда интервалов будет конечное число, либо мы занумеруем все интервалы в последовательность. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Всякое ограниченное замкнутое множество F на числовой прямой получается из наименьшего отрезка, его содержащего, выбрасыванием конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, называемых смежными интервалами множества F. Если множество F совершенно, то смежные интервалы не имеют общих концов.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \inf F$, $\beta = \sup F$ и $[\alpha, \beta]$ — наименьший отрезок, содержащий F. Так как $\alpha \in F$, $\beta \in F$, то $[\alpha, \beta] \cap CF = (\alpha, \beta) \cap CF$ открыто как пересечение двух открытых множеств. Следовательно, $(\alpha, \beta) \cap CF = \bigcup\limits_n (a_n, b_n)$, где сумма состоит из конечного или счетного числа слагаемых. Отсюда

$$F = [\alpha, \beta] \setminus [\alpha, \beta] \cap CF = [\alpha, \beta] \setminus \bigcup_n (a_n, b_n),$$

и первая часть теоремы доказана.

Если F совершенно, то оно замкнуто и не содержит изолированных точек. Так как изолированной точкой может быть лишь конец двух смежных интервалов, то вторая часть теоремы очевидна.

Рассмотрим произвольное ограниченное множество M на числовой прямой. Множество всех его предельных точек, т. е. производное множество M', замкнуто, и потому $\alpha = \inf M'$ и $\beta = \sup M'$ принадлежат M'. Иными словами, у множества M имеется самая правая и самая левая предельные точки. В том случае, когда M есть ограниченная числовая последовательность $\{x_n\}$, самая левая предельная точка этой последовательности называется *нижним пределом* последовательности и обозначается $\underline{\lim}\, x_n$, а самая правая предельная точка называется *верхним пределом* последовательности и обозначается $\overline{\lim}\, x_n$. Если $\alpha = \underline{\lim}\, x_n$, то при любом $\varepsilon > 0$ левее $\alpha - \varepsilon$ может быть лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, так как в противном случае существовала бы еще одна предельная точка $\alpha' \leqslant \alpha - \varepsilon$ нашей последовательности, что невозможно. Однако существует бесконечное число членов последовательности, лежащих левее $\alpha + \varepsilon$. Аналогично, если $\beta =$

$=\overline{\lim} x_n$, то все x_n, начиная с некоторого номера n_0, удовлетворяют неравенству $x_n < \beta + \varepsilon$, но существует бесконечно много номеров n_i таких, что $x_{n_i} > \beta - \varepsilon$.

Понятия наибольшего и наименьшего предела распространяются и на неограниченные последовательности. Именно, если последовательность неограничена сверху, то полагаем, что $\overline{\lim} x_n = \infty$, если последовательность неограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = \infty$. Читатель легко докажет, что для того, чтобы последовательность сходилась к пределу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n.$$

Заметим еще, что из последовательности $\{x_n\}$ всегда можно выделить подпоследовательности $\{x_{n'_i}\}$ и $\{x_{n''_i}\}$ такие, что

$$x_{n'_i} \to \underline{\lim} x_n, \quad x_{n''_i} \to \overline{\lim} x_n.$$

Переходим к плоским множествам.

Теорема 3. *Всякое ограниченное открытое множество G на плоскости может быть представлено в виде суммы счетного числа замкнутых прямоугольников, не имеющих попарно общих внутренних точек.*

Доказательство. Выберем на плоскости систему прямоугольных декартовых координат xOy и построим последовательность неограниченно измельчающихся сеток $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, составленных из замкнутых квадратов со сторонами, параллельными координатным осям и длинами сторон, равными соответственно $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ единицы масштаба. Каждый квадрат сетки S_k состоит из четырех равных квадратов сетки S_{k+1}. Пусть G_1 — замкнутое множество, составленное из квадратов сетки S_1, целиком входящих в G, пусть G_2 — замкнутое множество, полученное присоединением к G_1 тех квадратов сетки S_2, которые входят целиком в G, но не вошли в G_1, пусть G_3 — множество, полученное присоединением к G_2 квадратов сетки S_3, которые целиком входят в G, но не вошли в G_2 и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, мы придем к множеству $G_0 = \bigcup\limits_n G_n$, состоящему из конечного или счетного числа замкнутых квадратов, попарно без общих внутренних точек. Покажем, что $G_0 = G$.

Так как, очевидно, $G_0 \subset G$, то достаточно показать, что $G \subset G_0$. Итак, пусть x — произвольная точка множества G. Существует последовательность квадратов $\{Q_i\}$, $Q_i \in S_i$, стягивающаяся к точке x.

Так как точка x входит в G вместе с некоторой окрестностью, то все квадраты Q_i, начиная с достаточно большого номера, попадут в эту окрестность, а тем самым в G.

Пусть Q_{i_0} — квадрат с наименьшим номером, попавший целиком в G. Тогда ясно, что этот квадрат входит в G_{i_0} (либо как квадрат сетки S_{i_0}, либо как часть квадрата сетки с меньшим номером), и, следовательно, $Q_{i_0} \subset G_0$. Но тогда и $x \in G_0$, и равенство $G \subset G_0$ доказано.

Наконец, G_0 состоит из счетного числа квадратов, так как, если бы их было конечное число, то G_0 было бы замкнутое множество и не могло бы совпадать с открытым множеством G.

Отметим, что разложение открытого множества G в счетную сумму замкнутых квадратов неоднозначно.

Упражнения. 1. Будет ли интервал (a, b) оси Ox открытым множеством на плоскости? Будет ли отрезок $[a, b]$ замкнутым множеством на плоскости?

2. Можно ли неограниченное открытое множество на числовой прямой представить в виде конечной или счетной суммы попарно не перекрывающихся интервалов?

3. Можно ли представить ограниченное открытое множество на плоскости в виде суммы счетного числа открытых кругов? Можно ли это сделать, если дополнительно потребовать, чтобы круги не пересекались?

4. Будет ли сумма и пересечение конечного числа линейных совершенных множеств снова совершенным множеством?

5. Доказать, что

$$\underline{\lim} = \sup_n \{\inf (x_n, x_{n+1}, \ldots)\},$$

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \{\sup (x_n, x_{n+1}, \ldots)\}.$$

§ 2. Дисконтинуумы

Интересным примером совершенного множества на числовой прямой является канторово совершенное множество.

Возьмем отрезок $[0, 1]$, разделим на три равные части точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ и выбросим средний интервал $u = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Оставшиеся два отрезка обозначим: левый Δ_0, правый Δ_2, и назовем их *отрезками* 1-*го ранга*. Каждый отрезок 1-го ранга разобьем на три равные части и выбросим средние интервалы $u_0=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $u_2=\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Оставшиеся отрезки обозначим слева направо через Δ_{00}, Δ_{02}, Δ_{20}, Δ_{22} и назовем отрезками 2-*го ранга*. Каждый отрезок второго ранга разобьем на три равные части, выбросим средние интервалы u_{00}, u_{02}, u_{20}, u_{22}, оставшиеся отрезки 3-го ранга обозначим Δ_{000}, Δ_{002}, Δ_{020}, Δ_{022}, Δ_{200}, Δ_{202}, Δ_{220}, Δ_{222} и т. д.

Множество

$$P_0=[0, 1] \setminus u \setminus (u_0 \cup u_2) \setminus (u_{00} \cup u_{02} \cup u_{20} \cup u_{22}) \setminus \ldots$$

называется *канторовым совершенным множеством*. Так как смежные интервалы $u_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, где каждый индекс $i_1, i_2, \ldots, i_k$, равен 0 или 2, не имеют общих концов, то P_0 действительно совершенное множество.

Из построения видно, что P_0 лежит на двух отрезках 1-го ранга, на четырех отрезках 2-го ранга, ..., на 2^k отрезках k-го ранга и т. д.

Покажем, что P_0 имеет мощность континуума. Пусть x — произвольная точка P_0. Тогда x принадлежит одному из отрезков 1-го ранга Δ_{i_1}, $i_1=0$ или 2, одному из отрезков 2-го ранга $\Delta_{i_1 i_2}$, i_1, $i_2=0$ или 2, лежащем на отрезке Δ_{i_1}, одному из отрезков 3-го ранга $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$, лежащем на отрезке $\Delta_{i_1 i_2}$, и т. д. Таким образом, каждой точке $x \in P_0$ мы можем отнести счетную систему индексов

$$x \to (i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots),$$

где каждый индекс i_k равен 0 или 2, и первые k индексов определяют тот отрезок k-го ранга, на котором лежит x. Обратно, пусть дана произвольная система индексов

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots),$$

где каждый индекс равен 0 или 2. Рассмотрим последовательность вложенных друг в друга отрезков

$$\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2}, \ldots, \Delta_{i_1 i_2, \ldots, i_k}, \ldots,$$

длины которых, равные $\frac{1}{3^k}$, стремятся к нулю. Эта последовательность определяет единственную точку $x \in [0, 1]$.

Так как $x \in u$, $x \in u_{i_1}$, $x \in u_{i_1 i_2}$, ..., то $x \in P_0$, и мы получаем точку канторова совершенного множества, соответствующую заданной системе индексов

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots) \to x.$$

Очевидно, соответствие $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots) \leftrightarrow x$ взаимно однозначно.

Итак, мы видим, что P_0 есть множество, каждая точка которого определяется счетной системой индексов, принимающих, независимо друг от друга, два значения: $x = x_{i_1 i_2, \ldots, i_k, \ldots}$, $i_k = 0, 2$. Но такое множество имеет мощность c, что и требовалось доказать.

Докажем, наконец, что множество P_0 нигде не плотно. Пусть (a, b) — произвольный интервал числовой прямой. Покажем, что в нем найдется другой интервал (α, β), свободный от точек множества P_0.

Если в (a, b) нет точек множества P_0, то за (α, β) можно взять любой интервал, лежащий в (a, b). Предположим, что в (a, b) есть точка $x \in P_0$. Эта точка x принадлежит при любом k некоторому отрезку k-го ранга $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Выберем k настолько большим, чтобы иметь $\frac{1}{3^k} < \min(|x-a|, |x-b|)$. Тогда отрезок $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ попадет целиком внутрь интервала (a, b). Интервал $u_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, являющийся средней третью отрезка $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, свободный от точек P_0, и даст нам в этом случае требуемый интервал (α, β).

Нигде не плотные множества евклидова пространства, имеющие мощность континуума, называются также *всюду разрывными континуальными множествами* или *дисконтинуумами*. Канторово совершенное множество P_0 является примером такого дисконтинуума на числовой прямой. Более того, мы покажем сейчас, что все линейные дисконтинуумы имеют в известном смысле то же строение, что и канторово совершенное множество.

Два линейных точечных множества A и B называются *подобными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок следования точек на прямой, т. е. такое, что если $x' \leftrightarrow y'$, $x'' \leftrightarrow y''$, $x', x'' \in A$, $y', y'' \in B$ и $x' < x''$, то $y' < y''$.

Теорема 1. *Всякое ограниченное, совершенное, нигде не плотное линейное множество подобно канторову совершенному множеству и, следовательно, все такие множества подобны друг другу.*

Доказательство. Пусть P — линейное ограниченное, совершенное, нигде не плотное множество. В силу теоремы предыдущего параграфа оно получается из наименьшего отрезка $[a, b]$, его содержащего, выбрасыванием счетного числа интервалов, не имеющих попарно общих точек и концов. Смежных интервалов будет обязательно счетное множество, так как при конечном числе смежных интервалов P не было бы нигде не плотным.

Пусть V — наибольший по длине смежный интервал множества P или, если таких интервалов несколько (конечное число), самый левый из них. Отрезки, получившиеся после удаления V из $[a, b]$, обозначим через δ_0 и δ_2. Пусть V_0 — наибольший по длине смежный интервал множества P, лежащий на δ_0, или самый левый из таких интервалов. Обозначим через δ_{00} и δ_{02} отрезки, остающиеся после удаления из δ_0 интервала V_0. Аналогично приходим к интервалу V_2 и отрезкам δ_{20} и δ_{22} и т. д. Отметим, что при каждом шаге на каждом из отрезков $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ будут обязательно смежные интервалы, так как в противном случае весь этот отрезок принадлежал бы P и множество P не было бы нигде не плотным.

Таким образом,

$$P = [a, b] \setminus V \setminus (V_0 \cup V_2) \setminus (V_{00} \cup V_{02} \cup V_{20} \cup V_{22}) \setminus \ldots$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве несчетности канторова совершенного множества, получаем, что каждая точка $x \in P$ определяется счетным множеством индексов, принимающих независимо два значения

$$y = y_{j_1 j_2 \ldots j_k \ldots}, \qquad j_k = 0 \text{ или } 2.$$

Заметим теперь следующее. Пусть y и y' — две различные точки множества P (или, что все равно, x и x' — две различные точки канторова множества P_0)

$$y = y_{j_1 j_2 \ldots j_k \ldots}, \qquad y' = y'_{j'_1 j'_2 \ldots j'_k \ldots}.$$

Предположим, что y и y' лежат на одном и том же отрезке 1-го, 2-го, ..., $(k-1)$-го ранга, но на разных отрезках k-го ранга. Тогда

$$j_1 = j'_1,\ j_2 = j'_2,\ \ldots,\ j_{k-1} = j'_{k-1},\ j_k \neq j'_k.$$

Ясно, что если $j_k = 0$, $j'_k = 2$, то $y < y'$, и обратно, если $y' < y$, то $j_k = 2$, $j'_k = 0$. Доказательство теоремы получается теперь путем установления взаимно однозначного соответствия

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} \leftrightarrow y_{j_1 j_2 \ldots j_k \ldots},$$

если

$$i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots,\ i_k = j_k,\ \ldots.$$

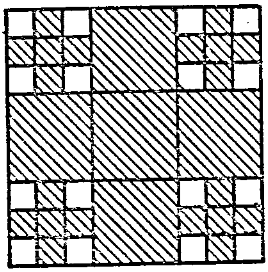

Рис. 5.

В заключение этого параграфа приведем пример плоского дисконтинуума. Пусть R_0 — множество точек квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, координаты которых принадлежат канторовым множествам P_{0x} и P_{0y}, расположенным соответственно на отрезках $[0, 1]$ осей $0x$ и $0y$. Построение множества ясно из рис. 5. (Заштрихованные области выбрасываются. Процесс выбрасывания продолжается неограниченно.) Читатель легко докажет, что R_0 нигде не плотное совершенное множество мощности континуума. Множество R_0 называют *ковром Серпинского.*

Упражнения. 1. Показать, что канторово совершенное множество есть совокупность точек отрезка $[0, 1]$, разложения которых в троичную дробь не содержат цифры 1.

2. Показать, что множество точек отрезка $[0, 1]$, разложения которых в десятичную дробь не содержат цифры 5, есть совершенное, нигде не плотное множество.

3. Точки канторова совершенного множества, являющиеся концами смежных интервалов, назовем *односторонними.* Содержит ли P_0 точки, отличные от односторонних? Как их можно еще охарактеризовать?

4. Все рациональные точки отрезка $[0, 1]$, кроме точек $x = 0$, $x = 1$, занумеруем в последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Заключим точку r_k в интервал с центром в этой точке длины, меньшей чем $\frac{\varepsilon}{2^k}$ и чем расстояние от r_k до концов отрезка. Удалим из $[0, 1]$ все такие интервалы. Какое множество останется?

§ 3. Точки конденсации

Рассмотрим несчетное множество M на числовой прямой. Точка $a \in I$ называется *точкой конденсации* множества M, если в любой окрестности точки a содержится несчетное множество точек из M. Ясно, что каждая точка конденсации есть предельная точка множества M. Обратное неверно.

Для изучения точек конденсации нам понадобится понятие рациональной окрестности точки числовой прямой.

Согласно общему определению, которое давалось в теории метрических пространств, *окрестностью* точки числовой прямой является любой интервал с центром в этой точке. Такую окрестность мы будем иногда называть *симметричной*. Несколько видоизменяя это определение, назовем *рациональной окрестностью* точки $a \in I$ любой интервал с рациональными концами, содержащими эту точку, которая может и не быть центром интервала. Легко видеть, что для того чтобы точка a была предельной точкой (соответственно точкой конденсации) множества M, необходимо и достаточно, чтобы любая рациональная окрестность точки a содержала хотя бы одну точку множества M (соответственно несчетное множество точек из M). Докажем это утверждение для точки конденсации.

Пусть a — точка конденсации и (r', r'') — произвольная рациональная окрестность точки a. Выберем $\delta < \min(|r' - a|, |r'' - a|)$. Тогда окрестность $(a - \delta, a + \delta)$ точки a попадет целиком в (r', r''). Так как a — точка конденсации, то $(a - \delta, a + \delta)$, а тем самым и (r', r''), будут содержать несчетное множество точек из M, и необходимость доказана.

Пусть, наоборот, любая рациональная окрестность точки a содержит несчетное множество точек из M.

Рассмотрим произвольную окрестность $(a - \delta, a + \delta)$ точки a, и пусть r' и r'' — два рациональных числа, расположенные соответственно между $a - \delta$ и a между a и $a + \delta$. Тогда в окрестность $(a - \delta, a + \delta)$ попадет целиком рациональная окрестность (r', r''), а вместе с ней и несчетное множество точек из M. Но это значит, что a есть точка конденсации для M, и достаточность также доказана.

Говорят, что система рациональных окрестностей и система всех симметричных окрестностей эквивалентны, или что они порождают одну и ту же топологию на прямой.

Теорема 1. *Всякое несчетное множество M содержит несчетное множество своих точек конденсации.*

Отсюда следует, в частности, что множество точек конденсации несчетного множества не пусто.

Доказательство. Пусть R — множество точек из M, не являющихся точками конденсации множества M. Если $R = \varnothing$, то доказывать нечего.

Пусть $R \neq \varnothing$ и $x \in R$. Так как x не является точкой конденсации, то найдется рациональная окрестность (r'_x, r''_x) точки x, содержащая не более счетного множества точек из M, в том числе точек из R. Таким образом, все множество R может быть заключено в некоторую систему рациональных интервалов, каждый из которых содержит не более счетного числа точек из R. Так как всех рациональных интервалов счетное множество, то отсюда следует, что R также не более чем счетно. Тогда $M \setminus R$ — множество точек конденсации множества M, несчетно (точнее, имеет ту же мощность, что и M), и теорема доказана.

Теорема 2. *Множество N точек конденсации несчетного множества M совершенно.*

Доказательство. Покажем сначала, что N замкнуто. Пусть $x \in N'$ и (r', r'') — произвольный рациональный интервал, содержащий точку x. Для достаточно малого δ интервал $(x - \delta, x + \delta)$ попадет целиком внутрь (r', r''). Так как x — предельная точка для множества точек конденсации, то $(x - \delta, x + \delta)$ содержит хотя бы одну точку конденсации x_0, а вместе с ней и некоторую окрестность точки x_0. Но тогда эта окрестность, а следовательно, и (r', r''), содержат несчетное множество точек из M, и поскольку (r', r'') — произвольная рациональная окрестность точки x, то x есть точка конденсации, т. е. $x \in N$.

Покажем, что N не содержит изолированных точек. Пусть x_0 — произвольная точка из N и $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ — произвольная окрестность точки x_0. Тогда эта окрестность содержит несчетное множество точек из M. Рассмотрим несчетное множество

$$M_1 = M \cap (x_0 - \eta, x_0 + \eta).$$

По теореме 1 оно содержит несчетное множество своих точек конденсации. Ясно, однако, что каждая точка конденсации для M_1 есть в то же время точка конденсации для M.

Следовательно, внутрь $(x_0-\eta,\ x_0+\eta)$ попадет несчетное множество точек из N, и, таким образом, x_0 не является изолированной точкой этого множества. Теорема полностью доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая

Теорема 3 (Кантора—Бендиксона). *Всякое несчетное замкнутое множество M есть сумма совершенного множества своих точек конденсации и не более, чем счетного множества остальных точек.*

Для доказательства достаточно заметить, что $N\subset M$ в силу замкнутости M.

Теорема 4. *Всякое замкнутое множество на числовой прямой либо конечно, либо счетно, либо имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть сначала M — ограниченное замкнутое множество. Если M не конечно и не счетно, то оно содержит ограниченное совершенное множество своих точек конденсации. Но всякое совершенное множество либо не является нигде не плотным и тогда содержит целый отрезок, а следовательно, имеет мощность континуума, либо нигде не плотно и тогда подобно канторову совершенному множеству, а потому снова имеет мощность континуума. Итак, M имеет мощность не меньшую, чем континуум, но оно не может иметь мощность бо́льшую, чем континуум, так как лежит на числовой прямой. Следовательно, $\overline{\overline{M}}=c$.

Если же M неограничено, то достаточно рассмотреть замкнутые множества $M_n=M\cap[-n,\ n]$.

Каждое M_n (если оно не пусто) либо конечно, либо счетно, либо имеет мощность континуума. Но тогда и

$$M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$$

либо конечно, либо счетно, либо имеет мощность континуума.

В заключение отметим, что понятие точки конденсации имеет смысл в любом метрическом, в частности, в конечномерном, евклидовом пространстве.

Упражнения. 1. Привести пример предельной точки множества, не являющейся точкой конденсации.

2. Что представляет собой множество точек конденсации канторова совершенного множества?

ГЛАВА IV
ИНТЕГРАЛЫ ПО АБСТРАКТНЫМ МНОЖЕСТВАМ

Интеграл Коши—Римана, который вводится и изучается в основном курсе математического анализа, имеет ряд недостатков. Во-первых, области интегрирования должны быть достаточно простыми; во-вторых, узок класс интегрируемых функций; в-третьих, затруднителен переход к пределу под знаком интеграла. Имеются и другие недостатки. Ниже будет изложена концепция интеграла, более общая, чем римановская, и в значительной мере свободная от указанных недостатков.

§ 1. Мера абстрактных множеств

Рассмотрим систему S подмножеств $A, B, C, \ldots$ некоторого множества X. Будем говорить, что система S образует *аддитивный класс множеств*, если:

1) $\varnothing$ и X входят в S;

2) из $A \in S$ следует, что $CA \in S$;

3) из $A_n \in S$, $n = 1, 2 \ldots$, следует $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Из условий 2) и 3) вытекает, что пересечение конечного или счетного числа множества, входящих в класс S, также входит в этот класс.

Тривиальным примером аддитивного класса является система всех подмножеств множества X.

Вторым примером могут служить так называемые борелевские множества на фиксированном отрезке числовой прямой. Возьмем на $[A, B] \subset (-\infty, \infty)$ последовательность открытых множеств $\{G_n\}$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ есть открытое множество, но $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ уже может быть и не открытым. Например, пересечение интервалов $\left(a, b+\frac{\varepsilon}{n}\right)$, $a > A$, $b+\varepsilon < B$, есть полуинтервал $(a, b]$. Множества вида $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ назовем множествами типа G_δ. Аналогично, если $\{F_n\}$ — последовательность замкнутых множеств на $[A, B]$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ замкнуто, а $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ может быть ни замкнуто, ни открыто. Множества вида $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ назовем множествами типа F_σ. Ясно, что пересечение конечного или счетного числа множеств типа G_δ есть снова множества того же типа, но сумма счетного числа таких множеств может оказаться множеством ни замкнутым, ни открытым, ни типа G_δ, ни типа F_σ. Говорят тогда, что это множество имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Аналогично определяются множества $F_{\sigma\delta}$ и т. д.

Совокупность множеств, которая может быть получена из открытых и замкнутых множеств путем операций суммирования и пересечения, повторенных в любом порядке конечное или счетное число раз, образует *борелевскую систему* $\mathcal{B}$ множеств на отрезке $[A, B]$. Нетрудно проверить, что если $M \in \mathcal{B}$, то также $C_{[A,B]}M \in \mathcal{B}$, так что $\mathcal{B}$ является аддитивным классом.

Можно доказать, что существуют множества типа $G_{\delta\sigma\delta\sigma\ldots}$ и $F_{\sigma\delta\sigma\delta\ldots}$ для любой конечной комбинации индексов σ и δ, не сводящиеся к множествам более простого типа, так что класс борелевских множеств достаточно обширен.

С третьим примером аддитивного класса мы познакомимся позже.

Введем некоторые понятия. Пусть дана какая-нибудь последовательность $\{X_n\}$ множеств. Назовем *верхним пределом* этой последовательности и обозначим через $\overline{\lim}\, X_n$ множество X, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат бесконечному числу множеств последовательности $\{X_n\}$ (может быть подряд, начиная с некоторого номера, может быть всем с четными номерами и т. д.). Легко проверить, что

$$\overline{\lim}\, X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k\right).$$

В самом деле, если $x \in \overline{\lim} X_n$, то $x \in X_n$ для бесконечного числа номеров n, откуда $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k$ для всех n, а следовательно, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k)$. Обратно, если $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k)$, то x входит в любую сумму $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k$, а следовательно, должен входить в бесконечное число множеств-слагаемых X_k.

Ясно, что если последовательность $\{X_n\}$ состоит из расширяющихся множеств $X_n \subset X_{n+1}$ (возрастающая последовательность), то $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ и потому

$$\overline{\lim}\, X_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Если же последовательность $\{X_n\}$ состоит из сужающихся множеств $X_{n+1} \subset X_n$ (убывающая последовательность), то

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k = X_n \quad \text{и} \quad \overline{\lim}\, X_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Назовем *нижним пределом* последовательности $\{X_n\}$ множеств и обозначим через $\underline{\lim}\, X_n$ множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам X_n, начиная с некоторого номера. Ясно, что

$$\underline{\lim}\, X_n \subset \overline{\lim}\, X_n.$$

Легко показать, что

$$\underline{\lim}\, X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{k=n}^{\infty} X_k);$$

что если $\{X_n\}$ — возрастающая последовательность множеств, то

$$\underline{\lim}\, X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

и если $\{X_n\}$ — убывающая последовательность множеств, то

$$\underline{\lim}\, X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Если для некоторой последовательности $\{X_n\}$ мы имеем

$$\overline{\lim}\, X_n = \underline{\lim}\, X_n = \lim X_n = X,$$

то последовательность множеств называется *сходящейся* и множество X называется *пределом* этой последовательности. Из предыдущего следует, что возрастающая и убывающая последовательности множеств всегда сходятся и имеют соответственно пределы

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Лемма. *Если последовательность $\{A_n\}$ входит в аддитивный класс S, то $\underline{\lim}\, A_n$, $\overline{\lim}\, A_n$, а в случае сходимости и $\lim A_n$, также входят в S.*

Доказательство следует непосредственно из равенств

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

и

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Множества, входящие в аддитивный класс S, мы будем часто называть *S-измеримыми* или просто *измеримыми*.

Пусть дан аддитивный класс множеств S. Функцию $\varphi(A)$, определенную на всех множествах системы S и ставящую в соответствие множествам $A \in S$ вещественные числа $\varphi(A)$, будем называть *аддитивной функцией множеств*, если

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

для любых двух множеств A, $B \in S$ таких, что $A \cap B = \emptyset$.

Если же

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

для любых $A_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, и таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то функцию $\varphi(A)$ будем называть *вполне аддитивной*. Вполне аддитивную неотрицательную функцию множеств, определенную на классе S-измеримых множеств, называют *мерой* этих множеств. Меру мы будем обозначать обычно $\mu(A)$, или короче, μA. Итак, если $\mu(A)$ — мера, то:

1) $\mu(A) \geqslant 0$ для любого множества $A \in S$;

2) $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, если $A_n \in S$, $n=1, 2, \ldots$, и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Установим несколько простейших свойств меры.

1) *Если A, $B \in S$ и $A \supset B$, то*

$$\mu(A) \geqslant \mu(B)$$

(*свойство монотонности меры*).

Для доказательства положим, что

$$A \setminus B = A \cap CB = R.$$

Тогда $R \in S$. Так как $A = B \cup R$ и $B \cap R = \varnothing$, то

$$\mu(A) = \mu(B \cup R) = \mu(B) + \mu(R) \geqslant \mu(B),$$

что и требовалось доказать.

Из этого свойства и полной аддитивности меры следует, что

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n),$$

если $A_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$ — любые. В самом деле,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n A'_n,$$

где $A'_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{m<k} A_m$. Тогда $A'_i \cap A'_j = \varnothing$, следовательно,

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigcup_n A'_n) = \sum_n \mu(A'_k) \leqslant \sum_n \mu(A_n),$$

так как $\mu(A'_n) \leqslant \mu(A_n)$, в силу включения $A'_n \subset A_n$.

2) $\mu(\varnothing) = 0$.

В самом деле, $A \cup \varnothing = A$. Поэтому $\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing)$, откуда $\mu(\varnothing) = 0$.

3) *Если последовательность $\{A_n\} \subset S$ и монотонно возрастает или монотонно убывает, то*

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu A_n.$$

Пусть

$$A = \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

тогда

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \ldots = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \ldots,$$

где $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ и $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$. В силу полной аддитивности меры

$$\mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \mu A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \mu (A_i \setminus A_{i-1}).$$

Но так как $A_i = A_{i-1} \cup B_i$, $A_i \cap B_i = \emptyset$, то

$$\mu A_i = \mu A_{i-1} + \mu B_i = \mu A_{i-1} + \mu (A_i \setminus A_{i-1}).$$

Отсюда

$$\mu (A_i \setminus A_{i-1}) = \mu A_i - \mu A_{i-1}$$

и, следовательно,

$$\mu A = \mu A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} [\mu A_i - \mu A_{i-1}] = \mu A_1 + \lim_n \sum_{i=2}^{n} [\mu A_i - \mu A_{i-1}] =$$

$$= \lim_n [\mu A_1 + \sum_{i=2}^{n} (\mu A_i - \mu A_{i-1})] = \lim_n \mu A_n,$$

что и требовалось доказать.

Если $\{A_n\}$ — монотонно убывающая последовательность, то $\{A_1 \setminus A_n\}$ монотонно возрастает и

$$\lim (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \lim_n A_n.$$

По только что доказанному,

$$\mu (A_1 \setminus \lim A_n) = \mu [\lim (A_1 \setminus A_n)] = \lim \mu (A_1 \setminus A_n),$$

откуда, учитывая, что $\lim A_n \subset A_1$ и $A_n \subset A_1$, находим

$$\mu A_1 - \mu (\lim A_n) = \lim [\mu A_1 - \mu A_n],$$

т. е.

$$\mu (\lim A_n) = \lim \mu A_n.$$

4) *Если* $\{A_n\}$ — *любая последовательность измеримых множеств, то*

$$\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leqslant \underline{\lim}\, \mu(A_n), \tag{1}$$

$$\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geqslant \overline{\lim}\, \mu(A_n), \tag{2}$$

а если последовательность $\{A_n\}$ сходится, то

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu A_n. \tag{3}$$

Введем множества $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Тогда $\{B_n\}$ — возрастающая последовательность и

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim B_n.$$

По свойству 3) имеем

$$\mu(\underline{\lim}\, A_n) = \mu(\lim B_n) = \lim \mu B_n. \tag{*}$$

Так как $B_n \subset A_n$, то $\mu B_n \leqslant \mu A_n$.

Рассмотрим числовую последовательность $\{\mu A_n\}$. Эта последовательность может не сходиться, но она ограничена снизу так, как все $\mu A_n \geqslant 0$, и сверху числом μX и потому имеет конечный нижний предел $\underline{\lim}\, \mu A_n$, являющийся самой левой предельной точкой последовательности $\{\mu A_n\}$.

Выберем подпоследовательность $\{\mu A_{n_i}\}$, такую, что $\mu A_{n_i} \to \underline{\lim}\, \mu A_n$. Так как подпоследовательность любой сходящейся числовой последовательности сходится к тому же пределу, то $\mu B_{n_i} \to \lim \mu B_n$, отсюда и из неравенства $\mu B_n \leqslant \mu A_n$ следует

$$\lim \mu B_n = \lim_{i\to\infty} \mu B_{n_i} \leqslant \lim_{i\to\infty} \mu A_{n_i} = \underline{\lim}\, \mu A_n.$$

Но тогда неравенство (*) дает

$$\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leqslant \underline{\lim}\, \mu A_n.$$

Для доказательства (2) рассмотрим убывающую последовательность $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = D_n$. Снова имеем

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \lim D_n,$$

откуда

$$\mu(\overline{\lim} A_n) = \lim \mu D_n.$$

Теперь $D_n \supset A_n$ и $\mu D_n \geqslant \mu A_n$. Последовательность $\{\mu A_n\}$, как указано выше, ограничена и потому имеет конечный верхний предел. Переходя к подпоследовательности $\{\mu A_{n_j}\}$, сходящейся к $\overline{\lim}\, \mu A_n$, будем иметь

$$\mu(\overline{\lim} A_n) = \lim_{j\to\infty} \mu D_{n_j} \geqslant \lim_{j\to\infty} \mu A_{n_j} = \overline{\lim}\, \mu A_n,$$

и неравенство (2) также доказано.

Из (1) и (2) непосредственно следует равенство (3).

В дальнейшем в этой главе мы будем предполагать, что выбраны и фиксированы основное множество X, аддитивный класс S и мера μ.

Упражнения. 1. Показать, что пересечение двух аддитивных классов S_1 и S_2 есть снова аддитивный класс.

2. Показать, что если A и B измеримы (т. е. принадлежат одному и тому же аддитивному классу), то

$$\mu(A \cap B) = \mu A + \mu B - \mu(A \cup B).$$

§ 2. Измеримые функции

Пусть $f(x)$ — функция точки, определенная на некотором подмножестве E множества X и принимающая вещественные значения. Эта функция называется *измеримой*, если измеримо множество E и при любом вещественном c измеримо множество $E(f > c)$, состоящее из тех точек $x \in E$, в которых $f(x) > c$.

Лемма. *Для того чтобы функция $f(x)$ была измерима на измеримом множестве E, необходимо и достаточно, чтобы было измеримо одно из трех множеств:*

$$E(f \geqslant c),\ E(f < c),\ E(f \leqslant c)$$

при любом c.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ измерима. Тогда при любом вещественном c и любом натуральном n измеримы множества $E\left(f > c - \frac{1}{n}\right)$. Далее, нетрудно проверить, что

$$E(f \geqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > c - \frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

В самом деле, если $x \in E(f \geqslant c)$, то $f(x) \geqslant c$, откуда $f(x) > c - \frac{1}{n}$ при любом n, и потому $x \in E\left(f > c - \frac{1}{n}\right)$ при любом n, а значит, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f > c - \frac{1}{n}\right)$. Пусть, напротив, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f > c - \frac{1}{n}\right)$. Это значит, что $x \in E\left(f > c - \frac{1}{n}\right)$ для любого n, т. е. $f(x) > c - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $f(x) \geqslant c$, т. е. $x \in E(f \geqslant c)$.

Итак, равенство (1) доказано, а так как пересечение счетного числа измеримых множеств измеримо, то измеримо и $E(f \geqslant c)$.

Из измеримости $E(f \geqslant c)$ и равенства $E(f < c) = E \setminus E(f \geqslant c)$ следует измеримость $E(f < c)$. Аналогично получается измеримость $E(f \leqslant c)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть, например, $E(f \geqslant c)$ измеримо при любом вещественном c. Легко проверить равенство

$$E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant c + \frac{1}{n}\right),$$

из которого следует измеримость множества $E(f > c)$. В самом деле, если $x \in E(f > c)$, то $f(x) > c$, и найдется настолько большое n_0, что $f(x) > c + \frac{1}{n_0}$, тем более $f(x) \geqslant c + \frac{1}{n_0}$, т. е. $x \in E\left(f \geqslant c + \frac{1}{n_0}\right)$, откуда $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant c + \frac{1}{n}\right)$.

Обратно, если

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant c + \frac{1}{n}\right), \text{ то } x \in E\left(f \geqslant c + \frac{1}{n_0}\right)$$

для некоторого n_0, т. е. $f(x) \geqslant c + \frac{1}{n_0}$, откуда $f(x) > c$, следовательно, $x \in E(f > c)$.

Аналогично проверяется достаточность других условий. Полезно иметь в виду, что для измеримой функции $f(x)$ множества $E(a \leqslant f < b)$, $E(a < f < b)$, $E(a < f \leqslant b)$ измеримы.

Отметим, что если $f(x)$ измерима, то измеримо множество $E(f=c)$ при любом c, но обратное неверно, т. е. из измеримости этих множеств не вытекает измеримость функции. Это можно пояснить следующим примером. Пусть аддитивный класс X содержит все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X$. Если есть неизмеримое множество $E \subset X$, то любая функция $f(x)$, заданная на E и дающая взаимно однозначное отображение E на некоторое подмножество числовой прямой, не будет измерима (E не измеримо!), в то время как все множества $E(f=c)$ состоят из одной точки и потому измеримы.

Примеры. 1. Пусть $E \in S$, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, где $E_i \cap E_j = \emptyset$ и все E_i — измеримые множества. Рассмотрим функцию $f(x)$, такую, что $f(x) = c_i$ для $x \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$. Покажем, что она измерима.

Возьмем любое вещественное c. Тогда имеем

$$E(f > c) = \bigcup_j E_j,$$

где суммирование распространяется на все индексы j такие что $c_j > c$. Измеримость функции $f(x)$ теперь очевидна.

2. Пусть S — класс борелевских множеств на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на этом отрезке. Для любого вещественного c множество $E(f \geqslant c)$ замкнуто. (Здесь E обозначает отрезок $[0, 1]$.) В самом деле, пусть $\{x_n\} \subset E(f \geqslant c)$ и $x_n \to x_0$. Имеем

$$f(x_n) \geqslant c.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя непрерывность $f(x)$, получим

$$f(x_0) \geqslant c,$$

т. е. $x_0 \in E(f \geqslant c)$. Так как замкнутые множества входят в S, то измеримость $E(f \geqslant c)$, а вместе с тем и измеримость $f(x)$, доказана.

Установим некоторые свойства измеримых функций.

1) *Если $f(x)$ измерима на E, то $kf(x)$ и $f(x)+l$ при любых вещественных k и l измеримы на том же множестве.*

Доказательство следует из равенств:

$$E(kf>c)=\begin{cases} E\left(f>\frac{c}{k}\right), \text{ при } k>0, \\ \varnothing, \text{ если } c\geqslant 0,\ k=0, \\ E, \text{ если } c<0,\ k=0, \\ E\left(f<\frac{c}{k}\right), \text{ при } k<0; \end{cases}$$

$$E(f+l>c)=E(f>c-l)$$

и из измеримости множеств, стоящих в правых частях этих равенств.

2) *Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, то множество $E(f>g)$ измеримо.*

Пусть $\{r_i\}$ — совокупность всех рациональных чисел, занумерованных в некоторую последовательность. Тогда

$$E(f>g)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f>r_n)\cap E(g<r_n). \qquad (*)$$

(Заметим, что некоторые из множеств, стоящих в правой части, могут оказаться пустыми.) В самом деле, пусть $x\in E(f>g)$. Это значит, что $f(x)>g(x)$. Найдется поэтому такое рациональное число r_n, что

$$f(x)>r_n>g(x).$$

Отсюда следует, что $x\in E(f>r_n)\cap E(g<r_n)$ и, тем более,

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f>r_n)\cap E(g<r_n).$$

Пусть, обратно, $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f>r_n)\cap E(g<r_n)$. Тогда x принадлежит одному из слагаемых $E(f>r_n)\cap E(g<r_n)$. Это значит, что $f(x)>r_n$ и $g(x)<r_n$, т. е. $f(x)>g(x)$, и следовательно, $x\in E(f>g)$. Равенство $(*)$, таким образом, доказано.

Так как $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E, то измеримо каждое из множеств, входящих в правую часть равенства $(*)$.

Так как пересечение и сумма измеримых множеств измеримы, то измеримо и $E(f>g)$.

3) *Сумма $f(x)+g(x)$ функций, измеримых на E, измерима на этом множестве.*

В самом деле,

$$E(f+g>c)=E(f>-g+c).$$

Так как $f(x)$ и $-g(x)+c$ — измеримые функции, то по предыдущему свойству множество в правой части измеримо, а следовательно, измеримо и $E(f+g>c)$.

4) *Произведение $f(x)\,g(x)$ функций, измеримых на E, измеримо на этом множестве.*

Пусть сначала $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, т. е. рассмотрим $f^2(x)$.

Имеем

$$E(f^2>c)\begin{cases} E(f>\sqrt{c})\bigcup E(-f<-\sqrt{c}) \text{ при } c>0, \\ E \text{ при } c\leqslant 0, \end{cases}$$

откуда и следует, что $f^2(x)$ измерима. Измеримость $f(x)\,g(x)$ вытекает теперь из равенства

$$f(x)\,g(x)=\frac{1}{2}\left[(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)\right].$$

5) *Если $f(x)$ измерима на E и не обращается в нуль на этом множестве, то $\frac{1}{f(x)}$ измерима.*

В самом деле,

$$E\left(\frac{1}{f}>c\right)=\begin{cases} E\left(f<\frac{1}{c}\right) \text{ при } c>0, \\ E(f>0) \text{ при } c=0, \\ E(f>0)\bigcup\left[E(f<0)\bigcap E\left(f<\frac{1}{c}\right)\right] \text{ при } c<0. \end{cases}$$

6) *Частное $\frac{g(x)}{f(x)}$ двух функций, измеримых на E, измеримо на этом множестве ($f(x)\neq 0$ на E).*

Это утверждение непосредственно следует из свойств 4 и 5. Можно доказать также, что если $f(x)$ измеримая на E функция, то $|f(x)|$:

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } f(x)>0, \\ 0, \text{ если } f(x)\leqslant 0; \end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x)<0, \end{cases}$$

измеримы на E.

7) *Если $f(x)$ измерима на E_i и $E=\bigcup\limits_i E_i$, то $f(x)$ измерима на E.*

Доказательство непосредственно следует из измеримости множества E и из равенства

$$E(f>c)=\bigcup_i E_i(f>c).$$

8) *Если $f(x)$ измерима на E и E' — измеримое подмножество, то $f(x)$ измерима на E'.*

В самом деле,

$$E'(f>c)=E'\bigcap E(f>c),$$

и измеримость $f(x)$ на E' очевидна.

Расширим несколько область допускаемых к рассмотрению функций. Именно, будем предполагать, что функция $f(x)$ может принимать в некоторых точках множества E значения, равные $+\infty$ или $-\infty$. Так как над рассматриваемыми нами функциями приходится производить алгебраические действия, то условимся о правилах действия с бесконечными значениями. Будем считать, что:

1) $+\infty+(+\infty)=+\infty$;

2) $-\infty+(-\infty)=-\infty$;

3) $a+\infty=+\infty$, $a+(-\infty)=-\infty$ для любого конечного a;

4) $a(+\infty)=+\infty$ и $a(-\infty)=-\infty$ при $a>0$;

5) $a(+\infty)=-\infty$, $a(-\infty)=+\infty$ при $a<0$;

6) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$;

7) $0\cdot(\pm\infty)=0$;

8) $|+\infty|+|-\infty|=+\infty$;

9) $\dfrac{a}{\pm\infty}=0$.

Не имеют смысла символы $(\pm\infty)-(\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ и $\dfrac{a}{0}$.

Для таких функций остается прежним определение измеримости и сохраняются указанные выше свойства измеримых функций, в чем без труда можно убедиться.

Введем еще ряд понятий. Будем говорить, что некоторое свойство *выполняется почти всюду* на множестве E, если оно имеет место для всех $x \in E$, кроме, быть может, точек, принадлежащих подмножеству $E' \subset E$ с мерой $\mu E' = 0$. Так, например, функция конечна почти всюду на E, если $\mu E(f = \pm\infty) = 0$; две функции $f(x)$ и $g(x)$ почти всюду равны на E, если $\mu E(f \neq g) = 0$, и т. д.

Будем в дальнейшем две функции, равные почти всюду на множестве E, называть *эквивалентными* на этом множестве. Пусть, наконец, заданы некоторый аддитивный класс S и мера μ на нем. Скажем, что класс S по отношению к мере μ обладает *N-свойством*, если любое подмножество A' множества $A \subset S$, имеющего меру нуль, $\mu A = 0$, тоже входит в S. Ясно, в силу монотонности меры, что также $\mu A' = 0$. В дальнейшем класс S, обладающий N-свойством по отношению к мере μ, ради сокращения будем называть *N-классом*, а множества и функции, измеримые относительно *N-классов*, называть множествами и функциями *«измеримыми N»* или *измеримыми по Лебегу*.

Лемма. *Функция $f(x)$, эквивалентная функции $g(x)$, измеримой N на множестве E, также измерима N на том же множестве.*

Доказательство. В самом деле, пусть E' — часть E, на которой $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. На множестве E' функция $g(x)$ измерима N, так как она тождественна с $f(x)$. Пусть $E'' = E \setminus E'$. Тогда $\mu E'' = 0$ и для любого $c > 0$ множество $E''(g > c)$ включено в E'' и потому измеримо и имеет меру нуль. Таким образом, $g(x)$ измерима N на E' и на E'', но тогда она измерима N и на $E = E' \cup E''$, и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, измеримых на множестве E. Тогда*

$$\sup_n \{f_n(x)\}, \quad \inf_n \{f_n(x)\}, \quad \overline{\lim} f_n(x) =$$
$$= \inf_n \{\sup(f_n, f_{n+1}, \ldots)\}, \quad \underline{\lim} f_n(x) = \sup_n \{\inf(f_n, f_{n+1}, \ldots)\},$$

а если последовательность сходится, то и $\lim_n f_n(x)$ измеримы на E.

Доказательство. Если $h(x) = \sup\limits_n \{f_n(x)\}$, то измеримость этой функции следует из равенства

$$E(h > c) = \bigcup_n E(f_n > c),$$

которое доказывается без труда. В самом деле, пусть $x \in E(h > c)$, т. е. $h(x) > c$. Тогда $h(x) > c + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней границы найдется такой номер n_0, что $f_{n_0}(x) > h(x) - \varepsilon$. Отсюда $f_{n_0}(x) > (c+\varepsilon) - \varepsilon = c$ и потому $x \in E(f_{n_0} > c)$, а тем более, $x \in \bigcup\limits_n E(f_n > c)$.

Пусть, напротив, $x \in \bigcup\limits_n E(f_n > c)$. Это значит, что $x \in E(f_{n_0} > c)$, т. е. $f_{n_0}(x) > c$. Но тогда $h(x) \geqslant f_{n_0}(x) > c$, т. е. $x \in E(h > c)$, и равенство доказано.

Так как $\inf\limits_n \{f_n(x)\} = -\sup\limits_n \{-f_n(x)\}$, то в силу только что доказанного и свойства 1) измеримых функций $\inf\limits_n \{f_n(x)\}$ измерима. Измеримость остальных функций, указанных в формулировке теоремы, теперь очевидна.

Замечание. Если функции $f_n(x)$ измеримы N, то из выполнения равенств

$$\begin{aligned} &h(x) = \sup_n \{f_n(x)\}, \\ &g(x) = \inf_n \{f_n(x)\}, \quad u(x) = \underline{\lim}\, f_n(x), \\ &v(x) = \overline{\lim}\, f_n(x), \quad f(x) = \lim f_n(x) \end{aligned}$$

почти всюду на E уже следует измеримость функций $h(x)$, $g(x)$, ..., $f(x)$.

Доказательство предоставляется читателю[1]).

Докажем теперь следующую, весьма важную теорему, принадлежащую Д. Ф. Егорову.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых и почти всюду конечных на E функций сходится почти всюду на этом множестве к почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$. Тогда для любого $\delta > 0$ можно найти измеримое множество $E' \subset E$ меры боль-*

[1]) Заметим, что для любой меры сумма конечного или счетного числа множеств меры нуль есть снова множество меры нуль.

шей, чем $\mu(E)-\delta$, *на котором последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Доказательство. Удаляя, если необходимо, множество меры нуль, мы можем считать, что на измеримом множестве $E_0 \subset E$ последовательность конечных функций $\{f_n(x)\}$ сходится всюду к конечной функции $f(x)$.

Рассмотрим функции $g_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$. Эти функции неотрицательны и измеримы. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел, сходящуюся к нулю. Пусть

$$E_{n,m}=\bigcap_{k=n}^{\infty} E_0(g_k<\varepsilon_m).$$

Ясно, что $E_{n,m} \subset E_{n+1,m}=\bigcap_{k=n+1}^{\infty} E_0(g_k<\varepsilon_m)$, и нетрудно проверить, что $\lim\limits_n E_{n,m}=E_0$. То, что $\lim\limits_n E_{n,m} \subset E_0$, очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $x \in E_0$. Так как в этой точке $f_n(x) \to f(x)$, то найдется такой номер n_0, что

$$g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon_m$$

при $k \geqslant n_0$. Но это значит, что $x \in E_{n_0,m}$, откуда

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,m}=\lim_n E_{n,m}.$$

Равенство $E_0=\lim\limits_n E_{n,m}$ влечет за собой $\mu E_0=\lim\limits_n \mu E_{n,m}$. Поэтому для любого m найдется такой индекс $n(m)$, что

$$\mu(E_0 \setminus E_{n(m),m})<\frac{\delta}{2^m}.$$

Пусть

$$E'=\bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n(m),m}.$$

Докажем, что E' — искомое множество. Имеем

$$\mu(E_0 \setminus E')=\mu(E_0 \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n(m),m})=\mu\{\bigcup_{m=0}^{\infty}(E_0 \setminus E_{n(m),m})\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_0 \setminus E_{n(m),m})<\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m}=\delta.$$

Отсюда

$$\mu E' = \mu E_0 - \mu (E_0 \setminus E') > \mu E_0 - \delta = \mu E - \delta,$$

и первое требование, предъявляемое к множеству E', выполнено. Далее, пусть $\varepsilon > 0$ — любое. Возьмем m настолько большим, чтобы $\varepsilon_m < \varepsilon$. Для всех точек $x \in E_{n(m), m}$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_m < \varepsilon$ при $n \geqslant n(m)$, и так как $E' \subset E_{n(m), m}$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при $n > n(m)$ сразу для всех $x \in E'$, что и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E'. Теорема доказана.

Замечание. Если функции $f_n(x)$ измеримы N, то требование измеримости предельной функции можно опустить, так как оно автоматически следует из измеримости функций последовательности.

Для последовательности измеримых функций можно ввести понятие сходимости по мере, которое часто оказывается полезным.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на множестве E функций называется *сходящейся по мере* на этом множестве к измеримой функции $f_0(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\mu E(|f_n - f_0| \geqslant \sigma) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Пример. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ функции

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right], \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]. \end{cases}$$

Запишем эти функции в виде одной последовательности, нумеруя их в порядке возрастания верхнего индекса, а для одного и того же верхнего индекса в порядке возрастания нижнего индекса:

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x), \quad \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x), \quad \varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x),$$
$$\varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x), \quad \varphi_5(x) = f_2^{(3)}(x), \quad \ldots$$

Если за меру отрезка прямой принять его длину (см. об этом подробнее в следующей главе), то нетрудно убедиться, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится по мере к нулю.

В самом деле, функция $\varphi_n(x)$ отлична от нуля (и равна единице) лишь на отрезке $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$, где k растет с ростом n. Поэтому для любого $\sigma > 0$

$$\mu E(|\varphi_n - 0| \geqslant \sigma) \leqslant \frac{1}{k} \to 0$$

при $n \to \infty$, что доказывает сделанное утверждение.

Интересно отметить, что построенная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ не стремится к нулю ни в одной точке отрезка $[0, 1]$, так как если $x_0 \in [0, 1]$, то для сколь угодно больших k имеем $x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$ при некотором i, следовательно, найдутся сколь угодно большие n, такие, что $\varphi_n(x_0) = 1$.

Теорема 3. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на E функций сходится почти всюду на E к измеримой функции $f_0(x)$, то эта последовательность сходится к $f_0(x)$ также по мере.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие положительные числа σ_0 и ω_0 и бесконечное число индексов $n_1, n_2, \ldots$, что

$$\mu E(|f_{n_i} - f_0| \geqslant \sigma_0) \geqslant \omega_0.$$

Пусть $E' = \overline{\lim} E(|f_{n_i} - f_0| \geqslant \sigma_0)$. Из неравенства

$$\mu\,[\overline{\lim}\, E(|f_{n_i} - f_0| \geqslant \sigma_0)] \geqslant \overline{\lim}\, \mu E(|f_{n_i} - f_0| \geqslant \sigma_0)$$

следует, что $\mu E' \geqslant \omega_0$. Если $x_0 \in E'$, то это значит, что найдется бесконечное множество индексов n_i таких, что $x_0 \in E(|f_{n_i} - f_0| \geqslant \sigma_0)$, т. е. для которых

$$|f_{n_i}(x) - f_0(x)| \geqslant \sigma_0.$$

Последнее неравенство означает, что в точках $x_0 \in E'$ последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к $f_0(x)$. Так как $\mu E' \geqslant \omega_0 > 0$, это противоречит сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f_0(x)$ почти всюду, и теорема доказана.

Обратная теорема, как показывает приведенный выше пример, не верна. Однако имеет место полезная теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 4 (Рисса). *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на E по мере к $f_0(x)$, то из $\{f_n(x)\}$ можно* *выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f_0(x)$ почти всюду на E.*

Следующая теорема играет в дальнейшем важную роль. Функцию $f(x)$, определенную на множестве E, называют *ступенчатой*, если E можно разбить на конечное число непересекающихся подмножеств, на каждом из которых $f(x)$ постоянна.

Если $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ и $f(x) = a_i$ на E_i, то будем ради сокращения записывать такую функцию в виде

$$f(x) = (a_1, E_1; a_2, E_2; \ldots; a_n, E_n).$$

Если E и все E_i измеримы, то ступенчатая функция является, как мы видели, измеримой.

Теорема об аппроксимации. *Всякую функцию $f(x)$, неотрицательную и измеримую на множестве E, можно представить в виде предела неубывающей последовательности ступенчатых функций, неотрицательных и измеримых на E.*

Доказательство. Положим для любого натурального n

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n}, & \text{если } \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^n}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^n \cdot n, \\ n, & \text{если } f(x) \geqslant n. \end{cases}$$

Ясно, что $f_n(x)$ — неотрицательные измеримые ступенчатые функции. Покажем, что $\{f_n(x)\}$ есть неубывающая последовательность. Имеем

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^{n+1}}, & \text{если } \dfrac{i-1}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^{n+1}}, \\ & \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^{n+1} \cdot n + 1, \\ n+1, & \text{если } f(x) \geqslant n+1. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку $x \in E$. Если $x \in E\left(\dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f < \dfrac{i}{2^n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n \cdot n$, то

$$\frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n},$$

откуда

$$\frac{2i-2}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2i}{2^{n+1}},$$

и потому либо $x\in E\left(\frac{2i-2}{2^{n+1}}\leqslant f<\frac{2i-1}{2^{n+1}}\right)$, либо $x\in$ $\in E\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}\leqslant f<\frac{2i}{2^{n+1}}\right)$. В первом случае

$$f_{n+1}(x)=\frac{2i-2}{2^{n+1}}=\frac{i-1}{2^n}=f_n(x)$$

и во втором

$$f_{n+1}(x)=\frac{2i-1}{2^{n+1}}>\frac{i-1}{2^n}=f_n(x),$$

т. е. в обоих случаях $f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x)$.

Если $x\in E(f\geqslant n)$, то имеются две возможности. Во-первых, может быть, что $x\in E(f\geqslant n+1)$. Тогда $f_n(x)=$ $=n$, $f_{n+1}(x)=n+1$, и мы имеем

$$f_{n+1}(x)>f_n(x);$$

во-вторых, может случиться, что $x\in E(n\leqslant f<n+1)$ или $x\in E\left(\frac{2^{n+1}n}{n}\leqslant f<\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}\right)$.

Но

$$E\left(\frac{2^{n+1}n}{2^{n+1}}\leqslant f<\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}\right)=\bigcup_{i=0}^{2^{n+1}-1}E\left(\frac{2^{n+i}n+i}{2^{n+1}}\leqslant f<\right.$$
$$\left.<\frac{2^{n+1}\cdot n+i+1}{2^{n+1}}\right),$$

и, следовательно, x попадает в одно из множеств слагаемых, стоящих в правой части последнего равенства. Поэтому выполняется одно из неравенств

$$\frac{2^{n+1}n+i}{2^{n+1}}\leqslant f(x)<\frac{2^{n+1}n+i+1}{2^{n+1}},$$

из которого вытекает, что

$$f_{n+1}(x)=\frac{2^{n+1}\cdot n+i}{2^{n+1}}\geqslant n=f_n(x),$$

каково бы ни было $i=0, 1, 2, \ldots, 2^{n+1}-1$.

Следовательно, для $x\in E(f\geqslant n)$ всегда имеем $f_{n+1}(x)\geqslant$ $\geqslant f_n(x)$, и монотонность последовательности доказана.

Наконец, $\lim\limits_n f_n(x)=f(x)$. В самом деле, если $f(x)\neq$ $\neq+\infty$, то при достаточно большом n будем иметь, что

$f(x)<n$, а именно: $\frac{i-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{i}{2^n}$. Но тогда

$$|f_n(x)-f(x)|=f(x)-\frac{i-1}{2^n}<\frac{1}{2^n}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Если же $f(x)=+\infty$, то при любом n имеем $f_n(x)=n$, и снова $f_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Теорема полностью доказана.

Упражнения. 1. Доказать, что $|f(x)|$, $f_+(x)$ и $f_-(x)$ измеримы на E для любой измеримой на этом множестве функции.

2. Доказать, что если $f(x)$ измерима и неотрицательна на E, то $\sqrt{f(x)}$ — измеримая на E функция.

3. Будет ли функция $\operatorname{sign} f(x)$ измерима на E, если $f(x)$ измерима на этом множестве?

4. Функция $\chi_E(x)$, заданная на X, называется *характеристической* функцией множества E, если

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 \text{ для } x\in E,\\ 0 \text{ для } x\,\overline{\in}\, E.\end{cases}$$

Доказать, что измеримость $\chi_E(x)$ на E является необходимым и достаточным условием измеримости E.

5. Пусть

$$[f(x)]_n=\begin{cases}f(x), & \text{если } |f(x)|\leqslant n,\\ 0, & \text{если } |f(x)|>n.\end{cases}$$

Будет ли $[f(x)]_n$ измерима на E, если $f(x)$ измерима на этом множестве?

6. Вытекает ли из измеримости $|f(x)|$ на E измеримость на этом множестве самой функции?

7. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — ступенчатые измеримые на E функции. Показать, что $\alpha f(x)+\beta g(x)$ и $f(x)g(x)$, где α и β — константы, суть также ступенчатые измеримые на E функции.

8. Доказать, что если множество E и все множества $E(f<r)$, где r — рациональные числа, измеримы, то функция $f(x)$ измерима на E.

§ 3. Интеграл

Пусть E — измеримое множество и $f(x)$ — неотрицательная вещественная функция, заданная на E. Разобьем E на конечное число непересекающихся измеримых частей

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing \text{ при } i\neq j.$$

Пусть $u_i=\inf\limits_{E_i} f(x)$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\mu E_i.$$

Точная верхняя граница таких сумм, составленных для всевозможных разбиений множества E указанного вида, конечная или бесконечная, называется *интегралом от* $f(x)$ *по множеству* E и обозначается $\int\limits_E f(x)\,d\mu$. Итак, $\int\limits_E f(x)\,d\mu = \sup \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mu E_i$.

Если $\int\limits_E f(x)\,d\mu < \infty$, то неотрицательная функция $f(x)$ называется *интегрируемой* или *суммируемой* на множестве E.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, заданная на E. Рассмотрим функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ (см. стр. 92). Обе эти функции неотрицательны на множестве E и поэтому для них определены конечные или бесконечные интегралы

$$\int\limits_E f_+(x)\,d\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_E f_-(x)\,d\mu.$$

Если по крайней мере один из этих интегралов конечен, то разность

$$\int\limits_E f_+(x)\,d\mu - \int\limits_E f_-(x)\,d\mu$$

называется *интегралом от* $f(x)$ *по* E и обозначается, как и раньше, $\int\limits_E f(x)\,d\mu$. Если оба интеграла $\int\limits_E f_+(x)\,d\mu$ и $\int\limits_E f_-(x)\,d\mu$ конечны, то конечен и интеграл $\int\limits_E f(x)\,d\mu$. В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* или *суммируемой на* E.

При определении интеграла мы не делали никаких предположений о функции $f(x)$. Однако в таких общих условиях удается получить очень мало свойств интеграла. Например, ясно, что если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ всюду на E, то и

$$0 \leqslant \int\limits_E f(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_E g(x)\,d\mu.$$

Чтобы сделать понятие интеграла более содержательным и наделенным рядом хороших свойств, мы сузим класс интегрируемых функций, а именно, будем предполагать их измеримость.

Мы начнем с изучения интеграла от измеримых неотрицательных ступенчатых функций.

Пусть $f(x)=(a_1, A_1; a_2, A_2; \ldots; a_k, A_k)$ — измеримая неотрицательная ступенчатая функция, заданная на множестве E. Покажем, что она интегрируема и что

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu A_i.$$

В самом деле, с одной стороны, $E = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k$ дает одно из разбиений E на непересекающиеся измеримые части, причем, очевидно,

$$u_i = \inf_{A_i} f(x) = a_i.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mu A_i \leqslant \sup \sum_{j=1}^{n} u_j \mu E_j = \int_E f(x)\,d\mu. \tag{1}$$

С другой стороны, если $E = E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ — произвольное разбиение E на непересекающиеся измеримые части, то, очевидно,

$$E_j = \bigcup_{i=1}^{k} E_j \cap A_i, \quad \mu E_j = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_j \cap A_i).$$

Если $E_j \cap A_i \neq \varnothing$, то

$$u_j = \inf_{E_j} f(x) \leqslant \inf_{E_j \cap A_i} f(x) = a_i,$$

и поэтому

$$u_j \mu(E_j \cap A_i) \leqslant a_i \mu(E_j \cap A_i). \tag{*}$$

Если же $E_j \cap A_i = \varnothing$ и потому $\mu(E_j \cap A_i) = 0$, то мы также можем формально написать неравенство

$$u_j \mu(E_j \cap A_i) \leqslant a_i \mu(E_j \cap A_i).$$

Таким образом, неравенство (*) верно в обоих случаях. Но тогда

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \mu E_j = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{k} \mu(E_j \cap A_i) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} u_j \mu(E_j \cap A_i) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_j \cap A_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_i).$$

Поэтому и

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \sup \sum_{j=1}^{n} u_j \mu(E_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i). \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает требуемое равенство:

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

Свойства интеграла от измеримых неотрицательных ступенчатых функций:

1. $\int\limits_E af(x)\,d\mu = a\int\limits_E f(x)\,d\mu$, $a > 0$ — постоянная. Это очевидно, так как сводится к равенству

$$\sum_{i=1}^{k} aa_i \mu(A_i) = a\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

2. $\int\limits_E [f(x)+g(x)]\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,d\mu + \int\limits_E g(x)\,d\mu$.

Пусть $f(x) = (a_1, A_1;\ a_2, A_2;\ \ldots;\ a_k, A_k)$ и $g(x) = (b_1, B_1;\ b_2, B_2;\ \ldots;\ b_m, B_m)$. Положим $E_{ij} = A_i \cap B_j$. Тогда $f(x) + g(x)$ — ступенчатая функция:

$$f(x)+g(x) = (a_1+b_1, E_{11};\ a_1+b_2, E_{12};\ \ldots;\ a_k+b_m, E_{km}).$$

Поэтому

$$\int\limits_E [f(x)+g(x)]\,d\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\,\mu(E_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \Big[\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)\Big] + \sum_{j=1}^{m} b_j \Big[\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i \cap B_j)\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) = \int\limits_E f(x)\,d\mu + \int\limits_E g(x)\,d\mu,$$

что и требовалось доказать.

3. *Если* $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, *и оба множества* E_1 *и* E_2 *измеримы, то*

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \int\limits_{E_1} f(x)\,d\mu + \int\limits_{E_2} f(x)\,d\mu.$$

Пусть

$$f(x) = (a_1, A_1;\ a_2, A_2;\ \ldots;\ a_k, A_k).$$

Тогда, поскольку $\mu(A_i)=\mu(A_i\cap E_1)+\mu(A_i\cap E_2)$, будем иметь

$$\int_E f(x)\,d\mu=\sum_{i=1}^k a_i\mu A_i=\sum_{i=1}^k a_i\mu(A_i\cap E_1)+\\+\sum_{i=1}^k a_i\mu(A_i\cap E_2)=\int_{E_1} f(x)\,d\mu+\int_{E_2} f(x)\,d\mu,$$

и требуемое доказано.

Установим теперь связь между интегралами от неотрицательных ступенчатых функций и от произвольных неотрицательных функций (так как в дальнейшем в этом параграфе все функции будут предполагаться измеримыми, то этот термин мы часто будем опускать).

Основная лемма. *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ неотрицательных ступенчатых функций, монотонно возрастая, сходится на E к функции $f(x)$. Тогда*

$$\int_E f(x)\,d\mu=\lim_n\int_E f_n(x)\,d\mu.$$

Прежде всего, как уже было замечено, из определения интеграла от неотрицательной функции с очевидностью следует, что если $g(x)\leqslant h(x)$ всюду на E, то

$$\int_E g(x)\,d\mu\leqslant\int_E h(x)\,d\mu.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$\int_E f_n(x)\,d\mu\leqslant\int_E f(x)\,d\mu,$$

откуда

$$\lim_n\int_E f_n(x)\,d\mu\leqslant\int_E f(x)\,d\mu.$$

Таким образом, все сводится к доказательству обратного неравенства

$$\int_E f(x)\,d\mu\leqslant\lim_n\int_E f_n(x)\,d\mu.$$

Пусть $E=E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_m$ — какое-нибудь разложение E на непересекающиеся измеримые подмножества, $u_i=\inf\limits_{E_i} f(x)$. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$f_0(x)=(u_1,\ E_1;\ u_2,\ E_2;\ldots;\ u_m,\ E_m).$$

При этом без ограничения общности можно считать, что $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$. Очевидно, что $f(x) \geqslant f_0(x) \geqslant 0$.

Допустим сначала, что $u_1 > 0$, и выберем ε настолько малым, чтобы удовлетворялось неравенство $\varepsilon < u_1$. Пусть

$$Q_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E(f_k \geqslant f_0 - \varepsilon).$$

Ясно, что $\{Q_n\}$ — возрастающая последовательность и что

$$\lim Q_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subset E.$$

С другой стороны, если x — произвольная точка E, то, поскольку $f_n(x) \to f(x)$ всюду на E, для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

или

$$f_n(x) > f(x) - \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

а тем более

$$f_n(x) > f_0(x) - \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

т. е.

$$x \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E(f_n > f_0 - \varepsilon) = Q_{n_0},$$

и поэтому $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n = \lim Q_n$.

Итак, $\lim Q_n = E$. Следовательно, и $\lim \mu Q_n = \mu E$. Найдется поэтому такой номер n_0, что $\mu(E \setminus Q_n) < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Тогда

$$\int_E f_n\,d\mu = \int_{Q_n} f_n\,d\mu + \int_{E \setminus Q_n} f_n\,d\mu \geqslant \int_{Q_n} f_n\,d\mu \geqslant \int_{Q_n} [f_0 - \varepsilon]\,d\mu =$$
$$= \int_{Q_n} f_0\,d\mu - \varepsilon\mu Q_n = \int_E f_0\,d\mu - \int_{E \setminus Q_n} f_0\,d\mu - \varepsilon\mu Q_n >$$
$$> \int_E f_0\,d\mu - u_m\mu(E \setminus Q_n) - \varepsilon\mu Q_n > \int_E f_0\,d\mu - \varepsilon(u_m + \mu E)$$

при $n \geqslant n_0$. Отсюда

$$\lim_n \int_E f_n\,d\mu \geqslant \int_E f_0\,d\mu - \varepsilon(u_m + \mu E).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, будем иметь

$$\lim_n \int_E f_n \, d\mu \geqslant \int_E f_0 \, d\mu. \qquad (**)$$

Если $u_1 = 0$, то, проводя все предыдущие рассмотрения для множества $E' = E \setminus E_1$, мы получим

$$\lim_n \int_{E'} f_n \, d\mu \geqslant \int_{E'} f_0 \, d\mu = \int_E f_0 \, d\mu.$$

Так как $\int_E f_n \, d\mu \geqslant \int_{E'} f_n \, d\mu$, то тем более

$$\lim_n \int_E f_n \, d\mu \geqslant \int_E f_0 \, d\mu.$$

Поэтому (**) выполняется и в этом случае.

Теперь заметим, что

$$\int_E f_0 \, d\mu = \sum_{i=1}^m u_i \mu E_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^m u_i \mu E_i \leqslant \lim_n \int_E f_n \, d\mu.$$

Но тогда и

$$\int_E f \, d\mu = \sup \sum_{i=1}^m u_i \mu E_i \leqslant \lim_n \int_E f_n \, d\mu,$$

и требуемое неравенство, а вместе с тем и основная лемма доказаны.

Замечание. Мы предполагали неявно, что $f(x)$ не равна бесконечности на множестве положительной меры. Поэтому все u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно считать конечными числами. Однако можно доказать, что лемма верна и в том случае, когда мера множества E_0, на котором $f = \infty$, больше нуля (в этом случае обе части доказываемого равенства обращаются в бесконечность).

Теорема 1. *Интеграл от любой неотрицательной измеримой на E функции есть предел монотонно возрастающей последовательности интегралов от неотрицательных ступенчатых функций, измеримых на E.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы об аппроксимации предыдущего параграфа и только что доказанной основной леммы.

Свойства интегралов от неотрицательных функций:

1) *Если* α, $\beta \geqslant 0$, то

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, d\mu = \alpha \int_E f(x)\, d\mu + \beta \int_E g(x)\, d\mu.$$

Пусть $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ — монотонно возрастающие последовательности неотрицательных ступенчатых измеримых на E функций, сходящиеся соответственно к $f(x)$ и $g(x)$. Тогда $\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)$ есть неотрицательная ступенчатая функция, измеримая на E, и

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \to \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Используя основную лемму и свойства интегралов от неотрицательных ступенчатых функций, будем иметь

$$\int_E \{\alpha f + \beta g\}\, d\mu = \lim_n \int_E \{\alpha f_n + \beta g_n\}\, d\mu =$$
$$= \lim_n \left\{\alpha \int_E f_n\, d\mu + \beta \int_E g_n\, d\mu\right\} =$$
$$= \alpha \lim_n \int_E f_n\, d\mu + \beta \lim_n \int_E g_n\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu.$$

2) $\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)\, d\mu = \int\limits_{E_1} f(x)\, d\mu + \int\limits_{E_2} f(x)\, d\mu$, *если* E_1 *и* E_2 *измеримы и* $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$.

Доказательство аналогично предыдущему.

3) *Если* $f(x)$ *интегрируема на* E, *то* $\mu\{E(f = +\infty)\} = 0$.

В самом деле, если множество $E' = E(f = +\infty)$ имеет положительную меру a, то при любом натуральном n имеем

$$\int_E f\, d\mu \geqslant \int_{E'} f\, d\mu > \int_{E'} n\, d\mu = n\mu E' = n \cdot a.$$

Это неравенство возможно лишь, если $\int\limits_E f\, d\mu = \infty$, что противоречит интегрируемости $f(x)$.

4) *Если* $\mu E = 0$, *то* $\int\limits_E f\, d\mu = 0$.

Это свойство очевидно.

5) *Если* $f(x)=g(x)$ *почти всюду на* E, *то* $\int\limits_E f\,d\mu=\int\limits_E g\,d\mu$.

Это также очевидно.

Докажем теперь две более содержательные теоремы.

Теорема 2. *Если* $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, *где* $f_n(x)$ *неотрицательны и измеримы на* E, *то*

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_E f_n(x)\,d\mu.$$

Пусть $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$. Тогда $s_n(x)<f(x)$, и мы имеем

$$\int\limits_E s_n(x)\,d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_E f_k(x)\,d\mu\leqslant\int\limits_E f(x)\,d\mu.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_E f_k(x)\,d\mu\leqslant\int\limits_E f(x)\,d\mu. \tag{3}$$

Чтобы доказать обратное неравенство, построим для каждой функции $f_k(x)$ монотонно возрастающую последовательность неотрицательных измеримых ступенчатых функций $\{f_k^{(i)}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ на множестве E.

Составим суммы

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k^{(n)}(x),\qquad n=1,\ 2,\ldots$$

Эти суммы представляют собой неотрицательные измеримые ступенчатые функции и, кроме того, $\sigma_n(x)\leqslant\sigma_{n+1}(x)$. Далее,

$$\sum_{k=1}^{n}f_k^{(n+p)}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n+p}f_k^{(n+p)}(x)=\sigma_{n+p}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n+p}f_k(x)<f(x).$$

Фиксируя в этом неравенстве n и переходя к пределу при $p\to\infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\leqslant\lim_{n}\sigma_n(x)\leqslant f(x), \tag{4}$$

причем существование предела $\lim\limits_n \sigma_n(x)$ следует из монотонности последовательности $\{\sigma_n(x)\}$. Так как

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to f(x),$$

то неравенство (4) показывает, что $\sigma_n(x) \to f(x)$. Но тогда в силу основной леммы

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_n \int_E \sigma_n(x)\,d\mu = \lim_n \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)}(x)\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \lim_n \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,d\mu. \quad (5)$$

Из неравенств (3) и (5) следует требуемое равенство.

Заметим, что в равенстве

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,d\mu$$

обе части могут быть равны бесконечности.

Следствие. *Если $\{f_n(x)\}$ — монотонно возрастающая последовательность неотрицательных функций, сходящаяся на E к $f(x)$, то*

$$\lim_n \int_E f_n(x)\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu.$$

В самом деле, положим

$$\varphi_1(x) = f_1(x),\quad \varphi_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \ldots,$$
$$\varphi_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x), \ldots$$

Мы получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$, составленный из неотрицательных функций, сумма которого есть $f(x)$.

По теореме 2

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_n \int_E \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\,d\mu = \lim_n \int_E f_n(x)\,d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Нижеследующая теорема именуется весьма часто леммой Фату.

Теорема 3. *Если $\{f_n(x)\}$ — произвольная последовательность неотрицательных функций, то*

$$\int_E \underline{\lim} f_n(x)\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Введем функции $g_n(x) = \inf\{f_n, f_{n+1} \dots\}$. Последовательность $\{g_n(x)\}$ монотонно возрастает, следовательно,

$$\int_E \lim g_n(x)\,d\mu = \lim \int_E g_n(x)\,d\mu.$$

Но $\lim g_n(x) = \sup\limits_n \{\inf(f_n, f_{n+1}, \dots)\} = \underline{\lim} f_n(x)$, и поэтому

$$\int_E \underline{\lim} f_n(x)\,d\mu = \lim \int_E g_n(x)\,d\mu. \tag{6}$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{\int_E f_n(x)\,d\mu\}$. Она имеет конечный или бесконечный нижний предел $\underline{\lim}\int_E f_n\,d\mu$. Выберем подпоследовательность $\{\int_E f_{n_i}d\mu\}$, сходящуюся к этому нижнему пределу:

$$\lim_{n_i\to\infty} \int_E f_{n_i}(x)\,d\mu = \underline{\lim} \int_E f_n(x)\,d\mu.$$

Так как $g_n(x) \leqslant f_n(x)$, то

$$\int_E g_{n_i}(x)\,d\mu \leqslant \int_E f_{n_i}(x)\,d\mu,$$

откуда, переходя к пределу при $n_i \to \infty$, получим

$$\lim_n \int_E g_n(x)\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_{n_i}(x)\,d\mu \tag{7}$$

(подпоследовательность $\{\int g_{n_i}(x)\,d\mu\}$ имеет тот же предел, что и вся последовательность $\{\int_E g_n(x)\,d\mu\}$). Из (6) и (7) получаем требуемое неравенство.

Свойства интегралов от измеримых функций произвольного знака:

1) $\int_E \{-f(x)\}\,d\mu = -\int_E f(x)\,d\mu$, *причем из существования интеграла в правой части равенства следует существование интеграла в левой.*

Имеем очевидные равенства $\{-f(x)\}_+ = f_-(x)$ и $\{-f(x)\}_- = f_+(x)$. Отсюда, полагая, что $\int\limits_E f(x)\,d\mu$ имеет смысл, получаем

$$\int\limits_E \{-f(x)\}\,d\mu = \int\limits_E \{-f(x)\}_+\,d\mu - \int\limits_E \{-f(x)\}\,d\mu =$$
$$= \int\limits_E f_-(x)\,d\mu - \int\limits_E f_+(x)\,d\mu =$$
$$= -\left\{\int\limits_E f_+(x)\,d\mu - \int\limits_E f_-(x)\,d\mu\right\} = -\int\limits_E f(x)\,d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Для любой измеримой функции $f(x)$ имеем*

$$\int\limits_E kf(x)\,d\mu = k\int\limits_E f(x)\,d\mu,$$

причем из существования интеграла справа следует существование интеграла слева[1]).

В самом деле, если $k > 0$, то

$$(kf(x))_+ = kf_+(x) \text{ и } (kf(x))_- = kf_-(x),$$

откуда

$$\int\limits_E kf(x)\,d\mu = \int\limits_E (kf(x))_+ d\mu - \int\limits_E (kf(x))_- d\mu =$$
$$= \int\limits_E kf_+(x)\,d\mu - \int\limits_E kf_-(x)\,d\mu = k\left(\int\limits_E f_+ d\mu - \int\limits_E f_- d\mu\right) =$$
$$= k\int\limits_E f(x)\,d\mu.$$

Если же $k < 0$, то

$$\int\limits_E kf(x)\,d\mu = \int\limits_E -|k|f\,d\mu = -\int\limits_E |k|f\,d\mu = -|k|\int\limits_E f\,d\mu =$$
$$= k\int\limits_E f\,d\mu,$$

и требуемое доказано.

2) *Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 измеримы и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Тогда для любой измеримой на E функции имеем*

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\mu.$$

---

[1]) В дальнейшем замечания о существовании интегралов мы будем обычно опускать.

Доказательство этого равенства, справедливого для f_+ и f_- в отдельности, не представляет труда.

3) *Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E, то*

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

Положим $h(x)=f(x)+g(x)$ и разобьем E на шесть множеств:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E(f\geqslant 0,\ g\geqslant 0,\ h\geqslant 0),\\
E_2 &= E(f\geqslant 0,\ g<0,\ h\geqslant 0),\\
E_3 &= E(f<0,\ g\geqslant 0,\ h\geqslant 0),\\
E_4 &= E(f\geqslant 0,\ g<0,\ h<0),\\
E_5 &= E(f<0,\ g\geqslant 0,\ h<0),\\
E_6 &= E(f<0,\ g<0,\ h<0).
\end{aligned}$$

Все эти множества измеримы, попарно не пересекаются и в сумме дают E. Нетрудно показать, что

$$\int\limits_{E_i} h\,d\mu = \int\limits_{E_i} f\,d\mu + \int\limits_{E_i} g\,d\mu \tag{8}$$

для $i=1, 2, 3, \ldots, 6$. Сделаем это, например, для E_3. На этом множестве имеем

$$g(x)=h(x)+(-f(x)).$$

Так как все входящие сюда функции неотрицательны, то по доказанному ранее

$$\int\limits_{E_3} g\,d\mu = \int\limits_{E_3} h\,d\mu + \int\limits_{E_3} (-f)\,d\mu.$$

Но $\int\limits_{E_3} (-f)\,d\mu = -\int\limits_{E_3} f\,d\mu$, откуда

$$\int\limits_{E} g\,d\mu = \int\limits_{E_3} h\,d\mu - \int\limits_{E_3} f\,d\mu.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{E_3} h\,d\mu = \int\limits_{E_3} f\,d\mu + \int\limits_{E_3} g\,d\mu.$$

Складывая равенства (8) для $i=1, 2, \ldots, 6$ и используя свойство 2), найдем, что

$$\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu,$$

и требуемое доказано.

4) *Если $f(x)=g(x)$ почти всюду на E, то*

$$\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu.$$

Доказательство очевидно.

5) *Если $f(x)$ интегрируема на E, то $f(x)$ почти всюду конечна на этом множестве.*

Если $f(x)$ интегрируема на E, то интегралы $\int_E f_+ d\mu$ и $\int_E f_- d\mu$ оба конечны. Следовательно, по доказанному ранее положительные функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ конечны почти всюду. Но тогда и $f(x)$ конечна почти всюду.

6) *Функция $f(x)$ интегрируема на E тогда и только тогда, когда $|f(x)|$ интегрируема на том же множестве.*

Так как $|f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$, то

$$\int_E |f(x)|\,d\mu=\int_E f_+(x)\,d\mu+\int_E f_-(x)\,d\mu. \tag{9}$$

Если $f(x)$ интегрируема на E, то $\int_E f_+(x)\,d\mu$ и $\int_E f_-(x)\,d\mu$ конечны. Но тогда в силу (9) конечен и $\int_E |f(x)|\,d\mu$, т. е. $|f(x)|$ также интегрируем. Наоборот, из конечности $\int_E |f|\,d\mu$ следует конечность $\int_E f_+ d\mu$ и $\int_E f_- d\mu$, т. е. интегрируемость $f(x)$. Свойство (6) показывает, что введенный нами интеграл является для неограниченных функций абсолютно сходящимся.

Следствие. *Если $|f(x)|\leqslant g(x)$ на E, то из интегрируемости $g(x)$ следует интегрируемость $f(x)$.*

7) *Если $f(x)\leqslant g(x)$ всюду на E, то*

$$\int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu.$$

Это следует из неравенства

$$\int_E (g-f)\,d\mu\geqslant 0$$

и равенства

$$\int_E (g-f)\,d\mu=\int_E g\,d\mu-\int_E f\,d\mu.$$

Следствие. *Если* $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, *то*

$$\alpha \cdot \mu E \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \beta \cdot \mu E.$$

Теорема о предельном переходе под знаком интеграла (Лебега). *Пусть дана последовательность* $\{f_n(x)\}$ *измеримых на* E *функций, сходящаяся почти всюду на множестве* E *к измеримой функции* $f_0(x)$. *Пусть, кроме того, почти всюду на* E

$$|f_n(x)| \leqslant g(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $g(x)$ — *некоторая интегрируемая на* E *функция. Тогда* $f_0(x)$ *интегрируема на* E *и*

$$\int\limits_E f_0(x)\,d\mu = \lim_n \int\limits_E f_n(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Так как интеграл по множеству меры нуль от любой функции равен нулю, то без ограничения общности можно считать, что сходимость последовательности к предельной функции и неравенство (10) выполняются всюду на E.

Из (10) вытекает, что $|f_0(x)| \leqslant g(x)$, откуда следует, что $f_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, интегрируемы на E.

Рассмотрим последовательность $g(x) + f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Она составлена из неотрицательных функций, так как $(-f_n(x)) \leqslant |f_n(x)| \leqslant g(x)$, откуда $g(x) + f_n(x) \geqslant 0$. По лемме Фату

$$\int\limits_E \varliminf (g(x) + f_n(x))\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E (g(x) + f_n(x))\,d\mu.$$

Но $f_n(x) \to f_0(x)$, откуда

$$\varliminf (g(x) + f_n(x)) = \lim (g(x) + f_n(x)) = g(x) + f_0(x),$$

и, значит,

$$\int\limits_E \varliminf (g + f_n)\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu + \int\limits_E f_0\,d\mu.$$

Далее,

$$\varliminf \int\limits_E (g(x) + f_n(x))\,d\mu = \varliminf \left\{\int\limits_E g(x)\,d\mu + \int\limits_E f_n(x)\,d\mu\right\} =$$

$$= \int\limits_E g(x)\,d\mu + \varliminf \int\limits_E f_n(x)\,d\mu.$$

Поэтому

$$\int_E g\,d\mu + \int_E f_0\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu + \varliminf \int_E f_n\,d\mu,$$

т. е.

$$\int_E f_0\,d\mu \leqslant \varliminf \int_E f_n\,d\mu. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь последовательность $g(x)-f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ Она также составлена из неотрицательных функций и по той же лемме Фату

$$\int_E \varliminf (g-f_n)\,d\mu \leqslant \varliminf \int_E (g-f_n)\,d\mu,$$

откуда, как и раньше,

$$-\int_E f_0\,d\mu \leqslant \varliminf \left(-\int_E f_n\,d\mu\right).$$

Но для любой числовой последовательности $\{a_n\}$

$$\varliminf \{-a_n\} = -\varlimsup a_n.$$

Поэтому

$$-\int_E f_0\,d\mu \leqslant -\varlimsup \int_E f_n\,d\mu,$$

или

$$\varlimsup \int_E f_n\,d\mu \leqslant \int_E f_0\,d\mu. \tag{12}$$

Из (11) и (12) находим

$$\varlimsup \int_E f_n\,d\mu \leqslant \int_E f_0\,d\mu \leqslant \varliminf \int_E f_n\,d\mu. \tag{13}$$

Так как всегда

$$\varliminf \int_E f_n\,d\mu \leqslant \varlimsup \int_E f_n\,d\mu,$$

то равенство (13) дает

$$\int_E f_0\,d\mu = \varlimsup \int_E f_n\,d\mu = \varliminf \int_E f_n\,d\mu = \lim \int_E f_n\,d\mu,$$

и теорема доказана.

Мы установим сейчас два весьма важных свойства интеграла, называемые его *полной аддитивностью* и *абсолютной непрерывностью*. Эти свойства постоянно используются в различных исследованиях и оценках интегралов.

Теорема о полной аддитивности интеграла. *Пусть измеримое множество E можно представить в виде счетной суммы измеримых, попарно непересекающихся множеств*

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i; \qquad E_i\cap E_j=\varnothing, \qquad i\neq j.$$

Тогда для любой интегрируемой на E функции $f(x)$ имеем

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x)\geqslant 0$ на E. Введем в рассмотрение функции

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x) & \text{на } E_k,\\ 0 & \text{на } E\setminus E_k.\end{cases}$$

Все $f_k(x)$ неотрицательны, и легко убедиться, что они измеримы. Кроме того, очевидно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)=f(x)$.

По теореме 2

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k\,d\mu.$$

Но $\int\limits_E f_k\,d\mu=\int\limits_{E_k} f\,d\mu$, и мы получаем

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f\,d\mu.$$

Пусть теперь $f(x)$ меняет знак на E. Тогда $f(x)=$ $=f_+(x)-f_-(x)$. По уже доказанному

$$\int_E f_+d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f_+d\mu$$

и

$$\int_E f_-d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f_-d\mu.$$

Отсюда, вычитая почленно эти равенства и учитывая сходимость стоящих справа положительных рядов (f — интегрируемая функция, а оба интеграла $\int\limits_E f_+ d\mu$ и $\int\limits_E f_- d\mu$ конечны), а следовательно, и возможность их почленной перестановки, найдем

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_{E_k} f_+ d\mu - \int\limits_{E_k} f_- d\mu\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_k} f\,d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Теорема об абсолютной непрерывности интеграла. *Пусть $f(x)$ — интегрируемая на E функция. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется другое число $\delta > 0$, зависящее только от функции $f(x)$ и ε, такое, что*

$$\left|\int\limits_H f\,d\mu\right| < \varepsilon,$$

каково бы ни было измеримое множество $H \subset E$ с мерой $\mu H < \delta$.

Доказательство. Так как, очевидно,

$$\left|\int\limits_H f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_H |f|\,d\mu,$$

то достаточно доказать теорему для случая неотрицательной функции.

Итак, пусть $f(x)$ — неотрицательная интегрируемая на E функция и $\{g_n(x)\}$ — последовательность измеримых ступенчатых функций $0 \leqslant g_n(x) \leqslant n$, которая, монотонно возрастая, стремится к $f(x)$. Тогда, как мы знаем,

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_n \int\limits_E g_n\,d\mu.$$

Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\int\limits_E f\,d\mu - \int\limits_E g_n\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если это имеет место, то, тем более,

$$\int\limits_H f\,d\mu - \int\limits_H g_n\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2},\quad n \geqslant n_0, \tag{14}$$

для любого измеримого подмножества $H \subset E$. Действительно,

$$\int_H (f-g_n)\,d\mu \leqslant \int_H (f-g_n)\,d\mu + \int_{E \setminus H} (f-g_n)\,d\mu =$$
$$= \int_E (f-g_n)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем какой-нибудь номер $n \geqslant n_0$ и выберем $\delta < \frac{\varepsilon}{2n}$. Тогда, если $\mu H < \delta$, то

$$\int_H g_n\,d\mu \leqslant \int_H n\,d\mu = n\mu H < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\int_H f\,d\mu < \varepsilon,$$

как только $\mu H < \delta$, и теорема доказана.

Упражнения. 1. Положим для неограниченной измеримой на E функции $f(x)$:

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant n, \\ n, & \text{если } |f(x)| > n; \end{cases}$$

$$[f(x)]_n^0 = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Показать, что

$$\int_E f\,d\mu = \lim_n \int_E [f]_n\,d\mu = \lim_n \int_E [f]_n^0\,d\mu.$$

2. Пусть $f(x)$ — интегрируемая, а $g(x)$ — ограниченная измеримая на E функции. Доказать, что

$$\int_E |f(x)|\,g(x)\,d\mu = K \int_E |f(x)|\,d\mu,$$

где $\inf\limits_E g(x) \leqslant K \leqslant \sup\limits_E g(x)$.

3. Доказать, что

$$\int_E f_n(x)\,g(x)\,d\mu \to \int_E f(x)\,g(x)\,d\mu,$$

если последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет условиям теоремы Лебега, а $g(x)$ — в существенном ограниченная функция, т. е.

$$\inf_{\substack{H,\, H \subset E \\ \mu H = 0}} \{\sup_{E \setminus H} |g(x)|\} = \operatorname{vrai}\max_{E} |\varphi(x)| = k < \infty.$$

4. Пусть $f(x)$ измерима на E и $E_n = E\{n-1 \leqslant f < n\}$. Доказать, что необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ есть сходимость ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |n| \mu E_n$.

5. Если $f(x)$ интегрируема на E и $E_n = E(|f| \geqslant n)$, то $\lim\limits_{n} n\mu E_n = 0$.

6. Получить теорему о полной аддитивности интеграла как следствие его абсолютной непрерывности.

7. Пусть $f(x)$ интегрируема на E и $E \supset E_1 \supset E_2 \ldots \to E_0$. Будет ли $\int\limits_{E_n} f\,d\mu$ стремиться к $\int\limits_{E_0} f\,d\mu$?

ГЛАВА V

МЕРА И ИНТЕГРАЛ НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

Одной из наиболее важных реализаций общей концепции меры и интеграла являются понятия меры и интеграла Лебега в n-мерном евклидовом пространстве. Так как основные идеи и методы теории Лебега достаточно ясно проявляются уже в одномерном случае, мы ограничимся изложением этой теории для линейных точечных множеств и для однократных интегралов и лишь вкратце остановимся на некоторых вопросах, связанных с мерой множеств, лежащих в пространстве высшей размерности, и с кратными интегралами.

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать ограниченные множества, лежащие в одном и том же фиксированном конечном интервале (a, b) числовой прямой.

§ 1. Основные определения

Пусть дано открытое множество $G \subset (a, b)$. Как известно,

$$G = \bigcup_n \Delta_n,$$

где $\Delta_n = (a_n, b_n)$ — попарно непересекающиеся интервалы. Назовем *мерой* G сумму длин составляющих интервалов этого множества, т. е.

$$\mu G = \sum_n (b_n - a_n).$$

Если интервалов Δ_n счетное число, то написанный ряд сходится, так как его частичные суммы не превышают длины интервала (a, b), содержащего G.

Пусть E — произвольное множество, лежащее в (a, b). Если $E = \varnothing$, полагаем $\mu E = 0$. Предположим, что E не пусто.

Тогда существуют открытые множества $G \subset (a, b)$, содержащие E (например, сам интервал (a, b)). Назовем *внешней мерой* $\mu^* E$ множества E точную нижнюю границу мер всех таких открытых множеств

$$\mu^* E = \inf_{G \supset E} \mu G. \tag{1}$$

Назовем *внутренней мерой* множества $E \subset (a, b)$ и обозначим ее $\mu_* E$ разность между длиной интервала (a, b) и внешней мерой дополнения этого множества до интервала (a, b)

$$\mu_* E = (b - a) - \mu^* [C_{(a, b)} E]. \tag{2}$$

Если $\mu_* E = \mu^* E$, то множество E называется *измеримым по Лебегу*, а общее значение внешней и внутренней меры называется *мерой Лебега* данного множества и обозначается μE.

Заменим в равенстве (2) множество E на CE[1]). Получим

$$\mu_* (CE) = (b - a) - \mu^* E \tag{3}$$

или

$$\mu^* E = (b - a) - \mu_* (CE).$$

Из (2) и (3) следует, что если $\mu^* E = \mu_* E$, то также и $\mu^* (CE) = \mu_* (CE)$, т. е. вместе с множеством E измеримо и его дополнение, причем

$$\mu E + \mu(CE) = (b - a).$$

Ясно, что $\mu^* E \geqslant 0$, и так как внешняя мера любого множества, лежащего в (a, b), не превосходит длины этого интервала, то также и $\mu_* E \geqslant 0$. Поэтому мера любого измеримого множества есть неотрицательное число.

Нетрудно убедиться, что $\mu_* E \leqslant \mu^* E$.

В самом деле, по определению внешней меры существуют такие открытые множества G_1 и G_2, что

$$\left.\begin{array}{ll} G_1 \supset E, & \mu G_1 < \mu^* E + \varepsilon, \\ G_2 \supset CE, & \mu G_2 < \mu^* (CE) + \varepsilon. \end{array}\right\} \tag{*}$$

Рассмотрим отрезок $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Он покрыт составляющими интервалами множеств G_1 и G_2. По лемме Гейне — Бореля из этого множества интервалов можно выделить конечную систему S, покрывающую $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.

[1]) В дальнейшем мы не будем каждый раз напоминать, что все множества лежат в (a, b) и вместо $C_{(a, b)} E$ будем писать просто CE.

Ясно, что

$$\mu S > (b-a) - 2\varepsilon$$

и

$$\mu S \leqslant \mu G_1 + \mu G_2.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$\mu G_1 + \mu G_2 > (b-a) - 2\varepsilon$$

или, с учетом (*),

$$\mu^* E + \mu^* (CE) + 2\varepsilon > (b-a) - 2\varepsilon,$$

откуда

$$(b-a) - \mu^* (CE) < \mu^* E + 4\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$(b-a) - \mu^* (CE) \leqslant \mu^* E,$$

и требуемое доказано.

Из соотношения $0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E$ следует, что если внешняя мера некоторого множества равна нулю, то это множество измеримо и его мера равна нулю.

Примеры. 1. Всякое конечное и счетное точечное множество $E \subset (a, b)$ измеримо и его мера равна нулю.

Пусть, например, $E = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — счетное множество. Задав произвольно число $\varepsilon > 0$, окружим точку x_k интервалом Δ_k длины, меньшей $\frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда открытое множество $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ содержит E, и $\mu G < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Поэтому $\mu^* E = \inf\limits_{G \supset E} \mu G = 0$, откуда следует, что E измеримо и $\mu E = 0$.

2. В начале этого параграфа мы дали непосредственное определение меры открытого множества. Покажем, что открытое множество измеримо и его мера в смысле общего определения совпадает с первоначальным определением (см. стр. 83).

Итак, пусть G_0 — открытое множество. Тот факт, что $\mu^* G_0 = \inf\limits_{G \supset C_0} \mu G = \mu G_0$, очевиден. Необходимо, следовательно, показать, что $\mu_* G_0 = \mu G_0$, где μG_0 — мера в смысле первоначального определения открытого множества G_0.

Пусть $\alpha = \inf G_0$, $\beta = \sup G_0$, так что $[\alpha, \beta]$ — наименьший отрезок, содержащий G_0. Ясно, что α и β не могут быть внутренними точками G_0 и потому не принадлежат G_0. В силу этого

$$CG_0 = (a,\ \alpha) + (\beta,\ b) + C_{[\alpha,\beta]}G_0.$$

Так как $C_{[\alpha,\beta]}G_0 = [\alpha,\ \beta]\, C_{(-\infty,\infty)}G_0$, то это множество замкнуто. Обозначим его через F. Читатель легко докажет, что $[\alpha,\ \beta]$ есть наименьший отрезок, содержащий F, и что $F = [\alpha,\ \beta] \setminus G_0$.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Если $G_0 = \bigcup\limits_n (\alpha_n,\ \beta_n)$, то возьмем n настолько большим, что $\sum\limits_{n=1}^{n_0} (\beta_n - \alpha_n) > \mu G_0 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Введем в рассмотрение множество $F_0 = [\alpha,\ \beta] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} (\alpha_n,\ \beta_n)$. Это множество состоит из конечного числа отрезков и, может быть, отдельных точек. Поэтому можно заключить F_0, а тем самым и $F \subset F_0$, в конечную систему S_0 интервалов общей длины, не превосходящей $(\beta - \alpha) - \sum\limits_{n=1}^{n_0} (\beta_n - \alpha_n) + \frac{\varepsilon}{2}$[1].

Теперь ясно, что открытое множество $G = (a,\ \alpha) + (\beta,\ b) + S_0$ содержит в себе CG_0, и мера этого множества есть

$$\mu G = (\alpha - a) + (b - \beta) + (\beta - \alpha) - \sum_{n=1}^{n_0} (\beta_n - \alpha_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \\ < (b - a) - \mu(G_0) + \varepsilon.$$

Тем более,

$$\mu^*(CG_0) < (b - a) - \mu G_0 + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\mu_* G_0 = (b - a) - \mu^*(CG_0) > \mu G_0 + \varepsilon,$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\mu_* G_0 \geqslant \mu G_0 = \mu^* G_0,$$

откуда и следует требуемое равенство.

[1]) При построении системы интервалов S_0 мы можем выйти за пределы $(a,\ b)$, но это не играет существенной роли.

Далее мы увидим, что измеримость открытого множества будет более просто получаться как следствие общих теорем.

3. Пусть F — замкнутое множество, лежащее в (a, b). Если $[\alpha, \beta]$ есть наименьший отрезок, содержащий F, то множество

$$CF = (\alpha, a) + (b, \beta) + C_{[\alpha, \beta]}F$$

открыто и потому измеримо. Следовательно, F также измеримое множество и его мера равна $(b - a) - \mu(C_{(a, b)}F)$.

4. Пусть $P_0^{\cdot}$ — канторово совершенное множество, Q_0 — дополнительное открытое множество

$$Q_0 = u \bigcup (u_0 \bigcup u_2) \bigcup (u_{00} \bigcup u_{02} \bigcup u_{20} \bigcup u_{22}) \bigcup \ldots$$

Так как $\mu u = \frac{1}{3}$, $\mu u_0 = \mu u_2 = \frac{1}{3^2}$, $\mu u_{i_1, i_2} = \frac{1}{3^3}$, ..., то

$$\mu Q_0 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots\right\} = 1.$$

Следовательно, $\mu P_0 = 1 - \mu Q_0 = 0$.

Легко построить пример линейного дисконтинуума P положительной меры.

Возьмем отрезок $[0, 1]$ и удалим среднюю пятую часть $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) = u$. На каждом из оставшихся отрезков Δ_0 и Δ_2 удалим по средней пятой части u_0 и u_2 и т. д. Тогда тот же подсчет, что был произведен для канторова совершенного множества, дает

$$\mu P = 1 - \frac{1}{5}\left\{1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^n + \ldots\right\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

§ 2. Вспомогательные леммы. Критерий измеримости

Приведем прежде всего несколько почти очевидных утверждений.

1. *Если* G_1 *и* G_2 *открыты и* $G_1 \subset G_2$, *то* $\mu G_1 \leqslant \mu G_2$. Это следует из того, что каждый составляющий интервал множе-

ства G_1 целиком входит в некоторый составляющий интервал множества G_2.

Если F_1 и F_2 замкнуты и $F_1 \subset F_2$, то также и $\mu F_1 \leqslant \mu F_2$, что легко получается из предыдущего с помощью перехода к дополнениям.

2. Вообще, *если* E_1 *и* E_2 — *произвольные множества и* $E_1 \subset E_2$, *то*

$$\mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2 \quad \text{и} \quad \mu_* E_1 \leqslant \mu_* E_2.$$

В самом деле, если $E_1 \subset E_2$, то каждое открытое множество, содержащее E_2, содержит и E_1. Поэтому множество чисел $\underset{G \supset E_2}{\mu G}$ есть подмножество множества чисел $\underset{G \supset E_1}{\mu G}$. Но тогда

$$\mu^* E_1 = \inf_{G \supset E_1} \mu G \leqslant \inf_{G \supset E_2} \mu G = \mu^* E_2,$$

и первая часть утверждения доказана.

Вторая часть легко получается из первой с помощью перехода к дополнениям, если заметить, что из $E_1 \subset E_2$ следует

$$CE_1 \supset CE_2.$$

В частности, если множества E_1 и E_2 измеримы и $E_1 \subset E_2$, то $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$, и мы установили монотонность меры Лебега.

Лемма 1. *Если* G_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — *открытые множества, то*

$$\mu\left(\bigcup_n G_n\right) \leqslant \sum_n \mu G_n.$$

В частности, если множества G_n *попарно не пересекаются, то*

$$\mu\left(\bigcup_n G_n\right) = \sum_n \mu G_n.$$

Эта лемма очевидна, если множеств G_n конечное число и каждое из них состоит из конечного числа интервалов. В общем случае доказательство получается с помощью применения леммы Гейне—Бореля. Предположим, что $\sum_n \mu G_n < \infty$ (в противном случае утверждение тривиально). Пусть (A_k, B_k), $k = 1, 2, \ldots,$ — составляющие интервалы G и (a_{mn}, b_{mn}), $m = 1, 2, \ldots,$ — составляющие интервалы G_n. Так как $G_n \subset G$, то каждый (a_{mn}, b_{mn}) входит в некоторый (A_k, B_k). Возьмем $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(B_k-A_k)$. Отрезок $[A_k+\varepsilon, B_k-\varepsilon]$ входит в $\bigcup\limits_n G_n$ и, следовательно, каждая точка этого отрезка принадлежит одному из интервалов (a_{mn}, b_{mn}), причем можно считать, что

$$(a_{mn}, b_{mn})\subset(A_k, B_k).$$

По лемме Гейне—Бореля из покрытия отрезка $[A_k+\varepsilon, B_k-\varepsilon]$ этими интервалами можно выделить конечное покрытие, и потому

$$(B_k-\varepsilon)-(A_k+\varepsilon)<\sum(b_{mn}-a_{mn}),$$

где сумма справа распространена на интервалы (a_{mn}, b_{mn}), образующие указанное конечное покрытие. Тем более,

$$(B_k-\varepsilon)-(A_k+\varepsilon)<\sum{}^{(k)}(b_{mn}-a_{mn}),$$

где сумма берется по всем интервалам (a_{mn}, b_{mn}), входящим в (A_k, B_k). Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$B_k-A_k\leqslant\sum{}^{(k)}(b_{mn}-a_{mn}).$$

Суммируя по k, имеем

$$\mu G=\sum_k(B_k-A_k)\leqslant\sum_k\sum{}^{(k)}(b_{mn}-a_{mn}).$$

Так как в силу положительности слагаемых ряд (конечную сумму) можно суммировать в любом порядке, то

$$\mu G\leqslant\sum_n\left\{\sum_m(b_{mn}-a_{mn})\right\}=\sum_n\mu G_n,$$

и первая часть утверждения доказана.

Если G_n попарно не пересекаются, то каждый (A_k, B_k) совпадает с некоторым (b_{mn}, a_{mn}) и тогда ясно, что

$$\mu G=\sum(B_k-A_k)=\sum_n\left(\sum_m(b_{mn}-a_{mn})\right)=\sum_n\mu G_n.$$

Лемма 2. *Пусть G_1 и G_2 — открытые множества, которые вместе покрывают интервал (a, b). Тогда*

$$\mu(G_1\cap G_2)\leqslant\mu G_1+\mu G_2-(b-a).$$

Снова неравенство очевидно, если G_1 и G_2 состоят из конечного числа интервалов, и получается с помощью леммы Гейне—Бореля в общем случае. Пусть $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$. Рассмотрим отрезок $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$. Этот отрезок покрывается составляющими интервалами множеств G_1 и G_2, и в силу леммы Гейне—Бореля существует конечная подсистема таких интервалов, покрывающая $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$.

Те из интервалов этой конечной подсистемы, которые принадлежат G_1, дадут в совокупности открытое множество $\tilde{G}_1$; те, которые принадлежат G_2, — открытое множество $\tilde{G}_2$. Добавляя, если необходимо, к $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ другие интервалы из G_1, соответственно G_2, мы можем считать, что

$$G_1=\tilde{G}_1\cup R_1,\quad G_2=\tilde{G}_2\cup R_2,$$

где R_1 и R_2 — конечные или бесконечные системы интервалов, не вошедшие в $\tilde{G}_1$, соответственно $\tilde{G}_2$, и $\mu R_1<\varepsilon$, $\mu R_2<\varepsilon$. Так как

$$G_1\cap G_2\subset(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)\cup R_1\cup R_2,$$

то в силу утверждения 2

$$\mu(G_1\cap G_2)\leqslant\mu(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)+\mu R_1+\mu R_2<\mu(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)+2\varepsilon. \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ состоят из конечного числа интервалов и покрывают $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$, то ясно, что

$$\mu\tilde{G}_1+\mu\tilde{G}_2-\mu(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)>(b-\varepsilon)-(a+\varepsilon)=$$
$$=(b-a)-2\varepsilon. \quad (2)$$

Так как, кроме того, $\mu\tilde{G}_1\leqslant\mu G_1$, $\mu\tilde{G}_2\leqslant\mu G_2$, то из (1) и (2) получаем

$$\mu(G_1\cap G_2)\leqslant\mu(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)+2\varepsilon<\mu\tilde{G}_1+\mu\tilde{G}_2-(b-a)+$$
$$+2\varepsilon+2\varepsilon\leqslant\mu G_1+\mu G_2+4\varepsilon.$$

Но $\varepsilon>0$ можно выбирать сколь угодно малым. Поэтому последнее неравенство при $\varepsilon\to 0$ в пределе дает

$$\mu(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)\leqslant\mu G_1+\mu G_2-(b-a),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — произвольные множества и*

$$E=E_1\cup E_2\cup\ldots$$

Тогда

$$\mu^* E \leqslant \mu^* E_1 + \mu^* E_2 + \ldots$$

Для каждого k и заданного $\varepsilon > 0$ построим открытое множество G_k, содержащее E_k и такое, что

$$\mu G_k < \mu^* E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Пусть $G = \bigcup\limits_k G_k$. Тогда $G \supset E$ и

$$\mu G \leqslant \sum_k \mu G_k \leqslant \sum_k \mu^* E_k + \varepsilon.$$

Тем более,

$$\mu^* E \leqslant \sum_k \mu^* E_k + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, мы в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\mu^* E \leqslant \sum_k \mu^* E_k.$$

Лемма 4. *Если $E = \bigcup\limits_k E_k$ и $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то*

$$\mu_* E \geqslant \sum \mu_* E_k.$$

Рассмотрим сначала случай двух множеств E_1 и E_2, и пусть $E = E_1 \cup E_2$. Возьмем CE_1 и CE_2 и открытые множества $G_1 \supset CE_1$ и $G_2 \supset CE_2$ такие, что

$$\mu G_1 < \mu^* (CE_1) + \varepsilon, \qquad \mu G_2 < \mu^* (CE_2) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Так как E_1 и E_2 не пересекаются, то CE_1 и CE_2, а тем более G_1 и G_2, вместе покрывают (a, b). По лемме 2 будем иметь

$$\mu (G_1 \cap G_2) \leqslant \mu G_1 + \mu G_2 - (b - a).$$

Но $G_1 \cap G_2 \supset CE_1 \cap CE_2 = C(E_1 \cup E_2) = CE$. Поэтому

$$\mu^* (CE) \leqslant \mu G_1 + \mu G_2 - (b - a) < \\ < \mu^* (CE_1) + \mu^* (CE_2) - (b - a) + 2\varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\mu^* (CE) \leqslant \mu^* (CE_1) + \mu^* (CE_2) - (b - a),$$

откуда

$$(b-a)-\mu^*(CE) \geqslant (b-a)-\mu^*(CE_1)+(b-a)-\mu^*(CE_2),$$

т. е.

$$\mu_* E \geqslant \mu_* E_1 + \mu_* E_2.$$

По индукции, результат распространяется на случай любого конечного числа слагаемых.

Пусть, наконец, $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Положим $S_n=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Имеем

$$\mu_* S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_* E_k.$$

Так как $S_n \subset E$, и, следовательно, $\mu_*(S_n) \leqslant \mu_*(E)$, то, тем более,

$$\mu_* E \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_* E_k.$$

Поскольку n можно брать сколь угодно большим, то в пределе при $n \to \infty$ получаем

$$\mu_* E \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_* E_n,$$

что и требовалось доказать.

Введем теперь полезное во многих случаях понятие симметрической разности двух множеств. Если даны два произвольных множества A и B, то совокупность точек этих множеств, входящих в одно из них, но не входящих во второе, называют *симметрической* разностью этих множеств и обозначают $A\Delta B$. Итак,

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Читатель легко докажет, что также

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

Теорема (признак измеримости Валле-Пуссена). *Для того чтобы ограниченное множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлась такая конечная система попарно неперекрывающихся интервалов S, что*

$$\mu^*(E\Delta S)<\varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \subset (a, b)$ и измеримо. Тогда

$$\mu^* E = \mu_* E,$$

или

$$\mu^* E + \mu^* (CE) = (b - a). \tag{3}$$

По определению внешней меры для любого $\varepsilon > 0$ найдутся открытые множества $G_1 \supset E$ и $G_2 \supset CE$ такие, что

$$\mu G_1 < \mu^* E + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu G_2 < \mu^* (CE) + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда в силу (3)

$$\mu G_1 + \mu G_2 < (b - a) + \varepsilon.$$

Так как множества G_1 и G_2 вместе покрывают (a, b), то по лемме 2

$$\mu G_1 + \mu G_2 \geqslant (b - a) + \mu (G_1 \cap G_2).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует

$$\mu (G_1 \cap G_2) < \varepsilon.$$

Пусть $G_1 = \bigcup_n \delta_n$. Выберем N настолько большим, чтобы $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu \delta_n < \frac{\varepsilon}{2}$, и положим $S = \bigcup_{n=1}^{N} \delta_n$. Имеем $E \setminus S \subset G_1 \setminus S$, откуда $\mu^* (E \setminus S) \leqslant \mu (G_1 \setminus S) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, $S \setminus E = S \cap CE \subset \subset S \cap G_2 \subset G_1 \cap G_2$. Поэтому $\mu^* (S \setminus E) < \mu^* (G_1 \cap G_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда

$$\mu^* (E \Delta S) \leqslant \mu^* (E \setminus S) + \mu^* (S \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Имеем очевидное включение

$$E \subset S \cup (E \Delta S).$$

Отсюда

$$\mu^* E \leqslant \mu S + \mu^* (E \Delta S) < \mu S + \varepsilon. \tag{4}$$

Легко доказать включение

$$CE \subset CS \cup (E \Delta S),$$

и, как и выше, из него следует

$$\mu^*(CE) < \mu(CS) + \varepsilon.$$

Вычитая последнее неравенство из $(b - a)$, находим

$$\mu_* E > \mu S - \varepsilon.$$

В сочетании с (4) это дает

$$\mu S - \varepsilon < \mu_* E \leqslant \mu^* E < \mu S + \varepsilon,$$

или

$$0 \leqslant \mu^* E - \mu_* E < 2\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то отсюда следует равенство

$$\mu^* E = \mu_* E,$$

т. е. измеримость множества E.

§ 3. Основные теоремы

Теорема 1. *Сумма и пересечение конечного числа измеримых множеств есть измеримое множество.*

Доказательство. Пусть E_1 и E_2 измеримы. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные системы попарно неперекрывающихся интервалов S_1 и S_2, что

$$\mu^*(E_1 \Delta S_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(E_2 \Delta S_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$(E_1 \bigcup E_2) \Delta (S_1 \bigcup S_2) \subset (E_1 \Delta S_1) \bigcup (E_2 \Delta S_2).$$

Поэтому

$$\mu^*[(E_1 \bigcup E_2) \Delta (S_1 \bigcup S_2)] \leqslant \mu^*(E_1 \Delta S_1) + \mu^*(E_2 \Delta S_2) < \varepsilon,$$

а это и есть условие измеримости $E_1 \bigcup E_2$.

Случай пересечения сводится к сумме с помощью равенства

$$C(E_1 \bigcap E_2) = CE_1 \bigcup CE_2.$$

По индукции полученный результат распространяется на случай любого конечного числа измеримых множеств.

Следствие. *Разность и симметрическая разность двух измеримых множеств есть измеримое множество.*

Доказательство следует из равенств

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap CE_2,$$

$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1).$$

Теорема 2. *Если множества E_n, $n = 1, 2, \ldots$, измеримы и попарно не пересекаются, то $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ измеримо и*

$$\mu E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

Доказательство. Леммы 3 и 4 приводят к системе неравенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_* E_n \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n,$$

из которых следует, что $\mu^* E = \mu E = \mu_* E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Сумма счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество.*

Доказательство. Пусть E_n, $n = 1, 2, \ldots$, измеримы и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Полагая $E'_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$, будем иметь

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

По теореме 1 множества $\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$ измеримы, а следовательно, измеримы и E'_n. Так как, кроме того, E'_n не пересекаются, то по предыдущей теореме E измеримо, что и требовалось доказать.

Теорема 3 в сочетании с теоремой 2 и с тем фактом, что дополнение измеримого множества измеримо, приводит к утверждению, что класс измеримых множеств, заданных на некотором фиксированном конечном интервале (a, b) числовой оси, есть аддитивный класс, а мера множества есть вполне аддитивная функция на этом классе.

Таким образом, к измеримым по Лебегу множествам, лежащим на конечных интервалах числовой прямой, и к мере Лебега применимы все результаты, установленные выше для произвольной меры абстрактных множеств. В частности, имеют место теоремы о мере предельных множеств, которыми мы будем неоднократно пользоваться.

На предыдущих страницах мы выяснили, какие множества на фиксированном отрезке числовой прямой будут измеримы по Лебегу. Отметим теперь, что на любом отрезке $[a, b]$ существуют и неизмеримые множества. Построение примера неизмеримого множества можно найти в упомянутой выше книге И. П. Натансона.

В заключение этого параграфа докажем еще одну лемму о внешней мере, которая нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 5. *Пусть* $\{E_n\}$ — *монотонно возрастающая последовательность множеств и* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_n E_n \subset [a,b]$. *Тогда* $\mu^* E = \lim_n \mu^* E_n$.

Доказательство. Для каждого n возьмем открытое множество $G_n \supset E_n$ такое, что

$$\mu G_n < \mu^* E_n + \varepsilon.$$

Пусть $H_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} G_k$ и $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$

Мы имеем $H_n \subset H_{n+1}$, $E_n \subset H_n \subset G_n$, $\lim_n H_n = H$ и $E \subset H$.

Так как все H_n — измеримые множества, то H также измеримо, и по свойству 3 меры (гл. IV) $\mu H = \lim_n \mu H_n$. Но тогда

$$\mu^* E \leqslant \mu^* H = \mu H = \lim_n \mu H_n \leqslant \lim_n \mu G_n \leqslant$$
$$\leqslant \lim_n \mu^* E_n + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\mu^* E \leqslant \lim_n \mu^* E_n. \qquad (\alpha)$$

С другой стороны, $E \supset E_n$, откуда $\mu^* E \geqslant \mu^* E_n$, следовательно,

$$\mu^* E \geqslant \lim_n \mu^* E_n. \tag{β}$$

Из (α) и (β) вытекает требуемое равенство.

Упражнения. 1. Исходя из определения меры, доказать, что если $F = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, где $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$, то $\mu F = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Чему равна μF, если составляющие отрезки пересекаются?

2. Чему равна мера множества точек отрезка $[0, 1]$, десятичное представление которых не содержит двух цифр, например, 5 и 7?

3. Построить на отрезке $[0, 1]$ совершенное, нигде не плотное множество, имеющее мерой заданное число α, $0 < \alpha < 1$.

4. Доказать, что $\mu G = \sup\limits_{F \subset G} \mu F$. Здесь G — открытое, а F — замкнутое множества.

Исходя из определения меры, доказать, что для замкнутого множества F выполняется равенство $\mu^* (F) = \mu_* (F)$.

6. Показать, что для любого измеримого множества E можно построить множество Φ типа F_σ и множество H типа G_δ такие, что $\Phi \subset E \subset H$ и $\mu\Phi = \mu E = \mu H$.

7. Доказать, что для измеримости множества E необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось открытое множество $G \supset E$ такое, что $\mu^* (G \setminus E) < \varepsilon$.

8. Доказать, что если E_1 и E_2 — измеримые множества, то $E = CE_1E_2$ — также измеримое множество. Чему равна мера этого множества?

§ 4. Измеримые функции одной вещественной переменной

После того как определена лебегова мера ограниченных множеств на числовой прямой и установлена ее полная аддитивность, определяются, в соответствии с общей схемой, измеримые функции, заданные на ограниченных множествах вещественных чисел, причем все установленные выше свойства таких функций будут, очевидно, иметь место.

Мы докажем здесь лишь некоторые дополнительные теоремы об измеримых по Лебегу вещественных функциях вещественной переменной, которые широко используются в различных исследованиях.

Лемма 1. *Функция $f(x)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $F \subset (-\infty, \infty)$, измерима на этом множестве.*

Для доказательства покажем, что множество $F(f \geqslant c)$ при любом вещественном c замкнуто, а следовательно, измеримо.

Пусть x_0 — предельная точка множества $F(f \geqslant c)$. Найдется последовательность точек этого множества $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$, такая, что $x_n \to x_0$. Так как $x_n \in F$ и F замкнуто, то $x_0 \in F$. Далее, $f(x_n) \geqslant c$ для любого n и так как в силу непрерывности $f(x)$ на F

$$f(x_0) = \lim_n f(x_n),$$

то также и $f(x_0) \geqslant c$. Но тогда

$$x_0 \in F(f \geqslant c),$$

и замкнутость этого множества доказана.

Следующая, весьма важная теорема показывает, что хотя произвольная измеримая на отрезке $[a, b]$ функция не является обязательно непрерывной (это ясно, так как есть разрывные, например, ступенчатые, измеримые функции), но всякая такая функция в некотором смысле близка к непрерывной.

Будем говорить, что заданная на $[a, b]$ функция $f(x)$ обладает *с-свойством*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется совершенное множество $P \subset [a, b]$ такое, что $\mu(P) > (b-a) - \varepsilon$, и $f(x)$ на P непрерывна.

Теорема (Лузина). *Для того чтобы функция $f(x)$ была измерима на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она обладала на этом отрезке с-свойством.*

Прежде чем доказать теорему Лузина, установим еще одну лемму.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, обладающих на отрезке $[a, b]$ с-свойством, сходится почти всюду на этом отрезке к функции $f_0(x)$. Тогда предельная функция также обладает с-свойством.*

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x)$ обладает c-свойством, то из отрезка $[a, b]$ можно выделить совершенное множество P_n с мерой

$$\mu P_n > (b-a) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

на котором $f_n(x)$ непрерывна. Сделаем это для каждого n. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду к $f_0(x)$, то по теореме Егорова (см. стр. 94) можно выделить совершенное множество P_0 с мерой $\mu P_0 > (b-a) - \frac{\varepsilon}{2}$, на которой сходимость последовательности к предельной функции будет равномерной. Положим теперь

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n.$$

Тогда

$$\mu\{[a, b] \setminus F\} = \mu \{[a, b] \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n\} =$$

$$= \mu\{([a, b] \setminus P_n) \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} ([a, b] \setminus P_0)]\} \leqslant \mu\{[a, b] \setminus P_0\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{[a, b] \setminus P_n\} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon,$$

т. е. $\mu F > (b-a) - \varepsilon$. Выбрасывая из F не более чем счетное множество изолированных точек, мы придем к совершенному множеству $P \subset F$ той же меры, что и F, на котором $f_0(x)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций и, следовательно, тоже непрерывной функцией.

Переходим к доказательству теоремы Н. Н. Лузина.

Необходимость. 1. Пусть сначала $f(x)$ — двузначная измеримая функция

$$f(x) = \begin{cases} k_1 & \text{на } E, \\ k_2 & \text{на } cE = [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

При этом мы считаем, что $\mu E > 0$, $\mu cE > 0$. (Если, например, $\mu E = 0$, то $f(x)$ постоянна почти всюду на $[a, b]$ и, следовательно, постоянна, а значит, и непрерывна, на замкнутом множестве F, сколь угодно близком по мере к $[a, b]$.) Найдутся множества $F_1 \subset E$ и $F_2 \subset cE$, которые замкнуты, не пересекаются и

$$\mu F_1 > \mu E - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu F_2 > \mu CE - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $F=F_1+F_2$ и построим совершенное множество $P\subset F$ той же меры, что и F, выбросив изолированные точки:

$$\mu P=\mu F=\mu F_1+\mu F_2>\mu E-\frac{\varepsilon}{2}+\mu CE-\frac{\varepsilon}{2}=(b-a)-\varepsilon.$$

Рассмотрим $f(x)$ на P. Покажем, что на этом множестве $f(x)$ непрерывна. В самом деле, каждая точка $x\in P$ принадлежит либо F_1, либо F_2. Пусть, например, $x\in F_1$, и следовательно, $f(x)=k_1$. Положим $d=\rho(F_1, F_2)$. Так как F_1 и F_2 замкнуты, ограничены и не пересекаются, то легко проверить, что $d>0$. Пусть, далее, $x_n\in P$ и $x_n\to x$. При достаточно большом $n\geqslant n_0$ будем иметь $|x_n-x|<d$, откуда $x_n\in F_1$. Но тогда и $f(x_n)=k_1$ при $n\geqslant n_0$, т. е. $\lim\limits_n f(x_n)=$ $=k_1=f(x)$, и непрерывность $f(x)$ в точке x_0 доказана.

Итак, двузначная измеримая на $[a, b]$ функция $f(x)$ обладает c-свойством.

2. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обладают c-свойством на отрезке $[a, b]$, то сумма $f_1(x)+f_2(x)$ также обладает этим свойством.

Для любого $\varepsilon>0$ строим совершенные множества P_1 и P_2 такие, что $\mu P_1>(b-a)-\frac{\varepsilon}{2}$, $\mu P_2>(b-a)-\frac{\varepsilon}{2}$, и на P_1 и P_2 функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно непрерывны. Положим $F=P_1\cap P_2$, и пусть P — совершенное множество, полученное из F выбрасыванием изолированных точек. Имеем, очевидно,

$$\mu P=\mu F>(b-a)-\varepsilon,$$

и на P функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а следовательно, и их сумма $f_1(x)+f_2(x)$ непрерывны.

3. Сумма любого конечного числа функций, обладающих c-свойством на $[a, b]$, также обладает этим свойством.

Доказательство непосредственно следует из предыдущего.

4. Любая измеримая ступенчатая функция обладает c-свойством.

Пусть $f(x)=\{\alpha_1, A_1; \alpha_2, A_2; \ldots; \alpha_n, A_n\}$. Введем функции

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\alpha_i & \text{на } A_i,\\ 0 & \text{на } CA_i.\end{cases}$$

Тогда $\varphi_i(x)$ — двузначная измеримая функция и потому обладает c-свойством. Далее, очевидно, что

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_n(x).$$

В силу п. 3 $f(x)$ также обладает c-свойством.

5. Любая неотрицательная измеримая на $[a, b]$ функция обладает c-свойством.

В самом деле, любая неотрицательная измеримая функция есть предел монотонно возрастающей последовательности неотрицательных ступенчатых функций. Но тогда утверждение этого пункта следует из предыдущего пункта и леммы 2.

6. Любая измеримая на $[a, b]$ функция $f(x)$ обладает c-свойством.

Так как имеет место равенство

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),$$

где $f_+(x)$ и $f_-(x)$ неотрицательны и измеримы, то достаточно убедиться, что если $\varphi(x)$ обладает на $[a,b]$ c-свойством, то такова же и функция $-\varphi(x)$. Но это ясно, так как на множестве P, где непрерывна $\varphi(x)$, будет непрерывна и $-\varphi(x)$.

Необходимость полностью доказана.

Достаточность. Пусть $f(x)$ обладает на $[a,b]$ c-свойством. Для каждого n построим совершенные множества $P_n\subset[a, b]$ такие, что $\mu P_n>(b-a)-\frac{1}{n}$, и на которых $f(x)$ непрерывна.

Положим $Q_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$. Тогда $f(x)$ непрерывна и на Q_n. В самом деле, если это не так, то найдутся точки x, $x_m\in Q_n$ и число $\varepsilon_0>0$ такие, что $|x-x_m|<\frac{1}{m}$, но $|f(x)-f(x_m)|\geqslant\varepsilon_0$. Поскольку множеств P_k конечное число, а точек последовательности бесконечно много, то существует подпоследовательность $\{x_{m_i}\}$, входящая в одно и то же множество P_{k_0}. Тогда и $x=\lim\limits_{m_i\to\infty} x_{m_i}\in P_{k_0}$, откуда в силу непрерывности $f(x)$ на P_{k_0} будем иметь $f(x_{m_i})\to f(x)$, что противоречит неравенству

$$|f(x_{m_i})-f(x)|\geqslant\varepsilon_0.$$

Построим теперь функции

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{на } Q_n, \\ 0 & \text{на } CQ_n. \end{cases}$$

Покажем, что эти функции измеримы на $[a, b]$. Пусть H_n — совершенное множество, полученное из Q_n отбрасыванием изолированных точек. Допустим, что H_n сумма конечного или счетного числа попарно непересекающихся отрезков $\Delta_k^{(n)}$: $H_n = \bigcup\limits_k \Delta_k^{(n)}$ [1]). Зафиксируем натуральное число N и включим в каждый отрезок $\Delta_k^{(n)}$ интервал $\delta_k^{(n)}$ с концами, отстоящими от концов отрезка на расстояние меньшее, чем $\frac{1}{N}$ (рис. 6). Определим функцию $\varphi_N^{(n)}(x)$, полагая ее совпадающей с $f_n(x)$ на интервалах $\delta_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, N$, равной нулю вне отрезков $\Delta_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, N$, и линейной на полуинтервалах, дополняющих $\delta_k^{(n)}$ до $\Delta_k^{(n)}$. Так как на $\delta_k^{(n)}$ функция $\varphi_N^{(n)}(x)$ совпадает с $f(x)$, то $\varphi_N^{(n)}(x)$ непрерывна на этих интервалах. Но тогда из построения ясно, что она непрерывна и на всем отрезке $[a, b]$. Далее, поскольку при достаточно большом N любая точка, лежащая строго внутри любого отрезка $\Delta_k^{(n)}$, попадет в некоторый интервал $\delta_k^{(n)}$, где $f_n(x)$ и $\varphi_N^{(n)}(x)$ совпадают, и поскольку на CQ_n обе эти функции равны нулю, мы получаем, что $\varphi_N^{(n)}(x) \to f_n(x)$ всюду, кроме, может быть, концов отрезков $\Delta_k^{(n)}$ и точек множества $Q_n \setminus H_n$, т. е. почти всюду на $[a, b]$. Но тогда $f_n(x)$, как предел почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций, будет измеримой функцией.

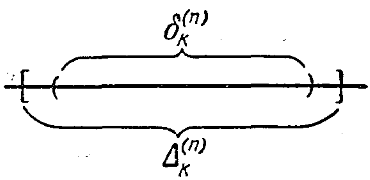

Рис. 6.

Докажем, наконец, что $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Пусть $P = \lim\limits_n Q_n$. Ясно, что P — измеримое множество, включенное в $[a, b]$, а потому $\mu P \leqslant (b-a)$.

[1]) Если H_n нигде не плотно, то доказательство сильно усложняется.

С другой стороны,

$$\mu P \geqslant \mu P_n > (b-a) - \frac{1}{n}$$

для любого n, откуда $\mu P \geqslant (b-a)$. Следовательно, $\mu P = (b-a)$. Рассмотрим любую точку $x \in P$. Найдется номер n_0 такой, что $x \in Q_n$ для $n \geqslant n_0$. Но на Q_n функции $f(x)$ и $f_n(x)$ совпадают, т. е.

$$f_n(x) - f(x) = 0$$

при $n \geqslant n_0$, что означает сходимость $f_n(x)$ и $f(x)$ на P. Отсюда в силу измеримости функций $f_n(x)$ следует измеримость функции $f(x)$, и достаточность условия Н. Н. Лузина доказана.

Теорема Лузина дает представление о строении измеримых функций. Согласно этой теореме каждая измеримая на отрезке $[a, b]$ функция есть не что иное, как непрерывная функция, искаженная на некотором множестве сколь угодно малой меры. Это аналогично тому, что всякое измеримое множество с точностью до множества сколь угодно малой меры совпадает как с некоторым открытым, так и с некоторым замкнутым множеством.

Простые рассуждения позволяют высказать несколько более точных утверждений о строении измеримых множеств. Пусть дано измеримое множество E положительной меры. Тогда найдутся замкнутые множества F_n, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $F_n \subset E$ и

$$\mu F_n > \mu E - \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, что $\Phi \subset E$ и $\mu\Phi = \mu E$. Множество, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств (оно может быть и не замкнуто) называется, как мы уже говорили выше, множеством типа F_σ. Таким образом, для любого измеримого множества E с $\mu E > 0$ найдется множество типа F_σ, входящее в E и отличающееся от E на множество меры нуль.

С другой стороны, существуют открытые множества $G_n \supset E$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\mu G_n < \mu E + \frac{1}{n}.$$

Пусть $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Ясно, что $H \supset E$ и $\mu H = \mu E$. Множество, являющееся пересечением счетного числа открытых множеств (оно может быть открыто, замкнуто, ни открыто, ни замкнуто) есть множество типа G_δ. Следовательно, для любого измеримого множества E, $\mu E > 0$ найдется содержащее его множество типа G_δ, отличающееся от E на множество меры нуль.

Что касается множеств меры нуль, то охарактеризовать как-то их структуру не удается. Более того, разнообразие в строении множеств меры нуль такое же, как и в строении всех вообще точечных множеств. Это показывают следующие рассуждения.

Возьмем канторово совершенное множество P_0. Оно само и любое его подмножество имеют меру нуль.

Выбросим из P_0 точку $x=0$ и правый конец каждого смежного интервала. Оставшееся множество обозначим через Π_0. Оно также имеет меру нуль и обладает тем свойством, что подобно полуинтервалу $(0, 1]$. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать точку x множества Π_0 с помощью троичной дроби

$$x=0,\ i_1,\ i_2, \ldots,\ i_k \ldots$$

(каждое $i_k=0$ или 2, нуль в периоде отсутствует, 2 в периоде может быть, например $\frac{1}{3}=0{,}0222\ldots$) и поставить этой точке в соответствие точку $y \in (0,1]$ вида

$$y=0,\ \frac{i_1}{2}\,\frac{i_2}{2}\ldots\frac{i_k}{2}\ldots$$

в двоичном представлении.

Легко проверить, что это соответствие есть соответствие подобия. Но тогда существует столько разных подмножеств множества меры нуль, сколько есть различных подмножеств у полуинтервала $(0, 1]$, что и оправдывает наше утверждение.

Итак, всякое измеримое множество с точностью до множества меры нуль совпадает с некоторым борелевским множеством.

Функцию $f(x)$ вещественного переменного x назовем борелевской, если она задана на борелевском множестве E и если все множества $E(f > c)$ при любых вещественных c — борелевские. Можно доказать, что всякая измеримая на борелевском множестве E функция почти всюду совпадает на этом множестве с некоторой борелевской функцией.

Упражнения. 1. Доказать, что функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

измерима на [0, 1].

2. Доказать измеримость на [0, 1] функции Римана

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x=\dfrac{p}{q} \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

3. Пусть $f(x)$ измерима на отрезке $[a, b]$. Будет ли измерима на этом отрезке функция $F(x)=e^{f(x)}$?

4. Непосредственно, путем выяснения строения лебеговских множеств $E(f<c)$, показать, что функция $f(x)$, кусочно монотонная и кусочно непрерывная на отрезке $[a, b]$, измерима на этом отрезке.

§ 5. Интеграл Лебега на числовой прямой

Все теоремы, доказанные выше для абстрактных интегралов Лебега, верны и для интеграла Лебега на числовой прямой. Мы ограничимся одной дополнительной теоремой, устанавливающей связь интегралов Римана и Лебега.

Теорема. *Если $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и интегрируема на этом отрезке в смысле Коши—Римана, то она интегрируема также в смысле Лебега и оба эти интеграла равны:*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx=(L)\int_a^b f(x)\,dx$$

(вместо $\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)$ для интегралов Лебега на числовой прямой мы будем писать $\int\limits_E f(x)\,dx$).

Доказательство. Покажем прежде всего, что функция, интегрируемая по Риману, измерима. Пусть

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

— произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим, как обычно,

$$m_i=\inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \qquad M_i=\sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x),$$

$$\underline{s}_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \qquad \bar{s}_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Так как $f(x)$ интегрируема по Риману, то при неограниченном измельчении разбиения

$$\lim \underline{s}_n = \lim \bar{s}_n = s = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Возьмем неограниченно измельчающуюся последовательность разбиений и рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= m_i, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \Phi_n(x) &= M_i, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

В точках деления эти функции не определены. Так как точек деления счетное множество, то $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определены почти всюду и измеримы. Легко убедиться, что при измельчении разбиения, т. е. при возрастании n, функции $\varphi_n(x)$ могут только возрастать, а функции $\Phi_n(x)$ только убывать, причем последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ ограничена снизу. Следовательно, почти всюду существуют пределы

$$\varphi(x) = \lim_n \varphi_n(x) \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \lim_n \Phi_n(x),$$

и эти пределы — измеримые функции.

Так как почти всюду

$$\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi_n(x),$$

то в пределе мы получаем, что

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi(x) \tag{1}$$

почти всюду на $[a, b]$.

Далее, по теореме Лебега

$$\int_a^b [\Phi(x) - \varphi(x)]dx = \lim_n \int_a^b [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)]\,dx =$$

$$= \lim_n \int_a^b \Phi_n(x)\,dx - \lim_n \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_n \bar{s}_n - \lim_n \underline{s}_n = 0.$$

Поскольку $\Phi(x) - \varphi(x)$ — неотрицательная функция, то отсюда следует, что $\Phi(x) = \varphi(x)$ почти всюду на отрезке $[a, b]$. Но тогда в силу (1) также и $f(x) = \varphi(x)$ почти всюду на $[a, b]$, откуда вытекает измеримость $f(x)$.

Так как $f(x)$ измерима и ограничена, то она интегрируема по Лебегу. Более того,

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_n \int_a^b \varphi_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_n s_n = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Упражнения. 1. Вычислить интегралы Лебега $\int_0^1 f(x)\,dx$, если:

а) $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально}; \end{cases}$$

б) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ принадлежит канторову совершенному множеству } P_0, \\ x^3, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus P_0; \end{cases}$$

в) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in P_0, \\ n & \text{в каждом смежном к } P_0 \text{ интервале длины } 3^{-n}. \end{cases}$$

2. Будет ли суммируема в интервале $[0, 1]$ функция

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right)?$$

3. Пусть $f(x)$ — суммируемая на $[0, 1]$ функция. Положим

$$\rho(f) = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|}\,dx.$$

Доказать, что:

а) *если* $f(x) \geqslant g(x)$ почти всюду и $f(x) > g(x)$ на множестве положительной меры, то

$$\rho(f) > \rho(g);$$

б) *для того чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ сходилась по мере к нулю на $[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho(f_n) \to 0.$$

4. Доказать, что если $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ существует при любой суммируемой функции $f(x)$, то $\operatorname{vrai\,max} |g(x)| < \infty$.

5. Доказать, что если $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx > 0$ для любой неотрицательной ограниченной функции $f(x)$, то $g(x) > 0$ почти всюду.

§ 6. Мера и интеграл на плоскости

В заключение рассмотрим вкратце определение меры плоских множеств и двойных интегралов Лебега.

Пусть G — ограниченное открытое множество на плоскости. Как мы знаем (гл. III), $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_k$, где Δ_k — замкнутые прямоугольники попарно без общих внутренних точек.

Полагаем $\mu G = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\Delta_n$, где $\mu\Delta_n$ — площадь прямоугольника. Пусть F — замкнутое ограниченное множество на плоскости, а Δ — какой-нибудь открытый прямоугольник, его содержащий. Полагаем $\mu F = \mu\Delta - \mu C_\Delta F$ (множество $C_\Delta F = \Delta \cap CF$ открыто).

Можно доказать, что так определенная мера открытого множества G не зависит от представления G в виде суммы замкнутых прямоугольников, мера замкнутого множества F не зависит от выбора прямоугольника, содержащего это множество, а также, что все теоремы, установленные выше для меры открытых и замкнутых множеств на числовой прямой, верны и для меры плоских открытых и замкнутых множеств.

После этого, как и раньше, определяется внешняя и внутренняя меры ограниченного множества на плоскости, вводится класс измеримых множеств, доказывается аддитивность класса измеримых множеств и полная аддитивность меры. Доказательства аналогичны доказательствам в линейном случае.

Приведем одну важную теорему, устанавливающую связь меры плоских множеств с мерами его линейных сечений.

Пусть E — плоское множество, состоящее из точек (x, y). Совокупность чисел y таких, что точка (x_0, y) при данном фиксированном x_0 попадает в E, обозначается $E(x_0)$ и называется *сечением* множества E прямой $x = x_0$. Ясно, что $E(x_0)$ есть линейное точечное множество.

Теорема 1. *Пусть E — ограниченное измеримое плоское множество, α и β — точная нижняя и точная верхняя границы абсцисс точек из E. Тогда почти для всех $x \in [\alpha, \beta]$ множество $E(x)$ измеримо, $\mu E(x)$ — измеримая на $[\alpha, \beta]$ функция и $\mu E = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mu E(x)\, dx$.*

После того как определена мера плоских множеств, обычным образом вводятся измеримые функции двух переменных. Именно, функция $f(x, y)$, определенная на плоском множестве E, измерима на нем, если измеримы само E и все множества $E(f > c)$ при любом вещественном c. Как и выше, из этого определения и свойств меры следует, что алгебраические операции и предельный переход не выводят за рамки класса измеримых функций, а также вытекает ряд других свойств измеримых функций, например, аналог теоремы Лузина.

Используя понятие измеримых функций двух переменных, можно ввести, согласно общей схеме, двойной интеграл Лебега $\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \sup \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mu(E_i)$ (см. начало § 3 гл. IV) со всеми вытекающими из этого определения свойствами. Снова приведем без доказательства весьма важную теорему, связывающую линейные и двойные интегралы Лебега.

Теорема 2 (Фубини). *Пусть E — ограниченное измеримое плоское множество, $f(x, y)$ — интегрируемая на E функция и H — множество тех x, для которых $E(x)$ не пусто. Тогда почти для всех $x \in H$ функция $f(x, y)$, как функция одной переменной y, интегрируема на $E(x)$; в свою очередь $\int\limits_{E(x)} f(x, y)\,dy$ для тех $x \in H$, при которых $f(x, y)$ суммируема по y, есть интегрируемая функция от x и*

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_H \left\{ \int\limits_{E(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Из теоремы Фубини вытекает законность перемены порядка интегрирования для суммируемых функций двух переменных.

Подобно тому как строится теория меры и интеграла для двумерного случая, можно развернуть соответствующие теории и в n-мерном случае.

Наконец, можно рассмотреть интегралы Лебега по неограниченным множествам в n-мерном пространстве. Подробное освещение этих вопросов можно найти, например, в указанном выше учебнике И. П. Натансона.

ГЛАВА VI

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА $L(a, b)$ и $L_2(a, b)$

§ 1. Пространство $L(a, b)$

Пусть $f(x)$ — функция, определенная и измеримая на $[a, b]$ и интегрируемая на этом отрезке, т. е. такая, что $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx < \infty$. Будем считать *неразличимыми* (отождествлять) две функции, которые эквивалентны, т. е. совпадают почти всюду на $[a, b]$ Классы, составленные из эквивалентных между собой интегрируемых функций, образуют элементы *лебеговского пространства* $L(a, b)$. Каждая интегрируемая на $[a, b]$ функция порождает некоторый элемент из пространства $L(a, b)$, состоящий из всех функций, эквивалентных данной, и, обратно, каждым элементом пространства $L(a, b)$ определяется (не однозначно, а с точностью до множества меры нуль) некоторая функция, являющаяся представителем данного класса эквивалентных друг другу функций. В дальнейшем через $f(x)$ мы будем обозначать и отдельную функцию, и целый класс эквивалентных между собой функций, представителем которых является $f(x)$, причем из текста будет ясно, о чем идет речь.

Элементы пространства $L(a, b)$ можно складывать и умножать на вещественные числа. Именно, *суммой двух классов* $f(x)$ и $g(x)$ назовем класс $h(x)$, представителем которого является функция $f(x)+g(x)$. Это определение однозначно, ибо если почти всюду $f_1(x)=f(x)$ и $g_1(x)=g(x)$, то также почти всюду $f_1(x)+g_1(x)=f(x)+g(x)$, а потому $f_1(x)+g_1(x)$ определяет тот же класс, что и $f(x)+g(x)$.

Аналогично, назовем *произведением класса* $f(x)$ *на число* λ класс, представителем которого является функция $\lambda f(x)$. Легко заметить, что все свойства операций сложения и умножения на число для классов те же, что и для функций (сложение ассоциативно и коммутативно и т. д.).

В пространстве $L(a, b)$ можно ввести метрику, полагая

$$\rho(f, g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Ясно, что определение расстояния не зависит от выбора представителей в классах $f(x)$ и $g(x)$. Аксиомы расстояния проверяются без труда.

Расстояние $\int_a^b |f(x)|\,dx$ элемента $f \in L(a, b)$ до нулевого элемента $0 \in L(a, b)$, представителем которого является функция, почти всюду равная нулю, называется *нормой* элемента f и обозначается $\|f\|$. Итак,

$$\|f\|=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Из свойств интеграла Лебега непосредственно вытекают следующие свойства нормы:

1) $\|f\|=0$ эквивалентно $f=0$;
2) $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$;
3) $\|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|$.

Используя понятие нормы, расстояние между элементами f и $g \in L(a, b)$ можно записать в виде

$$\rho(f, g)=\|f-g\|.$$

Докажем, что $L(a, b)$ — полное метрическое пространство. Пусть дана последовательность $\{f_n\} \subset L(a, b)$ такая, что

$$\rho(f_n, f_m)=\int_a^b |f_n(x)-f_m(x)|\,dx \to 0 \tag{1}$$

при $n, m \to \infty$. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ таким образом, чтобы

$$\int_a^b |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx < \frac{1}{2^k},$$

что, очевидно, можно сделать. Тогда ряд

$$\int_a^b |f_{n_1}(x)|\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,dx$$

сходится. По теореме об интегрировании положительных рядов имеем

$$\int_a^b \Big(|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\Big)\,dx =$$
$$= \int_a^b |f_{n_1}(x)|\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,dx < \infty,$$

откуда следует, что функция

$$\sigma(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \tag{2}$$

почти всюду конечна, т. е. ряд (2), а тем более ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)), \tag{3}$$

почти всюду сходится. Частичные суммы $s_k(x)$ последнего ряда совпадают с $f_{n_k}(x)$, и поэтому последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится почти всюду к измеримой функции $f_0(x)$. Так как $|s_k(x)| \leqslant \sigma(x)$, то и $|f_0(x)| \leqslant \sigma(x)$, следовательно,

$$\int_a^b |f_0(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \sigma(x)\,dx < \infty, \text{ т. е. } f_0(x) \in L(a, b).$$

Покажем, что $\rho(f_n, f_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\int_a^b |f_n(x) - f_0(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f_{n_k}(x)| + \int_a^b |f_{n_k}(x) - f_0(x)|\,dx.$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия (1) существует такое n_0', что при $n, n_k \geqslant n_0'$

$$\int_a^b |f_n(x) - f_{n_k}(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, найдется такое n_0'', что при $n_k \geqslant n_0''$, $p > 0$

$$\int_a^b |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \leqslant \sum_{i=k}^{k+p-1} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда по лемме Фату также

$$\int_a^b |f_0(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \int_a^b |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $n \geqslant \max(n_0', n_0'')$, то

$$\int_a^b |f_0(x) - f_n(x)|\, dx < \varepsilon,$$

т. е. $\rho(f_n, f_0) \to 0$ при $n \to \infty$, и полнота $L(a, b)$ доказана.

Упражнения. 1. Опираясь на свойство интеграла Лебега, доказать, что если

$$\int_a^b |f_n(x) - f_0(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

то

$$\int_a^b |f_n(x)|\, dx - \int_a^b |f_0(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

2. Доказать, что множество элементов пространства $L(a, b)$, представителями которых являются ограниченные измеримые на $[a, b]$ функции, всюду плотно в $L(a, b)$.

3. Доказать то же самое для множества элементов, порождаемых ступенчатыми на $[a, b]$ функциями.

4. Показать, что для любой функции $f(x) \in L(a-\delta, b+\delta)$

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0.$$

5. Пусть снова $f(x) \in L(a-\delta, b+\delta)$, и положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt, \quad h < \delta.$$

Доказать, что

$$\int_a^b |\varphi(x)|\, dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

§ 2. Пространство $L_2(a, b)$. Сходимость в среднем

Пусть $f(x)$ — функция, определенная и измеримая на отрезке $[a, b]$ и такая, что $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx < \infty$, где интеграл понимается в смысле Лебега. Классы, составленные из эквивалентных между собой функций с интегрируемыми квадратами, образуют *лебеговское пространство* $L_2(a, b)$, которое называют также *функциональным гильбертовым пространством*.

Установим некоторые простейшие свойства пространства $L_2(a, b)$.

Назовем *суммой* двух классов $f(x)$ и $g(x)$ класс $h(x)$, представителем которого является функция $f(x)+g(x)$. Покажем, что если $f(x)$ и $g(x) \in L_2(a, b)$, то $h(x)=f(x)+g(x)$ тоже принадлежит $L_2(a, b)$. Для любых двух функций из рассматриваемых классов имеем

$$(f(x)+g(x))^2 = f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x) \leqslant \leqslant 2\{f^2(x)+g^2(x)\}.$$

Отсюда, если $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx < \infty$, $\int\limits_a^b g^2(x)\,dx < \infty$, то также $\int\limits_a^b \{f(x)+g(x)\}^2\,dx < \infty$, и наше утверждение доказано.

Назовем *произведением* класса $f(x)$ *на число* λ класс, представителем которого является функция $\lambda f(x)$. Очевидно, что если $f(x) \in L_2(a, b)$, то и $\lambda f(x) \in L_2(a, b)$.

В пространстве $L_2(a, b)$ можно ввести метрику, полагая

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b \{f(x)-g(x)\}^2\,dx}.$$

Ясно, что определение расстояния не зависит от выбора представителей в классах $f(x)$ и $g(x)$.

Аксиомы тождества и симметрии в силу того, что две эквивалентные функции определяют один и тот же класс, очевидны.

Чтобы доказать аксиомы треугольника, установим для функций с интегрируемым квадратом неравенства Буняковского — Шварца и Коши — Минковского.

Для любых двух таких функций $f(x)$ и $g(x)$ и для любого вещественного λ имеем

$$\int_a^b \{|f(x)|+\lambda|g(x)|\}^2 dx \geqslant 0.$$

Так как $|f(x)\cdot g(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$, мы видим, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют интегрируемые квадраты, то их произведение интегрируемо. Поэтому предыдущее неравенство можно преобразовать к виду

$$\int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

Полагая $A=\int_a^b g^2(x)\,dx$, $B=\int_a^b |f(x)g(x)|dx$, $C=\int_a^b f^2(x)dx$, перепишем это неравенство следующим образом:

$$A\lambda^2+2B\lambda+C\geqslant 0.$$

Так как квадратный трехчлен $A\lambda^2+2B\lambda+C$ при любых вещественных значениях λ сохраняет знак, то дискриминант этого трехчлена неположителен,

$$B^2-AC\leqslant 0,$$

т. е.

$$B\leqslant\sqrt{AC},$$

или, заменяя A, B и C их значениями,

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Это и есть неравенство Буняковского — Шварца. Далее,

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx +$$
$$+\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}+$$
$$+\int_a^b g^2(x)\,dx = \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей неравенства квадратный корень, получим

$$\sqrt{\int_a^b \{f(x)+g(x)\}^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx},$$

и мы пришли к неравенству Коши — Минковского.

Аксиома треугольника становится теперь почти очевидной. В самом деле,

$$\rho(f, h) = \sqrt{\int_a^b \{f(x)-h(x)\}^2\,dx} =$$
$$= \sqrt{\int_a^b \{[f(x)-g(x)]+[g(x)-h(x)]\}^2\,dx} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b [g(x)-h(x)]^2\,dx} =$$
$$= \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

Для элементов пространства $L_2(a, b)$ вводится понятие **нормы и скалярного произведения**. Это числа: $\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} = \|f\|$ — *норма* $f(x)$, $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = (f, g)$ — — *скалярное произведение* $f(x)$ на $g(x)$. Ясно, что эти два числа не зависят от выбора представителей в классах f и g.

Неравенство Буняковского — Шварца принимает вид

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|,$$

а неравенство Коши — Минковского показывает, что

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Очевидны следующие свойства нормы элемента и скалярного произведения элементов в пространстве $L_2(a, b)$:

1) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$;

2) если $\|f\| = 0$, то $f = 0$, т. е. класс f состоит из функций, почти всюду равных нулю;

3) $(f, g) = (g, f)$;

4) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$, $(f, \mu g) = \mu(f, g)$;

5) $(f_1+f_2,\ g)=(f_1,\ g)+(f_2,\ g)$, $(f,\ g_1+g_2)=(f,\ g_1)+(f,\ g_2)$.

Наконец, норма элемента выражается следующим образом через скалярное произведение:

$$\|f\|=\sqrt{(f,\ f)},$$

и расстояние между элементами есть норма разности этих элементов

$$\rho(f, g)=\|f-g\|.$$

Метрика, введенная в пространстве $L_2(a,\ b)$, определяет в этом пространстве сходимость. Именно, последовательность $\{f_n(x)\}\subset L_2(a,\ b)$ сходится к элементу $f_0(x)$ того же пространства, если

$$\|f_n-f_0\|=\rho(f_n,\ f_0)=\sqrt{\int_a^b\{f_n(x)-f_0(x)\}^2\,dx}\to 0$$

при $n\to\infty$. Этот вид сходимости функциональной последовательности называется *сходимостью в среднем*. Отметим, что предел сходящейся в среднем последовательности определяется этой последовательностью лишь с точностью до множества меры нуль.

Сходимость в среднем не влечет за собой сходимости почти всюду, тем более сходимости в каждой точке, как показывает следующий пример. Рассмотрим функции

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in\left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right),\\ 0, & \text{если } x\overline{\in}\left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right),\end{cases}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Запишем эти функции в виде одной последовательности, нумеруя их в порядке возрастания верхнего индекса, а для одного и того же верхнего индекса в порядке возрастания нижнего индекса:

$$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x),\quad \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),\quad \varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),$$
$$\varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),\quad \varphi_5(x)=f_2^{(3)}(x),\ \ldots$$

Нетрудно убедиться, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в среднем к нулю. В самом деле, функция $\varphi_n(x)$ отлична от нуля (и равна единице) лишь на полуинтервале $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$, где k растет с ростом n. Поэтому

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx = \frac{1}{k} \to 0$$

при $n \to \infty$, что доказывает сделанное утверждение. Вместе с тем $\varphi_n(x)$ не стремится к нулю ни в одной точке полуинтервала $[0, 1)$, так как если $x_0 \in [0, 1)$, то $x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$ для сколь угодно больших k при некотором i, и, следовательно, найдутся сколь угодно большие n, такие, что $\varphi_n(x_0) = 1$. С другой стороны, сходимость в каждой точке не влечет за собой сходимость в среднем. Например, последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant x < 1, \end{cases}$$

сходится всюду на $(0, 1)$ к нулю, в то время как

$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx = 1,$$

и потому $f_n(x)$ не сходится в среднем к нулю.

Однако, как мы увидим далее, из всякой последовательности, сходящейся в среднем к некоторому пределу, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к тому же пределу.

Так как норму элемента $f \in L_2(a, b)$ можно рассматривать как расстояние от этого элемента до нуля, $\|f\| = \|f - 0\| = \rho(f, 0)$, то из отмеченной выше непрерывности расстояния (гл. II, § 2) следует, что $\|f_n\| \to \|f_0\|$ при $f_n \to f_0$.

Покажем, что и скалярное произведение есть непрерывная функция своих аргументов. Пусть $f_n \to f_0$, $g_n \to g_0$. Имеем

$$\begin{aligned} |(f_n, g_n) - (f_0, g_0)| &= |(f_n - f_0, g_n) + (f_0, g_n - g_0)| \leqslant \\ &\leqslant |(f_n - f_0, g_n)| + |(f_0, g_n - g_0)| \leqslant \\ &\leqslant \|f_n - f_0\| \cdot \|g_n\| + \|f_0\| \cdot \|g_n - g_0\| \to 0 \end{aligned}$$

при $n\to\infty$, так как в каждом слагаемом справа один из множителей ограничен ($\|g_n\|$ ограничено потому, что $\|g_n\|\to\|g_0\|$), а второй стремится к нулю.

Докажем полноту пространства $L_2(a, b)$.

Теорема 1 (Рисса). *Каждая последовательность $\{f_n(x)\}$ функций с интегрируемым на $[a, b]$ квадратом, сходящаяся в среднем в себе, сходится в среднем к некоторой функции, также принадлежащей пространству $L_2(a, b)$.*

Доказательство. Пусть задано произвольное $\varepsilon>0$. Найдется номер n_ε такой, что

$$\int_a^b \{f_{n+p}(x)-f_n(x)\}^2\,dx<\varepsilon^2$$

при $n\geqslant n_\varepsilon$, $p>0$. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots$, и для каждого $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$ подберем соответствующий номер n_k. Можно считать, что $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$. Таким образом,

$$\int_a^b \{f_{n+p}(x)-f_n(x)\}^2\,dx<\frac{1}{2^{2k}} \tag{1}$$

при $n\geqslant n_k$ и $p>0$. Взяв, в частности, $n=n_k$, а $n+p=n_{k+1}$, будем иметь

$$\int_a^b \{f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\}^2\,dx<\frac{1}{2^{2k}}. \tag{2}$$

Неравенство Буняковского — Шварца дает

$$\int_a^b |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx=\int_a^b |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\cdot 1\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b dx}\,\sqrt{\int_a^b \{f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\}^2\,dx}<\sqrt{b-a}\cdot\frac{1}{2^k},$$

и поэтому положительный ряд

$$\int_a^b |f_{n_1}(x)|\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|^2\,dx$$

сходится, так как его члены не превышают членов сходящегося геометрического ряда. Отсюда, как и раньше, следует, что подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится почти всюду к конечному пределу $f(x)$.

Покажем, что $f(x) \in L_2(a, b)$. Положим в неравенстве (1) $n = n_k$, а $n + p = n_m$, где $m > k$. Получим

$$\int_a^b \{f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)\}^2 dx < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Пусть $m \to \infty$. Тогда подынтегральные функции стремятся почти всюду к $\{f(x) - f_{n_k}(x)\}^2$, и в силу их неотрицательности можно применить лемму Фату. Будем иметь

$$\int_a^b \{f(x) - f_{n_k}(x)\}^2 dx \leqslant \sup_{m>k} \int_a^b \{f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)\}^2 dx < \frac{1}{2^{2k}}. \tag{3}$$

Отсюда и из неравенства Коши — Минковского получаем, что

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b \{f(x) - f_{n_k}(x)\}^2 dx} + \sqrt{\int_a^b f_{n_k}^2(x)\,dx} < \infty,$$

т. е. $f(x) \in L_2(a, b)$.

Теперь неравенство (3) показывает, что подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$. Докажем, что и вся последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к той же функции.

Согласно неравенству треугольника имеем

$$\|f_n - f\| \leqslant \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем сначала k так, чтобы $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда в силу (3) $\|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если, кроме того, выбрать n_k настолько большим, чтобы при $n \geqslant n_k$ имело место неравенство $\|f_n - f_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, что возможно в силу сходимости в среднем в себе последовательности $\{f_n(x)\}$, то будем иметь

$$\|f_n - f\| < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_k$, а это и означает требуемую сходимость.

Теорема полностью доказана.

В дальнейшем сходимость в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f_0(x)$ часто будем обозначать символом

$$f_n(x) \Rightarrow f_0(x).$$

Установим, наконец, сепарабельность пространства $L_2(a, b)$, т. е. существование в нем счетного, всюду плотного множества.

Теорема 2. *Каждое из следующих множеств:*

1) M — *множество ограниченных измеримых на* $[a, b]$ *функций;*

2) C — *множество непрерывных на* $[a, b]$ *функций;*

3) P — *множество многочленов, определенных на* $[a, b]$;

4) D — *множество ступенчатых на* $[a, b]$ *функций всюду плотно в* $L_2(a, b)$.

Докажем, например, первые два из этих утверждений.

Возьмем произвольную функцию $f(x) \in L_2(a, b)$. Из неравенства Буняковского — Шварца следует

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{(b-a)}\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},$$

откуда вытекает, что $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и, следовательно, почти всюду конечна на этом отрезке. Пусть $E_n = \{x;\ |f(x)| \leqslant n\}$. Все E_n измеримы, $E_n \subset E_{n+1}$ и $E = \lim E_n$ отличается от $[a, b]$ на множество меры нуль. Поэтому для любого $\eta > 0$ найдется такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\mu\{[a, b] \setminus E_n\} < \eta. \qquad (*)$$

Введем функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Это — ограниченная измеримая функция, и, кроме того,

$$\|f - f_n\|^2 = \int_a^b \{f(x) - f_n(x)\}^2\,dx = \int_{[a,b]\setminus E_n} f^2(x)\,dx.$$

Но $f^2(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и поэтому в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого $\varepsilon > 0$

найдется такое $\eta > 0$, что
$$\int_H f^2(x)\,dx < \varepsilon^2,$$
как только $\mu(H) < \eta$. Возьмем η в неравенстве (*), удовлетворяющее именно этому условию. Тогда для любого фиксированного $n > n_0$ будем иметь
$$\int_{[a,b]\setminus E_n} f^2(x)\,dx = \|f - f_n\|^2 < \varepsilon^2,$$
что и доказывает первое утверждение.

Возьмем снова произвольную функцию $f(x) \in L_2(a, b)$, и пусть $f_0(x)$ — ограниченная измеримая на $[a, b]$ функция, такая, что
$$\|f - f_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существование такой функции только что доказано. Положим $N = \sup\limits_{[a,b]} |f_0(x)|$. По теореме Лузина для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое совершенное множество $P \subset [a, b]$, что $\mu\{[a, b] \setminus P\} < \frac{\varepsilon^2}{16N^2}$, и на P функция $f_0(x)$ непрерывна. Введем функцию $\varphi(x)$, которая на P совпадает с $f_0(x)$, на смежных к P интервалах линейна, а на концах интервала (α, β) принимает значения $f_0(\alpha)$ и $f_0(\beta)$. Очевидно, что $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и, кроме того, $\sup\limits_{[a,b]} |\varphi(x)| \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |f_0(x)| = N$. Далее,
$$\|f_0(x) - \varphi(x)\|^2 = \int_b^a [f_0(x) - \varphi(x)]^2\,dx =$$
$$= \int_{[a,b]\setminus P} [f_0(x) - \varphi(x)]^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{[a,b]\setminus P} \{|f_0(x)| + |\varphi(x)|\}^2\,dx < 4N^2\,\frac{\varepsilon^2}{16N^2} = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$
Теперь получаем
$$\|f - \varphi\| \leqslant \|f - f_0\| + \|f_0 - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
и второе утверждение доказано.

Так как $C(a, b) \subset L_2(a, b)$ и близость двух функций в метрике $C(a, b)$ влечет за собой близость этих же функций в метрике $L_2(a, b)$, то из второго утверждения и сепарабельности пространства $C(a, b)$ вытекает сепарабельность пространства $L_2(a, b)$.

Упражнения. 1. При каких значениях α функция

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

будет принадлежать пространству $L_2(0, 1)$?

2. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

принадлежит $L\left(0, \frac{1}{2}\right)$, но не принадлежит $L_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

3. Доказать, что если $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$ в среднем к $f(x)$ и в то же время сходится почти всюду к $g(x)$, то $f(x)=g(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

4. Пусть $f(x) \in L_2[a, b]$ и равна нулю вне $[a, b]$. Положим

$$\varphi_h(x)=\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x)\, dx, \quad 0<h<\delta.$$

Показать, что $\varphi_h(x) \in L_2(a, b)$ и $\|\varphi_h\| \leqslant \|f\|$.

§ 3. Ортогональные системы элементов и порождаемые ими подпространства

Два элемента f и $g \in L_2(a, b)$ называются *ортогональными*, $f \perp g$, если $(f, g)=0$. Для ортогональных элементов f и g выполняется равенство $\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$ (теорема Пифагора), которое часто оказывается полезным. Проверку его выполнения предоставляем читателю. Элемент f называется *нормированным*, если $\|f\|=(f, f)=1$. Система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

пространства $L_2(a, b)$ называется *ортонормальной*, если все элементы этой системы нормированы и попарно ортогональны:

$$(\varphi_i, \varphi_j)=\delta_{ij},$$

где $\delta_{ij}=1$ при $i=j$ и $\delta_{ij}=0$ при $i \neq j$.

Примером ортонормальной системы в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ может служить система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \ldots$$

Система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ пространства $L_2(a, b)$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$$

следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Если, наоборот, найдутся такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не все равные нулю, что

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0,$$

то элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называются *линейно зависимыми*. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно зависимы и, например, $c_n \neq 0$, то мы можем написать

$$f_n = -\frac{c_1}{c_n} f_1 - \frac{c_2}{c_n} f_2 - \ldots - \frac{c_{n-1}}{c_n} f_{n-1}.$$

В этом случае говорят, что элемент f_n есть *линейная комбинация элементов* $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.

Пусть дана бесконечная система элементов $\{f_n\}, n = 1, 2, \ldots$ Она называется *линейно независимой*, если любая конечная подсистема этой системы линейно независима. Всякая ортонормальная система линейно независима. В самом деле, пусть $\{\varphi_i\}$ — ортонормальная система и

$$c_1 \varphi_{i_1} + c_2 \varphi_{i_2} + \ldots + c_k \varphi_{i_k} = 0.$$

Умножая это равенство скалярно на φ_{i_1} и учитывая, что $(\varphi_{i_k}, \varphi_{i_m}) = \delta_{km}$, получаем $c_1 = 0$. Аналогично убеждаемся, что $c_2 = 0$ и т. д.

Пусть дано множество $M \subset L_2(a, b)$. Это множество называется *линейным многообразием*, если вместе с элементами $g_1, g_2, \ldots, g_n \in M$ любая линейная комбинация этих элементов также входит в M. Примером линейного многообразия может служить множество всех линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$, которые можно построить из заданных элементов $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Действительно, если $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — такие линейные комбинации:

$$g_k = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(k)} f_i,$$

то любая линейная комбинация элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} c_i^{(j)} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_i^{(j)}\right) f_i = \sum_{i=1}^{m} d_i f_i,$$

т. е. является элементом из M.

Говорят, что линейное многообразие, состоящее из всех линейных комбинаций элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *порождается элементами* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, и пишут $M = L(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Мы будем в основном рассматривать *линейные* многообразия, порождаемые линейно независимыми системами элементов. Если же система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно зависима, например, $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i$, то, заменяя в линейной комбинации $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ элемент f_n его выражением через элементы $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, приходим к линейной комбинации вида $\sum_{j=1}^{n-1} d_j f_j$, откуда следует, что $L(f_1, f_2, \ldots, f_n) = L(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$. Продолжая так далее, мы придем в конце концов к линейно независимой системе, порождающей то же многообразие, что и $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Если линейное многообразие $M \subset L_2(a, b)$ будет являться в то же время замкнутым подмножеством метрического пространства $L_2(a, b)$, то M называется *подпространством* этого пространства. Из этого определения следует, что подпространство M не только содержит все линейные комбинации своих элементов, но и все пределы таких линейных комбинаций.

Пример. Рассмотрим в пространстве $L_2(a, b)$ совокупность M всех функций, обращающихся почти всюду в нуль на некотором фиксированном множестве $E \subset [a, b]$ положительной меры. Очевидно, что M — линейное многообразие.

Оно, кроме того, замкнуто, так как если $f_n(x)=0$ на E, $n=1, 2, \ldots$ и $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, то, во-первых, $\int\limits_E f_n^2(x)\,dx=0$, $n=1, 2, \ldots$, и, во-вторых,

$$\int\limits_E f^2(x)\,dx=\lim_n \int\limits_E f_n^2(x)\,dx=0,$$

откуда $f(x)=0$ почти всюду на E, т. е. $f(x) \in M$. Таким образом, M — подпространство.

Теорема об ортогонализации (Шмидта). *Для любой линейно независимой системы $\{f_n\}$ можно построить ортонормальную систему $\{\varphi_n\}$, порождающую то же самое линейное многообразие (подпространство), что и $\{f_n\}$.*

Доказательство. Положим $\varphi_1=\frac{f_1}{\|f_1\|}$. Ясно, что $\|\varphi_1\|=1$. Пусть $g_2=f_2-c_{21}\varphi_1$. Подберем число c_{21} так, чтобы элемент g_2 был ортогонален φ_1. Это приводит к равенству $(g_2, \varphi_1)=(f_2, \varphi_1)-c_{21}(\varphi_1, \varphi_1)=0$, откуда $c_{21}=(f_2, \varphi_1)$. Положим $\varphi_2=\frac{g_2}{\|g_2\|}$. Тогда φ_2, как и g_2, будет ортогонален φ_1, и $\|\varphi_2\|=1$. Заметим, что $\|g_2\| \neq 0$, так как g_2 есть линейная комбинация линейно независимых элементов f_1 и f_2, где один из коэффициентов (при f_2) отличен от нуля, и потому $\|g_2\|$ не равна нулю.

Рассмотрим $g_3=f_3-c_{32}\varphi_2-c_{31}\varphi_1$ и подберем коэффициенты c_{32} и c_{31} так, чтобы g_3 был ортогонален и φ_1, и φ_2. Это с учетом ортогональности φ_1 и φ_2 приводит к равенствам: $c_{32}=(f_3, \varphi_2)$, $c_{31}=(f_3, \varphi_1)$. Положим $\varphi_3=\frac{g_3}{\|g_3\|}$. Тогда φ_3, как и g_3, ортогонален и φ_1, и φ_2, и $\|\varphi_3\|=1$. Снова заметим, что $\|g_3\| \neq 0$, так как g_3 есть линейная комбинация элементов f_3, φ_2 и φ_1, или, учитывая, что φ_2 и φ_1 выражаются линейно через f_2 и f_1, линейная комбинация элементов f_3, f_2, f_1, в которой не все коэффициенты равны нулю, и поэтому не равная нулю.

Продолжая так далее, мы придем к ортонормальной системе $\{\varphi_n\}$ и так как φ_n есть линейная комбинация элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и, обратно, f_n линейно выражается через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, то линейные многообразия, порождаемые этими двумя системами, совпадают. Теорема доказана.

Замыкание линейного многообразия $L(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$, порожденного системой $\{f_n\}$, называется подпространством, порождаемым этой системой. Из предыдущей теоремы вытекает, что любую конечную или счетную линейно независимую систему можно заменить ортонормальной системой, порождающей то же подпространство.

Пример. Система $1, x, x^2, \ldots, x^n$ является линейно независимой в пространстве $L_2(-1, 1)$ (и в пространстве $C(-1, 1)$). Ортогонализируя эту систему с помощью процесса Шмидта, мы приходим к системе так называемых *полиномов Лежандра*:

$$P_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad P_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x,\quad P_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\,(3x^2-1),\ \ldots$$

Если подпространство $L(\varphi_i)$, порождаемое ортонормальной системой $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, совпадает со всем пространством $L_2(a, b)$, то система $\{\varphi_n\}$ называется *полной*. Таким образом, если $\{\varphi_n\}$ полная система, то для любого элемента $f\in L_2(a, b)$ и любого $\varepsilon>0$ найдется линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i$ такая, что

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\right\|<\varepsilon.$$

Полезно заметить, что линейное многообразие, порождаемое конечной ортонормальной системой, всегда замкнуто и, следовательно, является подпространством. Доказывается это следующим образом.

Пусть $f_n\in L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$, $n=1, 2, \ldots$, и $f_n\Rightarrow f_0$. Обозначим через $c_i^{(n)}$ коэффициенты разложения элемента f_n по системе $\{\varphi_i\}$, $i=1, 2, \ldots, k$, т. е. числа $c_i^{(n)}=(f_n, \varphi_i)$, и через $c_i^{(0)}$ аналогичные числа для элемента f_0. Из непрерывности скалярного произведения следует

$$c_i^{(n)}=(f_n, \varphi_i)\to(f_0, \varphi_i)=c_i^{(0)},\quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Рассмотрим элемент $f_0^*=\sum\limits_{i=0}^{k}c_i^{(0)}\varphi_i$. Этот элемент принадлежит линейному многообразию $L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$, и, кроме того,

$$\|f_n-f_0^*\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{k}(c_i^{(n)}-c_i^{(0)})\varphi_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{k}(c_i^{(n)}-c_i^{(0)})^2\to 0,$$

т. е. $f_n \Rightarrow f_0^*$. В силу единственности предела $f_0^* = f_0$, откуда следует, что $f_0 \in L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$, и замкнутость этого линейного многообразия доказана.

Упражнения. 1. Дана конечная линейно независимая система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ элементов пространства $L_2(a, b)$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — система, полученная ортогонализацией $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Найти формулы, выражающие φ_n через $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и, обратно, f_n через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

2. Определитель $D_n = |(f_i, f_j)|_{i,\, j=1, 2, \ldots, n}$ называется *определителем Грамма*. Доказать, что для того, чтобы система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы $D_n \neq 0$.

§ 4. Ряды Фурье по ортонормальным системам

Пусть $\{\varphi_i\}$ — ортонормальная система в пространстве $L_2(a, b)$ и f — произвольный элемент этого пространства. Числа $c_i = (f, \varphi_i)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{\varphi_i\}$, а формально написанный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$ — *рядом Фурье* этого элемента. Мы покажем, что ряд Фурье для произвольного элемента $f \in L_2(a, b)$ всегда сходится в смысле сходимости по норме в пространстве $L_2(a, b)$. Для этого установим предварительно одно важное неравенство, называемое неравенством Бесселя.

Имеем $\left\| f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \right\|^2 = \left(f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i,\ f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) \geqslant 0.$

Раскрывая скалярное произведение с учетом ортонормальности системы $\{\varphi_i\}$, получим

$$(f, f) - \sum_{i=1}^{n} c_i(\varphi_i, f) - \sum_{i=1}^{n} c_i(f, \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geqslant 0.$$

Но $(\varphi_i, f) = (f, \varphi_i) = c_i$, и предыдущее неравенство дает

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Так как это верно для любого натурального n, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \|f\|^2. \qquad (1)$$

Это и есть *неравенство Бесселя*.

Отметим, что из наших вычислений вытекает равенство

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2, \tag{2}$$

которым мы неоднократно воспользуемся в дальнейшем.

Мы предполагали выше, что ортонормальная система бесконечна. Само собой разумеется, что неравенство Бесселя верно и для случая конечной ортонормальной системы.

Теперь нетрудно доказать сходимость в среднем ряда Фурье для функции с интегрируемым квадратом. Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье: $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$. Имеем

$$\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i \varphi_i \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i \varphi_i, \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i \varphi_i \right) = \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i^2.$$

Так как в силу неравенства Бесселя ряд из квадратов коэффициентов Фурье сходится, то $\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i^2 \to 0$ при $n \to \infty$, $p > 0$. Но это означает, что последовательность $\{s_n\}$ сходится в себе, а так как пространство $L_2(a, b)$ полное, то существует $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, который и будет суммой ряда Фурье.

Легко усмотреть, что в общем случае сумма ряда Фурье не совпадает с той функцией, для которой этот ряд построен. Пусть, например, дана некоторая ортонормальная система $\{\varphi_i\}$. Рассмотрим новую ортонормальную систему

$$\psi_1 = \varphi_2, \ \psi_2 = \varphi_3, \ \ldots, \ \psi_n = \varphi_{n+1}, \ \ldots,$$

а в качестве элемента f возьмем φ_1. Тогда коэффициентами Фурье этого элемента по системе $\{\psi_i\}$ будут

$$c_i = (f, \psi_i) = (\varphi_1, \varphi_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

следовательно,

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i = 0 \neq f = \varphi_1.$$

Согласно определению подпространства, порождаемого ортонормальной системой, сумма ряда Фурье принадлежит этому подпространству:

$$s=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i=\lim \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \in L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots).$$

Покажем, что разность $f-s$, где f — элемент, для которого ряд Фурье построен, а s — сумма этого ряда, ортогональна любому элементу на $L(\varphi_i)$. Прежде всего разность $f-s$ ортогональна любому элементу φ_j. В самом деле,

$$(f-s, \varphi_j)=(f, \varphi_j)-(s, \varphi_j)=c_j-\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i, \varphi_j\right)=$$
$$=c_j-\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\varphi_i, \varphi_j)=c_j-c_j=0. \qquad (3)$$

Здесь мы переменили порядок суммирования и взятия скалярного произведения, воспользовавшись непрерывностью последнего. Далее,

$$\left(f-s, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(f-s, \varphi_j)=0,$$

т. е. разность $f-s$ ортогональна произвольной линейной комбинации элементов рассматриваемой ортонормальной системы. Но тогда опять же в силу непрерывности скалярного произведения эта разность ортогональна всем пределам последовательностей таких линейных комбинаций, т. е. $f-s$ ортогональна любому элементу подпространства $L(\varphi_j)$. Говорят также, что $f-s$ *ортогональна подпространству* $L(\varphi_i)$ и пишут $f-s \perp L(\varphi_i)$.

Если ортонормальная система полная, т. е. $L(\varphi_i)=L_2(a, b)$, то разность $f-s$ ортогональна любому элементу пространства, в частности самой себе:

$$(f-s, f-s)=\|f-s\|^2=0.$$

Это значит, что $s=f$, и ряд Фурье, построенный для элемента f, сходится к самому элементу.

Сумма ряда Фурье для элемента f по произвольной ортонормальной системе называется *проекцией* элемента f *на подпространство* этой системы. Если система полная, то проекция совпадает с самим элементом. Если же система не полная, то любой элемент $f \in L_2(a, b)$ можно представить в виде суммы

$$f = s + r,$$

где s — проекция элемента f на подпространство $L(\varphi_i)$, а r — элемент, ортогональный этому подпространству.

Равенства (3) показывают, что сумма s ряда Фурье имеет те же коэффициенты Фурье, что и элемент f, для которого рассматриваемый ряд построен. Поэтому, применяя к сумме s равенство (2), получим $\left\| s - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \right\|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$.

Так как $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i = s_n \Rightarrow s$ при $n \to \infty$, то предыдущее равенство в пределе дает

$$\|s\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 0. \tag{4}$$

Таким образом, сумма квадратов всех коэффициентов Фурье элемента f по системе $\{\varphi_i\}$ равна квадрату нормы проекции элемента на подпространство, порождаемое этой ортонормальной системой.

Введем еще одно понятие. Ортонормальная система называется *замкнутой*, если не существует элемента, отличного от нулевого и ортогонального всем элементам этой системы.

Предположим, что система $\{\varphi_i\}$ не полная, т. е. $L(\varphi_i) \neq L_2(a, b)$. Возьмем элемент f, не принадлежащий $L(\varphi_i)$. Пусть $f_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$, где $c_i = (f, \varphi_i)$. Тогда $f_0 \neq f$ и $f = f_0 + r$, где $r \neq 0$ и $r \perp L(\varphi_i)$. Но это значит, что система $\{\varphi_i\}$ не замкнутая.

Предположим теперь, что система $\{\varphi_i\}$ полная. Тогда для любого $f \in L_2(a, b)$ $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$. Если элемент f ортогонален всем элементам φ_i, то $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, в силу предыдущего равенства $f = 0$. Но это означает, что система $\{\varphi_i\}$ замкнутая.

Итак, понятия полноты ортонормальной системы и ее замкнутости в пространстве $L_2(a, b)$ эквивалентны. Критерием замкнутости или, что то же, полноты системы является следующее *условие Парсеваля — Стеклова: для того чтобы ортонормальная система $\{\varphi_i\}$ была замкнутой, необходимо и* *достаточно, чтобы для любого элемента $f \in L_2(a, b)$ выполнялось равенство*

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2, \tag{5}$$

где $c_i = (f, \varphi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

В самом деле, если система полная, то сумма s ряда Фурье совпадает с элементом f, для которого ряд построен, а тогда равенство (4) переходит в равенство Парсеваля—Стеклова (5).

Если, напротив, равенство (5) выполняется и $f \perp \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и из (5) следует, что $\|f\| = 0$, откуда $f = 0$, и система $\{\varphi_i\}$ замкнутая.

Пусть дана произвольная ортонормальная система $\{\varphi_i\}$. Если для некоторого элемента $f \in L_2(a, b)$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2, \quad c_i = (f, \varphi_i),$$

то элемент f принадлежит подпространству $L(\varphi_i)$, порождаемому данной системой. Действительно,

$$\|f - s\|^2 = \lim_n \|f - s_n\|^2 = \lim_n \left(\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right) = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 0,$$

откуда $f = s \in L(\varphi_i)$. Верно и обратное, т. е. $f \in L(\varphi_i)$ влечет за собой $\|f\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2$.

В самом деле, $f = s + r$, $s \in L(\varphi_i)$, $r \perp L(\varphi_i)$. Но, с другой стороны, $r = f - s$, и как разность элементов, принадлежащих подпространству $L(\varphi_i)$, принадлежит тому же подпространству. Итак, $r \in L(\varphi_i)$ и $r \perp L(\varphi_i)$, что возможно лишь, если $r = 0$. Поэтому $f = s$, а тогда (4) дает требуемое равенство: $\|f\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2$.

Заметим, что полная ортонормальная система в $L_2(a, b)$ обязательно бесконечна. Если предположить, что существует конечная полная ортонормальная система в $L_2(a, b)$, то любой элемент $f \in L_2(a, b)$ должен однозначно представляться в виде

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \quad c_i = (f, \varphi_i), \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}.$$

Поэтому элементы $f \in L_2(a, b)$ можно рассматривать как n-мерные векторы в евклидовом пространстве (подробнее об этом мы скажем ниже). Но каждые $(n+1)$ векторов n-мерного евклидова пространства линейно зависимы. Поэтому должны быть линейно зависимы и любые $(n+1)$ элементов пространства $L_2(a, b)$. Это, однако невозможно, потому что, например, $1, x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ линейно независимы, так как из равенства $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^{n+1} = 0$ почти всюду по непрерывности следовало бы, что это равенство выполняется всюду, но тогда, как известно,

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{n+1} = 0.$$

Возникает вопрос: существует ли в пространстве $L_2(a, b)$ полная ортонормальная система. Ответ на этот вопрос утвердительный. Пусть, в самом деле, $M = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ — счетное множество, всюду плотное в $L_2(a, b)$. Положим $\varphi_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. Пусть $f_2 = g_2 + h_2$, где g_2 — проекция элемента f_2 на подпространство, порождаемое ортонормальной системой φ_1, а $h_2 \perp L(\varphi_1)$. Если $h_2 \neq 0$, то полагаем $\varphi_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$. Если же $h_2 = 0$, то элемент f_2 принадлежит $L(\varphi_1)$, т. е. пропорционален φ_1; мы его пропускаем и отправляемся от элемента f_{n_2}, который будет являться первым в последовательности $\{f_n\}$, не принадлежащим подпространству $L(\varphi_1)$. Для него имеет место равенство $f_{n_2} = g_{n_2} + h_{n_2}$, $h_{n_2} \neq 0$, и в этом случае полагаем $\varphi_2 = \frac{h_{n_2}}{\|h_{n_2}\|}$. Пусть f_{n_3} — первый из элементов последовательности $\{f_n\}$, не принадлежащий подпространству $L(\varphi_1, \varphi_2)$ и $f_{n_3} = g_{n_3} + h_{n_3}$. Полагаем $\varphi_3 = \frac{h_{n_3}}{\|h_{n_3}\|}$ и т. д. Читатель без труда убедится, что из построения системы $\{\varphi_i\}$ следует равенство

$$L(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) = L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots),$$

а так как $M = \{f_n\}$ всюду плотно в $L_2(a, b)$, то

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = L(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) = L_2(a, b),$$

т. е. система $\{\varphi_i\}$ полная.

Для установления полноты ортонормальной системы мы воспользовались следующим простым соображением. Если подпространство $L(\varphi_i)$, порождаемое ортонормальной системой, содержит в себе некоторое всюду плотное в $L_2(a, b)$ множество, то система $\{\varphi_i\}$ полная.

Из этого же соображения следует, в частности, полнота тригонометрической системы, так как линейными комбинациями этой системы (отрезками ряда Фурье) можно сколь угодно точно в смысле метрики $C(a, b)$, а тем более в смысле метрики $L_2(a, b)$, аппроксимировать любой многочлен, т. е. множество всех многочленов $P \subset L(\varphi_i)$, где

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \varphi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi(x-a)}{b-a},$$

$$\varphi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi(x-a)}{b-a},$$

$$\varphi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{4\pi(x-a)}{b-a},$$

$$\varphi_4(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{4\pi(x-a)}{b-a}, \ \ldots,$$

а P, как указано выше, лежит всюду плотно в пространстве $L_2(a, b)$.

Упражнения. 1. Пусть $f(x)$, $g(x) \in L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$, $c_i=(f, \varphi_i)$, $d_i=(g, \varphi_i)$, $i=1, 2, \ldots$ Показать, что $(f, g)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i d_i$.

2. Доказать, что условием замкнутости системы $\{\varphi_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, является выполнение равенства $(f, g)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i d_i$ для любых двух элементов f, $g \in L_2(a, b)$.

3. Доказать, что любая ортонормальная система $\{\varphi_i\} \subset L_2(a, b)$ не более чем счетна.

4. Пусть $f \in L_2(a, b)$ и $\{\varphi_i\}$, $i=1, 2, \ldots$ — произвольная ортонормальная система в этом пространстве. Показать, что величина $\left\| f-\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i \right\|$ принимает наименьшее значение, когда в качестве α_i, $i=1, 2, \ldots, n$ взяты коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\varphi_i\}$.

5. Пусть $x \overline{\in} L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$. Чему равно расстояние $\rho(x, L)=\inf\limits_{y \in L} \rho(x, y)$?

ГЛАВА VII
ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

§ 1. Простейшие свойства монотонных функций

Как мы видели в главе V, класс интегрируемых функций, особенно, если интеграл понимать в смысле Лебега, достаточно широк. Так, например, интегрируемой является любая ограниченная измеримая функция. В этой главе мы рассмотрим некоторые классы функций, имеющих производные по крайней мере почти всюду. Мы начнем с рассмотрения функций, монотонных на отрезке $[a, b]$. При этом монотонность мы понимаем в широком смысле, так что, например, $f(x)$ *монотонно возрастает* на $[a, b]$, если из $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in [a, b]$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Заметим еще, что если $f(x)$ монотонно убывает, то $-f(x)$ монотонно возрастает.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, то она может иметь на нем лишь точки разрыва первого рода, причем множество этих точек не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть x_0 — точка разрыва монотонно возрастающей функции $f(x)$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0 слева: $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$ (если x_0 совпадает с a, то берем $x_n = a$ для любых n). В силу монотонности функции $f(x_n) \leqslant f(x_0)$, и потому существует $l = \sup\limits_n f(x_n)$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней границы найдется такой номер n', что $f(x_{n'}) > l - \varepsilon$. Положив $\delta = x_0 - x_{n'}$, выберем n_0 так, чтобы $|x_n - x_0| < \delta$ при $n \geqslant n_0$. Тогда $x_n > x_{n'}$ при $n \geqslant n_0$, и потому

$$f(x_n) \geqslant f(x_{n'}) > l - \varepsilon.$$

Так как всегда $f(x_n) \leqslant l$, то получаем, что при $n \geqslant n_0$

$$l - \varepsilon < f(x_n) \leqslant l,$$

т. е. что $f(x_n) \to l$. Следовательно, существует

$$\lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n) = f(x_0 - 0).$$

Аналогично доказывается, что существует

$$\lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n > x_0}} f(x_n) = f(x_0 + 0).$$

Будем обозначать в дальнейшем через $\omega(f, x_0)$ скачок функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\omega(f, x_0) = f(x+0) - f(x_0 - 0).$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — точки разрыва функции $f(x)$ (среди них могут быть и концы отрезка). Введем еще точки x_i^- и x_i^+ такие, что

$$a \leqslant x_1^- \leqslant x_1 < x_1^+ < x_2^- < x_2 < x_2^+ < \ldots < x_k^- < x_k \leqslant x_k^+ \leqslant b$$

(если $x_1 = a$, то и x_1^- будет равным a). Ясно, что сумма приращений функции на отрезках $[x_i^-, x_i^+]$ не превзойдет приращения $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^{k} [f(x_i^+) - f(x_i^-)] \leqslant f(b) - f(a).$$

Устремляя x_i^- и x_i^+ к x_i и переходя к пределу в предыдущем неравенстве, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(f, x_i) \leqslant f(b) - f(a). \qquad (1)$$

Рассмотрим точки разрыва, скачок функции в которых больше 1. Из (1) следует, что таких точек конечное число. Занумеруем их:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}.$$

Рассмотрим теперь те точки разрыва, скачок функции в которых меньше или равен единице, но больше 1/2. Их снова конечное число, и мы можем их перенумеровать:

$$x_{n_{1+1}}, x_{n_{1+2}}, \ldots, x_{n_2}.$$

Продолжая так далее, мы убедимся, что точек разрыва конечное или счетное число. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Всякая монотонно возрастающая на отрезке* $[a, b]$ *функция может быть представлена в виде суммы двух монотонно возрастающих функций, из которых одна непрерывна (вторая функция кусочно-постоянна, если* $f(x)$ *имеет конечное число точек разрыва).*

Доказательство. Положим $f_r(x) = \sum\limits_{x_i<x} \omega(f, x_i)$ и $f_0(x) = f(x) - f_r(x)$, откуда $f(x) = f_0(x) + f_r(x)$. Здесь x_1, x_2, ..., x_i, ... — точки разрыва $f(x)$. Очевидно, что $f_r(x)$ монотонна, и достаточно показать, что $f_0(x)$ — непрерывная монотонная функция.

Рассмотрим произвольную внутреннюю точку x отрезка $[a, b]$ и интервал $(x-h, x+h)$, содержащий эту точку. Заметим, что формула (1) остается справедливой, если в левой ее части стоит сумма, распространенная на все точки разрыва $x_i \in [a, b]$, что легко получается с помощью предельного перехода, и что она применима к любой части этого отрезка. Имеем поэтому

$$f_0(x+h) - f_0(x-h) = [f(x+h) - f_r(x+h)] - [f(x-h) - f_r(x-h)] = f(x+h) - f(x-h) - \sum_{x-h\leqslant x_i<x+h} \omega(f, x_i) \geqslant 0. \qquad (2)$$

В силу формулы (1)

$$0 \leqslant f_r(x+h) - f_r(x-h) = \sum_{x-h\leqslant x_i<x+h} \omega(f, x_i) \leqslant f(x+h) - f(x-h), \qquad (3)$$

откуда следует, что если x — точка непрерывности $f(x)$, то x есть также точка непрерывности функции $f_r(x)$, ибо при стремлении правой части неравенства (3) к нулю, левая тоже стремится к нулю. Но тогда $f_0(x) = f(x) - f_r(x)$ непрерывна в точке x.

Пусть теперь x — точка разрыва функции $f(x)$ со скачком $\omega(f, x)$. Переходя в неравенстве (3) к пределу при $h \to 0$, получим

$$\omega(f_r, x) \leqslant \omega(f, x). \qquad (4)$$

С другой стороны, x есть одна из точек x_i, лежащих между $x-h$ и $x+h$, поэтому

$$\overline{\omega}(f, x) \leqslant \sum_{x-h \leqslant x_i < x+h} \omega(f, x) = f_r(x+h) - f_r(x-h),$$

откуда, переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$\omega(f, x) \leqslant \omega(f_r, x). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\omega(f, x) = \omega(f_r, x)$. Но тогда согласно (2)

$$\omega(f_0, x) = \omega(f, x) - \omega(f_r, x) = 0,$$

т. е. $f_0(x)$ непрерывна и в этой точке.

Из формулы (1), примененной к $[x', x''] \subset [a, b]$, следует также, что

$$f_r(x'') - f_r(x') \leqslant f(x'') - f(x'),$$

откуда

$$f_0(x') = f(x') - f_r(x') \leqslant f(x'') - f_r(x'') = f_0(x''),$$

что и доказывает монотонность $f_0(x)$.

Упражнения. 1. Пусть $p(t)$ — положительная при $t > 0$ непрерывная справа при $t \geqslant 0$ неубывающая функция, причем $p(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = \infty$. Положим $q(s) = \sup\limits_{p(t) \leqslant s} t$. Доказать, что $q(s)$ обладает теми же свойствами, что и $p(t)$.

2. Функция $f(x)$, определенная на $(0, \infty)$, называется *выпуклой* на этом интервале, если $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для любых x_1, x_2, $0 < x_1$, $x_2 < \infty$. Показать, что если производная $f'(x)$ существует, то она — неубывающая функция.

§ 2. Дифференциальные свойства монотонных функций

Для того чтобы исследовать вопрос о дифференцировании монотонных функций, нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма (Серпинского). *Пусть на числовой прямой дано ограниченное множество E, и известно, что каждая точка x этого множества является левым концом одного или многих интервалов $(x, x+h)$ из некоторой системы S таких интервалов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ из S можно выделить конечную подсистему S_0 попарно неперекрываю-*

щихся интервалов такую, что часть E' множества E, покрываемая этой подсистемой, будет отличаться от E на множество с внешней мерой, меньшей чем ε:

$$\mu^* E' > \mu^* E - \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через E_n множество тех точек $x \in E$, для которых существует интервал $(x, x+h)$ длины $h > \frac{1}{n}$. Тогда $E_n \subset E_{n+1}$, и ясно, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_n E_n.$$

Но, с другой стороны, $E_n \subset E$ для любого n, и потому

$$\lim_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E,$$

откуда

$$E = \lim_n E_n.$$

По лемме 5 § 3 гл. V $\mu^* E = \lim_n \mu^* E_n$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\mu^* E_n > \mu^* E - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Фиксируем такое n. Пусть $a_1 = \inf E_n$, $b_1 = \sup E_n$ и $l = b_1 - a_1$. Возьмем произвольное число $\eta > 0$. В множестве E_n существует точка x_1 такая, что $a_1 \leqslant x_1 < a_1 + \eta$. Точке x_1 соотнесем интервал $(x_1, x_1 + h_1)$ длины $h_1 > \frac{1}{n}$. Если правее точки $x_1 + h_1$ нет точек множества E_n, то построение закончено. Если же такие точки есть, то пусть

$$a_2 = \inf_{x \in E_n,\ x > x_1 + h_1} x.$$

Существует точка x_2 такая, что $a_2 \leqslant x_2 < x_2 + \eta$, и этой точке можно соотнести интервал $(x_2, x_2 + h_2)$, причем $h_2 > \frac{1}{n}$. Если правее $x_2 + h_2$ нет точек множества E_n, построение закончено, в противном случае положим $a_3 = \inf\limits_{x \in E_n,\ x > x_2 + h_2} x$ и т. д.

Нетрудно видеть, что этот процесс оборвется после конечного числа шагов. В самом деле, после каждого шага мы продвигаемся вправо от точки a_1 на расстояние, равное по крайней мере $\frac{1}{n}$, и достаточно взять число шагов N удовлетворяющим неравенству $N\frac{1}{n}>l$, чтобы процесс оборвался.

Пусть N — наименьшее такое число, т. е. $(N-1)\frac{1}{n}\leqslant l$, откуда $N\leqslant nl+1$. Возьмем систему S_0 интервалов

$$(x_1,\ x_1+h_1),\ (x_2,\ x_2+h_2),\ \ldots,\ (x_N,\ x_N+h_N). \qquad (A)$$

Эти интервалы выделены из системы S и не перекрываются. Пусть E' — часть множества E_n, попавшая в эти интервалы. Чтобы оценить меру E', рассмотрим наряду с системой S_0 еще систему T_0 интервалов:

$$(x_1-\eta,\ x_1),\ (x_2-\eta,\ x_2),\ \ldots,\ (x_N-\eta,\ x_N). \qquad (B)$$

Если точка x_0 множества E_n, отличная от $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_N$ не попала в интервалы системы (A), то x_0 лежит в одном из полуинтервалов

$$[a_1,\ x_1),\ [a_2,\ x_2),\ \ldots,\ [a_N,\ x_N).$$

Но эти полуинтервалы покрываются интервалами системы (B) и потому

$$E_n\subset\left[\bigcup_{i=1}^{N}(x_i,\ x_i+h_i)\right]\cup\left[\bigcup_{i=1}^{N}(x_i-\eta,\ x_i)\right]=S_0+T_0.$$

Следовательно,

$$E_n=(E_n\cap S_0)\cup(E_n\cap T_0),$$

и потому

$$\mu^* E_n\leqslant\mu^*(E_n\cap S_0)+\mu^*(E_n\cap T_0).$$

Далее,

$$\mu^*(E_n\cap T_0)\leqslant\mu T_0=\sum_{i=1}^{N}\mu(x_i-\eta,\ x_i)=\eta N=\eta(nl+1).$$

Поэтому, если взять $\eta<\frac{\varepsilon}{2(nl+1)}$, то $\mu^*(E_n\cap T_0)<\frac{\varepsilon}{2}$, откуда

$$\mu^* E_n<\mu(E_n\cap S_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $E_n \cap S_0 = E'$, мы получаем, что

$$\mu^* E' > \mu^* E_n - \frac{\varepsilon}{2} > \mu^* E - \varepsilon,$$

и лемма доказана.

Замечания. 1. Если в условиях леммы дополнительно предположить, что каждая точка $x \in E$ является левым концом интервала $(x, x+h) \in S$ сколь угодно малой длины, то подсистему S_0 можно выбрать так, чтобы

$$\mu S_0 < \mu^* E + \varepsilon.$$

В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем открытое множество $G \supset E$ такое, что $\mu G < \mu^* E + \varepsilon$. Так как каждая точка $x \subset E$ войдет в G вместе с некоторой окрестностью, то при достаточно малых h в G вместе с x попадет и интервал $(x, x+h)$. Обозначим через S' интервалы системы S, попавшие в G. Как видно из только что сказанного, попрежнему для любого $x \in E$ существует $(x, x+h) \in S'$, поэтому, отправляясь от S' вместо S, мы придем, как и выше, к системе S_0 с прежними свойствами. Так как, кроме того, $S_0 \subset G$ и интервалы системы S_0 не перекрываются, то

$$\mu S_0 \leqslant \mu G < \mu^* E + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

2. В условиях дополнения 1 можно считать, что интервалы системы S_0 содержатся в наперед заданном открытом множестве $H \supset E$. Для этого в рассуждениях дополнения 1 надо вместо множества G рассматривать множество $G_0 = H \cap G$.

3. Можно, наконец, рассмотреть случай, когда точки $x \in E$ являются не левыми, а правыми концами интервалов $(x-h, x)$ системы S. Доказательство аналогично.

Введем теперь понятие о производных числах Дини. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и x — внутренняя точка этого отрезка. Отношение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

при $x+h \in [a, b]$, $h \to 0$ может и не стремиться ни к какому пределу, но всегда существуют конечные или бесконечные верхние и нижние пределы:

$$\varliminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\varliminf_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

которые называются соответственно *правым нижним, правым верхним, левым нижним и левым верхним производным числом.* Если все четыре производных числа совпадают, то в точке x существует обычная производная. Если

$$\varliminf_{h\to 0,\ h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varlimsup_{h\to 0,\ h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

то существует правая производная $f'_+(x)$.

Производные числа обычно обозначают $D_+f(x)$, $D^+f(x)$, $D_-f(x)$ и $D^-f(x)$, и предыдущее равенство можно записать в виде

$$f'_+(x) = D^+f(x) = D_+f(x).$$

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

Очевидно, имеем

$$D_+f(x)_{x=0} = -1, \qquad D^+f(x)_{x=0} = 1,$$

$$D_-f(x)_{x=0} = D^-f(x)_{x=0} = f'_-(x) = 0.$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, то она имеет почти всюду на этом отрезке конечную или бесконечную правую производную.*

Доказательство. Обозначим через $E_{r',r''}$, где r' и r'' рациональны, $r' < r''$, множество точек отрезка $[a, b]$, в которых

$$D_+f(x) < r' < r'' < D^+f(x),$$

и через E множество точек отрезка $[a, b]$, в которых $D^+f(x) \neq D_+f(x)$. Легко проверить, что

$$E = \bigcup E_{r',r''},$$

где сумма множеств берется по возможным парам рациональных чисел (r', r''), $r' < r''$. Так как таких пар счетное множество, то

$$\mu^*(E) \leqslant \sum \mu^*(E_{r', r''}),$$

и поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что $\mu^*(E_{r', r''}) = 0$.

Допустим противное, т. е. что для некоторой пары рациональных чисел r' и r'' имеем $\mu^*(E_{r', r''}) = \alpha > 0$. В силу определения множества $E_{r', r''}$ для $x \in E_{r', r''}$

$$\varliminf_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < r',$$

следовательно, каждая точка $x \in E_{r', r''}$ будет левым концом сколь угодно малого интервала $(x, x+h)$, для которого $f(x+h) - f(x) < hr'$.

Мы находимся в условиях первого дополнения к лемме Серпинского, и потому найдется конечная система $(x_1, x_1 + h_1)$, $(x_2, x_2 + h_2), \ldots, (x_n, x_n + h_n)$ попарно неперекрывающихся интервалов, для которых имеют место неравенства

$$f(x_i + h_i) - f(x_i) < h_i r', \tag{2}$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i < \alpha + \varepsilon$. Суммируя неравенство (2) по i, находим

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i + h_i) - f(x_i)] < \sum_{i=1}^{n} h_i r' < (\alpha + \varepsilon) r'. \tag{3}$$

С другой стороны, так как для $x \in E_{r', r''}$

$$\varlimsup_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > r'',$$

то каждая точка $x \in E_{r', r''}$ есть левый конец интервала сколь угодно малой длины, для которого

$$f(x + h') - f(x) > h'r''.$$

Мы снова находимся в условиях первого дополнения к лемме Серпинского. Возьмем еще в качестве H открытое множество, полученное объединением интервалов $(x_i, x_i + h_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда по второму дополнению к лемме найдется система неперекрывающихся интервалов

$$(x'_1, x'_1 + h'_1), (x'_2, x'_2 + h'_2), \ldots, (x'_m, x'_m + h'_m),$$

содержащихся в H, для которых имеет место неравенство

$$f(x'_j+h'_j)-f(x'_j)>h'_j r'', \tag{4}$$

причем $\sum_{j=1}^{m} h'_j > \alpha - \varepsilon$, так как интервалы $(x'_j,\ x'_j+h'_j)$ покрывают часть E' множества $E_{r',\,r''}$ с внешней мерой, не меньшей этого числа. Суммируя неравенство (4) по j, получим

$$\sum_{j=1}^{m} [f(x'_j+h'_j)-f(x'_j)] > (\alpha-\varepsilon)\, r''. \tag{5}$$

Так как интервалы $(x'_j,\ x'_j+h'_j)$ содержатся в интервалах $(x_i,\ x_i+h_i)$ и функция $f(x)$ монотонно возрастает, то сумма приращений $f(x)$ на интервалах $(x'_j,\ x'_j+h'_j)$, $j=1,\ 2,\dots,\ m$ не превосходит суммы приращений $f(x)$ на интервалах $(x_i,\ x_i+h_i)$, $i=1,\ 2,\dots,\ n$,

$$\sum_{j=1}^{m} [f(x'_j+h'_j)-f(x'_j)] \leqslant \sum_{i=1}^{n} [f(x_i+h_i)-f(x_i)]. \tag{6}$$

Из неравенств (4) — (6) следует

$$(\alpha-\varepsilon)\, r'' < (\alpha+\varepsilon)\, r'.$$

Так как $\varepsilon>0$ выбрано произвольно, то, переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, найдем, что $\alpha r'' \leqslant \alpha r'$, откуда, поскольку $\alpha>0$, вытекает, что $r''\leqslant r'$. Но это невозможно. Итак, $\mu^* E_{r',\,r''}=0$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Функция $f(x)$, монотонно возрастающая на отрезке $[a,\ b]$, имеет на этом отрезке почти всюду левую производную.*

Доказательство аналогично предыдущему.

Теорема 3. *Множество точек, где функция $f(x)$ (не обязательно монотонная) имеет правую и левую производные, и эти производные не равны, не более чем счетно.*

Доказательство. Обозначим через E множество точек отрезка $[a,\ b]$, где $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ существуют, и $f'_+(x)\neq f'_-(x)$. Занумеруем все рациональные числа в последовательность

$$r_1,\ r_2,\dots,\ r_m,\dots,\ r_n,\dots$$

Если $x\in E$ и, например, $f'_+(x)<f'_-(x)$, то найдется рациональное число r_m, такое, что

$$f'_+(x)<r_m<f'_-(x). \tag{7}$$

Пусть m для данного x есть наименьший номер рационального числа с этим свойством. Из определения правой производной и левой части неравенства (7) вытекает, что для всех ξ, достаточно близких к рассматриваемому x и бо́льших чем x, будем иметь

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} < r_m \quad \text{или} \quad f(\xi)-f(x) < r_m(\xi-x).$$

Следовательно, найдется рациональное число $r_n > x$ такое, что предыдущее неравенство имеет место всякий раз, когда $x < \xi < r_n$. Пусть r_n — рациональное число с наименьшим для данного x номером, обладающее этим свойством. Итак,

$$f(\xi)-f(x) < r_m(\xi-x), \text{ если } x < \xi < r_n. \tag{8}$$

Аналогично, для всех η, меньших чем x и достаточно близких к x,

$$\frac{f(\eta)-f(x)}{\eta-x} > r_m \quad \text{или} \quad f(\eta)-f(x) < r_m(\eta-x),$$

и снова для данного x найдется рациональное число $r_p < x$ с наименьшим номером p такое, что

$$f(\eta)-f(x) < r_m(\eta-x), \text{ если } r_p < \eta < x. \tag{9}$$

Таким образом, каждая точка $x \in E$, в которой $f'_+(x) < f'_-(x)$, однозначно определяет тройку натуральных чисел (m, n, p). Покажем, что разным таким точкам соответствуют различные тройки чисел. Предположим противное, т. е. что двум разным точкам x_1, x_2, $x_1 < x_2$ соответствует одна и та же тройка чисел (m, n, p). Тогда, прежде всего, $r_p < x_1$, $x_2 < r_n$. Возьмем неравенство (8) и положим в нем $x = x_1$ и $\xi = x_2$, что можно сделать, так как условие $x_1 < x_2 < r_n$ выполняется. Получим

$$f(x_2)-f(x_1) < r_m(x_2-x_1). \tag{10}$$

Возьмем теперь неравенство (9) и положим в нем $\eta = x_1$, $x = x_2$, что также можно сделать. Получим

$$f(x_1)-f(x_2) < r_m(x_1-x_2),$$

или, умножая это неравенство на (-1),

$$r_m(x_2-x_1) < f(x_2)-f(x_1). \tag{11}$$

Объединяя (10) и (11), будем иметь

$$r_m(x_2-x_1)<r_m(x_2-x_1),$$

что невозможно, и требуемое доказано.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками $x\in E$, для которых $f'_+(x)<f'_-(x)$, и частью множества всех троек натуральных чисел. Так как множество всех троек натуральных чисел счетно, то множество $E\{x,\ f'_+(x)<f'_-(x)\}$ не более чем счетно.

Подобным же образом доказывается, что множество $E\{x,\ f'_-(x)<f'_+(x)\}$ не более чем счетно. Но тогда и все множество E не более чем счетно, и теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Всякая функция $f(x)$, монотонно возрастающая на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке почти всюду интегрируемую производную $f'(x)$, причем*

$$\int_a^b f'(x)\,dx\leqslant f(b)-f(a). \tag{12}$$

Доказательство. Существование производной непосредственно следует из теорем 1, 2 и 3. Докажем ее интегрируемость.

Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке $[b, b+1]$, полагая ее на нем равной $f(b)$. Для любой точки x отрезка $[a, b]$, где $f'(x)$ существует, мы можем написать

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Так как функции $f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$, очевидно, измеримы на $[a, b]$, то $f'(x)$, как предел последовательности измеримых функций, тоже измерима. Кроме того, вследствие монотонного возрастания $f(x)$ все функции $f_n(x)$, и, следовательно, $f'(x)$ неотрицательны. Поэтому, применяя лемму Фату, будем иметь

$$\int_a^b f'(x)\,dx\leqslant\sup_n\int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{13}$$

Преобразуем $\int_a^b f_n(x)\,dx$, учитывая, что в силу монотонности $f(x)$ эта функция, а значит, и $f_n(x)$ интегрируемы по Риману, следовательно, рассматриваемый интеграл есть интеграл Римана. Имеем

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = n\int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx =$$

$$= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(z)\,dz - \int_a^b f(x)\,dx\right] = n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(z)\,dz - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(z)\,dz\right] \leqslant$$

$$\leqslant n\left[f(b)\frac{1}{n} - f(a)\frac{1}{n}\right] = f(b)-f(a). \qquad (14)$$

При получении последнего неравенства мы снова воспользовались монотонностью функции $f(x)$. Из (14) следует

$$\sup_n \int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a),$$

откуда в силу (13)

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a),$$

и неравенство (12), а вместе с тем и интегрируемость $f'(x)$, доказаны.

Из этой теоремы следует, в частности, что $f'(x)$ почти всюду конечна.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли в формуле (12) отбросить знак неравенства и не будет ли для любой монотонной функции всегда иметь место формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a).$$

Следующий пример показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Пример. Пусть P_0 — канторово совершенное множество, точки которого будем записывать в виде $x = x_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots}$, где каждое $i_n=0$ или 2 (§ 2 гл. III). Такой точке поставим в соответствие вещественное число y, которое в двоичной системе записывается в виде

$$y=0,\ \frac{i_1}{2}\frac{i_2}{2}\ldots\frac{i_n}{2}\ldots$$

Таким образом, на канторовом совершенном множестве определена однозначная функция $y=f(x)$.

Пусть $(\alpha, \beta)=u_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — интервал, смежный к P_0. Концы этого интервала принадлежат отрезкам $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}$ и $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 2}$

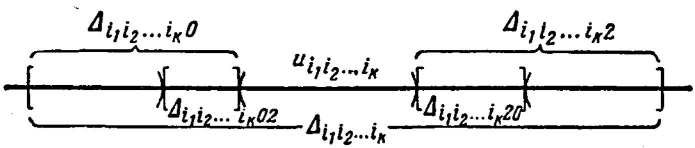

Рис. 7.

соответственно, и потому $\alpha=\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k 022\ldots}$, $\beta=\beta_{i_1 i_2 \ldots i_k 200\ldots}$ (рис. 7).

Согласно предыдущему определению

$$f(\alpha)=0,\ \frac{i_1}{2}\frac{i_2}{2}\ldots\frac{i_k}{2}0111\ldots,$$

$$f(\beta)=0,\ \frac{i_1}{2}\frac{i_2}{2}\ldots\frac{i_k}{2}1000\ldots$$

Но двоичные дроби $0,\frac{i_1}{2}\frac{i_2}{2}\ldots\frac{i_k}{2}0111\ldots$ и $0,\frac{i_1}{2}\frac{i_2}{2}\ldots\frac{i_k}{2}1000\ldots$ равны, т. е. $f(x)$ на концах смежного интервала (α, β) принимает одинаковые значения. Положим $f(x)=f(\alpha)=f(\beta)$ для любой точки $x\in(\alpha, \beta)$. Тем самым функцию $f(x)$, первоначально определенную на P_0, мы доопределили на весь отрезок $[0, 1]$.

Эта функция монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$. Так как на смежных интервалах $f(x)$ постоянна, то достаточно доказать ее возрастание на P_0. Пусть $x'=x'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}<x''=x''_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}$. Предположим, что первые m индексов точек x' и x'' совпадают: $i'_k=i''_k=i_k$, $k=1, 2, \ldots, m$, а $i'_{m+1}\neq i''_{m+1}$.

Но тогда $i'_{m+1}=0$, $i''_{m+1}=2$, следовательно, $f(x')=0,\frac{i_1}{2}\frac{i_2}{2}\dots$ $\dots\frac{i_m}{2}0\frac{i'_{m+2}}{2}\dots$, $f(x'')=0,\frac{i''_1}{2}\frac{i''_2}{2}\dots\frac{i''_m}{2}1\frac{i''_{m+2}}{2}$, откуда $f(x')<$ $<f(x'')$.

Так как рассматриваемая функция постоянна на смежных к P_0 интервалах, то производная ее на этих интервалах равна нулю, т. е. $f'(x)=0$ почти всюду на $[0, 1]$. Поэтому $\int\limits_0^1 f'(x)\,dx=0$, в то же время $f(1)-f(0)=1-0=1$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 f'(x)\,dx<f(1)-f(0).$$

Покажем еще, что $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$ — факт, который нам в дальнейшем будет полезен. Снова, поскольку $f(x)$ постоянна на смежных к P_0 интервалах, достаточно доказать ее непрерывность на P_0.

Пусть

$$x_n=x_{i_1^{(n)}i_2^{(n)}\dots i_k^{(n)}\dots}\to x_0=x_{i_1^{(0)}i_2^{(0)}\dots i_k^{(0)}\dots}.$$

Если m — номер последних совпадающих у x_n и x_0 индексов, то ясно, что $m\to\infty$ при $n\to\infty$. Но тогда и $f(x_n)\to f(x_0)$, так как у двоичных дробей, выражающих $f(x_n)$ и $f(x)$, по мере увеличения n будет неограниченно расти число совпадающих двоичных знаков.

Упражнения. 1. Найти производные числа функции

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x}, \quad x\neq 0,\\ &f(0)=0\end{aligned}\right\}\quad a<b.$$

2. Будет ли верно равенство

$$D_+\{f(x)+g(x)\}=D_+f(x)+D_+g(x)?$$

3. Показать, что если $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и $D^+(f, x)$ не отрицательна в этом интервале, то $f(x)$ не убывает на (a, b).

§ 3. Функции с ограниченной вариацией

Монотонные функции образуют важный класс, но этот класс не замкнут относительно алгебраических операций, т. е. сумма, разность, произведение и частное монотонных функций не обязательно будут монотонными функциями. Например, функция $f(x)=x-x^2$ не будет монотонной на отрезке [0, 1]. Более широкий класс функций, включающий в себя монотонные функции и обладающий тем свойством, что алгебраические операции не выводят за пределы этого класса, образуют так называемые **функции с ограниченной вариацией**. Этот класс функций играет важную роль во многих отделах математики и ее приложений.

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке *ограниченную вариацию*, если найдется такая константа K, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant K.$$

Число $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$, где точная верхняя граница берется по всем возможным разбиениям отрезка $[a, b]$, называется *вариацией функции* $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $\bigvee_a^b(f)$.

Примеры. 1. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$. Тогда для любого разбиения этого отрезка

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(x_{i-1})] = f(b)-f(a).$$

Следовательно, $f(x)$ есть функция с ограниченной вариацией, и ясно, что

$$\bigvee_a^b(f)=f(b)-f(a).$$

2. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{если} \quad x\neq 0, \\ 0\quad, & \text{если} \quad x=0, \end{cases}$$

не будет функцией с ограниченной вариацией на отрезке [0, 1]. Возьмем разбиение отрезка [0, 1] точками $x_0=1$, $x_1=\frac{2}{\pi}$,

$$x_2=\frac{2}{2\pi},\quad x_3=\frac{2}{3\pi},\ldots,\quad x_{2n-1}=\frac{2}{(2n-1)\pi},\quad x_{2n}=0.$$

То, что точки нумеруются справа налево, не играет роли. Замечая, что

$$f(x_{2k}) = \frac{2}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi}{2} = 0 \quad \text{и} \quad f(x_{2k+1}) = \\ = \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{2}{(2k+1)\pi},$$

будем, очевидно, иметь

$$\sum_{i=1}^{2n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \\ + |f(x_3) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{2n-1}) - f(x_{2n})| = \\ = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)\pi} = \\ = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right).$$

Так как с ростом n выражение, стоящее справа в скобках, неограниченно растет, то $\sup\limits_m \sum\limits_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \infty$, и требуемое доказано.

Легко проверить, что если функция имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную производную или, более общо, удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица, то она имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию. Если, например, $|f'(x)| \leqslant K$ на $[a, b]$, то

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |(x_i - x_{i-1}) f'(\xi)| \leqslant \\ \leqslant K \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = K(b-a).$$

Поэтому функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad , & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

имеющая ограниченную производную, будет функцией с ограниченной вариацией.

Лемма. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка отрезка $[a, b]$. Имеем

$$|f(x)| \leqslant |f(x)-f(a)| + |f(a)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(b)-f(x)| + |f(x)-f(a)| + |f(a)| \leqslant$$
$$\leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f) + |f(a)| = K_1,$$

что доказывает наше утверждение.

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение, а если модуль делителя имеет положительную точную нижнюю границу, то и частное двух функций, $f(x)$ и $g(x)$, с ограниченной на $[a, b]$ вариацией есть снова функция с ограниченной на $[a, b]$ вариацией.*

Доказательство. Ограничимся доказательством утверждения теоремы для частного. По условию, $|g(x)| \geqslant \alpha > 0$ всюду на $[a, b]$. Пусть $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — какое-нибудь разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_i)}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(x_i)\,g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})\,g(x_i)|}{|g(x_i)|\,|g(x_{i-1})|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\,|g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \times \right.$$
$$\left. \times |f(x_{i-1})| \right\}.$$

Так как функция с ограниченной вариацией ограничена, то $|f(x_i)| \leqslant K_1$, $|g(x_i)| \leqslant K_2$, а потому

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_i)}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})} \right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f)\,K_2 + \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g)\,K_1 \right\},$$

и требуемое доказано.

Теорема 2. *Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ имеет ограниченную вариацию и на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, причем*

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f) = \mathop{\mathrm{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f).$$

Верно и обратное утверждение.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция с ограниченной на $[a, b]$ вариацией. Возьмем любое разбиение отрезка $[a, c]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c$. Добавляя какие-либо точки деления $x_{m+1} < x_{m+2} < \ldots < x_n = b$ на отрезке $[c, b]$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \\ = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=m+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \quad (1)$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f),$$

и ограниченность вариации $f(x)$ на $[a, c]$ доказана. Так же доказывается ограниченность вариации $f(x)$ на $[c, b]$.

Далее, равенство (1) дает

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=m+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f).$$

Зафиксировав в этом равенстве точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и переходя к верхней грани по всевозможным точкам деления $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f),$$

откуда в свою очередь, варьируя всевозможным образом точки деления $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f). \quad (2)$$

Пусть теперь дано произвольное разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Так как, очевидно, при добавлении новых точек деления сумма $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ может только возрастать, то добавляя в число таких точек $x'=c$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{x_i\leqslant c}|f(x_{i-1})-f(x_i)|+$$
$$+\sum_{x_i>c}|f(x_{i-1})-f(x_i)|\leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^c(f)+\mathop{\mathrm{V}}_c^b(f).$$

Отсюда

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f)=\sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\mathop{\mathrm{V}}_a^c(f)+\mathop{\mathrm{V}}_c^b(f). \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует требуемое равенство.

Доказательство обратной теоремы предоставляем читателю.

Следствие. *Если $f(x)$ есть функция с ограниченной вариацией на отрезке $[a, b]$, то $\mathop{\mathrm{V}}_a^x(f)$, $a\leqslant x\leqslant b$, является монотонно возрастающей функцией от x.*

Это сразу следует из равенства

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^y(f)=\mathop{\mathrm{V}}_a^x(f)+\mathop{\mathrm{V}}_x^y(f), \quad a<x<y,$$

и неотрицательности $\mathop{\mathrm{V}}_x^y(f)$.

Теорема 3. *Всякая функция $f(x)$ с ограниченной на отрезке $[a, b]$ вариацией может быть представлена в виде разности двух функций, монотонно возрастающих на этом отрезке.*

Доказательство. Положим

$$\varphi(x)=\mathop{\mathrm{V}}_a^x(f) \quad \text{и} \quad \psi(x)=\mathop{\mathrm{V}}_a^x(f)-f(x).$$

Тогда $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, $\varphi(x)$ — монотонно возрастает на $[a, b]$, и остается доказать монотонное возрастание на этом отрезке функции $\psi(x)$. Имеем для $y>x$

$$\psi(y)-\psi(x)=\mathop{\mathrm{V}}_a^y(f)-\mathop{\mathrm{V}}_a^x(f)-[f(y)-f(x)]=$$
$$=\mathop{\mathrm{V}}_x^y(f)-[f(y)-f(x)].$$

Но

$$[f(y)-f(x)]\leqslant|f(y)-f(x)|\leqslant\mathop{\mathrm{V}}_x^y(f),$$

потому что $|f(y)-f(x)|$ можно рассматривать как одну из сумм, а именно, соответствующую разбиению $x_0=x$, $x_1=y$

отрезка $[x, y]$, а $\bigvee_x^y(f)$ есть точная верхняя граница всевозможных сумм, соответствующих всевозможным разбиениям отрезка $[x, y]$. Следовательно,

$$\psi(y)-\psi(x)=\bigvee_x^y(f)-[f(y)-f(x)]\geqslant 0,$$

и теорема доказана.

Как разность двух монотонно возрастающих функций, всякая функция $f(x)$ с ограниченной вариацией имеет почти всюду интегрируемую производную $f'(x)$. Точно так же в силу представимости функции с ограниченной вариацией в виде разности двух монотонных функций мы можем разложить любую функцию $f(x)$ с ограниченной вариацией на непрерывную часть $f_0(x)$ и разрывную (кусочно-постоянную, если точек разрыва конечное число) часть $f_r(x)$:

$$f(x)=f_0(x)+f_r(x)$$

(см. теорему 2 § 1).

Наконец, из представления

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ монотонны, вытекает, что всякая функция с ограниченной вариацией может иметь не более чем счетное множество точек разрыва первого рода.

Упражнения. 1. Привести пример функции, имеющей ограниченную вариацию на любом конечном отрезке.

2. Можно ли представить функцию

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}$$

в виде разности двух монотонных функций?

3. При каких соотношениях между α и β, $\alpha, \beta>0$, функция $f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}$, $0<x\leqslant 1$, $f(0)=0$, имеет на $[0, 1]$ ограниченную вариацию?

4. Если $f(x)$ — функция с ограниченной вариацией, непрерывная на $[a, b]$, то будет ли $\bigvee_a^x(f)$ также непрерывна?

5. Если функция $f(x)$ с ограниченной на $[a, b]$ вариацией имеет в некоторой точке $x\in[a, b]$ производную, то следует ли отсюда существование производной у $g(x)=\bigvee_a^x(f)$?

§ 4. Абсолютно непрерывные функции

Мы видели, что если $f(x)$ — монотонная на $[a, b]$ функция, то для любого $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f'(\xi)\,d\xi \leqslant f(x) - f(a),$$

причем знак неравенства не исключается.

Таким образом, монотонную функцию в общем случае нельзя восстановить по почти всюду известной ее производной, используя процесс интегрирования Лебега. Однако существуют функции, для которых формула

$$\int_a^x f'(\xi)\,d\xi = f(x) - f(a)$$

всегда справедлива. Это будут абсолютно непрерывные функции.

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *абсолютно непрерывной* на этом отрезке, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой системы попарно неперекрывающихся интервалов $(x_1, x_1 + h_1)$, $(x_2, x_2 + h_2), \ldots$ $\ldots, (x_n, x_n + h_n)$, расположенной на $[a, b]$ и имеющей сумму длин меньшую, чем δ, сумма абсолютных величин приращений функций на этих интервалах будет меньше, чем ε, т. е. из $\bigcup\limits_{i=1}^{k} (x_i, x_i + h_i) \subset [a, b]$, $(x_i, x_i + h_i) \cap (x_j, x_j + h_j) = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} h_i < \delta$ следует

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_i + h_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Взяв, в частности, $k = 1$, мы будем иметь, что из $x, x + h \in [a, b]$ и $|h| < \delta$ следует, что $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$, так что абсолютно непрерывная функция непрерывна. Обратное утверждение неверно, так как, например, непрерывная функция $f(x)$, построенная в конце § 2, не будет абсолютно непрерывной, в чем можно убедиться следующим образом. Рассмотрим приращение $f(x)$ на интервалах, получающихся из отрезков k-го ранга $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} = [a_{i_1 i_2 \dots i_k}, b_{i_1 i_2 \dots i_k}]$ удалением концевых точек. Сумма длин этих интервалов равна $2^n \cdot \frac{1}{3^n}$ и может быть сделана сколь угодно малой. В то же время, поскольку на смежных интервалах $f(x)$ постоянна, сумма ее приращений на $(a_{i_1 i_2 \dots i_k}, b_{i_1 i_2 \dots i_k})$ равна приращению на всем отрезке $[0, 1]$, т. е. 1.

Нетрудно указать один класс абсолютно непрерывных функций. Это будут функции, имеющие на $[a, b]$ ограниченную производную, или, более общо, удовлетворяющие условию Липшица, ибо, например, во втором случае

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i + h_i) - f(x_i)| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} h_i,$$

где L — константа Липшица, и абсолютная непрерывность $f(x)$ очевидна.

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение, а если делитель не обращается в нуль, то и частное двух функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$, суть функции, абсолютно непрерывные на том же отрезке.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай произведения. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$, $F(x) = f(x)\,g(x)$ и $(x_i, x_i + h_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, — попарно неперекрывающиеся интервалы на отрезке $[a, b]$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{k} |F(x_i + h_i) - F(x_i)| = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i + h_i)\,g(x_i + h_i) - f(x_i)\,g(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(x_i + h_i) - f(x_i)|\,|g(x_i + h_i)| + \sum_{i=1}^{k} |g(x_i + h_i) - g(x_i)|\,|f(x_i)| \leqslant \beta \sum_{i=1}^{k} |f(x_i + h_i) - f(x_i)| + \alpha \sum_{i=1}^{k} |g(x_i + h_i) - g(x_i)|. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = \max\limits_{[a, b]} |f(x)|$ и $\beta = \max\limits_{[a, b]} |g(x)|$.

Если задано произвольное $\varepsilon>0$, то в силу абсолютной непрерывности $f(x)$ и $g(x)$ найдутся такие δ' и δ'', что

$$\sum_{i=1}^{k}|f(x_i+h_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2\beta} \text{ при } \sum_{i=1}^{k}h_i<\delta',$$

$$\sum_{i=1}^{k}|g(x_i+h_i)-g(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2\alpha} \text{ при } \sum_{i=1}^{k}h_i<\delta''.$$

Поэтому, выбрав $\delta=\min(\delta', \delta'')$, мы из неравенства (1) получим

$$\sum_{i=1}^{k}|F(x_i+h_i)-F(x_i)|<\beta\frac{\varepsilon}{2\beta}+\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha}=\varepsilon$$

при $\sum\limits_{i=1}^{k}h_i<\delta$, и абсолютная непрерывность $F(x)$ доказана.

Теорема 2. *Функция $f(x)$, абсолютно непрерывная на $[a, b]$, имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ — число, соответствующее этому ε в определении абсолютно непрерывной функции. Если бы $f(x)$ имела на отрезке $[a, b]$ неограниченную вариацию, то при любом разбиении $[a, b]$ на конечное число частичных отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots$ $\ldots, [x_{n-1}, b]$, в частности, таком, что $\max(x_i-x_{i-1})<\delta$, по крайней мере на одном из этих отрезков, например, на $[x_{i-1}, x_i]$, вариация $f(x)$ была бы бесконечной. Но тогда, разбив подходящим образом $[x_{i-1}, x_i]$ на частичные отрезки $[x_i^{(j)}+h_j, x_i^{(j)}]$, $j=1, 2, \ldots, m$, мы имели бы, что $\sum\limits_{j=1}^{m}h_j<\delta$, в то время как $\sum\limits_{j=1}^{m}|f(x_i^{(j)}+h_j)-f(x_i^{(j)})|$ может быть сколь угодно велико, что противоречит абсолютной непрерывности $f(x)$.

Теорема 3. *Всякая абсолютно непрерывная функция имеет почти всюду интегрируемую производную.*

Доказательство непосредственно следует из предыдущей теоремы и отмеченной выше дифференцируемости функции с ограниченной вариацией.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма:

Лемма. *Если абсолютно непрерывная функция имеет производную почти всюду равную нулю, то она есть тождественная постоянная.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f'(x)=0$ почти всюду на $[a, b]$. Если E $(\mu E=b-a)$ есть множество точек, где $f'(x)=0$, то каждая точка x этого множества является левым концом сколь угодно малого интервала $(x, x+h)$, для которого $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon h$. По дополнению к лемме Серпинского можно выделить конечную систему попарно непересекающихся интервалов

$$(x_1, x_1+h_1), (x_2, x_2+h_2), \ldots, (x_n, x_n+h_n), \qquad (\alpha)$$

которые покрывают множество E, а следовательно, и отрезок $[a, b]$, с точностью до множества с мерой меньшей, чем η.

Введем еще отрезки

$$[x_0+h_0, x_1], [x_1+h_1, x_2], \ldots, [x_n+h_n, x_{n+1}], \qquad (\beta)$$

где положено $x_0+h_0=a$, $x_{n+1}=b$. Системы (α) и (β) покрывают вместе отрезок $[a, b]$, и суммы длин отрезков системы (β) не превосходят η. Имеем

$$|f(b)-f(a)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i+h_i)-f(x_i)| + \sum_{i=1}^{n+1} |f(x_i)-f(x_{i-1}+h_{i-1})|.$$

Оценим каждую сумму в отдельности:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i+h_i)-f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon h_i < \varepsilon(b-a),$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} |f(x_i)-f(x_{i-1}+h_{i-1})| = \omega(\eta),$$

где $\omega(\eta)$ в силу абсолютной непрерывности $f(x)$ стремится к нулю вместе с η. Итак, $|f(b)-f(a)|<\varepsilon(b-a)+\omega(\eta)$, что в силу произвольной малости ε и η дает $f(b)=f(a)$. Заменяя точку b произвольной внутренней точкой x отрезка $[a, b]$, точно так же найдем $f(x)=f(a)$, т. е. $f(x)=\text{const}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь интегралы Лебега от суммируемых функций с переменным верхним пределом, которые для сокращения будем называть *неопределенными интегралами Лебега.*

Теорема 4. *Неопределенный интеграл Лебега есть абсолютно непрерывная функция верхнего предела.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+F(a). \tag{2}$$

В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\left|\int_E f(t)\,dt\right|<\varepsilon$, если $\mu E<\delta$. Положим, что $E=\bigcup_{i=1}^n(x_i, x_i+h_i)$, где $(x_i, x_i+h_i)\subset[a, b]$ и попарно не пересекаются. Тогда

$$\sum_{i=1}^n|F(x_i+h_i)-F(x_i)|=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_i}^{x_i+h_i}f(t)\,dt\right|=$$

$$=\int_{\bigcup_{i=1}^n(x_i, x_i+h_i)}|f(t)\,dt|<\varepsilon,$$

если $\mu\{\bigcup_{i=1}^n(x_i, x_i+h_i)\}=\sum_{i=1}^n h_i<\delta$, а это и означает абсолютную непрерывность функции $F(t)$.

Из доказанной теоремы следует, что $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+$ $+F(a)$ имеет почти всюду на $[a, b]$ производную $F'(x)$.

Теорема 5. *Производная по верхнему пределу неопределенного интеграла Лебега равна почти всюду подынтегральной функции.*

Доказательство. Предположим сначала, что $f(x)$ — ограниченная измеримая функция. Тогда для любой последовательности $h_n\to 0$ будем иметь

$$\left|\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}\right|=\left|\frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n}f(t)\,dt\right|\leqslant K,$$

где $K=\sup_{[a, b]}|f(x)|$. Так как, кроме того, $\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}\to$ $\to F'(x)$ почти всюду (ведь производная $F'(x)$ почти всюду существует), то по теореме Лебега об интегрировании последовательностей (см. § 3 гл. IV)

$$\int_a^x F'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x \frac{1}{h_n}[F(t+h_n)-F(t)]\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{h_n} \int_{a+h_n}^{x+h_n} F(t)\,dt - \frac{1}{h_n} \int_a^x F(t)\,dt \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} \left\{ \int_x^{x+h_n} F(t)\,dt - \int_a^{a+h_n} F(t)\,dt \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{F(x+\theta_1 h_n) - F(a+\theta_2 h_n)\} = F(x) - F(a).$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $F(x)$. Но $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$, откуда

$$\int_a^x \{F'(t) - f(t)\}\,dt = 0. \tag{3}$$

Равенство (3) выполняется для всех интервалов (a, x). Но тогда оно выполняется для любого интервала или отрезка из $[a, b]$, так как

$$\int_{x_1}^{x_2} \{F'(t) - f(t)\}\,dt =$$

$$= \int_a^{x_2} \{F'(t) - f(t)\}\,dt - \int_a^{x_1} \{F'(t) - f(t)\}\,dt = 0,$$

а следовательно, как легко видеть, выполняется и для любого открытого и замкнутого множества, лежащего на $[a, b]$. Отсюда вытекает, что $F'(t) - f(t) = 0$ почти всюду на $[a, b]$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы множество $E \subset [a, b]$ положительной меры, на котором, например, $\{F'(t) - f(t)\} > 0$. Это множество E будет содержать замкнутое множество Φ положительной меры, на котором также $\{F'(t) - f(t)\} > 0$ и потому

$$\int_\Phi \{F'(t) - f(t)\}\,dt > 0,$$

что, как только что сказано, невозможно. Итак,

$$F'(t) = \left(\int_a^x f(t)\,dt + F(a)\right)' = f(t)$$

почти всюду на $[a, b]$, и для случая ограниченной функции наша теорема доказана.

Пусть $f(x)$ — неограниченная неотрицательная интегрируемая функция. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant n, \\ n, & \text{если } f(x) > n. \end{cases}$$

Так как $f(x) - f_n(x) \geqslant 0$, то функция $\int_a^x \{f(t) - f_n(t)\}\,dt$ монотонно возрастает, и поэтому она имеет почти всюду неотрицательную производную $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x [f(t) - f_n(t)]\,dt\right\} \geqslant 0$, или

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f_n(t)\,dt\right\} \geqslant 0. \tag{4}$$

Но $f_n(t)$ — ограниченная функция и, следовательно, по уже доказанному, почти всюду $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f_n(t)\,dt\right\} = f_n(x)$.

Отсюда и из (4) получаем

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\} \geqslant f_n(x),$$

откуда, устремляя n к бесконечности, находим

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\} \geqslant f(x) \tag{5}$$

почти всюду на $[a, b]$.

Интегрируя соотношение (5) по отрезку $[a, b]$, получим

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}\right] dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Так как $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ в силу неотрицательности $f(x)$ монотонно возрастает, то по теореме 4 § 2

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}\right]dx=\int_a^b \varphi'(x)\,dx\leqslant\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b f(t)\,dt. \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает $\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}\right]dx=\int_a^b f(x)\,dx$

или

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}-f(x)\right]dx=0.$$

Так как в силу (5) подынтегральная функция неотрицательна, то отсюда следует, что $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}=f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, и для неотрицательных функций теорема также доказана.

Если $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция, то $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, где $f_+(x)$ и $f_-(x)$ неотрицательны и интегрируемы. Тогда в силу уже доказанного

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x [f_+(t)-f_-(t)]\,dt\right\}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f_+(t)\,dt\right\}-\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f_-(t)\,dt\right\}=f_+(x)-f_-(x)=f(x).$$

То, что в одних случаях мы добавляли к интегралу $F(a)$, а в других нет, не играет роли, и теорема полностью доказана.

Выше мы доказали, что неопределенный интеграл Лебега от интегрируемой функции есть абсолютно непрерывная функция. Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 6. *Всякая абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ есть неопределенный интеграл Лебега от своей производной:*

$$f(x)=\int_a^b f'(t)\,dt+f(a).$$

Доказательство. Рассмотрим разность $\varphi(x)=f(x)-\int\limits_a^x f'(t)\,dt-f(a)$. Эта разность есть абсолютно непрерывная функция. Согласно предыдущей теореме

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_a^x f'(t)\,dt+f(a)\right\}=f'(x)-f'(x)=0$$

почти всюду на $[a, b]$. Но тогда в силу леммы этого параграфа $\varphi(x)\equiv\text{const}$. Так как $\varphi(a)=0$, то $\varphi(x)\equiv 0$, т. е. $f(x)=\int\limits_a^x f'(t)\,dt+f(a)$. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 4 и 6, мы можем сказать, что для того, чтобы функция являлась абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы она была неопределенным интегралом Лебега, или что абсолютная непрерывность есть характеристическое свойство неопределенного интеграла Лебега.

Мы доказали возможность восстановления абсолютно непрерывной функции по почти всюду известной производной этой функции. В случае, если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ не обязательно абсолютно непрерывна, существует всюду и интегрируема по Лебегу, можно также доказать, что $f(x)=\int\limits_a^x f'(t)\,dt+f(a)$. Однако существуют функции, производные которых не интегрируемы. Для восстановления первообразных по таким производным строится процесс интегрирования более общий, чем лебеговский, известный под названием *процесса тотализации Данжуа — Хинчина.*

Упражнения. 1. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, будут ли абсолютно непрерывны на этом отрезке функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$?

2. Непосредственной проверкой (без ссылок на неограниченность вариации) показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

не абсолютно непрерывна.

3. Показать, что для любой измеримой на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любых положительных чисел ε и δ можно найти такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что $|f(x)-\varphi(x)| \geqslant \varepsilon$ лишь на множестве $E \subset [a, b]$ с мерой $\mu E < \delta$.

4. Показать, что абсолютно непрерывные функции лежат всюду плотно в пространстве $L(a, b)$ в смысле метрики этого пространства.

§ 5. Интеграл Стилтьеса

Мы ограничимся здесь лишь простейшими свойствами интеграла Стилтьеса.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$. Разобьем отрезок на части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Если при неограниченном измельчении разбиения отрезка $[a, b]$ на части эта сумма стремится к конечному пределу, не зависящему ни от характера разбиения отрезка, ни от выбора на частичных отрезках точек ξ_i, то этот предел называется *интегралом Стилтьеса* от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$. Ясно, что если $g(x) \equiv x$, то интеграл Стилтьеса превращается в интеграл Римана.

К понятию интеграла Стилтьеса приводит ряд задач математического анализа, теории вероятностей, механики и др., на которых мы сейчас останавливаться не будем.

Теорема 1. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $g(x)$ имеет на этом отрезке ограниченную вариацию, то интеграл Стилтьеса $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ существует.*

Доказательство. Возьмем последовательность неограниченно измельчающихся разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m, \ldots$ отрезка $[a, b]$ точками деления

$$x_0^{(m)} = a < x_1^{(m)} < \ldots < x_{n_m-1}^{(m)} < x_{n_m}^{(m)} = b,$$

и пусть $\lambda_m = \max_i (x_i^{(m)} - x_{i-1}^{(m)})$. Рассмотрим суммы S_k и S_m, соответствующие разбиениям Π_k и Π_m:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)}) [g(x_i^{(k)}) - g(x_{i-1}^{(k)})],$$

$$S_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_i^{(m)}) [g(x_i^{(m)}) - g(x_{i-1}^{(m)})].$$

Оценим разность между этими суммами. Для этого рассмотрим разбиение Π', полученное путем объединения точек разбиений Π_k и Π_m. Ясно, что Π' будет измельчением как Π_k, так и Π_m. Сравним сумму S_k с суммой S', соответствующей разбиению Π'. Слагаемое $f(\xi_i^{(k)})[g(x_i^{(k)}) - g(x_{i-1}^{(k)})]$ суммы S_k либо войдет в том же виде в сумму S', если на интервале $[x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$ нет точек деления разбиения Π_m, либо заменится суммой нескольких слагаемых вида

$$f(\eta_1)[g(x_1') - g(x_0')] + f(\eta_2)[g(x_2') - g(x_1')] + \ldots$$
$$\ldots + f(\eta_r)[g(x_r') - g(x_{r-1}')],$$

если отрезок $[x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$ с помощью точек деления разбиения Π_m разбит на части $[x_0, x_1']$, $[x_1', x_2']$, ..., $[x_{r-1}', x_r']$. (Здесь $x_0' = x_{i-1}^{(k)}$, $x_r' = x_i^{(k)}$, а $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ являются точками вида $x_j^{(m)}$.) Имеем

$$\Big| f(\xi_i^{(k)}) [g(x_i^{(k)}) - g(x_{i-1}^{(k)})] - \sum_{j=1}^{r} f(\eta_j) [g(x_j') - g(x_{j-1}')] \Big| =$$
$$= \Big| \sum_{j=1}^{r} f(\xi_i^{(k)}) [g(x_j') - g(x_{j-1}')] - \sum_{j=1}^{r} f(\eta_j) [g(x_j') - g(x_{j-1}')] \Big| =$$
$$= \Big| \sum_{j=1}^{r} [f(\xi_i^{(k)}) - f(\eta_j)] [g(x_j') - g(x_{j-1}')] \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{r} \Big| f(\xi_i^{(k)}) - f(\eta_j) \Big| \, | g(x_j') - g(x_{j-1}') |. \qquad (1)$$

Обозначим через $\omega(\lambda)$ колебание функции $f(x)$ на отрезке длины λ. По условию $f(x)$ непрерывна, а значит и равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому $\omega(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Так как все точки η_j, $j=1, 2, \ldots, r$, и точка $\xi_i^{(k)}$ лежат на отрезке $[x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$, длина которого не превосходит λ_k, то $|f(\xi_i^{(k)})-f(\eta_j)|\leqslant\omega(\lambda_k)$, и неравенство (1) можно переписать в виде

$$\left|f(\xi_i^{(k)})[g(x_i^{(k)})-g(x_{i-1}^{(k)})]-\sum_{j=1}^{r}f(\eta_j)[g(x'_j)-g(x'_{j-1})]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\omega(\lambda_k)\sum_{j=1}^{r}|g(x'_j)-g(x'_{j-1})|\leqslant\omega(\lambda_k)\bigvee_{x_{i-1}^{(k)}}^{x_i^{(k)}}(g). \qquad (2)$$

Если мы теперь рассмотрим разность S_k-S', то одинаковые слагаемые в той и другой сумме взаимно уничтожаются и останутся лишь разности, подобные тем, которые входят в левую часть неравенства (2). Но тогда

$$|S_k-S'|\leqslant\omega(\lambda_k)\sum{}'\bigvee_{x_{i-1}^{(k)}}^{x_i^{(k)}}(g), \qquad (3)$$

где $\sum'$ берется по отрезкам $[x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$, которые подверглись подразбиению на части. Так как $\sum'\bigvee_{x_{i-1}^{(k)}}^{x_i^{(k)}}(g)\leqslant\bigvee_a^b(g)$, то из (3) получаем $|S_k-S'|\leqslant\omega(\lambda_k)\bigvee_a^b(g)$. Аналогично, $|S_m-S'|\leqslant\omega(\lambda_m)\bigvee_a^b(g)$, откуда $|S_m-S_k|\leqslant|S_m-S'|+$ $+|S_k-S'|\leqslant[\omega(\lambda_m)+\omega(\lambda_k)]\bigvee_a^b(g)$.

Так как $\omega(\lambda_k)$ и $\omega(\lambda_m)\to 0$, при $m, k\to\infty$, то последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет условию Коши существования предела и потому сходится к конечному пределу S.

Если мы возьмем другую последовательность неограниченно измельчающихся разбиений $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_n, \ldots$ и построим для них интегральные суммы S'_n, то также $S'_n\to S'$. Объединяя теперь обе последовательности разбиений в одну $\Pi_1, \Pi'_1, \Pi_2, \Pi'_2, \ldots, \Pi_n, \Pi'_n, \ldots$, получим, что последовательность сумм $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \ldots, S_n, S'_n, \ldots$ сходится к пределу S''. Но тогда подпоследовательности $\{S'_n\}$ и $\{S_n\}$ сходятся к тому же пределу, откуда следует, что $S=S''$, $S'=S''$, т. е. $S=S'$.

Итак, предел интегральных сумм не зависит от характера разбиений и выбора на частичных отрезках точки ξ_i, а следовательно, существование интеграла Стилтьеса доказано.

Пусть, в частности, $g(x)$ — монотонная непрерывная слева функция[1]). Тогда разность $[g(x_i)-g(x_{i-1})]$ неотрицательна и может рассматриваться как «мера» полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$. Считая за «меру» точки x скачок функции $g(x)$ в этой точке, т. е. $g(x+0)-g(0)$, мы можем определить меру интервала, отрезка и полуинтервала, открытого слева. Например,

$$\begin{aligned}\mu([x_{i-1}, x_i]) &= \mu([x_{i-1}, x_i]) + \mu(x_i) = \\ &= [g(x_i)-g(x_{i-1})] + [g(x_i+0)-g(x_i)] = \\ &\qquad = [g(x_i+0)-g(x_i)].\end{aligned}$$

Отправляясь от меры интервала, определяем меру открытого множества, затем меру замкнутого, далее внешнюю и внутреннюю меры ограниченного множества и т. д. Итак, интегралы Стилтьеса по монотонно возрастающим функциям могут быть включены в общую схему интегрирования. Но если $g(x)$ — произвольная функция ограниченной вариации, то интеграл Стилтьеса из этой схемы выпадает. Поэтому мы рассмотрим непосредственно ряд свойств интеграла Стилтьеса по произвольным функциям ограниченной вариации, ограничившись случаем интегрирования непрерывных функций.

1. $$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]\, dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$$

2. $$\int_a^b f(x)\, d[\beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x)] = \beta_1 \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + \beta_2 \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$$

3. Если $K = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$, то $\left|\int_a^b f(x)\, dg(x)\right| \leqslant K \bigvee_a^b (g)$.

Эти свойства интеграла Стилтьеса очевидны.

---

[1]) Если $g(x)$ не обладает этим свойством, мы переопределим ее, заменив всюду $g(x)$ на $g(x-0)$, где эти два числа не равны.

4. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных на $[a, b]$ функций равномерно сходится на этом отрезке к функции $f(x)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Это также легко доказать.

5. $\int_a^b f(x)\, dg(x) = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x).$

Приведенную формулу называют *формулой интегрирования по частям.* Из ее доказательства будет, в частности, следовать, что интеграл от функции с ограниченной вариацией по непрерывной функции существует. Итак, рассмотрим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Перегруппировав ее члены, приведем эту сумму к виду

$$S_n = f(\xi_n)\, g(x_n) - f(\xi_1)\, g(x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)] =$$

$$= -\{g(x_0)\,[f(\xi_1) - f(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)] +$$

$$+ g(x_n)\,[f(b) - f(\xi_n)]\} + g(x_n)\, f(b) - g(x_0)\, f(a). \qquad (4)$$

Но сумма, стоящая в фигурных скобках, есть не что иное, как интегральная сумма для интеграла Стилтьеса $\int_a^b g(x)\, df(x)$, соответствующая точкам деления

$$\xi_0 = a < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < \xi_n < \xi_{n+1} = b.$$

Поскольку левая часть равенства (4) стремится к пределу, то имеет предел и правая часть, т. е. $\int_a^b g(x)\, df(x)$ существует. После этого переход к пределу в равенстве (4) дает

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = [f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)] - \int_a^b g(x)\, df(x),$$

что и требовалось доказать.

Вычисление интеграла Стилтьеса в общем случае весьма затруднительно, но в отдельных частных случаях несколько упрощается. Пусть, например, $g(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную $g'(x)$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Если функция $g(x)$ кусочно-постоянна и имеет скачок в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то с помощью выбора подходящего разбиения отрезка $[a, b]$ можно показать, что в этом случае предел интегральных сумм, т. е. интеграл, приводится к ряду

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\sum_n f(a_n)[g(a_n+0)-g(a_n-0)].$$

Наконец, в заключение этого параграфа приведем без доказательства следующую полезную теорему.

Теорема (Хелли). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\{g_n(x)\}$ — последовательность функций с ограниченными на $[a, b]$ вариациями, которая сходится в каждой точке этого отрезка к функции $g(x)$. Если при этом $\bigvee_a^b(g_n)\leqslant K$, $n=1, 2, \ldots$, то $g(x)$ — также функция с ограниченной вариацией и*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dg_n(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Упражнения. 1. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int_0^1 f(x)\,dg(x)$, если $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ для $0\leqslant x<\frac{1}{2}$, и $g(x)=\frac{1}{x}$ для $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $g(x)$ имеет на этом отрезке ограниченную вариацию. Будет ли функция

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dg(t)$$

иметь на $[a, b]$ ограниченную вариацию?

ГЛАВА VIII

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Основные понятия и определения

Пусть дано множество $X=\{x, y, z, \ldots, u, v, \ldots\}$ элементов некоторой природы. Это множество называется *линейным нормированным пространством,* если удовлетворяются следующие аксиомы.

I. X — *линейная система,* т. е. определена сумма $x+y$ элементов x и $y \in X$ и произведение λx элемента $x \in X$ на число λ, являющиеся снова элементами этого же пространства. При этом выполняются обычные свойства операций сложения и умножения:

1) $x+y=y+x$;

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

4) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

5) в X существует единственный элемент θ такой, что $x+\theta=x$ для любого $x \in X$; этот элемент называют *нулевым элементом* пространства и обычно обозначают символом 0, причем из текста бывает ясно, когда речь идет о нуле пространства, а когда о числе нуль;

6) для каждого $x \in X$ существует единственный противоположный элемент $-x$ такой, что $x+(-x)=0$; вместо $x+(-y)$ мы будем писать просто $x-y$;

7) $1 \cdot x=x$, $0x=0$.

II. X — *нормированное пространство,* т. е. для любого элемента $x \in X$ определено неотрицательное число $\|x\|$, называемое *нормой,* причем выполняются следующие аксиомы:

1) $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

С помощью нормы в линейном нормированном пространстве вводится *расстояние*

$$\rho(x, y) = \| x - y \|.$$

Из свойств нормы легко получается, что все аксиомы метрики при этом выполняются. Сходимость в смысле введенного с помощью нормы расстояния называется *сходимостью по норме.* Если линейное нормированное пространство полно в смысле сходимости по норме, то оно называется *банаховым пространством.*

В зависимости от того, на какие числа, вещественные или комплексные, допускается умножение элементов, пространство называется соответственно *вещественным* или *комплексным* пространством. Мы по преимуществу будем рассматривать вещественные пространства.

Примеры. 1. Пусть $X = C[a, b]$. Сложение функций и умножение на число понимается как обычно. Норма вводится посредством равенства

$$\| x \| = \max_{t \in [a, b]} | x(t) |.$$

Ясно, что все аксиомы первой группы выполняются, а аксиомы второй группы проверяются без труда. Метрика, введенная с помощью нормы, совпадает с метрикой, ранее введенной в этом пространстве. Поэтому пространство $C[a, b]$ полное, т. е. банахово.

2. Пусть $X = E_n$ — n-мерное евклидово пространство. Рассматривая точку $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E_n$ как n-мерный вектор с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, сложение векторов и умножение вектора на число определим как обычно. Также обычным образом определяем норму вектора

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2},$$

а следовательно, и расстояние между векторами. Так как E_n полно, то оно есть банахово пространство.

3. $L_2(a, b)$ есть банахово пространство, что мы уже фактически установили в § 1 гл. VI.

4. Пусть $X = l_2$. Если $x = \{\xi_i\}$ и $y = \{\eta_i\}$ — два элемента этого пространства, то определим сумму элементов и

произведение элемента на число следующим образом:

$$x+y=\{\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\ \ldots,\ \xi_n+\eta_n,\ \ldots\},$$
$$\lambda x=\{\lambda\xi_1,\ \lambda\xi_2,\ \ldots,\ \lambda\xi_n,\ \ldots\}.$$

То, что $\lambda x \in l_2$, очевидно, а принадлежность $x+y$ пространству l_2 вытекает из неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i+\eta_i)^2 \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^2\right)<\infty.$$

Ясно, что все требуемые свойства суммы элементов и произведение элемента на число имеют место. Отметим, что в качестве нулевого берем элемент $0=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots)$. Норму элемента вводим посредством равенства

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2}.$$

Первые два свойства нормы очевидны, а третье вытекает из неравенства Коши—Минковского для сумм

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i+\beta_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2},$$

которое, как и равенство Буняковского—Шварца для сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\cdot|\beta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

доказывается так же, как и аналогичные неравенства для интегралов. Метрика, введенная с помощью нормы, совпадает с метрикой, ранее введенной нами в этом пространстве, откуда следует, что l_2 — полное, т. е. банахово пространство.

5. m-пространство ограниченных последовательностей есть банахово пространство. Сумма элементов $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}$ и произведение элемента x на число λ вводятся как и в пространстве l_2, а норма — с помощью равенства

$$\|x\|=\sup_i|\xi_i|.$$

В произвольном линейном нормированном пространстве так же, как и в пространстве $L_2(a, b)$, вводится понятие линейной зависимости и независимости элементов, линейной комбинации элементов, линейного многообразия и подпространства. Мы введем здесь еще понятие размерности подпространства, в частности всего пространства, и понятие базиса.

Пусть L — линейное многообразие или подпространство банахова пространства X. Если в L есть n линейно независимых элементов, а каждые $n+1$ элементы линейно зависимы, то говорят, что *размерность* подпространства есть n или что L есть *n-мерное подпространство*. Если же в L при любом натуральном n есть n линейно независимых элементов, то подпространство L называется *бесконечномерным*. В частности, если вместо L речь идет о всем пространстве X, то мы приходим к определению размерности линейного нормированного пространства.

Примеры. 1. Пусть $X = C[a, b]$ и L — подпространство многочленов степени не выше, чем n (что L — действительно подпространство, предлагается доказать читателю). Нетрудно видеть, что размерность этого подпространства есть $(n+1)$. В самом деле, в L существует $(n+1)$ линейно независимых элементов: $1, t, t^2, \ldots, t^n$, так что размерность его не меньше, чем $(n+1)$. Если же мы возьмем любые $(n+2)$ многочлена степени не выше n,

$$p_i(t) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)}t + \ldots + c_n^{(i)}t^n, \qquad i = 1, 2, \ldots, (n+2),$$

то равенство $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i p_i(t) = 0$ приведет к однородной относительно чисел λ_i системе

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i c_k^{(i)} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

и так как число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то одно из неизвестных чисел λ_i всегда можно выбрать произвольным и, в частности, отличным от нуля, что доказывает линейную зависимость $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_{n+2}(t)$.

2. Пусть $X = l_2$. Это пространство бесконечномерно, так как элементы $x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$,

$x_3=(0, 0, 1, 0, \ldots)$, ... линейно независимы, потому что, например, равенство

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

можно записать в виде

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots) = 0,$$

что в свою очередь означает

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Пусть L — n-мерное многообразие (подпространство) и x_1, x_2, ..., x_n — линейно независимые элементы этого подпространства. Так как любые $(n+1)$ элементов из L линейно зависимы, то, каков бы ни был $x \in L$, имеем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha x = 0, \tag{1}$$

где не все коэффициенты равны нулю. При этом обязательно $\alpha \neq 0$, так как при $\alpha = 0$ и не всех коэффициентах в равенстве (1), равных нулю, мы имели бы, что x_1, x_2, ..., x_n линейно зависимы. Определяя из (1) элемент x, получим

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}.$$

Итак, каждый элемент x, принадлежащий n-мерному подпространству, представим в виде линейной комбинации элементов x_1, x_2, ..., x_n. Это представление однозначно, так как если

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 + \ldots + \lambda_n' x_n,$$

т. е.

$$(\lambda_1 - \lambda_1') x_1 + (\lambda_2 - \lambda_2') x_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_n') x_n = 0,$$

то отсюда в силу линейной независимости элементов следует

$$\lambda_1 - \lambda_1' = 0, \lambda_2 - \lambda_2' = 0, \ldots, \lambda_n - \lambda_n' = 0.$$

Система элементов подпространства L, обладающая тем свойством, что каждый элемент $x \in L$ однозначно представим в виде линейной комбинации этих элементов, называется *базисом подпространства.* Таким образом, выше мы получили, что любые n линейно независимых элементов n-мерного подпространства образуют его базис.

Базис могут иметь и бесконечномерные подпространства, и пространства. В этом случае базис будет состоять из бесконечного (для сепарабельных пространств счетного) числа элементов, и тогда вместо однозначного представления элементов в виде суммы необходимо требовать однозначную разложимость элемента $x \in L$ в бесконечный ряд по элементам базиса. При этом сходимость ряда в линейном нормированном пространстве определяется обычным образом: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и имеет сумму s, если последовательность частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ сходится по норме к s:

$$\|s_n - s\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Примеры. 1. В пространстве $L_2(a, b)$ любая ортонормальная система является базисом в подпространстве, порождаемом этой системой; в частности, полная ортонормальная система является базисом во всем пространстве.

2. В пространстве l_2 система

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

образует базис. В самом деле, пусть $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ — произвольный элемент пространства l_2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i.$$

Если s_n — частичная сумма этого ряда, то

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots).$$

Поэтому

$$x - s_n = (0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$$

и, следовательно, $\|x - s_n\| = \sqrt{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \xi_i^2} \to 0$ при $n \to \infty$, так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$ сходится.

Представление $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ однозначно, ибо если есть другое такое представление $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i' e_i$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi_i') e_i = 0,$$

откуда $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i') e_i \to 0$, т. е. $\|\sigma_n\| \to 0$. Но это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i')^2} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi_i')^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

что возможно лишь, если $\xi_i = \xi_i'$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Можно показать, что если банахово пространство X имеет счетный базис, то оно сепарабельно. Счетным всюду плотным множеством будут элементы вида $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i e_i$, где n — произвольные натуральные, а r_i — произвольные рациональные числа. Поэтому, например, пространство m ограниченных числовых последовательностей, как несепарабельное, не имеет счетного базиса. Существует гипотеза Банаха, что всякое сепарабельное банахово пространство имеет счетный базис. Для всех известных конкретных сепарабельных банаховых пространств такие базисы построены, но в общем случае гипотеза Банаха не доказана.

Введем теперь понятие об *эквивалентных нормах*. Если дано линейное пространство X, то нормы в нем можно вводить по-разному. Например, если X — линейное пространство упорядоченных систем из n чисел:

$$x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},$$

то можно положить $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}$, но можно также положить, что

$$\|x\|'=\sup_i |x_i|.$$

Две нормы в линейном нормированном пространстве X называются *эквивалентными*, если всегда из сходимости последовательности к элементу в одной норме следует сходимость этой последовательности к тому же элементу в другой норме, и обратно. Легко видеть, что для эквивалентности двух норм $\|x\|$ и $\|x\|'$ достаточно, чтобы существовали две такие константы M и M', что

$$\|x\|\leqslant M\|x\|' \quad \text{и} \quad \|x\|'\leqslant M'\|x\|$$

для любого $x\in X$[1]). В самом деле, тогда, если $x_n\to x$ в смысле сходимости по первой норме, т. е. $\|x_n-x\|\to 0$, то из неравенства

$$\|x_n-x\|'\leqslant M'\|x_n-x\|$$

следует $x_n\to x$ в смысле сходимости по второй норме и также обратное. Ясно, что две нормы, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой.

Теорема. *В конечномерном линейном нормированном пространстве две любые нормы эквивалентны.*

Доказательство. Мы покажем, что в любом n-мерном линейном нормированном пространстве X любая норма эквивалентна так называемой *евклидовой норме*, которая для $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ определяется равенством

$$\|x\|_0=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}.$$

---

[1]) Можно доказать, что эти условия и необходимы.

Пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X. Тогда

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, \|e_i\|.$$

Здесь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства X.

Применяя неравенство Буняковского — Шварца для сумм, будем иметь

$$\|x\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2} = M \|x\|_0, \tag{2}$$

и одно из требуемых неравенств получено.

Введем теперь функцию

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n\|.$$

Будем рассматривать ее как функцию от n переменных ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ в обычном n-мерном евклидовом пространстве. Покажем, что она непрерывна. Имеем

$$\begin{aligned} |f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)| &= \\ = \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| \right| &\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| = \\ = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) e_i \right\| &\leqslant M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь мы воспользовались обратным неравенством треугольника $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|$ и уже установленным неравенством (2).

Из неравенства (3) следует, что $f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \to$ $\to f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, когда $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \to (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, и непрерывность $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ доказана.

Рассмотрим функцию $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ на поверхности шара $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = 1$ евклидова пространства. Если точка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ лежит на поверхности шара, то не все ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю, и потому $\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \neq 0$, а значит, $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) =$

$=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|>0$ в любой точке поверхности этого шара. Как непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве, $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ достигает на шаре своего минимума α, и этот минимум больше нуля. Итак, $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\geqslant\alpha>0$, если $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1$.

Пусть теперь $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — произвольный набор из вещественных чисел. Положим $\xi_i'=\dfrac{\xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n}\xi_i'^2=1$, и потому $f(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n')\geqslant\alpha$. С другой стороны,

$$f(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n')=\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}\right\|=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\geqslant\alpha,$$

что можно записать также в виде

$$\|x\|_0=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\leqslant\frac{1}{\alpha}f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)=\frac{1}{\alpha}\|x\|,$$

и второе требуемое неравенство с константой $M_0=\frac{1}{\alpha}$ также доказано.

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос об изоморфизме линейных пространств.

Выше (гл. II) мы ввели понятие об изометричных множествах и говорили, что в вопросах, связанных с предельным переходом, с операцией замыкания, изометричные множества можно считать неразличимыми. Изоморфные многообразия в линейных пространствах аналогичны изометричным множествам в метрических пространствах. Точнее, два многообразия L и L_1, расположенные в линейных нормированных пространствах X и X_1, называются изоморфными, если между элементами этих многообразий можно установить взаимно однозначное соответствие, причем из $x \leftrightarrow x_1$ и $y \leftrightarrow y_1$ следует, что $x+y \leftrightarrow x_1+y_1$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x_1$. Так, например, множество всех многочленов степени не выше n изоморфно множеству всех $(n+1)$-мерных векторов, т. е. множеству упорядоченных систем из $(n+1)$ чисел. Для этого достаточно каждому многочлену отнести систему чисел, являющихся коэффициентами многочлена

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \leftrightarrow (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Нетривиальный пример изоморфизма дается следующей теоремой.

Теорема (Рисса — Фишера). *Пространства $L_2(a, b)$ и l_2 изометричны и изоморфны.*

Доказательство. Возьмем в пространстве $L_2(a, b)$ какую-нибудь полную ортонормальную систему $\{\varphi_i(t)\}$. Тогда для любого $x(t) \in L_2(a, b)$ имеем

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i(t), \quad \xi_i = (x, \varphi_i),$$

причем в силу условия Парсеваля — Стеклова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = \| x \|^2 < \infty. \tag{4}$$

Таким образом, последовательность коэффициентов Фурье функции $x(t) \in L_2(a, b)$ можно рассматривать как элемент $x \in l_2$

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}.$$

При этом соответствие $x(t) \to x$ однозначно.

Пусть, наоборот, дан элемент $\bar{y} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ пространства l_2. Рассмотрим в $L_2(a, b)$ формально ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \varphi_i(t), \tag{5}$$

где $\{\varphi_i(t)\}$ — та же самая полная ортонормальная система. Последовательность $s_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ \varphi_i(t)$ частичных сумм этого ряда сходится в среднем в себе, ибо

$$\|s_{n+p}-s_n\|^2=\Big\|\sum_{i=n+1}^{n+p}\eta_i\varphi_i(t)\Big\|^2=\sum_{i=n+1}^{n+p}\eta_i^2\to 0$$

при $n\to\infty$ и $p>0$ в силу сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^2$.

Так как пространство $L_2(a,\ b)$ полное, это значит, что ряд (5) сходится, его сумма имеет коэффициенты Фурье η_i, $i=1,\ 2,\dots$, и эту сумму $y(t)\in L_2(a,\ b)$ ставим в соответствие элементу $\bar{y}$. Опять соответствие $\bar{y}\to y(t)$ однозначно.

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $L_2(a,\ b)$ и l_2.

Так как, очевидно,

$$x(t)+y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\varphi_i(t)=\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i+\eta_i)\,\varphi_i(t)$$

и

$$\lambda x(t)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda\xi_i\varphi_i(t),$$

то из $x(t)\leftrightarrow x,\ y(t)\leftrightarrow y$ следует

$$x(t)+y(t)\leftrightarrow x+y,\quad \lambda x(t)\leftrightarrow\lambda x,$$

т. е. установленное нами соответствие есть изоморфизм.

Наконец, для двух любых элементов $x(t),\ y(t)\in L_2(a,\ b)$ имеем в силу условия Парсеваля — Стеклова

$$\|x(t)-y(t)\|^2=\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)\,\varphi_i(t)\Big\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2=$$
$$=\|x-y\|^2,$$

и установленное нами соответствие сохранит расстояние, т. е. $L_2(a,\ b)$ и l_2 изометричны. Теорема полностью доказана.

Упражнения. 1. Установить непосредственно эквивалентность следующих норм в n-мерном линейном нормированном пространстве X:

$$\|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n\|' = \max_i |\xi_i|,$$

$$\|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n\|'' = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|.$$

Что будут представлять собой единичные шары $\|x\|' \leqslant 1$ и $\|x\|'' \leqslant 1$ в пространстве X_n с этими нормами?

2. На плоскости $x0y$ дано замкнутое выпуклое центрально-симметричное множество. Как ввести норму на плоскости, чтобы данное множество стало в этой норме единичным шаром?

3. В множестве непрерывных функций, определенных на $(-\infty, \infty)$, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала (своего для каждой функции), вводится норма $\|x(t)\| = \max_t |x(t)|$. Будет ли пространство этих функций полно в метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$? Если нет, то что будет пополнением этого пространства?

4. Рассматриваются функции, заданные на всей оси $(-\infty, \infty)$, измеримые на каждом конечном отрезке $[-T, T]$ и такие, что

$$N(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt < \infty.$$

Доказать, что такие функции образуют линейное нормированное пространство, если положить $\|x\| = \sqrt{N(x)}$. Будет ли оно полным?

5. Найти в $C[a, b]$ бесконечномерное линейное подпространство L, такое, что $L \neq C[a, b]$.

6. В $L_2(a, b)$ рассмотреть множество элементов, представителями которых являются абсолютно непрерывные функции, имеющие производную с интегрируемым квадратом. Будет ли это множество линейным многообразием? Какова его размерность? Чему равно его замыкание?

7. Доказать, что два любые n-мерные банаховы пространства изометричны и изоморфны.

8. Доказать, что всякое n-мерное линейное многообразие любого банахова пространства замкнуто.

§ 2. Линейные операторы и линейные функционалы в линейных нормированных пространствах

Наиболее доступными для изучения среди операторов, действующих в линейных нормированных пространствах, являются линейные операторы. Вместе с тем линейные операторы представляют собой достаточно важный класс операторов, так как среди них мы находим многие операторы алгебры и анализа.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Оператор A, действующий на X в Y, называется *линейным*, если:

1) оператор аддитивен, т. е. $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$;

2) оператор непрерывен, т. е.

$$Ax_n \to Ax_0, \text{ когда } x_n \to x_0.$$

Пример. 1. Пусть $X=E_n$, $Y=E_m$. Каждому элементу $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E_n$ с помощью матрицы (a_{ij}), $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$, ставим в соответствие элемент $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \in E_m$, полагая

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Тем самым задан оператор A

$$y=Ax,$$

определенный на E_n со значениями в E_m. Говорят также, что оператор A задается матрицей (a_{ij}), $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$. Проверим, что A — линейный оператор. Пусть

$$\begin{gathered} x_1=(\xi_j^{(1)}), \quad x_2=(\xi_j^{(2)}), \quad x=x_1+x_2, \\ y=Ax=(\eta_i), \quad y_1=Ax_1=(\eta_i^{(1)}), \quad y_2=Ax_2=(\eta_i^{(2)}), \\ j=1, 2, \ldots, n; \quad i=1, 2, \ldots, m. \end{gathered}$$

Тогда $x=(\xi_j^{(1)}+\xi_j^{(2)})$, $j=1, 2, \ldots, n$, и потому

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)}+\xi_j^{(2)})=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)}= \\ =\eta_i^{(1)}+\eta_i^{(2)}, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

т. е. $y=Ax=y_1+y_2=Ax_1+Ax_2$, и аддитивность оператора A доказана.

Если $x_k=(\xi_i^{(k)}) \to x_0=(\xi_i^{(0)})$, $y_k=Ax_k$, $y_0=Ax_0$, то $\xi_j^{(k)} \to \xi_j^{(0)}$ для всех $j=1, 2, \ldots, n$ и, следовательно,

$$\eta_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(k)} \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(0)}=\eta_i^{(0)}, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Но это означает, что $y_k = Ax_k \to y_0 = Ax_0$, и непрерывность оператора A также доказана.

2. Пусть $X = Y = C[a, b]$. Для произвольной функции $x(t) \in C[a, b]$ положим

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{1}$$

где $K(t, s)$ — непрерывная в квадрате $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ функция. Равенство (1) определяет оператор $y = Ax$, действующий в $C[a, b]$, который называют *интегральным оператором Фредгольма*. Установим линейность этого оператора.

Аддитивность оператора очевидна:

$$A(x_1 + x_2) = \int_a^b K(t, s)[x_1(s) + x_2(s)]\, ds =$$
$$= \int_a^b K(t, s)\, x_1(s)\, ds + \int_a^b K(t, s)\, x_2(s)\, ds = Ax_1 + Ax_2.$$

Непрерывность его вытекает из того, что сходимость в пространстве $C[a, b]$ есть равномерная сходимость, при которой возможен переход к пределу под знаком интеграла. Поэтому если $x_n(t) \to x_0(t)$, то

$$\lim_n Ax_n = \lim_n \int_a^b K(t, s)\, x_n(s)\, ds = \int_a^b K(t, s)\, [\lim_n x_n(s)]\, ds =$$
$$= \int_a^b K(t, s)\, x_0(s)\, ds = Ax_0.$$

3. Пусть $X = Y = L_2(a, b)$. Снова рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds.$$

Но теперь будем предполагать, что функция $K(t, s)$, называемая *ядром оператора*, имеет интегрируемый квадрат по совокупности обеих переменных:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds < \infty.$$

Покажем, что оператор A действует из $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$. Из условий $\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds<\infty$ и $\int\limits_a^b\int\limits_a^b x^2(s)\,dt\,ds=(b-a)\times\times\int\limits_a^b x^2(s)\,ds<\infty$ следует, что $K(t, s)\,x(s)$, как функция от t и s, интегрируема на $a\leqslant t,\ s\leqslant b$. Но тогда в силу теоремы Фубини

$$y(t)=\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds$$

есть измеримая и интегрируемая функция, и неравенство Буняковского — Шварца дает

$$\int\limits_a^b y^2(t)\,dt=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds\right\}^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b\left\{\int\limits_a^b K^2(t, s)\,ds\int\limits_a^b x^2(s)\,ds\right\}dt=\int\limits_a^b x^2(s)\,ds\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds<\infty,$$

т. е. что $y(t)\in L_2(a, b)$. Предыдущее неравенство после извлечения из него квадратного корня можно записать в виде

$$\|y\|=\|Ax\|\leqslant k\|x\|. \tag{2}$$

Аддитивность оператора A очевидна, а непрерывность легко следует из неравенства (2), потому что если $x_n\to x_0$, то

$$\|Ax_n-Ax_0\|=\|A(x_n-x_0)\|\leqslant k\|x_n-x_0\|\to 0$$

при $n\to\infty$ и, значит, $Ax_n\to Ax_0$.

4. Пусть $X=Y=l_2$ и (a_{ij}), $i, j=1, 2, \ldots,$ — бесконечная матрица такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2=a^2<\infty. \tag{3}$$

Рассмотрим оператор A, определяемый следующим формальным равенством: для $x=\{\xi_i\}\in l_2$ положим

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j,\quad i=1, 2, \ldots,$$

и $Ax=y=\{\eta_i\}$.

Прежде всего из неравенства Буняковского—Шварца следует, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$ абсолютно сходится, так как

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||\xi_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

т. е. частичные суммы ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||\xi_j|$ ограничены. Далее,

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty,$$

и так как это верно для любого натурального n, то $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 < \infty$, т. е. $y \in l_2$.

Если извлечь из неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 \leqslant a^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2$$

квадратный корень, то получим

$$\|y\| \leqslant a \|x\|.$$

Проверка аддитивности и непрерывности оператора производится так же, как и в предыдущем примере.

Установим некоторые простейшие свойства линейного оператора.

1. $A0 = 0$.

Так как

$$Ax = A(x + 0) = Ax + A0,$$

то, вычитая из обеих частей равенства Ax, мы получим требуемое.

2. $A(-x)=-Ax$.

В самом деле,

$$0=A0=A[x+(-x)]=Ax+A(-x),$$

откуда $-A(-x)=Ax$.

3. $A(tx)=tAx$ *для любого вещественного числа* t.

Это свойство линейного оператора называется его *однородностью.*

Пусть сначала $t=n$ — целому положительному числу. Тогда

$$A(nx)=A(x+x+\ldots+x)=Ax+Ax+\ldots+Ax=n\,Ax.$$

Если n — целое отрицательное, то

$$A(nx)=A(-|n|x)=-A(|n|x)=-|n|Ax=nAx.$$

Предположим теперь, что $t=\frac{1}{q}$, где q — целое число. Обозначая $\frac{1}{q}x$ через y, получим $x=qy$. Поэтому $Ax=$ $=A(qy)=qAy$ и, следовательно,

$$\frac{1}{q}Ax=A\left(\frac{1}{q}x\right).$$

Если $t=\frac{p}{q}$ рационально, то

$$A\left(\frac{p}{q}x\right)=pA\left(\frac{1}{q}x\right)=\frac{p}{q}Ax.$$

Пусть, наконец, t иррационально. Тогда $t=\lim r_n$, где r_n рациональны, и

$$A(tx)=A(\lim r_n x)=\lim A(r_n x)=\lim r_n Ax=tA(x).$$

Однородность оператора A доказана.

Важнейшим свойством линейного оператора является его ограниченность на S_1 — единичном шаре $\|x\|\leqslant 1$ пространства X, которое называют просто *ограниченностью* линейного оператора. Для случая произвольного нелинейного оператора это свойство не вытекает из непрерывности оператора, так как единичный шар пространства может быть некомпактным. Докажем ограниченность линейного оператора.

Предположим противное, т. е. что существует последовательность $\{x_n\}$, $\|x_n\|\leqslant 1$ такая, что $\|Ax_n\|=a_n\to\infty$. Пусть

$x'_n = \frac{x_n}{a_n}$, тогда $\|x'_n\| \leqslant \frac{1}{a_n} \to 0$, т. е. $x'_n \to 0$, в то время как

$$\|Ax'_n\| = \frac{1}{a_n}\|Ax_n\| = \frac{1}{a_n}a_n = 1 \not\to 0 = \|A0\|,$$

и мы пришли к противоречию.

Ограниченность линейного оператора эквивалентна следующему условию. Существует такая константа K, что

$$\|Ax\| \leqslant K\|x\| \tag{4}$$

для любого $x \in X$. В самом деле, пусть оператор A ограничен. Положим

$$K_0 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\|Ax\| \leqslant K_0,$$

когда $\|x\| \leqslant 1$. Если теперь x — любой элемент на X, то $\frac{x}{\|x\|} \in S_1$, и потому $\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant K_0$, откуда $\|Ax\| \leqslant K_0\|x\|$, и (4) выполняется.

Предположим, напротив, что условие (4) выполняется. Тогда для $\|x\| \leqslant 1$

$$\|Ax\| \leqslant K,$$

т. е. A — ограниченный оператор.

Число K_0, определяемое равенством (5), называют *нормой оператора* и обозначают $\|A\|$. Итак, для любого $x \in X$

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|. \tag{6}$$

Очевидно, что $K_0 = \|A\|$ есть наименьшая из констант, удовлетворяющих неравенству (4), потому что если бы это было не так и нашлось число $K' < K_0$ такое, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\| \leqslant K'\|x\|,$$

то для $x \in S_1$ мы имели бы $\|Ax\| \leqslant K'$, откуда

$$K_0 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant K' < K_0,$$

что невозможно.

Вычисление норм конкретных операторов обычно представляется затруднительным, однако часто бывает довольно легко оценить норму оператора сверху.

Примеры. 1. Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма в пространстве $C[a, b]$. Пусть $\beta_0 = \sup\limits_{a \leqslant t,\ s \leqslant l} |K(t, s)|$. Имеем для $x(t) \in C[a, b]$, $\|x\| \leqslant 1$:

$$\|Ax\| = \max_t \left| \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant \max_t \int_a^b |K(t, s)|\, |x(s)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \max_s |x(s)|\, \beta_0 (b-a) = \beta (b-a) \|x\| \leqslant \beta (b-a).$$

Отсюда

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \beta (b-a),$$

и мы оценили норму интегрального оператора в пространстве $C[a, b]$.

2. Рассмотрим в том же пространстве $C[a, b]$ оператор

$$Bx = tx(t),$$

называемый *оператором умножения на независимую переменную*. Для простоты вычислений будем считать, что $0 < a < b$. Для любой функции $x(t) \in C[a, b]$, $\|x\| \leqslant 1$ имеем

$$\|Bx\| = \max_t |tx(t)| \leqslant b \max_t |x(t)| = b \|x\| \leqslant b. \qquad (*)$$

Отсюда $\|B\| \leqslant b$. Но если мы возьмем функцию $x_0(t) \equiv 1$, то

$$\|Bx_0\| = \max_t |tx_0(t)| = \max_t |t| = b,$$

и потому

$$\|B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| \geqslant \|Bx_0\| = b. \qquad (**)$$

Из неравенств $(*)$ и $(**)$ вытекает, что $\|B\| = b$.

Ограниченность линейного оператора является в известном смысле его характеристическим свойством. Именно, имеет место следующая

Теорема. *Если аддитивный и однородный оператор ограничен, то он непрерывен, а следовательно, линеен.*

Доказательство. В самом деле, пусть $x_n \to x_0$, тогда

$$\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \leqslant K \|x_n - x_0\| \to 0,$$

и теорема доказана.

В различных вопросах математики приходится рассматривать аддитивные и однородные, но не ограниченные операторы. Такие операторы, естественно, не будут непрерывными. Более того, они будут определены не на всем пространстве, а на некоторых всюду плотных линейных многообразиях рассматриваемого пространства. Подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки курса, и мы ограничимся лишь примером такого оператора. Пусть $X=Y=C[a, b]$. Рассмотрим оператор дифференцирования

$$Ax=\frac{d}{dt}x(t).$$

Ясно, что этот оператор аддитивен и однороден или, как говорят, дистрибутивен. Однако он определен (имеет смысл) не на всем пространстве $C[a, b]$, а лишь на подмножестве $C_1 \subset C[a, b]$, состоящем из функций, имеющих непрерывную производную. Это множество является, очевидно, линейным многообразием, и так как оно содержит все полиномы, то всюду плотно в $C[a, b]$. Легко убедиться, что оператор A на C_1 не является ограниченным. В самом деле, пусть $x_n(t)=\sin nt$. Тогда

$$\|x_n\|=\max_t|\sin nt|=1,$$

а

$$\|Ax_n\|=\max_t\left|\frac{d}{dt}\sin nt\right|=n\max_t|\cos nt|=n,$$

и потому $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|=\infty$.

Частным случаем линейного оператора является **линейный функционал**. Если областью определения линейного оператора является произвольное линейное нормированное пространство X, а значениями его являются вещественные числа, $Y=(-\infty, \infty)$, то такой линейный оператор называется *линейным функционалом* $f(x)$, определенным на пространстве X.

Так как числовая прямая есть частный случай линейного нормированного пространства, то все, что было сказано выше для линейных операторов, верно и для линейных функционалов. Например, норма линейного функционала $f(x)$ есть число

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|,$$

и для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|.$$

Примеры. 1. Пусть $X = L_2(a, b)$ и

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Рассматривая этот интеграл как скалярное произведение функции $x(t)$ на функцию, тождественно равную единице,

$$f(x) = (x, 1),$$

получаем в силу неравенства Буняковского—Шварца, что

$$|f(x)| = |(x, 1)| \leqslant \|x\| \cdot \|1\| = (b-a)^{\frac{1}{2}} \|x\|,$$

т. е. что $f(x)$ ограничен. Аддитивность и однородность очевидны. Следовательно, $f(x)$ — линейный функционал. Читатель без труда докажет, что

$$\|f\| = (b-a).$$

2. Пусть $X = C[a, b]$. Положим

$$f(x) = x(a).$$

Аддитивность и однородность этого функционала очевидны. Так как, далее,

$$|f(x)| = |x(a)| \leqslant \max_t |x(t)| = \|x\|,$$

то $f(x)$ — ограниченный и, следовательно, линейный функционал. Снова легко проверить, что $\|f\| = 1$.

3. В том же пространстве $C[a, b]$ рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t), \tag{7}$$

где $g(t)$ — некоторая функция с ограниченной вариацией на отрезке $[a, b]$. Из свойств интеграла Стилтьеса следует, что $f(x)$ — линейный функционал. В самом деле, аддитивность и однородность $f(x)$ очевидны, а ограниченность вытекает из неравенства

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\,dg(t)\right|\leqslant \max_t |x(t)| \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g)=\mathop{\mathrm{V}}_a^b(g)\|x\|.$$

Оказывается, что равенство (7) дает общий вид линейных функционалов, определенных в $C[a, b]$, т. е. любой линейный функционал в пространстве непрерывных функций может быть представлен в виде интеграла Стилтьеса (7), где функция $g(t)$ однозначно, с точностью до постоянного слагаемого, определяется функционалом $f(x)$. При этом

$$\|f\|=\mathop{\mathrm{V}}_a^b(g).$$

Упражнения. 1. Найти норму оператора $Ax=tx(t)$ в пространстве $L_2(a, b)$.

2. Найти норму оператора

$$Ax=t^2x(1)$$

в пространстве $C[1, 2]$.

3. Найти норму оператора $Ax=\int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds$ в пространстве $C[0, 1]$, если $K(t, s)=ts$.

4. Доказать линейность и найти норму в пространстве l_2:

а) оператора $Ax=\{\xi_2, \xi_3, \ldots\}$ для $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$,

б) функционала $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{i}$, где $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

5. Доказать линейность функционалов

$$f_1(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,dt;$$

$$f_2(x)=ax(0)+bx(1)$$

в пространстве $C[0, 1]$ и оценить их нормы.

§ 3. Пространство операторов

Зафиксируем два линейных нормированных пространства X и Y и будем рассматривать всевозможные линейные операторы $A, B, \ldots, U, V, \ldots$, действующие из X и Y. Определим сумму операторов и произведение оператора на число следующим образом:

$$(A+B)x = Ax + Bx, \qquad (\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Это будут снова операторы, действующие из X в Y, и легко видеть, что все необходимые свойства операций сложения и умножения на число имеют место. В частности, нулевым оператором будет оператор, определяемый равенством

$$0x = 0$$

для любого $x \in X$. Таким образом, совокупность всех операторов, действующих из X в Y, есть линейная система. Более того, эта совокупность будет линейным нормированным пространством. В самом деле, для каждого оператора A определена норма этого оператора $\|A\|$, являющаяся неотрицательным числом, и остается проверить лишь выполнение аксиом нормы.

1. Если $A = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для любого x и потому

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = 0.$$

Пусть, наоборот, $\|A\| = 0$. Тогда для любого $x \in X$

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| = 0,$$

т. е. $A = 0$. Первая аксиома нормы выполняется.

2. $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|(\lambda A)x\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, и вторая аксиома нормы также выполняется.

3. Подобным же образом проверяется выполнение третьей аксиомы нормы:

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \{\|A(x)\| + \|Bx\|\} \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \\ = \|A\| + \|B\|.$$

Итак, совокупность всех линейных операторов, действующих из X в Y, есть линейное нормированное пространство. Это пространство обозначается символом $(X \to Y)$. Покажем, что если Y — полное пространство, то $(X \to Y)$ также полное.

Пусть $\{A_n\} \subset (X \to Y)$ и

$$\|A_{n+p} - A_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \ p > 0.$$

Из обратного неравенства треугольника следует

$$| \| A_{n+p} \| - \| A_n \| | \to 0,$$

т. е. $\{ \| A_n \| \}$ есть сходящаяся и потому ограниченная числовая последовательность. Положим $K = \sup\limits_n \| A_n \|$.

Возьмем любой элемент $x \in X$ и рассмотрим последовательность $\{ A_n x \} \subset Y$. Эта последовательность сходится в себе, потому что

$$\| A_{n+p} x - A_n x \| = \| (A_{n+p} - A_n) x \| \leqslant \| A_{n+p} - A_n \| \cdot \| x \| \to 0$$

при $n \to \infty$, $p > 0$. Так как Y — полное пространство, то существует элемент $y \in Y$, являющийся пределом этой последовательности: $y = \lim\limits_n A x_n$. Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие один определенный $y \in Y$, и мы приходим к оператору $y = Ax$, действующему из X в Y. Этот оператор аддитивен и однороден:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_n A_n (x_1 + x_2) = \lim_n \{ A_n x_1 + A_n x_2 \} = \\ = \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 = A x_1 + A x_2,$$

$$A(\lambda x) = \lim_n A_n (\lambda x) = \lim_n \lambda A_n x = \lambda \lim_n A_n x = \lambda A x.$$

Этот оператор также ограничен:

$$\| Ax \| = \| \lim_n A_n x \| = \lim_n \| A_n x \| \leqslant \lim_n \| A_n \| \cdot \| x \| \leqslant \\ \leqslant \lim_n K \| x \| = K \| x \|.$$

Следовательно, A — линейный оператор.

Покажем, что $A_n \to A$ в смысле сходимости по норме в пространстве $(X \to Y)$. Из неравенства

$$\| A_{n+p} - A_n \| < \varepsilon,$$

$n \geqslant n_0(\varepsilon)$, $p > 0$, для $\| x \| \leqslant 1$ будет следовать

$$\| A_{n+p} x - A_n x \| < \varepsilon \tag{1}$$

при $n \geqslant n_0$, $p > 0$. Пусть $p \to \infty$. Тогда (1) в пределе дает

$$\| Ax - A_n x \| \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$, и так как это верно для любого x из единичного шара $\|x\| \leqslant 1$, то

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$, что и требовалось доказать.

Рассмотренную только что сходимость по норме в пространстве операторов называют также *равномерной сходимостью последовательности операторов*, потому что в этом случае $\{A_n x\}$ сходится к Ax равномерно на любом шаре $\|x\| \leqslant r$, как это следует из неравенства

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot r < \varepsilon,$$

если

$$\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Помимо равномерной сходимости в пространстве операторов можно рассматривать еще точечную сходимость: $\{A_n\} \subset (X \to Y)$ *сходится точечно к* $A \in (X \to Y)$, если для любого $x \in X$

$$\|A_n x - Ax\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Ясно, что из равномерной сходимости следует точечная. Обратное не верно, как показывает следующий пример.

В пространстве l_2 рассмотрим последовательность операторов $A_n x$, где $A_n x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$ для $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$. Так как для любого $x = \{\xi_i\} \in l_2$

$$\|A_n x - x\| = \|\{0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \ldots, \xi\}\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, то последовательность $\{A_n\}$ точечно сходится к единичному оператору I, переводящему всякий элемент из $x \in l_2$ в тот же самый элемент. Однако равномерная сходимость $\|A_n - I\| \to 0$ не имеет места, потому что для любого n при

$$e_{n+1} = \{0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{(n+1)\text{-е место}}, 0, \ldots\}$$

имеем

$$\|A_n e_{n+1} - I e_{n+1}\| = \|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = \|-e_{n+1}\| = 1,$$

и потому для всех n

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A_n x - Ix\| \geqslant 1.$$

Можно доказать, что пространство операторов $(X \to Y)$ полно и в смысле точечной сходимости, если Y — полное пространство.

В пространстве операторов $(X \to Y)$ можно рассматривать операторные ряды. Именно, ряд

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$

составленный из операторов $A_n \in (X \to Y)$, называется *сходящимся точечно* или *равномерно* к оператору $S \in (X \to Y)$, если последовательность операторов $\{S_n\}$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_n$ точечно, соответственно равномерно, сходится к оператору A.

В следующем параграфе мы познакомимся с примерами таких рядов из операторов.

Упражнения. 1. Понятие равномерной и точечной сходимости можно ввести и для функционалов, определенных на банаховом пространстве X (точечная сходимость функционалов часто называется *слабой сходимостью*). Привести пример точечно, но не равномерно сходящейся последовательности функционалов.

2. В пространстве $C[a, b]$ рассмотрим операторы $Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$, где ядро $K(t, s)$ непрерывно на $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$, и $A_n x = \int_a^b P_n(t, s)\, x(s)\, ds$, где $P_n(t, s)$ — такой полином, что $\max_{t, s} |K(t, s) - P_n(t, s)| \to 0$ при $n \to \infty$. Сходятся ли операторы A_n к оператору A? Какой характер носит эта сходимость?

Ответить на те же вопросы для операторов

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

и

$$A_n x = \int_{a_n}^{b_n} K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ и $a_n \to a$, $b_n \to b$.

§ 4. Обратный оператор. Спектр. Резольвента

Если дан оператор $A \in (X \to Y)$, то оператор $B \in (Y \to X)$, удовлетворяющий равенствам

$$B(Ax) = x \text{ для любого } x \in X \tag{1}$$

и

$$A(By) = y \text{ для любого } y \in Y, \tag{2}$$

называется *оператором, обратным к оператору* A. Равенства (1) и (2) можно записать также в виде

$$BA = I_x, \tag{1'}$$

$$AB = I_y, \tag{2'}$$

где I_x и I_y — единичные операторы, действующие в пространствах X и Y соответственно, а под произведением двух операторов понимается последовательное их применение[1]. Оператор, обратный к A, обозначается символом A^{-1}. Знание обратного оператора позволяет утверждать, что операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{3}$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $A \in (X \to Y)$, y — известный элемент, x — искомый элемент, имеет решение при любой правой части и притом только одно. В самом деле, полагая $x_0 = A^{-1}y$, мы будем иметь, что $Ax_0 = A(A^{-1}y) = y$, т. е. что x_0 есть решение уравнения (1), и следовательно, решение существует. Если x_0' — другое решение того же уравнения, т. е.

$$Ax_0' = y,$$

то, действуя на обе части этого равенства оператором A^{-1}, получим

$$A^{-1}(Ax_0') = A^{-1}y,$$

или

$$x_0' = A^{-1}y = x_0,$$

откуда следует, что решение единственно. Ясно поэтому, что решение операторных уравнений (3) сводится к нахождению обратного оператора. Заметим, что обратный оператор может

---

[1]) Подробнее о произведении операторов см. ниже.

быть лишь один, так как если $AB=BA=I$ и $AB_1=B_1A=I$, то

$$B=BI=B(AB_1)=(BA)B_1=IB_1=B_1.$$

Часто вместо уравнений (3) приходится рассматривать уравнения

$$Ax-\lambda x=y, \tag{4}$$

где $x, y\in X$, $A\in(X\to X)$, x — искомый, y — известный элемент, а λ — некоторый числовой параметр. Уравнение (4) можно также записать в виде

$$(A-\lambda I)x=y. \tag{4'}$$

Одновременно с уравнением (4) целесообразно рассматривать уравнение

$$Ax-\lambda x=0, \tag{5}$$

которое называют *однородным уравнением*, соответствующим уравнению (4). Уравнение же (4) называют тогда *неоднородным*. Ясно, что однородное уравнение всегда имеет нулевое решение $x=0$.

Пусть оператор $A_\lambda=A-\lambda I$ для данного значения параметра λ имеет обратный оператор $A_\lambda^{-1}=(A-\lambda I)^{-1}\in(X\to X)$: этот оператор называют *разрешающим оператором* или *резольвентой* для уравнения (4) или оператора A и обозначают R_λ. Тогда уравнение (4) при любом $y\in X$ имеет решение и притом только одно. Однородное уравнение (5) имеет в этом случае лишь нулевое решение. Такие значения параметра λ называются *регулярными значениями* оператора A или уравнения (4). Все значения параметра λ, не являющиеся регулярными, образуют *спектр* оператора A. Может, например, случиться, что при данном значении λ однородное уравнение (5), кроме нулевого, имеет еще одно или несколько решений, отличных от нуля. Такие значения параметра называются *характеристическими числами* или *собственными значениями* оператора A. Так как в этом случае решение уравнения (5), являющегося частным случаем уравнения (4), не однозначно, то собственные значения принадлежат спектру. Однако могут существовать точки спектра, не являющиеся собственными значениями.

Примеры. 1. Рассмотрим в пространстве $C[0, 1]$ оператор умножения на независимое переменное

$$Ax = tx(t).$$

Уравнение (4) принимает в этом случае вид

$$tx(t) - \lambda x(t) = y(t), \tag{6}$$

и решение $x(t)$ этого уравнения есть функция, тождественно ему удовлетворяющая. Если λ лежит вне отрезка $[0, 1]$, то уравнение (6) имеет при любом $y(t)$ единственное непрерывное решение

$$x(t) = \frac{1}{t-\lambda} y(t),$$

откуда следует, что все такие значения параметра λ являются регулярными, и резольвента есть оператор умножения на $\frac{1}{t-\lambda}$:

$$R_\lambda y = \frac{1}{t-\lambda} y(t).$$

Все значения параметра, принадлежащие отрезку $[0, 1]$, являются точками спектра. В самом деле, пусть $\lambda_0 \in [0, 1]$. Возьмем в качестве $y(t)$ какую-нибудь функцию, не обращающуюся в нуль в точке λ_0, $y(\lambda_0) = a \neq 0$. Для такой функции равенство

$$(t - \lambda_0) x(t) = y(t)$$

не может тождественно удовлетворяться ни при какой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $x(t)$, ибо в точке $t = \lambda_0$ левая часть его равна нулю, в то время как правая отлична от нуля. Следовательно, при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (6) не имеет решения для произвольной правой части, что и доказывает принадлежность λ_0 спектру оператора A. Вместе с тем ни одна точка спектра не является собственным значением, так как решение однородного уравнения

$$(t - \lambda) x(t) = 0, \qquad \lambda \in [0, 1]$$

при любом t, отличном от λ, а следовательно, в силу непрерывности и при $t = \lambda$, обращается в нуль, т. е. тождественно равно нулю.

2. Положим $X = Y = E_n$ и пусть оператор A задается квадратной матрицей (a_{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Уравнение (4) примет для $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вид

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = \eta_1, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = \eta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = \eta_n.\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Это есть система n линейных неоднородных алгебраических уравнений. Если определитель системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, т. е. если λ не есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$, то система уравнений (7) имеет при любых правых частях единственное решение, и следовательно, все такие значения параметра λ регулярны. Корни уравнения $D(\lambda) = 0$ образуют спектр, так как при таких λ система (7) в общем случае неразрешима. Однако при этих значениях параметра λ однородная система

$$\begin{array}{l}(a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0\end{array}$$

имеет нетривиальное решение (т. е. отличное от нулевого), и следовательно, любая точка спектра есть собственное значение.

В приведенных примерах спектр оператора либо не содержал ни одного собственного значения, либо состоял только из собственных значений. Имеются примеры, правда, более сложные, где спектр оператора содержит как собственные значения, так и точки, не являющиеся собственными значениями.

Докажем теперь одну теорему о существовании обратного оператора. Предварительно сделаем несколько замечаний.

В пространстве операторов $(X \to X)$, действующих в банаховом пространстве X, как мы уже отмечали, можно рассматривать произведение операторов. Именно, если $A, B \in (X \to X)$, то AB есть оператор, определяемый равенством

$$(AB)\,x = A\,(Bx).$$

Отличительной особенностью этого произведения является его некоммутативность, потому что, вообще говоря, $AB \neq BA$. Чтобы получить пример некоммутирующих операторов, достаточно взять в E_n два оператора, A и B, заданные некоммутирующими матрицами (a_{ij}) и (b_{ij}). Так как оператор AB задается произведением матриц (a_{ij}) и (b_{ij}), что легко проверить, то некоммутируемость таких операторов очевидна. Свойством дистрибутивности произведение операторов обладает, так как из определения суммы и произведения операторов следует, что

$$(A+B)\,Cx = (A+B)\,(Cx) = A\,(Cx) + B\,(Cx) = ACx + BCx,$$

т. е. что

$$(A+B)\,C = AC + BC.$$

Отметим, что если I — единичный оператор, то $IA = AI = A$ для любого $A \in (X \to X)$.

Нетрудно проверить, что $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$. В самом деле, пусть $x \in X$ и $\|x\| \leqslant 1$. Тогда

$$\|ABx\| = \|A\,(Bx)\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Поэтому и

$$\|AB\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|ABx\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Из доказанного неравенства, в частности, следует, что если $A_n \to A$ и $B_n \to B$ в смысле равномерной сходимости, то

$$A_n B_n \to AB.$$

Прежде всего из сходимости последовательности $\{A_n\}$ к A следует, что $\{\|A_n\|\}$ есть ограниченная числовая последовательность, т. е. $\|A_n\| \leqslant K$ для любого n. Поэтому

$$\|A_nB_n - AB\| \leqslant \|A_nB_n - A_nB\| + \|A_nB - AB\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n\| \cdot \|B_n - B\| + \|A_n - A\| \cdot \|B\| \to 0$$

при $n \to \infty$, так как в каждом слагаемом справа один множитель ограничен, а другой стремится к нулю.

Частным случаем произведения операторов являются степени оператора

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A, \ldots, \quad A^{n+1} = A^n A, \ldots$$

Ясно, что

$$A^n A^m = A^m A^n = A^{n+m}.$$

Положим, кроме того, по определению, что $A^0 = I$.

Теорема. *Пусть $A \in (X \to X)$, где X — банахово пространство и $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$. Тогда оператор $I - \mu A$ имеет обратный, причем*

$$(I - \mu A)^{-1} = I + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots + \mu^n A^n + \ldots$$

Рассмотрим ряд

$$I + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots + \mu^n A^n + \ldots \qquad (8)$$

и составим частичные суммы этого ряда:

$$S_1 = I + \mu A, \qquad S_2 = I + \mu A + \mu^2 A^2, \ \ldots,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mu^k A^k.$$

Имеем

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} \mu^k A^k \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |\mu|^k \cdot \| A^k \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |\mu|^k \cdot \| A \|^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} q^k,$$

где $q = |\mu| \, \| A \| < 1$. Отсюда следует, что

$$\| S_{n+p} - S_n \| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \ p > 0,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (8) сходится в себе. В силу полноты пространства операторов существует

$$\lim_n S_n = S \in (X \to X).$$

Покажем, что $S=(I-\mu E)^{-1}$. Имеем

$$(I-\mu A)\,S=(I-\mu A)\lim_n S_n=\lim_n (I-\mu A)\,S_n=$$
$$=\lim_n\,[(I+\mu A+\mu^2A^2+\ldots+\mu^nA^n)-$$
$$-(\mu A+\mu^2A^2+\ldots+\mu^{n+1}S^{n+1})]=\lim_n (I-\mu^{n+1}A^{n+1})=I,$$

ибо $\mu^{n+1}A^{n+1}\to 0$, как общий член сходящегося ряда. Аналогично убеждаемся, что

$$S(I-\mu A)=I,$$

и теорема полностью доказана.

Применим доказанную теорему к интегральным уравнениям.

Пусть $K(t, s)$ — непрерывное на $a\leqslant t,\ s\leqslant b$ ядро и $x(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Тогда

$$Ax(t)=\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds$$

есть линейный оператор, действующий в пространстве $C[a, b]$, а интегральное уравнение

$$x(t)-\mu\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds=y(t), \qquad (9)$$

называемое *уравнением Фредгольма второго рода*, можно записать в операторной форме

$$x-\mu Ax=y.$$

На основании предыдущей теоремы мы получаем, что если $|\mu|<\frac{1}{\|A\|}$, то уравнение (9) имеет единственное решение, которое дается равенством

$$x=(I-\mu A)^{-1}y=y+\mu Ay+\mu^2A^2y+\ldots+\mu^nA^ny+\ldots$$

Рассмотрим подробнее это решение и условия, при которых оно существует. Так как $\|A\|\leqslant\max\limits_{t,s}|K(t, s)|\,(b-a)=$ $=K(b-a)$, то условие $|\mu|<\frac{1}{\|A\|}$, очевидно, выполняется, если $|\mu|<\frac{1}{K(b-a)}$. Будем считать, что μ удовлетворяет этому неравенству. Выясним, что представляют в нашем случае степени оператора. Имеем

$$A^2x = A(Ax) = \int_a^b K(t, s) \left(\int_a^b K(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma\right) ds =$$
$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) K(s, \sigma) ds\right) x(\sigma) d\sigma.$$

Пусть

$$\int_a^b K(t, s) K(s, \sigma) ds = K_2(t, \sigma).$$

Функция $K_2(t, s)$ называется *второй итерацией ядра* $K(t, s)$. Итак,

$$A^2x = \int_a^b K_2(t, \sigma) x(\sigma) d\sigma$$

или, меняя обозначение переменной интегрирования,

$$A^2x = \int_a^b K_2(t, s) x(s) ds.$$

Далее,

$$A^3x = A(A^2x) = \int_a^b K(t, s) \left(\int_a^b K_2(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma\right) ds =$$
$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) K_2(s, \sigma) ds\right) x(\sigma) d\sigma$$

и, снова полагая

$$\int_a^b K(t, s) K_2(s, \sigma) ds = K_3(t, \sigma),$$

можем написать

$$A^3x = \int_a^b K_3(t, s) x(s) ds,$$

где $K_3(t, s)$ — *третья итерация ядра* $K(t, s)$. Вообще

$$A^nx = \int_a^b K_n(t, s) x(s) ds,$$

где $K_n(t, s)$ есть *n-я итерация ядра* $K(t, s)$, определяемая формулой

$$K_n(t, s)=\int_a^b K(t, \tau) K_{n-1}(\tau, s)\, d\tau.$$

Равенство

$$A^{n+p}=A^n A^p=A^p A^n,$$

которое мы отмечали выше, дает

$$K_{n+p}(t, s)=\int_a^b K_n(t, \tau) K_p(\tau, s)\, d\tau=\int_a^b K_p(t, \tau) K_n(\tau, s)\, d\tau.$$

С помощью итерированных ядер решение интегрального уравнения может быть записано так:

$$x(t)=y(t)+\mu \int_a^b K(t, s) y(s)\, ds+\mu^2 \int_a^b K_2(t, s) y(s)\, ds+\ldots$$
$$\ldots+\mu^n \int_a^b K_n(t, s) y(s)\, ds+\ldots \qquad (10)$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится в смысле сходимости в пространстве $C[a, b]$, т. е. равномерно.

Преобразуем выражение для решения интегрального уравнения. Рассмотрим формальный ряд

$$K(t, s)+\mu K_2(t, s)+\mu^2 K_3(t, s)+\ldots+\mu^{n-1} K_n(t, s)+\ldots \qquad (11)$$

Этот ряд равномерно сходится на $a \leqslant t, s \leqslant b$, если $|\mu| < \frac{1}{K(b-a)}$. В самом деле, прежде всего имеем

$$|K_2(t, s)| \leqslant \int_a^b |K(t, \tau)|\, |K(\tau, s)|\, d\tau \leqslant K^2(b-a),$$

$$|K_3(t, s)| \leqslant \int_a^b |K(t, \tau)|\, |K_2(\tau, s)|\, d\tau \leqslant K^3(b-a)^2$$

и вообще

$$|K_n(t, s)| \leqslant K^n (b-a)^{n-1}.$$

Отсюда

$$|\mu^{n-1} K_n(t, s)| \leqslant |\mu|^{n-1} K^n (b-a)^{n-1}=K q^{n-1},$$

где $q = |\mu| K(b-a) < 1$. Таким образом, общий член исследуемого функционального ряда не превосходит по абсолютной величине члена сходящегося числового ряда, и требуемая равномерная сходимость доказана. Обозначим сумму этого ряда $R(t, s, \mu)$. Это — непрерывная функция. Умножая члены ряда (11) на $y(s)$ и интегрируя ряд почленно, получим

$$\int_a^b K(t, s) y(s)\, ds + \mu \int_a^b K_2(t, s) y(s)\, ds + \mu^2 \int_a^b K_3(t, s) y(s)\, ds + \ldots$$
$$\ldots + \mu^{n-1} \int_a^b K_n(t, s) y(s)\, ds + \ldots = \int_a^b R(t, s, \mu) y(s)\, ds.$$

Сравнивая это выражение с выражением (10) для решения интегрального уравнения, можем написать

$$x(t) = y(t) + \mu \int_a^b R(t, s, \mu) y(s)\, ds. \qquad (12)$$

Это и есть выражение для обратного оператора $(I - \mu A)^{-1}$ в компактной форме. Функция $R(t, s, \mu)$ называется *разрешающим ядром* рассматриваемого уравнения Фредгольма.

Рассуждениями, аналогичными проведенным выше, читатель легко докажет, что если

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds = Q^2 < \infty$$

и $y(s) \in L_2(a, b)$, то интегральное уравнение (9) при значениях параметра μ, удовлетворяющих неравенству $|\mu| < \frac{1}{Q}$, имеет решение, выражаемое формулой (12), где разрешающее ядро $R(t, s, \mu)$ по переменным t и s имеет интегрируемый квадрат, и ряд (11), его изображающий, сходится в среднем.

Оператор $(I - \mu A)^{-1}$, построенный в предыдущей теореме, не является, строго говоря, резольвентой оператора A. Однако с помощью этого оператора резольвенту можно получить без труда. В самом деле, преобразуем оператор A_λ следующим образом:

$$A_\lambda = A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right) = -\lambda (I - \mu A),$$

где $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Если теперь $|\lambda| > \|A\|$, то $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$, и потому существует $(I - \mu A)^{-1}$. Но тогда

$$(A - \lambda I)\left[-\frac{1}{\lambda}(I - \mu A)^{-1}\right] = \\ = [-\lambda(I - \mu A)]\left[-\frac{1}{\lambda}(I - \mu A)^{-1}\right] = I,$$

т. е.

$$-\frac{1}{\lambda}(I - \mu A)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda.$$

Приведем еще одну теорему о существовании обратного оператора.

Теорема (Банаха). *Пусть линейный оператор A отображает взаимно однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда оператор A имеет обратный оператор.*

Доказательство этой теоремы, точнее, ограниченности обратного оператора, довольно сложно (аддитивность и однородность A^{-1} доказываются без труда), и мы его не приводим.

Пользуясь теоремой Банаха, существование оператора или $(I - \mu A)^{-1}$ можно доказать с помощью принципа сжатых отображений. Рассмотрим оператор $Bx = \mu Ax + y$. Имеем $\|Bx_1 - Bx_2\| = \|\mu Ax_1 - \mu Ax_2\| \leqslant |\mu| \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\|$, и так как $|\mu| \|A\| = \alpha < 1$, то оператор B дает сжатые отображения, и потому уравнение

$$x = \mu Ax + y$$

для любого $y \in X$ имеет единственное решение. Это означает, что оператор $(X - \mu A)$ отображает X на Y взаимно однозначно. Отсюда в силу теоремы Банаха существует обратный оператор.

Упражнения. 1. Пусть $Ax = tx(t)$, $Bx = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$. Будут ли операторы A и B перестановочны?

2. Имеет ли оператор $Ax = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$ собственные значения в пространстве $C[0, 1]$?

3. Показать, что для уравнения $Ax-\lambda x=y$, где $Ax=\int\limits_a^t K(t, s)\,x(s)\,ds$ — оператор Вольтерра, а $K(t, s)$ непрерывно для $a\leqslant s$, $t\leqslant b$, все значения параметра λ регулярны.

4. Пользуясь представлением разрешающего ядра $R(t, s, \mu)$ уравнения Фредгольма в виде ряда, проверить так называемые *соотношения Фредгольма*

$$R(t, s, \mu)=K(t, s)+\mu\int\limits_a^b K(t, \tau)\,R(\tau, s, \mu)\,d\tau,$$

$$R(t, s, \mu)=K(t, s)+\mu\int\limits_a^b R(t, \tau, \mu)\,K(\tau, s)\,d\tau.$$

Показать из этих соотношений, что оператор

$$Q_\mu x=x(t)+\mu\int\limits_a^b R(t, s, \mu)\,x(s)\,ds$$

будет обратным к оператору

$$K_\mu x=x(t)-\mu\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds.$$

5. Показать, что если значение параметра λ является регулярным для оператора A, то оно будет регулярным и для оператора $A+B$, когда $\|B\|$ достаточно мала.

§ 5. Гильбертово пространство

В пространствах $L_2(a, b)$ и l_2, которые являются банаховыми пространствами, кроме операций сложения элементов этих пространств и умножения элемента на число, определено скалярное произведение элементов.

Именно, для $x(t)$, $y(t)\in L_2(a, b)$ *скалярное произведение* есть

$$(x, y)=\int\limits_a^b x(t)\,y(t)\,dt$$

и для элементов $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}\in l_2$ *скалярным произведением* будет

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i.$$

Из неравенства Буняковского — Шварца следует, что в обоих случаях (x, y) есть конечная величина.

При изучении ряда вопросов представляется целесообразным ввести абстрактное пространство со скалярным произведением, частными случаями которого были бы упомянутые выше пространства $L_2(a, b)$ и l_2.

Пусть $X=\{x, y, \dots\}$ — множество элементов некоторой природы, удовлетворяющее следующим условиям:

I. X — линейная система с умножением на комплексные числа.

II. В X определено скалярное произведение (x, y) двух элементов, являющееся комплексным числом, причем:

а) (x, x) вещественно, неотрицательно и $(x, x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

б) $(x, y)=\overline{(y, x)}$;

в) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$;

г) $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$.

Из б), в) и г) следует, в частности, что

$$(x, \lambda y)=\bar{\lambda}(x, y)$$

и

$$(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2).$$

С помощью скалярного произведения вводится норма посредством равенства

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}.$$

Ниже мы покажем, что эта норма удовлетворяет всем необходимым требованиям.

III. X — полное пространство в смысле сходимости по только что введенной норме.

IV. X — бесконечномерное пространство, т. е. в X для любого натурального n есть n линейно независимых элементов.

Множество X, удовлетворяющее всем перечисленным аксиомам, называется *гильбертовым пространством*. Таким образом, гильбертово пространство есть частный случай банахова пространства.

Если допускается умножение элементов пространства X лишь на вещественные числа и скалярное произведение всегда вещественно, то X называют *вещественным гильбертовым пространством*.

Мы будем рассматривать только вещественные гильбертовы пространства и, кроме того, будем предполагать их сепарабельными. Таковы будут, например, рассмотренные выше гильбертовы пространства $L_2(a, b)$ и l_2. Отметим, что почти все последующие результаты будут верны и для несепарабельных комплексных гильбертовых пространств. В дальнейшем гильбертово пространство будем обозначать буквой H.

Обобщим, прежде всего, на случай скалярного произведения в H неравенство Буняковского — Шварца. Для любого вещественного числа λ и любых x и $y \in H$ имеем

$$(x+\lambda y,\ x+\lambda y) \geqslant 0,$$

откуда

$$(x, x)+2\lambda(x, y)+\lambda^2(y, y) \geqslant 0.$$

Так как квадратный относительно λ трехчлен неотрицателен, то дискриминант его меньше или равен нулю:

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y),$$

т. е.

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Это и есть неравенство Буняковского — Шварца для абстрактного гильбертова пространства. Из него, в частности, следует непрерывность скалярного произведения, т. е. если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Теперь легко проверить, что норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет необходимым условиям:

1) $\|x\| = 0$ эквивалентно $x = 0$; это непосредственно следует из а);

2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \times \times \|x\|$;

3) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x)+2(x, y)+(y, y) \leqslant \leqslant \|x\|^2+2\|x\| \cdot \|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$, откуда, извлекая квадратный корень, получим

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

Элементы x и $y \in H$ называются *ортогональными*, если

$$(x, y) = 0.$$

Система $\{e_i\} \subset H$ называется *ортонормальной*, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Так же, как и в случае пространства $L_2(a, b)$, доказывается, что из любой линейно независимой системы $\{x_i\} \subset H$ можно построить методом Шмидта ортонормальную систему $\{e_i\}$, определяющую то же подпространство, что и $\{x_i\}$, и что в сепарабельном гильбертовом пространстве существует базис, т. е. полная ортонормальная система. Наконец, вся развитая выше для пространства $L_2(a, b)$ теория рядов Фурье полностью переносится на случай абстрактного сепарабельного вещественного гильбертова пространства. Напомним из этой теории один факт, который будет играть существенную роль в дальнейшем. Пусть L — подпространство пространства H. Существует ортонормальная система $\{e_i\}$, порождающая это подпространство. Тогда (см. стр. 166) любой элемент $x \subset H$ однозначно представим в виде

$$x = y + z,$$

где $y \in L$, $z \perp L$. Элемент $y = \sum\limits_i c_i e_i$, $c_i = (x, e_i)$, называется *проекцией* элемента x на подпространство L. Совокупность всех элементов z, ортогональных L, также образует подпространство M, которое называют *ортогональным дополнением* L и обозначают $H \dot{-} L$. Говорят также, что все пространство H *разложено в ортогональную сумму* двух подпространств и пишут $H = L \dot{+} M$.

Пример. Пусть $H = L_2(-\pi, \pi)$ и пусть L — подмножество H, составленное из классов, представителями которых являются четные функции $x(-t) = x(t)$.

Выбрав в качестве базиса тригонометрическую систему функций и замечая, что всякая четная функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам кратных углов, мы получаем, что L — подпространство, порождаемое системой

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots$$

Ортогональным дополнением к этому подпространству будет подпространство, составленное из классов, представителями которых будут функции, разлагающиеся в ряды Фурье только по синусам кратных углов, т. е. нечетные функции: $x(-t) = -x(t)$.

Рассмотрим в пространстве H два элемента, x и y, и скалярное произведение этих элементов (x, y). Если мы временно зафиксируем y и будем менять x, то получим некоторый функционал $f_y(x)$, определенный на H:

$$f_y(x) = (x, y).$$

Из аддитивности и непрерывности скалярного произведения следует, что $f_y(x)$ — линейный функционал. Беря различные элементы y, мы будем получать различные линейные функционалы $f_y(x)$. Оказывается, что таким образом мы получим все линейные функционалы.

Теорема 1. *Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный на гильбертовом пространстве H, имеет вид*

$$f(x) = (x, y), \tag{1}$$

где элемент y однозначно определяется функционалом f. При этом

$$\|f\| = \|y\|.$$

Пусть N — множество нулей функционала f, т. е. множество элементов $z \in H$, таких, что $f(z) = 0$. Легко видеть, что N — подпространство. В самом деле, если $z_1, z_2 \in N$, то

$$f(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 f(z_1) + \alpha_2 f(z_2) = 0,$$

т. е. $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in N$. Если, далее, $\{x_n\} \subset N$ и $x_n \to x_0$, то

$$f(x_0) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = 0,$$

т. е. $x_0 \in N$. Если $N = H$, т. е. $f(x)$ тождественно равен нулю, мы можем написать

$$f(x) = (x, 0) = 0,$$

и в этом случае равенство (1) доказано.

Предположим поэтому, что $N \neq H$; возьмем элемент $y_0 \in H$, не входящий в N, и обозначим через y_0' проекцию элемента y_0 на подпространство $H \dot{-} N$. Пусть $f(y_0') = \alpha$. Тогда, полагая $y_1 = \frac{y_0'}{\alpha}$, будем иметь $f(y_1) = 1$.

Возьмем любой элемент $x \in H$, и пусть $f(x) = \beta$. Имеем

$$f(x) = \beta = \beta f(y_1) = f(\beta y_1),$$

откуда

$$f(x - \beta y_1) = 0,$$

т. е. $x-\beta y_1=z\in N$. Поэтому любой элемент $x\in H$ имеет вид

$$x=\beta y_1+z, \tag{2}$$

т. е. H есть ортогональная сумма подпространства N и одномерного подпространства, порождаемого элементом y_1. Из равенства (2), умножая его скалярно на y_1, получаем

$$(x, y_1)=\beta\|y_1\|^2,$$

или

$$\left(x, \frac{y_1}{\|y_1\|^2}\right)=\beta=f(x).$$

Обозначая $\frac{y_1}{\|y_1\|^2}$ через y, будем иметь

$$f(x)=(x, y),$$

и равенство (1) доказано.

Если при всех $x\in H$

$$f(x)=(x, \tilde{y})$$

для некоторого другого элемента $\tilde{y}$, то

$$(x, y)=(x, \tilde{y})$$

или

$$(x, y-\tilde{y})=0$$

при любом $x\in H$. В частности, полагая $x=y-\tilde{y}$, получим

$$\|y-\tilde{y}\|^2=0,$$

т. е. $y=\tilde{y}$, и однозначность представления линейного функционала в виде скалярного произведения доказана.

Из неравенства Буняковского — Шварца при $\|x\|\leqslant 1$ получаем

$$|f(x)|=|(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\leqslant\|y\|,$$

поэтому и

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|\leqslant\|y\|. \tag{3}$$

С другой стороны, если $x_0=\frac{y}{\|y\|}$, то мы будем иметь

$$f(x_0)=f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)=\frac{1}{\|y\|}f(y)=\frac{1}{\|y\|}(y, y)=\|y\|,$$

и так как $\|x_0\|=1$, то

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|\geqslant f(x_0)=\|y\|. \tag{4}$$

Из сравнения (3) и (4) следует, что

$$\|f\| = \|y\|,$$

и теорема полностью доказана.

Как частные случаи этой теоремы, получаем:

а) *Всякий линейный функционал в* $L_2(a, b)$ *имеет вид*

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt,$$

где $y(t)$ *также принадлежит* $L_2(a, b)$, *причем*

$$\|f\| = \left(\int_a^b y^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

б) *Всякий линейный функционал в* l_2 *имеет вид*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, *причем*

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наличие в гильбертовом пространстве скалярного произведения позволяет выделить в нем один специальный класс линейных операторов, так называемые симметрические или самосопряженные операторы.

Оператор $A \in (H \to H)$ называется *симметрическим*, если для любых $x, y \in H$

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Понятие симметрического оператора связано с понятием сопряженного оператора. Пусть $A \in (H \to H)$; рассмотрим скалярное произведение (Ax, y), где x — переменный, а y — фиксированный элементы пространства H. Это скалярное произведение, как легко убедиться, есть линейный функционал от x. Поэтому в силу предыдущей теоремы

$$(Ax, y) = (x, y^*), \tag{5}$$

где элемент $y^* \in H$ для данного оператора A и данного $y \in H$ определяется однозначно. Меняя элемент y, мы будем получать, вообще говоря, разные элементы y^*; тем самым у нас определится некоторый оператор A^*:

$$y^* = A^* y,$$

ставящий в соответствие каждому $y \in H$ с помощью равенства (5) некоторый элемент y^* того же пространства. Можно доказать, что A^* — линейный оператор, и его называют *оператором, сопряженным с* A.

Если A — симметрический оператор, то равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

показывает, что

$$A^* y = Ay.$$

Поэтому симметрический оператор совпадает со своим сопряженным, и его называют также *самосопряженным* оператором.

Пример. В пространстве $L_2(a, b)$ рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с ядром, имеющим интегрируемый квадрат. Имеем, используя теорему Фубини,

$$(Ax, y) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right\} y(t)\, dt =$$
$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt \right\} x(s)\, ds = (x, y^*),$$

где

$$y^*(s) = \int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt.$$

Таким образом, переход к сопряженному оператору заключается в том, что интегрирование ведется по первой переменной, тогда как в исходном операторе оно ведется по второй.

Если ядро симметрическое,

$$K(t, s) = K(s, t),$$

то

$$A^*y = \int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt = \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = Ay,$$

и оператор Фредгольма — самосопряженный.

В заключение этого параграфа остановимся на *слабой сходимости* в гильбертовом пространстве.

Последовательность $\{x_n\} \subset H$ называют *слабо сходящейся* к элементу $x_0 \in H$ и пишут $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, если для любого $y \in H$

$$(x_n, y) \to (x_0, y).$$

В отличие от только что введенной слабой сходимости, сходимость по норме в гильбертовом пространстве часто называют *сильной сходимостью*. Так как скалярное произведение непрерывно относительно сходимости по норме, то из $x_n \to x_0$ следует, что

$$(x_n, y) \to (x_0, y)$$

при любом $y \in H$, т. е. из сильной сходимости следует слабая. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пусть $\{e_n\}$ — бесконечная ортонормальная система, безразлично полная или неполная. Для любого $y \in H$ имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \|y\|^2, \tag{6}$$

где c_n — коэффициенты Фурье элемента y по системе $\{e_n\}$:

$$c_n = (y, e_n) = (e_n, y).$$

Из (6) следует, что $c_n \to 0$, т. е. что

$$(e_n, y) \to (0, y),$$

и так как y — любой элемент из H, это означает, что

$$e_n \xrightarrow{\text{сл}} 0.$$

С другой стороны,

$$\|e_n - e_m\|^2 = (e_n - e_m, e_n - e_m) = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2,$$

или

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

для любых n и m, $n \neq m$, откуда следует, что последовательность $\{e_n\}$ не может сходиться по норме ни к нулю, ни к другому какому-либо элементу.

Можно показать, что пространство H полно относительно слабой сходимости, т. е. для любой последовательности $\{x_n\} \subset H$, удовлетворяющей условию

$$(x_n, y) - (x_m, y) \to 0$$

при $n, m \to \infty$ и при любом $y \in H$, найдется элемент $x_0 \in H$ такой, что

$$(x_n, y) \to (x_0, y)$$

при $n \to \infty$ и при любом $y \in H$.

Для установления этого факта мы воспользуемся следующей весьма полезной во многих случаях леммой.

Лемма. *Если последовательность $\{x_n\} \subset H$ такова, что для любого $y \in H$ числовая последовательность $\{(x_n, y)\}$ ограничена, то нормы элементов x_n ограничены в совокупности, т. е.*

$$\|x_n\| \leqslant M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Доказательство. Из ограниченности последовательности $\{(x_n, y)\}$ для любого $y \in H$ вытекает прежде всего, что числовое множество $\{(x_n, y)\}$ остается ограниченным, когда y меняется в некотором шаре $\|y - y_0\| \leqslant r_0$. В самом деле, если бы это было не так, т. е. если бы множество $\{(x_n, y)\}$ не было ограничено ни в одном таком шаре, то, взяв шар $\|y - y^*\| \leqslant 1$, где y^* — произвольный элемент из H, мы нашли бы в нем точку y_1 и номер n_1 такие, что

$$|(x_{n_1}, y_1)| > 1.$$

В силу непрерывности скалярного произведения это неравенство выполнялось бы в некоторой шаровой окрестности $\|y - y_1\| \leqslant \rho_1$, $\rho_1 < \frac{1}{2}$, точки y_1, целиком лежащей в шаре $\overline{K}(y^*, 1)$.

В шаре $\overline{K}(y_1, \rho_1)$ множество чисел (x_n, y), $n > n_1$, снова остается неограниченным, и потому найдется точка $y_2 \in \overline{K}(y_1, \rho_1)$ и номер $n_2 > n_1$ такие, что

$$|(x_{n_2}, y_2)| > 2.$$

По непрерывности неравенство сохранится в некоторой шаровой окрестности $\|y - y_2\| \leqslant \rho_2$, $\rho_2 < \frac{1}{2^2}$, целиком лежащей в $\overline{K}(y_1, \rho_1)$.

В шаре $\overline{K}(y_2, \rho_2)$ числа (x_n, y), $n > n_2$, по-прежнему образуют неограниченное множество, и потому найдутся точка $y_3 \in \overline{K}(y_2, \rho_2)$ и номер $n_3 > n_2$ такие, что $|(x_{n_3}, y_3)| > 3$ и т. д.

Мы получим, таким образом, последовательности точек $\{y_k\}$ и номеров $\{n_k\}$, для которых $|(x_{n_k}, y_k)| > k$, причем из построения ясно, что $|(x_{n_k}, y_{k+p})| > k$ для любого $p > 0$.

Так как $\|y_{k+1} - y_k\| < \frac{1}{2^k}$, то последовательность $\{y_k\}$ сходится сильно в себе, а следовательно, и к некоторому пределу $\overline{y} \in H$. Переходя в неравенстве $|(x_{n_k}, y_{k+p})| > k$ к пределу при $p \to \infty$, получим, что $|(x_{n_k}, \overline{y})| \geqslant k$, что противоречит предположенной ограниченности последовательности $\{(x_n, \overline{y})\}$.

Итак, числовое множество $\{(x_n, y)\}$ будет ограниченным, когда y меняется в некотором шаре $\|y - y_0\| \leqslant r_0$, т. е. для элементов $y \in H$, удовлетворяющих этому условию, имеем

$$|(x_n, y)| \leqslant k, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$\|x_n\| = \left(x_n, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{r_0}\left\{\left(x_n, y_0 + r_0\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) - \left(x_n, y_0\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r_0}\left\{\left|\left(x_n, y_0 + r_0\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right| + \left|\left(x_n, y_0\right)\right|\right\}.$$

Но оба элемента, y_0 и $y_0 + r_0\frac{x_n}{\|x_n\|}$, принадлежат шару $\|y - y_0\| \leqslant r_0$, и потому оба слагаемых в фигурных скобках не превосходят некоторого числа L. Поэтому

$$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{r_0} 2L = M,$$

и лемма доказана.

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в себе, т. е. для любого $y \in H$

$$(x_n, y) - (x_m, y) \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty,$$

то нормы элементов этой последовательности ограничены в совокупности.

В самом деле, в этом случае при любом $y \in H$ числовая последовательность $\{(x_n, y)\}$, как сходящаяся в себе, ограничена. Теперь доказательство слабой полноты пространства H не представляет труда. Будем рассматривать скалярные произведения (x_n, y) как функционалы $f_n(y)$. Тогда слабая сходимость в себе последовательности $\{x_n\}$ означает, что для любого $y \in H$

$$|f_n(y) - f_m(y)| \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty.$$

Отсюда в силу критерия Коши для числовых последовательностей следует, что существует $\lim\limits_n f_n(y) = f_0(y)$. Функционал $f_0(y)$ аддитивен, потому что

$$f_0(y_1 + y_2) = \lim_n f_n(y_1 + y_2) =$$
$$= \lim_n f_n(y_1) + \lim_n f_n(y_2) = f_0(y_1) + f_0(y_2),$$

и ограничен, так как в силу ограниченности норм последовательности $\{x_n\}$

$$|f_0(x)| = |\lim_n f_n(y)| = \lim_n |f_n(y)| \leqslant \overline{\lim_n} \|x_n\| \cdot \|y\| \leqslant M \|y\|.$$

Таким образом, $f_0(y)$ — линейный функционал, следовательно, существует элемент $x_0 \in H$ такой, что $f_0(y) = (x_0, y)$.

Переходя в неравенстве

$$|f_n(y) - f_m(y)| < \varepsilon, \; n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$$

к пределу при $m \to \infty$, получим

$$|f_n(y) - f_0(y)| \leqslant \varepsilon, \; n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

или

$$|(x_n, y) - (x_0, y)| \leqslant \varepsilon, \; n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Так как это верно для любых $y \in H$ и $\varepsilon > 0$, то

$$x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0,$$

и слабая полнота пространства H доказана.

Следующая теорема является весьма важной.

Теорема 2. *Всякое ограниченное множество сепарабельного гильбертова пространства слабо компактно, т. е. из любой последовательности, принадлежащей такому множеству, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Достаточно доказать слабую компактность шара $\|x\| \leqslant r$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\| \leqslant r$. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H. Числовая последовательность $\{(x_n, e_1)\}$ ограничена, так как $|(x_n, e_1)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|e_1\| \leqslant r$, и потому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x_n^{(1)}, e_1)\}$. Последовательность $\{(x_n^{(1)}, e_2)\}$ есть снова ограниченная числовая последовательность, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x_n^{(2)}, e_2)\}$ и т. д.

Рассмотрим диагональную последовательность

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(m)}, \ldots .$$

Для любого элемента e_i базиса последовательность $\{(x_k^{(k)}, e_i)\}$ сходится, так как она есть подпоследовательность (начиная с номера i) сходящейся последовательности $\{(x_n^{(i)}, e_i)\}$. В силу аддитивности и однородности скалярного произведения будет сходиться также последовательность

$$\left\{\left(x_k^{(k)}, \sum_{i=1}^{N} c_i e_i\right)\right\}$$

для любого N и при любых $c_1, c_2, \ldots, c_N$. Возьмем теперь произвольный элемент $y \in H$, и пусть $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ — ряд Фурье для этого элемента по ортонормальной системе $\{e_i\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что

$$\left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i e_i \right\| < \frac{\varepsilon}{4r}.$$

Тогда

$$\left|\left(x_k^{(k)}, y\right)-\left(x_m^{(m)}, y\right)\right| \leqslant\left|\left(x_k^{(k)}-x_m^{(m)}, \sum_{i=1}^N c_i e_i\right)\right|+$$

$$+\left|\left(x_k^{(k)}, \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i e_i\right)\right|+\left|\left(x_m^{(m)}, \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i e_i\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\left(x_k^{(k)}-x_m^{(m)}, \sum_{i=1}^N c_i e_i\right)\right|+\left(\left\|x_k^{(k)}\right\|+\left\|x_m^{(m)}\right\|\right)\left\|\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i e_i\right\|<$$

$$<\left|\left(x_k^{(k)}-x_m^{(m)}, \sum_{i=1}^N c_i e_i\right)+\frac{\varepsilon}{2}.\right.$$

При фиксированном N можно подобрать n_0 так, что при k, $m \geqslant n_0$ будем иметь

$$\left|\left(x_k^{(k)}-x_m^{(m)}, \sum_{i=1}^N c_i e_i\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при k, $m \geqslant n_0$

$$\left|\left(x_k^{(k)}, y\right)-\left(x_m^{(m)}, y\right)\right|<\varepsilon,$$

т. е. последовательность $\left\{x_n^{(n)}\right\}$ сходится слабо в себе. Отсюда и из слабой полноты пространства H уже следует, что существует элемент $x_0 \in H$ такой, что $x_n^{(n)} \xrightarrow{\text{сл}} x_0$. Однако в нашем случае это легко доказать и непосредственно.

Обозначим через $f_0(y)$ предел

$$f_0(y)=\lim_k\left(x_k^{(k)}, y\right)=\lim_k f_k(y).$$

Так как $f_k(y)$ при любом k есть линейный, в частности, аддитивный, функционал, то

$$f_0(y_1+y_2)=\lim_k f_k(y_1+y_2)=\lim_k f_k(y_1)+\lim_k f_k(y_2)=$$
$$=f_0(y_1)+f_0(y_2),$$

т. е. $f_0(y)$ — также аддитивный функционал. Далее,

$$|f_0(y)|=\left|\lim_k f_k(y)\right|=\lim_k |f_k(y)|=$$
$$=\lim_k\left|\left(x_k^{(k)}, y\right)\right| \leqslant \overline{\lim}\left\|x_k^{(k)}\right\| \cdot\|y\| \leqslant r\|y\|, \qquad (7)$$

откуда следует, что $f_0(y)$ — ограниченный и, следовательно, линейный функционал. Как линейный функционал в вещественном гильбертовом пространстве, $f_0(y)$ имеет вид $f_0(y) = (x_0, y)$, где x_0 — некоторый элемент пространства H. Таким образом,

$$f_k(y) = (x_k^{(k)}, y) \to (x_0, y) = f_0(y).$$

Последнее означает, что $x_k^{(k)} \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, и теорема доказана.

Замечания. 1. Полезно отметить, что элемент x_0 принадлежит шару $\|x\| \leqslant r$. В самом деле, $\|x_0\| = \|f_0\| \leqslant r$, как это следует из неравенства (7).

2. Слабая компактность ограниченных множеств имеет место и в несепарабельных комплексных гильбертовых пространствах.

Упражнения. 1. Доказать, что пространство функций, рассмотренное в упражнении 4 § 1 этой главы, будет гильбертовым пространством, если определить в нем скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x(t) y(t)\, dt.$$

Будет ли это пространство сепарабельным?

2. Показать, что проекция y элемента $x \in H$ на подпространство $L \subset H$ есть элемент этого подпространства, находящийся на кратчайшем расстоянии от x, т. е.

$$\|x - y\| \leqslant \|x - u\|$$

для любого $u \in L$.

3. Дана матрица (a_{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$1)\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty, \quad 2)\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Выбрав в H ортонормальный базис $\{e_i\}$, определим оператор A, полагая что при $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j$, $y = Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$, где $\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$.

Показать, что так определенный оператор будет симметрическим оператором.

4. Доказать, что собственные элементы, соответствующие двум разным собственным значениям симметрического оператора, ортогональны.

5. Доказать равенства

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

ГЛАВА IX

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Определения, примеры, простейшие свойства

Определение 1. Линейный оператор A, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, называется *вполне непрерывным*, если он преобразует всякое ограниченное множество пространства X в компактное множество пространства Y.

Пример. Пусть $Ax=\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds$, где $K(t, s)$ — непрерывное в квадрате $a\leqslant t,\ s\leqslant b$ ядро. Тогда оператор A действует в $C(a, b)$ и вполне непрерывен.

То, что оператор A линеен и действует в $C(a, b)$, мы уже видели. Требуется доказать, что для любого ограниченного множества $M\subset C(a, b)$ множество $A(M)$ компактно. Рассмотрим функции вида

$$y(t)=\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds,$$

где $x(s)\in M$. Пусть $\|x\|=\max\limits_t |x(t)|\leqslant L$ для любого $x\in M$. Имеем

$$|y(t)|\leqslant \int\limits_a^b |K(t, s)|\,|x(s)|\,ds\leqslant KL(b-a),$$

где $K=\max\limits_{t, s}|K(t, s)|$. Таким образом, функции $y(t)\in A(M)$ равномерно ограничены. Далее,

$$|y(t_1)-y(t_2)|=\left|\int\limits_a^b K(t_1, s)\,x(s)\,ds-\int\limits_a^b K(t_2, s)\,x(s)\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b \left|K(t_1, s)-K(t_2, s)\right|\left|x(s)\right|ds\leqslant L\int\limits_a^b \left|K(t_1, s)-K(t_2, s)\right|ds.$$

Ядро $K(t, s)$, как непрерывное в замкнутом квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$, равномерно непрерывно в нем. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{L(b-a)}$$

всякий раз, когда $|t_1 - t_2| < \delta$ независимо от положения точек (t_1, s) и (t_2, s) на квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$. Но тогда

$$|y(t_1) - y(t_2)| < L\frac{\varepsilon}{L(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

всякий раз, когда $|t_1 - t_2| < \delta$ независимо от выбора функции $y(t)$ в множестве $A(M)$ и от положения точек t_1 и t_2 на отрезке $[a, b]$, что означает равностепенную непрерывность функций множества $A(M)$.

Таким образом, функции множества $A(M)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, следовательно, по теореме Арчела множество $A(M)$ компактно, что и требовалось доказать.

Лемма. *Пусть последовательность $\{A_n\}$ вполне непрерывных операторов, действующих из X в Y, сходится равномерно к оператору A. Тогда A также вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Необходимо доказать, что оператор A преобразует любое ограниченное множество пространства X в компактное множество пространства Y.

Пусть $M \subset X$ — ограниченное множество, и пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 так, чтобы $\|A_{n_0} - A\| < \frac{\varepsilon}{L}$, где $L = \sup\limits_{x \in M} \|x\|$. Тогда множество $A_{n_0}(M)$ есть ε-сеть для $A(M)$. В самом деле, для любого $Ax \in A(M)$ имеем

$$\|Ax - A_{n_0}x\| \leqslant \|A_{n_0} - A\| \cdot \|x\| < \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon.$$

Множество $A_{n_0}(M)$, кроме того, компактно. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ для множества $A(M)$ существует компактная ε-сеть, откуда и следует, что $A(M)$ компактно.

Пример. В пространстве $L_2(a, b)$ рассмотрим интегральный оператор

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с ядром, имеющим интегрируемый квадрат:

$$\int_a^b\int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds < \infty.$$

Покажем, что оператор A вполне непрерывен.

Рассмотрим последовательность непрерывных ядер $\{K_n(t, s)\}$ таких, что

$$\int_a^b\int_a^b \{K(t, s) - K_n(t, s)\}^2\,dt\,ds \to 0.$$

Такую последовательность можно получить различными способами. Разложим, например, $K(t, s)$ в двойной ряд Фурье по функциям ортонормальной системы

$$\varphi_{ij}(t, s) = \lambda_{ij} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi i(t-a)}{b-a} \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi j(s-a)}{b-a},$$

$$\varphi_{0j}(t, s) = \lambda_{0j} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi j(s-a)}{b-a},$$

$$\varphi_{i0}(t, s) = \lambda_{i0} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{2\pi i(t-a)}{b-a}; \quad \varphi_{00} = \lambda_{00};$$

$$\lambda^2_{ij} = \left(\int_a^b\int_a^b \varphi^2_{ij}(t, s)\,dt\,ds\right)^{-1},$$

$$i, j = 1, 2, \ldots,$$

и возьмем в качестве $K_n(t, s)$ n-е отрезки этого ряда. Операторы

$$A_n(t, s) = \int_a^b K_n(t, s)\,x(s)\,ds,$$

как легко проверить, вполне непрерывны[1]). Кроме того,

$$\|A_n - A\| = \left(\int_a^b\int_a^b [K_n(t, s) - K(t, s)]^2\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому согласно лемме A — также вполне непрерывный оператор.

---

[1]) Для этого оценки по модулю надо заменить с помощью неравенства Буняковского—Шварца интегральными оценками.

Примером не вполне непрерывного оператора может служить единичный оператор I в пространстве $C[0, 1]$. В самом деле, оператор I переводит ограниченную последовательность $x_n(t)=t^n$ в себя, а эта последовательность не компактна в смысле равномерной сходимости.

Если линейный оператор A действует в гильбертовом пространстве H, то можно дать еще два определения полной непрерывности оператора A, эквивалентных первоначальному.

Определение 2. Линейный оператор A называется *вполне непрерывным*, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ следует, что $Ax_n \to Ax_0$.

Определение 3. Линейный оператор A называется *вполне непрерывным*, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, $y_n \xrightarrow{\text{сл}} y_0$ следует

$$(Ax_n, y_n) \to (Ax_0, y_0).$$

Прежде чем доказывать эквивалентность этих определений, заметим, что если $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, то для любого линейного оператора A имеем $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_0$. В самом деле, если y — любой элемент из H, то

$$(Ax_n, y) = (x_n, A^*y) \to (x_0, A^*y) = (Ax_0, y),$$

что и означает слабую сходимость последовательности $\{Ax_n\}$ к элементу Ax_0.

Покажем сначала, что определения 2 и 3 эквивалентны.

Пусть A вполне непрерывен в смысле определения 2 и $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, $y_n \xrightarrow{\text{сл}} y_0$. Тогда $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$. Так как нормы элементов слабо сходящейся последовательности ограничены в совокупности, то $\|y_n\| \leqslant K$ для всех n. Поэтому имеем

$$|(Ax_n, y_n) - (Ax_0, y_0)| \leqslant |(Ax_n - Ax_0, y_n)| + |(Ax_0, y_n - y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|Ax_n - Ax_0\| \cdot \|y_n\| + |(y_n - y_0, Ax_0)|.$$

Оба слагаемые в правой части равенства стремятся к нулю, поэтому $(Ax_n, y_n) \to (Ax_0, y_0)$, и следовательно, оператор A вполне непрерывен в смысле определения 3.

Пусть оператор A вполне непрерывен в смысле определения 3. Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящуюся к x_0, и рассмотрим $\|Ax_n - Ax_0\|$. Имеем

$$\|Ax_n - Ax_0\|^2 = (Ax_n - Ax_0, Ax_n - Ax_0) =$$
$$= (Ax_n, Ax_n) - (Ax_n, Ax_0) - (Ax_0, Ax_n) + (Ax_0, Ax_0).$$

Как мы отмечали выше, из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ следует $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_0$. Поэтому, поскольку A вполне непрерывен в смысле определения 3, $(Ax_n, Ax_n) \to (Ax_0, Ax_0)$. Кроме того, из $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_0$ следует $(Ax_n, Ax_0) \to (Ax_0, Ax_0)$, и мы получаем, что

$$\|Ax_n - Ax_0\|^2 \to (Ax_0, Ax_0) - (Ax_0, Ax_0) - (Ax_0, Ax_0) + \\ + (Ax_0, Ax_0) = 0,$$

и оператор A вполне непрерывен в смысле определения 2.

Докажем теперь, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Пусть A вполне непрерывен в смысле определения 1. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящуюся к x_0. Как слабо сходящаяся, эта последовательность ограничена: $\|x_n\| \leqslant K$. Поэтому последовательность $\{Ax_n\}$ компактна.

Если теперь предположить, что $\{Ax_n\}$ не сходится к Ax_0, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдется подпоследовательность $\{Ax_{n_i}\}$ такая, что $\|Ax_{n_i} - Ax_0\| \geqslant \varepsilon_0$. Подпоследовательность $\{Ax_{n_i}\}$ тоже компактна, и из нее можно выделить подпоследовательность $\{Ax_{n_{i_j}}\}$, сходящуюся к некоторому элементу x'. Ясно, что $x' \neq Ax_0$, так как

$$\|x' - Ax_0\| = \lim \|Ax_{n_{i_j}} - Ax_0\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Поскольку $Ax_{n_{i_j}} \to x'$, то тем более $Ax_{n_{i_j}} \xrightarrow{\text{сл}} x'$. Но это невозможно, потому что $x_{n_{i_j}} \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ и, следовательно, $Ax_{n_{i_j}} \to Ax_0$.

Таким образом, $Ax_n \to Ax_0$, и оператор A вполне непрерывен в смысле определения 2.

Пусть, наоборот, оператор A вполне непрерывен в смысле определения 2. Рассмотрим ограниченное множество $M \subset H$. Как доказано выше, M слабо компактно. Возьмем любую последовательность $\{Ax_n\} \subset A(M)$. В силу слабой компактности M из $\{x_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \xrightarrow{\text{сл}} x_0 \in H$. Но тогда согласно сделанному относительно оператора A предположению $Ax_{n_i} \to Ax_0$, т. е. $A(M)$ — компактное множество, и полная непрерывность A в смысле определения 1 доказана.

Упражнения. 1. Положим для $x(t) \in C[a, b]$; $Bx = t^2x(t)$, $Cx = \int\limits_a^t x(\tau)\,d\tau$, $Dx = x(a) + tx(b)$. Какие из этих операторов вполне непрерывны?

2. Для $x = \{\xi\} \in l_2$ положим $Ax = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i}$. Показать, что A — вполне непрерывный оператор.

3. Доказать, что оператор A упражнения 3 § 5 гл. VIII вполне непрерывен.

§ 2. Спектральный анализ вполне непрерывного симметрического оператора в гильбертовом пространстве

Пусть A — симметрический вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. С помощью этого оператора образуем квадратичную форму (Ax, x) и рассмотрим ее на единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$ пространства H. В дальнейшем этот шар будем обозначать S_1.

Так как шар S_1 слабо компактен в себе, а форма слабо непрерывна, то она достигает на S_1 своих наибольшего и наименьшего значений. Положим

$$\alpha = \inf_{S_1}(Ax, x), \qquad \beta = \sup_{S_1}(Ax, x),$$

и пусть $\mu = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Предположим, например, что α отрицательно, β положительно, $|\alpha| > |\beta|$ и, следовательно, $\mu = -\alpha$. Обозначим через x_1 элемент шара S_1, который реализует минимум

$$\alpha = (Ax_1, x_1).$$

Нетрудно видеть, что $\|x_1\| = 1$. Если бы это было не так и $\|x_1\| = l < 1$, то $x_1' = \frac{1}{l}x_1 \in S_1$ и

$$\left(Ax_1', x_1'\right) = \left(A\left(\frac{1}{l}x_1\right), \frac{1}{l}x_1\right) = \frac{1}{l^2}\left(Ax_1, x_1\right) = \frac{1}{l^2}\alpha < \alpha$$

(так как $\frac{1}{l^2} > 1$ и α отрицательно), что противоречит определению числа α.

Возьмем любой элемент $h \in H$ и рассмотрим элемент

$$x' = \frac{x_1 + th}{\| x_1 + th \|},$$

где t — произвольное вещественное число. Ясно, что $\| x' \| = 1$, и потому $(Ax', x') \geqslant \alpha$. Но

$$(Ax', x') = \left(A \left(\frac{x_1 + th}{\| x_1 + th \|} \right), \frac{x_1 + th}{\| x_1 + th \|} \right) = \frac{(A(x_1 + th), x_1 + th)}{\| x_1 + th \|^2},$$

откуда

$$(A(x_1 + th), x_1 + th) \geqslant \alpha (x_1 + th, x_1 + th).$$

Раскрывая скалярные произведения и учитывая, что $(x_1, x_1) = 1$, $(Ax_1, x_1) = \alpha$, будем иметь

$$t(Ax_1, h) + t(Ah, x_1) + t^2(Ah, h) \geqslant \alpha [2t(x_1, h) + t^2(h, h)],$$

или, учитывая симметричность оператора A,

$$2t(Ax_1, h) + t^2(Ah, h) \geqslant \alpha [2t(x_1, h) + t^2(h, h)],$$

откуда

$$2t[(Ax_1, h) - \alpha (x_1, h)] + t^2 [(Ah, h) - \alpha (h, h)] \geqslant 0.$$

Полагая здесь $t > 0$, сокращая на t и заставляя t стремиться к нулю, получим в пределе

$$(Ax_1, h) - \alpha (x_1, h) \geqslant 0.$$

Положив затем в (1) $t < 0$, сокращая снова на t и заставляя t стремиться к нулю, найдем в пределе

$$(Ax_1, h) - \alpha (x_1, h) \leqslant 0.$$

Из этих двух неравенств следует

$$(Ax_1, h) - \alpha (x_1, h) = 0,$$

т. е.

$$(Ax_1 - \alpha x_1, h) = 0,$$

и так как h — любой элемент пространства H, то это возможно лишь, если

$$Ax_1 = \alpha x_1.$$

Таким образом, x_1 есть нормированный собственный элемент оператора A, соответствующий собственному значению α. Обозначим это собственное значение через λ_1. Мы доказали, следовательно, теорему.

Теорема 1. *Вполне непрерывный симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве, имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Чтобы перейти к построению других собственных элементов, нам понадобится одно новое понятие.

Подпространство $L \subset H$ называется *инвариантным* подпространством оператора A, если для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$. Для симметрического оператора A вместе с L инвариантным подпространством является и $H \dot{-} L$. В самом деле, пусть $x \in H \dot{-} L$ и y — любой элемент L. Имеем

$$(Ax, y) = (x, Ay) = 0,$$

так как $Ay \in L$ в силу инвариантности L.

Таким образом, Ax ортогонален любому элементу из L, т. е. $Ax \in H \dot{-} L$, что и доказывает инвариантность последнего подпространства.

Вернемся к построению спектра симметрического, вполне непрерывного оператора. Пусть L_1 — подпространство, порожденное элементом x_1, т. е. совокупность элементов вида $\{tx_1\}$. Тогда

$$Atx_1 = tAx_1 = t\lambda_1 x_1 \in L_1$$

и, следовательно, L_1 — инвариантное подпространство оператора A. В силу сказанного выше $H_1 = H \dot{-} L_1$ — также инвариантное подпространство. Рассмотрим его как самостоятельное гильбертово пространство. Оператор A, действующий в этом пространстве (из $x \in H_1$ следует $Ax \in H_1$), очевидно, симметрический и вполне непрерывный в нем, и к A в H_1 можно применить предыдущее построение. Пусть

$$\alpha_1 = \inf_{S_1 \cap H_1} (Ax, x), \quad \beta_1 = \sup_{S_1 \cap H_1} (Ax, x)$$

и $\mu_1 = \max(|\alpha_1|, |\beta_1|)$, например, $\mu_1 = \beta_1 > 0$. Тогда, как и раньше, существует элемент $x_2 \in H_1$, $\|x_2\| = 1$ такой, что

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2,$$

где $\lambda_2 = \beta_1$, т. е. мы нашли второй нормированный собственный элемент оператора A. Заметим, что x_2 ортогонален x_1 и что

$$|\lambda_2| = \sup_{S_1 \cap H_1} |(Ax, x)| \leqslant \sup_{S_1} |(Ax, x)| = |\lambda_1|.$$

Рассмотрим подпространство L_2, порожденное элементами x_1 и x_2. Оно является инвариантным подпространством оператора A. Таким же будет и подпространство $H_2 = H \dot{-} L_2$. В H_2 оператор A также имеет собственный элемент x_3. Этот элемент нормирован и ортогонален x_1 и x_2, а для соответствующего собственного значения имеем $|\lambda_3| \leqslant |\lambda_2|$. Затем рассмотрим подпространство L_3, порожденное элементами x_1, x_2, x_3 и т. д.

Могут осуществиться две возможности. Может случиться, что после n-го шага будем иметь

$$\alpha_n = \inf_{S_1 \cap H_n} (Ax, x) = \beta_n = \sup_{S_1 \cap H_n} (Ax, x) = 0.$$

Тогда $(Ax, x) = 0$ на H_n, что возможно лишь, если на этом подпространстве $Ax \equiv 0$. В этом случае мы получаем, что

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

и

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

образуют систему всех собственных элементов и всех собственных значений оператора A, и что $H = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{+} N$, где N — подпространство нулей оператора A. Следовательно, любой элемент $x \in H$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + x_0, \quad x_0 \in N,$$

откуда

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x_i.$$

Оператор A в этом случае конечномерный в том смысле, что он отображает гильбертово пространство H в его конечномерное подпространство.

Вторая возможность будет заключаться в том, что процесс построения собственных элементов оператора A может быть продолжен неограниченно. Так как в процессе этого построения мы получаем ортонормальную систему

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

то в силу сепарабельности пространства H она счетна. Впрочем, не более чем счетность числа собственных элементов самосопряженного, вполне непрерывного оператора можно доказать и в случае несепарабельного гильбертова пространства. Это доказательство основывается на следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве. Тогда этот оператор может иметь лишь конечное число собственных значений, превосходящих по модулю заданное число $\alpha > 0$, и каждому собственному значению может соответствовать лишь конечное число линейно независимых собственных элементов.*

Доказательство. Предположим, что оператор A имеет бесконечное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $|\lambda_i| \geqslant \alpha > 0$ для всех i. Каждому собственному значению λ_i соответствует по крайней мере один собственный элемент x_i, причем без ограничения общности можно считать, что $\|x_i\| = 1$. Совокупность таких элементов $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, есть ограниченное множество, и так как A вполне непрерывен, то множество $\{Ax_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, компактно. Однако, учитывая ортогональность x_i и x_j при $i \neq j$, мы имеем

$$\|Ax_i - Ax_j\|^2 = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = (\lambda_i x_i - \lambda_j x_j, \lambda_i x_i - \lambda_j x_j) = \\ = \lambda_j^2 \|x_i\|^2 + \lambda_j^2 \|x_j\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_i^2 \geqslant 2\alpha^2.$$

Из этого следует, что ни последовательность $\{Ax_i\}$, ни любая ее подпоследовательность не могут сходиться. Полученное противоречие доказывает первое утверждение.

Допустим теперь, что некоторому собственному значению λ_0 оператора A соответствует бесконечно много линейно независимых собственных элементов $x_1, x_2, \ldots$ Так как любая линейная комбинация собственных элементов, соответствующих данному собственному значению, есть, очевидно, снова собственный элемент, соответствующий тому же самому собственному значению, то с помощью процесса ортогонализации Шмидта мы можем из $\{x_i\}$ построить ортонормальную систему собственных элементов $\{x'_i\}$. Как и выше, из условия $\|x'_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, следует, что $\{Ax'_i\}$ — компактная последовательность. С другой стороны,

$$\|Ax'_i - Ax'_j\|^2 = \|\lambda_0 x'_i - \lambda_0 x'_j\|^2 = \lambda_0^2 (\|x'_i\|^2 + \|x'_j\|^2) = 2\lambda_0^2,$$

что несовместимо с компактностью $\{Ax'_i\}$. Итак, снова пришли к противоречию, и второе утверждение теоремы доказано.

и если μ не совпадает ни с одним из них, то уравнение (3) при любой функции $z(t) \in L_2(a, b)$ имеет единственное решение, которое дается формулой

$$x(t) = \frac{1}{\mu} \sum_i \frac{\mu_i \zeta_i}{\mu_i - \mu} x_i(t) - \frac{1}{\mu} z, \tag{4}$$

где $x_i(t)$ — нормированные собственные функции ядра

$$K(t, s) \text{ и } \zeta_i = \int_a^b z(t) x_i(t) \, dt.$$

Однородное уравнение (т. е. при $z = 0$) будет иметь лишь нулевое решение. Для $\mu = \mu_m = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_{m+r-1}$ и при дополнительных условиях

$$\int_a^b z(t) x_k(t) \, dt = 0, \quad k = m, \ m+1, \ldots, \ m+r-1 \tag{5}$$

уравнение (3) также разрешимо, и решение дается формулой:

$$x(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{i \neq m, m+1, \ldots, m+r-1} \frac{\mu_i \zeta_i}{\mu_i - \mu} x_i(t) - \frac{1}{\mu} z(t) +$$
$$+ c_m x_m(t) + c_{m+1} x_{m+1}(t) + \ldots + c_{m+r-1} x_{m+r-1}(t), \tag{6}$$

где $c_m, \ c_{m+1}, \ldots, \ c_{m+r-1}$ — произвольные постоянные. Если в формулах (4) и (6) стоят бесконечные ряды, то они сходятся в среднем.

Вернемся к исходным значениям параметра и известной функции. Тогда спектр оператора будет

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_n, \ldots,$$

где $\lambda_k = \dfrac{1}{\mu_k}$ и $\lambda_n \to \infty$, если собственных значений бесконечное число, а формулы для решений примут вид

$$x(t) = \lambda \sum_i \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i(t) + y(t), \tag{7}$$

где $\eta_i = \int_a^b y(t) x_i(t) = -\lambda \int_a^b z(t) x_i(t) \, dt = -\lambda \zeta_i,$

и, соответственно,

$$x(t)=\lambda \sum_{i\neq m,\, m+1,\, \dots,\, m+r-1} \frac{\eta_i}{\lambda_i-\lambda} x_i(t)+c_m x_m(t)+$$
$$+c_{m+1}x_{m+1}(t)+\dots+c_{m+r-1}x_{m+r-1}(t)+y(t). \quad (8)$$

Мы пришли к формуле Шмидта для решения интегрального уравнения с симметрическим ядром.

Рассмотрим ядро $K(t, s)$ интегрального оператора как функцию переменной s, $a\leqslant s\leqslant b$, и параметра t. Тогда из неравенства $\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds<\infty$ и теоремы Фубини следует, что $\int\limits_a^b K^2(t, s)\,ds$ — суммируемая функция t и, следовательно, конечна почти при всех t. Это в свою очередь означает, что $K(t, s)$, как функция s, при почти всех значениях параметра t принадлежит $L_2(a, b)$. Поэтому для $K(t, s)$ можно построить ряд Фурье по ортонормальной системе $\{x_i(s)\}$ собственных функций ядра $K(t, s)$. Коэффициентами Фурье в этом случае будут

$$c_k(t)=\int\limits_a^b K(t, s)\,x_k(s)\,ds=\frac{1}{\lambda_k}x_k(t),$$

и ряд Фурье примет вид

$$K(t, s)\sim\sum_i\frac{x_i(t)\,x_i(s)}{\lambda_i},$$

причем, если собственных функций $x_i(s)$ бесконечно много, ряд сходится в среднем. Покажем, что сумма ряда Фурье равна $K(t, s)$. Пусть

$$Q(t, s)=K(t, s)-\sum_i\frac{x_i(t)\,x_i(s)}{\lambda_i}$$

и отлично от нуля на множестве положительной меры. Нетрудно заметить, что $Q(t, s)$ есть симметрическое ядро с интегрируемым квадратом и потому имеет хотя бы одну нормированную собственную функцию $x_0(t)$:

$$x_0(t)=\lambda_0\int\limits_a^b Q(t, s)\,x_0(s)\,ds.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\int_a^b x_0(t)\,x_k(t)\,dt = \lambda_0\int_a^b\left\{\int_a^b Q(t, s)\,x_0(s)\,ds\right\}x_k(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b\left\{\int_a^b\left[K(t, s) - \sum_i \frac{x_i(t)\,x_i(s)}{\lambda_i}\right]x_k(t)\,dt\right\}x_0(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b\left\{\int_a^b K(t, s)\,x_k(t)\,dt - \sum_i \frac{x_i(s)}{\lambda_i}\int_a^b x_i(t)\,x_k(t)\,dt\right\}x_0(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b\left\{\frac{x_k(s)}{\lambda_k} - \frac{x_k(s)}{\lambda_k}\right\}x_0(s)\,ds = 0,$$

т. е. $x_0(s)$ ортогональна всем $x_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, ортогональна подпространству $L(x_1, x_2, \ldots)$, а с другой стороны,

$$\int_a^b K(t, s)\,x_0(s)\,ds = \int_a^b\left[Q(t, s) + \sum_i \frac{x_i(t)\,x_i(s)}{\lambda_i}\right]x_0(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b Q(t, s)\,x_0(s)\,ds + \sum_i \frac{x_i(t)}{\lambda_i}\int_a^b x_i(s)\,x_0(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b Q(t, s)\,x_0(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_0}x_0(t),$$

т. е. является собственной функцией ядра $K(t, s)$ и, значит, принадлежит подпространству $L(x_1, x_2, \ldots)$. Мы пришли к противоречию, из которого следует, что $Q(t, s) = 0$ почти всюду в квадрате $Q \leqslant t, s \leqslant b$.

Итак,

$$K(t, s) = \sum_i \frac{x_i(t)\,x_i(s)}{\lambda_i}. \tag{9}$$

Это равенство называется *билинейным разложением* ядра. Применяя к коэффициентам Фурье $\frac{x_i(t)}{\lambda_i}$ ядра $K(t, s)$

неравенство Бесселя, получим

$$\sum_i \left(\frac{x_i(t)}{\lambda_i}\right)^2 \leqslant \int_a^b K^2(t, s)\,ds,$$

откуда, интегрируя по t и учитывая нормированность собственных функций, найдем

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds. \tag{10}$$

Обратимся теперь к интегральному уравнению с непрерывным симметрическим ядром. Так как непрерывное в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ ядро будет в то же время ядром с интегрируемым квадратом, то к уравнению (1) с непрерывным ядром, рассматриваемым в $L_2(a, b)$, применимы все предыдущие результаты этого параграфа: будут существовать собственные значения и собственные функции ядра, будут те же условия разрешимости неоднородного уравнения и решения такого уравнения можно написать в виде (7) и (8). Однако мы покажем, что собственные функции непрерывного ядра будут непрерывны и что если собственных значений бесконечно много, то ряды (7) и (8) равномерно сходятся, так что при непрерывной правой части решение неоднородного уравнения также будет непрерывной функцией.

Итак, пусть ядро $K(t, s)$ непрерывно и

$$x_n(t) = \lambda_n \int_a^b K(t, s)\, x_n(s)\,ds.$$

Пусть t и $t + \Delta t$ — две точки отрезка $[a, b]$. Имеем, учитывая, что $\int_a^b x_n^2(t)\,dt = 1$,

$$|x_n(t+\Delta t) - x_n(t)| =$$

$$= |\lambda_n| \cdot \left| \int_a^b \left[K(t+\Delta t, s) - K(t, s) \right] x_n(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_n| \left(\int_a^b \left[K(t+\Delta t, s) - K(t, s) \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b x_n^2(s)\,ds \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda_n| \left(\int_a^b \left[K(t+\Delta t, s) - K(t, s) \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие. *Если вполне непрерывный симметрический оператор A имеет счетное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, то*

$$\lim_n \lambda_n = 0.$$

Теперь легко перенумеровать все собственные значения и собственные элементы оператора A. Рассмотрим собственные значения, по модулю превосходящие 1. Их — конечное число. Занумеруем их последовательно в порядке убывания модулей, повторяя каждое собственное значение столько раз, какова его кратность[1]). Получим две системы:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_1},$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1},$$

где $Ax_i = \lambda_i x_i$, $(x_i, x_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots$ Далее, рассмотрим собственные значения λ, удовлетворяющие неравенству $1 \geqslant |\lambda| > \frac{1}{2}$, и пронумеруем их аналогично предыдущему. Получаем две новые системы

$$\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \ldots, \lambda_{n_2},$$
$$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_2}$$

и т. д. В конце концов приходим к конечным или счетным системам

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots,$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots,$$

представляющим собой полные системы собственных значений и собственных элементов вполне непрерывного оператора A.

Пусть L — подпространство, порождаемое ортонормальной системой $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, и $N = H \perp L$. Если $x \in L$, т. е. $x = \sum_i \xi_i x_i$, то $Ax = \sum_i \xi_i \lambda_i x_i \in L$, т. е. L, а следовательно, и N — инвариантные подпространства оператора A. Отсюда следует, что $Ax \equiv 0$ на N, так как в противном случае в N существовал бы нормированный собственный элемент опера-

---

[1]) Кратностью собственного значения называется число линейно независимых собственных элементов, соответствующих этому собственному значению.

тора A, что невозможно, так как все такие элементы принадлежат L. Итак, для любого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_i \xi_i x_i + x_0, \quad x_0 \in N \tag{1}$$

$$Ax = \sum_i \xi_i \lambda_i x_i, \tag{2}$$

где $\sum\limits_i$ означает конечную сумму или бесконечный ряд, в зависимости от числа собственных элементов оператора A.

Рассмотрим теперь операторное уравнение

$$Ax - \lambda x = y, \tag{3}$$

где A, как и выше, — вполне непрерывный симметрический оператор.

Подставляя в (3) вместо x и Ax их выражения из (1) и (2) и заменяя y через $\sum\limits_i \eta_i x_i + y_0$, получим

$$\sum_i (\lambda_i - \lambda) \xi_i x_i - \lambda x_0 = \sum_i \eta_i x_i + y_0. \tag{4}$$

Задача решения уравнения (1) сводится к определению из равенства (4) по известным коэффициентам Фурье η_i элемента y неизвестных коэффициентов Фурье ξ_i элемента x.

Рассмотрим два случая.

1. $\lambda \neq \lambda_i$ при любом i.

Умножая обе части равенства (4) скалярно на x_k и учитывая ортогональность x_k элементам x_l при $l \neq k$ и элементам x_0 и y_0, получим

$$(\lambda_k - \lambda) \xi_k = \eta_k, \tag{5}$$

откуда

$$\xi_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k - \lambda}. \tag{6}$$

Подставляя в (4) вместо ξ_i их выражения из (6), найдем

$$-\lambda x_0 = y_0,$$

откуда

$$x_0 = -\frac{1}{\lambda} y_0. \tag{7}$$

Следовательно,

$$x = \sum_i \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} y_0. \tag{8}$$

Выражение (8) дает решение уравнения (4) при $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Это решение однозначно определяется при любой правой части y, откуда в силу теоремы Банаха следует, что для таких λ существует $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda$, т. е. любое значение параметра λ, не являющееся собственным значением, есть регулярное значение оператора A. Таким образом, спектр вполне непрерывного симметрического оператора, действующего в гильбертовом пространстве, состоит лишь из собственных значений, или, как говорят, является дискретным.

2. Пусть $\lambda = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_{m+r-1}$, где r — кратность собственного значения λ.

Как и раньше, при $k \neq m, m+1, \ldots, m+r-1$ искомые коэффициенты ξ_k определяются по формуле (6). Для значений k, совпадающих с одним из чисел $m, m+1, \ldots, m+r-1$, равенство (5) в общем случае не удовлетворяется, так как левая часть его обращается в нуль, а правая вообще не равна нулю. Для того чтобы уравнение (5) было для этих значений индекса разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $\eta_k = 0$, $k = m, m+1, \ldots, m+r-1$, т. е. чтобы свободный член уравнения (4) был ортогонален всем собственным элементам $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+r-1}$, соответствующим собственному значению λ. Тогда уравнение (5) сводится к тождеству $0 = 0$, и потому оно, а следовательно, и уравнение (4), удовлетворяется при любых значениях коэффициентов ξ_k, $k = m, m+1, \ldots, m+r-1$. Решение принимает вид

$$x = \sum_{i \neq m, m+1, \ldots, m+r-1} \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i + \sum_{k=m}^{m+r-1} c_k x_k - \frac{1}{\lambda} y_0, \tag{9}$$

где $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{m+r-1}$ произвольны.

Итак, во втором случае уравнение разрешимо не всегда, и если разрешимо, то решение его определяется неоднозначно.

Преобразуем несколько формулу (8):

$$x = -\frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\eta_i (\lambda_i - \lambda - \lambda_i)}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} y_0 =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \left(\sum_i \eta_i x_i + y_0 - \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i \right) = \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} - \frac{1}{\lambda} y.$$

Мы получили так называемую **формулу Шмидта** для резольвенты симметрического вполне непрерывного оператора.

Упражнение. Пусть оператор A, действующий в пространстве H, задан равенством

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, x_i) x_i,$$

где $\{x_i\}$ — некоторая ортонормальная система и $\lim_n \lambda_n = 0$. Доказать, что оператор A вполне непрерывен.

§ 3. Применение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром

Рассмотрим в пространстве $L_2(a,b)$ интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds = y(t), \tag{1}$$

ядро которого симметрично, $K(t, s) = K(s, t)$, и интегрируемо с квадратом

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s) dt\, ds < \infty.$$

Из условий, наложенных на ядро, следует, что интегральный оператор $Ax = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$ есть вполне непрерывный симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$.

Обозначая $\frac{1}{\lambda}$ через μ и $\left(-\frac{1}{\lambda}\right) y(t)$ — через $z(t)$, мы придадим уравнению (1) вид

$$\int_a^b K(t, s) x(s) ds - \mu x(t) = z(t), \tag{2}$$

или, в операторной форме,

$$Ax - \mu x = z, \tag{3}$$

т. е. как раз тот вид, который был рассмотрен в предыдущем параграфе.

Согласно общей теории оператор A имеет дискретный спектр, состоящий из конечного или счетного числа собственных значений,

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots,$$

В силу равномерной непрерывности ядра $K(t, s)$ на отрезке $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|K(t+\Delta t, s) - K(t, s)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda_n| \sqrt{b-a}} \text{ при } |\Delta t| < \delta$$

и независимо от положения точки (t, s) на квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$. Поэтому

$$|x_n(t+\Delta t) - x_n(t)| < \varepsilon \text{ при } |\Delta t| < \delta,$$

и непрерывность собственных функций доказана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i(t). \tag{11}$$

Так как $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} = 1$, то для доказательства равномерной сходимости ряда (11) достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{\lambda_i} x_i(t). \tag{12}$$

Имеем

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{\eta_i}{\lambda_i} x_i(t) \right| \leqslant \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{x_i^2(t)}{\lambda_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из неравенства

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{x_i^2(t)}{\lambda_i^2} \leqslant \int_a^b K^2(t, s)\, ds$$

следует, что

$$\left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{x_i^2(t)}{\lambda_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M \sqrt{b-a},$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant t,\, s \leqslant b} |K(t, s)|$. С другой стороны, η_i — коэффициенты Фурье функции $y(t)$ (непрерывной или с суммируемым квадратом, безразлично), и потому ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i^2$ сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0(\varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0$, $p > 0$ имеем

$$\left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{b-a}}.$$

Но тогда

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{\eta_i}{\lambda_i} x_i(t)\right| < \varepsilon \qquad \text{при } n \geqslant n_0,\ p > 0$$

сразу для всех $t \in [a, b]$, и равномерная сходимость ряда (12) или, что то же, (11) доказана.

Из равномерной сходимости ряда (11) и непрерывности собственных функций следует, что при непрерывной $y(t)$ решения уравнения (4) с непрерывным ядром, даваемые формулами (7) и (8), также непрерывны.

В § 2 мы видели, что имеет место формула

$$Ax = \sum_i \mu_i c_i x_i,\ c_i = (x, x_i),$$

которая показывает, что любой элемент из области значений вполне непрерывного симметрического оператора разлагается в ряд Фурье по собственным элементам этого оператора.

Если рассмотреть интегральный оператор с симметрическим ядром в пространстве $L_2(a, b)$, то предыдущая формула примет вид

$$z(t) = \sum_i \frac{\xi_i}{\lambda_i} x_i(t), \tag{13}$$

где $z(t) = \int\limits_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$ и $\xi_i = \int\limits_a^b x(s)\, x_i(s)\, ds$.

Функция $z(t)$, написанная выше, называется *представленной посредством ядра,* и мы установили в пространстве $L_2(a, b)$ теорему Гильберта: *всякая функция, представленная посредством ядра, разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по собственным функциям этого ядра.*

Покажем, что теорема Гильберта имеет место и в пространстве $C(a, b)$, т. е. для непрерывных ядер $K(t, s)$ и непрерывных функций $x(s)$, причем сходимость ряда (13) будет равномерной.

Так как ряд (13), по существу, то же самое, что и ряд (12), то равномерная сходимость этого ряда уже доказана. Пусть

$S(t)$ — его сумма. Так как тот же ряд сходится в среднем к $z(t)$, то $z(t)=S(t)$ почти всюду на $[a, b]$. Но если $K(t, s)$ и $x(s)$ непрерывны, то $z(t)$ также непрерывна на $[a, b]$, и мы получаем, что две непрерывные функции $z(t)$ и $S(t)$ равны почти всюду, т. е. на всюду плотном подмножестве отрезка $[a, b]$. По непрерывности равенство $z(t)=S(t)$ продолжается на весь отрезок, и теорема Гильберта для случая пространства $C[a, b]$ доказана.

Заметим в заключение, что теорема о билинейном разложении ядра для произвольных непрерывных ядер в пространстве $C[a, b]$, когда сходимость рядов должна быть равномерной, не имеет места, но для итерированных ядер она верна. Изложение этого круга вопросов можно найти в учебниках по интегральным уравнениям.

Упражнения. 1. Найти собственные функции ядра $K(t, s)=\cos(t+s)$ и решить уравнение

$$x(t)=\int_0^\pi \cos(t+s)\, x(s)\, ds+1.$$

2. Решить уравнение

$$x(t)=6\int_0^1\left(ts-\frac{t+s}{2}+\frac{1}{3}\right) x(s)\, ds+t.$$

3. Найти резольвенту уравнения

$$x(t)=\lambda\int_0^1 (t^2+s^2)\, x(s)\, ds+y(t).$$

§ 4. Теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с несимметрическим ядром

В предыдущем параграфе мы видели, что уравнение

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds=y(t) \tag{1}$$

с симметрическим ядром либо однозначно разрешимо при любой правой части, и тогда однородное уравнение

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds=0 \tag{2}$$

имеет лишь нулевое решение, либо уравнение (2) имеет решение, отличное от нуля (λ будет собственным значением), и тогда уравнение (1) не всегда разрешимо, а если и разрешимо, то неоднозначно. Покажем, что эти же утверждения справедливы и для уравнений с несимметрическим ядром. При этом мы ограничимся случаем ядер с интегрируемым квадратом, т. е. рассмотрением уравнений (1) и (2) в пространстве $L_2(a, b)$. Одновременно с уравнениями (1) и (2) мы будем рассматривать уравнения

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(s, t)\,x(s)\,ds=y(t) \tag{1*}$$

и

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(s, t)\,x(s)\,ds=0. \tag{2*}$$

В них интегральные операторы заменены сопряженными и потому они называются *уравнениями, сопряженными* с (1) и (2). Кроме того, все эти уравнения мы рассмотрим при фиксированном значении параметра λ, который для простоты положим равным единице. Итак, пусть даны уравнения

$$x(t)-\int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds=y(t), \tag{3}$$

$$x(t)-\int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds=0, \tag{4}$$

и сопряженные им уравнения

$$x(t)-\int_a^b K(s, t)\,x(s)\,ds=y(t), \tag{3*}$$

$$x(t)-\int_a^b K(s, t)\,x(s)\,ds=0, \tag{4*}$$

причем $\int_a^b\int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds<\infty$. Решения уравнений (3), (4) и (3*), (4*) будем искать в пространстве $L_2(a, b)$.

Напомним прежде всего некоторые факты из теории линейных алгебраических систем. Если имеется система

$$\xi_i-\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k=\eta_i, \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

и сопряженная ей система

$$u_j - \sum_{l=1}^{n} a_{lj} u_l = v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5*}$$

то обе они разрешимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. При этом, если эти ранги равны n, обе системы при любых правых частях имеют единственные решения, в частности, однородные системы — лишь нулевые решения; если же ранги матриц равны $n-r$, то однородные системы имеют по r линейно независимых решений, а неоднородные системы (5) и (5*) имеют решения, зависящие от r произвольных параметров, т. е. неоднозначно разрешимы[1]). Сформулируем условия разрешимости систем (5) и (5*) в иной, более удобной для нас форме. Перепишем эти уравнения так:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \xi_k = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

$$\sum_{l=1}^{n} b_{lj} u_l = v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6*}$$

где $b_{ik} = \delta_{ik} - a_{ik}$, и представим их в векторной форме, введя известные векторы $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, искомые векторы $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и матрицы-столбцы коэффициентов

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \ldots \\ b_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

которые тоже можно рассматривать как n-мерные векторы. Уравнение (6) примет тогда вид

$$\sum_{k=1}^{n} B_k \xi_k = y, \tag{7}$$

где слева стоит линейная комбинация векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Равенство (7) означает, что вектор y принадлежит подпро-

[1]) Доказательство этих утверждений можно найти в курсах высшей алгебры.

странству $L(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, порожденному векторами B_k, $k=1, 2, \ldots, n$. Поэтому можно сказать, что уравнение (6) или, что то же, (5), разрешимо тогда и только тогда, когда $y \in L(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, что в свою очередь будет выполняться тогда и только тогда, когда вектор y будет ортогонален к любому вектору u, ортогональному подпространству $L(B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Но ортогональность вектора u этому подпространству означает, что $(B_j, u)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$, или, в развернутом виде, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij} u_i = 0$, $j=1, 2, \ldots, n$, т. е. что $u=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ есть решение однородной сопряженной системы.

В частности, если однородная сопряженная система имеет нулевые решения, то исходная неоднородная система разрешима, и притом однозначно, при любых правых частях.

Так как системы (5) и (5*) взаимно заменяемы, потому что матрица, сопряженная к сопряженной, есть исходная матрица, то полученные условия разрешимости системы (5) будут иметь место и для системы (5*).

Теперь мы можем сформулировать альтернативу Фредгольма для линейных алгебраических систем. Даны уравнения:

$$x - Ax = y, \tag{8}$$

$$x - Ax = 0, \tag{9}$$

где $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица n-го порядка, x и y — n-мерные векторы, и сопряженные с (8) и (9) уравнения

$$u - A^* u = v, \tag{8*}$$

$$u - A^* u = 0. \tag{9*}$$

Могут быть две возможности: либо неоднородные уравнения (8) и (8*) однозначно разрешимы при любой правой части, и тогда однородные уравнения (9) и (9*) имеют лишь нулевые решения, либо уравнения (9) и (9*) имеют ненулевые решения. Во втором случае число линейно независимых решений уравнений (9) и (9*) одинаково; уравнение (8) (соответственно (8*)) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям однородного сопряженного уравнения (9*) (соответственно (9)), и решение (8) имеет вид $x = x_0 + \sum\limits_{i=1}^{r} c_i x_i$ (соответственно, $u = u_0 + \sum\limits_{i=1}^{r} c_i u_i$), где x_0 — какое-нибудь решение неоднородного уравнения (8), x_i — решения однородного уравнения (9) и c_i — произвольные постоянные.

Будем говорить, что ядро интегрального уравнения вырожденное, если оно имеет вид $K(t, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s)$.

Покажем, что интегральные уравнения с вырожденными ядрами сводятся к линейным алгебраическим системам. Рассмотрим уравнения

$$x(t) - \int_a^b \sum_{k=1}^{n} a_k(t) b_k(s) x(s)\,ds = y(t), \qquad (10)$$

$$u(t) - \int_a^b \sum_{l=1}^{n} a_l(s) b_l(t) u(s)\,ds = v(t). \qquad (10^*)$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$x(t) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k(t) = y(t), \qquad (11)$$

$$u(t) - \sum_{l=1}^{n} c_l b_l(t) = v(t), \qquad (11^*)$$

где $\xi_k = \int_a^b x(s) b_k(s)\,ds, \quad c_l = \int_a^b u(s) a_l(s)\,ds.$

Из равенств (11) и (11*) видно, что решение уравнений (10) и (10*) сводится к нахождению чисел $\xi_i, c_i, i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих равенствам (11) и (11*).

Умножим (11) на $b_i(t)$ и проинтегрируем полученное равенство по t, а (11*) умножим на $a_j(t)$ и также проинтегрируем. Получим

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b b_i(t) a_k(t)\,dt\,\xi_k = \eta_i, \quad c_j - \sum_{l=1}^{n} \int_a^b a_j(t) b_l(t)\,dt\,c_l = d_j,$$

где

$$\eta_i = \int_a^b y(t) b_i(t)\,dt, \quad d_j = \int_a^b v(t) a_j(t)\,dt.$$

Если положить $\int_a^b b_i(t)\,a_k(t)\,dt = a_{ik}$, то предыдущие равенства примут вид

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k = \eta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (12)$$

$$c_j - \sum_{l=1}^{n} a_{lj}c_l = d_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (12^*)$$

и мы получим для определения ξ_i и c_j две взаимно сопряженные линейные алгебраические системы. Если ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — решения этой системы, то простой подстановкой проверяем, что функции

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\, a_k(t) + y(t), \qquad (13)$$

$$u(t) = \sum_{l=1}^{n} c_l\, b_l(t) + v(t) \qquad (13^*)$$

являются решением уравнений (10) и (10*), и обратно, если функции (13) и (13*) удовлетворяют уравнениям (10) и (10*), то ξ_i и c_j удовлетворяют системам (12) и (12*).

Из эквивалентности уравнений (10) и (10*) системам (12) и (12*) следует, что для уравнений (10) и (10*) с вырожденным ядром также имеет место альтернатива Фредгольма. Покажем только, что ортогональность вектора решения однородной системы (12*) вектору правой части системы (12) эквивалентна условию

$$\int_a^b y(t)\,u(t)\,dt = 0, \qquad (14)$$

где $u(t)$ — решение однородного уравнения (10*). Пусть (14) выполняется. Подставив в это равенство вместо $u(t)$ его выражение из (13*) при $v(t) = 0$, получим:

$$u(t) = \sum_{l=1}^{n} c_l b_l(t).$$

Следовательно

$$\sum_{l=1}^{n} c_l \int_a^b y(t)\,b_l(t)\,dt = 0.$$

Но $\int\limits_a^b y(t)\, b_l(t)\, dt = \eta_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$, и, поэтому

$$\sum_{l=1}^{n} c_l \eta_l = 0, \qquad (15)$$

где c_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, — решение однородной системы (12*).

Проводя рассуждения в обратном порядке, получим, что из (15) следует (14), и требуемое доказано.

Рассмотрим, наконец, уравнения (10) и (10*) с произвольным ядром с интегрируемым квадратом.

Взяв в $L_2(a, b)$ какой-либо ортонормальный базис $\{\varphi_i(t)\}$, без труда убеждаемся, что $\{\varphi_i(t)\varphi_j(s)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, образует ортонормальный базис в пространстве функций с интегрируемым на $a \leqslant t$, $s \leqslant b$ квадратом. Поэтому

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(s) + R_n(t, s),$$

где $\| R_n(t, s) \| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначая $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(s)$ через $Q_n(t, s)$, будем иметь

$$\int\limits_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = \int\limits_a^b Q_n(t, s)\, x(s)\, ds + \int\limits_a^b R_n(t, s)\, x(s)\, ds,$$

т. е. что интегральный оператор A представлен в виде суммы $A = B + C$ двух интегральных операторов, один из которых, B, имеет вырожденное ядро, а норму второго можно считать сколь угодно малой. Но тогда $\| C^* \|$ также сколь угодно мала, $(I - C)^{-1}$ и $(I - C^*)^{1-}$ существуют, и так как $A^* = B^* + C^*$, то пару уравнений (10) и (10*) можно переписать в виде

$$x - Bx - Cx = y, \qquad (16)$$

$$u - B^*u - C^*u = v. \qquad (16^*)$$

Введем новый неизвестный элемент $z = x - Cx$. Так как $x = (I - C)^{-1} z$, то уравнение (16) можно преобразовать к эквивалентному виду $z - B(I - C)^{-1} z = y$, или

$$z - Dz = y, \qquad (17)$$

где оператор D также интегральный, но уже с вырожденным ядром. Подчеркнем, что правые части (16) и (17) одинаковы.

Для соответствующего преобразования уравнения (16*) применим к обеим частям его оператор $(I-C^*)^{-1}$; получим $u-(I-C^*)^{-1}B^*u=(I-C^*)^{-1}v$. Нетрудно проверить, что $(I-C^*)^{-1}B^*=[(I-C)^{-1}]^*B^*=[B(I-C)^{-1}]^*=D^*$, и предыдущее уравнение примет вид:

$$u-D^*u=v^*, \tag{17*}$$

где $v^*=(I-C^*)^{-1}v$ — также известный элемент.

Подчеркнем, что всякое решение однородного уравнения (16*) будет также решением однородного уравнения (17*), и обратно.

Итак, решение уравнений (10) и (10*) сводится к решению уравнений (17) и (17*), и обратно. Но уравнения (17) и (17*) являются уравнениями с вырожденными ядрами, и к ним применима альтернатива Фредгольма. Следовательно, для уравнений (10) и (10*) также имеет место альтернатива Фредгольма. Для справедливости второй части альтернативы Фредгольма существенно замечание о совпадении как правых частей уравнений (10) и (17), так и совокупности решений однородных сопряженных уравнений (10*) и (17*).

Мы установили альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами, имеющими интегрируемый квадрат. Можно показать, что она верна и в пространстве $C[a, b]$, т. е. для уравнений с непрерывными ядрами, а также для ядер со слабой особенностью, т. е. вида $K(t, s)=\frac{Q(t, s)}{|t-s|^{\alpha}}$, где $Q(t, s)$ — ограниченное ядро и $0<\alpha<1$.

Если рассмотреть уравнения с произвольным параметром λ, то можно показать, что характер спектра будет тот же, что и в случае симметрических ядер, т. е. что собственных значений будет не более чем счетное множество, что они не могут иметь конечную предельную точку и что каждое собственное значение имеет конечную кратность.

Все результаты, приведенные выше для одномерного случая, распространяются и на случай функций многих переменных.

Упражнение. Найти собственные значения и условия разрешимости при λ, равном собственному значению уравнения

$$x(t)-\lambda\int_0^1 sx(s)\,ds=y(t).$$