

22.16  
A84

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

---

В. И. АРНОЛЬД



22.16  
1884

В. И. АРНОЛЬД

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством  
высшего и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
механико-математических специальностей  
высших учебных заведений*

~~278015~~

~~ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
ОБРАЗОВАНИЕ  
УЧЕБНИК~~



ADIS SO'IR TERMIZY MAMDAGI  
SURXONDARYO VILOYATI AXBOROT  
KUTUSXONA MARKAZI  
Kot. № ~~278015~~  
278015 2007y.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1975

517.2

А 84

УДК 517.9

**Обыкновенные дифференциальные уравнения,**  
Арнольд В. И., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, изд. 2, стереотипное, 1975, стр. 240

Книга отличается от имеющихся учебных руководств по обыкновенным дифференциальным уравнениям большей, чем это обычно принято, связью с приложениями, в особенности с механикой, и более геометрическим, бескоординатным изложением. В соответствии с этим в книге мало выкладок, но много понятий, необычных для курса дифференциальных уравнений (фазовые потоки, однопараметрические группы, диффеоморфизмы, касательные пространства и расщепления), и примеров из механики (например, исследование фазовых портретов консервативных систем с одной степенью свободы, теория малых колебаний, параметрический резонанс).

Книга рассчитана на студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике, но будет интересна и специалистам в области математики и ее приложений.

Илл. 259.

А  $\frac{20203-040}{053(02)-75}$  1-75

## Оглавление

Предисловие .....	5
<b>Глава 1. Основные понятия .....</b>	<b>7</b>
§ 1. Фазовые пространства и фазовые потоки .....	7
§ 2. Векторные поля на прямой .....	16
§ 3. Фазовые потоки на прямой .....	22
§ 4. Примеры векторных полей и фазовых потоков на плоскости ..	25
§ 5. Неавтономные уравнения .....	29
§ 6. Касательное пространство .....	34
<b>Глава 2. Основные теоремы .....</b>	<b>47</b>
§ 7. Векторное поле вблизи неособой точки .....	47
§ 8. Применения к неавтономному случаю .....	54
§ 9. Применения к уравнениям выше первого порядка .....	56
§ 10. Фазовые кривые автономной системы .....	63
§ 11. Производная по направлению векторного поля и первые интег- ралы .....	67
§ 12. Консервативная система с одной степенью свободы .....	73
<b>Глава 3. Линейные системы .....</b>	<b>86</b>
§ 13. Линейные задачи .....	86
§ 14. Показательная функция .....	89
§ 15. Свойства экспоненты .....	95
§ 16. Определитель экспоненты .....	101
§ 17. Практическое вычисление матрицы экспоненты — случай вещест- венных и различных собственных чисел .....	105
§ 18. Комплексификация и о вещественности .....	108
§ 19. Линейное уравнение с комплексным фазовым пространством ..	112
§ 20. Комплексификация вещественного линейного уравнения .....	116
§ 21. Классификация особых точек линейных систем .....	124
§ 22. Топологическая классификация особых точек .....	129
§ 23. Устойчивость положений равновесия .....	138
§ 24. Случай чисто мнимых собственных чисел .....	142
§ 25. Случай кратных собственных чисел .....	148
§ 26. О квазимногочленах .....	156
§ 27. Линейные неавтономные уравнения .....	167

§ 28. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами . . . . .	175
§ 29. Вариация постоянных . . . . .	183
<b>Глава 4. Доказательства основных теорем . . . . .</b>	<b>185</b>
§ 30. Сжатые отображения . . . . .	185
§ 31. Доказательство теорем существования и непрерывной зависимости от начальных условий . . . . .	186
§ 32. Теорема о дифференцируемости . . . . .	195
<b>Глава 5. Дифференциальные уравнения на многообразиях . . . . .</b>	<b>204</b>
§ 33. Дифференцируемые многообразия . . . . .	204
§ 34. Касательное расслоение. Векторные поля на многообразии . . . . .	212
§ 35. Фазовый поток, заданный векторным полем . . . . .	218
§ 36. Индексы особых точек векторного поля . . . . .	221
Программа экзамена . . . . .	234
Образцы экзаменационных задач . . . . .	235
Предметный указатель . . . . .	237

## Предисловие

При отборе материала для этой книги автор стремился ограничиться строго необходимым минимумом. Центральное место в курсе занимают два круга вопросов: теорема о выпрямлении векторного поля (эквивалентная обычным теоремам существования, единственности и дифференцируемости решений) и теория однопараметрических групп линейных преобразований (т. е. теория линейных автономных систем). Автор позволил себе не касаться ряда более специальных вопросов, обычно включаемых в курсы обыкновенных дифференциальных уравнений (элементарные приемы интегрирования; уравнения, не разрешенные относительно производной; особые решения; теория Штурма — Лиувилля; уравнения с частными производными первого порядка). Часть из этих вопросов удобнее разобрать на упражнениях; последние же две темы естественнее относить к курсам уравнений с частными производными или вариационного исчисления.

Более подробно, чем это обычно принято, разбираются приложения обыкновенных дифференциальных уравнений к механике. Уравнение маятника появляется на одной из первых страниц; в дальнейшем эффективность вводимых понятий и методов каждый раз проверяется на этом примере. Так, в параграфе о первых интегралах появляется закон сохранения энергии, из теоремы о дифференцировании по параметру извлекается «метод малого параметра», а теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами естественно приводит к исследованию качелей («параметрический резонанс»):

Изложение многих вопросов в курсе сильно отличается от традиционного. Автор стремился всюду выявить геометрическую, качественную сторону изучаемых явлений. В соответствии с этим в книге много чертежей и нет ни одной сколько-нибудь сложной формулы. Зато появляется целый ряд фундаментальных понятий, которые при традиционном, координатном изложении остаются в тени (фазовое пространство и фазовые потоки, гладкие многообразия и расслоения, векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов). Курс значительно сократился бы,

если бы можно было предполагать эти понятия известными. К сожалению, в настоящее время указанные вопросы не включаются ни в курсы анализа, ни в курсы геометрии. Поэтому автору пришлось излагать их достаточно подробно, не предполагая у читателя никаких предварительных знаний, выходящих за рамки стандартных элементарных курсов анализа и линейной алгебры.

Основу настоящей книги составил годово́й курс лекций, которые автор читал студентам-математикам второго курса Московского университета в 1968—1969 и 1969—1970 уч. гг.

При подготовке лекций к печати большую помощь оказал Р. И. Богданов. Автор благодарен ему и всем слушателям и коллегам, сообщившим свои замечания о ротационном тексте лекций (МГУ, 1969). Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и С. Г. Крейну за внимательное рецензирование рукописи.

1971 г.

В. Арнольд

### Некоторые постоянно употребляемые обозначения

$R$  — множество (группа, поле) вещественных чисел.

$C$  — множество (группа, поле) комплексных чисел.

$Z$  — множество (группа, кольцо) целых чисел.

$x \in X \subset Y$  — элемент  $x$  подмножества  $X$  множества  $Y$ .

$X \cap Y, X \cup Y$  — пересечение и объединение множеств  $X$  и  $Y$ .

$f: X \rightarrow Y$  — отображение  $f$  множества  $X$  в множество  $Y$ .

$x \mapsto y$  — отображение переводит точку  $x$  в точку  $y$ .

$f \cdot g$  — произведение отображений (применяется сначала  $g$ ).

$\exists, \forall$  — существует, для всякого.

$*$  — не обязательная (более трудная) задача или теорема.

$R^n$  — линейное пространство размерности  $n$  над полем  $R$ .

В множестве  $R^n$  могут рассматриваться и другие структуры (например, аффинная, евклидова или структура прямого произведения  $n$  прямых). Обычно это будет специально оговариваться («аффинное пространство  $R^n$ », «евклидово пространство  $R^n$ », «координатное пространство  $R^n$ » и т. п.).

*Векторами* мы называем элементы линейного пространства. Векторы обычно обозначаются буквами полужирного шрифта ( $v, \xi$  и т. п.). Векторы координатного пространства  $R^n$  отождествляются с наборами  $n$  чисел. Мы будем писать, например,  $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ ; набор  $n$  векторов  $e_i$  называется *координатным базисом* в  $R^n$ .

Нам часто будут встречаться функции вещественного переменного  $t$ , называемого *временем*. Производная по  $t$  называется *скоростью* и обозначается

чаще всего точкой наверху:  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

## Глава 1

### Основные понятия

#### § 1. Фазовые пространства и фазовые потоки

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности*, *конечномерности* и *дифференцируемости*. Прежде чем дать точные математические определения, рассмотрим несколько примеров.

1. Примеры эволюционных процессов. Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящее время. Множество всевозможных состояний процесса называется *фазовым пространством*.

Так, например, классическая механика рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы. Фазовое пространство механической системы — это множество, элементом которого является набор положений и скоростей всех точек данной системы.

Движение частиц в квантовой механике не описывается детерминированным процессом. Распространение тепла — полудетерминированный процесс: будущее определяется настоящим, а прошлое — нет.

Процесс называется *конечномерным*, если его фазовое пространство конечномерно, т. е. если число параметров, нужных для описания его состояния, конечно. Так, например, ньютоновская механика систем из конечного числа материальных точек или твердых тел относится к этому классу. Размерность фазового пространства системы из  $n$  материальных точек равна  $6n$ , а системы из  $n$  твердых тел —  $12n$ . Движения жидкости, изучаемые в гидродинамике, процессы колебаний струны и мембраны, распространение волн в оптике и акустике — примеры процессов, которые нельзя описать с помощью конечномерного фазового пространства.

Процесс называется *дифференцируемым*, если его фазовое пространство имеет структуру дифференцируемого многообразия, а изменение состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями.

Так, например, координаты и скорости точек механической системы меняются со временем дифференцируемым образом.

Движения, изучаемые в теории удара, свойством дифференцируемости не обладают.

Таким образом, движение системы в классической механике может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как квантовая механика, теория теплопроводности, гидродинамика, теория упругости, оптика, акустика и теория удара требуют иных средств.

Еще два примера детерминированных конечномерных и дифференцируемых процессов: процесс радиоактивного распада и процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества. В обоих случаях фазовое пространство одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества или количеством бактерий. В обоих случаях процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Заметим, что вид дифференциального уравнения процесса, а также самый факт детерминированности, конечномерности и дифференцируемости того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы не будем всякий раз подчеркивать это обстоятельство и будем говорить о реальных процессах так, как если бы они точно совпадали с нашими идеализированными математическими моделями.

2. **Фазовые потоки.** Точная формулировка изложенных выше общих принципов требует довольно абстрактных понятий: *фазового пространства* и *фазового потока*.



Рис. 1. Начальное положение возов.

Чтобы освоиться с этими понятиями, рассмотрим пример, где уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

**Задача 1** (Н. Н. Константинов). Из города  $A$  в город  $B$  (рис. 1) ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из  $A$  в  $B$  и связанные веревкой некоторой длины, меньшей  $2l$ , смогли проехать из  $A$  в  $B$ , не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса  $l$ , центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

**Решение.** Рассмотрим квадрат (рис. 2)

$$M = \{x_1, x_2: 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Положение двух экипажей (один на первой дороге, другой — на второй) можно характеризовать точкой квадрата  $M$ : достаточно обозначить через  $x_i$  долю расстояния от  $A$  до  $B$  по  $i$ -й дороге, заключенную между  $A$  и находящимся на этой дороге экипажем.

Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата  $M$ . Этот квадрат называется *фазовым пространством*, а его точки — *фазовыми точками*. Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве.

Например, начальное положение машин (в горде  $A$ ) соответствует левому нижнему углу квадрата ( $x_1 = x_2 = 0$ ), а движение машин из  $A$  в  $B$  изображается кривой, ведущей в противоположный угол.

Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата ( $x_1 = 0, x_2 = 1$ ), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата.

Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше  $2l$ . Итак, разминуться не удастся.

В рассмотренном примере не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание состояний процесса как точек подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Вернемся теперь к понятиям детерминированности, конечномерности и дифференцируемости процесса.

Математической моделью детерминированного процесса является *фазовый поток*. В интуитивных терминах фазовый поток описывается следующим образом.

Пусть  $M$  — фазовое пространство процесса,  $x \in M$  — некоторое начальное состояние. Обозначим состояние процесса в момент  $t$  при начальном состоянии  $x$  через  $g^t x$ . Мы определили для каждого вещественного  $t$  отображение

$$g^t: M \rightarrow M$$

фазового пространства в себя. Это отображение  $g^t$  называется

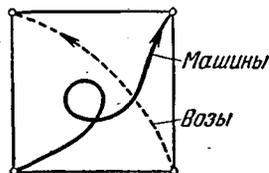


Рис. 2. Фазовое пространство пары экипажей.

отображением за время  $t$ ; оно переводит каждое состояние  $x \in M$  в новое состояние  $g^t x \in M$ . Например,  $g^0$  есть тождественное отображение, оставляющее каждую точку  $M$  на месте.

Далее,

$$g^{t+s} = g^t g^s,$$

так как состояние  $y = g^s x$  (рис. 3), в которое  $x$  перейдет через время  $s$ , по прошествии времени  $t$  перейдет в то же состояние  $z = g^t y$ , в которое  $x$  перейдет за время  $t+s$ , т. е.  $g^{t+s} x = z$ .

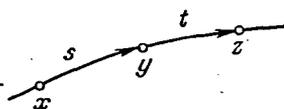


Рис. 3. Изменение состояния процесса с течением времени.

Зафиксируем фазовую точку  $x \in M$ , т. е. начальное состояние процесса. С течением времени состояние процесса будет меняться, и точка  $x$  опишет в фазовом пространстве  $M$  некоторую фазовую кривую  $\{g^t x, t \in \mathbb{R}\}$ . Отображения  $g^t$  за время  $t$  и образуют фазовый поток; каждая фазовая точка движется по своей фазовой кривой.

Теперь перейдем к точным математическим определениям. Пусть  $M$  — произвольное множество.

Определение. Однопараметрической группой преобразований множества  $M$  называется семейство  $\{g^t\}$  отображений множества  $M$  в себя, занумерованных множеством всех вещественных чисел ( $t \in \mathbb{R}$ ), если для любых  $s, t \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s \quad (1)$$

и  $g^0$  — тождественное отображение, оставляющее каждую точку на месте.

Задача 2. Докажите, что однопараметрическая группа преобразований является коммутативной группой и что каждое отображение  $g^t: M \rightarrow M$  взаимно однозначно.

Определение. Фазовым потоком  $(M, \{g^t\})$  называется пара, составленная из множества  $M$  и однопараметрической группы  $\{g^t\}$  его преобразований. Множество  $M$  называется фазовым пространством потока, а его элементы — фазовыми точками.

Пусть  $x \in M$  — какая-нибудь фазовая точка. Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \varphi(t) = g^t x. \quad (2)$$

Определение. Движением точки  $x$  под действием потока  $(M, \{g^t\})$  называется отображение (2) вещественной оси в фазовое пространство (рис. 4).

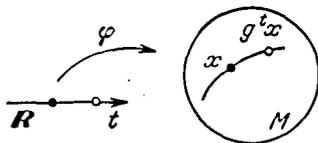


Рис. 4. Движение фазовой точки в фазовом пространстве  $M$ .

Определение. Фазовой кривой потока  $(M, \{g^t\})$  называется образ отображения (2)

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M.$$

Таким образом, фазовая кривая — это подмножество фазового пространства (рис. 5).

Задача 3. Докажите, что через каждую точку фазового пространства проходит одна и только одна фазовая кривая.

**Определение.** Положением равновесия или неподвижной точкой  $x \in M$  потока  $(M, \{g^t\})$  называется фазовая точка, являющаяся фазовой кривой:

$$g^t x = x \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

С графиком отображения  $\varphi$  связаны понятия расширенного фазового пространства и интегральной кривой. Напомним, что прямым произведением  $A \times B$  двух множеств  $A, B$  называется множество упорядоченных пар  $(a, b)$ ,  $a \in A, b \in B$ . Графиком отображения  $f: A \rightarrow B$  называется подмножество прямого произведения  $A \times B$ , состоящее из всех точек  $(a, f(a))$ ,  $a \in A$ .

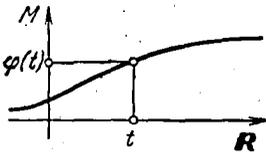


Рис. 6. Интегральная кривая в расширенном фазовом пространстве.

Задача 5. Докажите, что горизонтальная прямая  $\mathbb{R} \times x$ ,  $x \in M$ , является интегральной кривой тогда и только тогда, когда  $x$  — положение равновесия.

Задача 6. Докажите, что сдвиг расширенного фазового пространства вдоль оси времени

$$h^s: (\mathbb{R} \times M) \rightarrow (\mathbb{R} \times M), \quad h^s(t, x) = (t + s, x)$$

переводит интегральные кривые в интегральные кривые.

**3. Дiffeоморфизмы.** Приведенные выше определения формализуют понятие детерминированного процесса. Формализация условий конечномерности и дифференцируемости состоит в том, что фазовое пространство должно быть конечномерным дифференцируемым многообразием, а фазовый поток — однопараметрической группой диффеоморфизмов этого многообразия.

Разъясню смысл этих терминов. Примерами дифференцируемых многообразий являются евклидовы пространства, их открытые множества, окружность, сфера, тор. Общее определение будет дано в гл. 5. Пока можно считать, что речь идет об открытой области евклидова пространства.

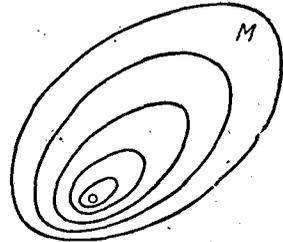


Рис. 5. Фазовые кривые.

Расширенным фазовым пространством потока  $(M, \{g^t\})$  называется прямое произведение  $\mathbb{R} \times M$  вещественной оси  $t$  и фазового пространства  $M$ . Интегральной кривой потока  $(M, \{g^t\})$  называется график движения (2) (рис. 6).

Задача 4. Докажите, что через каждую точку расширенного фазового пространства проходит одна и только одна интегральная кривая.

*Дифференцируемой функцией*  $f: U \rightarrow R$ , заданной в области  $U$  евклидова  $n$ -мерного пространства  $R^n$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$ , мы будем называть  $r$  раз непрерывно дифференцируемую функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , где  $1 \leq r \leq \infty$ . В большинстве случаев точное значение  $r$  не будет нас интересовать и мы не будем его указывать; если оно потребуется, мы будем говорить об  $r$ -дифференцируемости или о функции класса  $C^r$ .

*Дифференцируемым отображением*  $f: U \rightarrow V$  области  $U$   $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  в область  $V$   $m$ -мерного евклидова пространства  $R^m$  с координатами  $y_1, \dots, y_m$  мы называем отображение, заданное дифференцируемыми функциями  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Это значит, что если  $y_i: V \rightarrow R$  — координаты в  $V$ , то  $y_i \circ f: U \rightarrow R$  — дифференцируемые функции в  $U$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

*Диффеоморфизмом*  $f: U \rightarrow V$  называется такое взаимно однозначное отображение, что как  $f$ , так и  $f^{-1}: V \rightarrow U$  — дифференцируемые отображения.

**Задача 1.** Какие из следующих функций задают диффеоморфизм  $f: R \rightarrow R$  прямой на прямую:

$$f(x) = 2x, x^2, x^3, e^x, e^x + x?$$

**Задача 2.** Докажите, что если  $f: U \rightarrow V$  — диффеоморфизм, то размерности евклидовых пространств, областями в которых являются  $U$  и  $V$ , одинаковы.

**Указание.** Воспользоваться теоремой о неявной функции.

**Определение.** *Однопараметрической группой*  $\{g^t\}$  *диффеоморфизмов* многообразия  $M$  называется такое отображение  $g$  прямого произведения  $R \times M$  в  $M$

$$g: R \times M \rightarrow M, \quad g(t, x) = g^t x, \quad t \in R, \quad x \in M,$$

что

- 1)  $g$  — дифференцируемое отображение;
- 2) при каждом  $t \in R$  отображение  $g^t: M \rightarrow M$  — диффеоморфизм;
- 3) семейство  $\{g^t, t \in R\}$  является однопараметрической группой преобразований  $M$ .

**Пример 1.**  $M = R, g^t x = x + vt$  ( $v \in R$ ).

**Замечание.** Свойство 2 вытекает из свойств 1 и 3. (Почему?)

**4. Векторные поля.** Пусть  $(M, \{g^t\})$  — фазовый поток, заданный однопараметрической группой диффеоморфизмов многообразия  $M$ , лежащего в евклидовом пространстве.

\*) Можно считать, что речь идет об области  $M$  в евклидовом пространстве.

**Определение.** Фазовой скоростью  $v(x)$  потока  $g^t$  в точке  $x \in M$  (рис. 7) называется вектор скорости движения фазовой точки

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x = v(x); \quad (3)$$

левую часть соотношения (3) мы будем иногда обозначать через  $\dot{x}$ .

Заметим, что движение — это дифференцируемое отображение в область евклидова пространства, так что производная определена.

**Задача 1.** Докажите, что

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x = v(g^t x),$$

т. е. что вектор скорости движения фазовой точки в каждый момент времени равен вектору фазовой скорости в том месте фазового пространства, в котором движущаяся точка находится в данный момент.

**Указание.** См. (1). Решение имеется в § 3,2.

Если  $x_1, \dots, x_n$  — координаты в нашем евклидовом пространстве,  $x_i: M \rightarrow \mathbf{R}$ , то вектор скорости  $v(x)$  задается  $n$  функциями  $v_i: M \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ , называемыми компонентами вектора скорости

$$v_i(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x_i(g^t x).$$

**Задача 2.** Докажите, что  $v_i$  — функция класса  $C^{r-1}$ , если однопараметрическая группа  $g: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$  класса  $C^r$ .

Пусть  $M$  — область в евклидовом пространстве с координатами  $x_1, \dots, x_n$  ( $x_i: M \rightarrow \mathbf{R}$ ).

**Определение.** Векторное поле  $v$  на  $M$  относит каждой точке  $x$  области  $M$  исходящий из нее вектор  $v(x)$ . В системе координат  $x_i$  поле задается  $n$  дифференцируемыми функциями  $v_i: M \rightarrow \mathbf{R}$ .

Таким образом, векторы фазовой скорости образуют на фазовом пространстве  $M$  векторное поле фазовой скорости  $v$  (рис. 8).

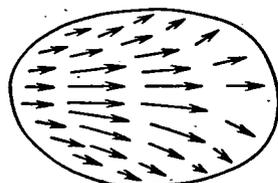


Рис. 8. Векторное поле.

**Задача 3.** Докажите, что если  $x$  — неподвижная точка фазового потока, то  $v(x) = 0$ .

Точка, в которой вектор векторного поля обращается в нуль, называется *особой точкой* \*) векторного поля. Таким образом,

\*) Заметим, что компоненты поля в особой точке не имеют особенностей: они непрерывно дифференцируемы. Название «особая точка» объясняется тем, что вблизи такой точки направление векторов поля меняется, вообще говоря, разрывно.

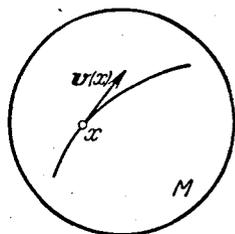


Рис. 7. Вектор фазовой скорости.

положения равновесия фазового потока являются особыми точками поля фазовой скорости. Обратное тоже верно, но доказывается не так просто.

**5. Основная задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений.** Основная задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в исследовании однопараметрических групп  $\{g^t\}$  диффеоморфизмов многообразия  $M$ , векторных полей на  $M$  и связей между ними.

Выше мы видели, что группа  $\{g^t\}$  определяет векторное поле — поле фазовой скорости  $v$  — по формуле (3).

Оказывается и обратно векторное поле  $v$  однозначно определяет фазовый поток (при некоторых условиях, которые будут указаны в дальнейшем).

Возвращаясь к неформальному языку, можно сказать, что векторное поле фазовой скорости — это *локальный закон эволюции* процесса, а теория обыкновенных дифференциальных уравнений

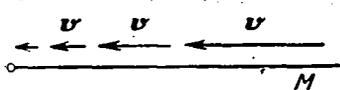


Рис. 9. Фазовое пространство радиоактивного распада.

должна, зная этот локальный закон эволюции, восстановить прошлое и предсказать будущее.

## 6. Примеры векторных полей.

**Пример 1.** Из эксперимента известно, что *скорость радиоактивного распада пропорциональна имеющемуся количеству вещества  $x$* . Здесь фазовое пространство — это полупрямая (рис. 9)

$$M = \{x: x > 0\}.$$

Указанный экспериментальный факт означает, что

$$\dot{x} = -kx, \quad v(x) = -kx, \quad k > 0; \quad (4)$$

т. е. векторное поле  $v$  на полупрямой направлено к 0 и величина вектора фазовой скорости пропорциональна  $x$ .

**Пример 2.** Из эксперимента известно, что *скорость размножения бактерий при достаточном запасе пищи пропорциональна их количеству  $x$* .

Здесь снова  $M$  — полупрямая  $x > 0$ , а векторное поле отличается от поля предыдущего примера знаком:

$$\dot{x} = kx, \quad v(x) = kx, \quad k > 0. \quad (5)$$

Заметим, что уравнение (5) соответствует размножению, при котором прирост пропорционален наличному числу особей.

**Пример 3.** Можно представить себе ситуацию, когда *прирост пропорционален числу всевозможных пар*:

$$\dot{x} = kx^2, \quad v(x) = kx^2 \quad (6)$$

(эта ситуация реализуется скорее в физико-химических задачах, чем в биологических). Мы увидим в дальнейшем, к каким ката-

строфическим последствием приводит слишком быстрое размножение (6).

Пример 4. Вертикальное падение точки на Землю с не слишком большой высоты описывается экспериментальным законом Галилея—ускорение постоянно.

Здесь фазовое пространство  $M$ —это плоскость  $(x_1, x_2)$  ( $x_1$ —высота,  $x_2$ —скорость), а экспериментальный закон падения выражается формулами вида (3):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g \quad (7)$$

( $-g$ —ускорение силы тяжести).

Соответствующее векторное поле фазовой скорости имеет компоненты  $v_1 = x_2, v_2 = -g$  (рис. 10).

Пример 5. Малые колебания плоского маятника описываются двумерной фазовой плоскостью с координатами  $x_1, x_2$ , где  $x_1$ —угол отклонения от вертикали,  $x_2$ —угловая скорость,  $M$ —окрестность начала координат.

В соответствии с законами механики ускорение пропорционально углу отклонения:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -kx_1, \quad k = l/g, \quad (8)$$

где  $l$ —длина маятника,  $g$ —постоянная силы тяжести. Иными словами, векторное поле фазовой скорости имеет компоненты

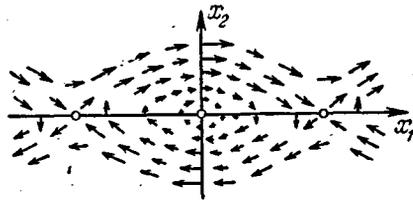
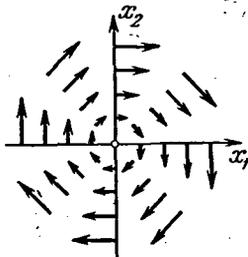


Рис. 11. Малые колебания маятника. — Рис. 12. Поле фазовых скоростей маятника.

$v_1 = x_2, v_2 = -kx_1$ . Начало координат—особая точка этого векторного поля (рис. 11).

Пример 6. Более точное описание колебаний маятника (не обязательно малых) приводит к закону

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k \sin x_1. \quad (9)$$

Соответствующее векторное поле на фазовой плоскости с координатами  $x_1, x_2$ —это поле (рис. 12)

$$v_1 = x_2, \quad v_2 = -k \sin x_1.$$

Особые точки— $x_1 = \pi l, x_2 = 0$ .

Заметим, что фазовым пространством маятника естественно считать не плоскость  $\{(x_1, x_2)\}$ , а поверхность цилиндра  $\{(x_1 \bmod 2\pi, x_2)\}$ , так как изменение угла  $x_1$  на  $2\pi$  не меняет состояния маятника. Векторное поле, соответствующее уравнениям (9), можно также считать заданным на поверхности цилиндра (рис. 13).

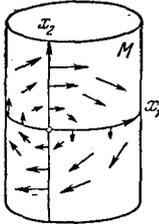


Рис. 13. Цилиндрическое фазовое пространство маятника.

Задача 1. Нарисуйте фазовые кривые для примеров 4 и 5 и интегральные кривые для примеров 1, 2 и 3.

## § 2. Векторные поля на прямой

Покажем, что формула Ньютона—Лейбница позволяет решать дифференциальные уравнения, заданные векторными полями на прямой, с помощью операции интегрирования. Вначале введем определения, которыми постоянно будем пользоваться в дальнейшем.

1. Определение решений дифференциального уравнения. Пусть  $U$  — открытая область  $n$ -мерного евклидова пространства, и пусть  $v$  — векторное поле в  $U$  (рис. 14).

Дифференциальным уравнением, заданным векторным полем  $v$ , называется уравнение\*).

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U. \quad (1)$$

Область  $U$  называется фазовым пространством уравнения (1).

Определение. Решением дифференциального уравнения (1) называется дифференцируемое отображение  $\varphi: I \rightarrow U$  интервала  $I = \{t \in \mathbb{R}, a < t < b\}$  вещественной оси  $t$  (допускаются  $a = -\infty, b = +\infty$ ) в фазовое пространство, если для любого  $\tau \in I$  выполняется соотношение  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=\tau} \varphi(t) = v(\varphi(\tau))$ .

Иными словами, точка  $\varphi(t)$  при изменении  $t$  должна двигаться в  $U$  таким образом, чтобы ее скорость в каждый момент времени  $\tau$  была равна вектору  $v(x)$  поля  $v$  в той точке  $x = \varphi(\tau)$ , в которой движущаяся точка в данный момент находится.

Образ отображения  $\varphi$  называется фазовой кривой дифференциального уравнения (1).

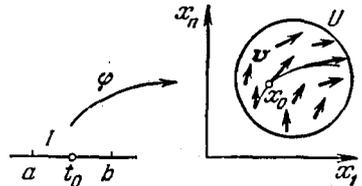


Рис. 14. Решение дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$  в начальном условии  $\varphi(t_0) = x_0$ .

\* Иногда говорят, что дифференциальными называются уравнения, в которые входят неизвестные функции и их производные. Это неверно: например, соотношение  $\frac{dx}{dt} = x(x(t))$  не является дифференциальным уравнением.

Определение. Решение  $\varphi: I \rightarrow U$  дифференциального уравнения (1) удовлетворяет начальному условию

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in U), \quad (2)$$

если  $a < t_0 < b$  и значение  $\varphi$  в точке  $t_0$  равно  $x_0$ , т. е. если фазовая кривая проходит через точку  $x_0$  в момент  $t_0$ .

Пример 1. Если  $x_0$  — особая точка векторного поля,  $\mathbf{v}(x_0) = 0$ , то  $\varphi = x_0$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Такое решение называется *положением равновесия* или *стационарным решением*. Точка  $x_0$  является также фазовой кривой.

В общем случае явно найти решения уравнения, зная векторное поле, невозможно. Основной случай, в котором это удастся сделать, — это случай  $n=1$ , т. е. случай векторных полей на прямой. Его мы теперь и рассмотрим.

## 2. Интегральные кривые.

Определение. *Расширенным фазовым пространством* уравнения (1) называется прямое произведение  $\mathbb{R} \times U$ . *Интегральной кривой* уравнения (1) называется график решения.

В рассматриваемом сейчас случае  $n=1$  расширенное фазовое пространство — это полоса  $\mathbb{R} \times U$  в прямом произведении оси  $t$  и оси  $x$  (рис. 15).

Проведем через каждую точку  $(t, x)$  расширенного фазового пространства прямую, тангенс угла наклона которой к оси  $t$  равен  $\mathbf{v}(x)$ . Это семейство прямых называется *полем направлений*, соответствующим уравнению (1), или *полем направлений*  $\mathbf{v}$ .

Интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений  $\mathbf{v}$ .

Обратно, всякая кривая, касающаяся в каждой своей точке направления, имеющегося в этой точке, является интегральной кривой (докажите!).

Решение удовлетворяет условию (2) тогда и только тогда, когда соответствующая интегральная кривая проходит через точку  $(t_0, x_0)$ .

Итак, найти решение уравнения (1) с начальным условием (2) означает провести через точку  $(t_0, x_0)$  кривую, касающуюся в каждой своей точке поля направлений  $\mathbf{v}$ .

Заметим, что наклон интегральных кривых на каждой горизонтали ( $x = \text{const}$ ) всюду одинаков.

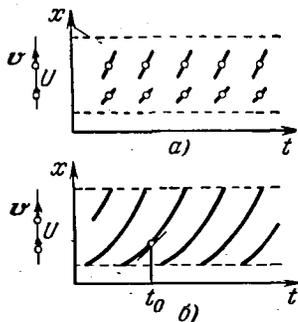
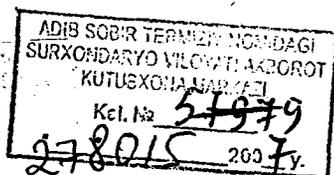


Рис. 15. Поле направлений (а) и интегральные кривые (б) в расширенном фазовом пространстве.



Задача 1. Пусть  $x = \operatorname{arctg} t$  — решение уравнения (1). Покажите, что  $x = \operatorname{arctg} (t+1)$  — тоже решение.

Указание. Решение имеется в § 10,1.

3. Теорема. Пусть  $v: U \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая функция, заданная на интервале  $U$  вещественной оси:

$$U = \{x \in \mathbb{R}: \alpha < x < \beta\}, \quad -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty.$$

Тогда

1) решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием (2) существует при любых  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in U$ ;

2) всякие два решения  $\varphi_1, \varphi_2$  уравнения (1) с условием (2) совпадают в некоторой окрестности точки  $t = t_0$ ;

3) решение  $\varphi$  уравнения (1) с условием (2) удовлетворяет соотношению

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad \text{если } v(x_0) \neq 0, \quad (3)$$

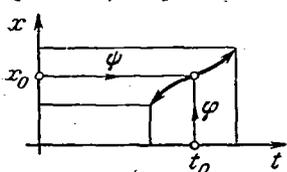
$$\varphi(t) = x_0, \quad \text{если } v(x_0) = 0.$$

Замечание. Поскольку  $v(\xi)$  — известная функция, формула (3) позволяет квадратурой найти функцию  $\psi$ , обратную  $\varphi$  ( $t = \psi(x)$ ,  $\varphi(t) = x$ ). После этого в силу теоремы о неявной функции можно найти  $\varphi$ . Итак, формула (3) содержит способ решения уравнения (1) с условием (2).

4. Начало доказательства теоремы п. 3.

1. Если  $v(x_0) = 0$ , положим  $\varphi(t) \equiv x_0$ . Тогда  $\varphi$  — решение (1), (2), удовлетворяющее (3).

2. Пусть  $v(x_0) \neq 0$ ,  $\varphi$  — решение (1), (2). Тогда по теореме о неявной функции в достаточно малой окрестности точки  $x_0$  (рис. 16) определена обратная к  $\varphi$  функция  $\psi$ ,  $t = \psi(x)$ ,  $\psi(x_0) = t_0$ , причем  $\frac{d\psi}{dx} \Big|_{x_0} = \frac{1}{v(\xi)}$ . Поскольку



$v(x_0) \neq 0$ , функция  $1/v(\xi)$  непрерывна в достаточно малой окрестности точки  $\xi = x_0$ . По формуле Ньютона — Лейбница

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)}.$$

Рис. 16. Решение  $\varphi$  и обратная к нему функция  $\psi$ .

Эта формула определяет функцию  $\psi$  в достаточно малой окрестности точки  $x = x_0$  однозначно. Обратная к  $\psi$  функция  $\varphi$  также определена однозначно в некоторой окрестности точки  $t = t_0$  условием  $\varphi(t_0) = x_0$  (теорема о неявной функции применима, так как  $1/v(x_0) \neq 0$ ). Итак, любое решение уравнения (1) с условием (2) в достаточно малой окрестности точки  $t = t_0$  удовлетво-

ряет соотношению (3), и утверждение о единственности 2) доказано.

3. Остается проверить, что функция  $\varphi$ , обратная  $\psi$ , является решением (1), (2). Действительно,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi^{-1}}{dt} \Big|_{x=\varphi(t)} = \left( \frac{1}{v(x)} \right)^{-1} \Big|_{x=\varphi(t)} = v(\varphi(t)), \quad \varphi(t_0) = x_0,$$

и теорема доказана.

Задача 1. Указать пробел в доказательстве.

5. **Опровергающий пример.** Пусть  $v = x^{1/2}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  (рис. 17). Легко проверить, что оба решения  $\varphi_1 \equiv 0$ ,  $\varphi_2 = (t/3)^2$  удовлетворяют и уравнению (1), и условию (2).

Конечно, функция  $v$  не дифференцируема, так что пример не опровергает утверждение теоремы. Однако приведенное выше доказательство нигде не использовало дифференцируемости  $v$ ; оно проходит и в том случае, когда функция  $v$  лишь непрерывна.

Следовательно, это доказательство не может быть верным. Действительно, утверждение единственности 2) было доказано лишь при условии  $v(x_0) \neq 0$ . Мы видим,

что если поле  $v$  только непрерывно (а не дифференцируемо), то единственности решений с условием  $\varphi(t_0) = x_0$ , где  $x_0$  — особая точка,  $v(x_0) = 0$ , может и не быть. Оказывается, дифференцируемость  $v$  гарантирует единственность и в этом случае.

6. **Подтверждающий пример.** Пусть  $v(x) = kx$ ,  $U = R$  (рис. 18). Решим дифференциальное уравнение вида (1):

$$\dot{x} = kx, \quad k \neq 0, \quad (4)$$

с условием (2) по формуле (3).

Пусть  $\varphi$  — решение,  $\varphi(t_0) = x_0 > 0$ . Тогда

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{k\xi} = \frac{1}{k} \ln \frac{\varphi(t)}{x_0},$$

откуда

$$\varphi(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}, \quad (5)$$

для  $t$  из достаточно малой окрестности  $t_0$ .

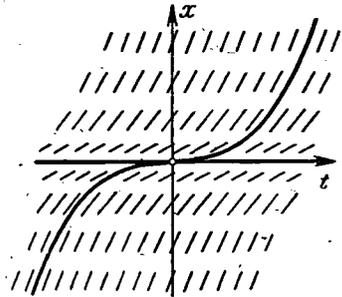


Рис. 17. Пример неединственности.

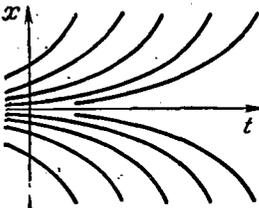


Рис. 18. Интегральные кривые уравнения  $\dot{x} = kx$ .

Заметим, что правая часть соотношения (5) определена на всей оси  $t$  и представляет собой всюду дифференцируемую функцию, которая везде удовлетворяет уравнению (4) и условию  $\varphi(t_0) = x_0$ . (Непер ввел экспоненту именно как решение уравнения (4).)

**Задача 1.** Доказать, что всякое решение  $\varphi$  уравнения (4), удовлетворяющее условию  $\varphi(t_0) = x_0 > 0$ , дается формулой (5) на всем интервале  $a < t < b$ , где оно определено.

**Решение.** Можно рассуждать, например, так. Пусть  $T$  — верхняя грань чисел  $t$  таких, что (5) имеет место для всех  $t$ ,  $t_0 \leq t < t$ . По условию  $t_0 \leq T \leq b$ . Если  $T < b$ , то формула (5) верна при  $t = T$  ввиду непрерывности  $\varphi$ . Но тогда она верна в некоторой окрестности  $T$  (для доказательства надо повторить рассуждение, давшее формулу (5), заменив  $t_0$  на  $T$  и  $x_0$  на  $\varphi(T)$ ; заметим, что согласно (5)  $\varphi(T) > 0$ ). Итак,  $T = b$  и формула (5) доказана для  $t_0 \leq t < b$ . Случай  $a < t \leq t_0$  рассматривается аналогично.

Итак, формула (5) дает все решения уравнения (4) с  $x_0 > 0$ .

**Замечание.** Таким образом, мы решили задачи о радиоактивном распаде и о росте числа бактерий из § 1. Количество вещества будет со временем убывать экспоненциально. Для уменьшения количества радиоактивного вещества вдвое требуется время  $T = k^{-1} \ln 2$  независимо от начального количества вещества. Это время  $T$  называется *периодом полураспада*.

Количество бактерий будет со временем расти экспоненциально. Через время  $T = k^{-1} \ln 2$  их количество удваивается (пока хватает пищи). Формула (5) содержит также решение многих других задач (рис. 19).

**Задача 2.** На какой высоте плотность воздуха вдвое меньше, чем на поверхности постоянной, кубометр воздуха весит 1250 г

Рис. 19. Рост числа оригинальных и реферативных научных журналов (по книге В. В. Налимова и З. М. Мульченко, Наукометрия, «Наука», 1969).

Земли? Температуру считать (на поверхности Земли).

*Ответ.*  $8 \ln 2 \text{ км} \approx 5,6 \text{ км}$  — высота Эльбруса.

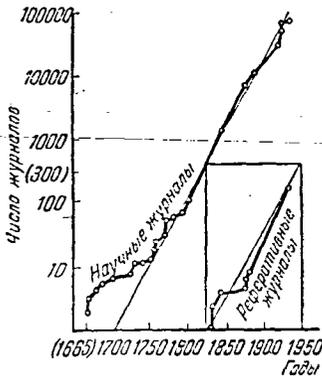
**Задача 3.** Докажите, что все решения уравнения (4) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0 < 0$  также даются формулой (5).

Заметим, что никакая из функций (5) с  $x_0 \neq 0$  ни при каком  $t$  в 0 не обращается. Поэтому единственное решение уравнения (4) с условием  $x_0 = 0$  — это стационарное решение  $x \equiv 0$ .

Итак, формула (5) исчерпывает вообще все решения уравнения (4).

В частности, для уравнения (4) верно утверждение единственности теоремы п. 3. Отсюда легко вывести единственность для любого уравнения (1) с дифференцируемым векторным полем  $\vartheta$  и для более общих уравнений.

Причина неединственности в случае  $\vartheta(x) = x^{2/3}$  состоит в том, что это поле недостаточно быстро убывает при подходе к  $x = 0$ . Из-за этого решение успеваеет войти в особую точку за конечное



время. В случае  $v(x) = kx$  требуется бесконечное время, чтобы проникнуть в особую точку: интегральные кривые сближаются экспоненциально. Не более чем экспоненциальное сближение интегральных кривых характерно для любых дифференциальных уравнений с дифференцируемым векторным полем  $v$  и служит причиной единственности.

В частности, доказательство единственности в теореме п. 3 легко получить, сравнивая общее уравнение (1) с подходящим уравнением (4).

7. Теорема сравнения. Пусть  $v_1$  и  $v_2$  — непрерывные на некотором интервале  $U$  вещественной оси вещественные функции, причем  $v_1 < v_2$ . Пусть  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — решения дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v_1(x), \quad \dot{x} = v_2(x) \quad (6)$$

соответственно, с одинаковым начальным условием  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$  (рис. 20). Пусть оба решения  $\varphi_1, \varphi_2$  определены на интервале  $a < t < b$ , где  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

Теорема. Для всех  $t \geq t_0$  на этом интервале  $(a, b)$  выполняется неравенство

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t). \quad (7)$$

Доказательство. Неравенство (7) почти очевидно (кто едет тише, не уедет дальше\*). Иными словами, рассмотрим точную верхнюю грань  $T$  множества чисел  $t$ , для которых неравенство (7) выполнено при всех  $t, t_0 \leq t < T$ . По условию  $t_0 \leq T \leq b$ . Если  $T < b$ , то ввиду непрерывности  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеем  $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$ . Тогда по условию

$$\left. \frac{d\varphi_1}{dt} \right|_{t=T} < \left. \frac{d\varphi_2}{dt} \right|_{t=T},$$

и, значит,  $\varphi_1 < \varphi_2$  в правой полуокрестности точки  $T$ . Значит,  $T$  не точная верхняя грань. Противоречие доказывает, что  $T = b$ , что и требовалось.

Замечание. Аналогично доказывается, что  $\varphi_1(t) \geq \varphi_2(t)$  при  $t \leq t_0$ .

8. Окончание доказательства теоремы п. 3. Пусть  $x_0$  — особая точка дифференцируемого векторного поля  $v$ ,  $v(x_0) = 0$ . Покажем, что решение уравнения (1) с условием (2) единственно, т. е. что для всякого решения  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ .

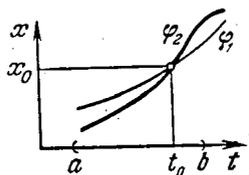


Рис. 20. Наклон  $\varphi_2$  больше наклона  $\varphi_1$  в точках с равными  $x$ , но не в точках с равными  $t$ .

\*) Заметим все же, что скорость изменения  $\varphi_1$  в данный момент времени может быть больше, чем скорость изменения  $\varphi_2$  в тот же момент времени (рис. 20).

$\varphi(t) \equiv x_0$ . Не нарушая общности, мы можем считать, что  $x_0 = 0$ . Поскольку поле  $v$  дифференцируемо, а  $v(0) = 0$ , то при достаточно малых  $|x| \neq 0$  имеем

$$|v(x)| < k|x|, \quad (8)$$

$k > 0$  — некоторая положительная постоянная.

Нужная единственность вытекает теперь из того, что различные от  $x=0$  интегральные кривые уравнения (4), которые идут вблизи  $x=0$  круче интегральных кривых (1), не могут достичь прямой  $x=0$  за конечное время, как мы видели выше в п. 6.

Формальное доказательство можно провести, например, так.

Пусть  $\varphi$  — решение (1), (2),  $\varphi(t_0) = 0$  (рис. 21). Предположим, что  $\varphi(t_1) > 0$ ,  $t_1 > t_0$ . Поскольку  $\varphi$  — непрерывная функция, существует интервал  $(t_2, t_3)$  со следующими свойствами: 1)  $\varphi(t_2) = 0$ , 2)  $\varphi(t) > 0$  при  $t_2 < t \leq t_3$ , 3)  $x = \varphi(t)$  удовлетворяет (3) при  $t_2 < t \leq t_3$ .

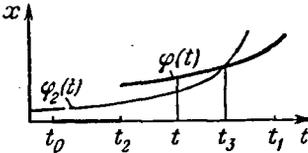


Рис. 21. Решение  $\varphi$  не может принимать нулевых значений, так как оно подходит к 0 медленнее экспоненты  $\varphi_2$ .

В качестве  $t_2$  можно взять нижнюю грань  $\tau$ , для которых  $\varphi(\tau) > 0$  при  $\tau < t \leq t_1$ , в качестве  $t_3$  — любую достаточно близкую к  $t_2$  точку  $t_3 > t_2$ .

Теперь сравним решение  $\varphi(t)$ ,  $t_2 < t \leq t_3$ , с решением

$$\varphi_2(t) = \varphi(t_3) e^{k(t-t_3)}$$

уравнения (4) с начальным условием  $\varphi_2(t_3) = \varphi(t_3)$ . По предыдущей теореме при любом  $t_2 < t \leq t_3$  ввиду (8)

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_3) e^{k(t-t_3)}.$$

По непрерывности

$$\varphi(t_2) \geq \varphi(t_3) e^{k(t_2-t_3)} > 0.$$

Полученное противоречие с  $\varphi(t_2) = 0$  доказывает, что такого  $t_1$ , что  $\varphi(t_1) > 0$ ,  $t_1 > t_0$ , не существует. Случай  $t_1 < t_0$  или  $\varphi(t_1) < 0$  разбираются аналогично. Теорема доказана.

Задача 1. Провести доказательство единственности методом п. 6, не пользуясь сравнением с уравнением (4). Показать, что для единственности

достаточно расходимость в  $x_0$  интеграла  $\int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}$ .

Задача 2. Доказать утверждение единственности для дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$ , где  $v$  — дифференцируемая функция, предполагая, что решение  $x = \varphi(t)$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  существует.

Указание. Рассмотреть  $y = x - \varphi(t)$  и сравнить с подходящим уравнением (4).

### § 3. Фазовые потоки на прямой

Мы научились решать дифференциальные уравнения, заданные векторным полем на прямой. Посмотрим, что означают полученные результаты на языке фазовых потоков.

1. Однопараметрические группы линейных преобразований. Начнем с простейшего уравнения

$$\dot{x} = kx, \quad x \in R. \quad (1)$$

Решение  $\varphi$  этого уравнения с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$  нам известно:

$$\varphi(t) = e^{kt} x_0.$$

Определим отображение за время  $t$ .  $g^t: R \rightarrow R$ , переводящее начальное условие  $x_0$  в решение через время  $t$ ,

$$g^t x_0 = e^{kt} x_0.$$

Семейство отображений  $\{g^t\}$  называется *фазовым потоком, соответствующим уравнению (1)* (или векторному полю  $v = kx$ ).

Заметим, что отображение  $g^t$  — линейное преобразование прямой, а именно растяжение в  $e^{kt}$  раз. Для любых вещественных  $s$  и  $t$  имеем

$$g^{s+t} = g^s g^t, \quad g^t x = x.$$

Далее,  $g^t x$  дифференцируемо по  $t$  и по  $x$ .

Итак, фазовый поток  $g^t$  представляет собой однопараметрическую группу диффеоморфизмов, являющихся линейными преобразованиями прямой. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов линейного пространства, являющихся линейными преобразованиями, называется короче *однопараметрической группой линейных преобразований*\*). Итак, фазовый поток  $\{g^t\}$ , соответствующий уравнению (1), — это однопараметрическая группа линейных преобразований. Движения точек под действием этого фазового потока являются решениями уравнения (1).

**Теорема.** *Всякая однопараметрическая группа  $\{g^t\}$  линейных преобразований прямой  $R$  является фазовым потоком дифференциального уравнения вида (1), так что*

$$g^t x = e^{kt} x$$

при некотором  $k$ .

Доказательству этой теоремы предположим замечание общего характера.

2. Дифференциальное уравнение однопараметрической группы. Пусть  $\{g^t\}$  — однопараметрическая группа диффеоморфизмов области  $U$ ,  $v$  — векторное поле фазовой скорости, определенное соотношением

$$v(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x, \quad x \in U.$$

\*) Заметим, что в определении однопараметрической группы линейных преобразований  $g^t$  входит, таким образом, дифференцируемость по  $t$ .

**Теорема.** Движение фазовой точки  $\varphi: R \rightarrow U$ ,  $\varphi(t) = g^t x$  является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x). \quad (2)$$

**Доказательство.** Нужно доказать, что скорость движения фазовой точки  $g^t x$  в каждый момент времени  $t_0$  совпадает с имеющейся в точке  $g^{t_0} x$  фазовой скоростью. Это очевидно, так как преобразования  $g^t$  образуют группу:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} g^t x = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} g^{t_0+\tau} x = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} g^\tau (g^{t_0} x) = v(g^{t_0} x).$$

**3. Общий вид однопараметрических групп линейных преобразований прямой.** Пусть  $\{g^t\}$  — однопараметрическая группа линейных преобразований линейного пространства  $L$ . Тогда фазовая скорость  $v(x)$  зависит от  $x \in L$  линейно, ибо производная  $\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}\right)$  по параметру  $t$  от линейной по  $x$  функции  $g(t, x) = g^t x$  — линейная функция от  $x^*$ ). В частности, если  $L = R$  — прямая, то всякая линейная функция от  $x$  имеет вид  $v(x) = kx$ , где  $k = v(1)$ . Итак, движение  $\varphi(t) = g^t x$  является решением уравнения (2) с  $v(x) = kx$ , т. е. уравнения (1).

Единственное решение  $\varphi$  этого уравнения с условием  $\varphi(0) = x$  имеет вид  $g^t x = e^{kt} x$ , что и доказывает теорему п. 1.

**Замечание.** Требование дифференцируемости семейства линейных преобразований  $g^t$  по  $t$  в определении однопараметрической группы можно было бы заменить требованием одной лишь непрерывности.

**Задача\* 1.** Докажите, что всякая непрерывная однопараметрическая группа линейных преобразований прямой дифференцируема.

**Указание.** Вспомните определение показательной функции при целых, дробных и иррациональных значениях аргумента.

**Задача\* 2.** Найти все однопараметрические группы линейных преобразований следующих линейных пространств:

$R^2$  (вещественная плоскость);

$C^1$  (комплексная прямая — одномерное линейное пространство над полем комплексных чисел).

**Указание.** В гл. 3 описаны все однопараметрические группы линейных преобразований  $n$ -мерных вещественных и комплексных пространств  $R^n$  и  $C^n$ .

**4. Нелинейный пример.** Рассмотрим теперь более сложное дифференциальное уравнение  $\dot{x} = \sin x$ ,  $x \in R$ .

**Задача 1.** Найти решение  $\varphi$  этого уравнения с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$ .

Здесь мы снова можем определить отображение за время  $t$ :

$$g^t: R \rightarrow R, \quad g^t x_0 = \varphi(t),$$

\*) Заметим, что линейная неоднородная функция  $f(x) = ax + b$  при  $b \neq 0$  не является линейной.

где  $\varphi(t)$  — решение с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$ . Отображения  $g^t$  образуют однопараметрическую группу диффеоморфизмов прямой или фазовый поток, соответствующий уравнению. Точки  $x = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ , являются неподвижными точками фазового потока  $\{g^t\}$ . Диффеоморфизмы  $g^t$  ( $t \neq 0$ ) — нелинейные преобразования прямой. Если  $t > 0$ ,  $g^t$  сдвигает каждую точку  $x$  к ближайшему нечетному кратному  $\pi$ , а если  $t < 0$  — то к ближайшему четному (рис. 22).

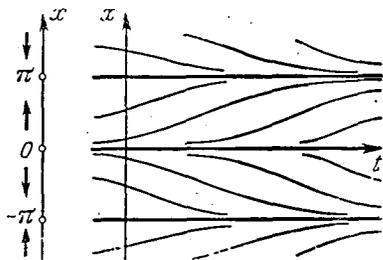


Рис. 22. Фазовое и расширенное фазовое пространство уравнения  $\dot{x} = \sin x$ .

Задача 2. Докажите, что последовательность функций  $g^t$ ,  $t_i \rightarrow \infty$ , сходится, но не равномерно.

Рассмотренные примеры порождают надежду, что с каждым дифференциальным уравнением на прямой

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in R,$$

связана однопараметрическая группа диффеоморфизмов прямой  $g^t$ ,  $g^t x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — решение с условием  $\varphi(0) = x$ .

5. Пример, опровергающий утверждение п. 4. Рассмотрим дифференциальное уравнение сверхбыстрого размножения (пример 3 п. 6 § 1, рис. 23)  $\dot{x} = x^2$ . Решение  $\varphi$  дается формулой (3) § 2:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{dx}{x^2},$$

которую часто пишут короче в виде

$$\int dt = \int \frac{dx}{x^2},$$

$$t = -\frac{1}{x} + C, \quad x = -\frac{1}{t - C}.$$

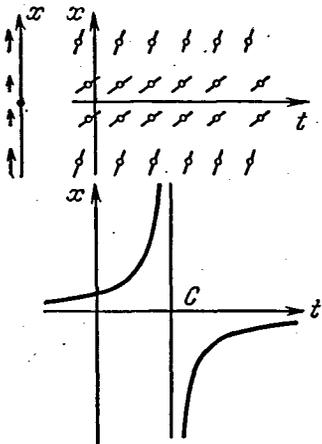


Рис. 23. Поле направлений и два решения уравнения  $\dot{x} = x^2$ .

Не следует думать, что последняя формула эквивалентна (3) или что функция  $x = -1/(t - C)$  есть решение. Действительно, функция  $x = -1/(t - C)$  имеет область определения не интервал, а два интервала:  $t < C$  и  $t > C$ ; сужения функции  $x = -1/(t - C)$  на

эти интервалы — два решения, никак между собой не связанные (пока мы остаемся в области вещественных  $t$ , которые мы только и рассматриваем в этой книге).

Наше решение показывает, что если прирост населения пропорционален числу пар, то количество населения становится бесконечным за конечное время (в то время как обычный закон прироста — экспоненциальный). Физически этот вывод соответствует взрывообразному характеру процесса (разумеется, при  $t$ , слишком близком к  $C$ , идеализация, принятая при описании процесса дифференциальным уравнением, неприменима, так что реальное количество населения за конечное время бесконечных значений не достигает).

С другой стороны, мы видим, что формула для преобразования за время  $t$  ( $g^t x_0 = \varphi(t)$ ), где  $\varphi(t)$  — решение с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$  не задает диффеоморфизма  $g^t: R \rightarrow R$  ни при каком  $t \neq 0$ .

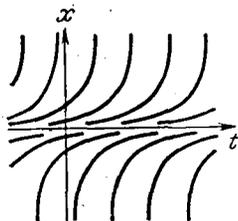


Рис. 24. Интегральные кривые уравнения  $\dot{x} = x^2$ .

Задача 1. Докажите выделенное утверждение.

6. Условия существования фазового потока. Причина, по которой  $\{g^t\}$  в предыдущем примере — не однопараметрическая группа диффеоморфизмов, заключается не в нарушении дифференцируемости и не в нарушении группового свойства, а просто в том, что функция  $g^t$  (при  $t \neq 0$ ) определена не на всей оси  $x$ , так как некоторые решения успевают уйти в бесконечность за время, не превосходящее  $t$  (рис. 24).

Если же решения за конечное время в бесконечность не уходят, то сформулированное в конце п. 4 утверждение справедливо.

Задача 1. Доказать это утверждение в предположении, что функция  $\varphi$  дифференцируема и при достаточно больших  $|x|$  тождественно равна 0.

У к а з а н и е. Решение содержится в доказательстве более общей теоремы, по которой каждое дифференцируемое векторное поле на компактном многообразии является полем фазовой скорости однопараметрической группы диффеоморфизмов (см. § 35).

Возможность примера п. 5 связана с некомпактностью прямой.

Задача 2. Доказать утверждение п. 4 при условии, что  $|\varphi(x)| < A|x| + B$  для всех  $x \in R$ , где  $A > 0$ ,  $B > 0$  — некоторые постоянные.

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой сравнения (§ 2, п. 7).

#### § 4. Примеры векторных полей и фазовых потоков на плоскости

Если размерность фазового пространства дифференциального уравнения больше 1 (например, равна 2), то общего метода явно найти решения не существует. Однако есть несколько частных случаев, которые можно свести к одномерным задачам.

1. Прямое произведение. Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1), \quad x_1 \in U_1, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = v_2(x_2), \quad x_2 \in U_2, \quad (2)$$

заданных векторными полями  $v_1$  и  $v_2$ , дифференцируемыми в фазовых пространствах  $U_1$  и, соответственно,  $U_2$ .

**Определение.** *Прямым произведением* дифференциальных уравнений (1), (2) называется дифференциальное уравнение, фазовое пространство которого — прямое произведение  $U_1$  и  $U_2$ ; уравнение это задается векторным полем, являющимся «прямым произведением» полей  $v_1$ ,  $v_2$ :

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U, \quad (3)$$

где  $U = U_1 \times U_2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $v(x) = (v_1(x_1), v_2(x_2))$ .

В частности, если фазовые пространства  $U_1 \subset R$  и  $U_2 \subset R$  одномерны, то  $U$  — область на плоскости  $(x_1, x_2)$  и дифференциальное уравнение (3) есть система двух скалярных дифференциальных уравнений специального вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1), & x_1 \in U_1 \subset R, \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2), & x_2 \in U_2 \subset R. \end{cases} \quad (4)$$

Из определения непосредственно вытекает

**Теорема.** *Решения  $\varphi$  дифференциального уравнения (3), являющегося прямым произведением уравнений (1) и (2), — это отображения  $\varphi: I \rightarrow U$  вида  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — решения уравнений (1) и (2), определенные на одном и том же интервале.*

В частности, пусть фазовые пространства  $U_1$  и  $U_2$  одномерны. Тогда мы умеем решать каждое из уравнений (1) и (2). Следовательно, мы можем явно решить и систему двух дифференциальных уравнений (4).

А именно, по теореме п. 3 § 2 решение  $\varphi$  с условием  $\varphi(t_0) = x_0$  можно найти в окрестности точки  $t = t_0$  из соотношений

$$\int_{x_{10}}^{\varphi_1(t)} \frac{d\xi}{v_1(\xi)} = t - t_0 = \int_{x_{20}}^{\varphi_2(t)} \frac{d\xi}{v_2(\xi)} \quad (x_0 = (x_{10}, x_{20})),$$

если  $v_1(x_{10}) \neq 0$ ,  $v_2(x_{20}) \neq 0$ .

Если  $v_1(x_{10}) = 0$ , то первое соотношение заменяется на  $\varphi_1 \equiv x_{10}$ , а если  $v_2(x_{20}) = 0$ , то второе — на  $\varphi_2 \equiv x_{20}$ . Наконец, если  $v_1(x_{10}) = v_2(x_{20}) = 0$ , то  $x_0$  — особая точка векторного поля  $v$  и положение равновесия системы (4):  $\varphi(t) \equiv x_0$ .

**2. Примеры прямых произведений.** Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = kx_2. \end{cases}$$

**Задача 1.** Нарисовать соответствующие векторные поля на плоскости при  $k = 0, \pm 1, 1/2, 2$ .

Мы уже решили каждое из двух уравнений в отдельности. Итак, решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  имеет вид

$$\varphi_1 = x_{10} e^{(t-t_0)}, \quad \varphi_2 = x_{20} e^{k(t-t_0)}. \quad (5)$$

Следовательно, вдоль каждой фазовой кривой  $x = \varphi(t)$  имеем либо

$$|x_2| = C |x_1|^k, \quad (6)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $t$ , либо  $x_1 \equiv 0$ .

**Задача 2.** Является ли кривая на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$ , заданная уравнением (6), фазовой кривой?

*Ответ.* Нет.

Семейство кривых (6), где  $C \in R$ , имеет разный вид в зависимости от значения параметра  $k$ . Если  $k > 0$ , то это — семейство

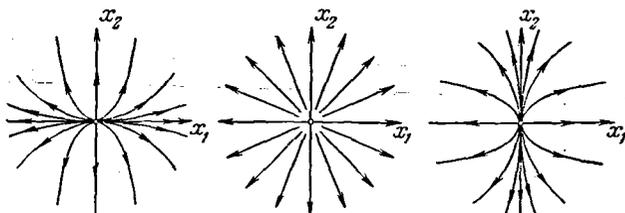


Рис. 25. Узлы: фазовые кривые систем  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = kx_2$ , где  $k > 1$ ,  $k = 1$  и  $0 < k < 1$ .

«парабол\*» с показателем  $k$ . Такие параболы касаются оси  $x_1$ , если  $k > 1$ , или оси  $x_2$ , если  $k < 1$  (рис. 25; при  $k = 1$  получается семейство прямых, проходящих через начало координат). Рас-

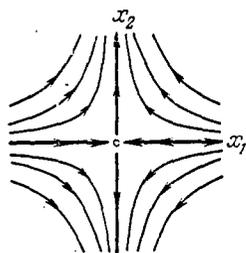


Рис. 26. Седло: фазовые кривые системы  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = kx_2$ ,  $k < 0$ .

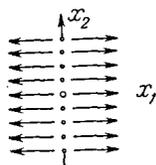


Рис. 27. Фазовые кривые системы  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ .

положение фазовых кривых, изображенное на рис. 25, называется *узлом*. При  $k < 0$  кривые (6) имеют вид гипербол (рис. 26)\*\*) и образуют в окрестности начала координат *седло*. При  $k = 0$  кривые (6) превращаются в прямые (рис. 27).

Из формул (5) видно, что каждая фазовая кривая лежит целиком в одном квадранте (или на координатной полуоси, или совпадает с началом координат, которое при всех  $k$  является фазовой кривой). Стрелки на рисунках указывают направление движения точки  $\varphi(t)$  при возрастании  $t$ .

\*) Настоящие параболы получаются лишь при  $k = 2$  и  $k = 1/2$ .

\*\*\*) Настоящие гиперболы получаются лишь при  $k = -1$ .

**Задача 3.** Докажите, что каждая из парабол  $x_2 = x_1^2$  ( $k=2$ ) состоит из трех фазовых кривых. Опишите все фазовые кривые при других значениях  $k$  ( $k > 1$ ,  $k=1$ ,  $0 < k < 1$ ,  $k=0$ ,  $k < 0$ ).

Интересно проследить, как один рисунок переходит в другой при непрерывном изменении  $k$ .

**Задача 4.** Нарисуйте узел, соответствующий  $k=0,01$ , и седло, соответствующее  $k=-0,01$ .

**3. Однопараметрические группы линейных преобразований плоскости.** Построим фазовый поток, соответствующий нашей системе.

Определим отображение  $g^t$  за время  $t$  обычным образом:  $g^t x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — решение с начальным условием  $\varphi(0) = x$ . Из формул (5) видно, что  $g^t$  — линейное преобразование плоскости. Это преобразование заключается в растяжении в  $e^t$  раз вдоль оси  $x_1$  и в  $e^{kt}$  раз вдоль оси  $x_2$  (растяжение в  $\alpha < 1$  раз есть сжатие). Матрица преобразования  $g^t$  в системе координат  $x_1, x_2$  имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{kt} \end{pmatrix}.$$

Дифференцируемость  $g^t x$  по  $t$  и  $x$  очевидна.

Итак, отображения  $g^t$  образуют однопараметрическую группу линейных преобразований плоскости. На рис. 28 и 29 изображено действие  $g^t$ ,  $t=1$ , на множество  $E$  при  $k=2$  и при  $k=-1$ .

Заметим, что наша однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости  $g^t$  распадается в прямое произведение двух однопараметрических групп линейных преобразований прямых (а именно растяжений оси  $x_1$  и растяжений оси  $x_2$ ).

**Задача 1.** Всякая ли однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости распадается подобным образом?

**Указание.** Рассмотрите повороты на угол  $t$  или сдвиги  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2 t, x_2)$ .

## § 5. Неавтономные уравнения

Простейшее неавтономное дифференциальное уравнение имеет вид  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ : правая часть  $f$  зависит от независимого переменного  $x$ .

Начнем с примера:

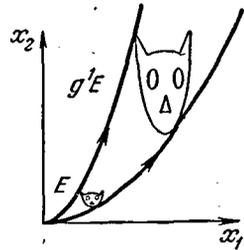


Рис. 28. Фазовый поток системы  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = 2x_2$ .

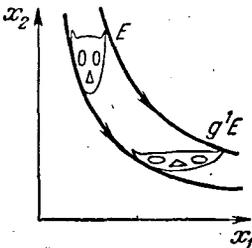


Рис. 29. Фазовый поток системы  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$ . Преобразования  $g^t$  называются гиперболическими поворотами.

1. Уравнения с разделяющимися переменными. Рассмотрим снова прямое произведение двух уравнений с одномерными фазовыми пространствами:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{y} = g(y). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x \in U \subset \mathbb{R}$  — координата в первом фазовом пространстве  $U$ ,  $y \in V \subset \mathbb{R}$  — во втором,  $f$  и  $g$  — дифференцируемые функции, задающие векторные поля на  $U$  и на  $V$ . Пусть  $f(x_0) \neq 0$ . Рассмотрим фазовую кривую, проходящую через точку  $(x_0, y_0)$ .

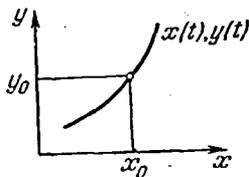


Рис. 30. Фазовая кривая системы (1) и интегральная кривая уравнения (2).

Покажем, что эту кривую можно задать уравнением вида  $y = F(x)$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  (рис. 30).

Параметрически фазовая кривая задана уравнением  $x = \varphi_1(t)$ ,  $y = \varphi_2(t)$ , где  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  — решение системы (1) с условием  $\varphi_1(t_0) = x_0$ ,  $\varphi_2(t_0) = y_0$ . Поскольку  $f(x_0) \neq 0$ , то

$$\left. \frac{d\varphi_1}{dt} \right|_{t=t_0} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции в окрестности точки  $x = x_0$  однозначно определена обратная к  $\varphi_1$  функция  $\psi$ ,  $t = \psi(x)$ . Положим  $F(x) = \varphi_2(\psi(x))$ . В окрестности точки  $x = x_0$  функция  $F$  определена, непрерывна, дифференцируема, и по теоремам о производных сложных и неявных функций

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{\xi} = \left. \frac{d\varphi_2}{dt} \right|_{t=\psi(\xi)} \cdot \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{\xi} = \frac{g(F(\xi))}{f(\xi)}, \quad F(x_0) = y_0.$$

Это выражают короче, говоря, что функция  $F$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)} \quad (2)$$

с начальным условием  $F(x_0) = y_0$ . Уравнение (2) называется уравнением с разделяющимися переменными.

Теорема. Пусть функции  $f$  и  $g$  определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точек  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  соответственно, причем  $f(x_0) \neq 0$ ,  $g(y_0) \neq 0$ . Тогда решение  $F$  уравнения (2) с условием  $F(x_0) = y_0$  существует в некоторой окрестности точки  $x = x_0$ , единственно\*) и удовлетворяет соотношению

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{y_0}^{F(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)}. \quad (3)$$

\*) В том смысле, что всякие два решения совпадают там, где оба определены.

**Доказательство.** Чтобы построить решение, рассмотрим систему (1). По теореме п. 1 § 4 решение системы (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$  существует, единственно и дается формулой

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = t - t_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)}$$

в некоторой окрестности точки  $t = t_0$ . Выше мы показали, что соответствующая фазовая кривая является графиком решения  $F$  уравнения (2) с начальным условием  $F(x_0) = y_0$ . Итак, решение  $F$  существует и удовлетворяет соотношению (3).

Единственность также легко вытекает из этой связи между уравнениями (1) и (2).

Задача 1. Провести доказательство единственности.

Задача 2. Исследовать случай, когда  $g(y_0) = 0$ .

Задача 3. Рассмотреть дифференциальное уравнение вида (2)  $\frac{dy}{dx} = k \frac{y}{x}$  в области  $x > 0, y > 0$ .

Указание. Решение  $F$  с начальным условием  $F(x_0) = y_0$  определено при всех  $x > 0$  и дается формулой

$$F(x) = Cx^k, \quad \text{где } C = y_0 x_0^{-k}.$$

См. рис. 25—27 § 4.

Задача 4. Нарисовать графики решений дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = kx^2 y^3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\sin x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$

в области, где определена правая часть.

**2. Уравнения с переменными коэффициентами.** Пусть  $\varphi$  — дифференцируемое отображение области  $U$  в  $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $t, x_1, \dots, x_n$  в  $n$ -мерное евклидово пространство с координатами  $v_1, \dots, v_n$ .

Такое отображение задает векторное поле  $\varphi$ , зависящее от времени  $t$ , и неавтономное дифференциальное уравнение или уравнение с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = \varphi(t, x), \quad (4)$$

или подробнее:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(t; x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Пример 1.** Дифференциальное уравнение (2) принадлежит этому классу (с очевидной переменной обозначений), здесь  $n=1$ .

**Определение.** Решением дифференциального уравнения (4) называется дифференцируемое отображение  $\varphi: I \rightarrow R^n$ , определенное на некотором интервале  $I$  оси  $t$  и со значениями в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ ,

если график отображения  $\varphi$  лежит в области  $U$  и для каждого  $t \in I$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} \varphi = v(\tau, \varphi(\tau)).$$

Если интерпретировать  $t$  как время, а пространство  $\{x\}$  называть фазовым, то  $v$  можно назвать полем фазовых скоростей в фазовом пространстве, меняющимся со временем. В этих терминах решение  $\varphi$  — это движение точки в фазовом пространстве, при котором в каждый момент времени скорость точки равна значению вектора фазовой скорости в том месте, где движущаяся точка находится в рассматриваемый момент времени.

**Определение.** Решение  $\varphi$  удовлетворяет начальному условию  $\varphi(t_0) = x_0$ , если точка  $t_0$  принадлежит  $I$ , точка  $(t_0, x_0)$  принадлежит  $U$  и значение  $\varphi$  в точке  $t_0$  равно  $x_0$ .

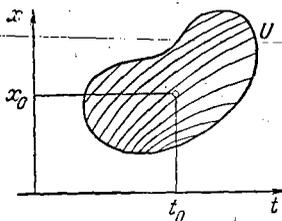


Рис. 31. Интегральные кривые уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$  в расширенном фазовом пространстве  $U \times R$ .

Геометрически изображать решение неавтономного уравнения удобно в расширенном фазовом пространстве  $U \subset R^1 \times R^n$  (рис. 31). Как и в автономном случае, правая часть  $v$  задает в области  $U$  поле направлений (если  $n=1$ , то  $v$  есть тангенс угла наклона направления к оси  $t$ ).

Найти решение с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  — значит провести через точку  $(t_0, x_0)$  области  $U$  кривую, касательная к которой в каждой точке  $(t, x = \varphi(t))$  имеет заданное направление. Эта кривая (график решения) называется интегральной кривой.

**Замечание.** Обычно законы природы со временем не меняются. Уравнения с зависящей от времени правой частью (4) появляются чаще всего в следующей ситуации. Предположим, что мы рассматриваем часть I физической системы I + II. Тогда, хотя закон эволюции всей системы со временем и не меняется, влияние части II на часть I может привести к тому, что закон эволюции части I будет меняться со временем.

Например, влияние Луны на Землю вызывает приливы. Математически это влияние выражается тем, что величина ускорения силы тяжести, входящая в уравнения движения земных объектов, становится переменной

В таких случаях говорят, что выделенная часть I неавтономна, откуда и происходит термин *неавтономная система* в применении к (4).

Конечно, уравнения вида (4) могут появиться и в других ситуациях. Пример: переход от пары уравнений (1) к уравнению с разделяющимися переменными (2).

**Задача 1.** Найти решение  $\varphi$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t)$$

с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ .

*Ответ.* Ньютон ввел интегрирование, чтобы найти решение этой задачи:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

**Задача 2.** Докажите, что фазовые кривые автономной системы

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $v_1 \neq 0$ , являются графиками решений неавтономной системы

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{v_i(x)}{v_1(x)}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

и обратно.

**3. Замечание об интегрировании дифференциальных уравнений.** Выше мы видели, что решения простейших дифференциальных уравнений можно находить при помощи операции интегрирования. По этой причине процесс отыскания решений всевозможных дифференциальных уравнений также иногда называют интегрированием.

Существует ряд приемов интегрирования дифференциальных уравнений специального вида. Списки таких уравнений и приемов имеются в задачниках (см., например, «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова, §§ 4, 5, 6, 8, 9, 10) и в справочниках (см., например, книгу Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям», содержащую около  $1,6 \cdot 10^3$  уравнений). Каждый может расширить эти списки следующим способом: взять какое-нибудь уже решенное уравнение и сделать в нем какую-нибудь подстановку. Мастера интегрирования дифференциальных уравнений (например, Якоби) достигали этим способом значительных успехов в решении конкретных прикладных задач.

Однако все эти методы интегрирования имеют два принципиальных недостатка. Во-первых, как доказал Ж. Лиувилль, *многие дифференциальные уравнения нельзя решить в явном виде*. Например, уже такое простое уравнение, как

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x,$$

«не решается в квадратурах», т. е. решение не выражается в виде конечной комбинации элементарных и алгебраических функций и интегралов от них \*).

\* Доказательство этого факта близко к доказательству неразрешимости уравнений степени 5 в радикалах (Рурфини—Абель—Галуа): оно выводится из неразрешимости некоторой группы. (В отличие от обычной теории Галуа, речь идет здесь не о конечной группе, а о неразрешимой группе Ли.) Наука, занимающаяся этими вопросами, называется дифференциальной алгеброй.

Во-вторых, громоздкая формула, дающая решение в явном виде, часто оказывается менее полезной, чем простая приближенная формула. Например, уравнение  $x^3 - 3x = 2a$  можно явно решить по формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Однако если мы хотим решить уравнение при  $a = 0,01$ , то полезнее заметить, что оно имеет при малых  $a$  корень  $x \approx -(2/3)a$  — обстоятельство вовсе не очевидное при пользовании формулой Кардано.

Точно так же уравнение маятника  $\ddot{x} + \sin x = 0$  решается в явном виде с помощью интегралов (эллиптических). Однако большинство вопросов о поведении маятника проще решить, исходя из приближенного уравнения малых колебаний ( $\ddot{x} + x = 0$ ) и из качественных соображений, не использующих явную формулу (см. § 12).

Точно решаемые уравнения бывают полезны в качестве примеров, так как на них можно иногда заметить явления, которые имеют место и в более сложных случаях. Таковы, например, автоматические решения ряда уравнений математической физики. Кроме того, всякий раз, когда найдена точно решаемая задача, открывается возможность приближенно исследовать близкие задачи (теория возмущений, см., например, § 9).

Однако опасно распространять результаты, полученные при изучении точно решаемой задачи, на близкие задачи общего вида: нередко точно интегрируемое уравнение потому и интегрируется, что его решения ведут себя проще, чем у близких неинтегрируемых задач.

## § 6. Касательное пространство

При рассмотрении всякого рода математических объектов всегда важно выяснить, как ведут себя эти объекты при отображениях.

При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений основное значение имеют замены переменных, т. е. выбор подходящей системы координат. Таким образом, мы должны выяснить, как меняется вид дифференциального уравнения при дифференцируемом отображении. Поскольку дифференциальное уравнение задается векторным полем, мы должны проанализировать понятия векторного поля и вектора скорости.

Если понимать вектор скорости наивно, как стрелочку, составленную из точек пространства, то при отображении стрелочка изогнется и вектора не получится. Ниже мы определим линейное пространство, элементами которого являются векторы скоростей кривых, проходящих через данную точку  $x$  области  $U$ . Это линейное пространство называется касательным пространством к  $U$  в точке  $x$  и обозначается через  $TU_x$ . Пусть  $f: U \rightarrow V$  — дифференцируемое отображение. Мы определим линейное

отображение касательных пространств

$$f_*|_x: TU_x \rightarrow TV_{f(x)},$$

называемое производной отображения  $f$  в точке  $x$ .

Все теоремы этого параграфа, по существу, содержатся в курсе анализа: новой является лишь более геометрическая терминология.

**1. Определение касательного вектора.** Пусть  $U$  — область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, n$ . Пусть  $\varphi: I \rightarrow U$  — дифференцируемое отображение интервала вещественной оси  $t$  в  $U$ ,  $\varphi(0) = x \in U$ . Мы будем говорить, что кривая  $\varphi$  выходит из точки  $x^*$ .

Вектор скорости кривой  $\varphi$  в  $x$  в системе координат  $x_i$  задается своими компонентами

$$v_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x_i \circ \varphi), \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $(x_i \circ \varphi)(t) = x_i(\varphi(t))$  — сквозное отображение  $I \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{x_i} \mathbb{R}$ . Употребительно также обозначение  $v_i = \dot{x}_i|_{t=0}$ .

**Определение.** Две кривые  $\varphi_1, \varphi_2: I \rightarrow U$  (рис. 32), выходящие из одной точки  $x = \varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ , касаются, если расстояние между точками  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  есть  $o(t)$ ,  $t \rightarrow 0^{**}$ .

**Задача 1.** Докажите, что две кривые касаются в точке  $x$  тогда и только тогда, когда их векторы скорости в точке  $x$  одинаковы.

Множество всех векторов скоростей выходящих из  $x$  кривых есть  $n$ -мерное вещественное линейное пространство (сложение и умножение на число покомпонентные). Это и есть касательное пространство.

Заметим, что в определении участвовала система координат и полученное пространство на первый взгляд зависит от системы координат. Мы хотим дать инвариантное, не зависящее от системы координат определение вектора скорости и касательного пространства.

**Определение.** Система координат  $y_i: U \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, n$ , в области  $U$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  называется допустимой, если отображение

$$y: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y(x) = y_1(x)e_1 + \dots + y_n(x)e_n \quad (e_i \text{ — орты } \mathbb{R}^n)$$

является диффеоморфизмом.

\*) Точнее, выходит из точки  $x$  в момент  $t=0$ . Разумеется,  $t=0$  можно было бы заменить на  $t=t_0$  с соответствующими изменениями всех формул.

\*\*\*) Предостережение: образы отображений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут быть, например, перпендикулярными в  $x$  прямыми.

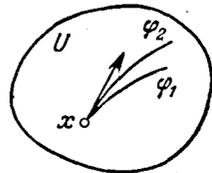


Рис. 32. Касающиеся кривые.

**Задача 2.** Докажите, что кривые  $y \cdot \varphi_1$  и  $y \cdot \varphi_2$  касаются друг друга, выходя из точки  $y(x)$ , тогда и только тогда, когда кривые  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  касаются друг друга, выходя из точки  $x$  (рис. 33).

Таким образом, касание кривых — понятие геометрическое, от системы координат не зависящее.

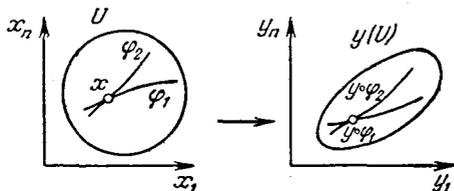


Рис. 33. Сохранение касания при диффеоморфизме.

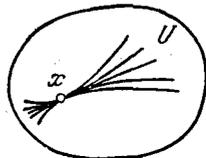


Рис. 34. Класс кривых, касающихся в точке  $x$ .

**Определение.** Вектором скорости  $v$  кривой  $\varphi: I \rightarrow U$ , выходящей из точки  $x \in U$ , называется класс эквивалентности кривых, выходящих из  $x$  и касающихся  $\varphi$  (рис. 34). Обозначения:

$$v = \dot{\varphi}(0), \quad v = \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0}.$$

**Задача 3.** Докажите, что касание — отношение эквивалентности, т. е. что 1)  $\xi \sim \xi$ , 2)  $\xi \sim \eta \Rightarrow \eta \sim \xi$ , 3)  $\xi \sim \eta \sim \zeta \Rightarrow \xi \sim \zeta$ , где  $\sim$  означает «касается, выходя из  $x$ ».

**Замечание.** В нашем определении вектора скорости система координат не участвует, но участвует класс допустимых систем координат в  $U$ . Этот класс называется дифференцируемой структурой в  $U$ . Без задания в  $U$  дифференцируемой структуры нельзя определить понятия касания кривых и вектора скорости кривой  $\varphi$ .

## 2. Определение касательного пространства.

**Определение.** Касательным пространством к  $U$  в точке  $x$  называется множество всех векторов скоростей выходящих из  $x$  кривых (рис. 35). Элементы этого множества называются касательными векторами. Касательное пространство к  $U$  в точке  $x$  обозначается через  $TU_x$  ( $T$  — от «tangent», касательный)\*).

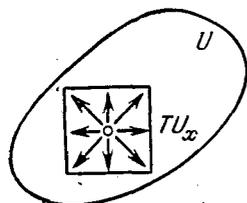


Рис. 35. Касательное пространство к области  $U$  в точке  $x$ .

\*) Если читатель привык считать вектор скорости кривой лежащим в том же пространстве, что и сама кривая, то отрыв касательного пространства к ли-

Пусть  $x_i \in U \rightarrow R$ ,  $i=1, \dots, n$ , —какая-нибудь допустимая система координат в  $U$ . Тогда вектор скорости кривой  $\varphi: I \rightarrow U$ , выходящей из точки  $x \in U$ , имеет вполне определенные формулой (1) компоненты  $v_i \in R$ ,  $i=1, \dots, n$  (см. задачу 1). Таким образом, система координат  $x_i$  задает отображение  $X: TU_x \rightarrow R^n$  касательного пространства к  $U$  в точке  $x$  в  $n$ -мерное вещественное пространство  $R^n$  векторов  $(v_1, \dots, v_n)$ . Отображение  $X$  сопоставляет вектору скорости кривой  $\varphi$  набор чисел  $v_1, \dots, v_n$ .

**Теорема.** *Отображение  $X: TU_x \rightarrow R^n$ , заданное формулой (1), взаимно однозначно.*

**Доказательство.** Согласно задаче 1 касательный вектор (т. е. класс  $\{\varphi\}$  касающихся кривых  $\varphi: I \rightarrow U$ ), определяется компонентами вектора скорости в системе координат  $x_i$  однозначно. Остается показать, что всякий вектор  $(v_1, \dots, v_n) \in R^n$  является вектором скорости какой-либо кривой. Для этого достаточно взять кривую  $\varphi$ , заданную условиями  $(x_i \circ \varphi)(t) = x_i(x) + v_i t$ . Теорема доказана.

Итак, при фиксированной системе координат наши абстрактные определения касательного вектора и касательного пространства совпадают с наивными определениями при помощи стрелочек, лежащих в содержащем  $U$  евклидовом пространстве.

До сих пор наше касательное пространство  $TU_x$  — это просто множество, не наделенное какой-либо дополнительной структурой. Теперь мы введем в  $TU_x$  структуру вещественного линейного пространства. Если фиксировать систему координат  $x_i$ , то касательные векторы можно складывать и умножать на числа, отождествив их со стрелочками  $(v_1, \dots, v_n)$  по предыдущей теореме. Оказывается, полученные операции не зависят от того, какой именно допустимой системой координат мы пользовались.

**Определение.** Пусть  $\xi \in TU_x$ ,  $\eta \in TU_x$ ,  $\lambda \in R$ . Определим линейную комбинацию  $\xi + \lambda\eta \in TU_x$  как

$$\xi + \lambda\eta = X^{-1}(X\xi + \lambda X\eta),$$

где  $X$  — взаимно однозначное отображение  $X: TU_x \rightarrow R^n$ , заданное допустимой системой координат  $x_i$ .

Иными словами, мы переносим на  $TU_x$  линейную структуру  $R^n$ , отождествляя эти множества с помощью взаимно однозначного отображения  $X$ .

**Теорема.** *Линейная комбинация  $\xi + \lambda\eta$  не зависит от того, какой именно допустимой системой координат мы пользовались при ее определении, но лишь от  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\lambda$ .*

---

нейному пространству от самого линейного пространства может вызвать некоторые психологические затруднения. В этом случае полезно повторить предыдущие рассуждения, считая, что  $U$  — это поверхность сферы. Тогда  $TU_x$  — это обычная касательная плоскость.

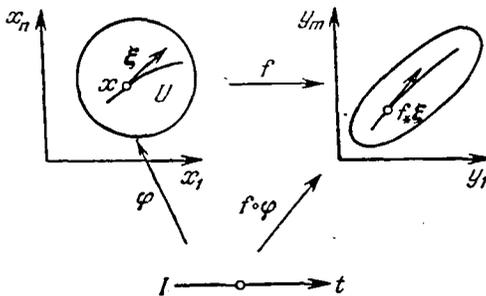
Доказательство. Пусть  $y_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ , — другая допустимая система координат.

Пусть  $Y: TU_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  — соответствующее этой системе координат отображение касательного пространства к  $U$  в точке  $x$  на  $n$ -мерное вещественное пространство  $\mathbb{R}^n$  векторов  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Отображение  $Y$  сопоставляет классу кривой  $\varphi$  набор чисел

$$\omega_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (y_i \circ \varphi). \quad (2)$$

Отображение  $Y$  взаимно однозначно по предыдущей теореме.

Мы должны доказать, что отображение  $YX^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть изоморфизм линейных пространств. Мы уже знаем, что это отображение взаимно однозначно. Пусть  $\varphi: I \rightarrow U$  — кривая, вектор скорости которой в системе координат  $x_i$  имеет компоненты  $\dot{x}_i$ . Найдем компоненты  $\dot{y}_i$  вектора скорости этой кривой в системе координат  $y_i$ . Координаты  $y_i$  выражаются через координаты  $x_i$  как функции  $y_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i=1, \dots, n$ . По правилу дифференцирования сложной функции



$$\dot{y}_i|_0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Big|_x \dot{x}_j|_0,$$

короче:

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x}. \quad (3)$$

Рис. 36. Определение производной отображения  $f$  в точке  $x$ .

Формула (3) дает явный вид отображения  $YX^{-1}$ : это отображение — линейное преобразование. Теорема доказана: введенные выше операции снабжают  $TU_x$  структурой вещественного  $n$ -мерного линейного пространства, не зависящей от выбора допустимой системы координат.

**Замечание.** В пространстве-прообразе  $\mathbb{R}^n = \{\dot{x}\}$  и пространстве-образе  $\mathbb{R}^n = \{\dot{y}\}$  фиксированы координаты  $\dot{x}_i$  и  $\dot{y}_i$ . Матрица отображения  $YX^{-1}$  в этих системах координат есть, согласно формуле (3), матрица Якоби  $\|\partial y/\partial x\|$ .

**3. Производная отображения.** Пусть  $f: U \rightarrow V$  — дифференцируемое отображение области  $n$ -мерного евклидова пространства с координатами  $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ , в область  $V$   $m$ -мерного евклидова пространства с координатами  $y_j: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j=1, \dots, m$ .

Пусть  $x$  — точка области  $U$ ,  $y = f(x) \in V$  — ее образ (рис. 36).

**Определение.** Производной отображения  $f$  в точке  $x$  называется отображение касательного пространства к  $U$  в точке  $x$

в касательное пространство к  $V$  в точке  $f(x)$ :

$$f_*|_x: TU_x \rightarrow TV_{f(x)},$$

переводящее вектор скорости  $\xi$  выходящей из  $x$  кривой  $\varphi: I \rightarrow U$  в вектор скорости выходящей из  $f(x)$  кривой  $f \circ \varphi: I \rightarrow V$ , так что:

$$f_*|_x \left( \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \varphi). \quad (4)$$

**Теорема.** Формула (4) определяет линейное отображение  $f_*|_x$  касательного пространства  $TU_x$  в касательное пространство  $TV_{f(x)}$ .

**Доказательство.** Мы должны проверить, во-первых, что правая часть формулы (4) не зависит от выбора представителя  $\varphi$  класса касающихся в  $x$  кривых, и, во-вторых, что отображение  $f_*|_x$  линейно.

Обозначим через  $\dot{x}_i$  компоненты вектора скорости  $\dot{x}$  кривой  $\varphi$  в точке  $x$ , а через  $\dot{y}_j$  — компоненты вектора скорости  $\dot{y}$  кривой  $f \circ \varphi$  в точке  $f(x)$ . По правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{y}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \dot{x}_i, \quad (5)$$

где  $y_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j=1, \dots, m$ , — функции, задающие отображение  $f$  в координатах  $x_i, y_j$ . Формула (5) содержит оба утверждения нашей теоремы, а также следующее

**Замечание.** Если ввести в  $TU_x$  и  $TV_{f(x)}$  в качестве координат компоненты  $\dot{x}_i, \dot{y}_j$  касательных векторов в системах координат  $x_i, y_j$  соответственно, то матрицей линейного отображения  $f_*|_x: TU_x \rightarrow TV_{f(x)}$  будет матрица Якоби  $\| \partial y_j / \partial x_i \|$ . Подчеркнем, что отображение  $f_*|_x$  не зависит от системы координат; координаты использовались лишь при доказательстве теоремы.

**Задача 1.** Найти производную при  $x=0$  отображения  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданного формулой  $y=x^2$ .

**Ответ.**  $f_*|_0$  есть отображение прямой  $TR_0$  в прямую  $TR_0$ , переводящее всю прямую в 0.

**Задача 2.** Пусть  $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$  — дифференцируемые отображения. Докажите, что сквозное отображение  $h=g \circ f: U \rightarrow W$  дифференцируемо и что его производная в точке  $x$  равна

$$h_*|_x = g_*|_{f(x)} \circ f_*|_x.$$

**Задача 3.** Пусть  $f: U \rightarrow V$  — диффеоморфизм. Докажите, что отображение  $f_*|_x: TU_x \rightarrow TV_{f(x)}$  есть изоморфизм линейных пространств. Приведите пример, показывающий, что обратное неверно (рис. 37).

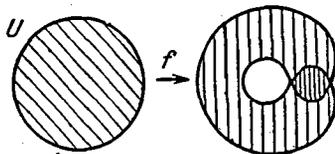


Рис. 37. Отображение, являющееся диффеоморфизмом в окрестности каждой точки, может не быть взаимно однозначным.

**Задача 4.** Пусть  $f: R^2 \rightarrow R^2$  — отображение, заданное формулой  $(x_1 + ix_2)^2 = y_1 + iy_2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Покажите, что  $f_*|_{x_0}$  ( $x \neq 0$ ) сохраняет углы (евклидовы структуры в  $TR_x^2$ ,  $TR_y^2$  задаются квадратичными формами  $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$  и  $\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2$  соответственно).

**4. Теорема об обратной функции.** Пусть  $f: U \rightarrow V$  — дифференцируемое отображение областей евклидова пространства,  $x_0$  — точка области  $U$ .

**Теорема.** Если производная

$$f_*|_{x_0}: TU_{x_0} \rightarrow TV_{f(x_0)}$$

есть изоморфизм линейных пространств, то существует такая окрестность  $W$  точки  $x_0$ , что сужение  $f$  на  $W$

$$f|_W: W \rightarrow f(W)$$

является диффеоморфизмом.

**Доказательство\*).** Размерности касательных пространств  $TU_{x_0}$  и  $TV_{f(x_0)}$ , а значит и размерности областей  $U$  и  $V$ , совпадают. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — допустимые координаты в  $U$ ,  $y_1, \dots, y_n$  — в  $V$ . Отображение  $f$  задается функциями  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Положим  $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = y_i - f_i(x_1, \dots, x_n)$ . По условию определитель матрицы Якоби  $\|\partial f_i / \partial x_j\|_{x_0}$  не равен 0. Значит, определитель  $\|\partial F_i / \partial x_j\|_{x_0, f(x_0)}$  отличен от 0.

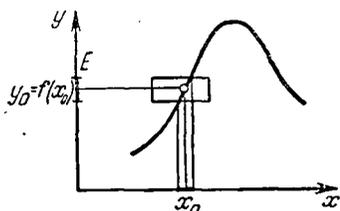


Рис. 38. Обратная функция.

Применим к системе функций  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в окрестности точки  $(x_0, (f x_0))$  теорему о неявной функции. По этой теореме:

1) в достаточно малой окрестности  $E$  точки  $y_0 = f(x_0)$  существуют  $n$  функций  $x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n)$ , для которых  $F(\varphi(y), y) \equiv 0$ ;  
2) других решений  $x$ , близких к  $x_0$ , система  $F(x, y) = 0$ ,  $y \in E$ , не имеет;  
3) значения функций  $\varphi_i(y)$  в точке  $y_0$  равны координатам точки  $x_0$ , а в ее окрестности  $E$  (рис. 38)  $\varphi_i$  непрерывно дифференцируемы столько же раз, сколько функции  $f_i$ .

Функции  $\varphi_i$  задают дифференцируемое отображение  $\varphi$  окрестности  $E$  точки  $y_0 = f(x_0)$  в окрестность точки  $x_0$ .

Это отображение  $\varphi$  удовлетворяет условию  $f \circ \varphi = \text{тождество}$ . Положим  $\varphi(E) = W$ . Отображения  $f|_W: W \rightarrow E$  и  $\varphi: E \rightarrow W$  — взаимно обратные дифференцируемые отображения, следовательно, диффеоморфизмы.

**Задача 1.** Докажите, что  $\varphi(E)$  есть окрестность точки  $x_0$  (т. е. содержит все точки области  $U$ , достаточно близкие к точке  $x_0$ ).

**5. Действие диффеоморфизма на векторное поле.** Пусть  $U$  — область евклидова пространства,  $\mathfrak{v}$  — векторное поле в  $U$ . Если

\* Теоремы об обратной и неявной функциях легко выводятся одна из другой. Здесь приведен вывод теоремы об обратной функции из теоремы о неявной, так как вторая всегда всегда фигурирует в курсах анализа, а первую обычно забывают формулировать. Независимое от теоремы о неявной функции доказательство см., например, в § 31, п. 9.

$x$  — точка области  $U$ , то  $v(x)$  — касательный вектор:

$$v(x) \in TU_x.$$

Пусть  $f: U \rightarrow V$  — диффеоморфизм.

Определение. Образом векторного поля  $v$  при диффеоморфизме  $f$  (рис. 39) называется векторное поле  $f_*v$ , векторы которого получаются из векторов  $v(x)$  действием производной  $f_*|_x$ , так что

$$(f_*v)_f(x) = f_*|_x v(x) \in TV_{f(x)}.$$

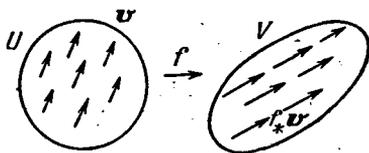


Рис. 39. Действие диффеоморфизма  $f$  на векторное поле  $v$ .

Задача 1. Докажите, что если поле  $v$  дифференцируемо (т. е. задается  $r$  раз непрерывно дифференцируемыми функциями  $v_i(x_1, \dots, x_n)$  в системе координат  $x_i$ ), то и поле  $f_*v$  дифференцируемо (с тем же  $r$ , если диффеоморфизм  $f$  класса  $C^{r+1}$ ).

Указание. См. формулу (5).

Теорема. Пусть  $f: U \rightarrow V$  — диффеоморфизм. Тогда дифференциальное уравнение с фазовым пространством  $U$ , заданное векторным полем  $v$ :

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U, \tag{6}$$

эквивалентно уравнению с фазовым пространством  $V$ , заданным векторным полем  $f_*v$ :

$$\dot{y} = (f_*v)(y), \quad y \in V. \tag{7}$$

Иначе говоря,  $\varphi: I \rightarrow U$  — решение уравнения (6) тогда и только тогда, когда  $f \circ \varphi: I \rightarrow V$  — решение уравнения (7).

Доказательство. Это очевидно.

Иными словами, пусть  $\varphi: I \rightarrow U$  — решение уравнения (6). Положим  $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(t_0 + \tau)$ . Если  $\varphi(t_0) = x_0$ , то  $\tilde{\varphi}$  выходит из  $x_0$ , а  $f \circ \varphi$  выходит из  $y_0 = f(x_0)$ .

По определению  $f_*$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} f \circ \varphi &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} f \circ \tilde{\varphi} = f_*|_{x_0} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \tilde{\varphi} = f_*|_{x_0} \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=t_0} = \\ &= (f_*v)(y_0). \end{aligned}$$

Итак,  $f \circ \varphi$  — решение уравнения (7).

Применение доказанного утверждения к обратному диффеоморфизму  $f^{-1}: V \rightarrow U$  завершает доказательство.

**6. Примеры.** Предыдущая теорема позволяет исследовать и решать большое число разнообразных дифференциальных уравнений: достаточно взять уравнение, которое уже исследовано, и сделать диффеоморфизм; тогда новое уравнение также решается.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad (8)$$

заданную векторным полем на плоскости ( $v_1 = x_2$ ,  $v_2 = x_1$ ) (рис. 40). Пусть  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — отображение, переводящее точку с координатами  $(x_1, x_2)$  в точку  $(y_1, y_2)$ , где  $y_1 = x_1 + x_2$ ,  $y_2 = x_1 - x_2$ . Это линейное отображение  $f$  — диффеоморфизм, а его производная  $f_*|_x$  имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Новое векторное поле  $(f_*v)(y)$  будет поэтому иметь компоненты  $\omega_1 = y_1$ ,  $\omega_2 = -y_2$ , и наша система эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1, \\ \dot{y}_2 = -y_2. \end{cases}$$

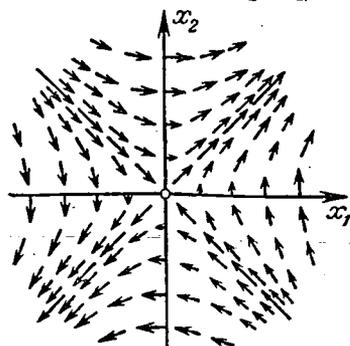


Рис. 40. Векторное поле  $v_1 = x_2$ ,  $v_2 = x_1$ .

Эта система — прямое произведение одномерных систем. Мы ее уже исследовали и решали (седло, рис. 41). Решение имеет

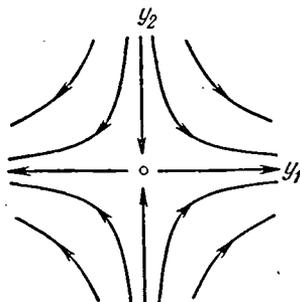


Рис. 41. Фазовая плоскость новой системы.

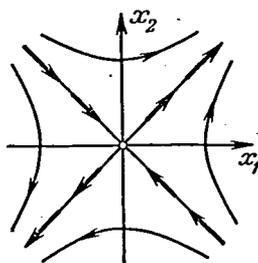


Рис. 42. Фазовая плоскость исходной системы.

вид  $y_1 = y_1(0)e^t$ ,  $y_2 = y_2(0)e^{-t}$ . Возвращаясь при помощи  $f^{-1}$  к исходной системе, получаем повернутое седло (рис. 42) и решение

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) \operatorname{ch} t + x_2(0) \operatorname{sh} t, \\ x_2(t) &= x_1(0) \operatorname{sh} t + x_2(0) \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

**Замечание.** Пусть  $x$  — угол малого отклонения от вертикали перевернутого плоского маятника (рис. 43). В соответствующей системе единиц уравнение движения маятника примет вид \*)  $\ddot{x} = x$ . Положим  $x = x_1$ ,  $\dot{x}_1 = x_2$ . Тогда уравнение маятника для малых отклонений от верхнего положения равновесия примет вид (8).

**Задача 1.** Каким движениям маятника соответствуют различные фазовые кривые на рис. 42?

**Пример 2.** Уравнение малых колебаний маятника вблизи нижнего положения равновесия

$$\ddot{x} = -x$$

превращается при обозначениях  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  в систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (9)$$

Вид векторного поля (рис. 44) подсказывает, что должны быть полезны полярные координаты

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi.$$

Эти формулы задают дифференцируемое отображение  $f$  полуплоскости  $r > 0$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  без точки 0 (рис. 45).

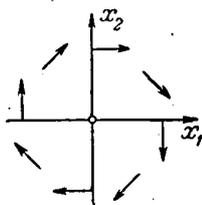


Рис. 44. Векторное поле уравнения маятника (9).

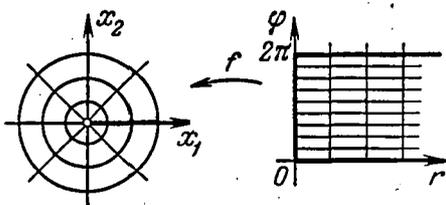


Рис. 45. Полярные «координаты».

Это отображение — не диффеоморфизм. Однако мы можем в качестве  $V$  взять плоскость  $(x_1, x_2)$  без какого-нибудь луча,

\*) В действительности  $\ddot{x} = -\sin x$ , что при малых  $x$ ,  $\ddot{x}$  приближенно можно заменить на  $\ddot{x} = -x$ . Различие в знаках правых частей уравнений маятника вблизи верхнего и нижнего положений равновесия объясняется следующим образом. В окрестности верхнего положения равновесия момент силы веса двигает маятник в ту сторону, куда он отклонен, поэтому  $\ddot{x} = +x$ . В окрестности нижнего положения равновесия момент силы веса двигает маятник в сторону, противоположную отклонению, поэтому  $\ddot{x} = -x$ .



Рис. 43. Маятник вблизи верхнего положения равновесия.

скажем без полуоси  $x_1 > 0$ , а в качестве  $U$  взять на полуплоскости  $r > 0$  полуполосу  $0 < \varphi < 2\pi$ ; тогда  $f: U \rightarrow V$  — диффеоморфизм. Итак, система (9) в  $V$  эквивалентна некоторой системе в  $U$ , а именно (рис. 46):

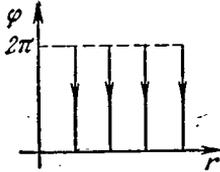


Рис. 46. Фазовые кривые уравнений маятника в полярных координатах.

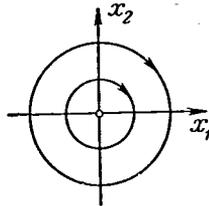


Рис. 47. Фазовые кривые уравнений маятника в декартовых координатах.

$$\begin{cases} \dot{r} = 0; \\ \dot{\varphi} = -1. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$r(t) = r(0), \quad \varphi(t) = \varphi(0) - t,$$

откуда решение исходной системы (9)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_0 \cos(\varphi_0 - t); \\ x_2(t) &= r_0 \sin(\varphi_0 - t). \end{aligned}$$

**Задача 2.** Проверить, что эти формулы дают все решения системы (9) при всех  $t$ , а не только, пока  $(x_1, x_2) \in V$ .

**Задача 3.** Доказать, что фазовые кривые — окружности (рис. 47); преобразования  $g^t$  за время  $t$  образуют однопараметрическую группу линейных преобразований плоскости: преобразование  $g^t$  — поворот на угол  $-t$ ; матрица  $g^t$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к уравнению маятника  $\ddot{x} = -x$ , мы находим, что маятник будет совершать гармонические колебания ( $x = r_0 \cos(\varphi_0 - t)$ ), период которых равен  $2\pi$  и не зависит от начальных условий.

**Задача 4.** Как выглядят интегральные кривые системы (9)?

*Ответ.* Винтовые линии с шагом  $T = 2\pi$  и с общей осью  $x_1 = x_2 = 0$ , которая также является интегральной кривой (рис. 48).

**Пример 3.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases} \quad (10)$$

Эта система получена из системы

$$\begin{cases} \dot{r} = f(r) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases} \quad (11)$$

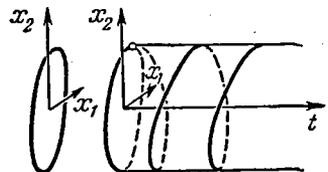


Рис. 48. Интегральные кривые уравнений маятника.

переходом к декартовым координатам  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ . Действительно, система (11) эквивалентна (с обычными оговорками, связанными с неоднозначностью полярных координат) системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 f(r) r^{-1} + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 f(r) r^{-1} - x_1, \end{cases}$$

которая превращается в (10) при  $f(r) = r(1 - r^2)$ .

Итак, надо исследовать систему (11) при  $f(r) = r(1-r^2)$ . Сначала рассмотрим интегральные кривые уравнения  $\dot{r} = f(r)$  на полуплоскости  $(t, r)$ ,  $r > 0$  (рис. 49). Заметим, что векторное поле на прямой  $\varphi = f(r)$  имеет три особые точки:  $r = \pm 1, 0$ . При этом поле направлено к точкам  $r = 1$  и  $r = -1$  и от

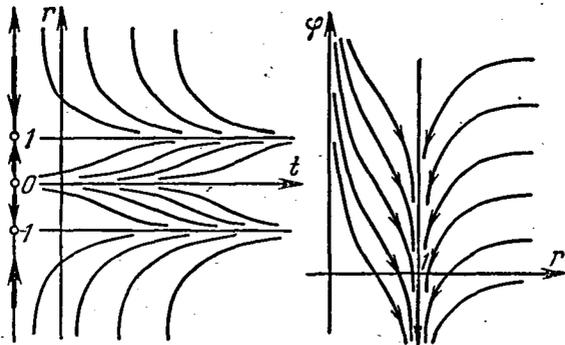


Рис. 49. Интегральные кривые уравнения  $\dot{r} = r(1-r^2)$  и фазовые кривые системы (10) в полярных координатах.

точки  $r=0$ . Фазовые кривые на полуплоскости  $(r, \varphi)$  ( $r > 0$ ) получаются поворотом (так как  $\varphi = \varphi_0 - t$ ).

Возвращаясь к декартовым координатам, получим следующую картину (рис. 50).

Точка  $x_1 = x_2 = 0$  — единственная особая точка. Начинаясь вблизи нее фазовые кривые удаляются от нее с ростом  $t$  и наматываются при  $t \rightarrow +\infty$  изнутри на окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Эта окружность является фазовой кривой, называемой *предельным циклом*.

Если же начальная точка лежит вне круга  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , то фазовая кривая

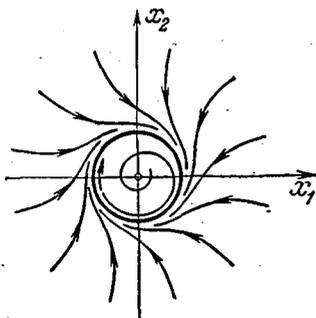


Рис. 50. Фазовые кривые системы (10). Предельный цикл.

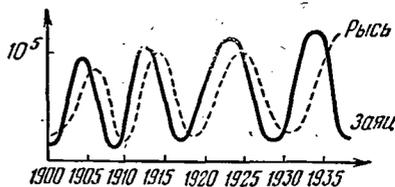


Рис. 51. Колебания численности рысей и зайцев в Канаде.

наматывается на предельный цикл снаружи при  $t \rightarrow +\infty$  и уходит в бесконечность при отрицательных  $t$ .

Предельные циклы описывают устойчивые периодические режимы движения автономной системы. В частности,  $x_1$  и  $x_2$  могут означать отклонения числа рысей и числа зайцев от равновесных значений (соответствующее экологическое уравнение не имеет в точности вида (10), но имеет близкие свойства).

Предельному циклу соответствуют периодические колебания численности рысей и зайцев, несколько сдвинутые по фазе. Это и наблюдается в действительности, причем колебания числа рысей отстают (рис. 51).

В качестве других примеров возникновения устойчивых периодических колебаний при стационарных внешних условиях можно указать часы, паровую машину, электрический звонок, сердце, ламповый генератор радиоволн и переменные звезды типа цефеид— работа каждого из этих устройств описывается предельным циклом в соответствующем фазовом пространстве.

Однако не следует думать, что все колебательные процессы описываются предельными циклами: в многомерном фазовом пространстве возможно гораздо более сложное поведение фазовых кривых. Примерами могут служить прецессия гироскопа, движение планет и спутников и их вращение вокруг своих осей (непериодичность этих движений ответственна за сложность календаря и за трудность предвычисления приливов), а также движение заряженных частиц в магнитном поле (ответственное за возникновение полярных сияний). См. также § 24 и § 25, 6.

## Глава 2

### Основные теоремы

В этой главе формулируются основные результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений: речь идет о существовании и единственности решений и первых интегралов, о зависимости решений от начальных данных и параметров. Доказательства изложены в гл. 4; в настоящей главе лишь обсуждается связь этих результатов друг с другом.

#### § 7. Векторное поле вблизи неособой точки

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U, \quad (1)$$

заданное гладким векторным полем  $v$  в  $n$ -мерном фазовом пространстве  $U$ . Пусть  $x_0 \in U$  — неособая точка векторного поля, т. е.  $v(x_0) \neq 0$  (рис. 52).

1. Основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В достаточно малой окрестности неособой точки векторное поле диффеоморфно постоянному полю  $e_1$ .

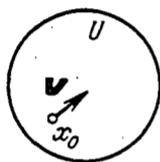


Рис. 52. Неособая точка  $x_0$  векторного поля  $v$ .

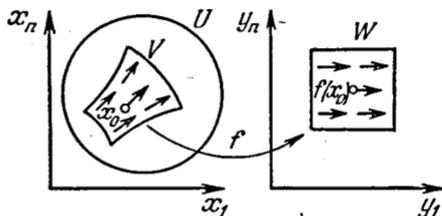


Рис. 53. Выпрямляющий векторное поле диффеоморфизм  $f$ .

Точнее, существуют окрестность  $V$  точки  $x_0$  и диффеоморфизм  $f: V \rightarrow W$  окрестности  $V$  на область  $W$  евклидова пространства  $R^n$  (рис. 53) такие, что  $f_*v = e_1$  (где  $e_1$  — первый координатный орт  $R^n$ ). Если  $v$  — поле класса  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , то и  $f$  — диффеоморфизм класса  $C^r$  с тем же  $r$ .

Пусть  $y_i: R^2 \rightarrow R^1$ ,  $i=1, \dots, n$ , — декартовы координаты в евклидовом пространстве, содержащем область  $W$ . Вектор  $e_1$  имеет компоненты  $1, 0, \dots, 0$ . Согласно § 6 основную теорему можно переформулировать так:

Дифференциальное уравнение (1), рассматриваемое в достаточно малой окрестности  $V$  неособой точки  $x_0$ , эквивалентно простейшему уравнению

$$\dot{y} = e_1, \quad y \in W, \quad (2)$$

т. е. системе

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n = 0 \quad (3)$$

в области  $W$ .

Еще одна эквивалентная формулировка основной теоремы:

В достаточно малой окрестности  $V$  неособой точки  $x_0$  можно так выбрать допустимую систему координат  $(y_1, \dots, y_n)$ , что в этих координатах уравнение (1) запишется в стандартном виде (3).

Основная теорема — утверждение того же характера, как теоремы линейной алгебры о приведении квадратичных форм или матриц операторов к нормальному виду. Она дает исчерпывающее описание локального поведения векторного поля и дифференциального уравнения (1) в окрестности неособой точки  $x_0$ , сводя все вопросы к случаю тривиального уравнения (2).

Доказательство основной теоремы будет дано в § 32.

2. Примеры. Основную теорему можно назвать *теоремой о выпрямлении*, так как фазовые и интегральные кривые уравнения (2) — прямые линии. На рис. 54 нарисованы линии уровня «выпрямляющих координат»  $y_i = \text{const}$  для уравнений маятника.

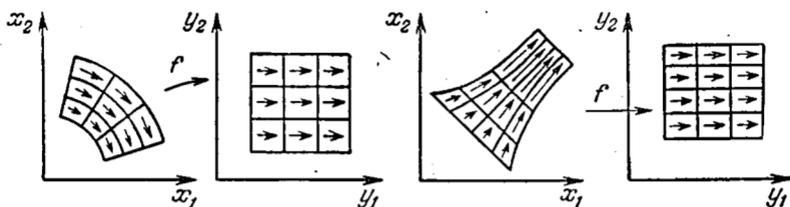


Рис. 54. Выпрямление уравнений маятника

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = +x_1. \end{cases}$$

Задача 1. Однозначно ли определены выпрямляющие координаты  $y_i$ ? Доказать, что в случае  $n=1$  координата  $y$  определена с точностью до аффинного преобразования  $y' = ay + b$ .

Задача 2. Нарисовать линии уровня каких-нибудь выпрямляющих координат для следующих векторных полей в области  $U$ :

- а)  $v = x_1 e_1 + 2x_2 e_2$ ,  $U = \{x_1, x_2: x_1 > 0\}$ ;  
 б)  $v = e_1 + \sin x_1 e_2$ ,  $U = R^2$ ;  
 в)  $v = x_1 e_1 + (1 - x_1^2) e_2$ ,  $U = \{x_1, x_2: -1 < x_1 < 1\}$ .

**Задача\* 3.** Пусть в  $R^3$  дано (дифференцируемое) поле касательных плоскостей  $R^2$ . Всегда ли можно выпрямить это поле (т. е. превратить его в поле параллельных плоскостей) в окрестности точки при помощи подходящего диффеоморфизма?

**Указание.** Если поле плоскостей выпрямляемо, то оно является полем плоскостей, касательных к семейству поверхностей.

**Ответ.** Нет. Рассмотрим, например, поле плоскостей, заданное полем нормалей  $x_2 e_1 + e_3$  в  $R^3$ . Не существует поверхности, нормаль к которой в каждой точке имела бы такое направление.

**Задача\* 4.** Пусть в области  $U$  векторное поле  $v$  не имеет особых точек. Можно ли тогда выпрямить поле во всей области  $U$  (т. е. верна ли основная теорема с  $V=U$ )?

**Указание.** Постройте поле на плоскости, для которого фазовые кривые будут иметь вид, изображенный на рис. 55.

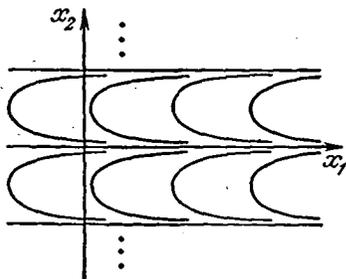


Рис. 55. Невыпрямляемое на всей плоскости семейство кривых.

**3. Теорема существования.** Из основной теоремы непосредственно вытекает

**Следствие 1.** Решение уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  существует.

**Доказательство.** Если  $v(x_0) = 0$ , положим  $\varphi(t) \equiv x_0$ . Если же  $v(x_0) \neq 0$ , то по основной теореме уравнение (1) в окрестности точки  $x_0$  эквивалентно уравнению (2).

Поскольку уравнение (2) имеет решение  $\psi$  с начальным условием  $\psi(t_0) = y_0 = f(x_0)$  (какое?), то и эквивалентное ему уравнение (1) имеет решение с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ .

**4. Локальная теорема единственности.** Из основной теоремы непосредственно вытекает

**Следствие 2.** Пусть  $\varphi_1: I_1 \rightarrow U$ ,  $\varphi_2: I_2 \rightarrow U$  — два решения уравнения (1) с общим начальным условием

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0, \quad v(x_0) \neq 0.$$

Тогда существует интервал  $I_3$ , содержащий  $t_0$ , на котором  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ .

**Доказательство.** Для уравнения (2) это очевидно, а уравнение (1) в достаточно малой окрестности точки  $x_0$  ему эквивалентно.

**Замечание.** Мы увидим вскоре, что ограничение  $v(x_0) \neq 0$  можно отбросить. Для  $n = 1$  это уже доказано в § 2.

**5. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости по начальным условиям.** Пусть  $v$  — векторное поле в фазовом пространстве  $U$ ,  $x_0$  — точка из  $U$ .

**Определение.** Локальным фазовым потоком, заданным векторным полем  $v$  в окрестности точки  $x_0$ , называется совокупность  $(I, V_0, g)$ , состоящая из интервала  $I$  вещественной

оси  $t$ :  $I = \{t \in \mathbb{R}: |t| < \varepsilon\}$ , окрестности  $V_0$  точки  $x_0$  и отображения  $g: I \times V_0 \rightarrow U$ , причем выполнены 3 условия:

1) при фиксированном  $t \in I$  отображение  $g^t: V_0 \rightarrow U$ , заданное условием  $g(t, x) = g^t x$ , является диффеоморфизмом;

2) при фиксированном  $x \in V_0$  отображение  $\varphi: I \rightarrow U$ , заданное условием  $\varphi(t) = g^t x$ , является решением уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(0) = x$ ;

3) отображения  $g^t$  обладают следующим групповым свойством:  $g^{s+t} x = g^s(g^t(x))$  для тех  $(x, s, t)$ , для которых определена правая часть равенства; при этом для каждой точки  $x \in V_0$  существуют такая окрестность  $V'$ ,  $x \in V' \subset V_0$ , и такое число  $\delta > 0$ , что при  $|s| < \delta$ ,  $|t| < \delta$  выражение  $g^s(g^t(x'))$  определено при всех  $x' \in V'$ .

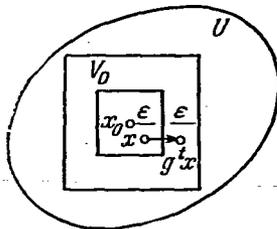


Рис. 56. Локальный фазовый поток уравнения  $\dot{x}_1 = e_1$ .

Пример 1. Рассмотрим векторное поле  $v = e_1$  в области  $U$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Построим соответствующий локальный фазовый поток в окрестности точки  $x_0$ .

Рассмотрим (рис. 56) куб с ребром  $4\varepsilon$  с центром в точке  $x_0$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  этот куб целиком лежит в  $U$ . Внутренность куба с вдвое меньшим ребром  $2\varepsilon$  с тем же центром обозначим  $V_0$ , интервал  $|t| < \varepsilon$  — через  $I$ . Отображение  $g$  зададим формулой  $g(t, x) = x + e_1 t$ .

Задача 1. Проверить выполнение условий 1), 2), 3).

Из основной теоремы непосредственно вытекает

Следствие 3. Векторное поле  $v$  в окрестности неособой точки  $x_0$  ( $v(x_0) \neq 0$ ) задает локальный фазовый поток.

Доказательство. Для уравнения (2) это уже проверено, а уравнение (1) в достаточно малой окрестности точки  $x_0$  ему эквивалентно по основной теореме.

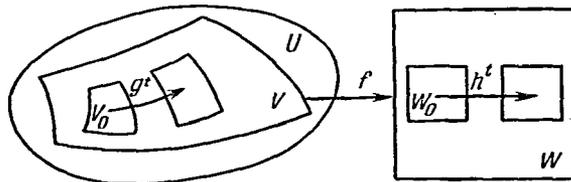


Рис. 57. Локальный фазовый поток  $(I, V_0, g)$  получается из локального фазового потока выпрямленного уравнения  $(I, W_0, h)$  при помощи диффеоморфизма  $f^{-1}$ .

Остановимся на этом подробнее. Обозначим через  $(I, W_0, h)$  локальный фазовый поток поля  $e_1$  в окрестности  $W$  точки  $y_0 = f(x_0)$ , где  $f: V \rightarrow W$  — диффеоморфизм основной теоремы. Тогда  $(I, V_0, g)$ , где  $V_0 = f^{-1}(W_0)$  и  $g^t = f^{-1} \circ h^t \circ f$ , — искомый фазовый поток (рис. 57).

Замечание 1. Следствие 3 утверждает, в частности, что  
1) существует интервал  $|t| < \varepsilon$ , на котором определены решения уравнения (1) с любым начальным условием, достаточно близким к  $x_0$ ;

2) значение этого решения  $\varphi(t)$  зависит от  $t$  и  $x$  непрерывно и дифференцируемо (класса  $C^1$ , если поле  $v$  класса  $C^1$ ).

Замечание 2. Мы вскоре увидим, что ограничение  $v(x_0) \neq 0$  можно отбросить.

Задача 2. Докажите, что значение  $\varphi(t)$  решения  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  дифференцируемо по  $t_0$ ,  $x_0$ ,  $t$  при достаточно малых  $|t - t_0|$ .

6. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости по параметру. Из предыдущей теоремы непосредственно вытекает Следствие 4. Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, \alpha), \quad x \in U, \quad (1_\alpha)$$

заданных в фазовом пространстве  $U$  векторными полями  $v$  класса  $C^1$ , дифференцируемо (класса  $C^1$ ) зависящими от параметра  $\alpha \in A$ , где  $A$  — область в евклидовом пространстве. Пусть  $v(x_0, \alpha_0) \neq 0$ . Тогда значение решения  $\varphi(t)$  уравнения (1<sub>α</sub>) с начальным условием  $\varphi(0) = x$  дифференцируемо (класса  $C^1$ ) зависит от  $t$ ,  $x$ ,  $\alpha$  при достаточно малых  $t$ ,  $\|x - x_0\|$ ,  $\|\alpha - \alpha_0\|$ .

Доказательство. Здесь полезна маленькая хитрость. Рассмотрим в прямом произведении  $U \times A$  (рис. 58) векторное поле  $(v(x, \alpha), 0)$  и соответствующее уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0. \end{cases}$$

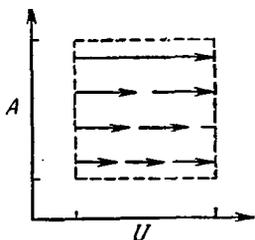


Рис. 58. Фазовое пространство расширенной системы  $\dot{x} = v(x, \alpha)$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ .

По предыдущей теореме решение этого уравнения дифференцируемо зависит от  $t$ ,  $x$ ,  $\alpha_0$  при достаточно малых  $|t|$ ,  $\|x - x_0\|$ ,  $\|\alpha - \alpha_0\|$ . Но решение этого уравнения с начальным условием  $(x, \alpha)$  есть  $(\varphi, \alpha)$ , где  $\varphi$  — решение уравнения (1<sub>α</sub>) с начальным условием  $\varphi(0) = x$ . Поэтому  $\varphi(t)$  также дифференцируемо зависит от  $t$ ,  $x$ ,  $\alpha$ , что и требовалось.

Замечание. Условие  $v(x_0, \alpha_0) \neq 0$  можно, как мы увидим, отбросить.

7. Теорема о продолжении. Пусть  $v$  — векторное поле в области  $U$ ,  $x_0$  — точка  $U$ .

Определение. Если существует решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ , определенное при всех  $t \in \mathbb{R}$ , то говорят, что решение можно продолжить неограниченно. Если

существует решение, определенное при всех  $t \geq t_0$  (соответственно  $t \leq t_0$ ), то говорят, что решение неограниченно продолжается вперед (соответственно назад).

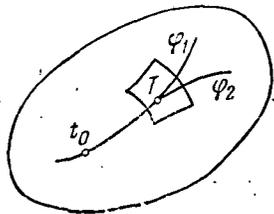
Пусть  $\Gamma$  — подмножество области  $U$ . Если существует решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ , определенное на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ , и  $\varphi(T)$  принадлежит  $\Gamma$ , то говорят, что решение можно продолжать вперед до  $\Gamma$ . Аналогично определяется продолжение назад до  $\Gamma$ .

Пусть  $F$  — компактное подмножество области  $U$ , содержащее точку  $x_0$ . Обозначим через  $\Gamma$  границу  $F$  (т. е. множество точек из  $F$ , в любой окрестности которых есть точки дополнения к  $F$  в  $U$ ). Предположим, что векторное поле  $\nu$  в области  $U$  не имеет особых точек. Из основной теоремы легко вытекает

**Следствие 5.** Решение  $\varphi$  уравнения (1) можно продолжить вперед (назад) либо неограниченно, либо до границы  $F$ . Продолжение единственно в том смысле, что любые два решения с одинаковым начальным условием совпадают на пересечении интервалов определения.

**Доказательство.** Вначале докажем единственность. Пусть  $T$  — верхняя грань тех  $\tau$ , для которых решения  $\varphi_1, \varphi_2$  совпадают при всех  $t$  из отрезка  $t_0 \leq t \leq \tau$  (рис. 59). Предположим, что  $T$  — внутренняя точка обоих интервалов определения. Тогда  $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$  ввиду непрерывности  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . По локальной теореме единственности  $\varphi_1$  совпадает с  $\varphi_2$  в окрестности точки  $T$  и  $T$  — не верхняя грань. Значит,  $T$  — конец одного из интервалов определения и оба решения совпадают на части пересечения этих интервалов, на которой  $t \geq t_0$ . Случай  $t \leq t_0$  рассматривается аналогично.

Рис. 59. Единственность продолжения вытекает из локальной теоремы единственности.



Теперь будем строить продолжение. Если два решения совпадают на пересечении интервалов определения, то из них можно составить решение, определенное на объединении этих интервалов (рис. 60).

Обозначим через  $T$  верхнюю грань чисел  $t$ , для которых существует решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ , удовлетворяющее условию  $\varphi(t) \in F$  при всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq \tau$ . По условию  $t_0 \leq T \leq \infty$ . Если  $T = \infty$ , решение продолжается вперед неограниченно. Пусть  $T < \infty$ . Покажем, что существует решение  $\varphi$ , определенное для всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , и что  $\varphi(T) \in \Gamma$ . Действительно, из следствия 3 вытекает, что каждой точке  $x_0 \in U$  соответствуют окрестность  $V_\varepsilon(x_0)$  и число  $\varepsilon(x_0) > 0$  такие, что для всех  $x \in V_\varepsilon(x_0)$  существует решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x$ , определенное при  $|t - t_0| < \varepsilon$  (а именно  $\varphi = g^{t-t_0} x$ ). Поскольку  $F$  компактно, из окрестностей  $V_\varepsilon(x_0)$  точек  $x_0 \in F$  можно выбрать конечное покрытие множества  $F$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — наименьшее из конечного числа соответствующих чисел  $\varepsilon(x_0)$ .

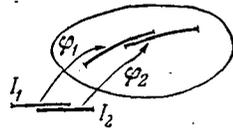


Рис. 60. Построение продолжения.

Поскольку  $T$  — верхняя грань, существует  $\tau$  между  $T - \varepsilon$  и  $T$ , для которого  $\varphi(t) \in F$  при всех  $t$  из отрезка  $t_0 \leq t \leq \tau$ . В частности,  $\varphi(\tau) \in F$ . Значит, точка  $\varphi(\tau)$  покрыта одной из окрестностей конечного покрытия. Следовательно,

существует решение  $\varphi'$  с начальным условием  $\varphi'(\tau) = \varphi(\tau)$ , определенное при  $|t - \tau| < \varepsilon$  (рис. 61). По теореме единственности  $\varphi'$  совпадает с  $\varphi$  на всем пересечении интервалов определения. Следовательно, мы можем построить из  $\varphi$  и  $\varphi'$  решение  $\varphi''$ , определенное при  $t_0 \leq t < \tau + \varepsilon$ . В частности, существует  $\varphi''(T)$ .

Покажем, что  $\varphi''(\theta) \in F$  при  $t_0 \leq \theta < T$ . Действительно, всякое решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ , определенное при  $t_0 \leq t \leq \theta$ , должно совпадать с  $\varphi''$  (единственность). Если бы  $\varphi''(\theta) = \varphi(\theta)$  не принадлежало  $F$ ,  $T$  не было бы верхней гранью

$$\{\tau: \varphi(t) \in F \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau\}.$$

Покажем, что  $\varphi''(T) \in \Gamma$ . Действительно,  $\varphi''(T) \in F$  как предел последовательности точек  $\varphi''(\theta_i)$  из  $F$ ,  $\theta_i \rightarrow T$ . С другой стороны, в любой правой полуокрестности точки  $T$  есть точки  $t$ , для которых  $\varphi''(t)$  не принадлежит  $F$ . Действительно, иначе для всех  $t$  из некоторой окрестности  $T$  все точки  $\varphi''(t)$  принадлежали бы  $F$  и  $T$  не было бы верхней гранью. Теорема доказана для продолжения вперед. Случай  $t < t_0$  рассматривается аналогично\*).

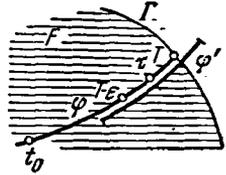


Рис. 61. Существование продолжения до момента  $T$  включительно.

**Замечание.** Мы вскоре увидим, что ограничение  $v(x) \neq 0$  для всех  $x \in U$  можно отбросить.

**Пример 1.** Даже в случае, когда  $U$  — все евклидово пространство, решение не всегда можно продолжать неограниченно. Например, когда  $n = 1$ ,  $v(x) = x^2 + 1$  (рис. 62).

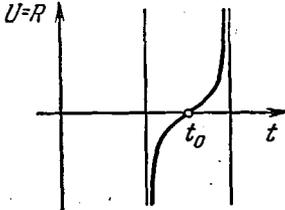


Рис. 62. Решения уравнения  $\dot{x} = x^2 + 1$  нельзя продолжать неограниченно ни вперед, ни назад.

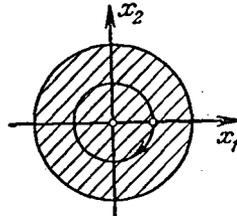


Рис. 63. Решение уравнения маятника нельзя продолжить до границы круга  $F$ .

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение маятника  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1$ . Пусть  $U$  — плоскость  $(x_1, x_2)$  без начала координат,  $F$  — круг  $|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 2$ . Решение с начальным условием  $x_{1,0} = 1$ ,  $x_{2,0} = 0$  можно продолжать неограниченно (рис. 63).

**Задача 1.** При каких начальных условиях можно продолжать неограниченно решение уравнения с предельным циклом из § 6?

**Задача 2.** Предположим, что каждое решение уравнения (1) можно продолжить вперед и назад неограниченно. Обозначим через  $g^t$  преобразование за время  $t$  (переводящее каждую точку  $x_0$  фазового пространства  $U$  в значение  $\varphi(t)$  решения с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$ ). Докажите, что  $\{g^t\}$  — однопараметрическая группа диффеоморфизмов  $U$ .

\* ) Как это всегда бывает с доказательствами очевидных теорем, доказательство теоремы о продолжении легче провести, чем прочесть.

## § 8. Применения к неавтономному случаю

Рассмотрим теперь неавтономное уравнение

$$\dot{x} = v(t, x), \quad (1)$$

правая часть которого задана в области  $U$  расширенного фазового пространства  $R^{n+1} = R \times R^n$  ( $t \in R, x \in R^n$ ) (рис. 64).

1. Основная теорема для неавтономного случая. Пусть  $(t_0, x_0)$  — точка области  $U$ . Из основной теоремы легко вытекает

Следствие 6. Существует окрестность  $V$  точки  $(t_0, x_0)$  в  $U$  и диффеоморфизм  $f: V \rightarrow W$

в евклидовом  $(n+1)$ -мерном пространстве с координатами  $(t, y_1, \dots, y_n)$  такой, что уравнение (1) в  $V$  эквивалентно простейшему уравнению

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad (2)$$

$(y = (y_1, \dots, y_n))$  в  $W$ .

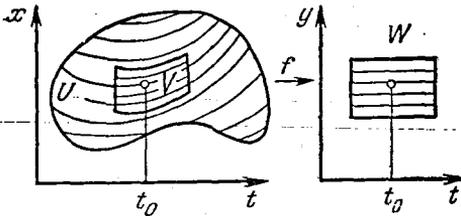


Рис. 64. Выпрямление интегральных кривых диффеоморфизмом  $f$  расширенного фазового пространства.

Таким образом, диффеоморфизм  $f$  переводит точку с координатами  $(t, x)$  в точку с координатами  $(t, y)$ , сохраняя  $t$ . Эквивалентность означает, что  $\varphi: I \rightarrow V$  — решение уравнения (1) тогда и только тогда, когда  $f \circ \varphi: I \rightarrow W$  — решение уравнения (2).

Сформулированное следствие эквивалентно основной теореме. Его прямое доказательство будет дано в § 32.

Задача 1. Вывести следствие 6 из основной теоремы.

Задача 2. Вывести основную теорему из следствия 6.

2. Теорема существования. Из следствия 6, очевидно, вытекает

Следствие 7. Решение уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  из области  $U$  существует при достаточно малых  $|t - t_0|$ .

3. Теорема единственности. Из следствия 6, очевидно, вытекает

Следствие 8. Любые два решения уравнения (1) с общим начальным условием совпадают на пересечении интервалов, где они определены.

Ибо это очевидно для уравнения (2).

Замечание. Применяя это к случаю, когда  $v$  в (1) не зависит от  $t$ , убеждаемся, что и в следствии 2 § 7 можно отбросить требование  $v(x_0) \neq 0$ .

4. Теорема дифференцируемости. Пусть  $v = v(t, x)$  — векторное поле в области  $U$  расширенного фазового пространства.

В неавтономном случае преобразования за время  $t$  не образуют однопараметрической группы преобразований; однако мы определим преобразования за время от  $t_1$  до  $t_2$  следующим образом:

**Определение.** *Локальным семейством преобразований  $g_{t_1}^{t_2}$ , заданным полем  $v(t, x)$  в окрестности точки  $(t_0, x_0)$ , называется совокупность  $(I, V_0, g)$ , состоящая из интервала  $I$  вещественной оси, содержащего  $t_0$ , окрестности  $V_0$  точки  $x_0$  в фазовом пространстве и отображения  $g: I \times I \times V_0 \rightarrow U$ , причем*

1) при фиксированных  $t_1, t_2 \in I$  отображение  $g_{t_1}^{t_2}: (V_0 \times t_1) \rightarrow U$ , определенное как  $g(t_2, t_1, x) = g_{t_1}^{t_2}(x, t_1)$ , является диффеоморфизмом (на часть плоскости  $t = t_2$ );

2) при фиксированных  $x \in V_0, t_1 \in I$  отображение  $\varphi$ , определенное условием  $(\varphi(t), t) = g(t, t_1, x)$ , является решением уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_1) = x$ ;

3) выполняется аналог группового свойства (рис. 65)

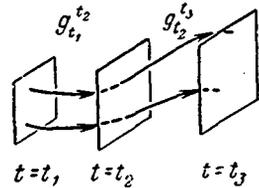


Рис. 65. Локальное семейство преобразований.

$$g_{t_1}^{t_3}(x, t_1) = g_{t_2}^{t_3} g_{t_1}^{t_2}(x, t_1)$$

для тех  $x, t_1, t_2$  и  $t_3$ , для которых определена правая часть; при этом у каждой точки  $x \in V_0$  есть такая окрестность  $V'$  и такое  $\delta > 0$ , что правая часть определена при всех  $x' \in V'$ ,  $|t_i - t_0| < \delta, i = 1, 2, 3$ .

Из основной теоремы легко вытекает

**Следствие 9.** *Векторное поле  $v(t, x)$  в окрестности точки  $(t_0, x_0)$  задает локальное семейство преобразований  $g_{t_1}^{t_2}$ .*

Доказывается, как следствие 3.

**Замечание.** Отождествляя каждую плоскость  $t = t_0$  в расширенном фазовом пространстве с фазовым пространством, мы можем рассматривать отображение  $g_{t_1}^{t_2}$  как диффеоморфизм области фазового пространства в область фазового пространства. В частном случае, когда уравнение (1) автономно и  $v(t, x) = v(x)$  не зависит от  $t$ , диффеоморфизмы  $g_{t_1}^{t_2}$  зависят лишь от разности  $t_2 - t_1$  и совпадают с отображением  $g^{t_2 - t_1}$  за время  $t_2 - t_1$ . (Это вытекает из теоремы единственности и из того, что если  $x = \varphi(t)$  — решение автономного уравнения, то и  $x = \varphi(t + C)$  — решение.)

Таким образом, следствие 9 содержит в себе как частный случай следствие 3, причем без ограничения  $v(x) \neq 0$ .

**Задача 1.** Докажите, что  $g_{t_1}^{t_2}$  тогда и только тогда зависит лишь от  $t_2 - t_1$ , когда  $v(t, x)$  не зависит от  $t$ .

5. Теорема о зависимости от параметра. Из основной теоремы легко вытекает

Следствие 10. Если  $v=v(t, x, \alpha)$   $C^r$ -дифференцируемо зависящее от параметра  $\alpha$  (и от  $t$  и  $x$ ) векторное поле, то значение  $\varphi(t)$  решения уравнения

$$\dot{x}=v(t, x, \alpha)$$

с начальным условием  $\varphi(t_0)=x_0$  зависит  $C^r$ -дифференцируемо от  $t_0, x_0, \alpha$  и  $t$ .

Доказывается, как следствие 4. Заметим, что следствие 10 применимо независимо от того, обращается ли  $v$  в 0. Поэтому утверждение следствия 4 доказано теперь без ограничения  $v \neq 0$ .

6. Теорема о продолжении. Пусть  $v=v(t, x)$  — векторное поле в области  $U$  расширенного фазового пространства. Пусть  $(t_0, x_0)$  — точка области  $U$ , а  $F$  — компактное множество, содержащее эту точку (рис. 66). Из основной теоремы легко вытекает

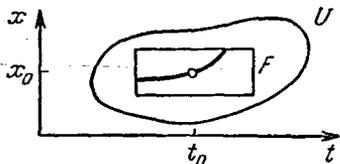


Рис. 66. Продолжение решения до границы компакта  $F$  в расширенном фазовом пространстве.

Следствие 11. Решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0)=x_0$  можно продолжить вперед и назад до границы  $F$ . Всякие два решения с общим начальным условием

совпадают на пересечении интервалов определения.

Доказывается, как следствие 5.

Задача 1. Докажите, что утверждение следствия 5 справедливо и тогда, когда поле  $v$  имеет особые точки.

Задача 2. Предположим, что каждое решение уравнения (1) продолжается вперед и назад неограниченно. Докажите, что  $g_t^t$  — диффеоморфизм фазового пространства на себя.

Задача 3. Предположим, сверх того, что векторное поле  $v$  периодически во времени:  $v(t+T, x)=v(t, x)$  для всех  $t, x$ . Докажите, что диффеоморфизмы  $\{g_0^{nT}\}$  ( $n$  — целое) образуют группу:

$$g_0^{nT} = A^n,$$

где  $A = g_0^T$ . Укажите, какое из следующих двух соотношений верно:

$$g_0^{nT+\tau} = A^n g_0^\tau, \quad g_0^{nT+\tau} = g_0^\tau A^n.$$

## § 9. Применения к уравнениям выше первого порядка

Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right), \quad (1)$$

где  $F(u_0, u_1, \dots, u_n)$  — дифференцируемая (класса  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ) функция, заданная в области  $U$ .

1. Эквивалентность уравнения  $n$ -го порядка и системы  $n$  уравнений 1-го порядка. Решением уравнения (1) называется  $C^n$ -отображение  $\varphi: I \rightarrow R$  интервала  $a < t < b$  (где  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) вещественной оси в вещественную ось, для которого

1) точка с координатами  $u_0 = \tau$ ,  $u_1 = \varphi(\tau)$ ,  $u_2 = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=\tau}, \dots, u_n = \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}} \Big|_{t=\tau}$  принадлежит области  $U$  при любом  $\tau \in I$ ;

2) при любом  $\tau \in I$

$$\frac{d^n \varphi}{dt^n} \Big|_{t=\tau} = F\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=\tau}, \dots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}} \Big|_{t=\tau}\right).$$

Например, решением уравнения малых колебаний маятника

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x, \quad x \in R,$$

является функция  $\varphi(t) = \sin t$ , а также и функция  $\varphi(t) = \cos t$ .

Фазовым пространством уравнения маятника является плоскость с координатами  $(x, \dot{x})$  (см. § 1).

Рассмотрим вопрос о размерности фазового пространства, соответствующего уравнению  $n$ -го порядка (1).

**Теорема.** Уравнение (1) эквивалентно системе  $n$  уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = F(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2)$$

в том смысле, что если  $\varphi$  — решение уравнения (1), то вектор из производных  $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)})$  — решение системы (2), а если  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  — решение системы (2), то  $\varphi_1$  — решение уравнения (1). Доказательство очевидно.

Итак, фазовое пространство любого процесса, описываемого дифференциальным уравнением порядка  $n$ , имеет размерность  $n$ : все течение процесса  $(\varphi)$  определяется заданием в начальный момент времени  $t_0$  набора  $n$  чисел — значений производных  $\varphi$  порядка меньше  $n$  в точке  $t_0$ .

Пример 1. Уравнение маятника эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases}$$

которая уже исследовалась в § 1 и в § 6.

Пример 2. Уравнение  $\ddot{x} = 0$  эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases}$$

которая легко решается:  $x_2(t) = x_2(0) = C$ ;  $x_1(t) = x_1(0) + Ct$ . Итак, всякое решение уравнения  $\ddot{x} = 0$  — многочлен первой степени по  $t$ .

**Задача 1.** Докажите, что уравнению  $\frac{d^n x}{dt^n} = 0$  удовлетворяют все многочлены степени меньше  $n$  и только они.

2. Теоремы существования и единственности. Из теоремы п. 1 и следствий 7, 8 основной теоремы (§ 8) непосредственно вытекает

**Следствие.** Пусть  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  — точка области  $U$ . Решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием

$$\varphi(u_0) = u_1, \quad \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=u_0} = u_2, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}} \right|_{t=u_0} = u_n \quad (3)$$

существует и единственно (в том смысле, что всякие два решения с этим начальным условием совпадают на пересечении интервалов определения).

Начальные условия (3) записывают коротче в виде

$$t = u_0, \quad x = u_1, \quad \dot{x} = u_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)} = u_n.$$

Рис. 67. Три замечательных решения уравнения маятника.

**Пример 1.** Решение уравнения маятника  $\ddot{x} = -x$  (рис. 67) с начальными условиями:

(I)  $t = 0, \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0$

есть  $\varphi = 0$ . Если начальные условия

(II)  $t = 0, \quad x = 0, \quad \dot{x} = 1,$

то решение  $\varphi(t) = \sin t$ , а если

(III)  $t = 0, \quad x = 1, \quad \dot{x} = 0,$

то  $\varphi(t) = \cos t$ .

**Задача 1.** Найти решения уравнения перевернутого маятника (рис. 68)  $\ddot{x} = x$  с начальными условиями (I), (II), (III) и

(IV)  $t = 0, \quad x = 1, \quad \dot{x} = 1;$

(V)  $t = 0, \quad x = 1, \quad \dot{x} = -1.$

Каким движениям маятника соответствуют эти решения?

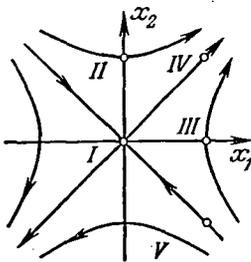


Рис. 68. Пять замечательных решений уравнения перевернутого маятника.

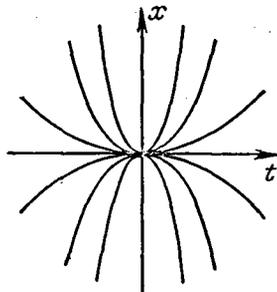


Рис. 69. Несединственность решения с начальным условием  $x = \dot{x} = 0$ .

**Контрпример 1.** Рассмотрим уравнение  $2x = t^2\ddot{x}$  и начальное условие  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$  (рис. 69). Этому условию удовлетворяет много решений, например:  $\varphi(t) \equiv 0$  и  $\varphi(t) = t^2$ . Дело в том, что уравнение это не имеет вида (1).

### 3. Теоремы дифференцируемости и продолжения.

**Задача 1.** Сформулировать и доказать теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости от начальных условий и параметров, а также теорему о продолжении для дифференциального уравнения порядка  $n$ .

**4. Системы уравнений.** Под *системой дифференциальных уравнений* мы будем понимать систему уравнений относительно  $n$  неизвестных функций  $x_i$ :

$$\frac{d^{n_i} x_i}{dt^{n_i}} = F_i(t, x, \dots), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где среди аргументов функций  $F_i$  находятся независимое переменное  $t$ , искомые функции  $x_j$  и производные функций  $x_j$  порядка меньше  $n_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Решение системы определяется, как в п. 1. Следует подчеркнуть, что решением системы является векторная функция  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , заданная на интервале. Таким образом,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  — это *не  $n$  решений, а одно решение* — замечание, равно относящееся к системам алгебраических и дифференциальных уравнений.

Прежде всего выясним, какое фазовое пространство соответствует системе (4).

**Теорема.** Система (4) эквивалентна системе  $N = \sum_{i=1}^n n_i$

уравнений первого порядка.

Иными словами, размерность фазового пространства системы (4) равна  $N$ .

Для доказательства, как в п. 1, надо ввести в качестве координат в фазовом пространстве производные  $x_i$  порядка меньше  $n_i$ .

Например, пусть  $n = n_1 = n_2 = 2$ . Тогда система (4) имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \\ \ddot{x}_2 = F_2(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \end{cases}$$

и эквивалентна системе из четырех уравнений

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = F_1(t, x), \quad \dot{x}_4 = F_2(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

**Пример 1.** Система дифференциальных уравнений механики Ньютона

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

(где  $U$  — потенциальная энергия,  $m_i > 0$  — массы), эквивалентна системе  $2n$  уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $p_i = m_i \dot{q}_i$ , а  $H = T + U$  — полная энергия,

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i}.$$

Таким образом, размерность фазового пространства системы (5) равна  $2n$ .

**Задача 1.** Сформулировать и доказать теоремы о существовании, единственности, непрерывной и дифференцируемой зависимости от начальных условий и от параметров, а также теорему о продолжении для системы (4).

**5. Замечание. Уравнение в вариациях.** Теорема о дифференцируемости по параметрам имеет не только теоретическое значение, но и является сильным вычислительным инструментом\*).

Действительно, представим себе, что мы умеем решать систему дифференциальных уравнений при некотором значении параметра. Тогда можно приближенно найти решение при близких значениях параметра. Для этого достаточно вычислить производную решения по параметру (при том фиксированном значении параметра, для которого мы умеем решать систему). Эта производная, рассматриваемая как функция времени, сама удовлетворяет (как легко сосчитать) некоторому дифференциальному уравнению; последнее называется *уравнением в вариациях*.

Уравнение в вариациях часто удается решить, не решая исходного уравнения, так как оно *линейное* (неоднородное). Этим способом рассчитывается влияние всевозможных малых возмущений (так называемый *метод малого параметра*) во всех областях науки.

Рассмотрим, например, уравнение с малым параметром  $\varepsilon$ :  $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$ , где  $v = v_0 + \varepsilon v_1 + O(\varepsilon^2)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). По теореме о дифференцируемости по параметру решение с фиксированным начальным условием можно записать в виде

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon y(t) + O(\varepsilon^2),$$

где  $x_0$  — решение «невозмущенного» уравнения  $\dot{x} = v(x, 0)$ , а  $y$  — производная решения по параметру  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ . Подставляя  $x(t)$  в исходное дифференциальное уравнение, получаем\*\*)

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{y} = v_0(x_0) + \varepsilon v_1(x_0) + \varepsilon \left. \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{x_0} y + O(\varepsilon^2).$$

Это соотношение выполняется при любом  $\varepsilon$ . Поэтому производные

\*) Теорему о дифференцируемости по начальным данным можно использовать таким же образом для приближенного нахождения пучка решений с начальными условиями, близкими к «невозмущенным», для которых решение известно.

\*\*) Так как при малых  $\varepsilon$

$$v_0(x) = v_0(x_0) + \varepsilon \left. \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{x_0} y + O(\varepsilon^2).$$

левой и правой частей по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$  равны:

$$\dot{y} = A(t)y + b(t), \quad \text{где} \quad A(t) = \left. \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{x_0(t)}, \quad b(t) = v_1(x_0(t)).$$

Это и есть уравнение в вариациях. Заметим, что  $y$  удовлетворяет также начальному условию  $y(0) = 0$ , так как начальное условие для  $x$  при всех  $\varepsilon$  одинаково.

При решении задач удобнее выводить уравнение в вариациях заново, чем помнить его наизусть.

**Задача 1.** Тело падает вертикально в среде с малым сопротивлением, зависящим от положения и скорости:

$$\ddot{x} = -g + \varepsilon F(x, \dot{x}), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Оценить влияние сопротивления на движение.

**Решение.** В отсутствие сопротивления ( $\varepsilon = 0$ ) решение известно:

$$x_0(t) = x(0) + vt - g \frac{t^2}{2}.$$

Согласно теореме о дифференцируемости по параметру при малых  $\varepsilon$  решение можно записать в виде

$$x = x_0 + \varepsilon y(t) + O(\varepsilon^2),$$

где  $y$  — производная решения по параметру  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ . Подставляя это выражение в исходное дифференциальное уравнение, получаем уравнение для  $y$ . А именно находим

$$x_0 + \varepsilon \ddot{y} = -g + \varepsilon F(x_0, \dot{x}_0) + O(\varepsilon^2) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Поскольку это соотношение выполняется при любых  $\varepsilon$ , коэффициенты при  $\varepsilon$  в любой степени слева и справа равны. В частности,

$$\ddot{y} = F(x_0(t), \dot{x}_0(t)), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Это и есть уравнение в вариациях. Оно легко решается.

*Ответ.* 
$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\tau F(x_0(\xi), \dot{x}_0(\xi)) d\xi d\tau + O(\varepsilon^2).$$

**Предостережение.** Строго говоря, наши рассуждения справедливы лишь при достаточно малых  $|t|$ . В действительности нетрудно обосновать их для любого конечного интервала времени  $|t| \leq T$ , если только  $\varepsilon$  не превосходит некоторой зависящей от  $T$  величины; при этом константа в  $O(\varepsilon^2)$  растет с ростом  $T$ .

Крайне рискованно распространять полученные таким путем выводы на бесконечный интервал времени: переставлять предельные переходы  $t \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  нельзя.

**Пример 1.** Рассмотрим ведро с водой, в дне которого имеется маленькая дырка радиуса  $\varepsilon$  (рис. 70). Для любого  $T$  существует столь малое  $\varepsilon$ , что в течение времени  $t < T$  ведро остается почти полным. Однако при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  ведро становится пустым, когда время стремится к бесконечности.

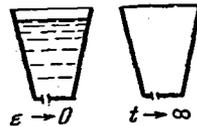


Рис. 70. Асимптотическое поведение решений возмущенного уравнения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и при  $t \rightarrow \infty$ .

**Задача 2.** Как известно, на тело массы  $m$ , движущееся относительно Земли со скоростью  $v$ , действует сила Кориолиса  $F = 2m[v, \Omega]$ , где  $\Omega$  — вектор угловой скорости Земли.

Камень брошен (без начальной скорости) в шахту глубиной 250 м на широте Ленинграда ( $\lambda = 60^\circ$ ) (рис. 71). Насколько сила Кориолиса отклонит его от вертикали?

**Решение:** Речь идет о дифференциальном уравнении

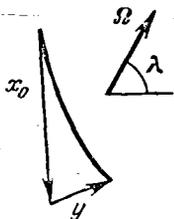
$$\ddot{x} = g + 2[x, \Omega],$$

зависящем как от параметра от величины угловой скорости Земли  $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$ . Можно заранее предвидеть, что сила Кориолиса мала по сравнению с весом, и поэтому можно рассматривать  $\Omega$  как *малый* параметр.

Согласно теореме о дифференцируемости, при малых  $\Omega$

$$x = x_0 + \Omega y + O(\Omega^2), \quad \text{где} \quad x_0 = x(0) + g \frac{t^2}{2}.$$

Подставляя это выражение  $x$  в дифференциальное уравнение, получаем уравнение в вариациях



откуда

$$\ddot{y} = 2[g t, \Omega], \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0,$$

$$y = [g, \Omega] \frac{t^3}{3} = \frac{2t}{3} [h, \Omega], \quad \text{где} \quad h = \frac{g t^2}{2}.$$

Следовательно, камень отклонится на восток на

Рис. 71. Отклонение падающего тела от вертикали.

$$\frac{2t}{3} |h| |\Omega| \cos \lambda \approx \frac{2 \cdot 7}{3} \cdot 250 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} \text{ м} \approx 4 \text{ см}.$$

Другие примеры применения теорем дифференцируемости по параметрам и начальным данным имеются в § 12,10 и § 26,7.

**6. Терминологические замечания.** Уравнения вида (1) и системы вида (4) называют иногда *нормальными* и *разрешенными относительно старших производных*.

В этом курсе никакие другие уравнения и системы не рассматриваются, так что термин *система дифференциальных уравнений* всегда означает нормальную систему или систему, эквивалентную нормальной (как, например, система уравнений Ньютона (5)).

Заметим также, что функции, входящие в правую часть системы (4), могут задаваться разными способами: явно, неявно, параметрически и т. д.

**Пример 1.** Запись

$$\dot{x}^2 - x = 0$$

есть сокращенное обозначение *двух разных* дифференциальных уравнений:  $\dot{x} = \sqrt{x}$  и  $\dot{x} = -\sqrt{x}$ , фазовым пространством для каждого из которых служит полупрямая  $x \geq 0$ . Эти уравнения

задаются двумя разными векторными полями, дифференцируемыми при  $x > 0$  (рис. 72).

При неявном задании правой части следует внимательно относиться к выяснению ее области определения и остерегаться двусмысленных обозначений.

**Пример 2.** Пусть  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ . Формулы  $\dot{x}_1 = r$ ,  $\dot{x}_2 = r\varphi$  не задают на плоскости  $(x_1, x_2)$  никакой системы дифференциальных уравнений.

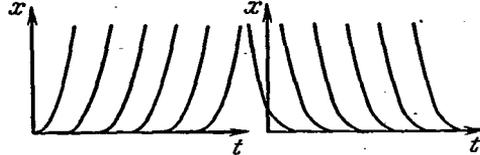
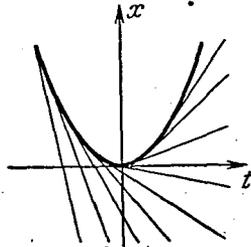


Рис. 72. Интегральные кривые двух уравнений, объединенных записью  $\dot{x}^2 = x$ .

Те же формулы, рассматриваемые в любой области плоскости  $(x_1, x_2)$ , не охватывающей начало координат, задают бесконечное множество систем дифференциальных уравнений соответственно бесконечному множеству «ветвей» многозначной функции  $\varphi$ .



**Пример 3.** Уравнением Клеро называется уравнение

$$x = \dot{x}t + f(\dot{x}).$$

Уравнение Клеро

$$x = \dot{x}t - \frac{\dot{x}^2}{2}. \tag{6}$$

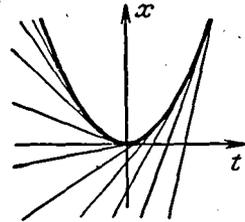


Рис. 73. Интегральные кривые двух уравнений, записанных вместе в виде уравнения Клеро (6).

есть краткая запись двух разных дифференциальных уравнений, заданных в области  $x \leq t^2/2$ . Каждое из них удовлетворяет условиям теорем существования и единственности в области под параболой  $x < t^2/2$  (рис. 73). Через каждую точку этой области проходят две касательные к параболу. Каждая касательная состоит из двух полукасательных. Каждая из полукасательных является интегральной кривой одного из двух уравнений, заданных формулой (6).

**Задача 1.** Исследовать уравнение Клеро  $x = \dot{x}t - \dot{x}^2$ .

## § 10. Фазовые кривые автономной системы

Вернемся теперь к автономному случаю и рассмотрим некоторые свойства решений автономных систем и соответствующих фазовых кривых. Начнем с примера.

**1. Сдвиг по времени.** Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} = F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}), \tag{1}$$

заданное дифференцируемой функцией  $F$  на фазовом пространстве  $R^n$ .

Задача 1. Пусть  $x = \sin t$  — решение уравнения (1). Докажите, что  $x = \cos t$  — тоже решение.

Это сразу вытекает из следующего предложения.

Теорема. Пусть  $\varphi: R \rightarrow U$  — решение автономного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad (2)$$

заданного векторным полем  $v$  в фазовом пространстве  $U$ . Пусть  $h^s: R \rightarrow R$  — сдвиг на  $s$ , переводящий точку  $t \in R$  в точку  $t + s \in R$ . Тогда  $\varphi \circ h^s: R \rightarrow U$  при любом  $s$  — решение уравнения (2).

Иными словами: если  $x = \varphi(t)$  — решение уравнения (2), то и  $x = \varphi(t + s)$  — решение.

Доказательство. Это очевидно:

$$\left. \frac{d\varphi(t+s)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=t_0+s} = v(\varphi(t_0+s)) = v(\varphi(t+s)) \Big|_{t=t_0}$$

при любых  $t_0 \in R$ ,  $s \in R$ .

Замечание. Из доказанной теоремы сразу вытекает аналогичное утверждение для автономных систем и, в частности, для уравнения (1).

При  $s = \pi/2$  получаем решение поставленной задачи.

Следствие. Через каждую точку фазового пространства автономного уравнения (2) проходит одна и только одна фазовая кривая\*).

Доказательство. Пусть  $\varphi_1: R \rightarrow U$ ,  $\varphi_2: R \rightarrow U$  — два решения и  $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = x$ . Тогда решения  $\varphi_2$  и  $\varphi_3 = \varphi_1 \circ h^{t_1-t_2}$  имеют одинаковые начальные условия  $\varphi_2(t_2) = \varphi_3(t_2) = x$  и по теореме единственности совпадают:  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ h^{t_1-t_2}$ . Но отображения  $\varphi$  и  $\varphi \circ h^s: R \rightarrow U$  имеют одинаковый образ, так как отображение  $h^s: R \rightarrow R$  взаимно однозначно. Итак,  $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$ , что и требовалось\*\*).

Замечание. Фазовые кривые неавтономного уравнения могут пересекаться, не совпадая. Поэтому за решениями неавтономных уравнений лучше следить по интегральным кривым.

\* Здесь речь идет о максимальных фазовых кривых. Максимальная фазовая кривая — это образ отображения  $\varphi: I \rightarrow U$ , где  $\varphi$  — решение, которое нельзя продолжить ни на какой интервал, содержащий  $I$  (например, потому, что  $I$  есть вся прямая, т. е. потому, что решение продолжается неограниченно, или потому, что  $\varphi(t)$  подходит к границе области  $U$ , когда  $t$  подходит к границе интервала  $I$ ).

\*\* Исследование случая, когда решение не продолжается неограниченно, предоставляется читателю.

**Задача 2.** Пусть через каждую точку фазового пространства уравнения  $\dot{x} = v(t, x)$  проходит одна и только одна фазовая кривая. Следует ли из этого, что уравнение автономно (т. е.  $v(t, x)$  не зависит от  $t$ )?

*Ответ.* Нет.

**2. Замкнутые фазовые кривые.** Мы уже знаем, что разные фазовые кривые автономного уравнения (2) не пересекаются. Посмотрим, может ли пересекать себя одна фазовая кривая.

Пусть  $\varphi_0: I \rightarrow U$  (рис. 74) — решение уравнения (2), принимающее в двух точках  $t_1 < t_2 \in I$  одно и то же значение  $\varphi_0(t_1) = \varphi_0(t_2)$ .

**Теорема.** Решение  $\varphi_0$ , для которого  $\varphi_0(t_1) = \varphi_0(t_2)$ , можно продолжить на всю ось  $t$ , причем полученное решение  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow U$  будет иметь период  $T = t_2 - t_1$ , т. е.  $\varphi(t + T) = \varphi(t)$  при любом  $t$ .

**Доказательство.** Всякое  $t \in \mathbb{R}$  можно однозначно представить в виде  $t = nT + \tau$ ,  $0 \leq \tau < T$ . Положим  $\varphi(t) = \varphi_0(t_1 + \tau)$ . Тогда  $\varphi$ , очевидно, периодическая функция с периодом  $T$ . Покажем, что  $\varphi$  — решение. Действительно, в окрестности каждой точки  $t \in \mathbb{R}$   $\varphi$  совпадает со сдвигом решения  $\varphi_0$  (это очевидно для точек, где  $\tau > 0$ ; для точек, где  $\tau = 0$ , это следует из того, что  $\varphi_0(t_1) = \varphi_0(t_2)$ ). Итак, по теореме п. 1  $\varphi$  — решение. Поскольку  $\varphi(t_1) = \varphi_0(t_1)$ , теорема доказана.

Рассмотрим теперь множество всех периодов полученной непрерывной функции  $\varphi$ .

**Лемма 1.** Множество всех периодов непрерывной функции  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow U$  является замкнутой подгруппой группы вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Если  $\varphi(t + T_1) \equiv \varphi(t)$  и  $\varphi(t + T_2) \equiv \varphi(t)$ , то и  $\varphi(t + T_1 \pm T_2) \equiv \varphi(t + T_1) \equiv \varphi(t)$ . Далее, если  $T_i \rightarrow T$ , то ввиду непрерывности  $\varphi$  имеем

$$\varphi(t + T) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + T_i) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t) \equiv \varphi(t).$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Всякая замкнутая подгруппа  $G$  группы вещественных чисел  $\mathbb{R}$  есть либо  $\mathbb{R}$ , либо  $0$ , либо множество  $\{kT_0, k \in \mathbb{Z}\}$  всех целых кратных некоторого числа  $T_0 \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Если  $G \neq \{0\}$ , то в  $G$  существуют положительные элементы (если  $t < 0$ , то  $-t > 0$ ). Рассмотрим

$$T_0 = \inf \{t : t \in G, t > 0\}.$$

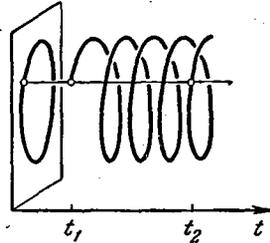


Рис. 74. Замкнутая фазовая кривая и соответствующая ей интегральная кривая.

Очевидно,  $0 \leq T_0 < \infty$ . Предположим, что  $T_0 > 0$ . Тогда  $T_0$  принадлежит  $G$ , так как  $G$  замкнута. Целые кратные  $T_0$  принадлежат  $G$ , так как  $G$  — подгруппа. Других точек в  $G$  нет.

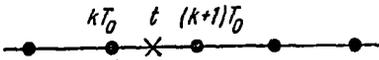


Рис. 75. Замкнутая подгруппа прямой.

Действительно, точки  $kT_0$  делят прямую  $R$  на интервалы  $kT_0 < t < (k+1)T_0$  (рис. 75). Если бы группа  $G$  имела еще один элемент, он попал бы в такой интервал, и тогда в  $G$  нашелся бы элемент  $t - kT_0$ , для которого  $0 < t - kT_0 < T_0$ , вопреки тому, что  $T_0$  — нижняя грань. Итак, если  $T_0 > 0$ , то  $G = \{kT_0; k \in \mathbb{Z}\}$ .

Остается рассмотреть случай  $T_0 = 0$ . В этом случае для любого  $\varepsilon > 0$  в  $G$  есть элемент  $t$ ,  $0 < t < \varepsilon$ , а значит, и все точки  $kt$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Точки  $kt$  делят  $R$  на интервалы длины меньше  $\varepsilon$ . Значит, в любой окрестности любой точки  $R$  есть точки  $G$ . Поскольку  $G$  — замкнутое множество,  $G = R$ .

Лемма доказана.

Задача\* 1. Найти все замкнутые подгруппы плоскости  $R^2$  (рис. 76), пространства  $R^n$ , группы окружности

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

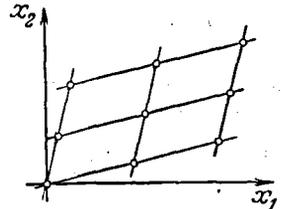


Рис. 76. Замкнутая подгруппа плоскости.

Возвращаясь к периодическим функциям, мы видим, что множество периодов либо составляет всю прямую (и тогда функция постоянна), либо состоит из всех целых кратных наименьшего периода  $T_0$ .

Итак, самопересекающаяся фазовая кривая либо является стационарной точкой, либо замкнутой кривой, замыкающейся впервые за время  $T_0$ . Примером может служить предельный цикл (рис. 77).

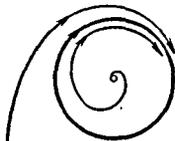


Рис. 77. Предельный цикл.

Задача 2. Докажите, что замкнутая фазовая кривая, не сводящаяся к точке, диффеоморфна окружности\*). Указание. Диффеоморфизм можно задать формулами

$$\varphi(t) \sim \left( \cos \frac{2\pi t}{T_0}, \sin \frac{2\pi t}{T_0} \right).$$

Незамкнутые фазовые кривые хотя и не могут самопересекаться, могут сложным образом навиваться сами на себя.

Задача 3. Найти замыкания фазовых кривых «двойного маятника»

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_2.$$

Ответ. Точка, окружности и торо  $S^1 \times S^1$ . См. § 24 и § 25,6.

\*) Определение дифференцируемого отображения одной кривой на другую имеется, например, в § 33,6.

Задача\* 4. Пусть  $\varphi: R \rightarrow U$  — решение уравнения (2), соответствующее незамкнутой фазовой кривой:

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2) \quad \text{при} \quad t_1 \neq t_2.$$

Тогда отображение  $\varphi$  прямой  $R$  на фазовую кривую  $\Gamma = \varphi(R)$  взаимно однозначно и имеет обратное  $\varphi^{-1}: \Gamma \rightarrow R$ .

Обязательно ли  $\varphi^{-1}$  непрерывно?

Указание. (См. предыдущую задачу.) Может оказаться, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \in \Gamma, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty.$$

## § 11. Производная по направлению векторного поля и первые интегралы

Многие геометрические понятия можно описывать двумя способами: на языке точек пространства или же с помощью функций, заданных на нем. Такая дуализация часто оказывается полезной в самых разных областях математики.

В частности, векторные поля можно описывать не только с помощью кривых, но и как дифференцирования функций, а основные теоремы можно сформулировать в терминах первых интегралов.

1. Производная по направлению вектора. Пусть  $U$  — область в евклидовом пространстве,  $x$  — точка области  $U$ ,  $v$  — касательный вектор,  $v \in TU_x$  (рис. 78). Пусть  $f: U \rightarrow R$  — дифференцируемая функция. Пусть  $\varphi: I \rightarrow U$  — какая-нибудь из кривых, выходящих из  $x$  со скоростью  $v$ ,  $\varphi(0) = x$ . Возникает сквозное отображение интервала  $I$  вещественной оси в вещественную ось

$$f \circ \varphi: I \rightarrow R, \quad (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)).$$

т. е. вещественная функция вещественного переменного  $t$ .

Определение. Производной функции  $f$  по направлению вектора  $v \in TU_x$  называется число

$$L_v f|_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi.$$

Чтобы оправдать это определение, надо проверить, что полученное число зависит не от выбора кривой  $\varphi$ , но лишь от вектора скорости  $v$ . Это следует, например, из выражения производной через координаты; по правилу дифференцирования сложной функции

$$L_v f|_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x v_i, \quad (1)$$

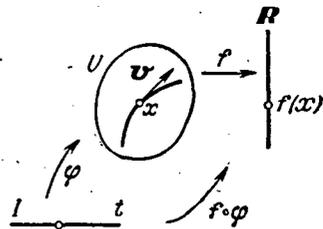


Рис. 78. Производная функции  $f$  по направлению вектора  $v$ .

где  $x_i: U \rightarrow R$  — система координат в области  $U$ , а  $v_i$  — компоненты вектора  $v$  в этой системе координат, не зависящие от выбора  $\varphi$ .

**2. Производная по направлению векторного поля.** Пусть теперь  $v$  — векторное поле в области  $U$ . Тогда в каждой точке  $x$  области  $U$  имеется касательный вектор  $v(x) \in TU_x$ . Если  $f: U \rightarrow R$  — дифференцируемая функция, то мы можем образовать ее производную по направлению вектора  $v(x)$  в каждой точке  $x$  области  $U$ .

В результате в каждой точке области  $U$  возникает число  $L_v f|_x$ .

**Определение.** Производной функции  $f: U \rightarrow R$  по направлению векторного поля  $v$  называется новая функция  $L_v f: U \rightarrow R$ , значение которой в точке  $x$  равно производной  $f$  по направлению вектора  $v(x)$ :  $(L_v f)(x) = L_{v(x)} f|_x$ .

**Пример 1.** Пусть  $e_1$  — координатное векторное поле (компоненты  $e_1$  в системе координат  $x_1, \dots, x_n$  в  $U$  равны  $1, 0, 0, \dots, 0$ ). Тогда по определению частной производной  $L_{e_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ .

Если функция  $f$  и поле  $v$  класса  $C^r$ , то функция  $L_v f$  класса  $C^{r-1}$  (см. формулу (1)).

**3. Свойства производной по направлению.** Обозначим через  $F$  множество всех бесконечно дифференцируемых функций  $f: U \rightarrow R$ . Это множество имеет естественную структуру вещественного линейного пространства (так как сложение функций сохраняет дифференцируемость) и даже кольца (так как произведение дифференцируемых функций дифференцируемо).

Пусть  $v$  — бесконечно дифференцируемое векторное поле. Производная  $L_v f$  функции  $f$  из  $F$  по направлению поля  $v$  снова принадлежит  $F^*$ ). Итак, дифференцирование по направлению поля  $v$  есть отображение  $L_v: F \rightarrow F$  кольца бесконечно дифференцируемых функций в себя.

**Задача 1.** Докажите следующие свойства оператора  $L_v$  (кроме одного из свойств, которое неверно):

$$\begin{aligned} 1) L_v(f + g) &= L_v f + L_v g; & 2) L_v(fg) &= fL_v g + gL_v f; \\ 3) L_{u+v} &= L_u + L_v; & 4) L_{fu} &= fL_u; & 5) L_u L_v &= L_v L_u \end{aligned}$$

( $f$  и  $g$  — достаточно гладкие функции, а  $u$  и  $v$  — достаточно гладкие векторные поля).

**Терминологическое замечание.** Алгебрансты называют отображение любого (коммутативного) кольца  $F$  в себя дифференцированием, если оно обладает свойствами 1) и 2) отображения  $L_v$ . Все дифференцирования кольца образуют модуль над этим кольцом.

\*) Здесь существенна бесконечная дифференцируемость!

Векторные поля в  $U$  образуют модуль над кольцом  $F$  функций в  $U$ . Свойства 3) и 4) означают, что операция  $L$ , переводящая векторное поле  $v$  в дифференцирование  $L_v$ , — гомоморфизм  $F$ -модулей. Свойство 5) означает, что дифференцирования  $L_u$  и  $L_v$  коммутируют.

**Задача\* 2.** Является ли гомоморфизм  $L$  изоморфизмом?

Аналитики называют отображение  $L_v: F \rightarrow F$  *линейным одно-родным дифференциальным оператором первого порядка*. Это название объясняется тем, что из свойств 1) и 2) вытекает, что отображение  $L_v: F \rightarrow F$  является  $R$ -линейным оператором; в локальных координатах  $x_1, \dots, x_n$  этот оператор записывается в таком виде (см. (1)):  $L_v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ .

Французы называют оператор  $L_v$  производной рыбака: рыбак сидит на месте и дифференцирует объекты, проносимые мимо него фазовым потоком.

**Алгебра Ли векторных полей.**

**Задача 3.** Докажите, что дифференциальный оператор  $L_a L_b - L_b L_a$  — не второго порядка (как это кажется на первый взгляд), а первого:

$$L_a L_b - L_b L_a = L_c,$$

где  $c$  — некоторое векторное поле, зависящее от полей  $a$  и  $b$ .

**Замечание.** Поле  $c$  называется *коммутатором* или *скобкой Пуассона* полей  $a$  и  $b$  и обозначается  $[a, b]$ .

**Задача 4.** Докажите следующие 3 свойства коммутатора:

1.  $[a, b + \lambda c] = [a, b] + \lambda [a, c]$ ,  $\lambda \in R$  (линейность).
2.  $[a, b] + [b, a] = 0$  (кососимметричность).
3.  $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$  (тождество Якоби).

**Замечание.** Линейное пространство с бинарной операцией, удовлетворяющей условиям 1, 2, 3, называется *алгеброй Ли*. Итак, векторные поля с операцией коммутирования образуют алгебру Ли. Другие примеры алгебр Ли:

- 1) трехмерное пространство, снабженное операцией векторного умножения;
- 2) пространство матриц с операцией  $AB - BA$ .

**Задача 5.** Зная компоненты полей  $a$  и  $b$  в некоторой системе координат, найти компоненты их коммутатора.

**Ответ.**  $[a, b]_i = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ .

**Задача\* 6.** Пусть  $g^t$  — фазовый поток, заданный векторным полем  $a$ ,  $h^t$  — векторным полем  $b$ . Докажите, что потоки коммутируют ( $g^t h^s = h^s g^t$ ) тогда и только тогда, когда коммутатор полей равен 0.

**Задача 7.** Пусть  $a_\omega$  — поле скоростей точек тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O$  в  $R^3$ . Найти коммутатор полей  $a_\omega, a_\alpha$ .

**Ответ.**  $[a_\omega, a_\alpha] = a_{[\omega, \alpha]}$ , где  $[\omega, \alpha]$  — векторное произведение.

**4. Первые интегралы.** Пусть  $v$  — векторное поле в области  $U$ ,  $f: U \rightarrow R$  — дифференцируемая функция.

**Определение.** Функция  $f$  называется *первым интегралом\** дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U, \quad (2)$$

если ее производная по направлению векторного поля  $v$  равна 0:

$$L_v f = 0. \quad (3)$$

Следующие два свойства первого интеграла, очевидно, равносильны соотношению (3) и могли бы быть приняты за определение:

1. Функция  $f$  постоянна вдоль каждого решения  $\varphi: I \rightarrow U$ , т. е. каждая функция  $f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\varphi$  — решение, постоянна.

2. Каждая фазовая кривая принадлежит одному и только одному множеству уровня\*\* функции  $f$  (рис. 79).



Рис. 79. Фазовая кривая целиком лежит на одной поверхности уровня первого интеграла.

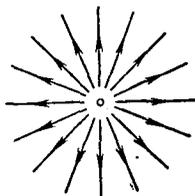


Рис. 80. Система без первых интегралов.

Пример 1. Рассмотрим уравнение, фазовым пространством которого является вся плоскость (рис. 80):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2. \end{cases}$$

Покажем, что это уравнение не имеет ни одного отличного от постоянной первого интеграла. Действительно, первый интеграл — непрерывная на всей плоскости функция, постоянная на каждом луче, выходящем из начала координат, следовательно, — постоянная.

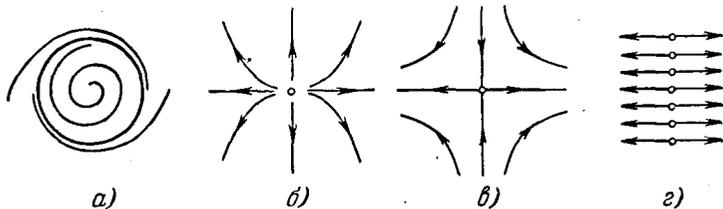


Рис. 81. Какие из этих систем имеют непостоянные первые интегралы?

**Задача 1.** Покажите, что в окрестности предельного цикла (рис. 81, а) уравнения (2) всякий первый интеграл — постоянная.

**Задача 2.** При каких  $k$  система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = kx_2, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

имеет непостоянный первый интеграл (рис. 81, б, в, г)?

\*) Странное наименование *первый интеграл* осталось от тех времен, когда пытались решить все дифференциальные уравнения путем интегрирования. В те времена интегралом (или частным интегралом) называли также то, что мы теперь называем решением.

\*\*\*) Напомню, что множеством уровня  $C$  функции  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  называется полный прообраз точки  $C \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}C \subset U$ .

Непостоянные первые интегралы встречаются редко. Зато в тех случаях, когда они есть и когда их удается найти, награда бывает весьма значительной.

**Пример 2.** Пусть  $H$  — дифференцируемая ( $r \geq 2$  раз) функция  $2n$  переменных  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ . Система  $2n$  уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

называется *системой канонических уравнений Гамильтона*. (Гамильтон показал, что дифференциальные уравнения большого числа задач механики, оптики, вариационного исчисления и других областей естествознания можно записать в виде системы (4).)

**Теорема** (закон сохранения энергии). *Функция  $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  является первым интегралом системы канонических уравнений (4).*

**Доказательство.** Из (1) и (4) вытекает

$$L_{\mathcal{V}}H = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0,$$

что и требовалось доказать.

**5. Локальные первые интегралы.** Отсутствие непостоянных первых интегралов связано с топологическим устройством фазовых кривых. В общем случае фазовые кривые не укладываются в целом на поверхности уровня никакой функции, поэтому непостоянного первого интеграла и нет. Однако *локально*, в окрестности неособой точки, фазовые кривые устроены просто, и непостоянные первые интегралы существуют.

Пусть  $U$  — область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,  $\mathcal{V}$  — дифференцируемое векторное поле в  $U$ ,  $x$  — неособая точка поля ( $\mathcal{V}(x) \neq 0$ ).

**Теорема.** *Существует такая окрестность  $V$  точки  $x$  в  $U$ , что уравнение (2) в этой области  $V$  имеет  $n-1$  функционально независимый\*) первый интеграл  $f_1, \dots, f_{n-1}$ , причем любой первый интеграл уравнения (2) в области  $V$  есть функция от  $f_1, \dots, f_{n-1}$ .*

\*) Напомню, что функции  $f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$  функционально независимы в окрестности точки  $x \in U$ , если ранг производной  $f_x|_x$  отображения  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданного функциями  $f_1, \dots, f_m$ , равен  $m$  (см. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, «Наука», 1970, т. I, гл. 6).

Доказательство. Для стандартного уравнения в  $R^n$  (рис. 82)

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n = 0 \quad (5)$$

утверждение очевидно: первые интегралы — это произвольные дифференцируемые функции от координат  $y_2, \dots, y_n$ ; координаты  $y_2, \dots, y_n$  — это и есть  $n-1$  функционально независимый первый интеграл.

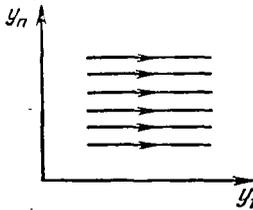


Рис. 82. Координата  $y_n$  является первым интегралом.

То же верно для уравнения (5) и в любой выпуклой области  $W$  пространства  $R^n$  (область в  $R^n$  выпукла, если вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок; приведите пример первого интеграла (5), не сводящегося к функции от  $y_2, \dots, y_n$  в невыпуклой области  $W$  пространства  $R^n$ ).

По основной теореме уравнение (2) в некоторой окрестности точки  $x$  в надлежащих координатах  $y$  имеет вид (5). Окрестность эту можно считать выпуклой областью в координатах  $y$  (если нет, заменим меньшей выпуклой).

Остается заметить, что свойство функции быть первым интегралом, а также функциональная независимость, от системы координат не зависят. Теорема доказана.

6. Первые интегралы, зависящие от времени. Пусть  $f: R \times U \rightarrow R$  — дифференцируемая функция на расширенном фазовом пространстве уравнения

$$\dot{x} = v(t, x), \quad t \in R, \quad x \in U, \quad (6)$$

вообще говоря, неавтономного \*). Функция  $f$  называется *первым интегралом, зависящим от времени*, если она является первым интегралом автономной системы, получающейся из уравнения (6) добавлением уравнения  $\dot{t} = 1$ :

$$\dot{X} = V(X), \quad X \in R \times U, \quad X = (t, x), \quad V(t, x) = (1, v).$$

Иными словами: каждая интегральная кривая уравнения (6) лежит целиком в одном множестве уровня функции  $f$  (рис. 83).

Векторное поле  $V$  в нуль не обращается. По предыдущей теореме в окрестности каждой точки  $(t, x)$  уравнение (6) имеет  $n$  функционально независимых первых интегралов (зависящих от времени) и через них выражается любой (зависящий от времени) первый интеграл уравнения (6) в этой окрестности.

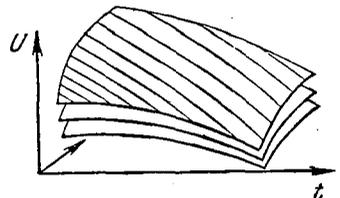


Рис. 83. Интегральные кривые на поверхности уровня первого интеграла, зависящего от времени.

\*) Правая часть  $v(t, x)$  предполагается дифференцируемой.

В частности, автономное уравнение (2) с  $n$ -мерным фазовым пространством в окрестности *любой* (не обязательно неособой) точки имеет  $n$  зависящих от времени функционально независимых первых интегралов.

**Задача 1.** Пусть каждое решение уравнения (6) можно продолжить на всю ось  $t$ . Тогда уравнение (6) имеет  $n$  функционально независимых первых интегралов (зависящих от времени) во всем расширенном фазовом пространстве; каждый первый интеграл (зависящий от времени) через них выражается.

Первым интегралом дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) любого порядка называется первый интеграл эквивалентной системы уравнений первого порядка.

## § 12. Консервативная система с одной степенью свободы

В качестве примера применения первого интеграла к исследованию дифференциального уравнения мы рассмотрим здесь механическую систему с одной степенью свободы, без трения.

**1. Определения.** *Консервативной системой с одной степенью свободы* называется система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = F(x), \tag{1}$$

где  $F$  — дифференцируемая на некотором интервале  $I$  вещественной оси  $x$  функция.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F(x_1), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in I \times \mathbf{R}. \tag{2}$$

В механике принята следующая терминология:

$I$  — конфигурационное пространство;

$x_1 = x$  — координата;

$x_2 = \dot{x}$  — скорость;

$\ddot{x}$  — ускорение;

$I \times \mathbf{R}$  — фазовое пространство;

(1) — уравнение Ньютона;

$F$  — силовое поле;

$F(x)$  — сила.

Рассмотрим еще следующие функции на фазовом пространстве:

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} \text{ — кинетическая энергия;}$$

$$U = - \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi \text{ — потенциальная энергия;}$$

$$E = T + U \text{ — полная механическая энергия.}$$

Очевидно,  $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ , так что потенциальная энергия определяет систему.

Пример 1. Для маятника §-1 (рис. 84)

$$\ddot{x} = -\sin x,$$

$x$  — угол отклонения,  $F(x) = -\sin x$ ,  $U(x) = -\cos x$ . Для

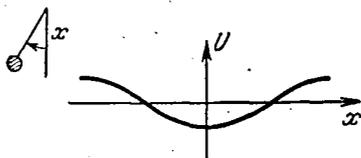


Рис. 84. Потенциальная энергия маятника.

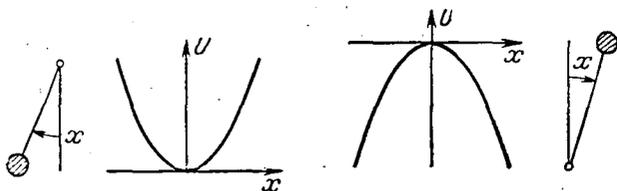


Рис. 85. Потенциальная энергия маятника вблизи нижнего и верхнего положений равновесия.

уравнения малых колебаний маятника  $\ddot{x} = -x$

$$F(x) = -x, \quad U(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Для уравнения малых колебаний перевернутого маятника  $\ddot{x} = x$

$$F(x) = x, \quad U(x) = -\frac{x^2}{2}$$

(рис. 85).

## 2. Закон сохранения энергии.

Теорема. Полная энергия  $E$  является первым интегралом системы (2).

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t)) \right) = x_2 \dot{x}_2 + U' \dot{x}_1 = x_2 F(x_1) - F(x_1) x_2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет исследовать и явно «в квадратурах» решать уравнения вида (1), например уравнение маятника.

3. Линии уровня энергии. Изучим фазовые кривые системы (2). Каждая из них целиком лежит на одном множестве уровня энергии. Исследуем эти множества уровня.

**Теорема.** *Множество уровня энергии*

$$\{ (x_1, x_2) : \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E \}$$

является гладкой кривой в окрестности каждой своей точки, исключая лишь положения равновесия, т. е. точки  $(x_1, x_2)$ , где

$$F(x_1) = 0, \quad x_2 = 0.$$

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой о неявной функции. Имеем

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -F(x_1), \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2.$$

Если одна из производных отлична от 0, то в окрестности рассматриваемой точки множество уровня  $E$  является графиком дифференцируемой функции вида  $x_1 = x_1(x_2)$  или  $x_2 = x_2(x_1)$ . Теорема доказана.

Заметим, что исключенные выше точки  $(x_1, x_2)$ , где  $F(x_1) = 0$  и  $x_2 = 0$ , — это в точности стационарные точки (положения равновесия) системы (2) и особые точки векторного поля фазовой скорости. Далее, эти же точки являются критическими точками \*) полной энергии  $E(x_1, x_2)$ . Наконец, точки  $x_1$ , где  $F(x_1) = 0$ , — это критические точки потенциальной энергии  $U$ .

Чтобы нарисовать линии уровня энергии, полезно представлять себе шарик, катающийся в «потенциальной яме»  $U$  (рис. 86).

Зафиксируем значение полной энергии  $E$ .

Заметим, что кинетическая энергия неотрицательна. Поэтому потенциальная энергия не превосходит полной. Значит, линия уровня энергии  $E$  проектируется на конфигурационное пространство (на ось  $x_1$ ) в множество не превосходящих  $E$  значений потенциальной энергии  $\{x_1 \in I : U(x_1) \leq E\}$  (шарик не может подняться выше уровня  $E$  в потенциальной яме).

Далее, скорость тем больше (по абсолютной величине), чем меньше потенциальная энергия:  $|x_2| = \sqrt{2(E - U(x_1))}$  (скатываясь

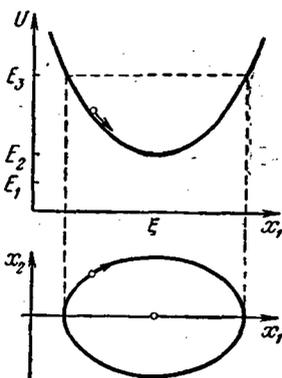


Рис. 86. Шарик в потенциальной яме и соответствующая фазовая кривая.

\*) Критической точкой функции называется точка, в которой полный дифференциал функции равен нулю. Значение функции в такой точке называется критическим значением.

в яму, шарик набирает скорость, а поднимаясь, теряет ее). В «точках поворота», где  $U(x_1) = E$ , скорость равна 0.

Из четности энергии по отношению к  $x_2$  следует, что линия уровня энергии симметрична относительно оси  $x_1$  (шарик проходит каждую точку туда и обратно с одинаковой скоростью).

Этих простых соображений достаточно, чтобы рисовать линии уровня энергии систем с разнообразными потенциалами  $U$ . Рассмотрим сначала простейший случай (бесконечно глубокая потенциальная яма с одним притягивающим центром  $\xi$ ), когда  $F(x)$  монотонно убывает,  $F(\xi) = 0$ ,  $I = R$  (рис. 86).

Если значение полной энергии  $E_1$  меньше минимума потенциальной  $E_2$ , то множество уровня  $E = E_1$  пусто (движение шарика физически невозможно). Множество уровня  $E = E_2$  состоит из одной точки  $(\xi, 0)$  (шарик покоится на дне ямы).

Если значение  $E_3$  полной энергии больше критического значения  $E_2 = U(\xi)$ , то множество уровня  $E = E_3$  — гладкая замкнутая симметричная кривая, окружающая положение равновесия  $(\xi, 0)$  на фазовой плоскости (шарик катается в яме взад и вперед; он поднимается до высоты  $E_3$ , в этот момент его скорость обращается в 0, и он скатывается обратно в яму, проходит  $\xi$ , в этот момент его скорость максимальна, поднимается с другой стороны и т. д.)

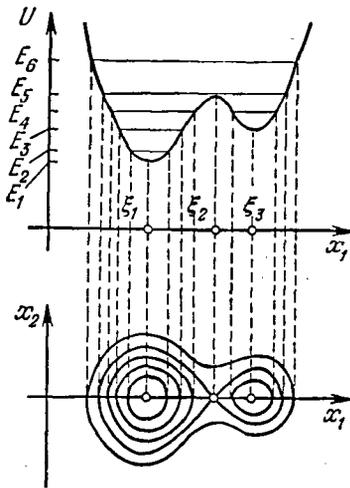


Рис. 87. Линии уровня энергии для потенциала с двумя ямами.

При исследовании более сложных случаев следует поступать подобным же образом, последовательно увеличивая значения полной энергии  $E$  и останавливаясь на значениях  $E$ , равных критическим значениям потенциальной энергии  $U(\xi)$  (где  $U'(\xi) = 0$ ), следя каждый раз за кривыми со значениями  $E$ , немного меньшими и немного большими критических.

Пример 1. Пусть потенциальная энергия  $U$  имеет три критические точки:  $\xi_1$  (минимум),  $\xi_2$  (локальный максимум),  $\xi_3$  (локальный минимум). На рис. 87 показаны линии уровня  $E_1 = U(\xi_1)$ ,  $U(\xi_1) < E_2 < U(\xi_3)$ ,  $E_3 = U(\xi_3)$ ,  $U(\xi_3) < E_4 < U(\xi_2)$ ,  $E_5 = U(\xi_2)$ ,  $E_6 > U(\xi_2)$ .

Задача 1. Нарисовать линии уровня энергии для уравнения маятника  $\ddot{x} = -\sin x$  и для уравнений маятника вблизи нижнего и верхнего положений равновесия ( $\ddot{x} = -x$  и  $\ddot{x} = x$ ).

Задача 2. Нарисовать линии уровня энергии для задачи Кеплера \*)  $U = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$  и для потенциалов, представленных на рис. 88.

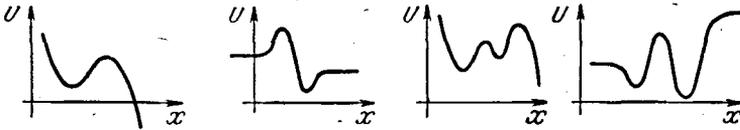


Рис. 88. Как выглядят линии уровня энергии для таких потенциалов?

4. Линии уровня энергии вблизи особой точки. При исследовании поведения линий уровня вблизи критического значения энергии полезно помнить о следующих обстоятельствах.

Замечание 1. Если потенциальная энергия — квадратичная форма  $U = kx^2/2$ , то линии уровня энергии — кривые второго порядка  $2E = x_2^2 + kx_1^2$ .

В случае притяжения  $k > 0$  (т. е. критическая точка 0 — минимум потенциальной энергии  $U$  (рис. 89)). В этом случае линии уровня энергии — гомотетичные эллипсы с центром в 0.

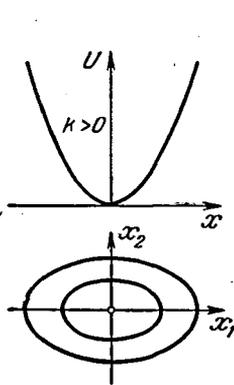


Рис. 89. Линии уровня энергии для притягивающего квадратичного потенциала.

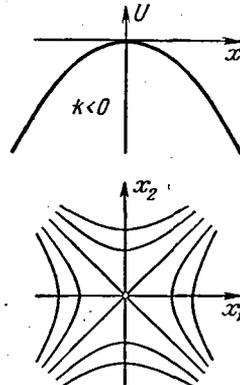


Рис. 90. Линии уровня энергии для отталкивающего квадратичного потенциала.

В случае отталкивания  $k < 0$  (т. е. критическая точка 0 — максимум потенциальной энергии (рис. 90)). В этом случае линии уровня энергии — гомотетичные гиперболы с центром в 0 и пара их асимптот:  $x_2 = \pm \sqrt{|k|} x_1$ . Эти асимптоты называются также сепаратрисами, так как они отделяют друг от друга гиперболы разных типов.

\*) Уравнением Ньютона с таким потенциалом описывается изменение расстояния планет и комет от Солнца

**Замечание 2.** В окрестности невырожденной критической точки приращение функции является квадратичной формой, если только надлежащим образом выбрать координату.

Точка 0 является критической точкой дифференцируемой функции  $f$ , если  $f'(0) = 0$ . Критическая точка 0 невырождена, если  $f''(0) \neq 0$ . Предположим, что  $f(0) = 0$ .

Лемма Морса\*). В окрестности невырожденной критической точки 0 можно выбрать координату  $y$  так, что

$$f = Cy^2, \quad C = \operatorname{sgn} f''(0).$$

Такой координатой будет, конечно,  $y = \operatorname{sgn} x \sqrt{|f(x)|}$ . Утверждение состоит в том, что соответствие  $x \mapsto y$  в окрестности точки 0 диффеоморфно.

Для доказательства удобно воспользоваться следующим предложением:

Лемма Адамара\*). Пусть  $f$  — дифференцируемая (класса  $C^r$ ) функция, равная в точке  $x=0$  нулю вместе с производной. Тогда  $f(x) = xg(x)$ , где  $g$  — дифференцируемая (класса  $C^{r-1}$  в окрестности точки  $x=0$ ) функция.

Доказательство. Имеем

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 f'(tx) x dt = x \int_0^1 f'(tx) dt;$$

функция  $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$  класса  $C^{r-1}$ , и лемма доказана.

Применим лемму Адамара к функции  $f$  леммы Морса дважды. Находим  $f = x^2\varphi(x)$ , где  $2\varphi(0) = f''(0) \neq 0$ . Итак,  $y = x\sqrt{|\varphi(x)|}$ . Лемма Морса доказана, так как функция  $\sqrt{|\varphi(x)|}$  в окрестности точки  $x=0$  дифференцируема ( $r-2$  раза, если  $f$  класса  $C^r$ ).

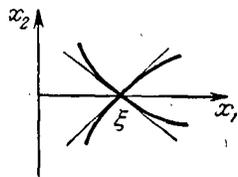


Рис. 91. Касательные к сепаратрисам отгалкивающей особой точки.

Таким образом, линии уровня энергии в окрестности невырожденной критической точки превращаются либо в эллипсы, либо в гиперболы при диффеоморфном изменении системы координат  $(x_1, x_2)$ .

Задача 1. Найти касательные к сепаратрисам отгалкивающей особой точки ( $U''(\xi) < 0$ ).

Отвст.  $x_2 = \pm \sqrt{|U''(\xi)|} (x_1 - \xi)$  (рис. 91).

5. Продолжение решений уравнения Ньютона. Пусть потенциальная энергия определена на всей оси  $x$ . Из закона сохранения энергии непосредственно вытекает

\*) Обе леммы можно распространить на функции многих переменных.

**Теорема.** Если потенциальная энергия  $U$  всюду положительна\*), то каждое решение уравнения

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \tag{1_1}$$

продолжается неограниченно.

Пример 1. Пусть  $U = -x^4/2$ . Решение  $x = 1/(t-1)$  нельзя продолжить до  $t=1$ .

Установим сначала следующее утверждение, называемое *априорной оценкой*

**Лемма.** Если решение существует при  $|t| < \tau$ , то оно удовлетворяет неравенствам

$$|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{2E_0}, \quad |x(t) - x(0)| < \sqrt{2E_0} |t|,$$

где  $E_0 = \frac{\dot{x}(0)^2}{2} + U(x(0))$  — начальное значение энергии.

**Доказательство.** Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{\dot{x}^2(t)}{2} + U(x(t)) = E_0,$$

и поскольку  $U > 0$ , первое неравенство доказано. Второе неравенство вытекает из первого, так как

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(\theta) d\theta. \quad \text{Лемма доказана.}$$

**Доказательство теоремы.** Пусть  $T$  — произвольное положительное число.

Рассмотрим прямоугольник  $\Pi$  (рис. 92) на фазовой плоскости

$$|x_1 - x_1(0)| \leq 2\sqrt{2E_0} T, \quad |x_2| \leq 2\sqrt{2E_0}.$$

Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве  $(x_1, x_2, t)$  параллелепипед  $|t| \leq T, (x_1, x_2) \in \Pi$ . По теореме о продолжении решение можно продолжить до границы параллелепипеда. Из леммы следует, что решение может выйти лишь на те грани параллелепипеда, где  $|t| = T$ . Итак, решение можно продолжать до любого  $t = \pm T$ , следовательно, — неограниченно.

**Задача 1.** Доказать неограниченную продолжаемость решений системы уравнений Ньютона

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad m_i > 0, \quad x \in R^N,$$

в случае положительной потенциальной энергии ( $U > 0$ ).

\*) Разумеется, изменение потенциальной энергии  $U$  на константу не меняет уравнения (1). Существенно лишь, что  $U$  ограничена снизу.

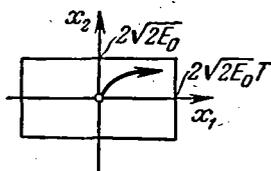


Рис. 92. Прямоугольник, из которого фазовая точка не выйдет за время  $T$ .

**6. Некритические линии уровня энергии.** Предположим, что потенциальная энергия  $U$  определена на всей оси  $x$ . Пусть  $E$  — некритическое значение энергии, т. е.  $E$  не равно значению функции  $U$  ни в одной из ее критических точек.

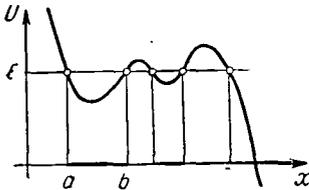


Рис. 93. Множество точек  $x$ , где  $U(x) < E$ ,  $E$  — некритический уровень энергии.

Рассмотрим множество точек, где значение  $U$  меньше  $E$ ,

$$\{x: U(x) < E\}.$$

Это множество (рис. 93) состоит из конечного или счетного числа интервалов, так как функция  $U$  непрерывна (два из этих интегралов могут простираться в бесконечность). На концах интервалов  $U(x) = E$ , следовательно,  $U'(x) \neq 0$  (так как  $E$  — некритическое значение). Каждая точка множества  $\{x: U(x) = E\}$  является по этой причине концом ровно одного интервала меньших значений. Поэтому все множество  $\{x: U(x) \leq E\}$  есть объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся отрезков и, быть может, одного или двух уходящих в бесконечность лучей, или же совпадает со всей осью  $x$ .

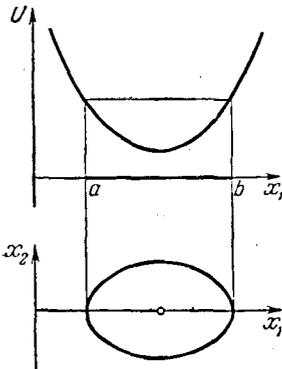


Рис. 94. Фазовая кривая, диффеоморфная окружности.

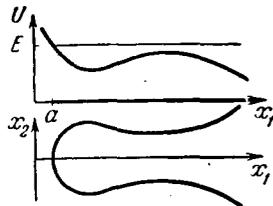


Рис. 95. Фазовая кривая, диффеоморфная прямой.

Рассмотрим (рис. 94) один из таких отрезков,  $a \leq x \leq b$ ,  
 $U(a) = U(b) = E$ ,  $U(x) < E$  при  $a < x < b$ .

**Теорема. Уравнение**

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E, \quad a \leq x_1 \leq b,$$

задает на плоскости  $(x_1, x_2)$  гладкую кривую, диффеоморфную окружности. Эта кривая является фазовой кривой системы (2).

Аналогичным образом, луч  $a \leq x < \infty$  (или  $-\infty < x \leq b$ ), где  $U(x) \leq E$ , является проекцией фазовой кривой, диффеоморфной прямой линии, на ось  $x_1$  (рис. 95). Наконец, в случае, если  $U(x) < E$  на

всей прямой, множество уровня  $E$  состоит из двух фазовых кривых

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E - U(x_1))}.$$

Итак, множество не критического уровня энергии состоит из конечного или счетного числа гладких фазовых кривых.

7. Доказательство теоремы п. 6. Закон сохранения энергии позволяет явно решить уравнение Ньютона. Действительно, при фиксированном значении полной энергии  $E$  величина (но не знак) скорости  $\dot{x}$  определяется положением  $x$ :

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}, \quad (3)$$

а это — уравнение с одномерным фазовым пространством, которое мы уже умеем решать.

Пусть  $(x_1, x_2)$  — точка нашего множества уровня, причем  $x_2 > 0$  (рис. 96). Решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_1, \dot{\varphi}(t_0) = x_2$  ищем из соотношения (3):

$$t - t_0 = \int_{x_1}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} \quad (4)$$

для  $t$ , близких к  $t_0$ .

Заметим теперь, что интеграл

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$$

сходится, так как  $U'(a) \neq 0, U'(b) \neq 0$ . Отсюда следует, что формула (4) задает непрерывную на некотором отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$

функцию  $\varphi$ , причем  $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$ . Эта функция везде удовлетворяет уравнению Ньютона (рис. 97).

Интервал  $(t_1, t_2)$  имеет длину  $T/2$ . Продолжим  $\varphi$  на следующий интервал длины  $T/2$  из соображений симметрии:  $\varphi(t_2 + \tau) = \varphi(t_2 - \tau), 0 \leq \tau \leq T/2$ , и далее

периодически:  $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$ . Функция  $\varphi$ , построенная теперь на всей прямой, всюду удовлетворяет уравнению Ньютона. Кроме того,  $\varphi(t_0) = x_1, \dot{\varphi}(t_0) = x_2$ .

Итак, мы построили решение системы (2) с начальным условием  $(x_1, x_2)$ . Оно оказалось периодическим, с периодом  $T$ . Соответствующая замкнутая фазовая кривая есть в точности часть множества уровня  $E$  над отрезком  $a \leq x \leq b$ . Эта кривая

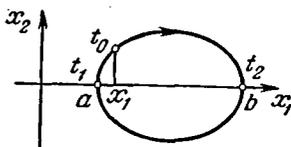


Рис. 96. Половину фазовой кривой (от  $a$  до  $b$ ) фазовая точка проходит за конечное время  $T/2 = t_2 - t_1$ .

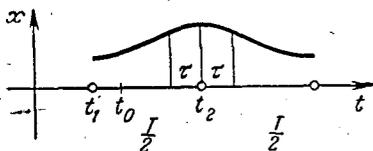


Рис. 97. Продолжение решения уравнения Ньютона с помощью отражений.

диффеоморфна окружности, как всякая замкнутая фазовая кривая (см. § 10).

Случай, когда интервал простирается до бесконечности (в одну сторону или в обе), проще рассмотренного и представляется читателю.

8. Критические линии уровня. Критические линии уровня могут быть устроены более сложно. Заметим, что такая линия содержит неподвижные точки  $(x_1, x_2)$  (где  $U'(x_1) = 0, x_2 = 0$ ), каждая из которых уже является фазовой кривой. Если на

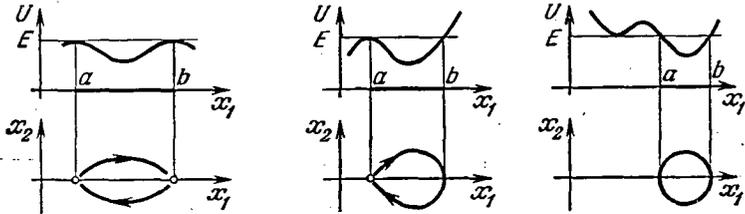


Рис. 98. Разбиение критической линии уровня энергии на фазовые кривые.

отрезке  $a \leq x \leq b$  всюду  $U(x) < E$ , кроме  $U(a) = U(b) = E$ , и оба конца — критические точки ( $U'(a) = U'(b) = 0$ ), то две открытые дуги (рис. 98)

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E - U(x_1))}, \quad a < x_1 < b,$$

являются фазовыми кривыми. Время, затрачиваемое фазовой точкой на прохождение такой дуги, бесконечно (теорема продолжения из п. 5 + единственность).

Если  $U'(a) = 0, U'(b) \neq 0$  (рис. 98), то уравнение

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E, \quad a < x_1 \leq b,$$

определяет незамкнутую фазовую кривую. Наконец, если  $U'(a) \neq 0, U'(b) \neq 0$  (рис. 98), то часть множества критического уровня над отрезком  $a \leq x_1 \leq b$  — замкнутая фазовая кривая, как в случае некритического уровня  $E$ .

9. Пример. Применим все сказанное к уравнению маятника

$$\ddot{x} = -\sin x.$$

Потенциальная энергия равна  $U(x) = -\cos x$  (рис. 99). Критические точки —  $x_1 = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$

Замкнутые фазовые кривые вблизи  $x_1 = 0, x_2 = 0$  похожи на эллипсы. Этим фазовым кривым соответствуют малые качания маятника. Их период  $T$  мало зависит от амплитуды, пока она мала. При больших значениях постоян-

ной энергии получаются большие замкнутые кривые, пока энергия не достигнет критического значения, равного потенциальной энергии маятника, перевернутого вверх ногами. Период колебаний при этом растет (так как время движения по сепаратрисам, из которых состоит критическое множество уровней, бесконечное).

Большим значениям энергии соответствуют незамкнутые кривые, на которых  $x_2$  не меняет знака, т. е. маятник не качается, а вращается. Его скорость достигает наибольшего значения в нижнем, а наименьшего — в верхнем положении.

Заметим, что значения  $x_1$ , отличающиеся на  $2k\pi$ , соответствуют одинаковым положениям маятника. Поэтому фазовым пространством маятника естественно считать не плоскость, а цилиндр  $\{x_1 \bmod 2\pi, x_2\}$  (рис. 100).

Наворачивая на цилиндр нарисованную уже на плоскости картину, получим фазовые кривые маятника замкнутые гладкие кривые, исключая две стационарные точки  $A, B$  (нижнее и верхнее положения равновесия) и две сепаратрисы  $C, D$ .

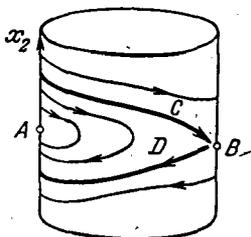


Рис. 100. Цилиндрическое фазовое пространство маятника.

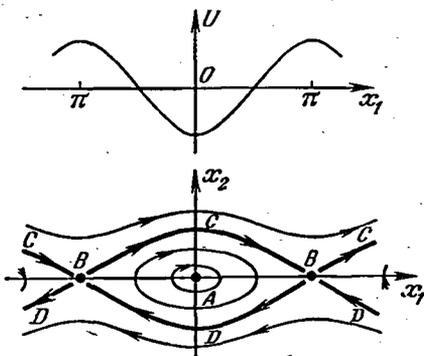


Рис. 99. Фазовые кривые уравнения маятника  $\ddot{x} = -\sin x$ .

на поверхности цилиндра. Все они — на поверхности цилиндра. Все они — стационарные точки  $A, B$  (нижнее и верхнее положения равновесия) и две сепаратрисы  $C, D$ .

**Задача 1.** Нарисовать графики функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  для решения с энергией, близкой к критической энергии в верхнем положении, но немного меньшей.

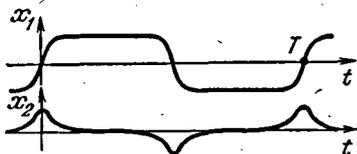


Рис. 101. Угол отклонения маятника и скорость его движения при амплитуде, близкой к  $\pi$ .

**Ответ:** См. рис. 101. Функции  $x_1(t), x_2(t)$  выражаются через эллиптический синус  $\operatorname{sn}$  и эллиптический косинус  $\operatorname{cn}$ . Когда  $E$  стремится к меньшему критическому значению, колебания маятника приближаются к гармоническим, а  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{cn}$  переходят в  $\sin$  и  $\cos$ .

**Задача 2.** С какой скоростью стремится к бесконечности период  $T$  колебаний маятника, когда энергия  $E$  стремится к верхнему критическому значению  $E_1$ ?

**Ответ.** С логарифмической ( $\sim C \ln(E_1 - E)$ ).

**Указание.** См. формулу (4).

**Задача 3.** Нарисовать фазовые кривые систем с потенциальной энергией

$$U(x) = \pm x \sin x, \pm \frac{\sin x}{x}, \pm \sin x^2.$$

**Задача 4.** Нарисовать фазовые кривые уравнения Ньютона с силовым полем

$$F(x) = \pm x \sin x, \pm \frac{\sin x}{x}, \pm \sin x^2.$$

**10. Малые возмущения консервативной системы.** Исследовав движения консервативной системы, мы можем изучать близкие системы общего вида при помощи теоремы о дифференцируемости по параметру (ср. § 9,5). При этом мы встретим качественно новые и весьма важные в приложениях явления — так называемые *автоколебания*.

**Задача 1.** Исследовать фазовые кривые системы, близкой к системе уравнений малых колебаний маятника:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad \varepsilon \ll 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2.$$

**Решение.** При  $\varepsilon=0$  получаем уравнения малых колебаний маятника. По теореме о дифференцируемости по параметру при малых  $\varepsilon$  решение (на конечном интервале времени) отличается поправкой порядка  $\varepsilon$  от гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(t - t_0), \\ x_2 &= -A \sin(t - t_0). \end{aligned}$$

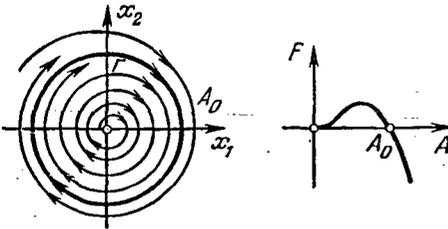


Рис. 102. Фазовые кривые уравнения Ван-дер-Поля и приращение энергии за один оборот вокруг начала координат.

Следовательно, при достаточно малом  $\varepsilon = \varepsilon(T)$  фазовая точка остается вблизи окружности радиуса  $A$  в течение интервала времени  $T$ .

В отличие от консервативного случая ( $\varepsilon=0$ ), при  $\varepsilon \neq 0$  фазовая кривая не обязательно замкнута: она может иметь вид спирали (рис. 102), у которой расстояние между соседними витками мало (порядка  $\varepsilon$ ). Чтобы узнать, приближается ли фазовая кривая к началу координат или уходит от него, рассмотрим приращение энергии  $E = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$  за один оборот вокруг начала координат. Нам будет особенно интересно знак этого приращения: на раскручивающейся спирали приращение положительно, на сжимающейся — отрицательно, а на цикле равно 0. Выведем приближенную формулу (5) для приращения энергии.

Производную энергии по направлению нашего векторного поля легко вычислить: она пропорциональна  $\varepsilon$  и равна

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon(x_1 f_1 + x_2 f_2).$$

Для вычисления приращения энергии за оборот следовало бы проинтегрировать эту функцию вдоль витка фазовой траектории, которая, к сожалению, нам неизвестна. Но мы уже выяснили, что этот виток близок к окружности. Поэтому интеграл можно с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  брать по окружности  $S$  радиуса  $A$ :

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A \cos t, -A \sin t) dt + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя вычисленное значение  $\dot{E}$ , находим \*)

$$\Delta E = \varepsilon F(A) + O(\varepsilon^2), \quad (5)$$

где

$$F(A) = \oint f_1 dx_2 - f_2 dx_1$$

(интеграл берется по окружности радиуса  $A$  против часовой стрелки).

\*) Мы пользуемся тем, что  $dx_1 = x_2 dt$  и  $dx_2 = -x_1 dt$  вдоль  $S$ .

Вычислив функцию  $F$ , мы сможем исследовать поведение фазовых кривых. Если функция  $F$  положительна, то приращение энергии  $\Delta E$  за оборот также положительно (при малых положительных  $\epsilon$ ). В этом случае фазовая кривая — раскручивающаяся спираль; система совершает нарастающие колебания.

Если  $F < 0$ , то  $\Delta E < 0$  и фазовая спираль закручивается. В этом случае колебания затухают.

Может случиться, что функция  $F$  меняет знак (рис. 102). Пусть  $A_0$  — простой корень функции  $F$ . Тогда при малых  $\epsilon$  уравнению

$$\Delta E(x_1, x_2) = 0$$

удовлетворяет замкнутая кривая  $\Gamma$  на фазовой плоскости, близкая к окружности радиуса  $A_0$  (это следует из теоремы о неявной функции).

Очевидно, кривая  $\Gamma$  является замкнутой фазовой кривой — предельным циклом нашей системы.

Будут ли близкие фазовые кривые наматываться на цикл или сматываться с него, определяется знаком производной  $F' = dF/dA|_{A=A_0}$ . Если  $\epsilon F' > 0$ , то цикл *неустойчив*, а если  $\epsilon F' < 0$  *устойчив*. Действительно, в первом случае приращение энергии за оборот больше нуля, если фазовая кривая находится вне цикла, и меньше нуля, если внутри; поэтому фазовая кривая всегда удаляется от цикла. Во втором же случае фазовые кривые приближаются к циклу и изнутри, и снаружи, как на рис. 102.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение  $\ddot{x} = -x + \epsilon \dot{x}(1 - x^2)$  (называемое *уравнением Ван-дер-Поля*). Вычисляя интеграл (5) при  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = x_2(1 - x_1^2)$ , получаем

$$F(A) = \pi \left( A^2 - \frac{A^4}{4} \right).$$

Эта функция имеет простой корень  $A_0 = 2$  (рис. 102), причем при меньших  $A$  она положительна, а при больших — отрицательна. Поэтому уравнение Ван-дер-Поля имеет при малых  $\epsilon$  устойчивый предельный цикл, близкий к окружности  $x^2 + \dot{x}^2 = 4$  на фазовой плоскости.

Сравним движения исходной консервативной системы ( $\epsilon = 0$ ) с тем, что происходит при  $\epsilon \neq 0$ . В консервативной системе возможны колебания с любой амплитудой (все фазовые кривые замкнуты). Амплитуда определяется здесь начальными условиями.

В неконсервативной системе возможны качественно иные явления, например устойчивый предельный цикл. В этом случае при весьма разных начальных условиях устанавливается периодическое колебание одной и той же, вполне определенной амплитуды. Этот установившийся режим называется режимом автоколебаний.

**Задача\* 2.** Исследовать автоколебательные режимы движения маятника с малым трением под действием постоянного вращающего момента  $M$ :

$$\ddot{x} + \sin x + \epsilon \dot{x} = M.$$

**Указание.** Эта задача подробно разобрана для любых  $\epsilon$  и  $M$  в книге: А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959, гл. 7.

## Глава 3

### Линейные системы

Линейные уравнения — едва ли не единственный большой класс дифференциальных уравнений, для которых имеется достаточно полная теория. Эта теория, являющаяся, в сущности, ветвью линейной алгебры, позволяет полностью решить все линейные автономные уравнения.

Теория линейных уравнений полезна в качестве первого приближения и при исследовании нелинейных задач. Например, она позволяет исследовать устойчивость положений равновесия и топологический тип особых точек векторных полей в случаях общего положения.

#### § 13. Линейные задачи

Рассмотрим вначале два примера ситуаций, где возникают линейные уравнения.

**1. Пример: линеаризация.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное векторным полем  $\mathbf{v}$  в фазовом пространстве. Мы уже знаем, что в окрестности неособой точки ( $\mathbf{v} \neq 0$ ) поле устроено просто: оно выпрямляется диффеоморфизмом. Рассмотрим теперь устройство поля в окрестности особой точки, т. е. точки, где вектор поля обращается в 0. Такая точка  $x_0$  является стационарным решением нашего уравнения. Если уравнение описывает какой-либо физический процесс, то  $x_0$  — стационарное состояние процесса, его «положение равновесия». Поэтому исследование окрестности особой точки — это изучение того, как будет развиваться процесс при малом отклонении начальных условий от равновесных (пример: верхнее и нижнее положения равновесия маятника).

При исследовании векторного поля в окрестности точки  $x_0$ , где вектор поля равен 0, естественно разложить поле в окрестности этой точки в ряд по формуле Тейлора. Первый член ряда Тейлора — линейный. Отбрасывание остальных членов называется *линеаризацией*. Линеаризованное векторное поле можно рассмат-

ривать как пример векторного поля с особой точкой  $x_0$ . С другой стороны, можно надеяться, что поведение решений исходного и линеаризованного уравнений близко (так как при линеаризации отбрасываются малые высшего порядка). Конечно, вопрос о связи решений исходного и линеаризованного уравнений требует специального исследования. Это исследование основывается на подробном анализе линейного уравнения, которым мы и будем вначале заниматься.

**Задача 1.** Покажите, что линеаризация — инвариантная, т. е. не зависящая от системы координат, операция.

Точнее, пусть поле  $\mathfrak{v}$  в области  $U$  задается в системе координат  $x_i$  компонентами  $v_i(x)$ . Пусть особая точка имеет координаты  $x_i = 0$ , так что  $v_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда исходное уравнение записывается в виде системы

$$\dot{x}_i = v_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Определение.** Линеаризованным уравнением называется уравнение

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{x=0}.$$

Рассмотрим касательный вектор  $\xi \in TU_0$  с компонентами  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Линеаризованное уравнение можно записать в виде

$$\dot{\xi} = A\xi,$$

где  $A$  — линейное отображение  $A: TU_0 \rightarrow TU_0$ , заданное матрицей  $a_{ij}$ .

Утверждается, что отображение  $A$  не зависит от системы координат  $x_i$ , участвовавшей в его определении.

**Задача 2.** Линеаризовать уравнение маятника  $\ddot{x} = -\sin x$  вблизи положений равновесия  $x_0 = k\pi$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

**2. Пример: однопараметрические группы линейных преобразований  $R^n$ .** Другая задача, сразу сводящаяся к линейным дифференциальным уравнениям, — это задача описания однопараметрических групп линейных преобразований \*) линейного пространства  $R^n$ .

Заметим, что касательное пространство к линейному пространству  $R^n$  в любой точке естественно отождествляется с самим линейным пространством. А именно, мы отождествляем элемент  $\dot{\phi}$  касательного пространства  $TR_x^n$ , представителем которого является кривая  $\phi: I \rightarrow R^n$ ,  $\phi(0) = x$ , с вектором

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - x}{t} \in R^n$$

самого пространства  $R^n$  (соответствие  $v \leftrightarrow \dot{\phi}$  взаимно однозначное).

Это отождествление зависит от структуры линейного пространства  $R^n$  и не сохраняется при диффеоморфизмах. Однако в линейных задачах, которыми мы будем теперь заниматься (например,

\*) Напомним, что мы включаем в определение однопараметрической группы  $\{g^t\}$  дифференцируемость  $g^t x$  по  $x$  и  $t$ .

в задаче об однопараметрических группах линейных преобразований), структура линейного пространства в  $R^n$  раз навсегда фиксирована. Поэтому мы теперь впредь до возвращения к нелинейным задачам отождествляем  $TR_x^n \equiv R^n$ .

Пусть  $\{g^t, t \in R\}$  — однопараметрическая группа линейных преобразований. Рассмотрим траекторию  $\varphi: R \rightarrow R^n$  точки  $x_0 \in R^n$ .

Задача 1. Докажите, что  $\varphi(t)$  — решение уравнения

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

с начальным условием  $\varphi(0) = x$ , где  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор ( $\equiv R$ -эндоморфизм), заданный соотношением

$$Ax = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t x), \quad \forall x \in R^n.$$

Указание. См. § 3, п. 3.

Уравнение (1) называется *линейным*. Таким образом, для описания всех однопараметрических групп линейных преобразований достаточно исследовать решения линейных уравнений (1).

Мы увидим далее, что соответствие между однопараметрическими группами  $\{g^t\}$  линейных преобразований и линейными уравнениями (1) взаимно однозначно: каждый оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$  задает однопараметрическую группу  $\{g^t\}$ .

Пример 1. Пусть  $n=1$ ,  $A$  — умножение на число  $k$ . Тогда  $g^t$  — растяжение в  $e^{kt}$  раз.

Задача 2. Найти поле скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через точку  $O$ , с угловой скоростью  $\omega$ .

**3. Линейное уравнение.** Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор в вещественном  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ .

**Определение.** *Линейным уравнением* называется уравнение с фазовым пространством  $R^n$ , заданное векторным полем  $v(x) = Ax$ :

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

Полный титул уравнения (1): *система  $n$  линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.*

Если в  $R^n$  фиксирована система (линейных) координат  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , то уравнение (1) записывается в виде системы  $n$  уравнений:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, \dots, n,$$

где  $(a_{ij})$  — матрица оператора  $A$  в рассматриваемой системе координат. Матрица эта называется *матрицей системы*.

Решение уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$  дается в случае  $n=1$  экспонентой

$$\varphi(t) = e^{At} x_0.$$

Оказывается, и в общем случае решение дается той же формулой: нужно только объяснить, что называется экспонентой линейного оператора. Этой задачей мы теперь и займемся.

#### § 14. Показательная функция

Функцию  $e^A$ ,  $A \in R$ , можно определить любым из двух эквивалентных способов:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (1)$$

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( E + \frac{A}{n} \right)^n \quad (2)$$

(где  $E$  означает единицу).

Пусть теперь  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор. Чтобы определить  $e^A$ , прежде всего определим понятие предела последовательности линейных операторов.

1. **Норма оператора.** Зафиксируем в  $R^n$  скалярное произведение и будем обозначать через  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  ( $x \in R^n$ ) корень из скалярного квадрата  $x$ .

Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор.

**Определение.** *Нормой*  $A$  называется число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Геометрически  $\|A\|$  означает наибольший «коэффициент растяжения» преобразования  $A$ .

**Задача 1.** Докажите, что  $0 \leq \|A\| < \infty$ .

**Указание.**  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ , сфера компактна, а функция  $\|Ax\|$  непрерывна.

**Задача 2.** Докажите, что

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

где  $A$  и  $B: R^n \rightarrow R^n$  — линейные операторы,  $\lambda \in R$  — число.

**Задача 3.** Пусть  $(a_{ij})$  — матрица оператора  $A$  в ортонормированном базисе. Покажите, что

$$\max_j \sum_i a_{ij}^2 \leq \|A\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

**Указание.** См. Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, ГИТТЛ, 1956, § 53.

2. **Метрическое пространство операторов.** Множество  $L$  всех линейных операторов  $A: R^n \rightarrow R^n$  само является линейным

пространством над полем вещественных чисел (по определению,  $(A + \lambda B)x = Ax + \lambda Bx$ ).

**Задача 1.** Найти размерность этого линейного пространства  $L$ .

*Ответ.*  $n^2$ .

**Указание.** Оператор задается своей матрицей.

Определим расстояние между двумя операторами как норму их разности  $\rho(A, B) = \|A - B\|$ .

**Теорема.** *Пространство линейных операторов  $L$  с метрикой  $\rho$  является полным метрическим пространством\*).*

Проверим, что  $\rho$  — метрика.

По определению  $\rho > 0$ , если  $A \neq B$ ,  $\rho(A, A) = 0$ ,  $\rho(B, A) = \rho(A, B)$ . Неравенство треугольника  $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$  вытекает из неравенства  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  задачи 2 п. 1 ( $X = A - B$ ,  $Y = B - C$ ). Итак, метрика  $\rho$  превращает  $L$  в метрическое пространство. Его полнота тоже очевидна.

**3. Доказательство полноты.** Пусть  $A_i$  — последовательность Коши, т. е. для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $N(\varepsilon)$  такое, что  $\rho(A_m, A_k) < \varepsilon$  при  $m, k > N$ . Пусть  $x \in R^n$ . Составим последовательность точек  $x_i \in R^n$ ,  $x_i = A_i x$ . Покажем, что  $x_i$  — последовательность Коши в пространстве  $R^n$ , снабженном евклидовой метрикой  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Действительно, по определению нормы оператора при  $m, n > N$

$$\|x_m - x_k\| \leq \rho(A_m, A_k) \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Поскольку  $\|x\|$  — фиксированное (не зависящее от  $m, k$ ) число, отсюда следует, что  $x_i$  — последовательность Коши. Пространство  $R^n$  полно. Поэтому существует предел

$$y = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \in R^n.$$

Заметим, что  $\|x_k - y\| \leq \varepsilon \|x\|$  при  $k > N(\varepsilon)$ , причем  $N(\varepsilon)$  — то же, что и выше, не зависящее от  $x$  число.

Точка  $y$  зависит от точки  $x$  линейно (предел суммы равен сумме пределов). Мы получаем линейный оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$ ,  $Ax = y$ ,  $A \in L$ .

Мы видим, что при  $k > N(\varepsilon)$

$$\rho(A_k, A) = \|A_k - A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x_k - y\|}{\|x\|} \leq \varepsilon.$$

Значит,  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  и пространство  $L$  полно.

\* Метрическим пространством называется пара, состоящая из множества  $M$  и функции  $\rho: M \times M \rightarrow R$ , называемой метрикой, если

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $(\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in M$ ;
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$ .

Последовательность  $x_i$  точек метрического пространства  $M$  называется *последовательностью Коши*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \rho(x_i, x_j) < \varepsilon \quad \forall i, j > N$ . Последовательность  $x_i$  *сходится* к точке  $x$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \rho(x, x_i) < \varepsilon \quad \forall i > N$ . Пространство называется *полным*, если всякая последовательность Коши сходится.

**Задача 1.** Докажите, что последовательность операторов  $A_i$  сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность их матриц в фиксированном базисе.

Выведите отсюда другое доказательство полноты.

**4. Ряды.** Пусть дано вещественное линейное пространство  $M$ , превращенное в метрическое полное пространство метрикой  $\rho$  такой, что расстояние между двумя точками  $M$  зависит лишь от их разности, причем  $\rho(\lambda x, 0) = |\lambda| \rho(x, 0)$  ( $x \in M, \lambda \in \mathbb{R}$ ). Такое пространство называется *нормированным*, а функция  $\rho(x, 0)$  называется нормой  $x$  и обозначается  $\|x\|$ .

**Пример 1.** Евклидово пространство  $M = \mathbb{R}^n$  с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y)(x - y)}.$$

**Пример 2.** Пространство  $L$  линейных операторов  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  с метрикой  $\rho(A, B) = \|A - B\|$ .

Мы будем обозначать расстояние между элементами  $A$  и  $B$  из  $M$  через  $\|A - B\|$ .

Поскольку элементы  $M$  можно складывать и умножать на числа и последовательности Коши в  $M$  имеют пределы, теория рядов вида

$$A_1 + A_2 + \dots, \quad A_i \in M,$$

буквально повторяет теорию числовых рядов.

Теория функциональных рядов также непосредственно переносится на функции со значениями в  $M$ .

**Задача 1.** Докажите следующие две теоремы:

**Признак Вейерштрасса.** Если ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$  функций  $f_i: X \rightarrow M$  мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\|f_i\| \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

то он сходится абсолютно и равномерно на  $X$ .

**Дифференцирование ряда.** Если ряд  $\sum f_i$  функций  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow M$  сходится и ряд из производных  $\frac{df_i}{dt}$  сходится равномерно,

то он сходится к производной  $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} f_i$  ( $t$  — координата на прямой  $\mathbb{R}$ ).

**Указание.** Доказательство для случая  $M = \mathbb{R}$  имеется в курсе анализа. На общий случай оно переносится дословно.

**5. Определение экспоненты  $e^A$ .** Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейный оператор.

Определение. Экспонентой  $e^A$  оператора  $A$  называется линейный оператор из  $R^n$  в  $R^n$

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(где  $E$  — тождественный оператор,  $E x = x$ ).

Теорема. Ряд  $e^A$  сходится при любом  $A$  равномерно на каждом множестве  $X = \{A: \|A\| \leq a\}$ ,  $a \in R$ .

Доказательство. Пусть  $\|A\| \leq a$ . Тогда наш ряд мажорируется числовым рядом  $1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots$ , сходящимся к  $e^a$ . По признаку Вейерштрасса ряд  $e^A$  равномерно сходится при  $\|A\| \leq a$ .

Задача 1. Вычислить матрицу  $e^{At}$ , если матрица  $A$  имеет вид

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Пример. Рассмотрим множество многочленов степени меньше  $n$  от одного переменного  $x$  с вещественными коэффициентами.

Это множество имеет естественную структуру вещественного линейного пространства: многочлены можно складывать и умножать на числа.

Задача 1. Найти размерность пространства многочленов степени меньше  $n$ .

Ответ.  $n$ ; базис, например,  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ .

Будем обозначать пространство многочленов степени меньше  $n$  через  $R^n$  (\*). Производная многочлена степени меньше  $n$  есть многочлен степени меньше  $n$ . Возникает отображение

$$A: R^n \rightarrow R^n, \quad Ap = \frac{dp}{dx}.$$

Задача 2. Доказать, что  $A$  — линейный оператор; найти его ядро и образ.

Ответ.  $\text{Ker } A = R^1$ ,  $\text{Im } A = R^{n-1}$ .

С другой стороны, обозначим через  $H^t$  ( $t \in R$ ) оператор сдвига на  $t$ , переводящий многочлен  $p(x)$  в  $p(x+t)$ .

Задача 3. Доказать, что  $H^t: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор. Найти его ядро и образ.

Ответ.  $\text{Ker } H^t = 0$ ,  $\text{Im } H^t = R^n$ .

Наконец, составим оператор  $e^{At}$ .

\*) Таким образом, мы отождествляем пространство многочленов, в котором выбран указанный выше базис, с изоморфным ему координатным пространством  $R^n$ .

Теорема.  $e^{At} = H^t$ .

Доказательство. В курсе анализа эта теорема называется формулой Тейлора для многочленов:

$$p(x+t) = p(x) + \frac{t}{1!} \frac{dp}{dx} + \frac{t^2}{2!} \frac{d^2p}{dx^2} + \dots$$

7. Экспонента диагонального оператора. Пусть матрица оператора  $A$  диагональна, с диагональными элементами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Легко видеть, что матрица оператора  $e^A$  также диагональна, с диагональными элементами  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

Определение. Оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$  называется *диагональным*, если его матрица в каком-нибудь базисе диагональна. Такой базис называется *собственным*.

Задача 1. Привести пример недиагонального оператора.

Задача 2. Докажите, что собственные числа диагонального оператора  $A$  вещественны.

Задача 3. Если все  $n$  собственных чисел оператора  $A: R^n \rightarrow R^n$  вещественны и различны, то он диагонален.

Пусть  $A$  — диагональный оператор. Тогда вычисление  $e^A$  проще всего проводить в собственном базисе.

Пример 1. Пусть матрица оператора  $A$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисе  $e_1, e_2$ . Поскольку собственные числа  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$  вещественны и различны, оператор  $A$  диагонален. Собственный базис  $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2$ . Матрица оператора  $A$  в собственном базисе есть

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица оператора  $e^A$  в собственном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, в исходном базисе матрица оператора  $e^A$  имеет вид

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

8. Экспонента нильпотентного оператора.

Определение. Оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$  называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна 0.

Задача 1. Докажите, что оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

нильпотентный. Вообще, если все элементы матрицы оператора на диагонали и ниже равны 0, то оператор нильпотентный.

**Задача 2.** Докажите, что оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$  в пространстве многочленов степени меньше  $n$  нильпотентный.

*Если оператор  $A$  нильпотентный, то ряд для  $e^A$  обрывается, т. е. сводится к конечной сумме.*

**Задача 3.** Вычислить  $e^{tA}$  ( $t \in R$ ), где  $A: R^n \rightarrow R^n$  — оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(1 только над главной диагональю).

**Указание.** Один из способов решения этой задачи — формула Тейлора для многочленов. Оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$  имеет матрицу указанного вида в некотором базисе (каком?). Решение см. в § 25.

**9. Квазимногочлены.** Пусть  $\lambda$  — вещественное число. *Квазимногочленом с показателем  $\lambda$*  называется произведение  $e^{\lambda x} p(x)$ , где  $p$  — многочлен. Степень многочлена  $p$  называется степенью квазимногочлена. Зафиксируем значение показателя  $\lambda$ .

**Задача 1.** Докажите, что множество всех квазимногочленов степени меньше  $n$  — линейное пространство. Найдите его размерность.

*Ответ.  $n$ .* Базис, например,  $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{n-1}e^{\lambda x}$ .

**Замечание.** В понятии квазимногочлена, как и в понятии многочлена, кроется некоторая двусмысленность. Можно понимать (квази-)многочлен как *выражение*, составленное из знаков и букв; в таком случае решение предыдущей задачи очевидно. С другой стороны, можно понимать под (квази-)многочленом *функцию*, т. е. отображение  $f: R \rightarrow R$ .

В действительности оба понимания равносильны (когда коэффициенты многочленов вещественные или комплексные числа; мы сейчас рассматриваем (квази-)многочлены с вещественными коэффициентами).

**Задача 2.** Докажите, что каждая функция  $f: R \rightarrow R$ , которую можно записать в виде квазимногочлена, записывается в виде квазимногочлена единственным образом.

**Указание.** Достаточно доказать, что соотношение  $e^{\lambda x} p(x) \equiv 0$  влечет равенство нулю всех коэффициентов многочлена  $p(x)$ .

Обозначим  $n$ -мерное линейное пространство квазимногочленов степени меньше  $n$  с показателем  $\lambda$  через  $R^n$ .

**Теорема.** Оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$  — линейный оператор  $R^n \rightarrow R^n$ , и при любом  $t \in R$

$$e^{t \frac{d}{dx}} = H^t, \quad (3)$$

где  $H^t: R^n \rightarrow R^n$  — оператор сдвига на  $t$  (т. е.  $(H^t f)(x) = f(x+t)$ ).

Доказательство. Мы должны доказать прежде всего, что производная и сдвиг квазимногочлена степени меньше  $n$  с показателем  $\lambda$  суть снова квазимногочлены степени меньше  $n$  с показателем  $\lambda$ .

Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{\lambda x} p(x)) &= \lambda e^{\lambda x} p(x) + e^{\lambda x} p'(x), \\ e^{\lambda(x+t)} p(x+t) &= e^{\lambda x} (e^{\lambda t} p(x+t)).\end{aligned}$$

Линейность дифференцирования и сдвига сомнений не вызывает. Остается заметить, что ряд Тейлора для квазимногочлена абсолютно сходится на всей прямой (так как абсолютно сходятся ряды Тейлора для  $e^{\lambda x}$  и для  $p(x)$ ), — это и выражает формула (3).

Задача 3. Вычислить матрицу оператора  $e^{At}$ , если матрица  $A$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(на диагонали  $\lambda$ , над диагональю 1, остальные 0). Например, вычислить

$$\exp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание. Именно такой вид имеет матрица оператора дифференцирования в пространстве квазимногочленов (в каком базисе?). Решение см. в § 25.

## § 15. Свойства экспоненты

Установим теперь ряд свойств оператора  $e^A: R^n \rightarrow R^n$ ; эти свойства позволят нам использовать  $e^A$  для решения линейных дифференциальных уравнений.

1. Групповое свойство. Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор.

**Теорема.** Семейство линейных операторов  $e^{tA}: R^n \rightarrow R^n$ ,  $t \in R$ , является однопараметрической группой линейных преобразований  $R^n$ .

Доказательство. Поскольку мы уже знаем, что  $e^{tA}$  — линейный оператор, нужно только проверить, что

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} \quad (1)$$

и что  $e^{tA}$  дифференцируемо зависит от  $t$ . Мы докажем, что

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}, \quad (2)$$

как и положено экспоненте.

Чтобы доказать групповое свойство (1), перемножим сначала формальные ряды по степеням  $A$ :

$$\begin{aligned} (E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots) (E + sA + \frac{s^2}{2} A^2 + \dots) &= \\ &= E + (t+s) A + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2}\right) A^2 + \dots \end{aligned}$$

Коэффициент при  $A^k$  в произведении будет равен  $(t+s)^k/(k!)$ , так как формула (1) верна в случае числовых рядов ( $A \in R$ ). Остается обосновать законность почленного умножения. Это можно сделать так же, как доказывается законность почленного умножения абсолютно сходящихся числовых рядов (ряды для  $e^{tA}$  и  $e^{sA}$  сходятся абсолютно, так как ряды  $e^{t|a|}$ ,  $e^{s|a|}$ , где  $a = \|A\|$ , сходятся). Можно и прямо свести доказательство к числовому случаю.

*Лемма.* Пусть  $p \in R[z_1, \dots, z_N]$  — многочлен с неотрицательными коэффициентами от переменных  $z_1, \dots, z_N$ . Пусть  $A_1, \dots, A_N: R^n \rightarrow R^n$  — линейные операторы. Тогда

$$\|p(A_1, \dots, A_N)\| \leq p(\|A_1\|, \dots, \|A_N\|).$$

*Доказательство.* Это вытекает из неравенств

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|.$$

Лемма доказана.

Обозначим через  $S_m(A)$  частную сумму ряда для  $e^A$ :

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}.$$

$S_m$  — многочлен с неотрицательными коэффициентами относительно  $A$ . Мы должны доказать, что разность

$$\Delta_m = S_m(tA) S_m(sA) - S_m((t+s)A)$$

стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ .

Заметим, что  $\Delta_m$  — это многочлен с неотрицательными коэффициентами относительно  $sA$  и  $tA$ . Действительно, члены степени не выше  $m$  по  $A$  в произведении рядов все получаются перемножением членов степени не выше  $m$  в рядах-сомножителях. Далее,  $S_m((s+t)A)$  — частная сумма ряда-произведения. Поэтому  $\Delta_m$  — это сумма всех членов степени выше  $m$  по  $A$  в произведении  $S_m(tA) S_m(sA)$ . Но все коэффициенты произведения многочленов с неотрицательными коэффициентами неотрицательны.

По лемме  $\|\Delta_m(tA, sA)\| \leq \Delta_m(\|tA\|, \|sA\|)$ . Обозначим неотрицательные числа  $\|tA\|, \|sA\|$  через  $\tau, \sigma$ . Тогда

$$\Delta_m(\tau, \sigma) = S_m(\tau) S_m(\sigma) - S_m(\tau + \sigma).$$

Поскольку  $e^\tau e^\sigma = e^{\tau+\sigma}$ , правая часть стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ . Итак,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m(tA, sA) = 0$  и соотношение (1) доказано.

Для доказательства соотношения (2) продифференцируем ряд  $e^{At}$  по  $t$  формально; получим ряд из производных

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любой области  $\|A\| \leq a$ ,  $|t| \leq T$ , так же как и исходный ряд. Поэтому производная суммы ряда существует и равна сумме ряда из производных. Теорема доказана.

Задача 1. Верно ли, что  $e^{A+B} = e^A e^B$ ?

Ответ. Нет.

Задача 2. Докажите, что  $\det e^A \neq 0$ .

Указание.  $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ .

Задача 3. Докажите, что если оператор  $A$  в евклидовом пространстве кососимметрический, то оператор  $e^A$  — ортогональный.

**2. Основная теорема теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами.** Из доказанной теоремы непосредственно вытекает формула для решения линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n. \quad (3)$$

Теорема. Решение уравнения (3) с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$  есть

$$\varphi(t) = e^{tA} x_0, \quad t \in R. \quad (4)$$

Доказательство. Согласно формуле дифференцирования (2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = Ae^{tA} x_0 = A\varphi(t).$$

Итак,  $\varphi$  — решение. Поскольку  $e^0 = E$ ,  $\varphi(0) = x_0$ . Теорема доказана, так как по теореме единственности всякое решение в своей области определения совпадает с решением (4).

**3. Общий вид однопараметрических групп линейных преобразований пространства  $R^n$ .**

Теорема. Пусть  $\{g^t: R^n \rightarrow R^n\}$  — однопараметрическая группа линейных преобразований. Тогда существует линейный оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$  такой, что  $g^t = e^{At}$ .

Доказательство. Положим

$$A = \left. \frac{dg^t}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^t - E}{t}.$$

Мы уже доказали (см. стр. 24, 88), что траектория  $\varphi(t) = g^t x_0$  — это решение уравнения (3) с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$ . Согласно (4)  $g^t x_0 = e^{tA} x_0$ , что и требовалось.

Оператор  $A$  называют производящим оператором группы  $\{g^t\}$ .

Задача 1. Докажите, что производящий оператор определен группой однозначно.

Замечание. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между линейными дифференциальными уравнениями (3) и их фазовыми потоками  $\{g^t\}$ ; при этом фазовый поток состоит из линейных диффеоморфизмов.

4. Второе определение экспоненты.

Теорема. Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор. Тогда

$$e^A = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( E + \frac{A}{m} \right)^m. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$e^A - \left( E + \frac{A}{m} \right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k} \right) A^k.$$

(Ряд сходится, так как  $\left( E + \frac{A}{m} \right)^m$  — многочлен, а ряд  $e^A$  сходится.) Заметим, что коэффициенты разности неотрицательны:

$$\frac{1}{k!} \geq \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m \cdot m \cdot \dots \cdot m} \frac{1}{k!}.$$

Поэтому, полагая  $\|A\| = a$ , находим

$$\|e^A - \left( E + \frac{A}{m} \right)^m\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k} \right) a^k = e^a - \left( 1 + \frac{a}{m} \right)^m.$$

Последняя величина стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ , и теорема доказана.

5. Пример: формула Эйлера для  $e^z$ . Пусть  $C$  — комплексная прямая. Мы можем рассматривать ее как вещественную плоскость  $R^2$ , а умножение на комплексное число  $z$  — как линейный оператор  $A: R^2 \rightarrow R^2$ . Оператор  $A$  есть поворот на угол  $\arg z$  с растяжением в  $|z|$  раз.

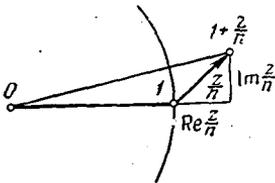


Рис. 103. Комплексное число  $1 + \frac{z}{n}$ .

Задача 1. Найти матрицу умножения на  $z = u + iv$  в базисе  $e_1 = 1, e_2 = i$ .

$$\text{Ответ. } \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь  $e^A$ . По формуле (5) надо вначале составить оператор  $E + \frac{A}{n}$ .

Это — умножение на число  $1 + \frac{z}{n}$ , т. е. поворот на угол  $\arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right)$  с растяжением в  $\left| 1 + \frac{z}{n} \right|$  раз (рис. 103).

Задача 2. Докажите, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right) &= \operatorname{Im} \frac{z}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right), \\ \left| 1 + \frac{z}{n} \right| &= 1 + \operatorname{Re} \frac{z}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Оператор  $\left( E + \frac{A}{n} \right)^n$  есть поворот на угол  $n \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right)$  с растяжением в  $\left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n$  раз. Из формул (6) находим пределы угла поворота и коэффициента растяжения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right) &= \operatorname{Im} z, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= e^{\operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Тем самым доказана

**Теорема.** Пусть  $z = u + iv$  — комплексное число,  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — оператор умножения на  $z$ . Тогда  $e^A$  есть оператор умножения на комплексное число  $e^z = (\cos v + i \sin v)$ .

**Определение.** Комплексное число  $e^z = (\cos v + i \sin v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n$  называется экспонентой комплексного числа  $z = u + iv$  и обозначается

$$e^z = e^u (\cos v + i \sin v). \quad (7)$$

**Замечание.** Если не отличать комплексное число от оператора умножения на это число, то определение превращается в теорему, поскольку экспонента оператора уже определена.

Задача 3. Найти  $e^0, e^1, e^i, e^{\pi i}, e^{2\pi i}$ .

Задача 4. Докажите, что  $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$  ( $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$ ).

**Замечание.** Поскольку экспонента определяется также рядом, имеем

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C} \quad (8)$$

(ряд сходится абсолютно и равномерно в каждом круге  $|z| \leq a$ ).

Задача 5. Сравнивая этот ряд с формулой Эйлера (7), вывести ряды Тейлора для  $\sin v, \cos v$ .

**Замечание.** Обратное, зная ряды Тейлора  $\sin v, \cos v, e^u$ , можно было бы доказать формулу (7), приняв формулу (8) за определение  $e^z$ .

**6. Ломаные Эйлера.** Соединяя формулы (4) и (5), мы получаем метод приближенного решения дифференциального уравнения (3), называемый *методом ломаных Эйлера*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с линейным фазовым пространством  $\mathbb{R}^n$ , заданное векторным полем  $v$ . Чтобы

найти решение  $\varphi$  уравнения  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in R^n$ , с начальным условием  $x_0$ , поступим следующим образом (рис. 104). Скорость в точке  $x_0$  нам известна: это  $v(x_0)$ . Будем двигаться с постоянной скоростью  $v(x_0)$  из  $x_0$  в течение времени  $\Delta t = t/N$ . Попадём в точку  $x_1 = x_0 + v(x_0) \Delta t$ . В течение следующего отрезка времени  $\Delta t$  будем двигаться со скоростью  $v(x_1)$ , и т. д.:

$$x_{k+1} = x_k + v(x_k) \Delta t, \\ k = 0, 1, \dots, N-1.$$

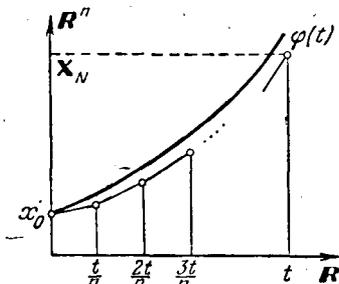


Рис. 104. Ломаная Эйлера.

Обозначим через  $X_N(t)$  последнюю точку,  $x_N$ . Заметим, что график, изображающий движение с кусочно-постоянной скоростью, — это ломаная линия из  $N$  звеньев в расширенном фазовом пространстве  $R \times R^n$ . Эта ломаная и называется ломаной Эйлера. Естественно ожидать, что при  $N \rightarrow \infty$  последовательность ломаных Эйлера сходится к интегральной кривой, так что последняя точка  $X_N$  будет при больших  $N$  близка к значению решения  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(0) = x_0$  в точке  $t$ .

Теорема. Для линейного уравнения (3)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N(t) = \varphi(t).$$

Доказательство. По построению ломаной Эйлера при  $v(x) = Ax$  имеем

$$X_N = \left( E + \frac{At}{N} \right)^N x_0.$$

Поэтому  $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = e^{tA} x_0$  (см. (5)). Итак,  $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = \varphi(t)$  (см. (4)).

Задача 1. Докажите, что не только конец ломаной Эйлера стремится к  $\varphi(t)$ , но и вся последовательность кусочно-линейных функций  $\varphi_n: I \rightarrow R^n$ , графиками которых служат ломаные Эйлера, равномерно сходится к решению  $\varphi$  на отрезке  $[0, t]$ .

Замечание. Ломаная Эйлера в общем случае (когда векторное поле  $v$  зависит от  $x$  нелинейно) также может быть записана в виде

$$X_N = \left( E + \frac{tA}{N} \right)^N x_0,$$

где  $A$  — нелинейный оператор, переводящий точку  $x$  в точку  $v(x)$ . В дальнейшем мы увидим, что и в этом случае последовательность ломаных Эйлера сходится к решению, по крайней мере при достаточно малых  $|t|$  (§ 31,9). Таким образом, выра-

жение (4), в котором экспонента определена формулой (5), дает решение вообще всех дифференциальных уравнений \*).

Эйлера теория экспоненты, единообразная во всех своих вариантах от определения числа  $e$ , формулы Эйлера для  $e^z$ , формулы Тейлора, формулы (4) для решения линейных уравнений и до метода ломаных Эйлера, имеет много других применений, выходящих за рамки нашего курса.

## § 16. Определитель экспоненты

Если оператор  $A$  задан своей матрицей, вычисление матрицы оператора  $e^A$  может требовать длинных выкладок. Однако определитель матрицы  $e^A$  можно, как мы сейчас увидим, вычислить очень легко.

1. Определитель оператора. Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор.

Определение. *Определителем* оператора  $A$  называется определитель матрицы оператора  $A$  в каком-нибудь базисе  $e_1, \dots, e_n$ ; обозначение:  $\det A$ .

Определитель матрицы оператора  $A$  не зависит от базиса. Действительно, если  $(A)$  — матрица оператора  $A$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , то матрицей оператора  $A$  в другом базисе будет  $(B)(A)(B^{-1})$ ; и

$$\det (B)(A)(B^{-1}) = \det (A).$$

*Определитель матрицы — это ориентированный объем параллелепипеда\*\*), ребра которого задаются столбцами матрицы.*

Например, при  $n=2$  (рис. 105) определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

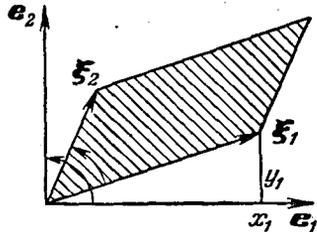


Рис. 105. Определитель матрицы равен ориентированной площади параллелограмма, натянутого на столбцы.

есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\xi_1, \xi_2$  с компонентами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , взятая со знаком плюс, если

\*) Практически приближенно решать уравнение с помощью ломаных Эйлера неудобно, так как приходится брать очень малый шаг  $\Delta t$ , чтобы получить заданную точность. Чаще пользуются различными усовершенствованиями этого метода, в которых интегральная кривая аппроксимируется не отрезком прямой, а отрезком параболы той или иной степени. Наиболее часто используются методы Адамса, Штермера и Рунге. С ними можно познакомиться по учебникам приближенных вычислений.

\*\*) Параллелепипед с ребрами  $\xi_1, \dots, \xi_n \in R^n$  есть подмножество  $R^n$ , состоящее из всех точек вида  $x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$ . При  $n=2$  параллелепипед называется параллелограммом. Если вы знакомы с каким-либо определением объема, то легко докажете выделенное утверждение. Если же нет, то можете принять его за определение объема параллелепипеда.

упорядоченная пара векторов  $(\xi_1, \xi_2)$  задает ту же ориентацию  $R^2$ , что и базисная пара векторов  $(e_1, e_2)$ , и со знаком минус в противном случае.

Столбец с номером  $i$  в матрице оператора  $A$  в базисе  $e_1, \dots, \dots, e_n$  составлен из координат образа базисного вектора  $Ae_i$ . Поэтому *определитель оператора  $A$  — это ориентированный объем образа единичного куба (параллелепипеда с ребрами  $e_1, \dots, e_n$ ) при отображении  $A$ .*

**Задача 1.** Пусть  $\Pi$  — параллелепипед с линейно независимыми ребрами. Докажите, что отношение (ориентированного) объема образа параллелепипеда  $A\Pi$  к (ориентированному) объему  $\Pi$  не зависит от  $\Pi$  и равно  $\det A$ .

**Замечание.** Читатель, знакомый с теорией измерения объемов в  $R^n$ , может заменить  $\Pi$  любой фигурой, имеющей объем.

Итак, *определитель оператора  $A$  — это коэффициент изменения ориентированного объема: при применении  $A$  ориентированный объем любой фигуры меняется в  $\det A$  раз.* Геометрически вовсе не очевидно, что растяжение объема для всех фигур одинаково (даже в случае плоскости), ведь форма фигуры при линейном преобразовании сильно меняется.

**2. След оператора.** Следом матрицы  $A$  называется сумма ее диагональных элементов. След обозначается  $\text{Tr}$  (от английского «Trace») или  $\text{Sp}$  (от немецкого «Spur»):

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

След матрицы оператора  $A: R^n \rightarrow R^n$  не зависит от базиса, но лишь от самого оператора  $A$ .

**Задача 1.** Докажите, что след матрицы равен сумме всех  $n$  ее собственных чисел, а определитель — их произведению.

**Указание.** Примените формулу Виета к многочлену

$$\det |A - \lambda E| = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + \dots$$

Собственные числа уже не зависят от базиса. Это позволяет дать следующее

**Определение.** Следом оператора  $A$  называется след его матрицы в каком-нибудь (и тогда в любом) базисе.

**3. Связь определителя и следа.** Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор,  $\varepsilon \in R$ . Легко доказывается

**Теорема.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \text{Tr } A + O(\varepsilon^2).$$

**Доказательство.** Определитель оператора  $E + \varepsilon A$  равен произведению собственных чисел. Собственные числа оператора

$E + \varepsilon A$  (с учетом кратностей) равны  $1 + \varepsilon \lambda_i$ , где  $\lambda_i$  — собственные числа  $A$ . Поэтому

$$\det(E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2),$$

что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Ясно, что  $\varphi(\varepsilon) = \det(E + \varepsilon A)$  — многочлен относительно  $\varepsilon$ , причем  $\varphi(0) = 1$ . Нужно доказать, что  $\varphi'(0) = \text{Tr } A$ . Определим матрицу  $\|x_{ij}\|$  обозначим через  $\Delta(\{x_{ij}\})$ . По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \Delta}{\partial x_{ij}} \Big|_E \frac{dx_{ij}}{d\varepsilon},$$

где  $x_{ij}(\varepsilon)$  — элементы матрицы  $E + \varepsilon A$ . Частная производная  $\frac{\partial \Delta}{\partial x_{ij}} \Big|_E$  равна по определению  $\frac{d}{dh} \Big|_{h=0} \det(E + h e_{ij})$ , где  $e_{ij}$  — матрица, единственный ненулевой элемент которой — это 1 в  $i$ -й строке,  $j$ -м столбце. Но  $\det(E + h e_{ij}) = 1$  при  $i \neq j$  и  $1+h$ , если  $i=j$ . Итак,  $\frac{\partial \Delta}{\partial x_{ij}} \Big|_E = 0$ , если  $i \neq j$ , и 1, если  $i=j$ . Поэтому

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_{ii}}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Tr } A,$$

что и требовалось доказать.

Между прочим, мы заново доказали независимость следа от базиса.

**Следствие.** При малом изменении ребер параллелепипеда на изменение объема влияет лишь изменение каждого ребра в его собственном направлении; изменение же в направлении других ребер дает в изменение объема лишь вклад второго порядка малости.

Например, площадь параллелограмма, близкого к квадрату (рис. 106), малыми второго порядка малости отличается от площади заштрихованного прямоугольника.

Можно было бы доказать это следствие из элементарно-геометрических соображений; это привело бы к геометрическому доказательству предыдущей теоремы.

#### 4. Определитель оператора $e^A$ .

**Теорема.** Для любого линейного оператора  $A: R^n \rightarrow R^n$

$$\det e^A = e^{\text{Tr } A}.$$

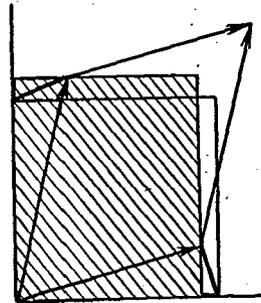


Рис. 106. Приближенное определение площади параллелограмма, близкого к квадрату.

**Доказательство.** Согласно второму определению экспоненты

$$\det e^A = \det \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left( E + \frac{A}{m} \right)^m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \det \left( E + \frac{A}{m} \right)^m \right),$$

ибо определитель матрицы — многочлен (и следовательно, непрерывная функция) от элементов. Далее, по предыдущей теореме

$$\det \left( E + \frac{A}{m} \right)^m = \left( \det \left( E + \frac{A}{m} \right) \right)^m = \left( 1 + \frac{1}{m} \operatorname{Tr} A + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right)^m, \quad m \rightarrow \infty.$$

Остается заметить, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right)^m = e^a$  для любого  $a \in \mathbf{R}$ , в частности для  $a = \operatorname{Tr} A$ .

Следствие 1. Оператор  $e^A$  невырожден.

Следствие 2. Оператор  $e^A$  сохраняет ориентацию  $\mathbf{R}^n$  (т. е.  $\det A > 0$ ).

Следствие 3 (Формула Лиувилля). Фазовый поток  $\{g^t\}$  линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

за время  $t$  меняет объем любой фигуры в  $e^{at}$  раз, где  $a = \operatorname{Tr} A$ . Действительно,  $\det g^t = \det e^{At} = e^{\operatorname{Tr} At} = e^{t \operatorname{Tr} A}$ .

В частности, отсюда вытекает

Следствие 4. Если след  $A$  равен 0, то фазовый поток уравнения (1) сохраняет объемы (т. е.  $g^t$  переводит любой параллелепипед в параллелепипед того же объема).

Действительно,  $e^0 = 1$ .

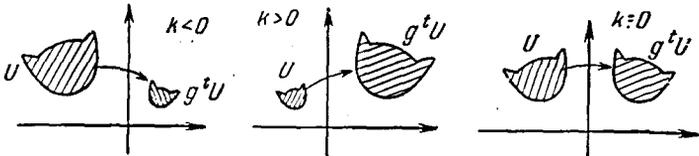


Рис. 107. Поведение площадей при преобразованиях фазового потока уравнения маятника с коэффициентом трения  $-k$ .

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение маятника с коэффициентом трения  $-k$

$$\ddot{x} = -x + k\dot{x},$$

эквивалентное системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + kx_2 \end{cases}$$

с матрицей (рис. 107)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}.$$

След этой матрицы равен  $k$ . Итак, при  $k < 0$  преобразование фазового потока  $g^t$  ( $t > 0$ ) переводит каждую область фазовой плоскости в область меньшей площади. В системе с отрицательным трением ( $k > 0$ ), наоборот, площадь области  $g^t U$ ,  $t > 0$ , больше площади  $U$ . Наконец, когда трения нет ( $k = 0$ ), фазовый поток  $g^t$  сохраняет площади (неудивительно: в этом случае, как мы уже знаем из § 6,  $g^t$  есть поворот на угол  $t$ ).

**Задача 1.** Пусть вещественные части всех собственных чисел  $A$  отрицательны. Докажите, что фазовый поток  $g^t$  уравнения (1) уменьшает объемы ( $t > 0$ ).

**Задача 2.** Докажите, что собственные числа оператора  $e^A$  равны  $e^{\lambda_i}$ , где  $\lambda_i$  — собственные числа оператора  $A$ . Выведите отсюда доказанную выше теорему.

### § 17. Практическое вычисление матрицы экспоненты — случай вещественных и различных собственных чисел

При практическом решении дифференциальных уравнений оператор  $A$  задан своей матрицей в некотором базисе и требуется явно вычислить матрицу оператора  $e^A$  в том же базисе. Начнем с простейшего случая.

**1. Диагональный оператор.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где  $A: R^n \rightarrow R^n$  — диагональный оператор. В базисе, в котором матрица оператора  $A$  диагональна, она имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_i$  — собственные числа. Матрица оператора  $e^{At}$  имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Итак, решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi_0(0) = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  имеет в этом базисе вид  $\varphi_k = e^{\lambda_k t} x_{k0}$ . К этому базису и надо перейти, если матрица оператора  $A$  дана в другом базисе.

Если все  $n$  собственных чисел оператора  $A$  вещественны и различны, то он диагонален ( $R^n$  распадается в прямую сумму одномерных инвариантных относительно  $A$  подпространств).

Поэтому решать уравнение (1) в случае, когда собственные числа оператора  $A$  вещественны и различны, нужно следующим образом:

1) составить *вековое* или *характеристическое* уравнение

$$\det |A - \lambda E| = 0;$$

2) найти его корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ; мы предполагаем, что они вещественны и различны;

3) найти собственные векторы  $\xi_1, \dots, \xi_n$  из линейных уравнений  $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$ ,  $\xi_k \neq 0$ ;

4) разложить начальное условие по собственным векторам

$$x_0 = \sum_{k=1}^n C_k \xi_k;$$

5) написать ответ

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} \xi_k.$$

В частности, получаем

Следствие. Пусть  $A$  — диагональный оператор. Тогда элементы матрицы  $e^{At}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) в любом базисе являются линейными комбинациями экспонент  $e^{\lambda_k t}$ , где  $\lambda_k$  — собственные числа матрицы  $A$ .

2. Пример. Рассмотрим маятник с трением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

Матрица оператора  $A$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}, \quad \text{Tr } A = -k, \quad \det A = 1.$$

Поэтому характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$ ; корни вещественны и различны, когда дискриминант положителен,

т. е. когда  $|k| > 2$ . Итак, при достаточно большом (по абсолютной величине) коэффициенте трения  $k$  оператор  $A$  диагонален.

Рассмотрим случай  $k > 2$ . В этом случае оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  отрицательны. В собственном базисе уравнение запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, & \lambda_1 < 0, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, & \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

Рис. 108. Фазовые кривые уравнения маятника с сильным трением в собственном базисе.

Отсюда, как в § 4, получаем решение

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0)$$

и картинку (узел, рис. 108). При  $t \rightarrow +\infty$  все решения стремятся к 0, почти все интегральные кривые касаются оси  $y_1$ ,

если  $|\lambda_2|$  больше  $|\lambda_1|$  (тогда  $y_2$  стремится к 0 быстрее  $y_1$ ). Картинка на плоскости  $(x_1, x_2)$  получается линейным преобразованием.

Пусть, например,  $k=3^{1/3}$ , так что  $\lambda_1=-1/3$ ,  $\lambda_2=-3$ .

Собственный вектор  $\xi_1$  находим из условия  $x_1=-3x_2$ ; получаем  $\xi_1=e_2-3e_1$ . Аналогично  $\xi_2=e_1-3e_2$ . Поскольку  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , фазовые кривые имеют вид, изображенный на рис. 109. Рассматривая рис. 109, мы приходим к следующему удивительному выводу: если коэффициент трения  $k$  достаточно велик ( $k > 2$ ), то маятник не совершает затухающих колебаний, а сразу идет к положению равновесия: его скорость  $x_2$  меняет знак не более одного раза.

**Задача 1.** Каким движениям маятника соответствуют фазовые кривые I, II, III на рис. 109? Нарисовать примерный график  $x(t)$ .

**Задача 2.** Исследовать движение перевернутого маятника с трением,  $\ddot{x}=x-k\dot{x}$ .

**3. Дискретный случай.** Все сказанное о показательной функции  $e^{At}$  непрерывного аргумента  $t$  относится и к показательной функции  $A^n$  дискретного аргумента  $n$ . В частности, если  $A$  — диагональный оператор, то для вычисления  $A^n$  удобно перейти к диагональному базису.

**Пример.** Последовательность Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

определяется тем, что каждый следующий член равен сумме двух предыдущих,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , и двумя начальными членами  $a_0=0$ ,  $a_1=1$ .

**Задача 1.** Найти формулу для  $a_n$ . Показать, что  $a_n$  растет, как геометрическая прогрессия, и найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \alpha.$$

**Указание.** Заметим, что вектор  $\xi_n = (a_n, a_{n-1})$  выражается линейно через  $\xi_{n-1}$ :

$$\xi_n = A \xi_{n-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем  $\xi_1 = (1, 0)$ . Поэтому  $a_n$  есть первая компонента вектора  $A^{n-1} \xi_1$ .

**Ответ.**  $\alpha = \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$ , где  $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$  — собственные числа  $A$ .

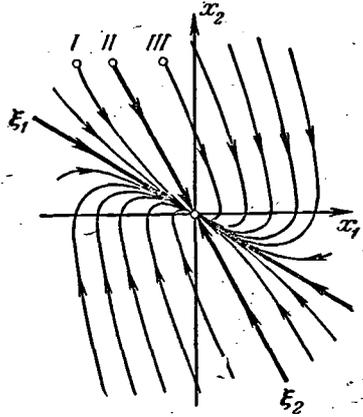


Рис. 109. Фазовые кривые уравнения маятника с сильным трением в обычном базисе.

Такое же рассуждение сводит исследование любой *рекуррентной последовательности*  $a_n$  порядка  $k$ , заданной правилом

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

и  $k$  начальными членами \*), к изучению показательной функции  $A^n$ , где  $A: R^k \rightarrow R^k$  — линейный оператор. Поэтому, когда мы научимся вычислять матрицу экспоненты, мы одновременно изучим все рекуррентные последовательности.

Возвращаясь к общей задаче о вычислении  $e^{At}$ , заметим, что корни характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$  могут быть комплексными. Чтобы изучить этот случай, мы вначале рассмотрим линейные уравнения с комплексным фазовым пространством  $C^n$ .

### § 18. Комплексификация и о веществление

Прежде чем изучать комплексные дифференциальные уравнения, вспомним, что такое комплексификация вещественного пространства и о веществление комплексного.

**1. О веществление.** Через  $C^n$  мы будем обозначать  $n$ -мерное линейное пространство над полем комплексных чисел  $C$ .

*О веществлением* пространства  $C^n$  называется вещественное линейное пространство, которое совпадает с  $C^n$  как группа и в котором умножение на вещественные числа определено как в  $C^n$ , а умножение на комплексные числа не определено. (Иными словами, о веществить  $C^n$  — это значит забыть о структуре  $C$ -модуля, сохраняя структуру  $R$ -модуля.)

Легко видеть, что о веществление пространства  $C^n$  будет  $2n$ -мерным вещественным линейным пространством  $R^{2n}$ . Мы будем обозначать о веществление знаком  $R$  сверху слева, например:  ${}^R C = R^{2n}$ .

Если  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $C^n$ , то  $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$  — базис в  ${}^R C^n = R^{2n}$ .

Пусть  $A: C^m \rightarrow C^n$  —  $C$ -линейный оператор. *О веществление оператора*  $A$  — это  $R$ -линейный оператор  ${}^R A: {}^R C^m \rightarrow {}^R C^n$ , совпадающий с  $A$  поточечно.

**Задача 1.** Пусть  $(e_1, \dots, e_m)$  — базис пространства  $C^m$ ,  $(f_1, \dots, f_n)$  — базис пространства  $C^n$ ,  $(A)$  — матрица оператора  $A$ . Найти матрицу о веществленного оператора  ${}^R A$ .

*Ответ.*  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $(A) = (\alpha) + i(\beta)$ .

**Задача 2.** Докажите, что  ${}^R(A+B) = {}^R A + {}^R B$ ,  ${}^R(AB) = {}^R A {}^R B$ .

\*) Тот факт, что для определения рекуррентной последовательности  $k$ -го порядка надо знать  $k$  ее первых членов, тесно связан с тем, что фазовое пространство дифференциального уравнения порядка  $k$  имеет размерность  $k$ . Эта связь становится понятной, если записать дифференциальное уравнение в виде предела разностей.

2. **Комплексификация.** Пусть  $R^n$  — вещественное линейное пространство. *Комплексификация пространства  $R^n$*  — это  $n$ -мерное комплексное линейное пространство, обозначаемое через  ${}^C R^n$ , которое строится следующим образом.

Точки пространства  ${}^C R^n$  — это пары  $(\xi, \eta)$ , где  $\xi \in R^n$ ,  $\eta \in R^n$ . Такая пара обозначается  $\xi + i\eta$ . Операции сложения и умножения на комплексные числа определяются обычным образом:

$$(u + iv)(\xi + i\eta) = (u\xi - v\eta) + i(v\xi + u\eta),$$

$$(\xi_1 + i\eta_1) + (\xi_2 + i\eta_2) = (\xi_1 + \xi_2) + i(\eta_1 + \eta_2).$$

Легко проверить, что полученный  $C$ -модуль является  $n$ -мерным комплексным линейным пространством:  ${}^C R^n = C^n$ . Если  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $R^n$ , то векторы  $e_k + i0$  образуют  $C$ -базис в  $C^n = {}^C R^n$ .

Векторы  $\xi + i0$  обозначаются короче через  $\xi$ .

Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  есть  $R$ -линейный оператор. *Комплексификация оператора  $A$*  — это  $C$ -линейный оператор  ${}^C A: {}^C R^n \rightarrow {}^C R^n$ , определенный соотношением

$${}^C A(\xi + i\eta) = A\xi + iA\eta.$$

**Задача 1.** Пусть  $(e_1, \dots, e_m)$  — базис в  $R^n$ ,  $(f_1, \dots, f_n)$  — базис в  $R^n$ . Пусть  $(A)$  — матрица оператора  $A$ . Найти матрицу комплектифицированного оператора  $({}^C A)$ .

*Ответ.*  $({}^C A) = (A)$ .

**Задача 2.** Докажите, что  ${}^C(A+B) = {}^C A + {}^C B$ ,  ${}^C(AB) = {}^C A {}^C B$ .

**Терминологическое замечание.** Операции комплексификации и овеществления определены как для пространств, так и для отображений. Алгебраисты называют такого рода операции *функторами*.

3. **Комплексное сопряжение.** Рассмотрим вещественное  $2n$ -мерное линейное пространство  $R^{2n} = {}^R C R^n$ , полученное из  $R^n$  комплексификацией, а затем овеществлением. В этом пространстве лежит  $n$ -мерное подпространство векторов вида  $\xi + i0$ ,  $\xi \in R^n$ . Оно называется *вещественной плоскостью*  $R^n \subset R^{2n}$ .

Подпространство векторов вида  $0 + i\xi$ ,  $\xi \in R^n$ , называется *мнимой плоскостью*  $iR^n \subset R^{2n}$ . Все пространство  $R^{2n}$  есть прямая сумма этих двух  $n$ -мерных подпространств.

Оператор  $iE$  умножения на  $i$  в  $C^n = {}^C R^n$  после овеществления превращается в  $R$ -линейный оператор  ${}^R(iE) = I: R^{2n} \rightarrow R^{2n}$  (рис. 110). Этот оператор  $I$  изоморфно отображает вещественную плоскость в мнимую, а мнимую — в вещественную. Квадрат оператора  $I$  равен минус единичному.

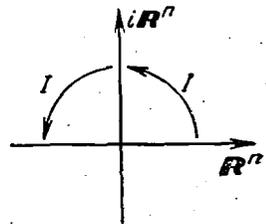
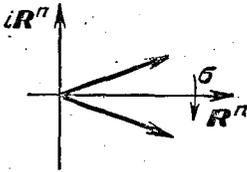


Рис. 110. Оператор умножения на  $i$ .

**Задача 1.** Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $R^n$ ,  $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$  — базис  $R^{2n} = {}^R C R^n$ . Найдите матрицу оператора  $I$  в этом базисе.

*Ответ.*  $(I) = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ .

Обозначим через  $\sigma: R^{2n} \rightarrow R^{2n}$  (рис. 111) оператор комплексного сопряжения:  $\sigma(\xi + i\eta) = \xi - i\eta$ . Действие  $\sigma$  обозначается часто чертой сверху.



Оператор  $\sigma$  совпадает с единичным на вещественной плоскости и с минус единичным — на мнимой. Он инволютивен:  $\sigma^2 = E$ .

Пусть  $A: {}^C R^m \rightarrow {}^C R^n$  —  $C$ -линейный оператор. Комплексно сопряженным к  $A$  оператором  $\bar{A}$  называется оператор  $A: {}^C R^m \rightarrow {}^C R^n$ , определенный соотношением

$$\overline{Az} = A\bar{z} \text{ для всякого } z \in {}^C R^m.$$

Рис. 111. Комплексное сопряжение.

**Задача 2.** Докажите, что  $\bar{A}$  является  $C$ -линейным оператором.

**Задача 3.** Докажите, что матрица оператора  $\bar{A}$  в вещественном базисе комплексно сопряжена матрице  $A$  в том же базисе.

**Задача 4.** Докажите, что  $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$ ,  $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ ,  $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$ .

**Задача 5.** Докажите, что комплексный линейный оператор  $A: {}^C R^m \rightarrow {}^C R^n$  является комплексификацией вещественного тогда и только тогда, когда  $\bar{A} = A$ .

**4. Экспонента, определитель и след комплексного оператора.** Экспонента, определитель и след комплексного оператора определяются в точности так же, как в вещественном случае. Они обладают такими же свойствами, что и в вещественном случае, разница состоит лишь в том, что определитель, будучи комплексным числом, не равен объему.

**Задача 1.** Докажите свойства экспоненты:

$${}^R(e^A) = e^{RA}, \quad \overline{e^A} = e^{\bar{A}}, \quad {}^C(e^A) = e^{CA}.$$

**Задача 2.** Докажите свойства определителя:

$$\det {}^R A = |\det A|^2, \quad \det A = \overline{\det A}, \quad \det {}^C A = \det A.$$

**Задача 3.** Докажите свойства следа:

$$\text{Tr } {}^R A = \text{Tr } A + \text{Tr } \bar{A}, \quad \text{Tr } \bar{A} = \overline{\text{Tr } A}, \quad \text{Tr } {}^C A = \text{Tr } A.$$

**Задача 4.** Докажите, что и в комплексном случае

$$\det e^A = e^{\text{Tr } A}.$$

**5. Производная кривой с комплексными значениями.** Пусть  $\varphi: I \rightarrow {}^C n$  — отображение интервала  $I$  вещественной оси  $t$  в комплексное линейное пространство  ${}^C n$ . Мы будем называть  $\varphi$  кривой.

Производная кривой  $\varphi$  в точке  $t_0 \in I$  определяется обычным образом:

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h}.$$

Это вектор пространства  $C^n$ .

Пример 1. Пусть  $n=1$ ,  $\varphi(t) = e^{it}$  (рис. 112). Тогда  $\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = i$ .

Рассмотрим случай  $n=1$  подробнее. Поскольку в  $C$  определено умножение, кривые со значениями в  $C$  можно не только складывать, но и умножать:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(t) &= \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \\ (\varphi_1 \varphi_2)(t) &= \varphi_1(t) \varphi_2(t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

Задача 1. Докажите свойства производной:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi_1 + \varphi_2) &= \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}, \\ \frac{d}{dt} (\varphi_1 \varphi_2) &= \frac{d\varphi_1}{dt} \varphi_2 + \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dt}. \end{aligned}$$

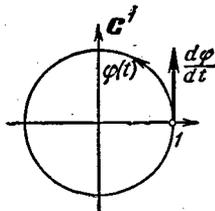


Рис. 112. Производная кривой  $\varphi = e^{it}$  в точке 0 равна  $i$ .

В частности, производная многочлена с комплексными коэффициентами дается той же формулой, что для случая вещественных коэффициентов.

Если  $n > 1$ , то перемножить две кривые со значениями в  $C^n$  нельзя. Однако, поскольку  $C^n$  есть  $C$ -модуль, можно умножить кривую  $\varphi: I \rightarrow C^n$  на функцию  $f: I \rightarrow C$ :

$$(f\varphi)(t) = f(t) \varphi(t).$$

Задача 2. Докажите свойства производной:

$$\begin{aligned} \frac{d(R\varphi)}{dt} &= R \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d(C\varphi)}{dt} = C \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \overline{\frac{d\varphi}{dt}}, \\ \frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \frac{d(f\varphi)}{dt} = \frac{df}{dt} \varphi + f \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Разумеется, здесь предполагается, что производные существуют.

Теорема. Пусть  $A: C^n \rightarrow C^n$  —  $C$ -линейный оператор. Тогда существует при любом  $t \in R$   $C$ -линейный оператор из  $C^n$  в  $C^n$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

Доказательство. Это можно доказать в точности так же, как в вещественном случае, но можно и сослаться на него. Ибо, овестествив  $C^n$ , получим

$$R \left( \frac{d}{dt} e^{tA} \right) = \frac{d}{dt} R(e^{tA}) = \frac{d}{dt} e^{t(RA)} = (RA) e^{t(RA)} = R(A e^{tA}).$$

### § 19. Линейное уравнение с комплексным фазовым пространством

Комплексный случай, как это часто бывает, проще вещественного. Он важен сам по себе; кроме того, изучение комплексного случая поможет нам исследовать вещественный.

**1. Определения.** Пусть  $A: C^n \rightarrow C^n$  —  $C$ -линейный оператор. *Линейным уравнением\** с фазовым пространством  $C^n$  мы будем называть уравнение

$$\dot{z} = Az, \quad z \in C^n. \quad (1)$$

Решением  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(t_0) = z_0$ ,  $t_0 \in R$ ,  $z_0 \in C^n$ , называется отображение  $\varphi: I \rightarrow C^n$  интервала  $I$  вещественной оси  $t$  в  $C^n$ , если

$$1) \text{ для всякого } \tau \in I \quad \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=\tau} = A\varphi(\tau);$$

$$2) t_0 \in I \text{ и } \varphi(t_0) = z_0.$$

Иными словами, отображение  $\varphi: I \rightarrow C^n$  называется решением уравнения (1), если после овеществления пространства  $C^n$  и оператора  $A$  отображение  $\varphi$  будет решением уравнения с  $2n$ -мерным вещественным фазовым пространством

$$\dot{z} = {}^R A z, \quad z \in R^{2n} = {}^R C^n.$$

**2. Основная теорема.** Следующие теоремы доказываются точно так же, как в вещественном случае (см. § 15, 2, 3):

**Теорема.** Решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным условием  $\varphi(0) = z_0$  дается формулой  $\varphi(t) = e^{At} z_0$ .

**Теорема.** Всякая однопараметрическая группа  $\{g^t (t \in R)\}$   $C$ -линейных преобразований пространства  $C^n$  имеет вид

$$g^t = e^{At},$$

где  $A: C^n \rightarrow C^n$  — некоторый  $C$ -линейный оператор.

Наша цель теперь — исследовать и явно вычислить  $e^{At}$ .

**3. Диагональный случай.** Пусть  $A: C^n \rightarrow C^n$  есть  $C$ -линейный оператор. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det |A - \lambda E| = 0. \quad (2)$$

Очевидна

**Теорема.** Если  $n$  корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения попарно различны, то  $C^n$  разлагается в прямую сумму инвариантных относительно  $A$  и  $e^{At}$  одномерных подпространств  $C^n = C^1 \dot{+} \dots \dot{+} C^1$ , причем в каждом одномерном инвариантном подпространстве, скажем в  $C^k$ ,  $e^{At}$  сводится к умножению на комплексное число  $e^{\lambda_k t}$ .

\*) Полный титул: система  $n$  линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными постоянными коэффициентами.

Действительно, оператор  $A$  имеет\*)  $n$  линейно независимых собственных прямых:

$$C^n = C_1 \dot{+} \dots \dot{+} C_n.$$

На прямой  $C_k$  оператор  $A$  действует как умножение на  $\lambda_k$ , поэтому оператор  $e^{At}$  действует как умножение на  $e^{\lambda_k t}$ .

Рассмотрим теперь подробнее одномерный случай,  $n=1$ .

4. Пример: линейное уравнение, фазовое пространство которого — комплексная прямая. Такое уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z, \quad z \in C, \quad \lambda \in C, \quad t \in R. \quad (3)$$

Мы уже знаем его решения:  $\varphi(t) = e^{\lambda t} z_0$ . Исследуем комплексную функцию  $e^{\lambda t}$  вещественного переменного  $t$ :

$$e^{\lambda t} : R \rightarrow C.$$

Если  $\lambda$  вещественно, то функция  $e^{\lambda t}$  вещественна (рис. 113).

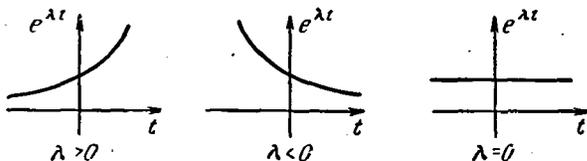


Рис. 113. График функции  $e^{\lambda t}$  при вещественных  $\lambda$ .

В этом случае фазовый поток уравнения (3) состоит из растяжений в  $e^{\lambda t}$  раз. Если  $\lambda$  чисто мнимо,  $\lambda = i\omega$ , то по формуле Эйлера

$$e^{\lambda t} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

В этом случае фазовый поток уравнения (3) — это семейство  $\{g^t\}$  поворотов на угол  $\omega t$  (рис. 114). Наконец, в общем случае  $\lambda = \alpha + i\omega$  и умножение на  $e^{\lambda t}$  есть произведение умножения на  $e^{\alpha t}$  и умножения на  $e^{i\omega t}$  (см. § 15,5);

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\omega t}. \quad (4)$$

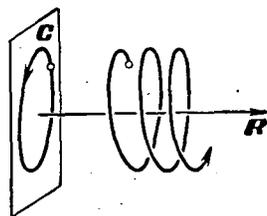


Рис. 114. Фазовая и интегральная кривые уравнения  $\dot{z} = \lambda z$  при чисто мнимом  $\lambda$ .

Таким образом, преобразование  $g^t$  фазового потока уравнения (3) — это растяжение в  $e^{\alpha t}$  раз с одновременным поворотом на угол  $\omega t$ .

\*) Это — единственное место, где комплексный случай отличается от вещественного. Причина большей сложности вещественного случая — алгебраическая незамкнутость поля  $R$ .

Рассмотрим теперь фазовые кривые. Пусть, например,  $\alpha < 0$ ,  $\omega > 0$  (рис. 115). В таком случае при росте  $t$  фазовая точка  $e^{\lambda t} z_0$  будет приближаться к началу координат, обходя вокруг него в направлении «против часовой стрелки» (т. е. от 1 к  $i$ ).

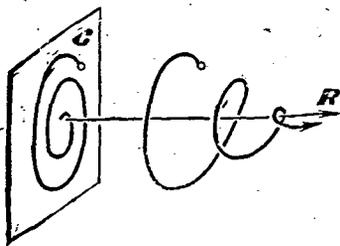


Рис. 115. Фазовая и интегральная кривые уравнения  $\dot{z} = \lambda z$  при  $\lambda = \alpha + i\omega$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\omega > 0$ .

В полярных координатах, при соответствующем выборе начала отсчета углов, фазовая кривая задается уравнением

$$r = e^{k\varphi} \left( k = \frac{\alpha}{\omega} \right), \quad \text{или} \quad \varphi = k^{-1} \ln r.$$

Такая кривая называется *логарифмической спиралью*.

При других комбинациях знаков  $\alpha$  и  $\omega$  фазовые кривые также будут логарифмическими спиральями (рис. 116, 117).

Во всех случаях (кроме  $\lambda = 0$ ) точка  $z = 0$  является единственной неподвижной точкой фазового потока (и единственной особой точкой соответствующего уравнению (3) векторного поля).

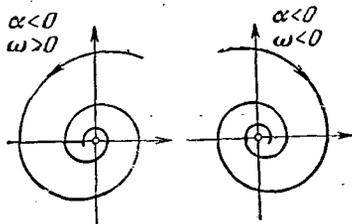


Рис. 116. Устойчивый фокус.

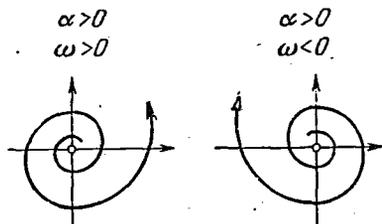


Рис. 117. Неустойчивый фокус.

Эта особая точка называется *фокусом* (мы предполагаем, что  $\alpha \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$ ). Если  $\alpha < 0$ , то  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и фокус называется *устойчивым*, а если  $\alpha > 0$ , то *неустойчивым*.

При  $\alpha = 0$ ,  $\omega \neq 0$  фазовые кривые — окружности, а особая точка — их центр (рис. 118).

Выберем в  $C^1$  координату:  $z = x + iy$ . Исследуем изменение вещественной и мнимой частей  $x(t)$ ,  $y(t)$  при движении фазовой точки. Из (4) находим

$$x(t) = re^{2t} \cos(\varphi + \omega t), \quad y(t) = re^{2t} \sin(\varphi + \omega t),$$

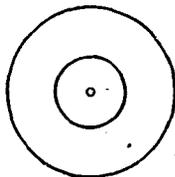


Рис. 118. Центр.

где постоянные  $r$  и  $\varphi$  определяются начальным условием (рис. 119). Таким образом, при  $\alpha > 0$  координаты  $x(t)$  и  $y(t)$  испытывают «гармонические колебания с частотой  $\omega$  и с экспоненциально нарастающей амплитудой  $re^{2t}$ », а при  $\alpha < 0$  — затухающие колебания.

Изменение  $x$  или  $y$  со временем можно записать также в виде  $Ae^{\alpha t} \cos \omega t + Be^{\alpha t} \sin \omega t$ , где постоянные  $A$  и  $B$  определяются начальными условиями.

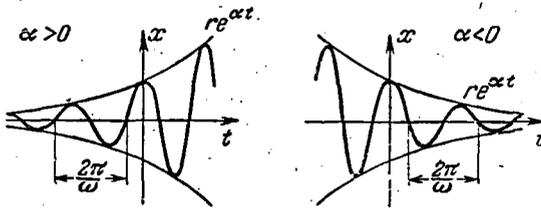


Рис. 119. Вещественная часть  $e^{\lambda t}$  как функция времени.

**Замечание 1.** Исследовав таким образом уравнение (3), мы одновременно исследовали все однопараметрические группы  $C$ -линейных преобразований комплексной прямой.

**Замечание 2.** В то же время мы изучили систему линейных уравнений на вещественной плоскости

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + \alpha y, \end{cases}$$

в которую переходит уравнение (3) после овеществления.

Из теорем пп. 2, 3 и вычислений п. 4 непосредственно вытекает явная формула для решений уравнения (1).

**5. Следствие.** Пусть  $n$  корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения (2) попарно различны. Тогда всякое решение  $\varphi$  уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \xi_k, \tag{5}$$

где  $\xi_k$  — не зависящие от начальных условий постоянные вектора,  $c_k$  — зависящие от начальных условий комплексные постоянные. При любом выборе этих постоянных формула (5) дает решение уравнения (1).

Если  $z_1, \dots, z_n$  — линейная система координат в  $C^n$ , то вещественная (или мнимая) часть каждой координаты  $z_l = x_l + iy_l$  будет меняться со временем, как линейная комбинация функций  $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$ ,  $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$ :

$$\begin{aligned} x_l &= \sum_{k=1}^n r_{k,l} e^{\alpha_k t} \cos(\varphi_{k,l} + \omega_k t) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_{k,l} e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t + B_{k,l} e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ , а  $r, \varphi, A, B$  — вещественные постоянные, зависящие от начальных условий.

Для доказательства достаточно разложить начальное условие по собственному базису:  $\varphi(0) = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n$ .

## § 20. Комплексификация вещественного линейного уравнения

Воспользуемся результатами исследования комплексного уравнения для изучения вещественного случая.

1. Комплексифицированное уравнение. Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор, задающий линейное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n. \quad (1)$$

Комплексификация уравнения (1) — это уравнение с комплексным фазовым пространством

$$\dot{z} = {}^c A z, \quad z \in C^n = {}^c R^n. \quad (2)$$

Лемма 1. Решения уравнения (2) с комплексно сопряженными начальными условиями комплексно сопряжены.

Доказательство. Пусть  $\varphi$  — решение с начальным условием  $\varphi(t_0) = z_0$  (рис. 120). Тогда  $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{z_0}$ . Покажем, что  $\overline{\varphi}$  — решение. Тогда лемма будет доказана (ввиду единственности).

При любом значении  $t$  имеем

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \overline{\frac{d\varphi}{dt}} = \overline{{}^c A \varphi} = \overline{{}^c A} \overline{\varphi} = {}^c A \overline{\varphi},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Вместо уравнения (2) мы могли бы взять более общее уравнение

$$\dot{z} = F(z, t), \quad z \in {}^c R^n,$$

Рис. 120. Комплексно сопряженные решения.

правая часть которого принимает комплексно сопряженные значения в комплексно сопряженных точках:

$$F(\overline{z}, t) = \overline{F(z, t)}.$$

Например, этому условию удовлетворяет любой многочлен от координат  $z_k$  вектора  $z$  в вещественном базисе, коэффициенты которого — вещественные функции от  $t$ .

Следствие. Решение уравнения (2) с вещественным начальным условием вещественно и удовлетворяет уравнению (1).

Ибо если бы  $\bar{\varphi} \neq \varphi$  (рис. 121), то нарушалась бы теорема единственности.

В следующей лемме линейность уравнения существенна.

**Лемма 2.** *Функция  $z = \varphi(t)$  тогда и только тогда является решением комплексифицированного уравнения (2), когда ее вещественная и мнимая части удовлетворяют исходному уравнению (1).*

Действительно,

$${}^c A(x + iy) = Ax + iAy,$$

поэтому овеществление уравнения (2) распадается в прямое произведение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & x \in R^n \\ \dot{y} = Ay, & y \in R^n. \end{cases}$$

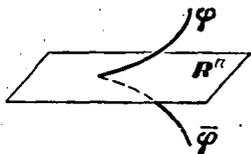


Рис. 121. Решение с вещественным начальным условием не может иметь комплексных значений.

Из лемм 1 и 2 видно, как, зная комплексные решения уравнения (2), можно находить вещественные решения уравнения (1), и обратно. В частности, формулы (6) п. 5 § 19 дают явный вид решения в случае некратных корней характеристического уравнения.

**2. Инвариантные подпространства вещественного оператора.** Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — вещественный линейный оператор. Пусть  $\lambda$  — один из корней характеристического уравнения  $\det |A - \lambda E| = 0$ , вообще говоря, комплексный. Очевидна

**Лемма 3.** *Если  $\xi \in C^n = {}^c R^n$  — собственный вектор оператора  ${}^c A$  с собственным значением  $\lambda$ , то  $\bar{\xi}$  — собственный вектор с собственным значением  $\bar{\lambda}$ . Кратности собственных чисел  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  совпадают.*

Действительно, поскольку  ${}^c \bar{A} = {}^c A$ , уравнение  ${}^c A \xi = \lambda \xi$  эквивалентно  ${}^c A \bar{\xi} = \bar{\lambda} \bar{\xi}$  и характеристическое уравнение имеет вещественные коэффициенты.

Предположим теперь, что собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in C$  оператора  $A: R^n \rightarrow R^n$  попарно различны (рис. 122). Среди них

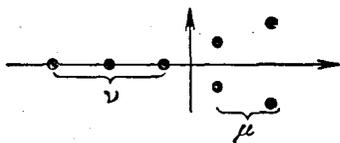


Рис. 122. Собственные числа вещественного оператора.

имеется некоторое число  $\nu$  вещественных собственных чисел и некоторое число  $\mu$  комплексно сопряженных пар (причем  $\nu + 2\mu = n$ , так что четность числа вещественных собственных чисел равна четности  $n$ ). Легко доказывается

**Теорема.** *Пространство  $R^n$  распадается в прямую сумму  $\nu$  инвариантных относительно  $A$  одномерных и  $\mu$  инвариантных относительно  $A$  двумерных подпространств.*

Действительно, каждому собственному числу отвечает вещественный собственный вектор  $i$ , значит, одномерное инвариантное подпространство в  $R^n$ .

Пусть  $\lambda, \bar{\lambda}$  — одна из пар комплексно сопряженных собственных чисел. Собственному числу  $\lambda$  отвечает собственный вектор  $\xi \in C^n = {}^C R^n$  комплексифицированного оператора  ${}^C A$ .

Сопряженный вектор  $\bar{\xi}$  по лемме 3 также является собственным, с собственным значением  $\bar{\lambda}$ .

Комплексная плоскость  $C^2$ , натянутая на собственные векторы  $\xi, \bar{\xi}$ , инвариантна относительно оператора  ${}^C A$ . Вещественное подпространство  $R^n \subset {}^C R^n$  также инвариантно. Поэтому их пересечение также инвариантно относительно  ${}^C A$ . Покажем, что это пересечение является двумерной вещественной плоскостью  $R^2$  (рис. 123).

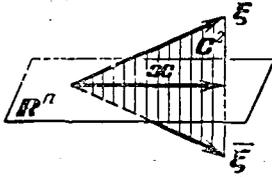


Рис. 123. Вещественная часть собственного вектора принадлежит инвариантной вещественной плоскости.

Действительно, рассмотрим вещественную и мнимую части собственного вектора  $\xi$ :

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}) \in R^n, \quad y = \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}) \in R^n.$$

Будучи  $C$ -линейными комбинациями векторов  $\xi$  и  $\bar{\xi}$ , векторы  $x$  и  $y$  принадлежат пересечению  $C^2 \cap R^n$ . Векторы  $x$  и  $y$   $C$ -линейно независимы, так как через них линейно выражаются  $C$ -независимые векторы  $\xi, \bar{\xi}$ :

$$\xi = x + iy, \quad \bar{\xi} = x - iy.$$

Итак, каждый вектор плоскости  $C^2$  однозначно записывается в виде комплексной линейной комбинации вещественных векторов  $x$  и  $y$ :

$$\eta = ax + by, \quad a \in C, \quad b \in C.$$

Такой вектор веществен ( $\eta = \bar{\eta}$ ), если и только если  $ax + by = \overline{ax + by}$ , т. е.  $a$  и  $b$  вещественны. Итак, пересечение  $C^2 \cap R^n$  — это двумерная вещественная плоскость  $R^2$ , натянутая на векторы  $x$  и  $y$  вещественной и мнимой частей собственного вектора  $\xi$ .

Собственные числа сужения оператора  $A$  на плоскость  $R^2$  — это  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$ .

Действительно, комплексификация не меняет собственных чисел. После комплексификации сужения  $A$  на  $R^2$  получится сужение  ${}^C A$  на  $C^2$ . Но плоскость  $C^2$  натягнута на собственные векторы оператора  ${}^C A$  с собственными числами  $\lambda, \bar{\lambda}$ . Итак, собственные числа  $A|_{R^2}$  суть  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$ .

Остается показать, что построенные одномерные и двумерные инвариантные подпространства пространства  $R^n$   $R$ -линейно независимы. Это сразу следует из того, что  $n$  собственных векторов

оператора  ${}^cA$   $C$ -линейно независимы и линейно выражаются через наши векторы  $\xi_k$  ( $k=1, \dots, \nu$ ) и  $x_k, y_k$  ( $k=1, \dots, \mu$ ).

Теорема доказана.

Таким образом, в случае, когда все собственные числа оператора  $A: R^n \rightarrow R^n$  простые, линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n,$$

распадается в прямое произведение уравнений с одномерными и двумерными фазовыми пространствами.

Заметим, что многочлен общего вида кратных корней не имеет. Итак, для исследования линейных дифференциальных уравнений необходимо прежде всего рассмотреть линейные уравнения на прямой (что мы уже сделали) и на плоскости.

### 3. Линейное уравнение на плоскости.

Теорема. Пусть  $A: R^2 \rightarrow R^2$  — линейный оператор с не вещественными собственными числами  $\lambda, \bar{\lambda}$ .

Тогда  $A$  представляет собой олицетвление оператора  $\Lambda: C^1 \rightarrow C^1$  умножения на комплексное число  $\lambda$ .

Точнее, плоскость  $R^2$  можно снабдить структурой комплексной прямой  $C^1$ , так что  $R^2 = {}^R C^1$  и  $A = {}^R \Lambda$ .

Доказательство — несколько таинственная выкладка\*). Пусть  $x + iy \in {}^c R^2$  — комплексный собственный вектор оператора  ${}^c A$  с собственным значением  $\lambda = \alpha + i\omega$ . Векторы  $x$  и  $y$  образуют базис в  $R^2$ . Имеем, с одной стороны,

$${}^c A(x + iy) = (\alpha + i\omega)(x + iy) = \alpha x - \omega y + i(\omega x + \alpha y)$$

и, с другой,

$${}^c A(x + iy) = Ax + iAy,$$

откуда

$$Ax = \alpha x - \omega y, \quad Ay = \omega x + \alpha y,$$

т. е. оператор  $A: R^2 \rightarrow R^2$  в базисе  $x, y$  имеет ту же матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix},$$

что оператор  ${}^R \Lambda$  умножения на  $\lambda = \alpha + i\omega$  в базисе  $1, -i$ . Итак, искомая комплексная структура на  $R^2$  получится, если принять  $x$  за  $1$  и  $y$  за  $-i$ .

Следствие 1. Пусть  $A: R^2 \rightarrow R^2$  — линейное преобразование евклидовой плоскости с не вещественными собственными числами  $\lambda, \bar{\lambda}$ ,

\*) Выкладку можно заменить следующим рассуждением. Пусть  $\lambda = \alpha + i\omega$ . Определим оператор  $I: R^2 \rightarrow R^2$  условием  $A = \alpha E + \omega I$ . Такой оператор  $I$  существует, так как  $\omega \neq 0$  по условию. Тогда  $I^2 = -E$ , так как оператор  $A$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Принимая  $I$  за умножение на  $i$ , получаем в  $R^2$  нужную комплексную структуру.

$\bar{\lambda}$ . Тогда преобразование  $A$  аффинно эквивалентно растяжению в  $|\lambda|$  раз с поворотом на угол  $\operatorname{arctg} \lambda$ .

Следствие 2. Фазовый поток линейного уравнения (1) на евклидовой плоскости  $R^2$  с не вещественными собственными числами  $\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm i\omega$  аффинно эквивалентен семейству растяжений в  $e^{\alpha t}$  раз с одновременным вращением на угол  $\omega t$ .

В частности, особая точка  $O$  является фокусом, а фазовые кривые — аффинными образами логарифмических спиралей, приближающихся к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$  в случае, когда вещественная часть  $\alpha$  собственных чисел  $\lambda, \bar{\lambda}$  отрицательна, и удаляющихся в случае, когда  $\alpha > 0$  (рис. 124).

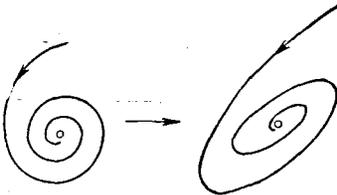


Рис. 124. Аффинный образ логарифмической спирали.

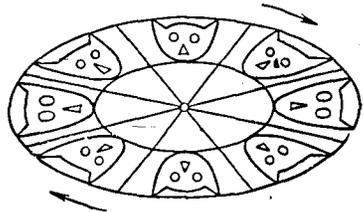


Рис. 125. Эллиптический поворот.

В случае  $\alpha = 0$  (рис. 125) фазовые кривые — семейство концентрических эллипсов, а особая точка — их центр. В этом случае преобразования фазового потока называются *эллиптическими поворотами*.

4. Классификация особых точек на плоскости. Пусть теперь

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^2, \quad A: R^2 \rightarrow R^2,$$

— произвольное линейное уравнение на плоскости. Пусть корни

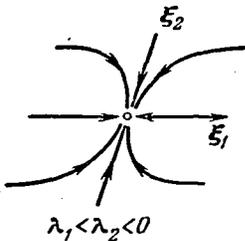


Рис. 126. Устойчивый узел.

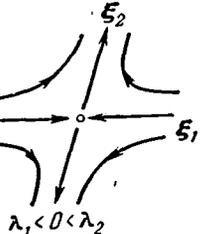
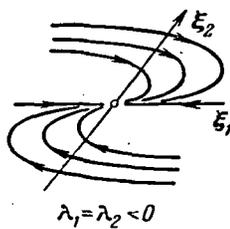


Рис. 127. Седло.

$\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения различны. Если они вещественны и  $\lambda_1 < \lambda_2$ , то уравнение распадается на два одномерных и мы получаем один из случаев, уже изученных в гл. 1 (рис. 126, 127, 128).

Здесь пропущены пограничные случаи, когда  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  равно 0. Они представляют гораздо меньший интерес, так как встречаются редко и не сохраняются при сколь угодно малом возмущении. Исследование их никаких трудностей не представляет.

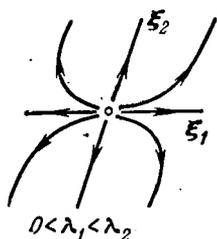


Рис. 128. Неустойчивый узел.

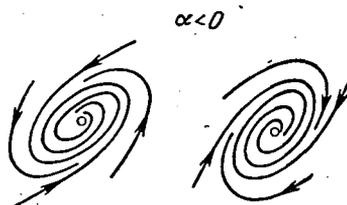


Рис. 129. Устойчивые фокусы.

Если же корни комплексны,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ , то в зависимости от знака  $\alpha$  может получиться один из случаев, представленных на рис. 129, 130, 131.

Случай центра является исключительным, но он встречается, например, в консервативных системах (см. § 12). Случай кратных

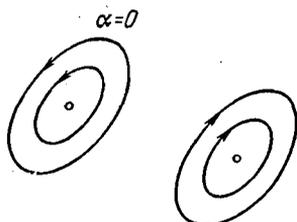


Рис. 130. Центры.

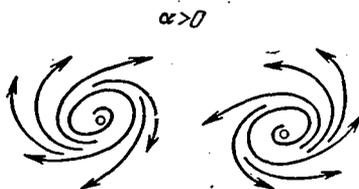


Рис. 131. Неустойчивые фокусы.

корней также являются исключительными. Читателю предоставляется проверить, что жордановой клетке соответствует случай, изображенный на рис. 126 ( $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ; так называемый вырожденный узел).

5. Пример: маятник с трением. Применим все сказанное к уравнению малых колебаний маятника с трением  $\ddot{x} = -x - k\dot{x}$  ( $k$  — коэффициент трения). Составим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

Исследуем характеристическое уравнение. Матрица системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$$

имеет определитель 1 и след  $-k$ . Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$  комплексны при  $|k| < 2$ , т. е. при не слишком большом трении \*).

Вещественная часть каждого из комплексных корней

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$$

равна  $-k/2$ . Иными словами, при положительном не слишком большом коэффициенте трения ( $0 < k < 2$ ) ниже положение равновесия маятника ( $x_1 = x_2 = 0$ ) будет устойчивым фокусом.

При  $k \rightarrow 0$  фокус превращается в центр; чем меньше коэффициент трения, тем медленнее фазовая точка приближается к положению равновесия при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 132). Явные формулы для

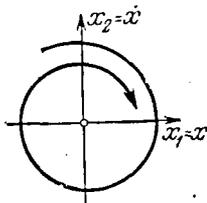


Рис. 132. Фазовая плоскость маятника с малым трением.

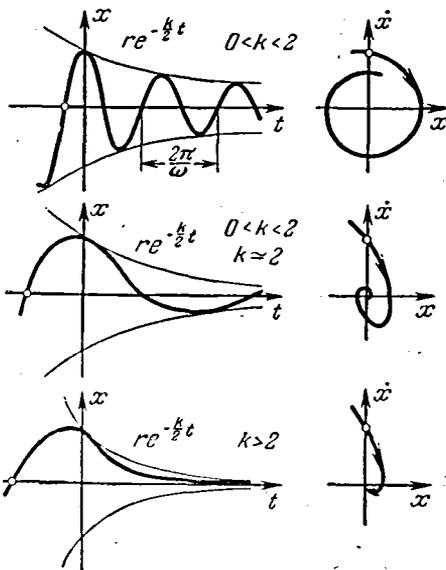


Рис. 133. Переход от затухающих колебаний к неколебательному движению маятника: фазовые кривые и графики решений при трех значениях коэффициента трения.

изменения  $x_1 = x$  со временем получаются из следствия 2 п. 3 и формул п. 4 § 19:

$$x(t) = re^{st} \cos(\varphi - \omega t) = Ae^{st} \cos \omega t + Be^{st} \sin \omega t,$$

где коэффициенты  $r$  и  $\varphi$  (или  $A$  и  $B$ ) определяются из начальных условий.

Итак, колебания маятника будут затухающими, с переменной амплитудой  $re^{st}$  и с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Чем больше коэффициент трения, тем быстрее уменьшается амплитуда \*\*). Частота  $\omega = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$  уменьшается с увеличением коэффициента трения  $k$ . При  $k \rightarrow 2$

\*) Случай вещественных корней рассмотрен в § 17, п. 2.

\*\*\*) И все же при любом значении  $k < 2$  маятник делает бесконечное количество размахов. Если же  $k > 2$ , маятник меняет направление движения не более одного раза.

частота стремится к 0, а период — к  $\infty$  (рис. 133). При малых  $k$   $\omega \approx 1 - \frac{k^2}{8}$  ( $k \rightarrow 0$ ), так что трение увеличивает период очень незначительно, и его влиянием на частоту во многих расчетах можно пренебрегать.

**Задача 1.** Нарисовать фазовые кривые нелинейного маятника с трением,  $\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x}$  (рис. 134).

**Указание.** Сосчитайте производную полной энергии вдоль фазовой кривой.

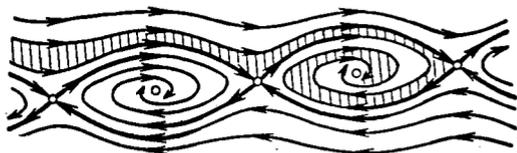


Рис. 134. Фазовая плоскость маятника с малым трением. После некоторого числа оборотов маятник начинает качаться вблизи нижнего положения равновесия.

**6. Общее решение линейного уравнения в случае простых корней характеристического уравнения.** Мы уже знаем, что всякое решение  $\varphi$  комплексифицированного уравнения является линейной комбинацией экспонент (см. § 19, 5):

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \xi_k,$$

где  $\xi_k$  — какой-нибудь собственный вектор с собственным значением  $\lambda_k$ . Выберем собственные векторы с вещественными значениями вещественными, а с комплексно сопряженными — комплексно сопряженными.

Мы уже знаем, что решения вещественного уравнения — это решения его комплексификации с вещественными начальными условиями. Чтобы вектор  $\varphi(0)$  был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^n c_k \xi_k = \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \bar{\xi}_k.$$

Для этого коэффициенты при комплексно сопряженных векторах должны быть комплексно сопряженными, а при вещественных — вещественными.

Заметим, что  $n$  комплексных постоянных  $c_k$  (при фиксированном выборе собственных векторов) определяются решением комплексного уравнения однозначно. Итак, доказана

**Теорема.** Каждое решение вещественного уравнения единственным образом (при фиксированном выборе собственных векторов) записывается в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^v a_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \sum_{k=v+1}^{v+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \bar{c}_k e^{\bar{\lambda}_k t} \bar{\xi}_k, \quad (1)$$

где  $a_k$  — вещественные, а  $c_k$  — комплексные постоянные.

Формула (1) называется *общим решением* уравнения. Ее можно переписать также в виде

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t} \xi_k + 2\operatorname{Re} \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k.$$

Заметим, что общее решение зависит от  $\nu + 2\mu = n$  вещественных постоянных  $a_k$ ,  $\operatorname{Re} c_k$ ,  $\operatorname{Im} c_k$ . Эти постоянные однозначно определяются начальными условиями.

**Следствие 1.** Пусть  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  — решение системы  $n$  линейных вещественных дифференциальных уравнений первого порядка с матрицей  $A$ . Пусть все корни характеристического уравнения матрицы  $A$  простые. Тогда каждая из функций  $\Phi_m$  является линейной комбинацией функций  $e^{\lambda_k t}$  и  $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$ ,  $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$ , где  $\lambda_k$  — вещественные, а  $\alpha_k \pm i\omega_k$  — комплексные корни характеристического уравнения.

**Доказательство.** Разложим общее решение (1) по координатному базису:  $\Phi = \Phi_1 e_1 + \dots + \Phi_n e_n$ . Учитывая, что  $e^{(\alpha_k \pm i\omega_k)t} = e^{\alpha_k t} (\cos \omega_k t \pm i \sin \omega_k t)$ , получим требуемое.

При практическом решении линейных систем можно, найдя собственные числа, искать решения в виде линейной комбинации функций  $e^{\lambda_k t}$ ,  $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$  и  $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$  методом неопределенных коэффициентов.

**Следствие 2.** Пусть  $A$  — вещественная квадратная матрица, собственные числа которой просты. Тогда каждый из элементов матрицы  $e^{At}$  есть линейная комбинация функций  $e^{\lambda_k t}$ ,  $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$ ,  $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$ , где  $\lambda_k$  — вещественные, а  $\alpha_k \pm i\omega_k$  — комплексные корни характеристического уравнения.

**Доказательство.** Каждый столбец матрицы  $e^{At}$  составлен из координат образа базисного вектора под действием фазового потока системы дифференциальных уравнений с матрицей  $A$ .

**Замечание.** Все сказанное выше непосредственно переносится на уравнения и системы уравнений порядка выше 1, так как они сводятся к системам первого порядка (см. § 9).

**Задача 1.** Найти все вещественные решения уравнений

$$x^{IV} + 4x = 0, \quad x^{IV} = x, \quad \ddot{x} + x = 0.$$

## § 21. Классификация особых точек линейных систем

Выше мы видели, что в общем случае (когда у характеристического уравнения нет кратных корней) вещественная линейная система распадается в прямое произведение одномерных и двумерных. Поскольку одномерные и двумерные системы мы уже изучили, мы можем теперь исследовать многомерные системы.

1. **Пример: особые точки в трехмерном пространстве.** Характеристическое уравнение — вещественное кубическое. Вещественное кубическое уравнение может иметь три вещественных корня либо один вещественный и два комплексных. В зависимости от расположения этих корней  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  на плоскости комплексного переменного  $\lambda$  возможно много разных случаев.

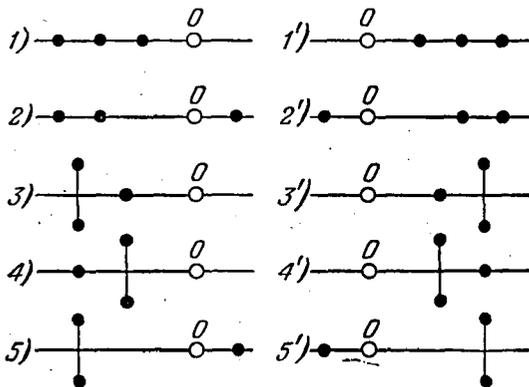


Рис. 135. Собственные числа вещественного оператора  $A: R^3 \rightarrow R^3$ . Грубые случаи.

Обратим внимание на порядок и знаки вещественных частей. Возможны 10 «грубых» случаев (рис. 135) и ряд «вырожденных» случаев (см., например, рис. 136), когда вещественная часть одного из корней равна нулю или вещественной части не сопряженного с ним корня (мы не рассматриваем сейчас случаи кратных корней). Исследование поведения фазовых кривых в каждом из этих случаев не представляет труда.

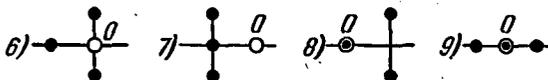


Рис. 136. Некоторые вырожденные случаи.

Учитывая, что  $e^{\lambda t}$  ( $\text{Re} \lambda < 0$ ) при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к 0, и тем быстрее, чем меньше  $\text{Re} \lambda$ , мы получаем изображенные на рис. 137—141 фазовые кривые:

$$\varphi(t) = \text{Re}(c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \xi_3).$$

Случаи 1')—5') получаются из случаев 1)—5) изменением направления оси  $t$ , так что на рис. 137—141 надо лишь заменить все стрелки противоположными.

**Задача 1.** Нарисовать фазовые кривые в случаях 6), 7), 8), 9) рис. 136.

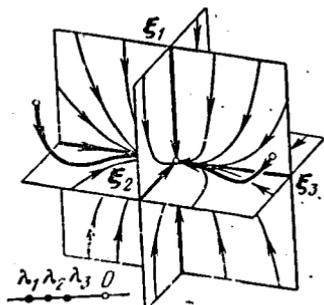


Рис. 137. Фазовое пространство линейного уравнения в случае  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ . Фазовый поток — сжатие по трем направлениям.

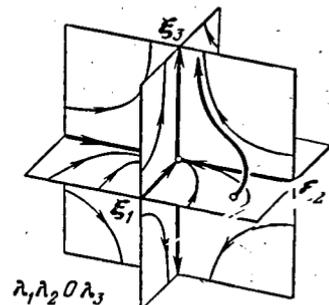


Рис. 138. Случай  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ . Сжатие по двум направлениям, растяжение — по третьему.

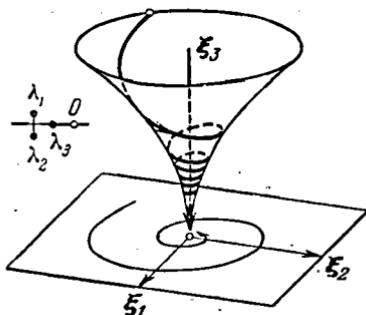


Рис. 139. Случай  $\text{Re } \lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$ . Сжатие по направлению  $\xi_3$ , вращение с более быстрым сжатием в плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$ .

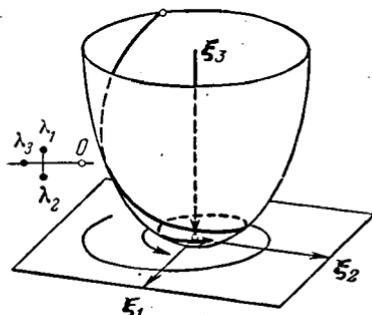


Рис. 140. Случай  $\lambda_3 < \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ . Сжатие по направлению  $\xi_3$ , вращение с более медленным сжатием в плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$ .

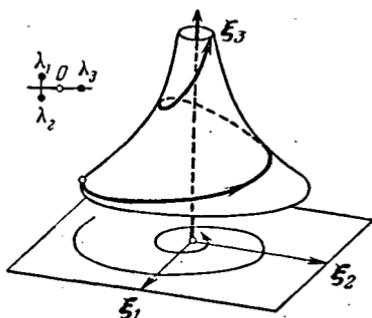


Рис. 141. Случай  $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$ . Растяжение по направлению  $\xi_3$ , вращение со сжатием в плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$ .

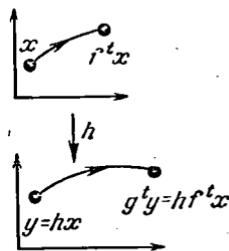


Рис. 142. Эквивалентные потоки.

**2. Линейная, дифференцируемая и топологическая эквивалентность.** Всякая классификация основывается на каком-нибудь отношении эквивалентности. Существуют по крайней мере три разумных отношения эквивалентности для линейных систем; они соответствуют алгебраическому, дифференцируемому и топологическому подходам.

Пусть  $\{f^t\}, \{g^t\}: R^n \rightarrow R^n$  — фазовые потоки.

Определение. Потоки  $\{f^t\}$  и  $\{g^t\}$  эквивалентны  $*$ ), если существует взаимно однозначное отображение

$$h: R^n \rightarrow R^n,$$

переводящее поток  $\{f^t\}$  в поток  $\{g^t\}$ , так что  $h \cdot f^t = g^t \cdot h$  для любого  $t \in R$  (рис. 142). Мы можем сказать, что поток  $\{f^t\}$  превращается в  $\{g^t\}$  при замене координат  $h$ .

При этом потоки называются:

1) *линейно эквивалентными*, если существует такое отображение  $h: R^n \rightarrow R^n$ , являющееся *линейным изоморфизмом*,  $h \in GL(R^n)$ ;

2) *дифференцируемо эквивалентными*, если существует такое отображение  $h: R^n \rightarrow R^n$ , являющееся *дiffeоморфизмом*;

3) *топологически эквивалентными*, если существует такое отображение  $h: R^n \rightarrow R^n$ , являющееся *гомеоморфизмом*, т. е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением.

**Задача 1.** Докажите, что из линейной эквивалентности вытекает дифференцируемая, а из дифференцируемой — топологическая.

Заметим, что отображение  $h$  переводит фазовые кривые потока  $\{f^t\}$  в фазовые кривые потока  $\{g^t\}$ .

**Задача 2.** Всякий ли линейный автоморфизм  $h \in GL(R^n)$ , переводящий фазовые кривые потока  $\{f^t\}$  в фазовые кривые потока  $\{g^t\}$ , осуществляет линейную эквивалентность потоков?

*Ответ.* Нет.

**Указание.** Рассмотреть  $n=1$ ,  $f^t x = e^t x$ ,  $g^t x = e^{2t} x$ .

**Задача 3.** Доказать, что отношения линейной, дифференцируемой и топологической эквивалентности являются настоящими отношениями эквивалентности, т. е.

$$f \sim f, \quad (f \sim g) \Rightarrow (g \sim f), \quad (f \sim g, g \sim k) \Rightarrow (f \sim k).$$

В частности, все сказанное применимо к фазовым потокам линейных систем. Для краткости мы будем говорить об эквивалентности самих систем.

Итак, все линейные системы мы тремя способами разбили на классы эквивалентности (линейной, дифференцируемой, топологической). Изучим эти классы подробнее.

$*$ ) Введенное здесь отношение эквивалентности называют также *сопряженностью* и *подобием*.

### 3. Линейная классификация.

**Теорема.** Пусть  $A, B: R^n \rightarrow R^n$  — линейные операторы, все собственные числа которых просты. Тогда системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \quad \text{и} \quad \dot{y} = By, \quad y \in R^n,$$

линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда собственные числа операторов  $A$  и  $B$  совпадают.

**Доказательство.** Для линейной эквивалентности линейных систем необходимо и достаточно, чтобы  $B = hAh^{-1}$  при некотором  $h \in GL(R^n)$  (рис. 143) (ибо  $\dot{y} = h\dot{x} = hAx = hAh^{-1}y$ ). Собственные числа операторов  $A$  и  $hAh^{-1}$  совпадают. (Здесь простота собственных чисел несущественна.)

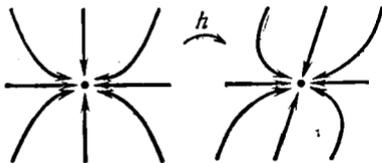


Рис. 143. Линейно эквивалентные системы.

Обратно, пусть собственные числа  $A$  простые и совпадают с собственными числами  $B$ . Тогда

$A$  и  $B$  разлагаются в прямые произведения одинаковых (линейно эквивалентных) одномерных и двумерных систем согласно § 20; поэтому они линейно эквивалентны.

**Задача 1.** Покажите, что системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

линейно не эквивалентны, хотя их собственные числа и одинаковы.

### 4. Дифференцируемая классификация. Очевидна

**Теорема.** Две линейные системы

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Bx, \quad x \in R^n,$$

дифференцируемо эквивалентны тогда и только тогда, когда они линейно эквивалентны \*).

**Доказательство.** Пусть  $h: R^n \rightarrow R^n$  — диффеоморфизм, переводящий фазовый поток системы  $A$  в фазовый поток системы  $B$ . Точка  $x=0$  неподвижна для фазового потока системы  $A$ . Поэтому  $h$  переводит  $0$  в одну из неподвижных точек  $c$  потока системы  $B$ , так что  $Bc=0$ . Диффеоморфизм  $d: R^n \rightarrow R^n$  сдвига на  $c(dx = x - c)$  переводит фазовый поток  $B$  в себя ( $(x-c) = x - c$ ). Диффеоморфизм

$$h_1 = d \circ h: R^n \rightarrow R^n$$

переводит поток  $A$  в поток  $B$  и оставляет  $0$  на месте:  $h_1(0) = 0$ .

Обозначим через  $H: R^n \rightarrow R^n$  производную диффеоморфизма  $h_1$  в  $0$ ,  $H = dh_1|_0 \in GL(R^n)$ . Диффеоморфизмы  $h_1 \circ e^{At} = e^{Bt} \circ h_1$  совпадают при любых  $t$ . Поэтому при любом  $t$  совпадают и их производные при  $x=0$ :

$$He^{At} = e^{Bt}H,$$

что и требовалось доказать.

\*) Не следует думать, однако, что всякий диффеоморфизм, устанавливающий их эквивалентность, линеен. Пример:  $A = B = 0$ .

## § 22. Топологическая классификация особых точек

Рассмотрим две линейные системы:

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Bx, \quad x \in R^n,$$

и предположим, что вещественные части всех их собственных чисел отличны от 0. Обозначим через  $m_-$  число собственных чисел с отрицательной вещественной частью и через  $m_+$  число собственных чисел с положительной вещественной частью, так что  $m_- + m_+ = n$ .

**1. Теорема.** Для топологической эквивалентности двух линейных систем, не имеющих собственных чисел с нулевой вещественной частью, необходимо и достаточно, чтобы количество

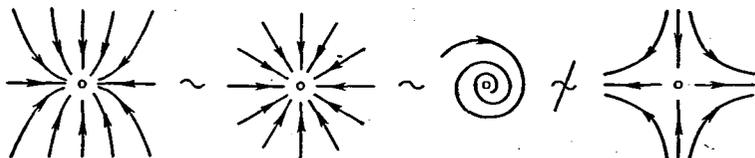


Рис. 144. Топологически эквивалентные и неэквивалентные системы.

собственных чисел с отрицательной (положительной) вещественной частью в той и в другой системе было одинаково:

$$m_-(A) = m_-(B), \quad m_+(A) = m_+(B).$$

Эта теорема утверждает, например, что устойчивые узлы и фокусы (рис. 144) топологически эквивалентны друг другу ( $m_- = 2$ ), но не эквивалентны седлу ( $m_- = m_+ = 1$ ).

Подобно индексу инерции невырожденной квадратичной формы, число  $m_-$  является единственным топологическим инвариантом системы.

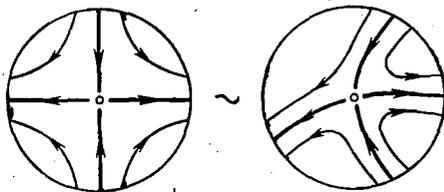


Рис. 145. Топологическая эквивалентность системы и ее линеаризации.

**Замечание.** Аналогичное предложение справедливо локально (в окрестности неподвижной точки) для нелинейных систем, линейные части которых не имеют чисто мнимых собственных чисел. В частности, такая система в окрестности неподвижной точки топологически эквивалентна своей линейной части (рис. 145). Мы не можем останавливаться на доказательстве этого предложения, весьма важного для исследования нелинейных систем.

**2. Редукция к случаю  $m_- = 0$ .** Топологическая эквивалентность линейных систем с одинаковыми  $m_-$  и  $m_+$  вытекает из следующих трех лемм:

**Лемма 1.** *Прямые произведения топологически эквивалентных систем топологически эквивалентны.*

То есть если системы, заданные операторами

$$A_1, B_1: R^{m_1} \rightarrow R^{m_1}; \quad A_2, B_2: R^{m_2} \rightarrow R^{m_2},$$

переводятся друг в друга гомеоморфизмами

$$h_1: R^{m_1} \rightarrow R^{m_1}, \quad h_2: R^{m_2} \rightarrow R^{m_2},$$

то существует гомеоморфизм

$$h: R^{m_1} + R^{m_2} \rightarrow R^{m_1} + R^{m_2},$$

переводящий фазовый поток системы-произведения

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = A_2 x_2$$

в фазовый поток системы-произведения

$$\dot{x}_1 = B_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = B_2 x_2.$$

Доказательство очевидно: надо положить

$$h(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2)).$$

Из курса линейной алгебры известна

**Лемма 2.** *Если у оператора  $A: R^n \rightarrow R^n$  нет чисто мнимых собственных чисел, то пространство  $R^n$  распадается в прямую сумму двух инвариантных относительно  $A$  подпространств,*

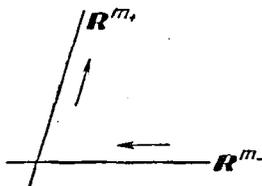


Рис. 146. Инвариантные подпространства оператора, не имеющего число мнимых собственных чисел.

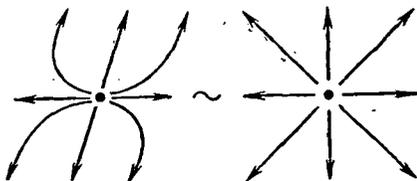


Рис. 147. Все неустойчивые узлы топологически эквивалентны.

$R^n = R^{m_-} \dot{+} R^{m_+}$ , так что все собственные числа сужения  $A$  на  $R^{m_-}$  имеют отрицательные вещественные части, а на  $R^{m_+}$  — положительные (рис. 146).

Это следует, например, из теоремы о жордановой нормальной форме.

Леммы 1 и 2 сводят доказательство топологической эквивалентности к следующему частному случаю:

**Лемма 3.** *Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть (рис. 147). Тогда система*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n,$$

*топологически эквивалентна стандартной (рис. 147):*

$$\dot{x} = x, \quad x \in R^n.$$

Эта лемма почти очевидна в одномерном случае и в случае фокуса на плоскости; а значит, — по лемме 1 — и в любой системе без кратных корней.

Мы проведем далее доказательство леммы 3 в общем случае.

**3. Функция Ляпунова.** Доказательство леммы 3 основано на построении специальной квадратичной формы — так называемой функции Ляпунова.

**Теорема.** Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть. Тогда в  $\mathbb{R}^n$  существует такая евклидова структура, что вектор  $Ax$  в каждой точке  $x \neq 0$  образует с радиус-вектором  $x$  острый угол.

Иными словами:

Существует такая положительно определенная квадратичная форма  $r^2$  в  $\mathbb{R}^n$ , что ее производная по направлению векторного поля  $Ax$  положительна:

$$L_{Ax} r^2 > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \quad (1)$$

Или еще:

Существует эллипсоид в  $\mathbb{R}^n$  с центром в 0 такой, что в каждой его точке  $x$  вектор  $Ax$  направлен наружу (рис. 148).

Легко проверить, что все три формулировки эквивалентны.

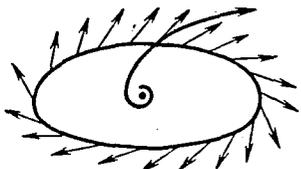


Рис. 148. Поверхность уровня функции Ляпунова.

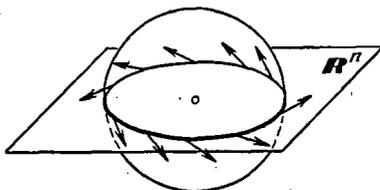


Рис. 149. Поверхность уровня функции Ляпунова в  $\mathbb{C}^n$ .

Мы докажем (и будем использовать в дальнейшем) эту теорему во второй формулировке. Доказывать ее удобнее в комплексном случае:

Пусть все собственные числа  $\lambda_k$  оператора  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  имеют положительные вещественные части. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма  $r^2: {}^R\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , производная которой по направлению векторного поля  ${}^R A z$  есть положительно определенная квадратичная форма:

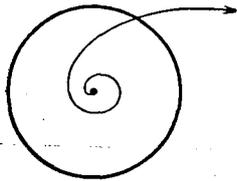
$$L_{{}^R A z} r^2 > 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0. \quad (2)$$

Применяя неравенство (2) в случае, когда оператор  $A$  является комплексификацией вещественного оператора, а  $z$  принадлежит вещественному подпространству (рис. 149), получаем вещественную теорему (1).

4. Построение функции Ляпунова. В качестве функции Ляпунова  $r^2$  мы будем брать сумму квадратов модулей координат в подходящем комплексном базисе:

$$r^2 = (z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^n z_k \bar{z}_k.$$

При фиксированном базисе мы можем отождествить вектор  $z$  с набором чисел  $z_1, \dots, z_n$  и оператор  $A: C^n \rightarrow C^n$  с матрицей  $(a_{ki})$ . Вычисление показывает, что производная является квадратичной формой:



$$L_{R_{Az}}(z, \bar{z}) = (Az, \bar{z}) + (z, \overline{Az}) = 2 \operatorname{Re}(Az, \bar{z}). \quad (3)$$

Если базис собственный, то полученная форма положительно определена (рис. 150). Действительно, в этом случае

$$2 \operatorname{Re}(Az, \bar{z}) = 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \lambda_k |z_k|^2. \quad (4)$$

Рис. 150. Положительная определенность формы (4) в случае  $n=1$ .

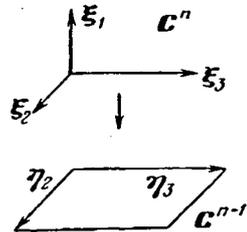
По условию все вещественные части собственных чисел  $\lambda_k$  положительны. Поэтому форма (4) положительно определена.

Если оператор  $A$  не имеет собственного базиса, то он имеет почти собственный базис, которым можно с таким же успехом воспользоваться для построения функции Ляпунова.

Точнее, справедлива

Лемма 4. Пусть  $A: C^n \rightarrow C^n$  —  $C$ -линейный оператор и  $\varepsilon > 0$ . Тогда в  $C^n$  можно так выбрать базис  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , что матрица  $A$  будет верхнетреугольной и все элементы выше диагонали будут по модулю меньше  $\varepsilon$ :

$$(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & < \varepsilon \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$



Доказательство. Существование базиса, в котором матрица верхнетреугольная, следует, например, из теоремы о жордановой нормальной форме.

Рис. 151. Построение базиса, в котором матрица оператора треугольная.

Такой базис легко построить индукцией по  $n$ , пользуясь лишь существованием у всякого линейного оператора  $A: C^n \rightarrow C^n$  собственного вектора. Пусть  $\xi_1$  — этот вектор (рис. 151). Рассмотрим фактор-пространство  $C^n / C\xi_1 \cong C^{n-1}$ . Оператор  $A$  задает на фактор-пространстве оператор  $\tilde{A}: C^{n-1} \rightarrow C^{n-1}$ . Пусть  $\eta_2, \dots, \eta_n$  — базис в  $C^{n-1}$ , в котором матрица оператора  $\tilde{A}$  верхнетреугольная. Обозначим через  $\xi_2, \dots, \xi_n$  каких-нибудь представителей классов  $\eta_2, \dots, \eta_n$  в  $C^n$ . Тогда базис  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — искомый.

Пусть матрица оператора  $A$  в базисе  $\xi_1, \dots, \xi_n$  верхнетреугольная. Покажем, что наддиагональные члены можно сделать сколь угодно малыми, заменяя векторы базиса на пропорциональные им векторы. Действительно, пусть  $a_{kl}$  — элементы матрицы оператора  $A$  в базисе  $\xi_k$ , так что  $a_{kl} = 0$  при  $k > l$ . В базисе  $\xi'_k = N^k \xi_k$  элементы матрицы оператора  $A$  будут  $a'_{kl} = a_{kl}/N^{l-k}$ . При достаточно большом  $N$  для всех  $l > k$  будет  $|a'_{kl}| < \epsilon$ .

Лемма 4 доказана.

Сумму квадратов модулей координат в выбранном «ε-почти собственном» базисе мы и возьмем в качестве функции Ляпунова (при достаточно малом ε).

5. Оценка производной. Рассмотрим множество всех квадратичных форм в  $R^m$ . Это множество имеет естественную структуру линейного пространства  $R^{\frac{m(m+1)}{2}}$ .

Очевидна

Лемма 5. Множество положительно определенных квадратичных форм в  $R^m$  открыто в  $R^{\frac{m(m+1)}{2}}$ .

То есть если форма  $a = \sum_{k,l=1}^m a_{kl} x_k x_l$  положительно определена, то существует  $\epsilon > 0$  такое, что всякая форма  $a + b$ , где  $|b_{kl}| < \epsilon$  (для всех  $k, l, 1 \leq k, l \leq m$ ), тоже положительно определена.

Доказательство. Форма  $a$  положительна во всех точках единичной сферы  $\sum_{k=1}^m x_k^2 = 1$ . Сфера компактна, а форма непрерывна. Поэтому нижняя грань достигается и, значит, всюду на сфере  $a(x) \geq \alpha > 0$ .

Если  $|b_{kl}| < \epsilon$ , то на сфере  $|b(x)| \leq \sum |b_{kl}| \leq m^2 \epsilon$ .

Поэтому при  $\epsilon < \alpha/m^2$  форма  $a + b$  положительна на сфере и, значит, положительно определена. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из нашего рассуждения вытекает также, что любая положительно определенная квадратичная форма удовлетворяет везде неравенству

$$\alpha \|x\|^2 \leq a(x) \leq \beta \|x\|^2, \quad 0 < \alpha < \beta. \quad (5)$$

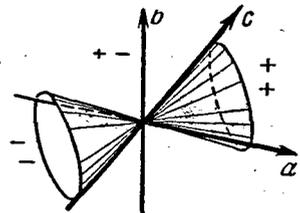


Рис. 152. Пространство квадратичных форм.

Задача 1. Докажите, что множество невырожденных квадратичных форм с данной сигнатурой открыто.

Пример 1. Пространство квадратичных форм от двух переменных  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  — это трехмерное пространство с координатами  $a, b, c$  (рис. 152). Конус  $b^2 = ac$  делит это пространство на три открытые части соответственно сигнатурам.

Мы используем лемму 5, чтобы доказать следующее: при достаточно малом  $\epsilon$  производная по направлению векторного поля  ${}^R A z$  от суммы квадратов модулей координат в « $\epsilon$ -почти собственном» базисе, выбранном по лемме 4, положительно определена.

Согласно формуле (3) эта производная является квадратичной формой вещественных и мнимых частей координат  $z_k = x_k + iy_k$ .

Выделим в формуле (3) слагаемые с диагональными и наддиагональными элементами матрицы  $(A)$ :

$$L_{R_{Az}} r^2 = P + Q, \quad \text{где } P = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n a_{kk} z_k \bar{z}_k, \quad Q = 2 \operatorname{Re} \sum_{k < l} a_{kl} z_k \bar{z}_l.$$

Заметим, что диагональные члены треугольной матрицы  $(A)$  — это собственные числа  $\lambda_k$  оператора  $A$ . Поэтому *квадратичная форма*

$$P = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \lambda_k (x_k^2 + y_k^2)$$

переменных  $x_k, y_k$  положительно определена и не зависит от выбора базиса \*).

По лемме 5 заключаем, что при достаточно малом  $\epsilon$  форма  $P + Q$  (близкая к  $P$ ) также положительно определена. Ибо коэффициенты формы  $Q$  переменных  $x_k, y_k$  при достаточно малом  $\epsilon$  становятся сколь угодно малыми (поскольку  $|a_{kl}| < \epsilon$  при  $k < l$ ).

Неравенство (2), а с ним и (1), доказано.

З а м е ч а н и е. Поскольку  $L_{Ax} r^2$  является положительно определенной квадратичной формой, имеет место неравенство вида (5):

$$\alpha r^2 \ll L_{Ax} r^2 \leq \beta r^2, \quad (5')$$

где  $\beta > \alpha > 0$  — некоторые постоянные.

Таким образом, сформулированная в п. 3 теорема о функции Ляпунова доказана.

Следующая серия задач приводит к другому доказательству этой теоремы.

Задача 2. Докажите, что дифференцирование по направлению векторного поля  $Ax$  в  $R^n$  задает линейный оператор  $L_A: R^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow R^{\frac{n(n+1)}{2}}$  из пространства квадратичных форм на  $R^n$  в себя.

Задача 3. Зная собственные числа  $\lambda_i$  оператора  $A$ , найти собственные числа оператора  $L_A$ .

О т в е т.  $\lambda_i + \lambda_j, 1 \leq i, j \leq n$ .

У к а з а н и е. Пусть  $A$  имеет собственный базис. Тогда собственными векторами  $L_A$  будут квадратичные формы, равные попарным произведениям линейных форм, являющихся собственными векторами оператора, дуального к  $A$ .

\* Следует отметить, что заданное формой  $P$  отображение  $R^n \rightarrow R$  зависит от выбора базиса.

**Задача 4.** Докажите, что оператор  $L_A$  является изоморфизмом, если  $A$  не имеет противоположных собственных чисел. В частности, если вещественные части всех собственных чисел оператора  $A$  одного знака, то каждая квадратичная форма на  $R^n$  есть производная некоторой квадратичной формы по направлению векторного поля  $Ax$ .

**Задача 5.** Докажите, что если вещественные части всех собственных чисел оператора  $A$  положительны, то форма, производная которой по направлению поля  $Ax$  положительно определена, сама положительно определена (и, следовательно, удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы).

**Указание.** Представить форму в виде интеграла ее производной вдоль фазовых кривых.

**6. Построение гомеоморфизма  $h$ .** Приступаем к доказательству леммы 3. Гомеоморфизм  $h: R^n \rightarrow R^n$ , переводящий фазовый поток  $\{f^t\}$  уравнения  $\dot{x} = Ax$  ( $\text{Re } \lambda_k > 0$ ) в фазовый поток  $\{g^t\}$  уравнения  $\dot{x} = x$ , будем строить следующим образом. Рассмотрим сферу \*)

$$S = \{x \in R^n; r^2(x) = 1\},$$

где  $r^2$  — функция Ляпунова из (1).

Точки этой сферы гомеоморфизм  $h$  будет оставлять на месте. Пусть  $x_0$  — точка сферы (рис. 153).

Точку  $f^t x_0$  фазовой траектории уравнения  $\dot{x} = Ax$  отображение  $h$  будет переводить в точку  $g^t x_0$  фазовой траектории уравнения  $\dot{x} = x$ :

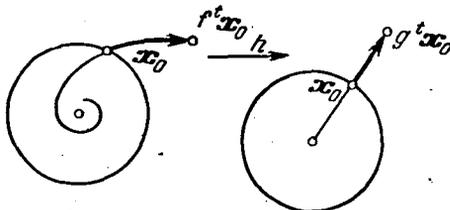


Рис. 153. Построение гомеоморфизма  $h$ .

$$\begin{cases} h(f^t x_0) = g^t x_0 & \forall t \in R, x_0 \in S, \\ h(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Мы должны проверить:

1) что формула (6) однозначно определяет значение  $h$  в любой точке  $x \in R^n$ ;

2) что отображение  $h: R^n \rightarrow R^n$  взаимно однозначно и взаимно непрерывно;

3) что  $h \circ f^t = g^t \circ h$ .

Доказательства всех этих утверждений очевидны.

**7. Доказательство леммы 3.**

**Лемма 6.** Пусть  $\varphi: R \rightarrow R^n$  — какое-нибудь отличное от 0 решение уравнения  $\dot{x} = Ax$ . Составим вещественную функцию вещественного переменного  $t$ :

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)).$$

Тогда отображение  $\rho: R \rightarrow R$  является диффеоморфизмом, причем

$$\alpha \leq \frac{d\rho}{dt} \leq \beta.$$

\*) Если угодно, эллипсоид.

Доказательство. По теореме единственности

$$r^2(\varphi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in R.$$

Согласно (5') находим для  $d\rho/dt = L_{Ax} r^2/r^2$  оценку

$$\alpha \leq \frac{d\rho}{dt} \leq \beta,$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 6 следует, что:

1) Каждая точка  $x \neq 0$  представляется в виде  $x = f^t x_0$ , где  $x_0 \in S$ ,  $t \in R$ ,  $f^t$  — фазовый поток уравнения  $\dot{x} = Ax$ .

Действительно, рассмотрим решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(0) = x$ . По лемме 6 при некотором  $\tau$  будет  $r^2(\varphi(\tau)) = 1$ . Точка  $x_0 = \varphi(\tau)$  принадлежит  $S$ . Полагая  $t = -\tau$ , получим  $x = f^t x_0$ .

2) Такое представление единственно.

Действительно, фазовая кривая, выходящая из  $x$  (рис. 153), единственна и пересекает сферу в одной точке  $x_0$  (по лемме 6); единственность  $t$  также следует из монотонности  $\rho(t)$  (лемма 6).

Итак, мы построили взаимно однозначное отображение прямого произведения прямой и сферы на евклидово пространство без одной точки

$$F: R \times S^{n-1} \rightarrow R^n \setminus 0, \quad F(t, x_0) = f^t x_0.$$

Из теоремы о зависимости решения от начальных условий вытекает, что как отображение  $F$ , так и обратное отображение непрерывно (и даже является диффеоморфизмом).

Заметим теперь, что для стандартного уравнения  $\dot{x} = x$  имеем  $\frac{d\rho}{dt} = 2$ .

Поэтому отображение

$$G: R \times S^{n-1} \rightarrow R^n \setminus 0, \quad G(t, x_0) = g^t x_0$$

также взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Отображение  $h$  по определению (6) совпадает с отображением  $G \circ F^{-1}: R^n \setminus 0 \rightarrow R^n \setminus 0$  всюду, кроме точки 0.

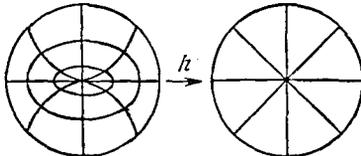


Рис. 154. Гомеоморфизм  $h$  является диффеоморфизмом всюду, кроме 0.

Таким образом, мы доказали, что  $h: R^n \rightarrow R^n$  — взаимно однозначное отображение.

Непрерывность  $h$  и  $h^{-1}$  всюду, кроме точки 0, следует из непрерывности  $F$ ,  $F^{-1}$  и  $G$ ,  $G^{-1}$  (в действительности  $h$  — диффеоморфизм всюду, кроме точки 0; рис. 154).

Непрерывность  $h$  и  $h^{-1}$  в точке 0 следует из леммы 6. Эта лемма позволяет

получить даже явную оценку  $r^2(h(x))$  через  $r^2(x)$ ,  $\|x\| \leq 1$ :

$$(r^2(x))^{2/\alpha} \leq r^2(h(x)) \leq (r^2(x))^{2/\beta}.$$

Действительно, пусть  $x = F(t, x_0)$ ,  $t \leq 0$ . Тогда  $\beta t \leq \ln r^2(x) \leq \alpha t$  и  $\ln r^2(h(x)) = 2t$ . Наконец, при  $x \neq 0$  имеем  $x = f^s x_0$ , поэтому

$$\begin{aligned} (h \circ f^t)(x) &= h(f^t(f^s(x_0))) = h(f^{t+s}(x_0)) = g^{t+s}(x_0) = \\ &= g^t(g^s(x_0)) = g^t(h(x)) = (g^t \circ h)(x). \end{aligned}$$

При  $x = 0$  также  $(h \circ f^t)x = (g^t \circ h)x$ . Итак, утверждения 1), 2) 3) п. 6 доказаны. Доказательство леммы 3 закончено.

8. Доказательство теоремы о топологической классификации. Из лемм 1, 2, 3 следует, что всякая линейная система  $\dot{x} = Ax$ , у которой оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$  не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью, топологически эквивалентна стандартному многомерному седлу (рис. 155):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ x_1 &\in R^{m_-}, \\ x_2 &\in R^{m_+}. \end{aligned}$$

Следовательно, две такие системы с одинаковыми числами  $m_-, m_+$  топологически эквивалентны друг другу.

Заметим, что подпространства  $R^{m_-}$  и  $R^{m_+}$  инвариантны относительно фазового потока  $\{g^t\}$ . При увеличении  $t$  всякая точка  $R^{m_-}$  приближается к 0.

Задача 1. Докажите, что  $g^t x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  тогда и только тогда, когда  $x \in R^{m_-}$ .

Поэтому  $R^{m_-}$  называется *входящим усом* седла. Точно так же  $R^{m_+}$  называется *выходящим усом*. Выходящий ус определяется условием  $g^t x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

Докажем теперь вторую часть теоремы о топологической классификации: у топологически эквивалентных систем одинаково количество собственных чисел с отрицательной вещественной частью.

Это количество есть размерность  $m_-$  входящего уса. Итак, достаточно доказать, что *размерности входящих усов у топологически эквивалентных седел одинаковы*.

Заметим, что всякий гомеоморфизм  $h$ , переводящий фазовый поток одного седла в фазовый поток другого, обязан переводить входящий ус одного во входящий ус другого (поскольку стремление к 0 при  $t \rightarrow +\infty$  сохраняется при гомеоморфизме). Поэтому гомеоморфизм  $h$  осуществляет также гомеоморфное отображение входящего уса одного седла на входящий ус другого.

Совпадение размерностей усов вытекает теперь из следующего топологического предложения:

*Размерность пространства  $R^n$  — топологический инвариант. Иными словами, гомеоморфизм  $h: R^m \rightarrow R^n$  существует только между пространствами одинаковой размерности.*

Хотя это предложение и кажется очевидным\*), доказательство его не просто и не будет здесь проводиться.

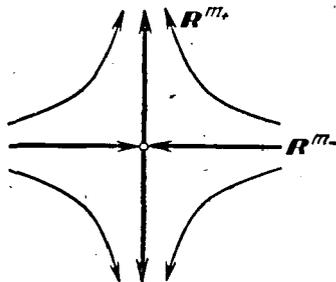


Рис. 155. Стандартное седло.

\*) Существуют, однако, взаимно однозначные отображения  $R^m \rightarrow R^n$ , а также непрерывные отображения  $R^m$  на  $R^n$  при  $m < n$  (например,  $R^1 \rightarrow R^2$ ).

**Задача 2.** Докажите, что 4 седла с трехмерным фазовым пространством и с  $(m_-, m_+) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$  топологически не эквивалентны (не пользуясь недоказанным топологическим предположением).

**Указание.** Одномерный ус состоит из трех фазовых кривых, а более чем одномерный — из бесконечного числа (рис. 156).

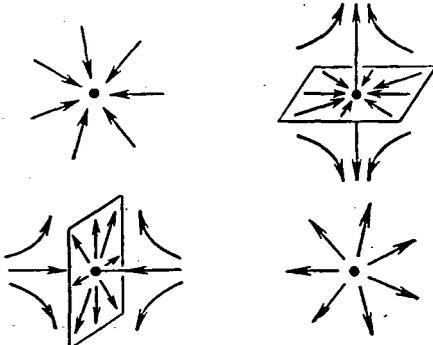


Рис. 156. Усы трехмерных седел.

ших собственных чисел с модулем 1. Показать, что единственным топологическим инвариантом является количество собственных чисел, модуль которых меньше 1.

Таким образом, топологическая классификация линейных систем с ненулевыми вещественными частями собственных чисел в  $R^1$ ,  $R^2$  и  $R^3$  проведена полностью, тогда как в  $R^n$  при  $n > 3$  мы вынуждены ссылаться на недоказанное утверждение о топологической инвариантности размерности.

**Задача 3.** Провести топологическую классификацию линейных операторов  $A: R^n \rightarrow R^n$ , не имеющих

### § 23. Устойчивость положений равновесия

Вопрос об устойчивости положения равновесия нелинейной системы решается так же, как для линеаризованной системы, если у последней нет собственных чисел на мнимой оси.

**1. Устойчивость по Ляпунову.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset R^n, \quad (1)$$

где  $v$  —  $r > 2$  раз дифференцируемое в области  $U$  векторное поле. Предположим, что уравнение (1) имеет положение равновесия (рис. 157). Выберем координаты  $x_i$  так, чтобы положение равновесия было началом координат:  $v(0) = 0$ .

Решение с начальным условием  $\varphi(t_0) = 0$  есть  $\varphi = 0$ . Нас интересует поведение решений с близкими начальными условиями.

**Определение.** Положение равновесия  $x = 0$  уравнения (1) называется *устойчивым* (или *устойчивым по Ляпунову*), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  (зависящее только от  $\varepsilon$  и не зависящее от  $t$ , о котором идет речь ниже) такое, что для всякого  $x_0$ , для которого \*)  $\|x_0\| < \delta$ , решение  $\varphi$  уравнения (1) с начальным

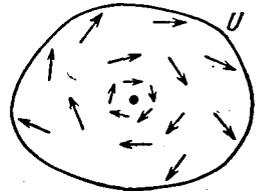


Рис. 157. Останутся ли вблизи положения равновесия фазовые кривые, начинающиеся в его достаточно малой окрестности?

\*) Если  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , то  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

условием  $\varphi(0) = x_0$  продолжается на всю полуось  $t > 0$  и удовлетворяет неравенству  $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t > 0$  (рис. 158).

Задача 1. Исследовать устойчивость положений равновесия:

- 1)  $\dot{x} = 0$ ; 2)  $\dot{x} = x$ ; 3)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2; \end{cases}$  5)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1. \end{cases}$

Задача 2. Докажите, что приведенное определение корректно, т. е. что устойчивость положения равновесия не зависит от системы координат, участвовавшей в определении.

Задача 3. Пусть известно, что для любых  $N > 0, \varepsilon > 0$  существует такое решение  $\varphi$  уравнения (1), что для некоторого  $t > 0 \|\varphi(t)\| > N \|\varphi(0)\|$ , причем  $\|\varphi(0)\| < \varepsilon$ . Вытекает ли отсюда неустойчивость положения равновесия  $x = 0$ ?

2. Асимптотическая устойчивость.

Определение. Положение равновесия  $x = 0$  уравнения (1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво (по Ляпунову) и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$$

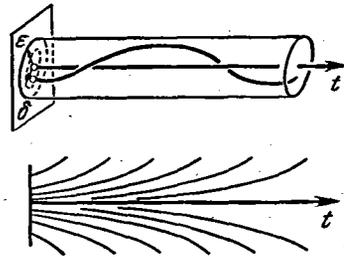


Рис. 158. Устойчивое и неустойчивое положение равновесия: различие в поведении интегральных кривых.

для всякого решения  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(0)$ , лежащим в достаточно малой окрестности нуля (рис. 159).

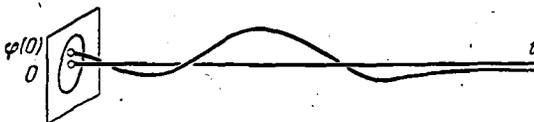


Рис. 159. Асимптотически устойчивое положение равновесия: интегральные кривые.

Задача 1. Решить задачи 1), 2), 3) п. 1, заменив везде устойчивость асимптотической устойчивостью.

Задача 2. Вытекает ли устойчивость положения равновесия по Ляпунову из того, что каждое решение стремится к этому положению равновесия при  $t \rightarrow +\infty$ ?

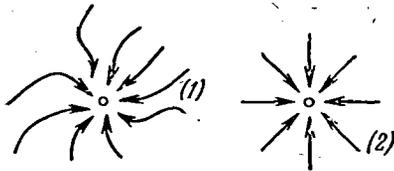


Рис. 160. Фазовые кривые уравнений (1) и (2).

3. Теорема об устойчивости по первому приближению. Наряду с (1) рассмотрим линеаризованное уравнение (рис. 160)

$$\dot{x} = Ax, \quad A: R^n \rightarrow R^n. \quad (2)$$

Тогда  $v(x) = v_1 + v_2, \quad v_1(x) = Ax, \quad v_2(x) = O(\|x\|^2)$ .

**Теорема.** Пусть все собственные числа  $\lambda$  оператора  $A$  лежат в левой полуплоскости:  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  (рис. 161). Тогда положение равновесия  $x=0$  уравнения (1) асимптотически устойчиво.



Рис. 161. Собственные числа оператора  $A$ .

**Задача 1.** Приведите пример неустойчивого (по Ляпунову) положения равновесия уравнения (1), для которого все  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ .

**Замечание.** Можно доказать, что если вещественная часть хотя бы одного собственного числа  $\lambda$  положительна, то положение равновесия неустойчиво. В случае нулевых вещественных частей устойчивость зависит от членов ряда Тейлора выше первой степени.

**Задача 2.** Устойчиво ли (по Ляпунову и асимптотически) нулевое положение равновесия системы  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1^n$ ?

**Ответ.** Если  $n$  четно, неустойчиво (по Ляпунову); если нечетно, то устойчиво (по Ляпунову), но не асимптотически.

**4. Доказательство теоремы.** Согласно § 22, п. 3 существует функция Ляпунова: положительно определенная квадратичная форма  $r^2$ , производная которой по направлению линейного поля  $v_1$  отрицательно определена:

$$L_{v_1} r^2 \leq -2\gamma r^2,$$

где  $\gamma$  — положительная постоянная (рис. 162;  $r^2 = \text{const}$ ).

**Лемма.** В достаточно малой окрестности точки  $x=0$  производная функции Ляпунова по направлению нелинейного поля  $v$  удовлетворяет неравенству

$$L_v r^2 \leq -\gamma r^2. \quad (3)$$

Действительно,

$$L_v r^2 = L_{v_1} r^2 + L_{v_2} r^2.$$

Покажем, что при малых  $r$  второе слагаемое гораздо меньше первого:

$$L_{v_2} r^2 = O(r^3). \quad (4)$$

В самом деле, для любого поля  $u$  и любой функции  $f$

$$L_u f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i.$$

В нашем случае ( $u = v_2$ ,  $f = r^2$ )  $u_i = O(r^2)$  и  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = O(r)$  (почему?), откуда и вытекает соотношение (4).

Итак, существуют  $C > 0$ ,  $\sigma > 0$  такие, что для всех  $x$  с  $\|x\| < \sigma$  выполнено неравенство

$$|L_{v_2} r^2|_x \leq C |r^2(x)|^{3/2}.$$

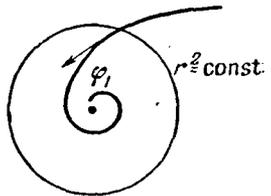


Рис. 162. Поверхность уровня функции Ляпунова.

Правая часть не больше  $\gamma r^2$  при достаточно малых  $\|x\|$ , так что в некоторой окрестности точки  $x=0$

$$L_{\sigma} r^2 \leq -2\gamma r^2 + \gamma r^2 = -\gamma r^2.$$

Лемма доказана.

Пусть  $\varphi$  — решение уравнения (1), отличное от нулевого, с начальным условием в достаточно малой окрестности точки  $x=0$ . Определим функцию времени  $\rho$  соотношением

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)), \quad t \geq 0.$$

По теореме единственности  $r^2(\varphi(t)) \neq 0$ , так что функция  $\rho$  определена и дифференцируема. Согласно неравенству (3)

$$\dot{\rho} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} r^2 \cdot \varphi = \frac{L_{\sigma} r^2}{r^2} \leq -\gamma.$$

Отсюда вытекает, что  $r^2(\varphi(t))$  монотонно убывает и стремится к 0 при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leq \rho(0) - \gamma t, \\ r^2(\varphi(t)) &\leq r^2(\varphi(0)) e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

что и требовалось доказать.

Задача 1. Указать пробел в приведенном доказательстве.

Решение. Мы не доказали, что решение  $\varphi$  продолжается вперед неограниченно.

Рассмотрим такое  $\sigma > 0$ , что при  $\|x\| < \sigma$  выполнено неравенство (3).

Рассмотрим компакт в расширенном фазовом пространстве (рис. 163)

$$F = \{x, t \mid r^2(x) \leq \sigma, |t| \leq T\}.$$

Рассмотрим решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(0)$ , где  $r^2(\varphi(0)) < \sigma$ . По теореме о продолжении  $\varphi$  можно продолжить вперед до границы цилиндра  $F$ . Но пока точка  $(t, \varphi(t))$  принадлежит  $F$ , производная функции  $r^2(\varphi(t))$  отрицательна. Поэтому решение не может выйти на боковую поверхность цилиндра  $F$  (где  $r^2 = \sigma^2$ ) и, значит, продолжается до торца  $t=T$ .

Поскольку  $T$  произвольно (и не зависит от  $\sigma$ ), решение  $\varphi$  продолжается вперед неограниченно, причем  $r^2(\varphi(t)) < \sigma^2$  и неравенство (3) имеет место при всех  $t \geq 0$ .

Замечание 1. Мы доказали больше, чем асимптотическую устойчивость положения равновесия. Из неравенства (5) видно, что сходимость  $\varphi(t) \rightarrow 0$  равномерная (относительно начальных условий  $x_0$ , достаточно близких к 0).

Кроме того, неравенство (5) указывает скорость сходимости (экспоненциальную).

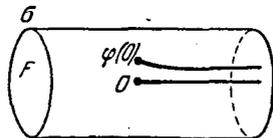


Рис. 163. Неограниченная продолжительность решения вперед.

По существу, теорема утверждает, что равномерная экспоненциальная сходимость решений линейного уравнения (2) к нулю не нарушается при нелинейном возмущении  $v_2(x) = O(\|x\|^2)$  правой части уравнения. Аналогичное утверждение справедливо для различных возмущений более общей природы. Например, можно было бы рассмотреть неавтономное возмущение  $v_2(x, t)$ , для которого

$$\|v_2(x, t)\| \leq \varphi(\|x\|),$$

где  $\varphi(\|x\|) = o(\|x\|)$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Задача 2.** Докажите, что в условиях теоремы уравнения (1) и (2) топологически эквивалентны в окрестности положения равновесия.

**Замечание 2.** В связи с доказанной выше теоремой мы приходим к следующей алгебраической задаче (так называемая проблема Рауса — Гурвица):

Требуется узнать, лежат ли все корни данного многочлена в левой полуплоскости.

Этот вопрос решается конечным числом арифметических действий над коэффициентами многочлена. Соответствующие алгоритмы описаны в курсах алгебры (критерий Гурвица, метод Штурма) и комплексного переменного (принцип аргумента, методы Вышнеградского, Найквиста и Михайлова). См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», 1968, гл. 9; М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958, гл. V; см. также монографию: Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, Труды МИАН им. Стеклова, XXVI, Изд-во АН СССР, 1949. Мы вернемся к проблеме Рауса — Гурвица в § 36, 5.

## § 24. Случай чисто мнимых собственных чисел

Линейные уравнения без чисто мнимых собственных чисел детально исследованы в §§ 21, 22. Их фазовые кривые ведут себя достаточно просто (седло, § 22, п. 8).

Линейные уравнения с чисто мнимыми собственными числами доставят нам примеры более сложного поведения фазовых кривых.

Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний консервативных систем (см. § 25, п. 6).

**1. Топологическая классификация.** Пусть все собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \quad A: R^n \rightarrow R^n, \quad (1)$$

чисто мнимы.

В каких случаях два уравнения вида (1) топологически эквивалентны?

**Задача 1.** Докажите, что в случае плоскости ( $n = 2, \lambda_{1,2} = \pm i\omega \neq 0$ ) для топологической эквивалентности двух уравнений вида (1) необходима и достаточна алгебраическая эквивалентность, т. е. одинаковость собственных чисел.

В настоящее время аналогичный результат доказан и при  $n > 2$ .

**2. Пример.** Рассмотрим уравнение в  $R^4$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2. \end{matrix} \quad (2)$$

Пространство  $R^4$  распадается в прямую сумму двух инвариантных плоскостей (рис. 164):  $R^4 = R_{1,2} + R_{3,4}$ . Система (2) распадается на две независимые:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in R_{1,2}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad (x_3, x_4) \in R_{3,4}.$$

В каждой из плоскостей фазовые кривые — окружности

$$S^1 = \{x \in R_{1,2}: x_1^2 + x_2^2 = C > 0\}$$

или точки ( $C = 0$ ), и фазовый поток состоит из вращений (на угол  $\omega_1 t$  и  $\omega_2 t$  соответственно).

Каждая фазовая кривая уравнения (2) принадлежит прямому произведению фазовых кривых на плоскостях  $R_{1,2}$  и  $R_{3,4}$ . Пусть эти две кривые — окружности.

Прямое произведение двух окружностей

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{x \in R^4: x_1^2 + x_2^2 = C, x_3^2 + x_4^2 = D\}$$

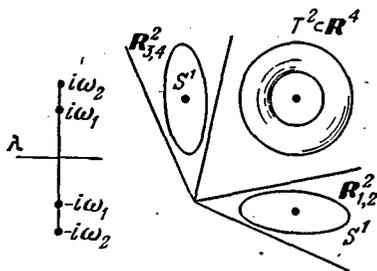


Рис. 164. Фазовое пространство системы (2).

называется *двумерным тором*.

Чтобы лучше представить себе тор  $T^2$ , можно поступить следующим образом. Рассмотрим в  $R^3$  поверхность баранки (рис. 165), полученную при вращении окружности вокруг лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее оси. Точка такой поверхности задается двумя угловыми координатами  $\varphi_1, \varphi_2$  mod  $2\pi$ . Координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  задают диффеоморфизм поверхности баранки и прямого произведения  $T^2$  двух окружностей.

Координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно назвать *долготой* и *широтой*. Карту тора  $T^2$  (см. рис. 166) можно изобразить на квадрате  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$  плоскости  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , «склеив» точки  $(\varphi_1, 0)$  и  $(\varphi_1, 2\pi)$  и  $(0, \varphi_2)$  и  $(2\pi, \varphi_2)$ . Можно также считать картой всю плоскость  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , но тогда каждая точка тора будет иметь

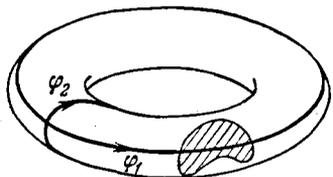


Рис. 165. Тор.

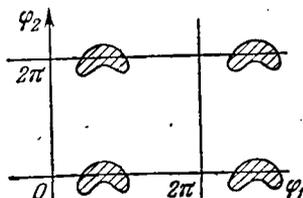


Рис. 166. Карта тора.

бесконечное число изображений на карте (подобно двум изображениям Чукотки на карте полушарий).

Фазовый поток уравнения (2) оставляет тор  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  на месте. Фазовые кривые уравнения (2) лежат на поверхности  $T^2$ . Если  $\varphi_1$  — полярный угол на плоскости  $\mathbb{R}_{1,2}$ , отсчитываемый от орта  $x_2$  к орту  $x_1$ , то согласно (3)  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ . Аналогично, отсчитывая  $\varphi_2$

от  $x_4$  к  $x_3$ , получаем  $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$ . Итак:

Фазовые траектории потока (2) на поверхности  $T^2$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2. \quad (4)$$

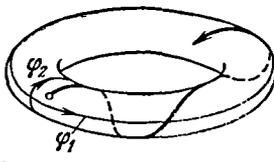
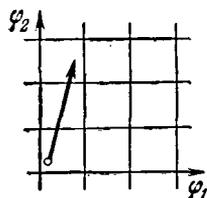


Рис. 167. Обмотка тора.

Широта и долгота фазовой точки меняются равномерно, и на карте тора движение изображается прямой линией, а на поверхности баранки получается «обмотка» (рис. 167).

3. Фазовые кривые уравнения (4) на торе. Числа  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  называются *рационально независимыми*, если из  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$  с целыми  $k_1$  и  $k_2$  следует  $k_1 = k_2 = 0$ . Например,  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{8}$  рационально зависимы, а  $\sqrt{6}$  и  $\sqrt{8}$  нет.

Теорема. Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  рационально зависимы, то всякая фазовая кривая уравнения (4) на торе замкнута. Если же  $\omega_1$  и  $\omega_2$  рационально независимы, то всякая фазовая кривая уравнения (4) всюду плотна\*) на торе  $T^2$  (рис. 168).

\*) Множество  $A$  всюду плотно в пространстве  $B$ , если в сколь угодно малой окрестности любой точки пространства  $B$  есть точка множества  $A$ .

Иными словами:

Если в каждой клетке бесконечной шахматной доски сидит одинаковый (и одинаково расположенный) заяц и охотник стреляет по направлению с рациональным тангенсом угла наклона к линиям доски, то он попадет хоть в одного зайца. (Ясно, что если тангенс угла наклона рационален, то достаточно малых зайцев можно расположить так, что охотник промахнется.)

**Лемма.** Рассмотрим поворот окружности  $S^1$  на угол  $\alpha$ , несоизмеримый с  $2\pi$  (рис. 169). Тогда образы любой точки на окружности при повторении поворота

$$\varphi, \varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha, \varphi + 3\alpha, \dots \pmod{2\pi}$$

образуют множество, всюду плотное на окружности.

Доказательство можно извлечь из строения замкнутых подгрупп прямой (см. § 10). Мы проведем его заново.

**Принцип ящиков Дирихле.** Если в  $k$  ящиках лежит  $k+1$  предмет, то хотя бы в одном ящике больше одного предмета.

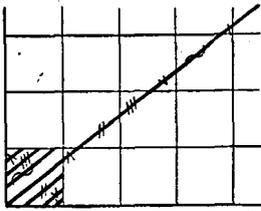


Рис. 168. Всяду плотная кривая на торе.

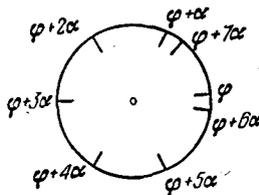


Рис. 169. Образы точки окружности при повторении поворота на угол  $\alpha$ .

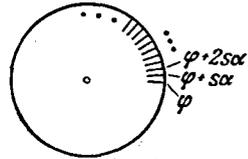


Рис. 170. Точки  $\varphi + Ns\alpha$ .

Разделим окружность на  $k$  равных полуинтервалов длины  $2\pi/k$ . По принципу ящиков среди первых  $k+1$  точек нашей последовательности есть 2 точки в одном полуинтервале. Пусть это точки  $\varphi + p\alpha$  и  $\varphi + q\alpha$ ,  $p > q$ . Рассмотрим  $s = p - q$ . Угол поворота  $s\alpha$  отличается от кратного  $2\pi$  меньше чем на  $2\pi/k$ . В последовательности точек  $\varphi, \varphi + s\alpha, \varphi + 2s\alpha, \varphi + 3s\alpha, \dots \pmod{2\pi}$  (рис. 170) каждые две соседние точки отстоят на одинаковое расстояние, меньшее чем  $2\pi/k$ . Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Выбрав  $k$  достаточно большим, мы можем сделать  $2\pi/k < \varepsilon$ . В любой  $\varepsilon$ -окрестности любой точки  $S^1$  есть точки последовательности

$$\varphi + Ns\alpha \pmod{2\pi}.$$

Лемма доказана.

**Замечание.** Мы не использовали несоизмеримость  $\alpha$  с  $2\pi$ . Между тем очевидно, что при  $\alpha$ , соизмеримом с  $2\pi$ , лемма неверна.

**Задача 1.** Найти и восполнить пробел в доказательстве леммы.

Доказательство теоремы. Решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2 t. \quad (5)$$

Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  рационально зависимы:

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = 0, \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0.$$

Уравнения относительно  $T$

$$\omega_1 T = 2\pi k_2, \quad \omega_2 T = -2\pi k_1$$

совместны. Их решение  $T$  и является периодом замкнутой фазовой кривой (5).

Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  рационально независимы. Тогда  $\omega_1/\omega_2$  — иррациональное число. Рассмотрим последовательные точки пересечения фазовой кривой (5) с меридианом  $\varphi_1 = 0 \pmod{2\pi}$  (рис. 171).

Широты этих точек будут

$$\varphi_{2,k} = \varphi_{2,0} + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} k \pmod{2\pi}.$$

По лемме множество точек пересечения всюду плотно на меридиане. Заметим, что прямые, проведенные из точек множества, всюду плотного на прямой,

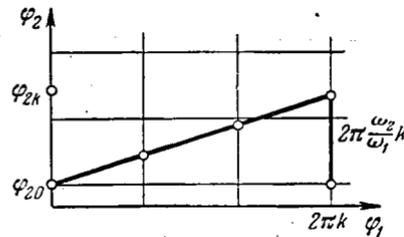


Рис. 171. Редукция теоремы к лемме.

лежащей в плоскости, по направлению, не совпадающему с направлением этой прямой, образуют всюду плотное множество на плоскости. Поэтому изображение

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t) - 2\pi \left[ \frac{\varphi_1(t)}{2\pi} \right], \quad \tilde{\varphi}_2(t) = \varphi_2(t) - 2\pi \left[ \frac{\varphi_2(t)}{2\pi} \right]$$

фазовой кривой (5) на квадрате

$$0 \leq \tilde{\varphi}_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \tilde{\varphi}_2 < 2\pi$$

всюду плотно. Итак, фазовая кривая уравнения (4) (и, значит, уравнения (2)) всюду плотна на торе.

4. Следствия. Ряд простых следствий доказанной теоремы выходит за рамки теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача 1. Рассмотрим последовательность первых цифр степеней двойки:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \dots$$

Встретится ли в этой последовательности 7? Вообще, с любой ли комбинации цифр начинается  $2^n$ ?

Задача 2. Докажите, что

$$\sup_{0 < t < \infty} \cos t + \sin \sqrt{2} t = 2.$$

Задача 3. Рассмотрим группу  $S^1$  комплексных чисел, по модулю равных 1. Найти все ее замкнутые подгруппы.

Ответ. 1,  $S^1$ ,  $\{\sqrt[n]{1}\}$ .

5. Многомерный случай. Пусть собственные числа уравнения (1) в  $R^{2m}$  просты и имеют вид

$$\lambda = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_m.$$

Рассуждая, как в примере п. 2, мы покажем, что фазовые кривые лежат на  $m$ -мерном торе

$$T^m = S^1 \times \dots \times S^1 = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \bmod 2\pi\} \cong R^m / Z^m$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad \dots, \quad \dot{\varphi}_m = \omega_m.$$

Числа  $\omega_1, \dots, \omega_m$  рационально независимы, если при целых  $k$

$$(k_1\omega_1 + \dots + k_m\omega_m = 0) \Rightarrow (k_1 = \dots = k_m = 0).$$

Задача\* 1. Доказать, что если частоты  $\omega_1, \dots, \omega_m$  рационально независимы, то каждая фазовая кривая уравнения (1), лежащая на торе  $T^m$ , всюду плотна на нем.

Следствие. Пусть конь прыгает скачками  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  по полю (рис. 172), где квадратно-гнездовым способом посеяна кукуруза. Тогда он обязательно сшибет хоть один росток.

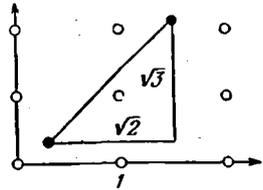


Рис. 172. Фазовая кривая системы  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = \sqrt{2}, \varphi_3 = \sqrt{3}$  всюду плотна на трехмерном торе.

6. Равномерное распределение. Всюду плотные кривые, рассмотренные выше, обладают замечательным свойством равномерно распределяться по поверхности торов. Сформулируем соответствующую теорему в простейшем случае. Рассмотрим последовательность точек  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  на окружности  $S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$ . Последовательность называется *равномерно распределенной*, если для любой дуги  $\Delta \subset S^1$  число  $N(\Delta, k)$  точек длинного отрезка последовательности  $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  в  $\Delta$  асимптотически пропорционально длине  $|\Delta|$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(\Delta, k)}{k} = \frac{|\Delta|}{2\pi}.$$

Задача\* 1. Доказать, что последовательность  $\varphi, \varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha, \dots$ , где  $\alpha$  — угол, несоизмеримый с  $2\pi$ , равномерно распределена на  $S^1$ .

Следствие. Числа  $2^n$  чаще начинаются с 7, чем с 8. Если  $N_7(k)$  и  $N_8(k)$  — количества чисел  $(1, 2, 4, \dots, 2^k)$ , начинающихся с 7 и 8 соответственно, то существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_7(k)}{N_8(k)}.$$

Задача 2. Найти этот предел и убедиться, что он больше 1.

З а м е ч а н и е. Начальный отрезок последовательности (см. п. 4) указывает, кажется, на то, что семерок меньше. Это связано с тем, что иррациональное число  $\log_{10} 2 = 0,3010 \dots$  очень близко к рациональному числу  $3/10$ .

## § 25. Случай кратных собственных чисел

Решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами сводится к вычислению матрицы  $e^{At}$ . Если собственные числа матрицы  $A$  попарно различны, то явный вид матрицы  $e^{At}$  указан в § 19, п. 5 и § 20, п. 6. Чтобы найти явный вид матрицы  $e^{At}$  в случае кратных собственных чисел, мы воспользуемся жордановой нормальной формой.

1. Вычисление  $e^{At}$ , где  $A$  — жорданова клетка. Один из способов вычисления  $e^{At}$ , где  $A$  — жорданова клетка:

$$\left( \begin{array}{cccc} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{array} \right) : R^n \rightarrow R^n.$$

указан в § 14: оператор дифференцирования в пространстве квазимногочленов  $e^{\lambda t} p_{<n}(t)$  имеет (в базисе  $e_k = \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}$ ,  $0 \leq k < n$ ) матрицу  $A$ . По формуле Тейлора матрица  $H^s = e^{As}$  есть матрица оператора сдвига  $f(t) \mapsto f(s+t)$  в том же базисе. Итак,

$$e^{\lambda(t+s)} \frac{(t+s)^k}{k!} = \sum_i h_{k,i}(s) e_i.$$

Элементы  $h_{k,i}(s)$  матрицы  $H^s$  находятся по формуле бинома Ньютона. Они оказываются квазимногочленами от  $s$  с показателем  $\lambda$  степени меньше  $n$ .

Другой способ вычисления основан на следующей лемме:

Лемма. Пусть  $A, B: R^n \rightarrow R^n$  — линейные операторы. Если они коммутируют, т. е.  $AB=BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

Доказательство. Сравним формальные ряды

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left( E + A + \frac{A^2}{2} + \dots \right) \left( E + B + \frac{B^2}{2} + \dots \right) = \\ &= E + (A + B) + \frac{1}{2} (A^2 + 2AB + B^2) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= E + (A + B) + \frac{1}{2} (A + B)^2 + \dots = \\ &= E + (A + B) + \frac{1}{2} (A^2 + AB + BA + B^2) + \dots \end{aligned}$$

Если  $AB=BA$ , то ряды совпадают (так как  $e^{x+y} = e^x e^y$  для  $x, y \in R$ ). Так как ряды абсолютно сходятся,  $e^A e^B = e^{A+B}$ , что и требовалось доказать.

Представим  $A$  в виде  $A = \lambda E + \Delta$ , где  $\Delta$  — нильпотентная жорданова клетка:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\lambda E$  коммутирует с любым оператором, то  $e^{At} = e^{t(\lambda E + \Delta)} = e^{\lambda t} e^{\Delta t}$ . Вычислим матрицу

$$e^{\Delta t} = E + \Delta t + \frac{\Delta^2 t^2}{2} + \dots + \frac{\Delta^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\Delta^n = 0).$$

Заметим, что  $\Delta$  действует на базис  $e_1, \dots, e_n$  как сдвиг:  $0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow \dots \leftarrow e_n$ . Поэтому  $\Delta^k$  действует как сдвиг на  $k$  мест и имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, доказана  
Теорема.

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & t^{n-1}e^{\lambda t}/(n-1)! \\ & e^{\lambda t} & & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Наши вычисления проходят без изменений в комплексном случае ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ).

2. Приложение. Из формулы (1) непосредственно вытекают:

Следствие 1. Пусть  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — собственные числа,  $\nu_1, \dots, \nu_k$  — их кратности,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда каждый элемент матрицы  $e^{At}$  (в любом фиксированном базисе) является суммой квазимногочленов от  $t$  с показателями  $\lambda_l$  степеней меньше  $\nu_l$  соответственно ( $l = 1, \dots, k$ ).

Доказательство. Рассмотрим матрицу оператора  $e^{At}$  в базисе, в котором матрица  $A$  имеет жорданову форму. Наше утверждение тогда следует из (1). Элементы матрицы оператора  $e^{At}$

в любом другом базисе являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) элементов матрицы оператора  $e^{At}$  в указанном базисе.

**Следствие 2.** Пусть  $\varphi$  — решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in C^n, \quad A: C^n \rightarrow C^n.$$

Тогда каждая компонента вектора  $\varphi$  (в любом фиксированном базисе) является суммой квазимногочленов от  $t$  с показателями  $\lambda_i$  степеней меньше  $\nu_i$  соответственно:

$$\varphi_j(t) = \sum_{l=1}^k e^{\lambda_l t} p_{j,l}(t),$$

где  $p_{j,l}$  — многочлен степени  $< \nu_l$ .

Действительно,  $\varphi(t) = e^{At} \varphi(0)$ .

**Следствие 3.** Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор,  $\lambda_l$  ( $1 \leq l < k$ ) — его вещественные собственные числа,  $\nu_l$  — их кратности,  $\alpha_l \pm i\omega_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ) — комплексные собственные числа,  $\mu_l$  — их кратности. Тогда каждый элемент матрицы  $e^{At}$  и каждая компонента решения уравнения  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in R^n$ , является суммой комплексных квазимногочленов с показателями  $\lambda_l$ ,  $\lambda_l \pm i\omega_l$  степеней меньше  $\nu_l$ ,  $\mu_l$  соответственно.

Такую сумму можно записать также в менее удобном виде:

$$\varphi_j(t) = \sum_{l=1}^k e^{\lambda_l t} p_{j,l} + \sum_{l=1}^m e^{\alpha_l t} [q_{j,l}(t) \cos \omega_l t + r_{j,l}(t) \sin \omega_l t],$$

где  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — многочлены с вещественными коэффициентами степеней меньше  $\nu_l$ ,  $\mu_l$ ,  $\mu_l$  соответственно.

Действительно, если  $z = x + iy$ ,  $\lambda = \alpha + i\omega$ , то

$$\operatorname{Re} z e^{\lambda t} = \operatorname{Re} e^{z t} (x + iy) (\cos \omega t + i \sin \omega t) = e^{\alpha t} (x \cos \omega t - y \sin \omega t).$$

Между прочим, из этих формул видно, что если вещественные части всех собственных чисел отрицательны, то все решения стремятся к 0 при  $t \rightarrow +\infty$  (как это и должно быть согласно §§ 22, 23).

**3. Применения к системам уравнений выше первого порядка.** Записав систему в виде системы уравнений первого порядка, мы сведем задачу к рассмотренной выше и можем ее решить, приведя матрицу к жордановой форме. Практически часто удобнее поступать иначе. Прежде всего, собственные числа эквивалентной системы первого порядка можно найти, не выписывая ее матрицы.

Действительно, собственному числу  $\lambda$  отвечает собственный вектор  $u$ , значит, решение  $\varphi(t) = e^{\lambda t} \varphi(0)$  эквивалентной системы

первого порядка. Но тогда и исходная система имеет решение вида  $\psi(t) = e^{\lambda t} \psi(0)$ . Подставим в исходную систему  $\psi = e^{\lambda t} \xi$ . Система допускает такое решение (ненулевое), если и только если  $\lambda$  удовлетворяет алгебраическому уравнению, из которого мы и можем найти собственные числа  $\lambda_i$ .

Сами решения можно затем искать в виде сумм квазимного-членов с показателями  $\lambda_i$  и с неопределенными коэффициентами.

**Пример 1.**  $\ddot{x} = x$ .

Подставляем  $x = e^{\lambda t} \xi$ . Находим  $\lambda^4 e^{\lambda t} \xi = e^{\lambda t} \xi$ ,  $\lambda^4 = 1$ ,  $\lambda_{1,2,3,4} = 1, -1, i, -i$ .

Всякое решение нашего уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

**Пример 2.**  $\ddot{x}_1 = x_2$ ,  $\ddot{x}_2 = x_1$ .

Подставляем  $x = e^{\lambda t} \xi$ . Находим  $\lambda^2 \xi_1 = \xi_2$ ,  $\lambda^2 \xi_2 = \xi_1$ . Эта система линейных уравнений относительно  $\xi_1, \xi_2$  имеет нетривиальное решение, если и только если  $\lambda^4 = 1$ . Всякое решение нашей системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ x_2 &= D_1 e^t + D_2 e^{-t} + D_3 \cos t + D_4 \sin t. \end{aligned}$$

Подстановка в систему дает

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = C_2, \quad D_3 = -C_3, \quad D_4 = -C_4.$$

**Пример 3.**  $x^{IV} - 2x'' + x = 0$ .

Подставляем  $x = e^{\lambda t} \xi$ . Находим

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda^2 = 1, \quad \lambda_{1,2,3,4} = 1, 1, -1, -1.$$

Всякое решение исходного уравнения имеет вид

$$(C_1 t + C_2) e^{\lambda t} + (C_3 t + C_4) e^{-\lambda t}.$$

**Задача 1.** Найти жорданову нормальную форму матрицы четвертого порядка, соответствующей нашему уравнению.

**4. Случай одного уравнения  $n$ -го порядка.** Заметим, что кратности собственных чисел, вообще говоря, не определяют размеров жордановых клеток. Положение упрощается, если речь идет о линейном операторе  $A$ , соответствующем одному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка:

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x, \quad a_k \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Из следствия 2 п. 2 вытекает

**Следствие 4.** *Всякое решение уравнения (2) имеет вид*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} p_i(t), \quad (3)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (4)$$

а  $p_i$  — многочлен степени меньше  $\nu_i$  (где  $\nu_i$  — кратность корня  $\lambda_i$ ).

Действительно, уравнение (2) имеет решение вида  $e^{\lambda t}(\xi)$ , если и только если  $\lambda$  — корень уравнения (4). Следствие (4) доказано.

Перейдем к эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_n & & & \dots & a_1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Получаем

**Следствие 5.** Если оператор  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  имеет матрицу вида (5), то каждому его собственному числу  $\lambda$  отвечает ровно одна жорданова клетка, размер которой равен кратности  $\lambda$ .

Действительно, согласно формуле (3) каждому собственному числу  $\lambda$  отвечает одно собственное направление. В самом деле, пусть  $\xi$  — собственный вектор оператора  $A$ . Тогда среди решений вида (3) имеется первая компонента  $e^{\lambda t}\xi_0$  вектора  $e^{\lambda t}\xi$ . Но тогда остальные компоненты — это производные:  $\xi_k = \lambda^k \xi_0$ . Поэтому число  $\lambda$  определяет направление вектора  $\xi$  однозначно.

Поскольку каждой жордановой клетке соответствует свое собственное направление, следствие 5 доказано.

**Задача 1.** Всякая ли линейная комбинация квазимногочленов (3) является решением уравнения (2)?

**5. О возвратных последовательностях.** Наше исследование экспоненты с непрерывным показателем  $e^{tA}$  легко перенести на экспоненту с дискретным показателем  $A^n$ . Мы можем, в частности, исследовать теперь любую возвратную (= рекуррентную) последовательность, определенную соотношением

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} \quad (6)$$

(например, последовательность 0, 1, 2, 5, 12, 29, ..., заданную соотношением  $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$  и начальным условием  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ).

**Следствие 6.**  $n$ -й член возвратной последовательности зависит от  $n$  как сумма квазимногочленов от  $n$ :

$$x_n = \sum_{l=1}^m \lambda_l^n p_l(n),$$

где  $\lambda_l$  — собственные числа матрицы  $A$ , соответствующей последовательности, а  $p_l$  — многочлен степени меньше  $\nu_l$  (где  $\nu_l$  — кратность  $\lambda_l$ ).

Вспомним, что матрица  $A$  — это матрица оператора  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , переводящего отрезок длины  $k$  из нашей последователь-

ности,  $\xi_{n-1} = (x_{n-k}, \dots, x_{n-1})$ , в следующий отрезок длины  $k$ ,  $\xi_n = (x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ :

$$A \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_k & \dots & a_2 & a_1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \xi_n.$$

Важно заметить, что оператор  $A$  не зависит от  $n$ . Поэтому  $x_n$  есть одна из компонент вектора  $A^n \xi$ , где  $\xi$  — постоянный вектор. Матрица  $A$  имеет вид (5). Пользуясь следствием 5 и приводя  $A$  к жордановой форме, получаем следствие 6.

При вычислениях нет нужды ни выписывать матрицу, ни приводить ее к нормальной форме. Собственный вектор оператора  $A$  соответствует решению уравнения (6) вида  $x = \lambda^n$ . Подставляя в уравнение (6), находим для  $\lambda$  уравнение

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k.$$

Легко убедиться, что это и есть характеристическое уравнение оператора  $A$ .

Пример 1. Для последовательности 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... ( $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ ) находим  $\lambda^2 = 2\lambda + 1$ ,  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ . Поэтому соотношению  $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$  удовлетворяют последовательности

$$x_n = (1 + \sqrt{2})^n, \quad x_n = (1 - \sqrt{2})^n,$$

а также любые их линейные комбинации (и только они)

$$x_n = c_1 (1 + \sqrt{2})^n + c_2 (1 - \sqrt{2})^n.$$

Среди этих комбинаций легко подобрать такую, для которой  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ :

$$c_1 + c_2 = 0, \quad \sqrt{2} (c_1 - c_2) = 1.$$

$$\text{Ответ. } x_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - \frac{(1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Замечание. При  $n \rightarrow \infty$  первое слагаемое экспоненциально растет, а второе экспоненциально убывает. Поэтому при больших  $n$

$$x_n \approx \frac{(1 + \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

и, в частности,  $x_{n+1}/x_n \approx 1 + \sqrt{2}$ . Отсюда мы находим очень хорошие приближения для  $\sqrt{2}$ :

$$\sqrt{2} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}.$$

Подставляя  $x_n = 0, 1, 2, 5, 12, 29, \dots$ , находим

$$\sqrt{2} \approx \frac{1-0}{1} = 1; \quad \sqrt{2} \approx \frac{5-2}{2} = 1,5;$$

$$\sqrt{2} \approx \frac{12-5}{5} = 1,4; \quad \sqrt{2} \approx \frac{29-12}{12} = \frac{17}{12} \approx 1,417\dots$$

Это те самые приближения, с помощью которых вычисляли  $\sqrt{2}$  в древности; их можно получить также разложением  $\sqrt{2}$  в цепную дробь. Далее,  $(x_{n+1} - x_n)/x_n$  является наилучшим среди всех рациональных приближений к  $\sqrt{2}$  со знаменателями, не превосходящими  $x_n$ .

6. **Малые колебания.** Мы рассмотрели выше случай, когда каждому корню характеристического уравнения, какова бы ни была его кратность, соответствует один собственный вектор: случай одного уравнения  $n$ -го порядка. Существует в некотором смысле противоположный случай, когда каждому корню соответствует столько собственных чисел, какова кратность корня. Это — случай малых колебаний консервативной механической системы.

Рассмотрим в *евклидовом* пространстве  $R^n$  квадратичную форму  $U$ , заданную симметрическим оператором  $A$ :

$$U(x) = \frac{1}{2}(Ax, x), \quad x \in R^n, \quad A: R^n \rightarrow R^n, \quad A' = A.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение \*)

$$\ddot{x} = -\text{grad } U \quad (7)$$

( $U$  — потенциальная энергия).

При исследовании уравнения (7) полезно представлять себе шарик, катающийся по графику потенциальной энергии (ср. § 12).

Уравнение (7) можно записать в виде

$$\ddot{x} = -Ax$$

или в координатной записи в виде системы  $n$  линейных уравнений второго порядка. По общему правилу ищем решение  $\varphi = e^{\lambda t} \xi$  и находим

$$\lambda^2 e^{\lambda t} \xi = -A e^{\lambda t} \xi, \quad (A + \lambda^2 E) \xi = 0, \quad \det |A + \lambda^2 E| = 0.$$

Отсюда находим  $n$  вещественных (почему?) значений  $\lambda^2$  и  $2n$  значений  $\lambda$ .

Если все они различны, то всякое решение уравнения (7) есть линейная комбинация экспонент. Если же имеются кратные корни, возникает вопрос о жордановых клетках.

**Теорема.** Если квадратичная форма  $U$  невырождена, то каждому собственному значению  $\lambda$  соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность, так

\*) Векторное поле  $\text{grad } U$  определяется условием  $\langle dU(\xi), \xi \rangle$  для всякого вектора  $\xi \in TR_x^n$ . Здесь круглые скобки означают евклидово скалярное произведение. В декартовых координатах (ортонормированных) векторное поле  $\text{grad } U$  задается компонентами  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right)$ .

что каждое решение уравнения (7) можно записать в виде суммы экспонент\*):

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t} \xi_k, \quad \xi_k \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство. Ортогональным преобразованием можно привести форму  $U$  к *главным осям*: существует ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$ , в котором  $U$  записывается в виде

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k x_k^2, \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Невырожденность формы  $U$  означает, что ни одно из чисел  $a_k$  не равно 0. В выбранных координатах уравнение (7) принимает вид

$$\ddot{x}_1 = -a_1 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -a_2 x_2, \quad \dots, \quad \ddot{x}_n = -a_n x_n$$

независимо от того, есть ли кратные корни\*\*). Наша система распалась в прямое произведение  $n$  «уравнений маятника». Каждое из них ( $\ddot{x} = -ax$ ) мгновенно решается.

Если  $a > 0$ , то  $a = \omega^2$  и

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Если  $a < 0$ , то  $a = -\alpha^2$  и

$$x = C_1 \operatorname{ch} \alpha t + C_2 \operatorname{sh} \alpha t = D_1 e^{\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}.$$

Эти формулы содержат, в частности, утверждение теоремы.

Если форма  $U$  положительно определенная, то все  $a_k$  положительны и точка  $x$  совершает  $n$  независимых колебаний по  $n$  взаимно перпендикулярным направлениям  $e_1, \dots, e_n$  (рис. 173). Эти колебания называются *главными* или *собственными*, а числа  $\omega_k$  — *собственными частотами*. Они удовлетворяют уравнению  $\det |A - \omega^2 E| = 0$ .

Траектория точки  $x = \varphi(t)$  в  $\mathbb{R}^n$  (где  $\varphi$  — решение уравнения (7)) лежит в параллелепипеде  $|x_k| \leq X_k$ , где  $X_k$  — амплитуда  $k$ -го собственного колебания. В частности, при  $n = 2$  — в прямоугольнике.

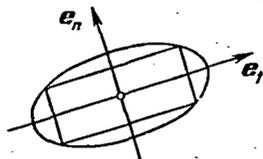


Рис. 173. Направления собственных колебаний и линия уровня потенциальной энергии.

\* Интересно отметить, что Лагранж, впервые исследовавший уравнение малых колебаний (7), вначале ошибся. Он думал, что в случае кратных корней потребуются «вековые» слагаемые вида  $t e^{\lambda t}$  (в вещественном случае  $t \sin \omega t$ ), как в пп. 2, 4, 5 выше.

\*\* Заметим, что мы существенно используем ортонормированность базиса  $e_k$ : если бы базис не был ортонормированным, то компоненты вектора  $\operatorname{grad} \frac{1}{2} \sum a_k x_k^2$  не были бы равны  $a_k x_k$ .

Если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соизмеримы, то траектория — замкнутая кривая. Она называется в этом случае *кривой Лиссажу* (рис. 174).

Если же  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы, то траектория заполняет прямоугольник всюду плотно. Это вытекает из теоремы § 24.

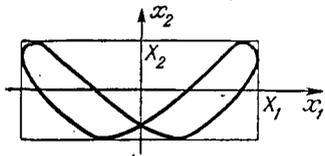


Рис. 174. Одна из кривых Лиссажу с  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$ .

**Задача 1.** Нарисовать кривые Лиссажу для  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 3$  и  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 3$ .

**Задача 2.** Доказать, что среди кривых Лиссажу с  $\omega_2 = n\omega_1$  есть график многочлена степени  $n$ . Этот многочлен называется *многочленом Чебышева*,

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

**Задача 3.** Как выглядят траектории  $x = \varphi(t)$  в случае  $U = x_1^2 - x_2^2$ ?

**Задача 4.** При каких  $U$  положение равновесия  $x = \dot{x} = 0$  уравнения (7) устойчиво а) по Ляпунову? б) асимптотически?

## § 26. О квазимногочленах

При решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами нам все время встречались квазимногочлены. Мы выясним теперь причину этого явления и дадим ему некоторые новые приложения.

**1. Линейное пространство функций.** Рассмотрим множество  $F$  всех бесконечно дифференцируемых функций на вещественной оси  $R$  с комплексными значениями.

Множество  $F$  имеет естественную структуру комплексного линейного пространства: если  $f_1$  и  $f_2$  — функции из  $F$ , то функция  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  ( $c_1, c_2$  — константы из  $C$ ) также принадлежит  $F$ .

**О п р е д е л е н и е.** Функции  $f_1, \dots, f_n \in F$  называются *линейно независимыми*, если они линейно независимы как векторы линейного пространства  $F$ , т. е. если

$$(c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \equiv 0) \Rightarrow (c_1 = \dots = c_n = 0),$$

где  $c_1, \dots, c_n \in C$ .

**Задача 1.** При каких  $\alpha, \beta$  функции  $\sin \alpha t$  и  $\sin \beta t$  линейно зависимы?

**Задача 2.** Доказать, что функции  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  линейно независимы, если все  $\lambda_k$  попарно различны.

**У к а з а н и е.** Это вытекает из существования линейного уравнения  $n$ -го порядка с решениями  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  (см. п. 2).

Среди элементов пространства  $F$  имеются квазимногочлены с показателем  $\lambda$

$$f(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{v-1} c_k t^k$$

и, более общим образом, конечные суммы квазимногочленов с разными показателями

$$f(t) = \sum_{l=1}^k e^{\lambda_l t} \sum_{m=0}^{\nu_l-1} c_{l,m} t^m, \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (1)$$

**Задача 3.** Докажите, что каждая функция вида (1) записывается в виде суммы (1) единственным образом. Иначе говоря:

*Если сумма (1) равна 0, то каждый коэффициент  $c_{l,m}$  равен 0.*

**Указание.** Одно из возможных решений см. в п. 2 (следствие на стр. 157).

## 2. Линейное пространство решений линейного уравнения.

**Теорема.** Множество  $X$  всех решений линейного уравнения

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (2)$$

составляет в  $F$  линейное подпространство конечной размерности  $n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим оператор  $D: F \rightarrow F$ , переводящий каждую функцию в ее производную. Оператор  $D$  линеен:

$$D(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Df_1 + c_2 Df_2.$$

Рассмотрим многочлен от оператора  $D$ :

$$A = a(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n E.$$

Оператор  $A$  есть линейный оператор  $A: F \rightarrow F$ . Решения \*) уравнения (2) — это элементы ядра оператора  $A$ . Итак,  $X = \text{Ker } A$ .

Но ядро  $\text{Ker } A$  линейного оператора является линейным пространством. Поэтому  $X$  — линейное пространство. Покажем, что  $X$  изоморфно  $C^n$ .

Пусть  $\varphi \in X$ . Сопоставим функции  $\varphi$  набор  $n$  чисел: набор значений в точке  $t=0$  функции  $\varphi$  и ее производных  $\Phi_0 = (\varphi(0), (D\varphi)(0), \dots, (D^{n-1}\varphi)(0))$ . Получаем отображение

$$V: X \rightarrow C^n, \quad V(\varphi) = \Phi_0.$$

Это отображение линейно. Образ отображения  $V$  — это все пространство  $C^n$ . Ибо по теореме существования существует решение  $\varphi \in X$  с любыми данными начальными условиями  $\Phi_0$ .

Ядро отображения  $V$  нулевое. Ибо по теореме единственности начальные условия  $\Phi_0 = 0$  определяют решение ( $\varphi \equiv 0$ ) однозначно. Итак,  $V$  — изоморфизм.

Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — корни характеристического уравнения  $a(\lambda) = 0$  дифференциального уравнения (2) и  $\nu_1, \dots, \nu_k$  — их кратности. Тогда каждое решение уравнения (2) единственным

\*) Мы заранее знаем, что все решения уравнения (2) бесконечно дифференцируемы, т. е. принадлежат  $F$  (см. § 25,4).

образом записывается в виде (1) и каждая сумма квазимногочленов вида (1) удовлетворяет уравнению (2).

**Доказательство.** Формула (1) задает отображение  $\Phi: C^n \rightarrow F$ , сопоставляющее набору  $n$  коэффициентов  $c_{l,m}$  функцию  $f$ . Это отображение линейно. Его образ содержит пространство  $X$  решений уравнения (2). Ибо согласно § 25 каждое решение уравнения (2) записывается в виде (1). По теореме размерности пространства  $X$  равна  $n$ .

Линейное отображение пространства  $C^n$  на пространство  $X$  такой же размерности есть изоморфизм. Поэтому  $\Phi$  осуществляет изоморфизм  $C^n$  и  $X$ . Это и есть утверждение следствия.

### 3. Инвариантность относительно сдвигов.

**Теорема.** Пространство  $X$  решений дифференциального уравнения (2) инвариантно относительно сдвигов, переводящих функцию  $\varphi(t)$  в  $\varphi(t+s)$ .

Действительно, сдвиг решения будет решением, как и для всякого автономного уравнения (ср. § 10).

Примеры подпространств пространства  $F$ , инвариантных относительно сдвигов:

Пример 1. Одномерное пространство  $\{ce^{\lambda t}\}$ .

Пример 2. Пространство квазимногочленов

$$\{e^{\lambda t} p_{<n}(t)\}$$

размерности  $n$ .

Пример 3. Плоскость

$$\{c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\}.$$

Пример 4. Пространство

$$\{p_{<n}(t) \cos \omega t + q_{<n}(t) \sin \omega t\}$$

размерности  $2n$ .

Можно показать, что всякое конечномерное подпространство пространства  $F$ , инвариантное относительно сдвигов, есть пространство решений некоторого дифференциального уравнения (2).

Иными словами, такое подпространство всегда распадается в прямую сумму пространств квазимногочленов. Этим и объясняется значение квазимногочленов для теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если какое-либо уравнение инвариантно относительно какой-либо группы преобразований, то при решении этого уравнения важную роль будут играть пространство функций, инвариантные относительно этой группы. Таким путем в математике возникают различные специальные функции. Например, с группой вращений сферы связаны сферические функции — конечномерные пространства функций на сфере, инвариантные относительно вращений.

**Задача \* 1.** Найти все конечномерные подпространства пространства гладких функций на окружности, инвариантные относительно вращений окружности.

**4. Историческое замечание.** Теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами была создана Эйлером и Лагранжем до того, как была построена жорданова нормальная форма матриц.

Рассуждали они следующим образом: Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — два корня характеристического уравнения. Им соответствуют решения  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ , на которые в пространстве  $F$  натягивается двумерная плоскость  $\{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\}$  (рис. 175). Пусть теперь уравнение меняется так, что  $\lambda_2$  приближается к  $\lambda_1$ . Тогда  $e^{\lambda_2 t}$  приближается к  $e^{\lambda_1 t}$  и при  $\lambda_2 = \lambda_1$  плоскость вырождается в прямую.

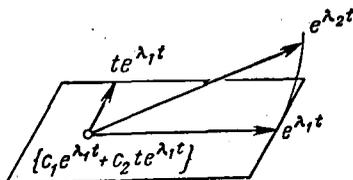


Рис. 175. Предельное положение плоскости, натянутой на  $e^{\lambda_1 t}$  и  $e^{\lambda_2 t}$  в пространстве  $F$ .

Возникает вопрос: не существует ли предельного положения плоскости, когда  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ ?

Вместо  $e^{\lambda_1 t}$  и  $e^{\lambda_2 t}$  в качестве базиса можно взять (при  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ )  $e^{\lambda_1 t}$  и  $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}$ . Но  $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \approx (\lambda_2 - \lambda_1) t e^{\lambda_1 t}$ . Базис нашей плоскости  $(e^{\lambda_1 t}, (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})/(\lambda_2 - \lambda_1))$  при  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$  переходит в базис  $(e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t})$  предельной плоскости. Поэтому естественно ожидать, что решения предельного уравнения (с кратным корнем  $\lambda_2 = \lambda_1$ ) будут лежать в предельной плоскости  $\{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}\}$ . Когда формула написана, ее можно проверить подстановкой в уравнение.

Таким же образом объясняется возникновение решений  $t^k e^{\lambda t}$  ( $k < \nu$ ) в случае  $\nu$ -кратного корня.

Приведенные рассуждения легко сделать вполне строгими (например, сославшись на теорему о дифференцируемой зависимости решений от параметра).

**5. Неоднородные уравнения.**

Пусть  $A: L_1 \rightarrow L_2$  — линейный оператор. Решением неоднородного уравнения

$$Ax = f$$

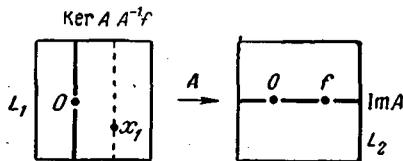


Рис. 176. Ядро и образ оператора  $A$ .

с правой частью  $f$  называется всякий прообраз  $x \in L_1$  элемента  $f \in L_2$  (рис. 176).

Всякое решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения  $x_1$  и общего решения однородного уравнения  $Ax = 0$ :

$$A^{-1}f = x_1 + \text{Ker } A.$$

Неоднородное уравнение разрешимо, если  $f$  принадлежит линейному пространству  $\text{Im } A = A(L_1) \subseteq L_2$ .

Рассмотрим, в частности, дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \quad (3)$$

(линейное неоднородное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами).

**Теорема.** Пусть правая часть  $f(t)$  уравнения (3) есть сумма квазимногочленов. Тогда всякое решение уравнения (3) является суммой квазимногочленов.

Рассмотрим пространство  $C^m$  всех квазимногочленов

$$C^m = \{e^{\lambda t} p_{< m}(t)\}$$

степени меньше  $m$  с показателем  $\lambda$ . Линейный оператор  $D$  (переводящий всякую функцию в ее производную) переводит  $C^m$  в себя. Поэтому оператор

$$A = a(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n E: C^m \rightarrow C^m$$

также является линейным оператором из  $C^m$  в себя. Мы можем теперь записать уравнение (3) в виде  $Ax = f$ . Для исследования его разрешимости нужно найти образ  $\text{Im } A = A(C^m)$  отображения  $A$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\lambda$  — не корень характеристического уравнения, т. е.  $a(\lambda) \neq 0$ . Тогда  $A: C^m \rightarrow C^m$  — изоморфизм.

**Доказательство.** Матрица оператора  $D: C^m \rightarrow C^m$  в подходящем базисе — жорданова клетка с  $\lambda$  на диагонали. В том же базисе оператор  $A$  имеет треугольную матрицу с  $a(\lambda)$  на диагонали. Итак,  $\det A = (a(\lambda))^m \neq 0$  и  $A$  — изоморфизм.

**Следствие.** Если  $\lambda$  — не корень характеристического уравнения, то уравнение (3) с правой частью в виде квазимногочлена степени меньше  $m$  с показателем  $\lambda$  имеет частное решение в виде квазимногочлена степени меньше  $m$  с показателем  $\lambda$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda$  — корень характеристического уравнения кратности  $\nu$ , т. е.

$$a(z) = (z - \lambda)^\nu b(z), \quad b(\lambda) \neq 0.$$

Тогда

$$AC^m = C^{m-\nu}.$$

**Доказательство.**  $A = a(D) = (D - \lambda E)^\nu b(D)$ . По лемме 1  $b(D): C^m \rightarrow C^m$  — изоморфизм. Остается показать, что  $(D - \lambda E)^\nu C^m = C^{m-\nu}$ . Но матрица оператора  $D - \lambda E$  в базисе

$$e_k = \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}, \quad 0 \leq k < m,$$

является нильпотентной жордановой клеткой, т. е. этот оператор действует на базис как сдвиг:

$$0 \leftarrow e_0 \leftarrow e_1 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1}.$$

Оператор  $(D - \lambda E)^v$  действует как сдвиг на  $v$  мест и отображает  $C^m$  на  $C^{m-v}$ .

*Следствие.* Пусть  $\lambda$  — корень кратности  $v$  характеристического уравнения,  $a(\lambda) = 0$ . Пусть  $f \in C^k$  — квазимногочлен степени меньше  $k$  с показателем  $\lambda$ . Тогда уравнение (3) имеет решение  $\varphi \in C^{k+v}$  в виде квазимногочлена с показателем  $\lambda$  степени меньше  $k + v$ .

Для доказательства нужно положить  $m = k + v$  в лемме 2.

*Доказательство теоремы.* Рассмотрим множество  $\Sigma$  всевозможных сумм квазимногочленов. Это — линейное бесконечномерное подпространство пространства  $F$ . По предыдущему следствию образ  $A(\Sigma)$  оператора

$$A = a(D): \Sigma \rightarrow \Sigma$$

содержит все квазимногочлены. Будучи линейным пространством,  $A(\Sigma)$  совпадает с  $\Sigma$ . Поэтому уравнение (3) имеет частное решение, являющееся суммой квазимногочленов. Остается добавить общее решение однородного уравнения. Оно является суммой квазимногочленов согласно § 25.

Теорема доказана.

*Замечание 1.* Если  $f = e^{\lambda t} p_{<k}(t)$ , то существует частное решение уравнения (3) вида  $\varphi = t^v e^{\lambda t} q_{<k}(t)$ .

Действительно, по лемме 2 существует частное решение в виде квазимногочлена степени меньше  $k + v$ ; но слагаемые степени меньше  $v$  удовлетворяют однородному уравнению (см. следствие п. 2), поэтому их можно откинуть.

*Замечание 2.* Если уравнение (3) и  $\lambda$  вещественны, то решение можно искать в виде вещественного квазимногочлена. Если же  $\lambda = \alpha \pm i\omega$ , то в виде

$$e^{\alpha t} (p(t) \cos \omega t + q(t) \sin \omega t).$$

При этом синус в решении может появиться даже и в том случае, когда в правой части был только косинус.

*Задача 1.* В каком виде можно записать частные решения следующих 13 уравнений:

- |  |  |
|--|--|
| 1, 2) $\ddot{x} \pm x = t^2;$          | 3, 4) $\ddot{x} \pm x = e^{2t};$             |
| 5, 6) $\ddot{x} \pm x = te^{-t};$      | 7, 8) $\ddot{x} \pm x = t^3 \sin t;$         |
| 9, 10) $\ddot{x} \pm x = te^t \cos t;$ | 11, 12) $\ddot{x} \pm 2ix = t^2 e^t \sin t;$ |
| 13) $x^{IV} + 4x = t^2 e^t \cos t?$    |  |

**6. Метод комплексных амплитуд.** В случае комплексных корней обычно проще проводить вычисления следующим образом.

Пусть уравнение (3) вещественно и функция  $f(t)$  представлена как вещественная часть комплексной функции  $f(t) = \operatorname{Re} F(t)$ . Пусть  $\Phi$  — комплексное решение уравнения  $a(D)\Phi = F$ . Тогда,

взяв вещественную часть, убеждаемся, что  $a(D)\varphi = f$ , где  $\varphi = \operatorname{Re} \Phi$  (поскольку  $a = \operatorname{Re} a$ ).

Итак, чтобы найти решения линейного неоднородного уравнения с правой частью  $f$ , достаточно рассмотреть  $f$  как вещественную часть комплексной функции  $F$ , решить уравнение с правой частью  $F$  и взять вещественную часть решения.

Пример 1. Пусть  $f(t) = \cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$ . Степень квазимногочлена  $F(t) = e^{i\omega t}$  равна 0, поэтому решение  $\Phi$  можно искать в виде  $Ct^{\nu} e^{i\omega t}$ , где  $C$  — комплексная постоянная (которая и называется комплексной амплитудой),  $\nu$  — кратность корня  $i\omega$ . Окончательно

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}(Ct^{\nu} e^{i\omega t}).$$

Если  $C = re^{i\theta}$ , то  $\varphi(t) = rt^{\nu} \cos(\omega t + \theta)$ . Таким образом, комплексная амплитуда  $C$  содержит информацию и об амплитуде ( $r$ ), и о фазе ( $\theta$ ) вещественного решения.

Пример 2. Рассмотрим поведение маятника (рис. 177) (или иной линейной колебательной системы, например груза на пружине или электрического колебательного контура) при воздействии внешней периодической силы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad f(t) = \cos vt = \operatorname{Re} e^{ivt}.$$

Рис. 177. Колебательная система под действием внешней силы  $f(t) = \cos vt$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$  имеет корни  $\lambda = \pm i\omega$ . Если  $\nu^2 \neq \omega^2$ , то частное решение следует искать в виде  $\Phi = Ce^{ivt}$ . Подставляя в уравнение, находим

$$C = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}. \quad (4)$$

Величину  $C$  можно записать в тригонометрическом виде:  $C = r(\nu) e^{i\theta(\nu)}$ .

Согласно формуле (4), амплитуда  $r$  и фаза  $\theta$  имеют указанные на рис. 178 значения\*). Вещественная часть  $\Phi$  равна  $r \cos(\nu t + \theta)$ . Итак, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x = r \cos(\nu t + \theta) + C_1 \cos(\omega t + \theta_1),$$

где  $C_1$  и  $\theta_1$  — произвольные постоянные.

Следовательно, колебание маятника под воздействием внешней силы состоит из «вынужденного колебания»  $r \cos(\nu t + \theta)$  с частотой внешней силы и «свободного колебания» с собственной частотой  $\omega$ .

\*) Выбор  $\theta = -\pi$  (а не  $+\pi$ ) при  $\nu > \omega$  оправдан примером 3 ниже.

Зависимость амплитуды  $r$  вынужденного колебания от частоты внешней силы  $\nu$  имеет характерный резонансный вид: чем ближе частота внешней силы к собственной частоте  $\omega$ , тем сильнее она раскачивает систему.

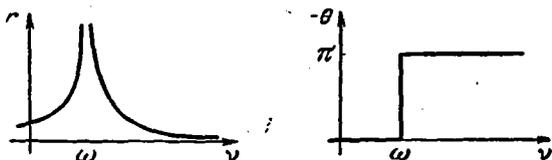


Рис. 178. Амплитуда и фаза вынужденного колебания маятника без трения как функции частоты внешней силы.

Это явление резонанса, наблюдаемого при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой колебательной системы, имеет очень большое значение в приложениях. Например, при расчетах всякого рода сооружений приходится следить за тем, чтобы собственные частоты сооружения не были близки к частотам внешних сил, которые оно будет испытывать. В противном случае даже малая сила, действуя в течение длительного времени, сможет раскачать сооружение и разрушить его.

Фаза вынужденных колебаний  $\theta$  скачком изменяется на  $-\pi$  при переходе  $\nu$  через резонансное значение  $\omega$ . При  $\nu$ , близких к  $\omega$ , наблюдаются «биения» (рис. 179): амплитуда колебаний

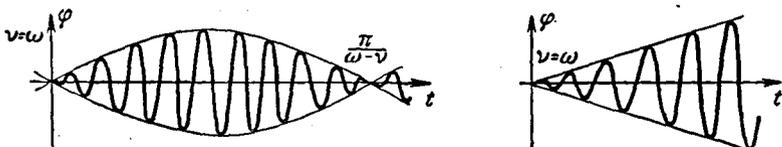


Рис. 179. Сумма двух гармоник с близкими частотами (биения) и ее предел в случае резонанса (раскачка).

маятника то растет (пока соотношение фаз маятника и внешней силы таково, что внешняя сила раскачивает маятник, сообщая ему энергию), то убывает (когда соотношение фаз меняется так, что внешняя сила тормозит маятник).

Чем ближе частоты  $\nu$  и  $\omega$ , тем медленнее меняется соотношение фаз и тем больше период биений. При  $\nu \rightarrow \omega$  период биений стремится к бесконечности.

При резонансе ( $\nu = \omega$ ) соотношение фаз постоянно и вынужденные колебания могут нарастать неограниченно (рис. 179).

Действительно, по общему правилу при  $\nu = \omega$  частное решение ищем в виде  $x = \text{Re } Cte^{i\omega t}$ . Подставляя в уравнение, находим  $C = 1/(2i\omega)$ , откуда  $x = \frac{t}{2\omega} \sin \omega t$  (рис. 179). Вынужденные колебания неограниченно нарастают.

Пример 3. Рассмотрим маятник с трением

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = f(t).$$

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + k\lambda + \omega^2 = 0$  имеет корни (рис. 180)

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\Omega, \quad \text{где } \alpha = \frac{k}{2}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}}.$$

Предположим, что коэффициент трения  $k$  положителен и невелик ( $k^2 < 4\omega^2$ ). Рассмотрим гармоническую внешнюю силу  $f(t) = \cos vt = \operatorname{Re} e^{ivt}$ . Если коэффициент трения  $k$  отличен от 0, то  $iv$  не может быть корнем характеристического уравнения (так как  $\lambda_{1,2}$

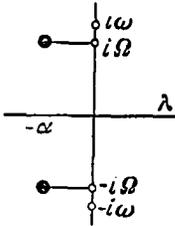


Рис. 180. Собственные числа уравнения маятника с трением.

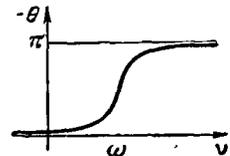
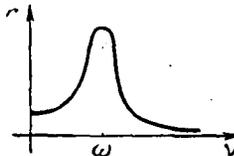


Рис. 181. Амплитуда и фаза вынужденного колебания маятника с трением как функции частоты внешней силы.

имеют ненулевые вещественные части). Поэтому решение следует искать в виде  $x = \operatorname{Re} C e^{ivt}$ . Подставляя в уравнение, найдем

$$C = \frac{1}{\omega^2 - v^2 + kiv}. \quad (5)$$

Запишем  $C$  в тригонометрической форме:  $C = r e^{i\theta}$ . Графики зависимости амплитуды  $r$  и фазы  $\theta$  вынужденного колебания от частоты внешней силы имеют, согласно (5), вид, изображенный на рис. 181.

Общее решение неоднородного уравнения

$$x = r \cos(vt + \theta) + C_1 e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \theta_1)$$

получается добавлением к частному решению общего решения однородного уравнения  $C_1 e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \theta_1)$ .

При  $t \rightarrow +\infty$  это слагаемое стремится к 0, так что остается только одно вынужденное колебание  $x = r \cos(vt + \theta)$ .

Сравним поведение маятника при нулевом (рис. 178) и при положительном (рис. 181) значениях коэффициента трения.

Мы видим, что влияние малого трения на резонанс приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе растет не бесконечно, а до определенной конечной величины, обратно пропорциональной коэффициенту трения.

Действительно, функция  $r(\nu)$ , выражающая зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешней силы,

имеет вблизи  $\nu = \omega$  резко выраженный максимум (рис. 181). Из формулы (5) видно, что высота этого максимума растет при уменьшении  $k$ , как  $1/k\omega$ .

С «физической» точки зрения конечность амплитуды установившихся вынужденных колебаний при ненулевом значении коэффициента трения легко предвидеть, подсчитав баланс энергии. При больших амплитудах потеря энергии на трение больше, чем энергия, сообщаемая маятнику внешней силой. Поэтому амплитуда будет уменьшаться, пока не установится режим, в котором потери энергии на трение уравниваются работой внешней силы. Величина амплитуды установившихся колебаний растет обратно пропорционально коэффициенту трения, когда он стремится к нулю.

Сдвиг фазы  $\theta$  всегда отрицателен: *вынужденное колебание отстает от вынуждающей силы.*

**Задача 1.** Доказать, что всякое решение линейной неоднородной системы уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде суммы квазимногочленов с векторными коэффициентами

$$f = \sum_l e^{\lambda_l t} \sum_k C_k, t^k$$

является суммой квазимногочленов с векторными коэффициентами.

**Задача 2.** Доказать, что всякое решение линейного неоднородного обратного уравнения с правой частью в виде суммы квазимногочленов

$$x_n - (a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k}) = f(n)$$

является суммой квазимногочленов. Найти формулу для общего члена последовательности  $0, 2, 7, 18, 41, 88, \dots (x_n = 2x_{n-1} + n)$ .

**7. Применение к расчету слабо нелинейных колебаний.** При исследовании зависимости решения уравнения от параметров приходится решать линейные неоднородные уравнения — уравнения в вариациях (см. § 9,5). В частности, если «невозмущенная» система линейна, то задача часто сводится к решению линейных уравнений с правой частью в виде суммы экспонент (или тригонометрических функций) или квазимногочленов.

**Задача 1.** Исследовать зависимость периода колебаний маятника, описываемого уравнением  $\ddot{x} = -\sin x$ , от амплитуды  $A$ , считая последнюю малой.

$$\text{Ответ. } T = 2\pi \left( 1 + \frac{A^2}{16} + O(A^4) \right).$$

Например, при угле отклонения  $30^\circ$  период больше периода малых колебаний на 2%.

**Решение.** Рассмотрим решение уравнения маятника с начальным условием  $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$  как функцию от  $A$ .

По теореме о дифференцируемой зависимости от начальных условий эта функция гладкая. Разложим ее в ряд Тейлора по  $A$  вблизи  $A = 0$ :

$$x = Ax_1(t) + A^2x_2(t) + A^3x_3(t) + O(A^4).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\dot{x}_1 + A^2\dot{x}_2 + A^3\dot{x}_3 + O(A^4), \\ \ddot{x} &= A\ddot{x}_1 + A^2\ddot{x}_2 + A^3\ddot{x}_3 + O(A^4), \\ \sin x &= Ax_1 + A^2x_2 + A^3\left(x_3 - \frac{1}{6}x_1^3\right) + O(A^4).\end{aligned}$$

Уравнение  $\ddot{x} = -\sin x$  выполнено при любом  $A$ . Отсюда находим уравнения для  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -x_2, \quad \ddot{x}_3 = -x_3 + \frac{1}{6}x_1^3. \quad (6)$$

Начальное условие  $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$  выполнено при любом  $A$ . Отсюда находим начальные условия для уравнений (6):

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0. \quad (7)$$

Решая уравнения (6) при условиях (7), находим

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = 0,$$

а для  $x_3$  получаем уравнение

$$\ddot{x}_3 + x_3 = \frac{1}{6}\cos^3 t, \quad x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0.$$

Решая это уравнение (хотя бы методом комплексных амплитуд), находим

$$x_3 = \alpha(\cos t - \cos 3t) + \beta t \sin t,$$

где  $\alpha = 1/192, \beta = 1/16$ .

Итак, влияние нелинейности ( $\sin x \neq x$ ) на колебания маятника сводится \*) к добавлению слагаемого  $A^3x_3 + O(A^4)$ :

$$x = A \cos t + A^3[\alpha(\cos t - \cos 3t) + \beta t \sin t] + O(A^4).$$

Период колебаний  $T$  находится как то<sup>н</sup>: максимума  $x(t)$ , близкая к  $2\pi$  при малых  $A$ . Эта точка находится из условия  $\dot{x}(T) = 0$ , т. е.

$$A\{-\sin t + A^2[(\beta - \alpha)\sin T + 3\alpha \sin 3T + \beta T \cos T] + O(A^3)\} = 0.$$

Решим это уравнение приближенно при малых  $A$ . Положим  $T = 2\pi + u$ . Для  $u$  получим уравнение

$$\sin u = A^2[2\pi\beta + O(u)] + O(A^3).$$

По теореме о неявной функции

$$u = 2\pi\beta A^2 + O(A^3),$$

т. е.  $T = 2\pi\left(1 + \frac{A^2}{16} + o(A^2)\right)$ . Ввиду четности  $T(A) = o(A^2) = O(A^4)$ .

\*) Здесь полезно вспомнить о дырявом ведре (см. предостережение в § 9, п. 5): из появления «векового» слагаемого  $t \sin t$  в формуле для  $x_3$  нельзя делать никаких выводов о поведении маятника при  $t \rightarrow \infty$ . Наше приближение справедливо лишь на конечном интервале времени; при больших  $t$  слагаемое  $O(A^4)$  становится большим. И действительно, настоящее решение уравнения колебаний маятника остается ограниченным (величиной  $A$ ) при всех  $t$ , как это видно из закона сохранения энергии.

**Задача 2.** Исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды  $A$  для уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x + ax^2 + bx^3 = 0.$$

Ответ.  $T = \frac{2\pi}{\omega} \left( 1 + \left( \frac{5a^2}{12\omega^4} - \frac{3b}{8\omega^2} \right) A^2 + o(A^2) \right).$

**Задача 3.** Получить те же результаты из явной формулы для периода (§ 12, п. 7).

### § 27. Линейные неавтономные уравнения

Та часть теории линейных уравнений, которая не зависит от инвариантности относительно сдвигов, легко переносится на линейные уравнения и системы с переменными коэффициентами.

**1. Определение.** *Линейным (однородным) уравнением с переменными коэффициентами* \*) мы будем называть уравнение

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad A(t): R^n \rightarrow R^n, \quad (1)$$

где  $t$  принадлежит интервалу  $I$  вещественной оси. Этот интервал может составлять всю ось  $R$ .

Геометрически решения уравнения (1) изображаются интегральными кривыми в полосе  $I \times R^n$  расширенного фазового пространства (рис. 182). Как обычно, мы будем предполагать функцию  $A(t)$  гладкой \*\*).

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение маятника  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ . Частота  $\omega$  определяется длиной маятника. Колебания маятника переменной длины описываются аналогичным уравнением:

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x.$$

Это уравнение можно записать в виде (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2(t)x_1, \end{cases} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Рис. 183. Качели.

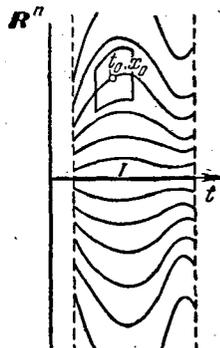
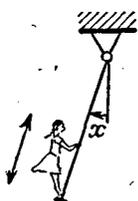


Рис. 182. Интегральные кривые линейного уравнения.

Примером маятника переменной длины являются качели: изменяя положение своего центра тяжести, человек на качелях периодически изменяет величину параметра  $\omega$  (рис. 183).

\*) Мы предполагаем, что коэффициенты вещественны. Комплексный случай вполне аналогичен.

\*\*) Достаточно было бы предполагать функцию  $A(t)$  непрерывной (см. ниже § 32, п. 6, стр. 200).

**2. Существование решений.** Одно решение у уравнения (1) видно сразу: нулевое. Для любых начальных условий  $(t_0, x_0)$  из  $I \times R^n$  по общим теоремам гл. 2 существует решение, определенное в некоторой окрестности точки  $t_0$ . Для нелинейного уравнения это решение может не продолжаться на весь интервал  $I$  (рис. 184). Особенностью линейных уравнений является то, что для них уход в бесконечность за конечное время невозможен.

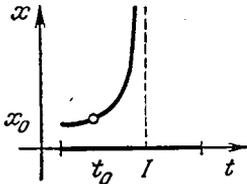


Рис. 184. Непродолжаемое решение уравнения  $\dot{x} = x^2$ .

**Теорема.** Всякое решение уравнения (1) можно продолжить на весь интервал  $I$ .

Причина заключается в том, что для линейного уравнения  $\|\dot{x}\| \leq C \|x\|$ , и поэтому решение растет не быстрее  $e^{Ct}$ .

Аккуратное доказательство проводится, например, так. Пусть  $[a, b]$  — компактный отрезок в  $I$ . Тогда на отрезке  $[a, b]$  норма\*) оператора  $A(t)$  ограничена:

$$\|A(t)\| < C = C(a, b).$$

Докажем следующую априорную оценку:

Если решение  $\varphi$  определено на отрезке  $[t_0, t]$  ( $a \leq t_0 \leq t \leq b$ ) (рис. 185), то

$$\|\varphi(t)\| \leq e^{C(t-t_0)} \|\varphi(t_0)\|. \quad (2)$$

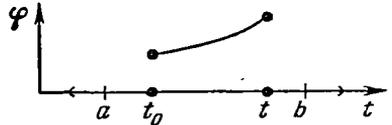


Рис. 185. Априорная оценка роста решения на отрезке  $[a, b]$ .

Для нулевого решения это очевидно. Если  $\varphi(t_0) \neq 0$ , то  $\varphi(t)$  не обращается в 0 по теореме единственности. Положим  $r(t) = \|\varphi(t)\|$ . Функция  $L(t) = \ln r^2$  определена при  $t_0 \leq t \leq t$ .

По условию  $\dot{L} \leq 2r\dot{r}/r^2 \leq 2C$ . Поэтому  $L(t) \leq L(t_0) + 2C(t - t_0)$ , что и доказывает априорную оценку (2).

Пусть теперь  $\|x_0\|^2 = B > 0$ . Рассмотрим компакт в расширенном фазовом пространстве (рис. 186)

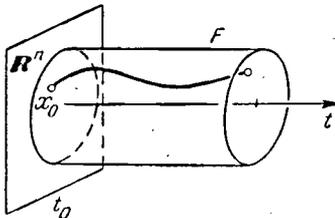


Рис. 186. Продолжение решения до  $t = b$ .

$$F = \{t, x : a \leq t \leq b, \|x\|^2 \leq 2Be^{2C(b-a)}\}.$$

По теореме продолжения решение с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$  продолжается вперед до границы цилиндра  $F$ . Граница цилиндра  $F$  состоит из торцов ( $t = a, t = b$ ) и боковой поверхности ( $\|x\|^2 = 2Be^{2C(b-a)}$ ). На боковую поверхность решение выйти не может, так как согласно априорной оценке

$$\|\varphi(t)\|^2 \leq Be^{2C(b-a)}.$$

Итак, решение продолжается вправо до  $t = b$ . Аналогично доказывается продолжение влево до  $t = a$ .

Ввиду произвольности  $a$  и  $b$  теорема доказана.

**3. Линейное пространство решений.** Рассмотрим множество  $X$  всех решений уравнения (1), определенных на всем интервале  $I$ .

\*) Мы предполагаем, что в  $R^n$  выбрана какая-нибудь евклидова метрика.

Поскольку решения — это отображения  $\varphi: I \rightarrow R^n$  со значениями в линейном фазовом пространстве  $R^n$ , то их можно складывать и умножать на числа:

$$(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t).$$

**Теорема.** Множество  $X$  всех решений уравнения (1), определенных на интервале  $I$ , является линейным пространством.

**Доказательство.** Это очевидно:

$$\frac{d}{dt}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2 = c_1A\varphi_1 + c_2A\varphi_2 = A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2).$$

**Теорема.** Линейное пространство  $X$  решений линейного уравнения изоморфно фазовому пространству  $R^n$  этого уравнения.

**Доказательство.** Пусть  $t \in I$ . Рассмотрим отображение

$$V_t: X \rightarrow R^n, \quad V_t\varphi = \varphi(t),$$

сопоставляющее каждому решению  $\varphi$  его значение в момент  $t$ .

Отображение  $V_t$  линейно (так как значение суммы решений равно сумме их значений). Его образ — все фазовое пространство  $R^n$ , так как по теореме существования для любого  $x_0 \in R^n$  существует решение  $\varphi$  с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ . Ядро отображения  $V_t$  равно 0, так как решение с нулевым начальным условием  $\varphi(t_0) = 0$  равно нулю тождественно по теореме единственности.

Итак,  $V_t$  — изоморфизм  $X$  на  $R^n$ . Это — основной результат теории линейных уравнений.

**Определение.** Фундаментальной системой решений уравнения (1) называется базис линейного пространства решений  $X$ .

**Задача 1.** Найти фундаментальную систему решений уравнения (1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из доказанной теоремы вытекают:

**Следствие 1.** Всякое уравнение (1) имеет фундаментальную систему из  $n$  решений  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

**Следствие 2.** Всякое решение уравнения (1) является линейной комбинацией решений фундаментальной системы.

**Следствие 3.** Всякие  $n+1$  решений уравнения (1) линейно зависимы.

**Следствие 4.** Соответствующие уравнению (1) отображения за время от  $t_0$  до  $t_1$  (рис. 187)

$$g_{t_0}^{t_1} = V_{t_1} V_{t_0}^{-1}: R^n \rightarrow R^n$$

являются линейными изоморфизмами.

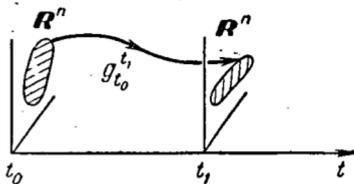


Рис. 187. Линейное преобразование фазового пространства, осуществляемое решениями линейного уравнения за время от  $t_0$  до  $t_1$ .

4. **Определитель Вронского.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис в фазовом пространстве  $R^n$ . Выбор базиса фиксирует единицу объема и ориентацию в  $R^n$ . Поэтому каждый параллелепипед в фазовом пространстве имеет определенный объем.

Рассмотрим  $n$  вектор-функций  $\varphi_k: I \rightarrow R^n$  ( $k=1, \dots, n$ ).

**Определение.** *Определителем Вронского системы вектор-функций  $\varphi_k$  называется числовая функция  $W: I \rightarrow R$ , значение которой в точке  $t$  равно (ориентированному) объему параллелепипеда, натянутого на векторы  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in R^n$ ,*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1}(t) & \dots & \varphi_{n,1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1,n}(t) & \dots & \varphi_{n,n}(t) \end{vmatrix},$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_{k,1}(t) e_1 + \dots + \varphi_{k,n}(t) e_n.$$

— В частности, пусть  $\varphi_k$  — решения уравнения (1). Их образы при построенном выше изоморфизме  $B_t$  — это векторы фазового пространства  $\varphi_k(t) \in R^n$ . Они линейно зависимы, если и только если определитель Вронского равен 0 в точке  $t$ . Отсюда:

**Следствие 5.** *Система решений  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  уравнения (1) является фундаментальной тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского отличен от 0 в какой-нибудь точке  $t$ .*

**Следствие 6.** *Если определитель Вронского системы решений уравнения (1) равен 0 в одной точке, то он равен 0 тождественно при всех  $t$ .*

**Задача 1.** Может ли определитель Вронского системы линейно независимых вектор-функций  $\varphi_k$  тождественно равняться нулю?

**Задача 2.** Докажите, что определитель Вронского фундаментальной системы решений пропорционален определителю преобразования за время от  $t_0$  до  $t$ :

$$W(t) = \det g_{t_0}^t W(t_0).$$

**Указание.** Решение см. в п. 6.

5. **Случай одного уравнения.** Рассмотрим одно уравнение  $n$ -го порядка

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (3)$$

с переменными, вообще говоря, коэффициентами  $a_k = a_k(t)$ ,  $t \in I$ .

Некоторые уравнения второго порядка с переменными коэффициентами столь часто встречаются в приложениях, что имеют собственные имена, а их решения изучены и затабулированы не менее подробно, чем синус и косинус (см., например, Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций, Физматгиз, 1959).

**Пример 1.** Уравнение Бесселя:

$$\ddot{x} + \frac{1}{t} \dot{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) x = 0.$$

Пример 2. Гипергеометрическое уравнение Гаусса:

$$\ddot{x} + \frac{(\alpha + \beta + 1)t - \gamma}{t(t-1)} \dot{x} + \frac{\alpha\beta}{t(t-1)} x = 0.$$

Пример 3. Уравнение Матвея:

$$\ddot{x} + (a + b \cos t) x = 0.$$

Мы могли бы записать уравнение (3) в виде системы  $n$  уравнений первого порядка и применить предыдущие рассуждения.

Можно, однако, рассмотреть непосредственно пространство  $X$  решений уравнения (3). Это — линейное пространство функций  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Оно естественно изоморфно пространству решений эквивалентной системы  $n$  уравнений. Изоморфизм задается сопоставлением функции  $\varphi$  вектор-функции

$$\Phi = (\varphi, \dot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)})$$

из производных  $\varphi$ . Итак:

Следствие 7. Пространство  $X$  решений уравнения (3) изоморфно фазовому пространству  $\mathbb{R}^n$  уравнения (3), причем изоморфизм можно задать, сопоставляя каждому решению  $\varphi \in X$  набор значений производных в какой-нибудь точке  $t_0$ :

$$\varphi \rightarrow (\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)).$$

Определение. Базис линейного пространства  $X$  называется фундаментальной системой решений уравнения (3).

Задача 1. Указать фундаментальную систему решений уравнения (3) в случае, когда коэффициенты  $a_k$  постоянны. Например, для  $\ddot{x} + ax = 0$ .

Ответ.  $\{t^r e^{\lambda t}\}$ , где  $0 \leq r < \nu$ , если  $\lambda$  — корень характеристического уравнения кратности  $\nu$ . В случае комплексных корней  $\lambda = \alpha \pm i\omega$  нужно заменить  $e^{\lambda t}$  на  $e^{\alpha t} \cos \omega t$  и  $e^{\alpha t} \sin \omega t$ . В частности, для  $\ddot{x} + ax = 0$

$\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , если  $a = \omega^2 > 0$ ;

$\operatorname{ch} \alpha t$  и  $\operatorname{sh} \alpha t$  или  $e^{\alpha t}$  и  $e^{-\alpha t}$ , если  $a = -\alpha^2 < 0$ ;

1 и  $t$ , если  $a = 0$ .

Определение. Определителем Вронского системы функций  $\varphi_k: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , называется числовая функция  $W: I \rightarrow \mathbb{R}$ , значение которой в точке  $t$  равно

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Иными словами, это — определитель Вронского системы вектор-функций  $\Phi_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , полученных из  $\varphi_k$  обычным образом:

$$\Phi_k(t) = (\varphi_k(t), \dot{\varphi}_k(t), \dots, \varphi_k^{(n-1)}(t)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Все сказанное об определителе Вронского системы вектор-решений уравнения (1) переносится без изменений на определитель Вронского системы решений уравнения (3). В частности:

**Следствие 8.** Если определитель Вронского системы решений уравнения (3) обращается в 0 хоть в одной точке, то он тождественно равен нулю при всех  $t$ .

**Задача 2.** Пусть определитель Вронского двух функций равен 0 в точке  $t_0$ . Следует ли отсюда, что он тождественно равен 0?

**Следствие 9.** Если определитель Вронского системы решений уравнения (3) обращается в 0 хоть в одной точке, то эти решения линейно зависимы.

**Задача 3.** Пусть определитель Вронского двух функций тождественно равен 0. Следует ли отсюда, что эти функции линейно зависимы?

**Следствие 10.** Система  $n$  решений уравнения (3) фундаментальна, если и только если определитель Вронского отличен от 0 хоть в одной точке.

**Пример 4.** Рассмотрим систему функций  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ . Эти функции образуют фундаментальную систему решений линейного уравнения вида (3) (какого?). Поэтому они линейно независимы. Значит, их определитель Вронского отличен от 0. Но этот определитель равен

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**Следствие 11.** Определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

отличен от 0, если  $\lambda_k$  попарно различны.

**Пример 5.** Рассмотрим уравнение маятника  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Фундаментальная система решений:  $(\cos \omega t, \sin \omega t)$ . Определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{vmatrix} = \omega$$

постоянный. Это неудивительно, так как фазовый поток уравнения маятника сохраняет площади (см. § 16,4).

Посмотрим теперь, как меняется объем фигур фазового пространства под действием преобразований  $g_t^t$  за время от  $t_0$  до  $t$  в общем случае.

**6. Теорема Лиувилля.** *Определитель Вронского системы решений уравнения (1) является решением дифференциального уравнения*

$$\dot{W} = aW, \quad \text{где } a(t) = \text{Tr } A(t) \text{ (след } A(t)). \quad (4)$$

Следствие.

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} W(t_0), \quad \det g_t^{t_0} = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}. \quad (5)$$

Действительно, уравнение (4) легко решить:

$$\frac{dW}{W} = a dt, \quad \ln W - \ln W_0 = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

Между прочим, из формулы (5) снова видно, что определитель Вронского системы решений либо равен 0 тождественно, либо не обращается в 0 ни в одной точке.

**Задача 1.** Найти объем образа единичного куба  $0 \leq x_i \leq 1$  под действием преобразования за время 1 фазового потока системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3.$$

Решение.  $\text{Tr } A = 2$ , поэтому  $W(t) = e^{2t} W(0) = e^{2t}$ .

Идея доказательства теоремы Лиувилля.

Если коэффициенты постоянны, то уравнение (4) — это формула Лиувилля из § 16. «Замораживая» коэффициенты  $A(t)$  (положив их равными значениям в некоторый момент времени  $\tau$ ), убедимся в справедливости равенства (4) при любом  $t$ .

**Доказательство.** Рассмотрим линейное преобразование фазового пространства  $g_\tau^{\tau+\Delta} : R^n \rightarrow R^n$  (рис. 188) за малое время от  $\tau$  до  $\tau + \Delta$ . Это преобразование переводит значение любого решения  $\varphi$  уравнения (1) в момент  $\tau$  в его значение в момент  $\tau + \Delta$ . Согласно уравнению (1)

$$\varphi(\tau + \Delta) = \varphi(\tau) + A(\tau)\varphi(\tau)\Delta + o(\Delta),$$

т. е.

$$g_\tau^{\tau+\Delta} = E + \Delta A(\tau) + o(\Delta).$$

Следовательно, согласно § 16 коэффициент растяжения объемов при преобразовании  $g_\tau^{\tau+\Delta}$  равен  $\det g_\tau^{\tau+\Delta} = 1 + \Delta a + o(\Delta)$ , где  $a = \text{Tr } A$ .

Но  $W(\tau)$  — это объем параллелепипеда  $\Pi_\tau$ , натянутого на значения нашей системы решений в момент  $\tau$ . Преобразование  $g_\tau^{\tau+\Delta}$  переведет эти значения

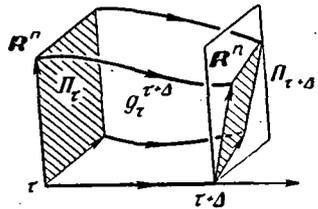


Рис. 188. Действие фазового потока на параллелепипед  $\Pi_\tau$ , натянутый на фундаментальную систему решений.

в систему значений той же системы решений в момент  $\tau + \Delta$ . Параллелепипед  $\Pi_{\tau+\Delta}$ , натянутый на эти новые значения, имеет объем  $W(\tau + \Delta)$ . Итак,

$$W(\tau + \Delta) = \det g_{\tau+\Delta}^{\tau} W(\tau) = [1 + a(\tau)\Delta + o(\Delta)] W(\tau),$$

откуда  $\dot{W} = aW$ , что и требовалось.

**Следствие.** *Определитель Вронского системы решений уравнения (3) равен*

$$W(t) = e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau} W(t_0).$$

Знак минус появляется из-за того, что при записи уравнения (3) в виде системы (1) приходится перенести  $a_1 x^{(n-1)}$  в правую часть. На диагонали матрицы получившейся системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

стоит только  $-a_1$ .

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение качелей  $\ddot{x} + f(t)x = 0$ . Теорема. *Положение равновесия  $x = \dot{x} = 0$  ни при каком  $f$  не может быть асимптотически устойчивым.*

**Доказательство.** Рассмотрим какой-нибудь базис  $\xi, \eta$  в плоскости начальных условий  $R^2$  (рис. 189). Устойчивость означала бы, что  $g_{t_0}^t \xi \rightarrow 0$  и  $g_{t_0}^t \eta \rightarrow 0$ . Тогда для соответствующей фундаментальной системы  $W(t) \rightarrow 0$ .

Наше уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(t)x_1 \end{cases}$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & 0 \end{pmatrix}.$$

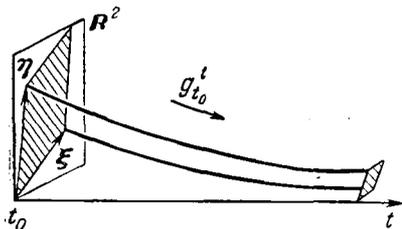


Рис. 189. Фазовый поток асимптотически устойчивой линейной системы.

Поскольку  $\text{Tr } A = 0$ , то  $W(t) = \text{const}$  вопреки  $W \rightarrow 0$ .

**Задача 2.** Рассмотрите качели с трением

$$\ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0.$$

Покажите, что асимптотическая устойчивость невозможна, если коэффициент трения отрицателен ( $\alpha(t) < 0 \forall t$ ).

Верно ли, что при положительном коэффициенте трения положение равновесия  $(0, 0)$  всегда устойчиво?

**Замечание.** Дивергенцией векторного поля  $v$  в евклидовом пространстве  $R^n$  с декартовыми координатами  $x_i$  называется функция

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

В частности, для линейного векторного поля  $v(x) = Ax$  дивергенция — это след оператора  $A$ :

$$\operatorname{div} Ax = \operatorname{Tr} A.$$

Дивергенция векторного поля определяет скорость растяжения объемов соответствующим фазовым потоком.

Пусть  $D$  — область в евклидовом фазовом пространстве уравнения  $\dot{x} = v(x)$  (не обязательно линейного). Обозначим через  $D(t)$  образ области  $D$  под действием фазового потока и через  $V(t)$  объем области  $D(t)$ .

**Задача\* 3.** Докажите следующую теорему.

**Теорема Лиувилля.**

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \operatorname{div} v \, dx \quad (\text{рис. 190}).$$

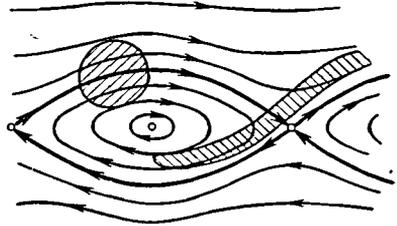


Рис. 190. Фазовый поток векторного поля дивергенции 0 сохраняет площади.

**Следствие 1.** Если  $\operatorname{div} v = 0$ , то фазовый поток сохраняет объем любой области.

Такой фазовый поток можно представлять себе как течение несжимаемой «фазовой жидкости» в фазовом пространстве.

**Следствие 2.** Фазовый поток уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

сохраняет объемы.

**Доказательство.**

$$\operatorname{div} v = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \equiv 0.$$

Этот факт играет фундаментальную роль в статистической физике.

## § 28. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами

Теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами объясняет, как надо раскачиваться на качелях и почему верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника

становится устойчивым, если точка подвеса маятника совершает достаточно быстрые колебания по вертикали.

1. **Отображение за период.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x, t), \quad v(x, t+T) = v(x, t), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

с периодически зависящей от времени правой частью (рис. 191).

Пример 1. Движение маятника с периодически меняющимися параметрами (например, движение качелей) описывается системой уравнений вида (1):

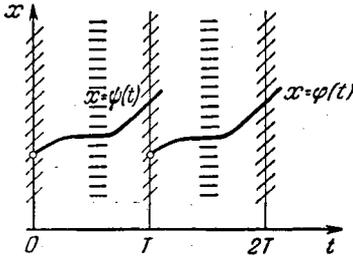


Рис. 191. Расширенное фазовое пространство уравнения с периодическими коэффициентами.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -\omega^2(t) x_1; \\ \omega(t+T) &= \omega(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Мы будем предполагать, что все решения уравнения (1) продолжаются неограниченно: это заведомо так для линейных уравнений, которые нас особенно интересуют.

Периодичность правой части уравнения проявляется в специальных свойствах фазового потока уравнения (1).

**Лемма 1.** Преобразование фазового пространства за время от  $t_1$  до  $t_2$   $g_{t_1}^{t_2}: R^n \rightarrow R^n$  не меняется при одновременном увеличении  $t_1$  и  $t_2$  на величину периода  $T$  правой части уравнения (1).

**Доказательство.** Нужно доказать, что сдвиг  $\psi(t) = \varphi(t+T)$  решения  $\varphi(t)$  на время  $T$  является решением. Но сдвиг расширенного фазового пространства на  $T$  вдоль оси времени переводит поле направлений уравнения (1) в себя (рис. 191). Поэтому сдвинутая на  $T$  интегральная кривая уравнения (1) везде касается поля направлений и, следовательно, остается интегральной кривой.

Итак,  $g_{t_1+T}^{t_2+T} = g_{t_1}^{t_2}$ , что и требовалось доказать.

Рассмотрим, в частности, преобразование  $g_0^T$ , осуществляемое фазовым потоком за время одного периода  $T$ . Это преобразование будет играть важную роль в дальнейшем; мы будем называть его *отображением за время  $T$*  и обозначать (рис. 192)

$$A = g_0^T: R^n \rightarrow R^n.$$

**Пример 2.** Для систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

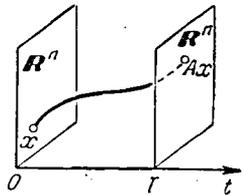


Рис. 192. Отображение за период.

которые можно считать периодическими с любым периодом  $T$ , отображение  $A$  есть поворот и гиперболический поворот соответственно.

**Лемма 2.** Преобразования  $g_0^{nT}$  образуют группу

$$g_0^{nT} = A^n.$$

Кроме того,  $g_0^{nT+s} = g_0^s g_0^{nT}$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 1  $g_{nT}^{nT+s} = g_0^s$ . Поэтому  $g_0^{nT+s} = g_{nT}^{nT+s} g_0^{nT} = g_0^s g_0^{nT}$ . Полагая  $s=T$ , находим  $g_0^{(n+1)T} = A g_0^{nT}$ , откуда по индукции  $g_0^{nT} = A^n$ .

Лемма доказана.

Всевозможным свойствам решений уравнения (1) соответствуют аналогичные свойства отображения  $A$  за период.

**Теорема.** 1) Точка  $x_0$  есть неподвижная точка отображения  $A$  ( $Ax_0 = x_0$ ) тогда и только тогда, когда решение с начальным условием  $x(0) = x_0$  есть периодическое, с периодом  $T$ .

2) Периодическое решение  $x(t)$  устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка  $x_0$  отображения  $A$  устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива)\*).

3) Если система (1) линейна, т. е.  $v(x, t) = V(t)x$  — линейная функция  $x$ , то отображение  $A$  линейно.

4) Если, кроме того, след линейного оператора  $V(t)$  равен нулю, то отображение  $A$  сохраняет объем:  $\det A = 1$ .

**Доказательство.** Утверждения 1) и 2) вытекают из соотношения  $g_0^{T+s} = g_0^s A$  и из непрерывной зависимости решения от начальных условий на отрезке  $[0, T]$ .

Утверждение 3) вытекает из того, что сумма решений линейной системы есть снова решение.

Утверждение 4) вытекает из теоремы Лиувилля.

**2. Условия устойчивости.** Применим доказанную теорему к отображению  $A$  фазовой плоскости  $x_1, x_2$  на себя, соответствующему системе (2). Так как система (2) линейна и след матрицы правой части равен 0, получаем

**Следствие.** Отображение  $A$  линейно и сохраняет площади ( $\det A = 1$ ). Для устойчивости нулевого решения системы уравнений (2) необходима и достаточна устойчивость отображения  $A$ .

**Задача 1.** Доказать, что поворот плоскости — устойчивое отображение, а гиперболический поворот — неустойчивое.

Изучим теперь подробнее линейные отображения плоскости на себя, сохраняющие площадь.

\* Неподвижная точка  $x_0$  отображения  $A$  называется устойчивой по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчивой), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что из  $|x - x_0| < \delta$  вытекает  $|A^n x - A^n x_0| < \varepsilon$  для всех  $0 < n < \infty$  сразу (соответственно еще  $A^n x - A^n x_0 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

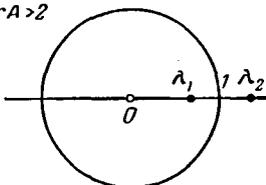
**Теорема.** Пусть  $A$  — матрица сохраняющего площадь линейного отображения плоскости на себя ( $\det A = 1$ ). Тогда отображение  $A$  устойчиво, если  $|\operatorname{Tr} A| < 2$ , и неустойчиво, если  $|\operatorname{Tr} A| > 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные числа  $A$ . Они удовлетворяют характеристическому уравнению  $\lambda^2 - \operatorname{Tr} A \lambda + 1 = 0$  с вещественными коэффициентами

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Tr} A, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A = 1.$$

Корни  $\lambda_1, \lambda_2$  этого вещественного квадратного уравнения вещественны при  $|\operatorname{Tr} A| > 2$  и комплексно сопряжены при  $|\operatorname{Tr} A| < 2$

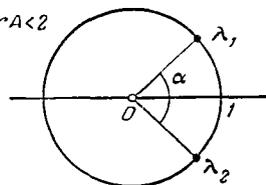
$\operatorname{Tr} A > 2$



(рис. 193). В первом случае одно из собственных чисел больше, а другое меньше 1 по модулю; отображение  $A$  есть гиперболический поворот и неустойчиво. Во втором случае собственные числа лежат на единичной окружности:

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2.$$

$\operatorname{Tr} A < 2$



Отображение  $A$  эквивалентно повороту на угол  $\alpha$  (где  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$ ), т. е. становится поворотом при соответствующем выборе евклидовой структуры на плоскости (почему?). Итак, оно устойчиво.

Теорема доказана.

Рис. 193. Собственные числа отображения за период.

Таким образом, весь вопрос об устойчивости нулевого решения системы (2) свелся к вычислению следа матрицы  $A$ .

К сожалению, вычислить этот след явно удается лишь в специальных случаях. Его всегда можно найти приближенно, численно интегрируя уравнение на отрезке  $0 \leq t \leq T$ . В важном случае, когда  $\omega(t)$  близка к постоянной, помогают простые общие соображения.

**3. Сильно устойчивые системы.** Рассмотрим линейную систему (1) с двумерным фазовым пространством (т. е. с  $n=2$ ). Такая система называется *гамильтоновой*, если дивергенция  $v$  равна нулю. Для гамильтоновых систем, как указано выше, фазовый поток сохраняет площади:  $\det A = 1$ .

**Определение.** Нулевое решение линейной гамильтоновой системы *сильно устойчиво*, если оно устойчиво и у всякой близкой линейной гамильтоновой системы нулевое решение тоже устойчиво.

Из предыдущих двух теорем вытекает

**Следствие.** Если  $|\operatorname{Tr} A| < 2$ , то нулевое решение *сильно устойчиво*.

Ибо если  $|\text{Tg } A| < 2$ , то для отображения  $A'$ , соответствующего достаточно близкой системе, тоже выполнено условие  $|\text{Tg } A'| < 2$ .

Применим это к системе с почти постоянными коэффициентами. Рассмотрим, например, уравнение

$$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + \varepsilon a(t)) x, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (3)$$

где  $a(t + 2\pi) = a(t)$ , например,  $a(t) = \cos t$  (маятник, частота которого колеблется около  $\omega$  с малой амплитудой и с периодом  $2\pi$ )\*).

Каждую систему (3) будем изображать точкой на плоскости параметров  $\varepsilon, \omega$  (рис. 194). Очевидно, устойчивые системы с  $|\text{Tg } A| < 2$  образуют на плоскости  $(\omega, \varepsilon)$  открытое множество, так же как и неустойчивые системы с  $|\text{Tg } A| > 2$ .

Граница устойчивости дается уравнением  $|\text{Tg } A| = 2$ .

**Теорема.** Все точки оси  $\omega$ , исключая целые и полуцелые точки  $\omega = k/2, k=0, 1, 2, \dots$ , соответствуют сильно устойчивым системам (3).

Таким образом, множество неустойчивых систем может подходить к оси  $\omega$  только в точках  $\omega = k/2$ . Иными словами, раскачать качели малым периодическим изменением длины можно лишь в том случае, когда один период изменения длины близок к целому числу полупериодов собственных колебаний, — результат, всем известный из эксперимента.

Доказательство сформулированной теоремы основано на том, что при  $\varepsilon = 0$  уравнение (3) имеет постоянные коэффициенты и явно решается.

**Задача 1.** Вычислить для системы (3) с  $\varepsilon = 0$  матрицу преобразования  $A$  за период  $T = 2\pi$  в базе  $x, \dot{x}$ .

**Решение.** Общее решение:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t;$$

частное решение с начальным условием  $x = 1, \dot{x} = 0$ :

$$x = \cos \omega t, \quad \dot{x} = -\omega \sin \omega t;$$

частное решение с начальным условием  $x = 0, \dot{x} = 1$ :

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{x} = \cos \omega t.$$

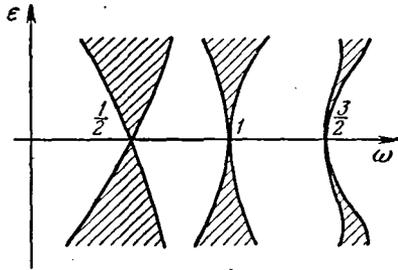


Рис. 194. Область неустойчивости при параметрическом резонансе.

\*) В случае  $a(t) = \cos t$  уравнение (3) называется *уравнением Матвея*.

Ответ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $|\operatorname{Tr} A| = |2 \cos 2\pi\omega| < 2$ , если  $\omega \neq k/2$ ,  $k=0, 1, \dots$ , и теорема вытекает из предыдущего следствия.

Более внимательный анализ \*) показывает, что, вообще говоря (и, в частности, при  $a(t) = \cos t$ ), вблизи точек  $\omega = k/2$ ,  $k=1, 2, \dots$ , область неустойчивости (заштрихованная на рис. 194) действительно подходит к оси  $\omega$ .

Таким образом, при некоторых соотношениях между частотой изменения параметров и собственной частотой качелей ( $\omega \approx k/2$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) нижнее положение равновесия идеализированных качелей (3) неустойчиво и они раскачиваются при сколь угодно малом периодическом изменении длины.

Это явление называется *параметрическим резонансом*. Характерной особенностью параметрического резонанса является то, что он сильнее всего проявляется в случае, когда частота изменения параметров  $\nu$  (в уравнении (3) частота  $\nu$  равна 1) вдвое больше собственной частоты  $\omega$ .

**Замечание.** Теоретически параметрический резонанс наблюдается при бесконечном наборе соотношений  $\omega/\nu \approx k/2$ ,  $k=1, 2, \dots$ . Практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда  $k$  невелико ( $k=1, 2$ , реже 3). Дело в том, что

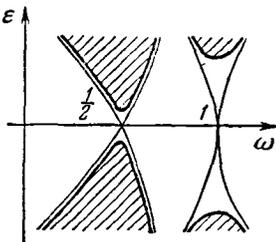


Рис. 195. Влияние малого трения на область неустойчивости.

а) при больших  $k$  область неустойчивости подходит к оси  $\omega$  узким язычком и для резонансной частоты  $\omega$  получаются очень жесткие пределы ( $\sim \epsilon^k$  для гладкой функции  $a(t)$  в (3));

б) сама неустойчивость слабо выражена при больших  $k$ , так как величина  $|\operatorname{Tr} A| - 2$  невелика и собственные числа близки к 1 при больших  $k$ ;

в) сколь угодно малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса  $k$ -го порядка имеется минимальное значение амплитуды  $\epsilon_k$ : при меньших  $\epsilon$  колебания затухают. С ростом  $k$   $\epsilon_k$  быстро растет (рис. 195).

Заметим также, что для уравнения (3) в неустойчивом случае величина  $x$  растет неограниченно. В реальных системах колебания достигают лишь конечной амплитуды, так как при больших  $x$  само линейризованное уравнение (3) теряет силу и нужно учитывать нелинейные эффекты.

\*) См., например, разобранный ниже задачу 1 п. 4.

**4. Вычисления.**

**Задача 1.** Найти вид областей устойчивости на плоскости  $\varepsilon, \omega$  для системы, описываемой уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f(t)x, \\ f(t) &= \begin{cases} \omega + \varepsilon, & 0 \leq t < \pi; \\ \omega - \varepsilon, & \pi \leq t < 2\pi; \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1; \\ f(t + 2\pi) &= f(t). \end{aligned} \tag{4}$$

**Решение.** Из решения предыдущей задачи (1 п. 3) следует, что  $A = A_2 A_1$ , где

$$A_k = \begin{pmatrix} c_k & \frac{1}{\omega_k} s_k \\ -\omega_k s_k & c_k \end{pmatrix}, \quad c_k = \cos \pi \omega_k, \quad s_k = \sin \pi \omega_k, \quad \omega_{1,2} = \omega \pm \varepsilon.$$

Поэтому граница зоны устойчивости имеет уравнение

$$|\operatorname{Tr} A| = \left| 2c_1 c_2 - \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) s_1 s_2 \right| = 2. \tag{5}$$

Так как  $\varepsilon \ll 1$ , имеем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega + \varepsilon}{\omega - \varepsilon} \approx 1.$$

Введем обозначение  $\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2(1 + \Delta)$ . Тогда, как легко сосчитать,

$$\Delta = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^4) \ll 1.$$

Пользуясь соотношениями  $2c_1 c_2 = \cos 2\pi\varepsilon + \cos 2\pi\omega$ ,  $2s_1 s_2 = \cos 2\pi\varepsilon - \cos 2\pi\omega$ , перепишем уравнение (5) в виде

$$-\Delta \cos 2\pi\varepsilon + (2 + \Delta) \cos 2\pi\omega = \pm 2,$$

или

$$\cos 2\pi\omega = \frac{2 + \Delta \cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}, \tag{6_1}$$

$$\cos 2\pi\omega = \frac{-2 + \Delta \cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}. \tag{6_2}$$

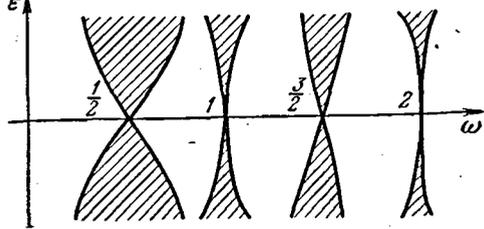


Рис. 196. Область неустойчивости для уравнения (4)

В первом случае  $\cos 2\pi\omega \approx 1$ . Поэтому положим  $\omega = k + a$ ,  $|a| \ll 1$ ;  $\cos 2\pi\omega = \cos 2\pi a = 1 - 2\pi^2 a^2 + O(a^4)$ .

Перепишем уравнение (6<sub>1</sub>) в виде

$$\cos 2\pi\omega = 1 - \frac{\Delta}{2 + \Delta} (1 - \cos 2\pi\varepsilon)$$

или

$$2\pi^2 a^2 + O(a^4) = \Delta \pi^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Подставляя значение  $\Delta = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^4)$ , находим  $a = \pm \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + o(\varepsilon^2)$ , т. е.

$$\omega = k \pm \frac{\varepsilon^2}{k^2} + o(\varepsilon^2) \text{ (рис. 196).}$$

Аналогично решается уравнение (6<sub>2</sub>); в результате получаем

$$\omega = k + \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon}{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)} + o(\varepsilon).$$

**Задача 2.** Может ли верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника стать устойчивым, если точка подвеса колеблется в вертикальном направлении?

Пусть длина маятника  $l$ , амплитуда колебаний точки подвеса  $a \ll l$ , период колебаний точки подвеса  $2\tau$ , причем в течение каждого полупериода ускорение точки подвеса постоянно и равно  $\pm c$  (тогда  $c = 8a/\tau^2$ ). Оказывается, при достаточно быстрых колебаниях подвеса ( $\tau \ll 1$ ) верхнее положение равновесия становится устойчивым.

**Решение.** Уравнение движения можно записать в виде  $\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x$  (знак меняется через время  $\tau$ ), где  $\omega^2 = g/l$ ,  $\alpha^2 = c/l$ .

Если колебания подвеса достаточно быстры, то  $\alpha^2 > \omega^2$  ( $\alpha^2 = 8a/(l\tau^2)$ ).

Аналогично предыдущей задаче,  $A = A_2 A_1$ , где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau & \frac{1}{k} \text{sh } k\tau \\ k \text{sh } k\tau & \text{ch } k\tau \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{pmatrix},$$

$$k^2 = \alpha^2 + \omega^2, \quad \Omega^2 = \alpha^2 - \omega^2.$$

Условие устойчивости  $|\text{Tr } A| < 2$  имеет поэтому вид

$$\left| 2 \text{ch } k\tau \cos \Omega\tau + \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \text{sh } k\tau \sin \Omega\tau \right| < 2. \quad (7)$$

Покажем, что условие это выполнено при достаточно быстрых колебаниях точки подвеса, т. е. когда  $c \gg g$ . Введем безразмерные переменные  $\varepsilon, \mu$ :

$$\frac{a}{l} = \varepsilon^2 \ll 1, \quad \frac{g}{c} = \mu^2 \ll 1.$$

Тогда

$$k\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}, \quad \Omega\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2},$$

$$\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} = \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} - \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}} = 2\mu^2 + O(\mu^4).$$

Поэтому при малых  $\varepsilon, \mu$  справедливы разложения с точностью  $O(\varepsilon^4 + \mu^4)$ :

$$\text{ch } k\tau = 1 + 4\varepsilon^2(1 + \mu^2) + \frac{2}{3}\varepsilon^4 + \dots,$$

$$\cos \Omega\tau = 1 - 4\varepsilon^2(1 - \mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \dots,$$

$$\left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \text{sh } k\tau \sin \Omega\tau = 16\varepsilon^2\mu^2 + \dots$$

Итак, условие устойчивости (7) принимает вид

$$2 \left( 1 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\mu^2 + \dots \right) + 16\varepsilon^2\mu^2 < 2.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, находим  $\frac{2}{3}16\varepsilon^4 \geq 32\varepsilon^2\mu^2$ , или  $\mu < \varepsilon/\sqrt{3}$ , или еще  $g/c < a/(3l)$ . Это условие можно переписать в виде

$$N > \sqrt{\frac{3}{32}} \omega \frac{l}{a} \approx 0,3\omega \frac{l}{a},$$

где  $N = l/(2\tau)$  — число колебаний точки подвеса в единицу времени. Например, если длина маятника  $l = 20$  см, а амплитуда колебаний точки подвеса  $a = 1$  см, то  $N > 0,31 \sqrt{980/20} \cdot 20 \approx 43$  (колебаний в секунду). В частности, верхнее положение равновесия устойчиво, если число колебаний подвеса в секунду больше 50.

## § 29. Вариация постоянных

При исследовании уравнений, близких к уже исследованным, «невозмущенным» уравнениям, часто полезен следующий прием. Пусть  $c$  — первый интеграл «невозмущенного» уравнения. Тогда для близких «возмущенных» уравнений функция  $c$  уже не будет первым интегралом. Однако часто удается узнать (точно или приближенно), как меняются со временем значения  $c$  ( $\varphi(t)$ ), где  $\varphi$  — решение «возмущенного» уравнения. В частности, если исходное уравнение — линейное однородное, а возмущенное — неоднородное, то этот прием приводит к явной формуле для решения, причем в силу линейности уравнения никакой «малости» возмущения не требуется.

1. Простейший случай. Рассмотрим простейшее линейное неоднородное уравнение

$$\dot{x} = f(t), \quad x \in R^n, \quad t \in I, \quad (1)$$

соответствующее простейшему однородному уравнению

$$\dot{x} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) решается квадратурой:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

2. Общий случай. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + h(t), \quad x \in R^n, \quad t \in I, \quad (4)$$

соответствующее однородному уравнению

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (5)$$

Предположим, что мы умеем решать однородное уравнение (5) и  $x = \varphi(t)$  — его решение. Выберем начальные условия  $c = \varphi(t_0)$  в качестве выпрямляющих интегральные кривые уравнения (5) координат  $(c, t)$  в расширенном фазовом пространстве (рис. 197).

В новых координатах уравнение (5) примет простейший вид (2). Переход к выпрямляющим координатам осуществляется линейным по  $x$  преобразованием. Поэтому в новых координатах неоднородное уравнение (4) примет простейший вид (1), и мы его сможем решить.

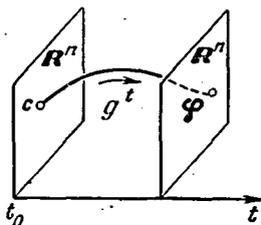


Рис. 197. Координаты точки  $c$  являются первыми интегралами однородного уравнения.

3. **Вычисления.** Будем искать решение неоднородного уравнения (4) в виде

$$\varphi(t) = g^t c(t), \quad c: I \rightarrow R^n, \quad (6)$$

где  $g^t: R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор преобразования за время от  $t_0$  до  $t$  для однородного уравнения (5).

Дифференцируя по  $t$ , находим

$$\dot{\varphi} = \dot{g}^t c + g^t \dot{c} = A g^t c + g^t \dot{c} = A \varphi + g^t \dot{c}.$$

Подставляя в уравнение (4), находим  $g^t \dot{c} = h(t)$ . Итак, доказана Теорема. Формула (6) дает решение уравнения (4), если и только если  $c$  удовлетворяет уравнению  $\dot{c} = f(t)$ , где  $f(t) = (g^t)^{-1} h(t)$ .

Последнее уравнение имеет простейший вид (1). Применяя формулу (3), получаем

Следствие. Решение неоднородного уравнения (4) с начальным условием  $\varphi(t_0) = c$  имеет вид

$$\varphi(t) = g^t \left( c + \int_{t_0}^t (g^\tau)^{-1} h(\tau) d\tau \right).$$

Замечание. В координатной форме доказанную теорему можно сформулировать так:

Чтобы решить линейное неоднородное уравнение (4), зная фундаментальную систему решений однородного уравнения (5), достаточно подставить в неоднородное уравнение линейную комбинацию решений фундаментальной системы, считая коэффициенты неизвестными функциями времени. Для определения этих коэффициентов получится тогда простейшее уравнение (1).

Задача 1. Решить уравнение  $\dot{x} + x = f(t)$ .

Решение. Составляем однородную систему двух уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Ее фундаментальная система решений известна:

$$(x_1 = \cos t, \quad x_2 = -\sin t); \quad (x_1 = \sin t, \quad x_2 = \cos t).$$

По общему правилу ищем решение в виде

$$x_1 = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \quad x_2 = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t.$$

Для определения  $c_1$  и  $c_2$  получаем систему

$$\dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t = 0, \quad -\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = f(t).$$

Следовательно,

$$\dot{c}_1 = -f(t) \sin t, \quad \dot{c}_2 = f(t) \cos t.$$

Ответ. 
$$x(t) = \left[ x(0) - \int_0^t f(\tau) \sin \tau d\tau \right] \cos t + \left[ \dot{x}(0) + \int_0^t f(\tau) \cos \tau d\tau \right] \sin t.$$

## Глава 4

### Доказательства основных теорем

В этой главе доказываются теоремы о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а также теоремы о выпрямлении векторного поля и поля направлений.

Доказательства содержат также способ приближенного построения решений.

#### § 30. Сжатые отображения

Рассмотренный ниже метод отыскания неподвижной точки отображения метрического пространства в себя применяется далее для построения решений дифференциальных уравнений.

**1. Определение.** Пусть  $A: M \rightarrow M$  — отображение метрического пространства  $M$  (с метрикой  $\rho$ ) в себя. Отображение  $M$  называется *сжатым*, если существует постоянная  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , такая, что

$$\rho(Ax, Ay) \leq \lambda \rho(x, y) \quad \forall x, y \in M. \quad (1)$$

**Пример 1.** Пусть  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — вещественная функция вещественного переменного (рис. 198). Если производная  $A$  по модулю всюду меньше 1, то отображение  $A$  может и не быть сжатым. Но оно будет сжатым, если

$$|A'| \leq \lambda < 1.$$

**Пример 2.** Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейный оператор. Если все собственные числа  $A$  лежат строго внутри единичного круга, то в  $\mathbb{R}^n$  существует такая евклидова метрика (функция Ляпунова, см. § 22), что  $A$  — сжатое отображение.

**Задача 1.** Какие из следующих отображений прямой (с обычной метрикой) в себя сжаты?

1)  $y = \sin x$ ;    2)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ;    3)  $y = \operatorname{arctg} x$ .

**Задача 2.** Можно ли заменить знак  $\leq$  в неравенстве (1) на  $<$ ?

**2. Теорема о сжатых отображениях.** Точка  $x \in M$  называется *неподвижной точкой* отображения  $A: M \rightarrow M$ , если  $Ax = x$ .

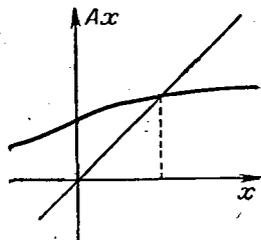


Рис. 198. Неподвижная точка сжатого отображения.

Пусть  $A: M \rightarrow M$  — сжатое отображение полного метрического пространства  $M$  в себя. Тогда  $A$  имеет неподвижную точку, и притом только одну. Для любой точки  $x$  из  $M$  последовательность образов точки  $x$  при применении  $A$  (рис. 199)

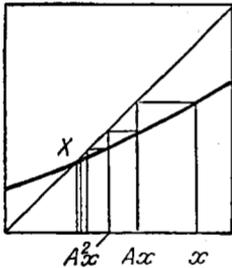


Рис. 199. Последовательность образов точки  $x$  при отображении  $A$ .

$$x, Ax, A^2x, A^3x, \dots$$

сходится к неподвижной точке.

Доказательство. Пусть  $\rho(x, Ax) = d$ . Тогда

$$\rho(A^n x, A^{n+1} x) \leq \lambda^n d.$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$  сходится. Поэтому последовательность  $A^n x, n = 0, 1, 2, \dots$ , является последовательностью Коши. Пространство  $M$  полно. Поэтому существует предел

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x.$$

Покажем, что  $X$  — неподвижная точка  $A$ . Заметим, что всякое сжатое отображение непрерывно (можно взять  $\delta = \epsilon$ ). Поэтому

$$AX = A \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} x = X.$$

Покажем, что всякая неподвижная точка  $Y$  совпадает с  $X$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \rho(AX, AY) \leq \\ &\leq \lambda \rho(X, Y), \quad \lambda < 1 \Rightarrow \rho(X, Y) = 0. \end{aligned}$$

3. Замечание. Точки  $x, Ax, A^2x, \dots$  называются *последовательными приближениями* к  $X$ . Пусть  $x$  — приближение к неподвижной точке  $X$  сжатого отображения  $A$ . Точность этого приближения легко оценить через расстояние  $d$  между точками  $x$  и  $Ax$ :

$$\rho(x, X) \leq \frac{d}{1-\lambda},$$

ибо  $d + \lambda d + \lambda^2 d + \dots = \frac{d}{1-\lambda}$  (рис. 200).

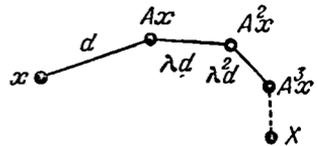


Рис. 200. Оценка точности приближения  $x$  к неподвижной точке  $X$ .

### § 31. Доказательство теорем существования и непрерывной зависимости от начальных условий

Здесь строится такое сжатое отображение полного метрического пространства, что его неподвижная точка определяет решение данного дифференциального уравнения.

1. Последовательные приближения Пикара. Рассмотрим дифференциальное уравнение  $\dot{x} = v(x, t)$ , заданное векторным полем  $v$

в некоторой области расширенного фазового пространства  $R^{n+1}$  (рис. 201).

Назовем *отображением Пикара* отображение  $A$ , переводящее функцию  $\varphi: t \mapsto x$  в функцию  $A\varphi: t \mapsto x$ , где

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\varphi(\tau), \tau) d\tau.$$

Геометрически переход от  $\varphi$  к  $A\varphi$  (рис. 202) означает построение по кривой  $(\varphi)$  новой кривой  $(A\varphi)$ , касательная которой при каждом  $t$  параллельна данному полю направлений, но не на самой

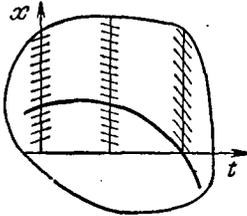


Рис. 201. Интегральная кривая уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$ .

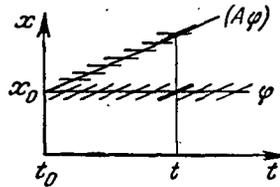


Рис. 202. Отображение Пикара  $A$ .

кривой  $(A\varphi)$  — тогда  $A\varphi$  было бы решением, — а в соответствующей точке кривой  $(\varphi)$ . Имеем

$$\left( \begin{array}{l} \varphi \text{ — решение} \\ \text{с начальным условием} \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right) \Leftrightarrow (\varphi = A\varphi).$$

Вдохновляясь теоремой о сжатых отображениях, рассмотрим последовательность приближений Пикара  $\varphi, A\varphi, A^2\varphi, \dots$  (начав, скажем, с  $\varphi = x_0$ ).

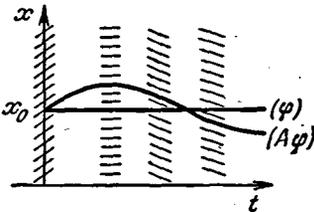


Рис. 203. Приближения Пикара для уравнения  $\dot{x} = f(t)$ .

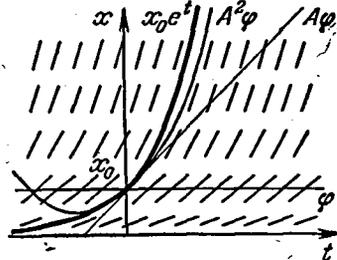


Рис. 204. Приближения Пикара для уравнения  $\dot{x} = x$ .

Пример 1.  $\dot{x} = f(t)$  (рис. 203).

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

В этом случае уже первый шаг приводит к точному решению.

Пример 2.  $\dot{x} = x, t_0 = 0$  (рис. 204).

Сходимость приближений в этом случае можно усмотреть непосредственно; в точке  $t$

$$\begin{aligned} \varphi &= x_0, \\ A\varphi &= x_0 + \int_0^t x_0 \, d\tau = x_0(1+t), \\ A^2\varphi &= x_0 + \int_0^t x_0(t+\tau) \, d\tau = x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right), \\ &\dots\dots\dots \\ A^n\varphi &= x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^n}{n!}\right), \\ &\dots\dots\dots \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} A^n\varphi = e^t x_0. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Таким образом, два определения экспоненты

$$\begin{aligned} 1) \quad & e^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n, \\ 2) \quad & e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

соответствуют двум способам приближенного решения простейшего дифференциального уравнения  $\dot{x}=x$ : способу ломаных Эйлера и последовательным приближениям Пикара. Исторически исходное определение экспоненты было просто:

3)  $e^t$  есть решение уравнения  $\dot{x}=x$  с начальным условием  $x(0)=1$ .

З а м е ч а н и е 2. Аналогичным образом можно доказать сходимость приближений для уравнения  $\dot{x}=kx$ . Причина сходимости последовательных приближений в общем случае заключается в том, что уравнение  $\dot{x}=kx$  «самое плохое»: последовательные приближения для любого уравнения сходятся не медленнее, чем для некоторого уравнения вида  $\dot{x}=kx$ .

Для доказательства сходимости последовательных приближений мы построим полное метрическое пространство, в котором отображение Пикара сжато.

Вначале напомним некоторые факты из курса анализа.

2. Предварительные оценки.

1) *Норма.* Будем обозначать норму вектора  $x$  евклидова пространства  $R^n$  через  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ . Пространство  $R^n$  с метрикой  $\rho(x, y) = |x - y|$  — полное метрическое пространство.

Отметим два важных неравенства: неравенство треугольника

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

и. неравенство Шварца

$$|(x, y)| \leq |x| |y| *$$

2) *Векторный интеграл.* Пусть  $f: [a, b] \rightarrow R^n$  — вектор-функция со значениями в  $R^n$ , непрерывная на  $[a, b]$ . Вектор-интеграл

$$I = \int_a^b f(t) dt \in R^n$$

определяется обычным образом (с помощью интегральных сумм).

Лемма.

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (1)$$

Доказательство. Сравним интегральные суммы с помощью неравенства треугольника:

$$|\sum f(t_i) \Delta_i| \leq \sum |f(t_i)| |\Delta_i|,$$

что и требовалось доказать.

3) *Норма оператора.* Пусть  $A: R^m \rightarrow R^n$  — линейный оператор из одного евклидова пространства в другое. Мы будем обозначать его норму через

$$|A| = \sup_{x \in R^m \setminus 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Тогда

$$|A+B| \leq |A| + |B|, \quad |AB| \leq |A| |B|. \quad (2)$$

Множество линейных операторов из  $R^m$  в  $R^n$  становится полным метрическим пространством, если положить  $\rho(A, B) = |A-B|$ .

3. *Условие Липшица.* Пусть  $A: M_1 \rightarrow M_2$  — отображение метрического пространства  $M_1$  (с метрикой  $\rho_1$ ) в метрическое пространство  $M_2$  (с метрикой  $\rho_2$ ) и  $L$  — положительное вещественное число.

О п р е д е л е н и е. Отображение  $A$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L$  (пишется:  $A \in \text{Lip } L$ ), если оно увеличивает расстояние между любыми двумя точками  $M_1$  не более чем в  $L$  раз (рис. 205):

$$\rho_2(Ax, Ay) \leq L \rho_1(x, y) \quad \forall x, y \in M_1.$$

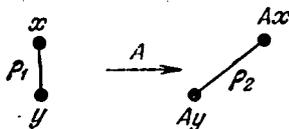


Рис. 205. Условие Липшица:  $\rho_2 \leq L \rho_1$ .

\*) Напомню доказательство этих неравенств. Проведем через векторы  $x$  и  $y$  евклидова пространства двумерную плоскость. Эта плоскость наследует из  $R^n$  евклидову структуру. На евклидовой плоскости оба неравенства известны из элементарной геометрии. Тем самым эти неравенства доказаны и в любом евклидовом пространстве, например в  $R^n$ . В частности, мы доказали без всяких вычислений, что

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad \left| \int_a^b fg dt \right|^2 \leq \int_a^b f^2 dt \int_a^b g^2 dt.$$

Отображение  $A$  удовлетворяет условию Липшица, если существует постоянная  $L$  такая, что  $A \in \text{Lip } L$ .

Задача 1. Удовлетворяют ли условию Липшица следующие отображения (метрика везде евклидова)?

- 1)  $y = x^2$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;                      2)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ ;  
 3)  $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ;    4)  $y = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$ ,  $x_1^2 \geq x_2^2$ ;  
 5)  $y = \begin{cases} x \log x, & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0; \end{cases}$                       6)  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{C}$ ,  $|x| \leq 1$ .

Задача 2. Докажите, что

сжатость  $\Rightarrow$  условие Липшица  $\Rightarrow$  непрерывность.

4. Дифференцируемость и условие Липшица. Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое (класса  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ) отображение области  $U$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^m$  в евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  (рис. 206). Касательное пространство к евклидову пространству в каждой точке само имеет естественную евклидову структуру. Поэтому производная  $f$  в точке  $x \in U \subset \mathbb{R}^m$

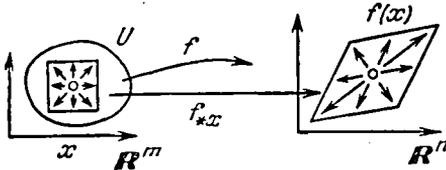


Рис. 206. Производная отображения  $f$ .

$$f_{*x}: TR_x^m \rightarrow TR_{f(x)}^n$$

есть линейный оператор из одного евклидова пространства в другое. Очевидна

Теорема. Непрерывно дифференцируемое отображение  $f$  на всяком выпуклом компактном подмножестве  $V$  области  $U$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L$ , равной верхней грани производной  $f$  на  $V$ :

$$L = \sup_{x \in V} |f_{*x}|.$$

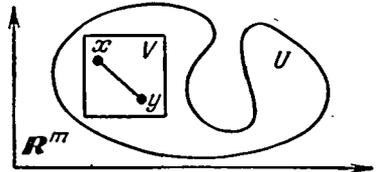


Рис. 207. Из непрерывной дифференцируемости вытекает выполнение условия Липшица.

Доказательство. Соединим точки  $x, y \in V$  отрезком (рис. 207).  $z(t) = x + t(y - x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . По формуле Ньютона—Лейбница

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(z(\tau))) d\tau = \int_0^1 f_{*z(\tau)} \dot{z}(\tau) d\tau.$$

Из формул (1), (2) п. 2 и из того, что  $\dot{z} = y - x$ , имеем

$$\left| \int_0^1 f_{*z(\tau)} \dot{z}(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^1 L |y - x| d\tau = L |y - x|,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Верхняя грань нормы производной  $|f_*|$  на  $V$  достигается. Действительно, по предположению  $f \in C^1$ , и, значит, производная  $f_*$  непрерывна. Следовательно,  $|f_*|$  достигает на компакте  $V$  максимума  $L$ .

Приступая к доказательству сходимости пикаровских приближений, мы рассмотрим их в малой окрестности одной точки. Для описания этой окрестности мы используем следующие четыре числа.

5. Величины  $C, L, a', b'$ . Пусть правая часть  $v$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x, t) \quad (3)$$

определена и дифференцируема (класса  $C^r, r \geq 1$ ) в области  $U$  расширенного фазового пространства  $U \subset R^n \times R^1$ . Мы фиксируем евклидову структуру в  $R^n$  и тем самым в  $TR_x^n$ .

Рассмотрим любую точку  $(x_0, t_0) \in U$  (рис. 208). Цилиндр

$$\Pi = \{x, t \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

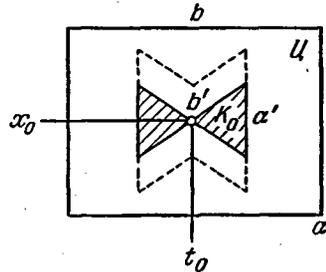


Рис. 208. Цилиндр  $\Pi$  и конус  $K_0$ .

при достаточно малых  $a$  и  $b$  лежит в области  $U$ . Обозначим через  $C$  и  $L$  верхние грани величин  $|v|$  и  $|v_*|$  (\*) на этом цилиндре. Они достигаются, так как цилиндр компактен:  $|v| \leq C, |v_*| \leq L$ .

Рассмотрим конус  $K_0$  с вершиной  $(t_0, x_0)$ , раствором  $C$  и высотой  $a'$ :

$$K_0 = \{x, t: |t - t_0| \leq a', |x - x_0| \leq C|t - t_0|\}.$$

Если число  $a'$  достаточно мало, то этот конус  $K_0$  лежит внутри цилиндра  $\Pi$ . Если числа  $a', b' > 0$  достаточно малы, то внутри  $\Pi$  лежит также всякий конус  $K_x$ , полученный

из  $K_0$  параллельным перенесением вершины в точку  $(t_0, x)$ , где  $|x - x_0| \leq b'$ .

Мы будем считать, что  $a'$  и  $b'$  выбраны столь малыми, что  $K_x \subset \Pi$ . Решение  $\varphi$  уравнения (3) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x$  мы будем искать в виде  $\varphi(t) = x + h(x, t)$  (рис. 209).

Соответствующая интегральная кривая лежит внутри конуса  $K_x$ .

\*) Звездочкой здесь и далее обозначается производная (по  $x$ ) при фиксированном  $t$ .

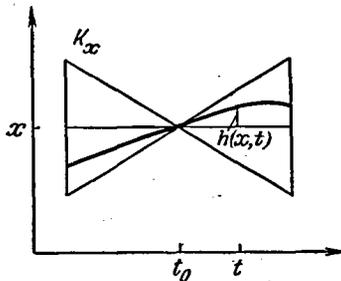


Рис. 209. Определение  $h(x, t)$ .

6. **Метрическое пространство  $M$ .** Рассмотрим всевозможные непрерывные отображения  $h$  цилиндра  $|x - x_0| \leq b'$ ,  $|t - t_0| \leq a'$  в евклидово пространство  $R^n$ . Через  $M$  мы обозначим множество таких отображений, удовлетворяющих еще условию

$$|h(x, t)| \leq C|t - t_0| \quad (4)$$

(в частности,  $h(x, t_0) = 0$ ).

Введем в  $M$  метрику  $\rho$ , полагая

$$\rho(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \max_{\substack{|x - x_0| \leq b' \\ |t - t_0| \leq a'}} |h_1(x, t) - h_2(x, t)|.$$

**Теорема.** *Множество  $M$ , снабженное метрикой  $\rho$ , является полным метрическим пространством.*

**Доказательство.** Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции. Если допредельные функции удовлетворяли неравенству (4), то и предельная функция удовлетворяет неравенству (4) с той же постоянной  $C$ .

Заметим, что пространство  $M$  зависит от трех положительных чисел:  $a'$ ,  $b'$ ,  $C$ .

7. **Сжатое отображение  $A: M \rightarrow M$ .** Определим отображение  $A: M \rightarrow M$ , полагая \*)

$$(Ah)(x, t) = \int_{t_0}^t v(x + h(x, \tau), \tau) d\tau. \quad (5)$$

Благодаря неравенству (4) точка  $(x + h(x, \tau), \tau)$  принадлежит конусу  $K_x$  и, следовательно, области определения поля  $v$ .

**Теорема.** *Если значение  $a'$  достаточно мало, то формула (5) задает сжатое отображение пространства  $M$  в себя.*

**Доказательство.** 1. Покажем, что  $A$  переводит  $M$  в себя. Функция  $Ah$  непрерывна, так как интеграл непрерывно зависящей от параметра непрерывной функции непрерывно зависит от параметра и от верхнего предела. Функция  $Ah$  удовлетворяет неравенству (4), так как

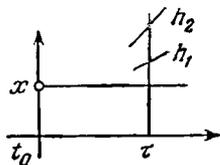


Рис. 210. Сравнение  $v_1$  и  $v_2$ .

$$|(Ah)(x, t)| \leq \left| \int_{t_0}^t v(\dots) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t C dt \right| \leq C|t - t_0|.$$

Итак,  $AM \subset M$ .

2. Покажем, что отображение  $A$  сжато:

$$\|Ah_1 - Ah_2\| \leq \lambda \|h_1 - h_2\|, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Для этого оценим значение  $Ah_1 - Ah_2$  в точке  $(x, t)$ . Имеем (рис. 210)

$$(Ah_1 - Ah_2)(x, t) = \int_{t_0}^t (v_1 - v_2) d\tau,$$

где  $v_i(\tau) = v(x + h_i(x, \tau), \tau)$ ,  $i = 1, 2$ .

\*) При сравнении с отображением Пикара п. 1 следует иметь в виду, что мы теперь ищем решение в виде  $x + h$ .

Согласно теореме п. 4 функция  $v(x, \tau)$  при фиксированном  $\tau$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L$  (по первому аргументу). Поэтому

$$|v_1(\tau) - v_2(\tau)| \leq L \|h_1(x, \tau) - h_2(x, \tau)\| \leq L \|h_1 - h_2\|.$$

Согласно лемме п. 2

$$|(Ah_1 - Ah_2)(x, t)| \leq \left| \int_{t_0}^t L \|h_1 - h_2\| dt \right| \leq La' \|h_1 - h_2\|.$$

При  $La' < 1$  отображение сжато.

Теорема доказана.

### 8. Теорема существования и единственности.

*Следствие.* Пусть правая часть  $v$  дифференциального уравнения (3) непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $(t_0, x_0)$  расширенного фазового пространства. Тогда у точки  $t_0$  есть такая окрестность, что в этой окрестности определено решение уравнения (3) с начальным условием  $\varphi(t_0) = x$ , где  $x$  — любая достаточно близкая к  $x_0$  точка, причем это решение непрерывно зависит от начальной точки  $x$ .

*Доказательство.* Сжатое отображение  $A$ , по теореме § 30, имеет неподвижную точку  $h \in M$ . Положим  $g(x, t) = x + h(x, t)$ . Тогда

$$g(x, t) = x + \int_{t_0}^t v(g(x, \tau), \tau) d\tau,$$

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = v(g(x, t), t).$$

Мы видим, что  $g$  при фиксированном  $x$  удовлетворяет уравнению (3), а при  $t = t_0$  — начальному условию  $g(x, t_0) = x$ . Функция  $g$  непрерывна, так как  $h \in M$ .

Следствие доказано.

Итак, мы доказали теорему существования для уравнения (3) и предъявили решение, непрерывно зависящее от начальных условий.

### Задача 1. Доказать теорему единственности.

*Решение 1.* Положим  $b' = 0$  в определении  $M$ . Из единственности неподвижной точки сжатого отображения  $A: M \rightarrow M$  следует единственность решения (с начальным условием  $\varphi(t_0) = x_0$ ).

*Решение 2.* Пусть  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — два решения с общим начальным условием  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ , определенные при  $|t - t_0| < \alpha$ . Пусть  $0 < \alpha' < \alpha$ . Положим

$$\|\varphi\| = \max_{|t - t_0| < \alpha'} |\varphi(t)|.$$

Имеем

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^t v(\varphi_1(\tau), \tau) - v(\varphi_2(\tau), \tau) d\tau.$$

При достаточно малом  $\alpha'$  точки  $(\varphi_1(\tau), \tau)$  и  $(\varphi_2(\tau), \tau)$  лежат в цилиндре, где  $v \in \text{Lip } L$ . Поэтому  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq L\alpha' \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ , откуда при  $L\alpha' < 1$  вытекает  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$ . Итак, решения  $\varphi_1, \varphi_2$  в некоторой окрестности точки  $t_0$  совпадают.

Локальная теорема единственности доказана.

**9. Другие применения сжатых отображений.**

**Задача 1.** Доказать теорему об обратной функции.

**Указание.** Достаточно обратить  $C^1$ -отображение с единичной линейной частью  $y = x + \varphi(x)$ , где  $\varphi'(0) = 0$  в окрестности точки  $0 \in R^n$  (общий случай сводится к этому линейной заменой координат).

Ищем решение в виде  $x = y + \psi(y)$ . Тогда получаем для  $\psi$  уравнение

$$\psi(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

Следовательно, искомая функция  $\psi$  является неподвижной точкой отображения  $A$ , определенного формулой

$$(A\psi)(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

Отображение  $A$  (в подходящей метрике) сжато, потому что производная функции  $\varphi$  в окрестности точки  $0$  мала (ввиду условия  $\varphi'(0) = 0$ ).

**Задача 2.** Доказать, что ломаная Эйлера стремится к решению, когда ее шаг стремится к нулю.

**Решение.** Пусть  $g_\Delta = x + h_\Delta$  — ломаная Эйлера с шагом  $\Delta$  и началом  $g_\Delta(x, t_0) = x$  (рис. 211). Иными словами, при  $t \neq t_0 + k\Delta$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_\Delta(x, t) = v(g_\Delta(x, s(t)), s(t)),$$

где  $s(t) = t_0 + k\Delta$ ,  $k$  — целая часть  $(t - t_0)/\Delta$ . Отличие ломаной Эйлера от решения  $g$  можно оценить по формуле п. 3 § 30:

$$\|g_\Delta - g\| = \|h_\Delta - h\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \|Ah_\Delta - h_\Delta\|.$$

Но

$$(Ah_\Delta)(x, t) = \int_{t_0}^t v(g_\Delta(x, \tau), \tau) d\tau, \quad h_\Delta(x, t) = \int_{t_0}^t v(g(x, s(\tau)), s(\tau)) d\tau.$$

При  $\Delta \rightarrow 0$  разность подынтегральных выражений равномерно по  $\tau$ ,  $|\tau| \leq a'$ , стремится к 0 (вследствие равномерной непрерывности  $v$ ). Поэтому  $\|Ah_\Delta - h_\Delta\| \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$  и ломаная Эйлера стремится к решению.

**Задача \*3.** Рассмотрим диффеоморфизм  $A$  окрестности точки  $0$  в  $R^n$  на окрестности точки  $0$  в  $R^n$ , переводящий  $0$  в  $0$ . Предположим, что линейная часть  $A_{*0}$  (т. е. линейный оператор  $A_{*0}: R^n \rightarrow R^n$ ) не имеет собственных чисел с модулем 1. Пусть число собственных чисел с  $|\lambda| < 1$  равно  $m_-$ , а с  $|\lambda| > 1$  равно  $m_+$ . Тогда  $A_{*0}$  имеет инвариантное подпространство  $R^{m_-}$  (входящий ус) и инвариантное подпространство  $R^{m_+}$  (выходящий ус), точки которых стремятся к 0 при применении  $A_{*0}^N$ , где  $N \rightarrow +\infty$  (для  $R^{m_-}$ ) или  $N \rightarrow -\infty$  (для  $R^{m_+}$ ) (рис. 212).

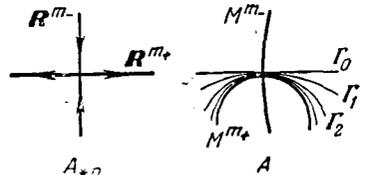


Рис. 212. Усы отображения  $A$  и его линейной части  $A_{*0}$ .

Доказать, что исходное нелинейное отображение  $A$  тоже имеет в окрестности точки  $0$  инвариантные подмногообразия  $M^{m-}$  и  $M^{m+}$  (входящий и выходящий усы), касающиеся в  $0$  подпространств  $R^{m-}$  и  $R^{m+}$ ;  $A^N x \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$  на  $M^{m-}$ , при  $N \rightarrow -\infty$  для  $x \in M^{m+}$ .

**У к а з а н и е.** Взять какое-либо подмногообразие  $\Gamma_0$  размерности  $m_+$  (скажем, касающееся  $R^{m+}$  в  $0$ ) и применять к нему степени  $A$ . Методом сжатых отображений доказать сходимость полученных приближений  $\Gamma_N = A^N \Gamma_0$ ,  $N \rightarrow +\infty$ , к  $M^{m+}$ .

**З а д а ч а \* 4.** Доказать существование входящего и выходящего усов у нелинейного седла  $\dot{x} = v(x)$ ,  $v(0) = 0$  (предполагается, что ни одно из собственных чисел оператора  $A = v_*(0)$  не лежит на мнимой оси).

### § 32. Теорема о дифференцируемости

В этом параграфе доказывается теорема о выпрямлении.

**1. Уравнение в вариациях.** С дифференцируемым отображением  $f: U \rightarrow V$  связано линейное отображение касательных пространств в каждой точке

$$f_{*x}: TU_x \rightarrow TV_{f(x)}.$$

Точно так же с дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(x, t), \quad x \in U \subset R^n, \quad (1)$$

связана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t), & x \in U \subset R^n, \\ \dot{y} = v_*(x, t)y, & y \in TU_x, \end{cases} \quad (2)$$

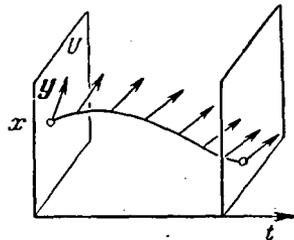


Рис. 213. Решение уравнения в вариациях с начальным условием  $(x, y)$ .

называемая *системой уравнений в вариациях* для уравнения (1) и *линейная* относительно касательного вектора  $y$  (рис. 213).

Звездочка в формуле (2) (и в дальнейших формулах) означает производную по  $x$  при фиксированном  $t$ . Так,  $v_*(x, t)$  есть линейный оператор из  $R^n$  в  $R^n$ .

Наряду с системой (2) удобно рассматривать систему

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t), & x \in U \subset R^n, \\ \dot{z} = v_*(x, t)z, & z: R^n \rightarrow R^n. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) получена из системы (2) заменой неизвестного вектора  $y$  неизвестным линейным преобразованием  $z$ . Мы будем употреблять название *уравнение в вариациях* также и применительно к системе (3).

**З а м е ч а н и е.** Вообще, если дано линейное уравнение

$$\dot{y} = A(t)y, \quad y \in R^n, \quad (2')$$

то полезно рассмотреть ассоциированное уравнение

$$\dot{z} = A(t)z, \quad z: R^n \rightarrow R^n, \quad (3')$$

относительно линейного оператора  $z$ .

Зная решения одного из уравнений (2'), (3'), легко найти решения другого (как?).

2. Теорема о дифференцируемости. Пусть правая часть  $v$  уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ . Тогда решение  $g(x, t)$  уравнения (1) с начальным условием  $g(x, t_0) = x$  зависит от начального условия  $x$  непрерывно дифференцируемо, когда  $x$  и  $t$  меняются в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки  $(x_0, t_0)$ :

$$v \in C^2 \Rightarrow g \in C_x^1$$

(класса  $C^1$  по  $x$ ).

Доказательство.  $v \in C^2 \Rightarrow v_* \in C^1$ . Поэтому система уравнений в вариациях (3) удовлетворяет условиям из § 31 и последовательность пикаровских приближений равномерно сходится к ее решению в достаточно малой окрестности точки  $t_0$ . Выберем начальные условия  $\varphi_0 = x$  (достаточно близко к  $x_0$ ),  $\psi_0 = E$ . Обозначим пикаровские приближения через  $\varphi_n$  (для  $x$ ) и  $\psi_n$  (для  $z$ ), т. е. положим

$$\varphi_{n+1}(x, t) = x + \int_{t_0}^t v(\varphi_n(x, \tau), \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\psi_{n+1}(x, t) = E + \int_{t_0}^t v_*(\varphi_n(x, \tau), \tau) \psi_n(x, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Заметим, что  $\varphi_{0*} = \psi_0$ . Из определений (4) и (5) индукцией по  $n$  заключаем, что  $\varphi_{n+1*} = \psi_{n+1}$ . Поэтому последовательность  $\{\psi_n\}$  — это последовательность производных последовательности  $\{\varphi_n\}$ . Обе последовательности (4), (5) равномерно сходятся (как последовательности пикаровских приближений системы (3)) при достаточно малом  $|t - t_0|$ . Итак, последовательность  $\{\varphi_n\}$  сходится равномерно вместе с производными по  $x$ . Поэтому предельная функция  $g(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x, t)$  непрерывно дифференцируема по  $x$ , что и требовалось доказать.

Замечание. Одновременно доказана

Теорема. Производная  $g_*$  решения уравнения (1) по начальному условию  $x$  удовлетворяет уравнению в вариациях (3) с начальным условием  $z(t_0) = E$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = v(g(x, t), t), \\ \frac{\partial}{\partial t} g_*(x, t) = v_*(g(x, t), t) g_*(x, t), \\ g(x, t_0) = x, \quad g_*(x, t_0) = E. \end{cases}$$

Эта теорема объясняет смысл уравнений в вариациях: они описывают действие преобразований за время от  $t_0$  до  $t$  на касательные векторы к фазовому пространству (рис. 214).

3. Высшие производные по  $x$ . Пусть  $r \geq 2$  — целое число.

Теорема  $T_r$ . Пусть правая часть  $v$  уравнения (1)  $r$  раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки

$(x_0, t_0)$ . Тогда решение  $g(x, t)$  уравнения (1) с начальным условием  $g(x, t_0) = x$  зависит от начального условия  $x$   $r-1$  раз непрерывно дифференцируемо, когда  $x$  и  $t$  меняются в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки  $(x_0, t_0)$ :

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Доказательство.  $v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1}$ . Значит, система уравнений в вариациях (3) удовлетворяет условиям теоремы  $T_{r-1}$ . Поэтому теорема  $T_r$ ,  $r > 2$ , вытекает из теоремы  $T_{r-1}$ :

$$v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1} \Rightarrow g_* \in C_x^{r-2} \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Но теорема  $T_2$  доказана в п. 2. Итак, теорема  $T_r$  доказана.

4. Производные по  $x$  и  $t$ . Пусть  $r \geq 2$  — целое число.

Теорема  $T_r$ . В условиях теоремы  $T_r$  решение  $g(x, t)$  является дифференцируемой функцией класса  $C^{r-1}$  по переменным  $x$  и  $t$  вместе:

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

Эта теорема — очевидное следствие предыдущей. Вот формальное доказательство.

Лемма. Пусть  $f$  — функция (со значениями в  $R^n$ ), определенная на прямом произведении области  $G$  евклидова пространства  $R^m$  и отрезка  $I$  на оси  $t$ :

$$f: G \times I \rightarrow R^n.$$

Составим интеграл

$$F(x, t) = \int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau, \quad x \in G, [t_0, t] \subset I.$$

Если  $f \in C_x^r$  и  $f \in C^{r-1}$ , то  $F \in C^r$ .

Действительно, любая  $r$ -я частная производная функции  $F$  по переменным  $x_i$  и  $t$ , содержащая дифференцирование по  $t$ , выражается через  $f$  и частные производные функции  $f$  порядка меньше  $r$ , а потому непрерывна; всякая же  $r$ -я частная производная по переменным  $x_i$  непрерывна по условию.

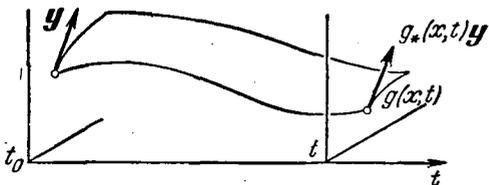


Рис. 214. Действие преобразования за время от  $t_0$  до  $t$  на кривую в фазовом пространстве и на ее касательный вектор.

Доказательство теоремы. Имеем

$$g(x, t) = x + \int_0^t v(g(x, \tau), \tau) d\tau.$$

Обозначим  $f(x, \tau) = v(g(x, \tau), \tau)$  и будем применять лемму. Находим при  $1 \leq \rho \leq r$

$$g \in C^{\rho-1} \cap C_x^\rho \Rightarrow g \in C^\rho.$$

Согласно теореме  $T_r$  имеем  $g \in C_x^\rho$  при  $\rho < r$ . Последовательно получаем.

$$g \in C^0 \Rightarrow g \in C^1 \Rightarrow \dots \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

Но согласно § 31  $g \in C^0$  (решение непрерывно зависит от  $x, t$ ).

Теорема  $T_r$  доказана.

**Задача 1.** Докажите, что если правая часть дифференциального уравнения (1) бесконечно дифференцируема, то и решение зависит от начальных условий бесконечно дифференцируемо:

$$v \in C^\infty \Rightarrow g \in C^\infty.$$

**Замечание.** Можно также доказать, что если правая часть  $v$  аналитична (разлагается в сходящийся к  $v$  ряд Тейлора в окрестности каждой точки), то и решение  $g$  аналитически зависит от  $x$  и  $t$ .

Дифференциальные уравнения с аналитическими правыми частями естественно рассматривать как при комплексных значениях неизвестных, так и (что особенно важно) при комплексных значениях времени. Об этой теории см., например, В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.

**5. Теорема о выпрямлении.** Эта теорема — очевидное следствие теоремы  $T_r$ . Перед доказательством вспомним два простых геометрических предложения. Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — два линейных подпространства третьего линейного пространства  $L$  (рис. 215). Подпространства  $L_1$  и  $L_2$  называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство  $L$ :  $L_1 + L_2 = L$ . Например, прямая в  $R^3$  трансверсальна плоскости, если пересекает ее под ненулевым углом.

**Предложение 1.** Для каждого  $k$ -мерного подпространства  $R^k$  в  $R^n$  найдется трансверсальное ему  $(n-k)$ -мерное (при этом даже среди  $C_n^k$  координатных плоскостей пространства  $R^{n-k}$ ).

Доказательство см. в курсах линейной алгебры (теорема о ранге матрицы).

**Предложение 2.** Если линейное отображение  $A: L \rightarrow M$  отображает какие-либо два трансверсальных подпространства на трансверсальные, то оно — на все пространство  $M$ .

Доказательство.

$$AL = AL_1 + AL_2 = M.$$

Доказательство теоремы о выпрямлении: неавтономный случай (см. гл. 2, § 8, п. 1). Рассмотрим отображение  $G$  области прямого произведения  $R^n \times R$  в расширенное фазовое пространство уравнения

$$\dot{x} = v(x, t), \tag{1}$$

заданное формулой  $G(x, t) = (g(x, t), t)$ , где  $g(x, t)$  — решение уравнения (1) с начальным условием  $g(x, t_0) = x$ .

Покажем, что  $G$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  — выпрямляющий диффеоморфизм.

а) Отображение  $G$  дифференцируемо (класса  $C^r$ ), если  $v \in C^r$ ) по теореме  $T_r$ .

б) Отображение  $G$  оставляет  $t$  на месте:  $G(x, t) = (g(x, t), t)$ .

в) Отображение  $G_*$  переводит стандартное векторное поле  $e(x=0, t=1)$  в данное поле:  $G_*e = (v, 1)$  (так как  $g(x, t)$  — решение уравнения (1)).

г) Отображение  $G$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  — диффеоморфизм. Действительно, считаем сужения линейного оператора  $G_*|_{R^n: t=t_0} = E$ ,  $G_*|_{R^1: x=x_0} = v + e$ .

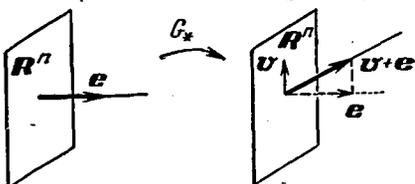


Рис. 216. Производная отображения  $G$  в точке  $(x_0, t_0)$ .

Плоскость  $R^n$  и прямая с направляющим вектором  $v + e$  трансверсальны. Итак,  $G_*$  есть линейное отображение  $R^{n+1}$  на  $R^{n+1}$ , следовательно, изоморфизм (якобиан  $G_*$  в точке  $(x_0, t_0)$  отличен от 0). По теореме об обратной функции  $G$  — локальный диффеоморфизм.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы о выпрямлении: автономный случай (§ 7, п. 1). Рассмотрим автономное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset R^n. \tag{6}$$

Рис. 217. Построение диффеоморфизма, выпрямляющего векторное поле.

Пусть вектор  $v_0$  фазовой скорости в точке  $x_0$  отличен от 0 (рис. 217). Тогда существует  $(n-1)$ -мерная гиперплоскость  $R^{n-1} \subset R^n$ , проходящая через  $x_0$  и трансверсальная  $v_0$  (точнее, соответствующая плоскость в касательном пространстве  $TU_{x_0}$  трансверсальна прямой  $R^1$  направления  $v_0$ ).

Определим отображение  $G$  области  $R^{n-1} \times R$ , где  $R^{n-1} = \{\xi\}$ ,  $R = \{t\}$ , в область  $R^n$  формулой  $G(\xi, t) = g(\xi, t)$ , где  $\xi$  лежит на  $R^{n-1}$  вблизи  $x_0$ , а  $g(\xi, t)$  есть значение решения уравнения (6) с начальным условием  $\varphi(0) = \xi$  в момент  $t$ . Покажем, что в достаточно малой окрестности точки  $(\xi = x_0, t = 0)$  отображение  $G^{-1}$  — выпрямляющий диффеоморфизм.

а) *Отображение  $G$  дифференцируемо* ( $G \in C^r$ , если  $v \in C^r$ ) по теореме  $T_r$ .

б) *Отображение  $G^{-1}$  выпрямляющее*, так как  $G_*$  переводит стандартное векторное поле  $e$  ( $\xi = 0, t = 1$ ) в  $G_*e = v$ , поскольку  $g(\xi, t)$  удовлетворяет уравнению (6).

в) *Отображение  $G$  есть локальный диффеоморфизм*. Действительно, считаем линейный оператор  $G_*|_{x_0, t_0}$  на трансверсальных плоскостях  $R^{n-1}$  и  $R^1$ . Находим

$$G_*|_{R^{n-1}} = E, \quad G_*|_{R^1} e = v_0.$$

Итак, оператор  $G_*|_{x_0, t_0}$  переводит пару трансверсальных подпространств  $R^{n-1}$  и  $R^1 \subset R^n$  в пару трансверсальных подпространств. Поэтому  $G_*|_{x_0, t_0}$  — линейное отображение  $R^n$  на  $R^n$ , следовательно, — изоморфизм. По теореме об обратной функции  $G$  — локальный диффеоморфизм. Теорема доказана (в обозначениях § 7  $f = G^{-1}$ ).

*Замечание.* Поскольку теорема о дифференцируемости доказана с потерей одной производной ( $v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}$ ), то и у выпрямляющих диффеоморфизмов мы также гарантируем лишь класс гладкости  $C^{r-1}$ . В действительности построенный выпрямляющий диффеоморфизм имеет класс  $C^r$ ; доказательство приведено ниже.

**6. Последняя производная.** В теореме о дифференцируемости (п. 2) мы предполагали поле  $v$  дважды непрерывно дифференцируемым. В действительности достаточно однократной непрерывной дифференцируемости.

*Теорема.* Если правая часть  $v(x, t)$  дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$  непрерывно дифференцируема, то решение  $g(x, t)$  с начальным условием  $g(x, t_0) = x$  зависит от начальных условий непрерывно дифференцируемо

$$v \in C^1 \Rightarrow g \in C_x^1. \quad (7)$$

*Следствия.*

1)  $v \in C^r \Rightarrow g \in C^r$  при  $r \geq 1$ .

2) Построенные в п. 5 выпрямляющие диффеоморфизмы  $r$  раз непрерывно дифференцируемы, если  $v \in C^r$ .

Следствия выводятся из соотношения (7) дословным повторением рассуждений пп. 3, 4, 5. Доказательство же самой теоремы (7) требует некоторых ухищрений.

**Доказательство теоремы.** Начнем со следующих замечаний.

**Лемма 1.** *Решение линейного уравнения*

$$\dot{y} = A(t)y$$

*с непрерывно зависящей от  $t$  правой частью существует, непрерывно, определяется начальными условиями  $\varphi(t_0) = y_0$  однозначно и зависит от  $y_0$  и  $t$  непрерывно.*

Действительно, доказательство теорем существования, единственности и непрерывности (§ 31) использовало только дифференцируемость по  $x$  при фиксированном  $t$  (фактически даже только условие Липшица по  $x$ ). Поэтому доказательство сохраняет силу, если зависимость от  $t$  предполагать лишь непрерывной. Лемма доказана.

Заметим, что от  $y_0$  решение зависит линейно, а от  $t$  — непрерывно дифференцируемо, поэтому принадлежит классу  $C^1$  по  $y_0$  и  $t$  вместе.

**Лемма 2.** *Если линейный оператор  $A$  в лемме 1 зависит еще от параметра  $\alpha$ , так что функция  $A(t, \alpha)$  непрерывна, то и решение будет непрерывной функцией от  $y_0$ ,  $t$  и  $\alpha$ .*

Действительно, решение можно построить как предел последовательности пикаровских приближений. Каждое приближение непрерывно зависит от  $y_0$ ,  $t$  и  $\alpha$ . Последовательность приближений сходится равномерно относительно  $y_0$ ,  $t$  и  $\alpha$ , меняющихся в достаточно малой окрестности любой точки  $(y_0, t_0, \alpha_0)$ . Поэтому предел — непрерывная функция от  $y_0$ ,  $t$  и  $\alpha$ .

Лемма 2 доказана.

Применим лемму 2 к уравнению в вариациях.

**Лемма 3.** *Система уравнений в вариациях*

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t), \\ \dot{y} = v_*(x, t)y \end{cases}$$

*имеет решение, которое определяется своими начальными данными однозначно и зависит от них непрерывно, если только поле  $v$  класса  $C^1$ .*

Действительно, первое уравнение системы имеет решение по теореме существования § 31. Это решение определено своими начальными условиями  $x_0$ ,  $t_0$  однозначно и зависит от них непрерывно. Подставим это решение во второе уравнение. Получим линейное уравнение относительно  $y$ . Его правая часть непрерывно зависит от  $t$  и — как от параметра — от начального условия  $x_0$  рассматриваемого решения первого уравнения.

По лемме 2 это линейное уравнение имеет решение, которое определяется своими начальными данными  $y_0$  и является непрерывной функцией от  $t$ ,  $y_0$  и параметра  $x_0$ .

Лемма 3 доказана.

Таким образом, уравнения в вариациях разрешимы и в случае  $v \in C^1$ . Заметим, что в случае  $v \in C^2$  мы доказали, что производная решения по начальным данным удовлетворяет уравнению в вариациях (3). Теперь же мы не можем этого утверждать: ведь мы еще не знаем, существует ли такая производная.

Чтобы доказать дифференцируемость решения по начальным условиям, рассмотрим сперва частный случай.

**Лемма 4.** *Если векторное поле  $v(x, t)$  класса  $C^1$  равно 0 в точке  $x=0$  при всех  $t$  вместе со своей производной  $v_*$ , то решение уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$  дифференцируемо по начальным условиям в точке  $x=0$ .*

Действительно, по условию  $|v(x, t)| = o(|x|)$  в окрестности точки  $x=0$ . Оценим погрешность приближения  $x=x_0$  к решению  $x=\varphi(t)$  с начальным условием  $\varphi(t_0)=x_0$  по формуле п. 3 § 30. При достаточно малых  $|x_0|$  и

$|t - t_0|$  находим

$$|\varphi - x_0| \leq \frac{1}{1-\lambda} \left| \int_{t_0}^t v(x_0, \tau) d\tau \right| \leq K \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |v(x_0, \tau)|,$$

где константа  $K$  не зависит от  $x_0$ .

Итак,  $|\varphi - x_0| = o(|x_0|)$ , откуда следует, что  $\varphi$  дифференцируемо по  $x_0$  в нуле, что и требовалось доказать.

А теперь мы сведем общий случай к специальной ситуации леммы 4: для этого достаточно выбрать в расширенном фазовом пространстве подходящую систему координат. Прежде всего, мы всегда можем считать рассматриваемое решение нулевым:

**Лемма 5.** Пусть  $x = \varphi(t)$  — решение уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$  с правой частью класса  $C^1$ , заданной в области расширенного фазового пространства  $R^n \times R^1$ . Тогда существует  $C^1$ -диффеоморфизм расширенного фазового пространства, сохраняющий время  $((x, t) \mapsto (x_1(x, t), t))$  и переводящий решение  $\varphi$  в  $x_1 \equiv 0$ .

Действительно, достаточно сделать сдвиг  $x_1 = x - \varphi(t)$ , поскольку  $\varphi \in C^1$ .

Лемма 5 доказана.

В системе координат  $(x_1, t)$  правая часть нашего уравнения равна 0 в точке  $x_1 = 0$ . Покажем, что производную правой части по  $x_1$  можно также обратить в нуль при помощи подходящей линейной по  $x$  замены координат.

**Лемма 6.** В предположениях леммы 5 координаты  $(x_1, t)$  можно выбрать так, что уравнение  $\dot{x} = v(x, t)$  будет эквивалентно уравнению  $\dot{x}_1 = v_1(x_1, t)$ , где поле  $v_1$  равно 0 в точке  $x_1 = 0$  вместе со своей производной  $\partial v_1 / \partial x_1$ . При этом функцию  $x_1(x, t)$  можно выбрать линейной (не обязательно однородной) относительно  $x$ .

Согласно лемме 5 можно считать, что  $v_1(0, t) = 0$ .

Чтобы доказать лемму 6, рассмотрим сперва ее частный случай:

**Лемма 7.** Утверждение леммы 6 справедливо для линейного уравнения  $\dot{x} = A(t)x$ .

Действительно, достаточно принять за  $x_1$  значение решения с начальным условием  $\varphi(t) = x$  в фиксированный момент  $t_0$ . Согласно лемме 1  $x_1 = B(t)x$ , где  $B(t): R^n \rightarrow R^n$  — линейный оператор класса  $C^1$  по  $t$ . В координатах  $(x_1, t)$  наше линейное уравнение принимает вид  $\dot{x}_1 = 0$ .

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 6. Линеаризуем уравнение  $\dot{x} = v(x, t)$  в нуле, т. е. составим уравнение в вариациях

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \text{где} \quad A(t) = v_*(0, t).$$

По условию  $v \in C^1$ , поэтому  $A \in C^0$ . По лемме 7 можно выбрать  $C^1$ -координаты  $x_1 = B(t)x$  так, что в новых координатах линеаризованное уравнение примет вид  $\dot{x}_1 = 0$ . Легко проверить, что в этой системе координат правая часть исходного нелинейного уравнения будет иметь нулевую линейную часть.

Действительно, введем обозначения  $V = Ax + R$  (тогда  $R = o(|x|)$ ) и  $x = Cx_1$  (тогда  $C = B^{-1}$ ).

Дифференциальное уравнение для  $x_1$  получается из  $\dot{x} = v$  подстановкой  $x = Cx_1$ . Получаем

$$\dot{C}x_1 + C\dot{x}_1 = ACx_1 + R.$$

Но по определению  $C$  первые линейные по  $x_1$  слагаемые слева и справа равны. Итак,

$$\dot{x}_1 = C^{-1}R(Cx_1, t) = o(|x_1|).$$

Лемма 6 доказана.

Соединяя леммы 6 и 4, приходим к следующему заключению:

*Лемма 8. Решение дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$  с правой частью класса  $C^1$  дифференцируемо зависит от начального условия. Производная  $z$  решения по начальному условию удовлетворяет системе уравнений в вариациях*

$$\dot{x} = v(x, t), \quad \dot{z} = v_*(x, t)z, \quad z(t_0) = E: R^n \rightarrow R^n.$$

Для доказательства леммы 8 достаточно записать уравнение в системе координат леммы 6 и применить лемму 4.

Для доказательства теоремы осталось убедиться в непрерывности производной решения по начальному условию. Согласно лемме 8 эта производная существует и удовлетворяет системе уравнений в вариациях. Из леммы 3 следует непрерывная зависимость решений этой системы от  $x_0$  и  $t$ .

Итак, теорема доказана.

## Глава 5

### Дифференциальные уравнения на многообразиях

В этой главе определяются дифференцируемые многообразия и доказывается теорема о существовании фазового потока, заданного векторным полем на многообразии.

В теории дифференциальных уравнений на многообразиях получено много интересных и глубоких результатов, о которых нельзя было успеть рассказать в настоящей главе, являющейся лишь кратким введением в эту область на стыке анализа и топологии.

#### § 33. Дифференцируемые многообразия

Понятие дифференцируемого, или гладкого, многообразия играет в геометрии и в анализе столь же фундаментальную роль, как в алгебре понятия группы и линейного пространства.

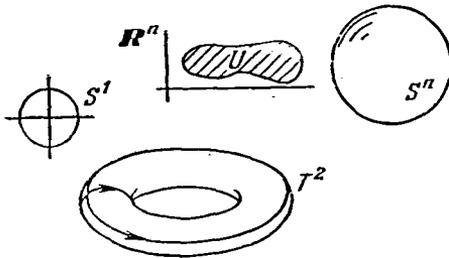


Рис. 218. Примеры многообразий.

**1. Примеры многообразий.**  
Когда ниже будет дано определение многообразия, то многообразиями окажутся, например, следующие объекты (рис. 218):

1. Линейное пространство  $R^n$  или любая его область (открытое подмножество)  $U$ .
2. Сфера  $S^n$ , заданная в евклидовом пространстве  $R^{n+1}$  уравнением  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ . В частности, окружность  $S^1$ .
3. Тор  $T^2 = S^1 \times S^1$  (ср. § 24).
4. Проективное пространство

$$RP^n = \{(x_0: x_1: \dots : x_n)\}.$$

Вспомним, что точками этого пространства являются прямые, проходящие через начало координат в  $R^{n+1}$ . Такая прямая задается

любой своей (отличной от 0) точкой. Координаты этой точки  $(x_0, \dots, x_n)$  в  $R^{n+1}$  называются однородными координатами соответствующей точки проективного пространства.

Последний пример особенно поучителен. При рассмотрении следующих определений полезно иметь в виду аффинные координаты в проективном пространстве (см. пример 3 п. 3 ниже).

**2. Определения.** Дифференцируемое многообразие  $M$  — это множество  $M$  вместе со структурой дифференцируемого многообразия в нем.

В множестве  $M$  введена структура многообразия, если задан атлас, состоящий из карт, которые согласованы.

**Определение 1.** Картой называется область  $U \subset R^n$  вместе с взаимно однозначным отображением  $\varphi: W \rightarrow U$  подмножества  $W$  множества  $M$  на  $U$  (рис. 219). Мы назовем  $\varphi(x)$  изображением точки  $x \in W \subset M$  на карте  $U$ .

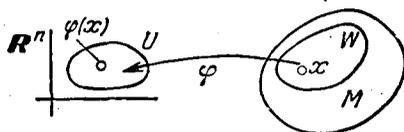


Рис. 219. Карта.

Рассмотрим карты (рис. 220)  $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$  и  $\varphi_j: W_j \rightarrow U_j$ .

Если множества  $W_i$  и  $W_j$  пересекаются, то их пересечение  $W_i \cap W_j$  имеет изображения на обеих картах:

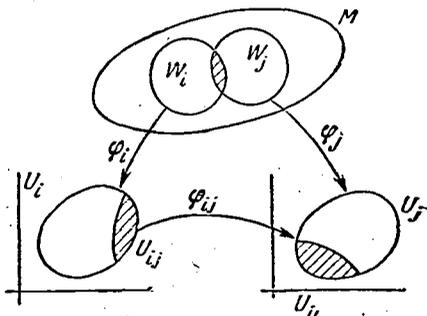


Рис. 220. Согласованные карты.

Переход с одной карты на другую задается отображением подмножеств линейных пространств

$$\varphi_{ij}: U_{ij} \rightarrow U_{ji}, \quad \varphi_{ij}(x) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)).$$

**Определение 2.** Две карты

$$\varphi_i: W_i \rightarrow U_i, \quad \varphi_j: W_j \rightarrow U_j$$

называются согласованными, если

- 1) множества  $U_{ij}, U_{ji}$  открыты (быть может, пусты);
- 2) отображения  $\varphi_{ij}$  и  $\varphi_{ji}$  (определенные, если  $W_i \cap W_j$  непусто) являются диффеоморфизмами областей  $R^n$ .

**Замечание.** В зависимости от класса гладкости отображений  $\varphi_{ij}$  получают разные классы многообразий.

Если под диффеоморфизмом понимать диффеоморфизм класса  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , то многообразии (которое мы определим ниже) будет

называться *дифференцируемым многообразием* класса  $C^r$ . Если положить  $r=0$ , т. е. требовать лишь, чтобы  $\varphi_{ij}$  были гомеоморфизмами, получится определение *топологического многообразия*. Если требовать, чтобы  $\varphi_{ij}$  были аналитическими\*), то получим *аналитические многообразия*.

Есть и другие возможности. Например, если фиксировать в  $R^n$  ориентацию и требовать, чтобы диффеоморфизмы  $\varphi_{ij}$  ее сохраняли (якобиан  $\varphi_{ij}$  в каждой точке положителен), то получится определение *ориентированного многообразия*.

**Определение 3.** Атласом на  $M$  называется совокупность карт  $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$ , если

- 1) любые две карты согласованы;
- 2) любая точка  $x \in M$  имеет изображение хоть на одной карте.

**Определение 4.** Два атласа на  $M$  эквивалентны, если их объединение есть снова атлас (т. е. если любая карта первого атласа согласована с любой картой второго).

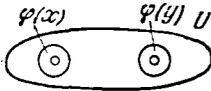


Рис. 221. Отделимость.

Легко видеть, что определение 4 действительно задает отношение эквивалентности.

**Определение 5.** Структурой дифференцируемого многообразия на  $M$  называется класс эквивалентных атласов.

Отметим здесь же два условия, часто накладываемые на многообразия, чтобы избежать патологий.

1. *Отделимость*: у любых двух точек  $x, y \in M$  есть непересекающиеся окрестности (рис. 221). То есть либо существуют две карты

$$\varphi_i: W_i \rightarrow U_i, \quad \varphi_j: W_j \rightarrow U_j$$

с непересекающимися  $W_i, W_j$ , содержащими  $x$  и  $y$  соответственно, либо существует карта, на которой изображены обе точки  $x, y$ .

Если не требовать отделимости, то многообразием будет множество, полученное из двух прямых  $R=\{x\}$ ,  $R=\{y\}$  отождествлением точек с равными отрицательными координатами  $x, y$ . На таком многообразии неверна теорема единственности продолжения решений дифференциального уравнения, хотя локальная теорема единственности и верна.

2. *Счетность*: существует атлас  $M$  из не более чем счетного числа карт.

Далее слово «многообразия» означает дифференцируемое многообразие, удовлетворяющее условиям отделимости и счетности.

\*) Функция аналитична, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки.

3. Примеры атласов.

1. Сферу  $S^2$ , заданную уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  в  $R^3$ , можно снабдить атласом из двух карт, например — в стереографической проекции (рис. 222). Здесь

$$W_1 = S^2 \setminus N, \quad U_1 = R^i;$$

$$W_2 = S^2 \setminus S, \quad U_2 = R^2.$$

Задача 1. Написать формулы для отображений  $\varphi_{1,2}$  и проверить, что наши две карты согласованы.

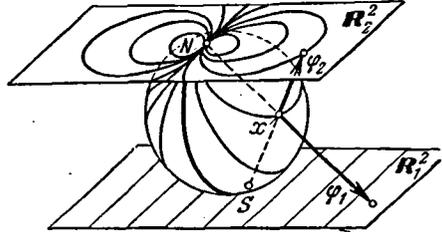


Рис. 222. Атлас сферы. Семейство касающихся в точке  $N$  окружностей, лежащих на сфере, изображается на нижней карте семейством параллельных прямых, а на верхней — семейством касающихся окружностей.

Аналогичным образом, дифференцируемую структуру  $S^n$  можно задать атласом из двух карт.

2. Атлас тора  $T^2$  строится с помощью угловых координат: широты  $\varphi$  и долготы  $\psi$  (рис. 223). Например, можно рассмотреть 4 карты, соответствующие изменению  $\varphi$  и  $\psi$  в интервалах

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad -\pi < \psi < \pi;$$

$$0 < \psi < 2\pi, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

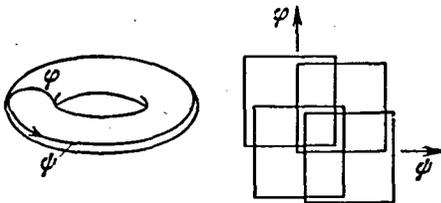


Рис. 223. Атлас тора.

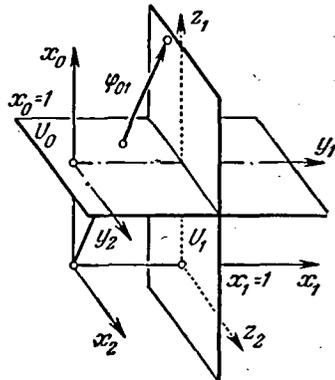


Рис. 224. Аффинные карты проективной плоскости.

3. Атлас проективной плоскости  $RP^2$  можно составить из трех «аффинных карт» (рис. 224):

$$\begin{array}{l}
 \varphi_0 \\
 \varphi_1 \\
 \varphi_2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x_0 : x_1 : x_2 \\
 \nearrow \\
 \rightarrow \\
 \searrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad \text{если } x_0 \neq 0, \\
 z_1 = \frac{x_0}{x_1}, \quad z_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{если } x_1 \neq 0, \\
 u_1 = \frac{x_0}{x_2}, \quad u_2 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \text{если } x_2 \neq 0.
 \end{array}$$

Эти карты согласованы. Например, согласованность  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  означает, что отображение  $\varphi_{0,1}$  области  $U_{0,1} = \{y_1, y_2: y_1 \neq 0\}$

плоскости  $(y_1, y_2)$  на область  $U_{1,0} : z_1 \neq 0$  плоскости  $(z_1, z_2)$ , заданное формулами  $z_1 = y_1^{-1}, z_2 = y_2 y_1^{-1}$ , является диффеоморфизмом (рис. 225).

Доказательство:  $y_1 = z_1^{-1}, y_2 = z_2 z_1^{-1}$ .

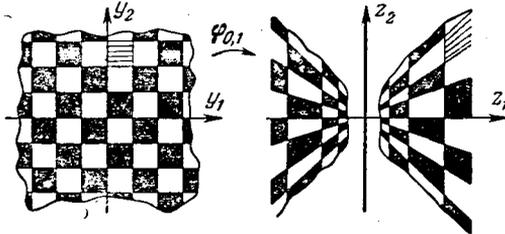


Рис. 225. Согласованность карт проективной плоскости.

Аналогичным образом, дифференцируемая структура в проективном пространстве  $RP^n$  задается атласом из  $n + 1$  аффинных карт.

4. Компактность.

Определение. Подмножество  $G$  многообразия  $M$  называется *открытым*, если его изображение  $\varphi(W \cap G)$  на каждой карте  $\varphi : W \rightarrow U$  является открытым подмножеством области  $U$  линейного пространства (рис. 226).

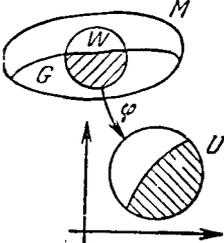


Рис. 226. Открытое подмножество.

Задача 1. Докажите, что пересечение двух и объединение любого числа открытых подмножеств многообразия открыто.

Определение. Подмножество  $K$  многообразия  $M$  называется *компактным*, если из всякого покрытия множества  $K$  открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 2. Докажите, что сфера  $S^n$  компактна. Компактно ли проективное пространство  $RP^n$ ?

Указание. Для решения можно воспользоваться следующей теоремой.

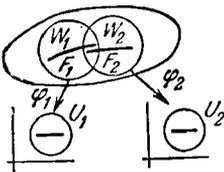


Рис. 227. Компактное подмножество.

Теорема. Пусть подмножество  $F$  многообразия  $M$  (рис. 227) является объединением конечного числа подмножеств  $F_i$ , каждое из которых имеет компактное изображение на одной из карт  $F_i \subset W_i, \varphi_i : W_i \rightarrow U_i, \varphi_i(F_i) — компакт в  $R^n$ .$

Тогда  $F$  компактно.

Доказательство. Пусть  $\{G_j\}$  — открытое покрытие множества  $F$ . Тогда  $\{\varphi_i(G_j \cap W_i)\}$  при каждом  $i$  есть открытое покрытие компакта  $\varphi_i(F_i)$ . Выбираем из него конечное подпокрытие. Заставляя  $j$  пробегать полученное конечное множество значений, получаем конечное число  $G_j$ , покрывающих  $F$ .

### 5. Связность и размерность.

**Определение.** Многообразие  $M$  называется *связным* (рис. 228), если для любых двух его точек  $x, y$  существует конечная цепочка карт  $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$  таких, что  $W_1$  содержит  $x$ ,  $W_n$  содержит  $y$  и  $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset, \forall i$  непусто, а  $U_i$  связно\*).

Если многообразие  $M$  не связно, то оно естественным образом распадается на компоненты связности  $M_i$ .

**Задача 1.** Связны ли многообразия, заданные уравнениями в  $\mathbb{R}^3$  (в  $\mathbb{R}P^3$ )

$$x^2 + y^2 - z^2 = C, \quad C \neq 0?$$

**Задача 2.** Множество всех матриц порядка  $n$  с отличным от 0 определителем имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия (область в  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). Сколько компонент связности имеет это многообразие?

**Теорема.** Пусть  $M$  — связное многообразие,

$$\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$$

— его карты. Тогда размерности всех линейных пространств  $\mathbb{R}^n$ , областями в которых являются  $U_i$ , одинаковы.

**Доказательство.** Это следует из того, что диффеоморфизм между областями линейных пространств возможен лишь при равных размерностях пространств, и из того, что всякие две области  $W_i$  и  $W_j$  связного многообразия  $M$  можно соединить конечной цепочкой попарно пересекающихся областей.

Определенное в теореме число  $n$  называется *размерностью* многообразия  $M$  и обозначается  $\dim M$  (от англ. «dimension»).

Например,  $\dim \mathbb{R}^n = \dim S^n = \dim T^n = \dim \mathbb{R}P^n = n$ .

Несвязное многообразие называется  $n$ -мерным, если все его компоненты связности имеют одинаковую размерность  $n$ .

**Задача 3.** Снабдить множество  $O(n)$  всех ортогональных матриц порядка  $n$  структурой дифференцируемого многообразия. Найти его компоненты связности и их размерность.

*Ответ.*  $O(n) = SO(n) \times \mathbb{Z}_2, \dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

### 6. Дифференцируемые отображения.

**Определение.** Отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$  одного  $C^r$ -многообразия в другое называется *дифференцируемым* (класса  $C^r$ ), если в локальных координатах на  $M_1$  и  $M_2$  оно задается дифференцируемыми функциями (класса  $C^r$ ).

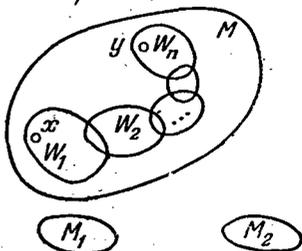


Рис. 228. Связное многообразие  $M$  и несвязное  $M_1 \cup M_2$ .

\* ) То есть любые две точки  $U_i$  можно соединить ломаной в  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ .

Иными словами, пусть  $\varphi_1: W_1 \rightarrow U_1$  — карта  $M_1$ , изображающая точку  $x \in W_1$ ,  $\varphi_2: W_2 \rightarrow U_2$  — карта  $M_2$ , изображающая точку  $f(x) \in W_2$  (рис. 229). Тогда заданное в окрестности точки  $\varphi_1(x)$  отображение областей евклидовых пространств  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$  должно быть дифференцируемым класса  $C^r$ .

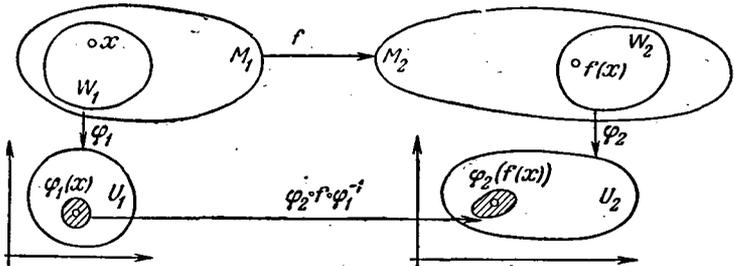


Рис. 229. Дифференцируемое отображение.

**Пример 1.** Проекция сферы на плоскость (рис. 230) есть дифференцируемое отображение  $f: S^2 \rightarrow R^2$ .

Мы видим, что образ дифференцируемого отображения — не обязательно дифференцируемое многообразие.

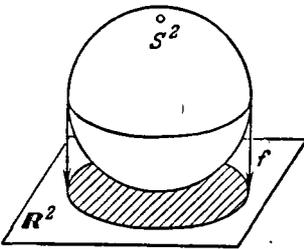


Рис. 230. При проектировании сферы на плоскость получается замкнутый круг.

**Пример 2.** Кривой\*) на многообразии  $M$ , выходящей в момент  $t_0$  из точки  $x \in M$ , называется дифференцируемое отображение  $f: I \rightarrow M$  содержащего  $t_0$  интервала  $I$  вещественной оси  $t$  в многообразии  $M$ , причем  $f(t_0) = x$ .

**Пример 3.** Диффеоморфизмом  $f: M_1 \rightarrow M_2$  многообразия  $M_1$  на многообразии  $M_2$  называется дифференцируемое отображение  $f$ , обратное к которому  $f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$  существует и дифференцируемо.

Многообразия  $M_1$  и  $M_2$  диффеоморфны, если существует диффеоморфизм одного на другое. Например, сфера и эллипсоид диффеоморфны.

**7. Замечание.** Легко видеть, что всякое связное одномерное многообразие диффеоморфно окружности (если оно компактно) или прямой (если оно не компактно).

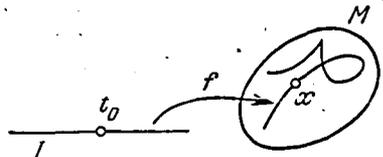


Рис. 231. Кривая на многообразии  $M$ .

\*) Или параметризованной кривой, так как кривыми на  $M$  иногда называют также одномерные подмногообразия многообразия  $M$  (определение см. ниже, в п. 8). У параметризованной кривой могут быть точки самопересечения, точки возврата и т. п. (рис. 231).

Примерами двумерных многообразий являются сфера, тор (дiffeоморфный «сфере с одной ручкой») и «сфера с  $n$  ручками» (рис. 232).



Рис. 232. Недиффеоморфные двумерные многообразия.

В курсах топологии доказывается, что всякое двумерное компактное связное ориентируемое многообразие диффеоморфно сфере с  $n \geq 0$  ручками. О трехмерных многообразиях известно мало. Например, неизвестно, всякое ли компактное односвязное\*) трехмерное многообразие диффеоморфно сфере  $S^3$  (гипотеза Пуанкаре) или хотя бы гомеоморфно ей.

В больших размерностях дифференцируемая и топологическая классификации многообразий не совпадают. Например, существует ровно 28 гладких многообразий, гомеоморфных сфере  $S^7$ , но не диффеоморфных друг другу. Они называются *сферами Милнора*.

Сферу Милнора можно задать в  $C^6$  с координатами  $z_1, \dots, z_6$  следующими двумя уравнениями:

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0,$$

$$|z_1|^2 + \dots + |z_6|^2 = 1.$$

При  $k = 1, 2, \dots, 28$  получаем 28 сфер Милнора\*\*). Одно из этих 28 многообразий диффеоморфно сфере  $S^7$ .

**8. Подмногообразия.** Сфера в  $R^3$ , заданная уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , доставляет пример подмножества евклидова пространства, наследующего от него естественную структуру дифференцируемого многообразия — структуру *подмногообразия*  $R^3$ . Общее определение подмногообразия следующее:

**О п р е д е л е н и е.** Подмножество  $V$  многообразия  $M$  (рис. 233) называется *подмногообразием*, если каждая точка  $x \in V$  имеет такую окрестность  $W$  в  $M$  и такую карту  $\varphi: W \rightarrow U$ , что  $\varphi(W \cap V)$  является областью некоторого аффинного подпространства того аффинного пространства  $R^n$ , в котором лежит  $U$ .

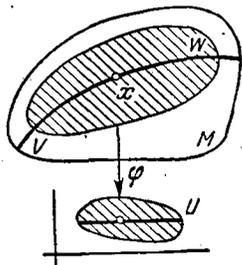


Рис. 233. Подмногообразиие.

Подмногообразие  $V$  само имеет естественную структуру многообразия ( $W' = W \cap V$ ,  $U' = \varphi(W')$ ).

Следующий фундаментальный факт приводится без доказательства и не будет использоваться в дальнейшем.

\*) Многообразие односвязно, если всякий замкнутый путь в нем можно непрерывно стянуть в точку.

\*\*) См. Е. Брискорн, Примеры из дифференциальной топологии особенностей, сб. перев. «Математика», 11,6 (1967), стр. 132—143.

**Теорема.** *Всякое многообразие  $M^n$  диффеоморфно подмногообразию евклидова пространства достаточно большой размерности  $R^N$  (например, достаточно  $N > 2n$ , где  $n = \dim M^n$ ).*

Таким образом, абстрактное понятие многообразия в действительности охватывает не больший круг объектов, чем « $n$ -мерные поверхности в  $N$ -мерном пространстве». Преимущество абстрактного подхода состоит в том, что он сразу охватывает и те случаи, когда заранее не дано никакого вложения в евклидово пространство, а его привлечение привело бы лишь к ненужным усложнениям (пример: проективное пространство  $RP^n$ ). Положение здесь такое же, как с конечномерными линейными пространствами (они все изоморфны координатному пространству  $\{(x_1, \dots, x_n)\}$ , но привлечение координат часто лишь усложняет дело).

9. **Пример.** Рассмотрим в заключение пять интересных многообразий (рис. 234).

$M_1 = SO(3)$  есть группа ортогональных матриц третьего порядка с определителем  $+1$ . Поскольку матрица имеет 9 элементов,  $M_1$  есть подмножество

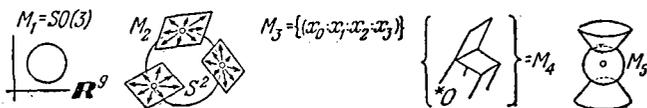


Рис. 234. Примеры трехмерных многообразий.

пространства  $R^9$ . Легко видеть, что это подмножество является в действительности подмногообразием.

$M_2 = T_1S^2$  есть множество всех касательных векторов длины 1 к сфере  $S^2$  в трехмерном евклидовом пространстве. Ввести структуру дифференцируемого многообразия в этом множестве предоставляется читателю (ср. § 34).

$M_3 = RP^3$  — это трехмерное проективное пространство.

$M_4$  — конфигурационное пространство твердого тела, закрепленного в неподвижной точке  $O$ .

$M_5$  — подмногообразие пространства  $R^6 = RC^3$ , заданное уравнениями

$$\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2. \end{cases}$$

Задача \* 1. Какие из многообразий  $M_1 - M_5$  диффеоморфны?

### § 34. Касательное расслоение. Векторные поля на многообразии

С каждым гладким многообразием  $M$  связано другое многообразие (вдвое большей размерности), называемое *касательным расслоением* \*)  $M$  и обозначаемое  $TM$ . Касательное расслоение

\*) Касательное расслоение — частный случай векторного расслоения; еще более общее понятие — расслоенное пространство. Все эти понятия относятся к числу основных в топологии и в анализе, но мы ограничимся лишь касательным расслоением, которое особенно важно для теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

позволит нам сразу перенести на многообразия всю теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. **Касательное пространство.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие. **Касательным к  $M$  в точке  $x$  вектором  $\xi$**  называется класс эквивалентности выходящих из  $x$  кривых; две кривые (рис. 235)

$$\gamma_1: I \rightarrow M, \quad \gamma_2: I \rightarrow M$$

эквивалентны, если их изображения на какой-либо карте

$$\varphi\gamma_1: I \rightarrow U, \quad \varphi\gamma_2: I \rightarrow U$$

эквивалентны.

Заметим, что понятие эквивалентности кривых не зависит от выбора карты атласа (см. § 6): из эквивалентности на карте  $\varphi_i$

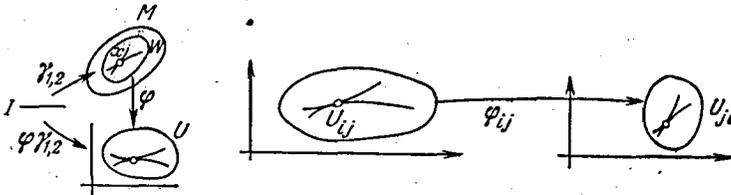


Рис. 235. Касательный вектор.

следует эквивалентность на любой другой  $\varphi_j$ , так как переход с одной карты на другую,  $\varphi_{ij}$ , есть диффеоморфизм.

Множество векторов, касательных к  $M$  в  $x$ , имеет структуру линейного пространства, не зависящую от выбора карты (см. § 6). Это линейное пространство называется **касательным пространством к  $M$  в  $x$**  и обозначается  $TM_x$ . Его размерность равна размерности  $M$ .

**Пример 1.** Пусть  $M^n$  — подмногообразие аффинного пространства  $R^N$  (рис. 236). Тогда  $TM_x^n$  можно представить себе в виде  $n$ -мерной плоскости в  $R^N$ , проходящей через  $x$ . При этом, однако, следует помнить, что **касательное пространство к  $M$  в разных точках  $x, y$  не пересекаются:  $TM_x \cap TM_y = \emptyset$ .**

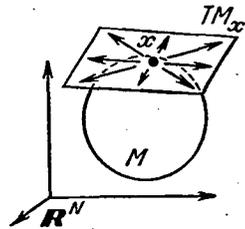


Рис. 236. Касательное пространство.

2. **Касательное расслоение.** Рассмотрим объединение касательных пространств к многообразию  $M$  во всех его точках

$$TM = \bigcup_{x \in M} TM_x.$$

Множество  $TM$  имеет естественную структуру гладкого многообразия.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь карту на многообразии  $M$ , и пусть  $(x_1, \dots, x_n): W \rightarrow U \subset R^n$  (рис. 237) — локальные координаты в окрестности  $W$  точки  $x$ , задающие эту карту.

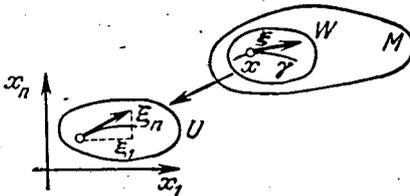


Рис. 237. Координаты касательного вектора.

Всякий вектор  $\xi$ , касательный к  $M$  в точке  $x \in W$ , задается набором своих компонент  $\xi_1, \dots, \xi_n$  в указанной системе координат. Именно, если  $\gamma: I \rightarrow M$  — кривая, выходящая из  $x$  по направлению  $\xi$  в момент  $t_0$ , то

$$\xi_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} x_i(\gamma(t)).$$

Таким образом, всякий вектор  $\xi$ , касательный к  $M$  в одной из точек области  $W$ , задается набором  $2n$  чисел  $(x_1, \dots, x_n), (\xi_1, \dots, \xi_n)$  —  $n$  координат «точки приложения»  $x$  и  $n$  «компонент»  $\xi_i$ .

Мы получили карту части множества  $TM$ :

$$\psi: TW \rightarrow R^{2n}, \quad \psi(\xi) = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Различные карты  $TM$ , соответствующие разным картам атласа  $M$ , согласованы (класса  $C^{-1}$ , если  $M$  класса  $C^1$ ). Действительно, пусть  $y_1, \dots, y_n$  — другая локальная система координат на  $M$  и  $\eta_1, \dots, \eta_n$  — компоненты вектора в этой системе; тогда

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n), \quad \eta_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \xi_j \quad (i=1, \dots, n)$$

— гладкие функции от  $x_j$  и  $\xi_j$ .

Итак, множество  $TM$  всех касательных к  $M$  векторов получило структуру гладкого многообразия размерности  $2n$ .

**Определение.** Многообразие  $TM$  называется *касательным расслоением\** многообразия  $M$ .

Существуют естественные отображения  $i: M \rightarrow TM$  (нулевое сечение) и  $p: TM \rightarrow M$  (проекция):  $i(x)$  есть нулевой вектор  $TM_x$ , а  $p(\xi)$  есть та точка  $x$ , в которой  $\xi$  касается  $M$  (рис. 238).

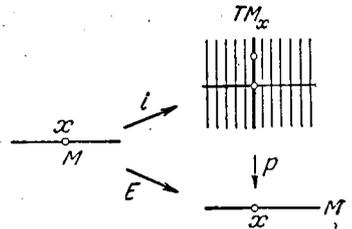


Рис. 238. Касательное расслоение.

**Задача 1.** Докажите, что отображения  $i, p$  дифференцируемы, что  $i$  является диффеоморфизмом  $M$  на  $i(M)$  и что  $p \circ i: M \rightarrow M$  — тождественное отображение.

Прообразы точек  $x \in M$  при отображении  $p: TM \rightarrow M$  называются *слоями* расслоения  $TM$ . Каждый слой имеет структуру линейного пространства. Многообразие  $M$  называется *базой* расслоения  $TM$ .

\*) Мы будем использовать это краткое название вместо более педантичного термина *пространство касательного расслоения*.

3. **Замечание о параллелизуемости.** Касательное расслоение аффинного пространства  $R^n$  или его области  $U$  имеет еще дополнительную структуру прямого произведения:  $TU = U \times R^n$ .

Действительно, касательный вектор к  $U$  можно задать парой  $(x, \xi)$ , где  $x \in U$ , а  $\xi$  — вектор линейного пространства  $R^n$ , для которого указан линейный изоморфизм с  $TU_x$  (рис. 239).

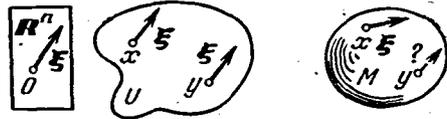


Рис. 239. Параллелизованное и непараллелизуемое многообразия.

Можно выразить это иначе, сказав, что аффинное пространство *параллелизовано*: для касательных векторов к области  $U$  пространства  $R^n$  в разных точках  $x$  и  $y$  определено равенство.

Касательное расслоение многообразия вовсе не обязано быть прямым произведением, и, вообще говоря, нельзя разумно определить равенство векторов, приложенных в разных точках многообразия  $M$ .

Положение здесь такое же, как с листом Мёбиуса (рис. 240), который является расслоением с базой окружность и слоем прямая, но не является прямым произведением окружности на прямую.

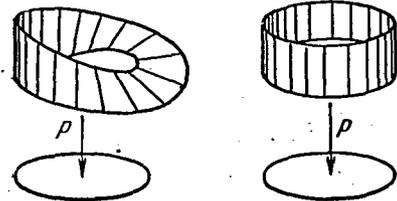


Рис. 240. Расслоение, не являющееся прямым произведением.

*ванным*, если в его касательном расслоении введена структура прямого произведения, т. е. задан диффеоморфизм  $TM^n \cong M^n \times R^n$ , линейно переводящий  $TM_x$  в  $x \times R^n$ . Многообразию *параллелизуемо*, если оно может быть параллелизовано.

**Пример 1.** Любая область в евклидовом пространстве естественно параллелизована.

**Задача 1.** Докажите, что тор  $T^2$  параллелизуем, а лист Мёбиуса нет.

**Теорема\*.** Из сфер  $S^n$  параллелизуемы только следующие три:  $S^1, S^3, S^7$ . В частности, двумерная сфера непараллелизуема:

$$TS^2 \neq S^2 \times R^2.$$



Рис. 241. Теорема о сже.

(Отсюда вытекает, например, что ежа нельзя причесать! хоть одна игла будет перпендикулярна поверхности (рис. 241).)

Читатель, решивший задачу в конце § 33, легко докажет непараллелизуемость  $S^2$  (указание:  $RP^3 \cong S^2 \times S^1$ ). Параллелизация окружности  $S^1$  очевидна. Параллелизовать  $S^3$  — поучительное упражнение (указание:  $S^3$  — это группа, а именно группа

кватернионов с модулем 1). Полное доказательство сформулированной теоремы требует довольно глубокого проникновения в топологию; оно было получено относительно недавно.

Аналитики склонны считать все расслоения прямыми произведениями и все многообразия параллелизуемыми. Этой ошибке следует остерегаться.

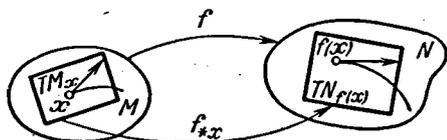


Рис. 242. Производная отображения  $f$  в точке  $x$ .

4. Касательное отображение. Пусть  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение многообразия  $M$  в многообразие  $N$  (рис. 242). Обозначим через  $f_{*x}$  индуцированное отображение касательных пространств. Оно определяется, как в § 6, и является линейным отображением одного линейного пространства в другое:

$$f_{*x}: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$$

Пусть  $x$  пробегает  $M$ . Предыдущая формула определяет отображение

$$f_*: TM \rightarrow TN, \\ f_*|_{TM_x} = f_{*x},$$

касательного расслоения  $M$  в касательное расслоение  $N$ . Это отображение дифференцируемо (почему?) и линейно отображает слои  $TM$  в слои  $TN$  (рис. 243).

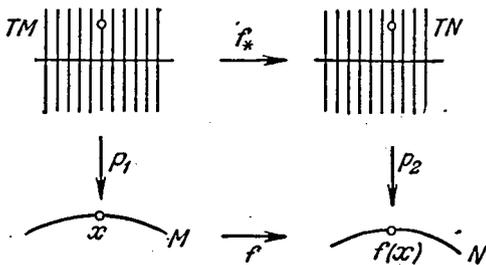


Рис. 243. Касательное отображение.

Отображение  $f_*$  называется *касательным отображением* к  $f$  (употребляется также обозначение  $Tf: TM \rightarrow TN$ ).

Задача 1. Пусть  $f: M \rightarrow N$  и  $g: N \rightarrow K$  — гладкие отображения,  $g \circ f: M \rightarrow K$  — их суперпозиция. Доказать, что  $(g \circ f)_* = (g_*) \circ (f_*)$ , т. е. что

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ M & \xrightarrow{g \circ f} & K \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} & TN & \\ f_* \nearrow & & \searrow g_* \\ TM & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & TK \end{array}$$

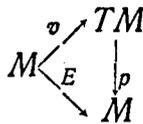
Терминологическое замечание. В анализе эта формула называется правилом дифференцирования сложной функции, в алгебре — функториальностью (ковариантной) перехода к касательному отображению.

5. Векторные поля. Пусть  $M$  — гладкое (класса  $C^{r+1}$ ) многообразии,  $TM$  — его касательное расслоение (рис. 244).

Определение. *Векторное поле* \*) (класса  $C^r$ )  $\mathfrak{v}$  на  $M$  есть гладкое (класса  $C^r$ ) отображение  $\mathfrak{v}: M \rightarrow TM$  такое, что

\*) Употребляется также термин *сечение касательного расслоения*.

отображение  $p \circ v: M \rightarrow M$  — тождественное: диаграмма



коммукативна, т. е.  $p(v(x)) = x$ .

Замечание. Если  $M$  — область пространства  $R^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ , то это определение совпадает со старым (§ 1).

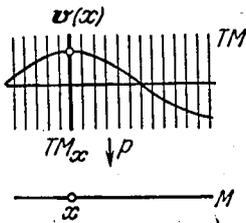


Рис. 244. Векторное поле.

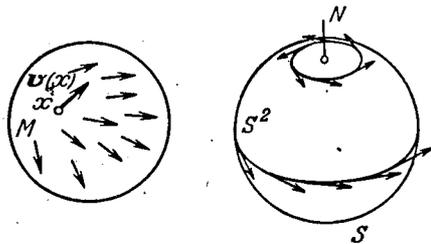


Рис. 245. Поле скоростей.

Однако в новом определении никакая специальная система координат не участвует.

Пример. Рассмотрим семейство  $g^t$  вращений сферы  $S^2$  вокруг оси  $SN$  на угол  $t$  (рис. 245). Каждая точка сферы  $x \in S^2$  описывает при вращении кривую (параллель) и имеет скорость

$$v(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x \in TS^2_x.$$

Мы получаем отображение  $v: S^2 \rightarrow TS^2$ ; очевидно,  $pv = E$ , т. е.  $v$  — векторное поле на  $S^2$ .

Вообще, если  $g^t: M \rightarrow M$  — однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия  $M$ , то возникает векторное поле фазовой скорости на  $M$ , точь-в-точь как в § 1.

Вся локальная теория (нелинейных) обыкновенных дифференциальных уравнений немедленно переносится на многообразия, так как мы позаботились своевременно (в § 6) о независимости основных понятий от системы координат.

В частности, на многообразия переносится основная локальная теорема о выпрямлении векторного поля и локальные теоремы существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости по начальным условиям. Специфика многообразия проявляется лишь при рассмотрении нелокальных вопросов. Простейшими из них являются вопросы о продолжении решений и о существовании фазового потока с данным полем фазовой скорости.

## § 35. Фазовый поток, заданный векторным полем

Доказанная ниже теорема является простейшей теоремой качественной теории дифференциальных уравнений: она дает условия, при которых имеет смысл ставить вопрос о поведении решений дифференциального уравнения на бесконечном интервале времени.

Из этой теоремы вытекает, в частности, непрерывность и дифференцируемость решения по начальным данным в целом (т. е. на любом конечном интервале времени). Эта теорема полезна также как технический метод для конструирования диффеоморфизмов. Например, с ее помощью можно доказать, что всякое замкнутое многообразие, имеющее гладкую функцию лишь с двумя критическими точками, гомеоморфно сфере.

1. Теорема. Пусть  $M$  — гладкое (класса  $C^r$ ,  $r \geq 2$ ) многообразие (рис. 246),  $v: M \rightarrow TM$  — векторное поле. Пусть вектор  $v(x)$

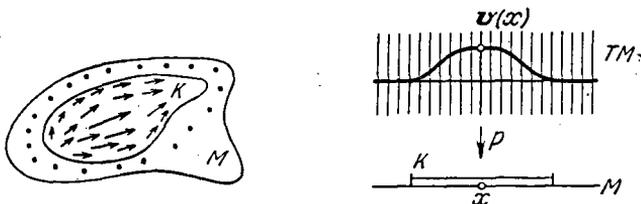


Рис. 246. Векторное поле, равное 0 вне компакта  $K$ .

отличен от нулевого вектора  $TM_x$  только лишь в компактной части  $K$  многообразия  $M$ . Тогда существует однопараметрическая группа диффеоморфизмов  $g^t: M \rightarrow M$ , для которой поле  $v$  является полем фазовой скорости:

$$\frac{d}{dt} g^t x = v(g^t x). \quad (1)$$

Следствие 1. Всякое векторное поле  $v$  на компактном многообразии  $M$  является полем фазовой скорости некоторой однопараметрической группы диффеоморфизмов.

В частности, в условиях теоремы или в условиях следствия 1 имеет место

Следствие 2. Всякое решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M, \quad (2)$$

можно продолжать вперед и назад неограниченно. При этом значение решения  $g^t x$  в момент  $t$  зависит от  $t$  и от начального условия  $x$  гладко.

Замечание. Условие компактности нельзя отбросить.

Пример 1.  $M = R$ ,  $\dot{x} = x^2$  (см. § 3, п. 5): решения нельзя продолжать неограниченно.

Пример 2.  $M = \{x: 0 < x < 1\}$ ,  $\dot{x} = 1$ .

Приступаем к доказательству теоремы.

2. Построение диффеоморфизмов  $g^t$  при малых  $t$ . Для каждой точки  $x \in M$  существует открытая окрестность  $U \subset M$  и число  $\varepsilon > 0$  такие, что для любой точки  $y$  из  $U$  и для любого  $t$  с  $|t| < \varepsilon$  решение  $g^t y$  уравнения (2) с начальным условием  $y$  (при  $t=0$ ) существует, единственно, дифференцируемо, зависит от  $t$  и от  $y$  и удовлетворяет условию

$$g^{t+s} y = g^t g^s y, \quad (3)$$

если  $|s| < \varepsilon$ ,  $|t| < \varepsilon$ ,  $|s+t| < \varepsilon$ .

Действительно, точка  $x$  изображается на некоторой карте, а для уравнений в области аффинного пространства наше утверждение доказано (см. гл. 2 и гл. 4)\*.

Итак, компактное множество  $K$  покрыто окрестностями  $U_i$ . Мы можем выбрать конечное покрытие  $\{U_i\}$ .

Пусть  $\varepsilon_i$  — соответствующие числа  $\varepsilon$ ; возьмем  $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$ .

Тогда при  $|t| < \varepsilon_0$  определены в целом диффеоморфизмы  $g^t: M \rightarrow M$ ,  $g^{t+s} = g^t g^s$ , если  $|s|, |t|, |s+t| < \varepsilon$ ,  $g^t x = x$  при  $x$  вне  $K$ .

Действительно, хотя определенные с помощью разных карт решения уравнения (2) с начальным условием  $x$  (при  $t=0$ ) а priori различны, они совпадают при  $|t| < \varepsilon_0$  ввиду выбора  $\varepsilon_0$  и локальной теоремы единственности.

Далее, по локальной теореме дифференцируемости точка  $g^t x$  зависит дифференцируемо от  $t$  и  $x$ , а поскольку  $g^t g^{-t} = E$ , то отображение  $g^t: M \rightarrow M$  — диффеоморфизм. Заметим, что

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x = v(x).$$

3. Построение  $g^t$  при любых  $t$ . Представим  $t$  в виде  $n\varepsilon_0/2 + r$ , где  $n$  — целое и  $0 \leq r < \varepsilon_0/2$ . Такое представление существует и единственно. Диффеоморфизмы  $g^{\varepsilon_0/2}$  и  $g^r$  уже определены.

Положим  $g^t = (g^{\varepsilon_0/2})^n g^r$ . Это диффеоморфизм  $M$  на  $M$ . При  $|t| < \varepsilon_0/2$  новое определение согласуется с предыдущим (см. п. 2) определением. Поэтому  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x = v(x)$ .

\*) Доказательство единственности требует небольшого дополнительного рассуждения: нужно проверить, что из единственности решения с данными начальными условиями на каждой фиксированной карте вытекает единственность на многообразии. На неотделимом многообразии единственности может и не быть (пример: уравнение  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{y} = 1$  на многообразии, полученном из двух прямых  $\{x\}$ ,  $\{y\}$  отождествлением точек с равными отрицательными координатами). Если же многообразие  $M$  отделимо, то проходит доказательство единственности из § 7, п. 7. (Отделимость используется при доказательстве совпадения значений решений  $\varphi_1(T)$  и  $\varphi_2(T)$  в первой точке  $T$ , начиная с которой они не совпадают.)

Легко видеть, что при любых  $s, t$

$$g^{s+t} = g^s g^t. \quad (4)$$

Действительно, пусть

$$s = m \frac{\varepsilon_0}{2} + p, \quad t = n \frac{\varepsilon_0}{2} + q, \quad s+t = k \frac{\varepsilon_0}{2} + r.$$

Тогда левая и правая части равенства (4) принимают вид  $(g^{\varepsilon_0/2})^k g^r$  и  $(g^{\varepsilon_0/2})^m g^p (g^{\varepsilon_0/2})^n g^q$ .

Возможны два случая:

- 1)  $m+n=k, \quad p+q=r;$
- 2)  $m+n=k-1, \quad p+q=r+\frac{\varepsilon_0}{2}.$

Заметим, что поскольку  $|p| < \varepsilon_0/2, |q| < \varepsilon_0/2$ , то диффеоморфизмы  $g^{\varepsilon_0/2}, g^p$  и  $g^q$  коммутируют. Отсюда вытекает формула (4) как в первом случае, так и во втором ( $g^{\varepsilon_0/2} g^r = g^p g^q$ , так как  $|p|, |q|, |r| < \varepsilon_0/2, p+q = \frac{\varepsilon_0}{2} + r$ ).

Остается проверить, что точка  $g^t x$  зависит от  $t$  и  $x$  дифференцируемо. Это следует, например, из того, что  $g^t = (g^{t/N})^N$ , а  $g^{t/N} x$  при достаточно больших  $N$  зависит дифференцируемо от  $t$  и  $x$  (см. п. 2).

Итак,  $g^t$  есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия  $M$ ; соответствующее поле фазовой скорости есть  $v$ , и теорема доказана.

4. Замечание. Из доказанной теоремы легко вывести, что *каждое решение неавтономного уравнения*

$$\dot{x} = v(x, t), \quad x \in M, \quad t \in R,$$

*заданного зависящим от времени  $t$  векторным полем  $v$  на компактном многообразии  $M$ , можно продолжать неограниченно.*

Этим объясняется, в частности, возможность неограниченного продолжения решений линейного уравнения

$$\dot{x} = v(x, t), \quad v(x, t) = A(t)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n. \quad (5)$$

В самом деле, будем рассматривать  $R^n$  как аффинную часть проективного пространства  $RP^n$ . Пространство  $RP^n$  получается из своей аффинной части добавлением бесконечно удаленной плоскости:  $RP^n = R^n \cup JR^{n-1}$ .

Пусть  $v$  — линейное векторное поле в  $R^n$  ( $v(x) = Ax$ ). Легко проверяется.

*Лемма. Векторное поле  $v$  на  $R^n$  можно единственным образом продолжить до гладкого поля  $v'$  на  $RP^n$ . Поле  $v'$  на бесконечно удаленной плоскости  $RP^{n-1}$  касается  $RP^{n-1}$ .*

В частности, продолжим (при каждом  $t$ ) поле  $v(t)$ , задающее уравнение (5), до поля  $v'(t)$  на  $RP^n$ . Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v'(x, t), \quad x \in RP^n, \quad t \in R. \quad (6)$$

Проективное пространство компактно. Следовательно, каждое решение уравнения (6) можно продолжать неограниченно (рис. 247).

Решение с начальным условием в  $RP^{n-1}$  всегда остается в  $RP^{n-1}$ , так как поле  $\mathcal{V}$  касается  $RP^{n-1}$ .

По теореме единственности решения уравнения с начальными условиями в  $R^n$  остаются в пределах  $R^n$  при всех  $t$ . Но в пределах  $R^n$  уравнение (6) имеет вид (5). Итак, каждое решение уравнения (5) продолжается неограниченно.



Рис. 247. Продолжение линейного векторного поля на проективное пространство.

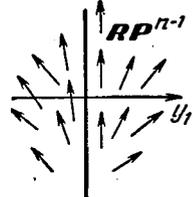


Рис. 248. Поведение продолженного поля вблизи бесконечно удаленной плоскости.

**Задача.** Доказать лемму.

**Решение 1.** Пусть  $(x_1, \dots, x_n)$  — аффинные координаты в  $RP^n$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  — другие аффинные координаты:

$$y_1 = x_1^{-1}, \quad y_k = x_k x_1^{-1} \quad (k=2, \dots, n).$$

Уравнение  $RP^{n-1}$  в новых координатах:  $y_1 = 0$ .

Дифференциальное уравнение (5)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, \dots, n,$$

в новых координатах записывается в виде (рис. 248)

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_1 \left( a_{11} + \sum_{k>1} a_{1k} y_k \right), \\ \frac{dy_k}{dt} &= a_{k1} + \sum_{l>1} a_{kl} y_l - y_k \left( a_{11} + \sum_{l>1} a_{1l} y_l \right), \quad k>1. \end{aligned}$$

Из этих формул, верных при  $y_1 \neq 0$ , видно, как доопределить поле при  $y_1 = 0$ . При  $y_1 = 0$  находим  $\frac{dy_1}{dt} = 0$ , что и доказывает лемму.

**Решение 2.** Аффинное преобразование можно рассматривать как проективное, оставляющее на месте бесконечно удаленную плоскость (но не ее точки). В частности, линейные преобразования  $e^{At}$  продолжают до диффеоморфизмов проективного пространства, оставляющих на месте бесконечно удаленную плоскость. Эти диффеоморфизмы образуют однопараметрическую группу; ее поле фазовой скорости и есть  $\mathcal{V}$ .

## § 36. Индексы особых точек векторного поля

Здесь рассмотрены простые применения топологии к исследованию дифференциальных уравнений.

**1. Индекс кривой.** Начнем с наглядных рассуждений; ниже они будут подкреплены точными определениями и доказательствами (см. п. 7).

Рассмотрим векторное поле, заданное на ориентированной евклидовой плоскости. Пусть на плоскости дана замкнутая ориентированная кривая, не проходящая через особые точки поля (рис. 249). Пусть точка обходит кривую в положительном направлении. Вектор поля в рассматриваемой точке при движении точки будет непрерывно поворачиваться<sup>\*</sup>). Когда точка, обойдя кривую, вернется на место, вектор тоже вернется к исходному положению. Но при этом он может делать несколько оборотов в ту или другую сторону.

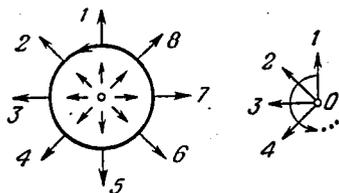


Рис. 249. Кривая индекса 1.

Число оборотов вектора поля при обходе кривой называется *индексом* кривой. При этом число оборотов берется со знаком плюс, если вектор вращается в сторону, заданную ориентацией плоскости (от первого орта ко второму), и со знаком минус в противном случае.

Пример 1. Индексы кривых  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  на рис. 250 равны 1, 0, 2 и  $-1$  соответственно.

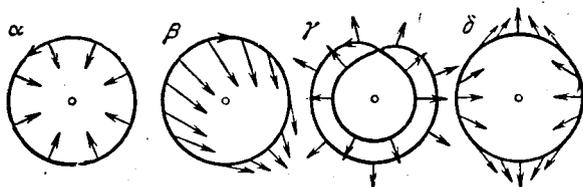


Рис. 250. Кривые с разными индексами.

Пример 2. Пусть  $O$  — неособая точка поля. Тогда индекс всякой кривой, лежащей в достаточно малой окрестности точки  $O$ , равен 0.

Действительно, направление поля в точке  $O$  непрерывно и в достаточно малой ее окрестности меняется меньше чем, скажем, на  $\pi/2$ .

Задача 1. Зададим векторное поле на плоскости  $R^2 = RC$  без точки  $O$  формулой  $v(z) = z^n$  ( $n$  — целое число, не обязательно положительное). Сосчитать индекс окружности  $z = e^{i\varphi}$ , ориентированной в сторону возрастания  $\varphi$  (плоскость ориентирована репером  $1, i$ ).

Ответ.  $n$ .

## 2. Свойства индекса.

Свойство 1. При непрерывной деформации замкнутой кривой ее индекс не меняется, пока кривая не проходит через особые точки.

<sup>\*</sup>) Чтобы следить за поворотом вектора, удобно снести все векторы в одну точку  $O$ , следуя естественной параллелизации плоскости.

Действительно, направление вектора поля вне особых точек меняется непрерывно; поэтому число оборотов также непрерывно зависит от кривой. Будучи целым числом, оно постоянно.

**Свойство 2.** *Индекс кривой не меняется при непрерывной деформации векторного поля, если только при этом на кривой во все время деформации нет особых точек поля.*

Из этих двух свойств, интуитивно достаточно очевидных\*), вытекает множество глубоких теорем.

### 3. Примеры.

**Пример 1.** Рассмотрим векторное поле на плоскости. Пусть  $D$  — круг, а  $S$  — его окружность\*\*).

**Теорема.** *Если индекс кривой  $S$  отличен от 0, то внутри ограниченной ею области  $D$  есть хотя одна особая точка.*

В самом деле, если особых точек нет, то  $S$  можно внутри  $D$  деформировать непрерывно и не проходя через особые точки, так что после деформации получится сколь угодно близкая к одной точке  $O$  кривая (можно даже просто деформировать  $S$  в точку  $O$ ). Индекс полученной маленькой кривой равен 0. Но при деформации индекс не меняется: значит, и вначале он был равен 0.

**Задача 1.** Докажите, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = x + P(x, y), \quad \dot{y} = y + Q(x, y),$$

где  $P$  и  $Q$  — ограниченные на всей плоскости функции, имеет по меньшей мере одно положение равновесия.

**Пример 2.** Докажем основную теорему алгебры:

*Всякое уравнение  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$  имеет по меньшей мере один комплексный корень.*

Рассмотрим векторное поле  $\nu$  на плоскости комплексного переменного  $z$ , заданное формулой  $\nu(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Особые точки поля  $\nu$  — это корни нашего уравнения.

**Лемма.** *Индекс окружности достаточно большого радиуса в построенном поле равен  $n$  (ориентации — как в задаче п. 1).*

В самом деле, формула

$$\nu_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

определяет непрерывную деформацию исходного поля в поле  $z^n$ . Пусть  $r > 1 + |a_1| + \dots + |a_n|$ . Тогда  $r^n > |a_1| r^{n-1} + \dots + |a_n|$ . Поэтому

\*) Аккуратная формулировка и доказательство сформулированных утверждений требуют некоторой топологической техники: гомотопий, гомологий или чего-нибудь в этом роде (далее мы воспользуемся с этой целью формулой Грина). См., например, книгу: Н. Стинрод и У. Чинн, Первые понятия топологии, «Мир», 1967.

\*\*) Можно также рассмотреть более общий случай, когда  $D$  — любая плоская область, ограниченная простой замкнутой кривой  $S$ .

на окружности радиуса  $r$  во все время деформации нет особых точек. По свойству 2 индекс этой окружности в исходном поле и в поле  $z^n$  одинаков. Но в поле  $z^n$  он равен  $n$ .

Лемма доказана.

По предыдущей теореме внутри круга радиуса  $r$  есть особые точки векторного поля, т. е. корни нашего уравнения.

Теорема доказана.

Пример 3. Докажем следующую теорему о неподвижной точке:

*Теорема. Всякое гладкое \*) отображение  $f: D \rightarrow D$  замкнутого круга в себя имеет хотя одну неподвижную точку.*

Будем считать, что на плоскости круга  $D$  введена структура линейного пространства с началом в центре круга (рис. 251).

Неподвижные точки отображения  $f$  — это особые точки векторного поля  $v(x) = f(x) - x$ .

Предположим, что особых точек в  $D$  нет. Тогда их нет и на окружности.

Лемма. Индекс окружности круга  $D$  в поле  $v$  равен 1.

Действительно, существует такая непрерывная деформация поля  $v$  в поле  $-x$ , что во все время деформации на окружности нет особых точек (например, достаточно положить  $v_t(x) = tf(x) - x$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ). Поэтому индексы окружности в полях  $v_0 = -x$  и  $v_1 = v$  одинаковы.

Но индекс окружности  $|x| = r$  в поле  $-x$  легко сосчитать непосредственно: он равен 1.

Лемма доказана.

По теореме примера 1 внутри круга есть особая точка поля  $v$ , т. е. неподвижная точка отображения  $f$ .

4. Индекс особой точки векторного поля. Пусть  $O$  — изолированная особая точка векторного поля на плоскости, т. е. пусть в некоторой окрестности точки  $O$  нет других особых точек. Рассмотрим окружность достаточно малого радиуса с центром в точке  $O$ ; предположим, что плоскость ориентирована и что ориентация на окружности выбрана положительной (как в п. 1).

*Теорема. Индекс окружности достаточно малого радиуса с центром в изолированной особой точке  $O$  не зависит от радиуса окружности, лишь бы он был достаточно мал.*

В самом деле, две такие окружности можно непрерывно продеформировать одну в другую, не проходя через особые точки.

\*) Эта теорема справедлива для любого непрерывного отображения, но мы здесь считаем все отображения гладкими и докажем теорему (см. п. 7) только в этом предположении.

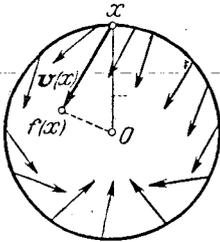


Рис. 251. Отображение круга в себя.

Заметим также, что вместо окружности можно было бы взять любую другую кривую, обходящую вокруг  $O$  один раз в положительном направлении.

**Определение.** Индекс какой-нибудь (и тогда любой) достаточно малой положительно ориентированной окружности с центром в изолированной особой точке векторного поля называется *индексом особой точки*.

**Примеры.** Индексы особых точек типа узел, седло и фокус (или центр) равны  $+1$ ,  $-1$ ,  $+1$  соответственно (рис. 252).

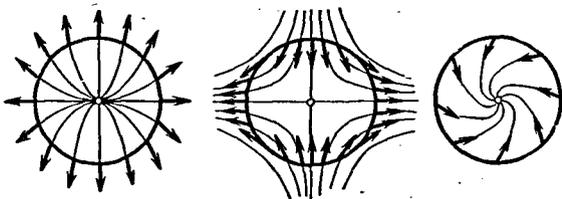


Рис. 252. Индексы простых особых точек равны  $\pm 1$ .

Особая точка векторного поля называется *простой*, если оператор линейной части поля в этой точке невырожден. Простые особые точки на плоскости—это узлы, седла, фокусы и центры. Таким образом, индекс простой особой точки равен всегда  $\pm 1$ .

**Задача 1.** Построить векторное поле с особой точкой индекса  $n$ .

**Указание.** См., например, задачу п. 1.

**Задача 2.** Докажите, что индекс особой точки не зависит от выбора ориентации плоскости.

**Указание.** При изменении ориентации одновременно изменяются и положительное направление обхода окружности, и положительное направление счета числа оборотов.

**5. Теорема о сумме индексов.** Пусть  $D$ —компактная область на ориентированной плоскости, ограниченная простой кривой  $S$ . Ориентируем кривую  $S$ , как полагается ориентировать границу  $D$  (т. е. так, чтобы область  $D$  оставалась при обходе слева). Это значит, что репер, образованный вектором скорости обхода и вектором нормали, направленным внутрь  $D$ , должен задавать положительную ориентацию плоскости.

Пусть на плоскости задано векторное поле, не имеющее особых точек на кривой  $S$  и имеющее лишь конечное число особых точек в области  $D$ .

**Теорема.** Индекс кривой  $S$  равен сумме индексов особых точек поля, лежащих внутри  $D$ .

Для доказательства заметим, что индекс кривой обладает следующим свойством аддитивности.

Рассмотрим две ориентированные кривые  $\gamma_1, \gamma_2$ , проходящие через одну точку. Можно образовать новую ориентированную кривую  $\gamma_1 + \gamma_2$ , пройдя сначала  $\gamma_1$ , а потом  $\gamma_2$ .

**Лемма.** *Индекс кривой  $\gamma_1 + \gamma_2$  равен сумме индексов кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .*

Действительно, вектор поля сделает  $n_1$  оборотов при обходе кривой  $\gamma_1$  и еще  $n_2$  оборотов при обходе кривой  $\gamma_2$ , итого  $n_1 + n_2$  оборотов. Лемма доказана.

Теперь разобьем  $D$  на части  $D_i$  так, чтобы внутри каждой из них было не больше одной особой точки поля (рис. 253), а на границах чтобы особых точек не было. Ориентируем кривые  $\gamma_i$ , ограничивающие эти части, как полагается ориентировать границы (рис. 253); тогда по лемме

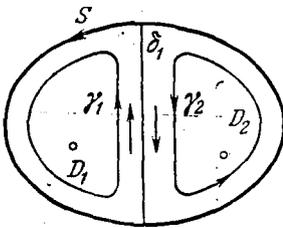


Рис. 253. Индекс кривой  $S$  равен сумме индексов кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

$$\text{ind } \sum_i \gamma_i = \text{ind } (S + \sum_j \text{ind } \delta_j),$$

где  $\delta_j$  — замкнутая кривая, представляющая часть границы области  $D_i$ , находящуюся внутри  $D$  и пройденную два раза в разные стороны.

Индекс каждой кривой  $\delta_j$  равен 0, так как эта кривая стягивается в точку, минуя особые точки поля (см. п. 8). Индекс кривой  $\gamma_i$  равен индексу той особой точки, которую эта кривая охватывает (или 0, если в области  $D_i$ , охватываемой этой кривой, особых точек нет). Теорема доказана.

**Задача 1.** Пусть  $p(z)$  — многочлен степени  $n$  от комплексного переменного  $z$ ,  $D$  — область на плоскости переменного  $z$ , ограниченная кривой  $S$ .

Предположим, что на кривой  $S$  нет корней многочлена.

Докажите, что число корней многочлена внутри  $D$  (с учетом кратностей) равно индексу кривой  $S$  в поле  $v = p(z)$ , т. е. числу оборотов вокруг 0 кривой  $p(S)$ .

**Замечание.** Мы получаем тем самым способ решения проблемы Рауса—Гурвица (см. § 23):

*Найти число  $n_-$  корней данного многочлена в левой полуплоскости.*

С этой целью рассмотрим полукруг достаточно большого радиуса в левой полуплоскости с центром в точке  $z=0$  и с диаметром на мнимой оси. Число корней в левой полуплоскости равно индексу границы  $S$  этого полукруга (если его радиус достаточно велик и у многочлена нет чисто мнимых корней). Для вычисления индекса кривой  $S$  достаточно сосчитать число  $v$  оборотов образа мнимой оси, ориентированной от  $-i$  к  $+i$ , вокруг начала координат. Действительно, легко проверить, что

$$n_- = \text{ind } S = v + \frac{n}{2},$$

так как образ полуокружности достаточно большого радиуса при отображении  $p$  делает приблизительно  $n/2$  оборотов вокруг начала координат (тем точнее  $n/2$ , чем больше радиус).

В частности, все корни многочлена степени  $n$  лежат в левой полуплоскости, если и только если точка  $p(it)$  при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  обходит начало координат  $n/2$  раз (в сторону от 1 к  $i$ ).

### 6. Сумма индексов особых точек на сфере.

**Задача\* 1.** Докажите, что индекс особой точки векторного поля на плоскости сохраняется при диффеоморфизме.

Таким образом, индекс — понятие геометрическое, не зависящее от системы координат. Это обстоятельство позволяет определить индекс особой точки не только на плоскости, но и на любом двумерном многообразии. Действительно, достаточно рассмотреть индекс особой точки на какой-нибудь карте: на других картах он будет тем же самым.

**Пример 1.** Рассмотрим сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в евклидовом трехмерном пространстве. Векторное поле скорости вращения вокруг оси  $z$  ( $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$ ,  $\dot{z} = 0$ ) имеет две особые точки: северный и южный полюсы (рис. 254). Индекс каждой из них равен  $+1$ .

Предположим, что на сфере дано векторное поле, имеющее лишь изолированные особые точки. Тогда их конечное число, так как сфера компактна.

**Теорема\*.** Сумма индексов всех особых точек поля на сфере не зависит от выбора поля.

Из предыдущего примера видно, что эта сумма равна 2.

**Идея доказательства.** Рассмотрим карту сферы, покрывающую ее всю, кроме одной точки, которую мы назовем полюсом. В евклидовой плоскости этой карты рассмотрим координатное векторное поле  $e_1$ . Перенесем это поле на сферу. Тогда получим поле на сфере (не определенное в одном лишь полюсе), которое мы по-прежнему будем обозначать через  $e_1$ .

Рассмотрим теперь карту окрестности полюса. На плоскости этой карты мы также можем нарисовать векторное поле на сфере  $e_1$ , не определенное лишь в одной точке  $O$ . Как оно будет выглядеть, показано на рис. 255.

**Лемма.** Индекс замкнутой кривой, обходящей один раз точку  $O$  в построенном поле на плоскости, равен 2.

Для доказательства леммы достаточно явно проделать описанные выше операции, взяв в качестве двух карт, например,

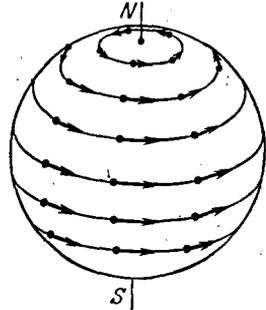


Рис. 254. Векторное поле на сфере, имеющее две особые точки индекса 1.

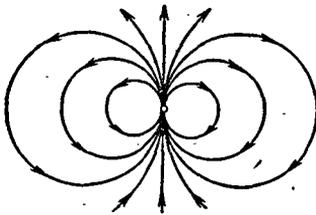


Рис. 255. Векторное поле  $e_1$ , параллельное на одной карте сферы, но нарисованное на другой.

карты сферы в стереографической проекции (рис. 222). Параллельные прямые первой карты перейдут на второй в окружности рис. 255, из которого ясно, что индекс равен 2.

Рассмотрим теперь векторное поле  $\nu$  на сфере. Выберем за полюс неособую точку поля. Тогда все особые точки поля изображаются на карте дополнения к полюсу. Сумма индексов всех особых точек поля равна индексу окружности достаточно большого радиуса на плоскости этой карты (по теореме п. 5). Перенесем эту окружность на сферу, а со сферы на карту окрестности полюса. На этой карте индекс полученной окружности в исследуемом поле равен 0, так как полюс — неособая точка поля. Оставаясь на этой новой карте, мы можем истолковать индекс окружности на первой карте как «число оборотов поля  $\nu$  относительно поля  $e_1$ » при обходе окружности.

Это число равно  $+2$ , так как на новой карте при обходе по окружности вокруг точки  $O$  в положительную для первой карты сторону изображенное на новой карте поле  $e_1$  совершает  $-2$  оборота, а поле  $\nu$  — 0 оборотов.

**Задача\* 2.** Пусть  $f: S^2 \rightarrow R^1$  — гладкая функция на сфере, все критические точки которой просты (т. е. второй дифференциал в каждой критической точке невырожден). Докажите, что

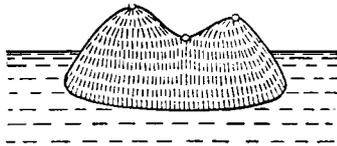


Рис. 256. На каждом острове сумма числа вершин с числом котловин на 1 больше числа перевалов.

Иными словами, если от числа минимумов отнять число седел и прибавить число максимумов, то всегда получится 2.

$$m_0 - m_1 + m_2 = 2,$$

где  $m_i$  — число критических точек, у которых отрицательный индекс инерции второго дифференциала равен  $i$ .

Иными словами, если от числа минимумов отнять число седел и прибавить число максимумов, то всегда получится 2.

Например, число всех горных вершин на Земле плюс число всех котловин на 2 больше, чем число перевалов. Если ограни-

читься одним островом или материком, т. е. рассматривать функции на круге без критических точек на краю, то  $m_0 - m_1 + m_2 = 1$  (рис. 256).

**Указание.** Рассмотрите градиент функции  $f$ .

**Задача\* 3.** Докажите теорему Эйлера о многогранниках:

Для всякого выпуклого ограниченного многогранника с  $\alpha_0$  вершинами,  $\alpha_1$  ребрами и  $\alpha_2$  гранями

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

**Указание.** Эту задачу можно свести к предыдущей.

**Задача\* 4.** Докажите, что сумма индексов  $\chi$  особых точек векторного поля на любом двумерном компактном многообразии не зависит от поля.

Полученное таким образом число  $\chi$  называется эйлеровой характеристикой многообразия. Например, выше мы видели, что эйлерова характеристика сферы  $\chi(S^2)$  равна 2.

**Задача 5.** Найдите эйлерову характеристику тора, кренделя и сферы с  $n$  ручками (рис. 232).

**Ответ:** 0,  $-2$ ,  $2-2n$ .

**Задача\* 6.** Перенесите результаты задач 2, 3 со сферы на любое двумерное компактное многообразие  $M$ :

$$m_0 - m_1 + m_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(M).$$

7. Обоснование. Дадим теперь точное определение числа оборотов векторного поля.

Пусть  $v$  — гладкое векторное поле, заданное в области  $U$  плоскости с координатами  $(x_1, x_2)$  своими компонентами  $v_1(x_1, x_2)$ ,  $v_2(x_1, x_2)$ . Система координат  $(x_1, x_2)$  задает на плоскости ориентацию и евклидову структуру.

Выкинем из области  $U$  особые точки поля и обозначим оставшуюся область через  $U'$ . Зададим отображение области  $U'$  на окружность формулой

$$f: U' \rightarrow S^1, \quad f(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}.$$

Это отображение гладкое (так как мы исключили особые точки поля). Рассмотрим какую-нибудь точку  $x$  области  $U'$ . На окружности в окрестности образа  $f(x)$  точки  $x$  можно ввести угловую координату  $\varphi$ . Мы получаем тогда определенную в окрестности точки  $x$  гладкую вещественную функцию  $\varphi(x_1, x_2)$ .

Сосчитаем ее полный дифференциал. Имеем при  $v_1 \neq 0$

$$d\varphi = d \operatorname{arctg} \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2 dv_1 - v_1 dv_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (1)$$

Левая часть равна правой и при  $v_1 = 0$ ,  $v_2 \neq 0$ . Итак, хотя сама функция  $\varphi$  определена только локально и только с точностью до прибавления кратного  $2\pi$ , ее дифференциал есть вполне определенная гладкая дифференциальная форма во всей области  $U'$ . Мы будем обозначать эту форму через  $d\varphi$ .

Определение. Индексом ориентированной замкнутой кривой  $\gamma: S^1 \rightarrow U'$  называется интеграл формы (1) по кривой  $\gamma$ , деленный на  $2\pi$ :

$$\operatorname{ind} \gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\varphi. \quad (2)$$

Теперь мы можем аккуратно доказывать приведенные выше теоремы. Докажем, например, теорему о сумме индексов (см. п. 5).

Доказательство. Пусть  $D$  — область с границей  $S$ , внутри которой данное поле  $v$  имеет конечное число особых точек.

Обозначим через  $D'$  область, полученную из  $D$  выкидыванием малых круговых окрестностей особых точек. Тогда граница  $D'$  с учетом ориентаций есть

$$\partial D' = S - \sum_i S_i,$$

где  $S_i$  — окружность, обходящая вокруг  $i$ -й особой точки в положительную сторону (рис. 257). Применим к области  $D'$  и

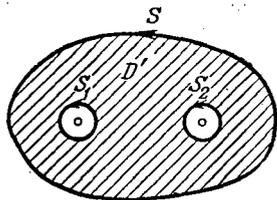


Рис. 257. Область, к которой применяется формула Грина.

интегралу (2) формулу Грина. Получим

$$\iint_D 0 = \oint_S d\varphi - \sum_i \oint_{S_i} d\varphi.$$

Слева стоит 0, так как форма (1) локально является полным дифференциалом. Ввиду определения (2) получаем  $\text{ind } S = \sum \text{ind } S_i$ , что и требовалось доказать.

Задача\* 1. Докажите, что индекс замкнутой кривой — целое число.

Задача\* 2. Провести полностью доказательства утверждений пп. 1, 2, 3, 4.

**8. Многомерный случай.** Многомерное обобщение понятия *число оборотов* называется степенью отображения.

Степень отображения — это число прообразов точки с учетом знаков, определяемых ориентациями. Например, степень отображения ориентированной окружности на ориентированную окружность, нарисованного на рис. 258, равна 2, так как число прообразов точки  $y$ , учитывая знаки, равно  $1 + 1 - 1 + 1 = 2$ .

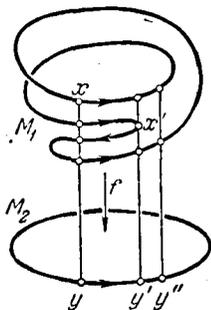


Рис. 258. Отображение степени 2.

Чтобы дать общее определение, поступаем следующим образом. Пусть  $f: M_1^n \rightarrow M_2^n$  — гладкое отображение одного  $n$ -мерного ориентированного многообразия на другое такое же. Точка  $x \in M_1^n$  многообразия-прообраза называется *регулярной точкой*, если производная отображения  $f$  в точке  $x$  есть невырожденный линейный оператор  $f_{*x}: TM_{1x}^n \rightarrow TM_{2f(x)}^n$ .

Например, точка  $x$  на рис. 258 регулярна, а точка  $x'$  нет.

Определение. Степенью отображения  $f$  в регулярной точке  $x$  называется число  $\deg_x f$ , равное  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, переводит ли  $f_{*x}$  заданную ориентацию пространства  $TM_{1x}^n$  в заданную ориентацию пространства  $TM_{2f(x)}^n$  или в противоположную.

Задача 1. Докажите, что степень линейного автоморфизма  $A: R^n \rightarrow R^n$  во всех точках одинакова и равна

$$\deg_x A = \text{sgn } \det A = (-1)^m,$$

где  $m$  — количество собственных чисел оператора  $A$  с отрицательной вещественной частью.

Задача 2. Пусть  $A: R^n \rightarrow R^n$  — линейный автоморфизм в евклидовом пространстве. Определим отображение единичной сферы на себя формулой  $f(x) = A(x)/|Ax|$ . Найдите степень отображения  $f$  в точке  $x$ .

Ответ.  $\deg_x f = \text{deg } A$ .

Задача 3. Пусть  $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  — отображение, переводящее каждую точку сферы в диаметрально противоположную. Какова его степень в точке  $x$ ?

Ответ.  $\deg_x f = (-1)^n$ .

Задача 4. Пусть  $A: C^n \rightarrow C^n$  —  $C$ -линейный автоморфизм. Найти степень его о веществления  $R_A$ .

Ответ. +1.

Рассмотрим теперь какую-нибудь точку  $y$  многообразия-образа  $M_2^*$ . Точка  $y \in M_2^*$  называется *регулярным значением отображения*  $f$ , если все точки ее полного прообраза  $f^{-1}y$  регулярны.

Например, на рис. 258 точка  $y$  является регулярным значением, а точка  $y'$  нет.

Предположим теперь дополнительно, что наши многообразия  $M_1^*$  и  $M_2^*$  компактны и связны. Тогда имеет место

**Теорема.**

1. Регулярные значения существуют.
2. Число точек прообраза регулярного значения конечно.
3. Сумма степеней отображения во всех точках прообраза регулярного значения не зависит от того, какое именно регулярное значение мы рассматриваем.

Доказательство этой теоремы довольно сложно и не будет здесь приводиться; оно имеется в учебниках топологии \*).

**Замечание 1.** В действительности регулярными значениями являются почти все точки многообразия  $M_2^*$ : нерегулярные значения образуют множество меры 0.

**Замечание 2.** Условие компактности существенно не только для второго, но и для третьего утверждения теоремы. (Рассмотрите, например, вложение отрицательной полуоси в числовую прямую.)

**Замечание 3.** Число точек прообраза (без учета знаков) для разных регулярных значений может быть разным (например, на рис. 258 у значения  $y$  их четыре, а у значения  $y'$  всего два).

**Определение.** Сумма степеней отображения  $f$  во всех точках прообраза регулярного значения называется *степенью отображения*:

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}y} \deg_x f.$$

Задача 5. Найти степень отображения окружности  $|z|=1$  на себя, заданного формулой  $f(z) = z^n$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ответ.  $n$ .

Задача 6. Найти степень отображения единичной сферы в евклидовом пространстве  $R^n$  на себя, заданного формулой  $f(z) = Az/|Az|$ , где  $A: R^n \rightarrow R^n$  — невырожденный линейный оператор.

Ответ.  $\deg f = \text{sgn det } A$ .

Задача 7. Найти степень отображения комплексной проективной прямой  $CP^1$  на себя, заданного формулой

$$a) f(z) = z^n; \quad б) f(z) = \bar{z}^n.$$

Ответ. а)  $|n|$ ; б)  $-|n|$ .

\*) См., например, Особенности дифференцируемых отображений, «Мир», 1968, стр. 38—40.

**Задача 8.** Найти степень отображения комплексной прямой  $CP^1$  на себя, заданного многочленом степени  $n$ .

*Ответ.*  $n$ .

**Задача\* 9.** Докажите, что индекс замкнутой кривой  $\gamma: S^1 \rightarrow U'$ , определенный в п. 7, совпадает со степенью следующего отображения  $h$  окружности на окружность.

Пусть  $f: U' \rightarrow S^1$  — построенное в п. 7 с помощью векторного поля  $\nu$  в области  $U'$  отображение. Положим  $h=f \circ \gamma: S^1 \rightarrow S^1$ . Тогда

$$\text{ind } \gamma = \text{deg } h.$$

**Определение.** *Индексом изолированной особой точки 0 векторного поля  $\nu$ , заданного в содержащей 0 области евклидова пространства  $R^n$ , называется степень соответствующего полю отображения  $h$  сферы малого радиуса  $r$  с центром в точке 0 на себя. Отображение*

$$h: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad S^{n-1} = \{x \in R^n: |x|=r\}$$

задается формулой

$$h(x) = \frac{r\nu(x)}{|\nu(x)|}.$$

**Задача 10.** Пусть оператор  $\nu_{*0}$  линейной части поля  $\nu$  в точке 0 невырожден. Тогда индекс особой точки 0 равен степени этого оператора.

**Задача 11.** Найти индекс особой точки 0 поля в  $R^n$ , соответствующего уравнению  $\dot{x} = -x$ .

*Ответ.*  $(-1)^n$ .

Понятие степени позволяет сформулировать многомерные аналоги рассмотренных выше двумерных теорем. Доказательства можно найти в учебниках по топологии.

В частности, *сумма индексов особых точек векторного поля на компактном многообразии любой размерности не зависит от выбора поля и определяется свойствами самого многообразия.* Это число называется *эйлеровой характеристикой* многообразия.

Чтобы вычислить эйлерову характеристику многообразия, достаточно исследовать особые точки какого-нибудь одного дифференциального уравнения, заданного на нем.

**Задача 12.** Найти эйлерову характеристику сферы  $S^n$ , проективного пространства  $RP^n$ , тора  $T^n$ .

*Ответ.*  $\chi(S^n) = 2\chi(RP^n) = 1 + (-1)^n$ ,  $\chi(T^n) = 0$ .

**Решение.** На торе любой размерности есть дифференциальное уравнение без особых точек (см., например, § 24, п. 5), поэтому  $\chi(T^n) = 0$ .

Ясно, что  $\chi(S^n) = 2\chi(RP^n)$ . Действительно, рассмотрим отображение  $p: S^n \rightarrow RP^n$ , переводящее каждую точку сферы  $S^n \subset R^{n+1}$  в прямую, соединяющую ее с началом координат. Отображение  $p$  локально диффеоморфно; при этом прообраз каждой точки проективного пространства — это две диаметрально противоположные точки сферы. Следовательно, всякое векторное поле на  $RP^n$  определит на  $S^n$  поле с вдвое большим числом особых точек, причем индексы каждой из двух противоположных особых точек на сфере будут такие же, как индекс соответствующей им точки в проективном пространстве.

Чтобы сосчитать  $\chi(S^n)$ , зададим сферу уравнением  $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$  в евклидовом пространстве  $R^{n+1}$  и рассмотрим функцию  $x_0: S^n \rightarrow R$ .

Составим дифференциальное уравнение на сфере

$$\dot{x} = \text{grad } x_0$$

и исследуем его особые точки (рис. 259). Векторное поле  $\text{grad } x_0$  обращается в 0 в двух точках: в северном полюсе  $N (x_0 = 1)$  и в южном  $S (x_0 = -1)$ .

Линеаризуя дифференциальное уравнение в окрестности северного и южного полюса соответственно, получим уравнения

$$\dot{\xi} = -\xi, \quad \xi \in R^n = TS_N^n;$$

$$\dot{\eta} = \eta, \quad \eta \in R^n = TS_S^n.$$

Следовательно, индекс северного полюса равен  $(-1)^n$ , а южного равен  $(+1)^n$ , итого

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

В частности, отсюда вытекает, что *всякое векторное поле на четномерной сфере имеет хотя одну особую точку.*

**Задача 13.** Построить на нечетномерной сфере  $S^{2n-1}$  векторное поле без особых точек.

**Указание.** Рассмотреть дифференциальное уравнение второго порядка  $\dot{x} = -x, x \in R^n$ .

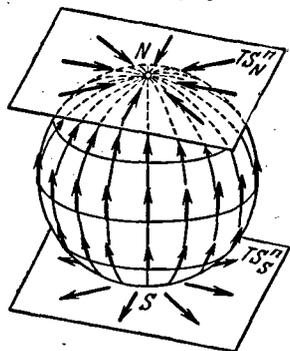


Рис. 259. Линеаризация дифференциального уравнения на сфере вблизи его особых точек.

## Программа экзамена

1. Теорема о выпрямлении векторного поля (§ 6; § 7, п. 1; § 8, п. 1) и ее доказательство (§ 32, п. 5).

2. Теоремы о существовании, единственности и дифференцируемости (§ 7, п. п. 3—6 и § 31, п. п. 1—8; § 32, п. п. 1—4). Сжатые отображения (§ 30).

3. Теорема о продолжении (§ 7, п. 7) и теорема о том, что векторное поле на компактном многообразии задает фазовый поток (§ 35, п. п. 1—3).

4. Фазовые кривые автономной системы. Теорема о замкнутых фазовых кривых (§ 10).

5. Производная по направлению векторного поля и первые интегралы (§ 11, § 12).

6. Экспонента линейного оператора. Экспонента комплексного числа и экспонента жордановой клетки (§ 14; § 15, п. п. 4, 5; § 25, п. 1).

7. Теоремы о связи фазовых потоков линейных уравнений, однопараметрических групп линейных преобразований и экспонент (§ 3, п. п. 1—3; § 13, п. п. 1—3; § 15, п. п. 1—3).

8. Связь определителя, экспоненты и следа. Теорема Лиувилля об определителе Вронского (§ 16; § 18, п. 4; § 27, п. 6).

9. Классификация особых точек линейных систем на плоскости (§ 4, п. п. 2, 3; § 16, п. 4; § 17, п. 2; § 19, п. 4; § 20, п. п. 3—5).

10. Решение линейных однородных автономных систем в комплексной и вещественной области в случае простых корней характеристического уравнения (§ 17, п. 1; § 18, п. 5; § 19; § 20).

11. Решение линейных однородных автономных уравнений и систем в случае кратных корней характеристического уравнения (§ 25).

12. Решение линейных неоднородных автономных уравнений с правой частью в виде суммы квазимногочленов (§ 26).

13. Линейные однородные неавтономные уравнения и системы. Определитель Вронского. Случай периодических коэффициентов (§ 27 и § 28, п. 1).

14. Решение линейных неоднородных уравнений с помощью вариации постоянных (§ 29).

15. Теорема об устойчивости по линейному приближению (§ 22, п. п. 3—5; § 23).

16. Фазовые кривые линейного уравнения с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Малые колебания консервативных систем (§ 24 и § 25, п. 6).

## Образцы экзаменационных задач \*)

1. Для остановки речных судов у пристани с них сбрасывают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает 3 витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен  $1/3$  и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой  $10 \text{ кг}$ ?

2. Нарисовать на поверхности цилиндра фазовые кривые маятника, на который действует постоянный крутящий момент:

$$\ddot{x} = 1 + 2 \sin x.$$

Какие движения маятника отвечают кривым разных типов?

3. Вычислить матрицу  $e^{At}$ , где  $A$  — данная матрица второго или третьего порядка.

4. Нарисовать образ квадрата  $|x_i| \leq 1$  при преобразовании фазового потока системы

$$\dot{x}_1 = 2x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

за время  $t = 1$ .

5. Сколькими десятичными знаками записывается сотый член последовательности  $1, 1, 6, 12, 29, 59, \dots$  ( $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + n$ ,  $x_1 = x_2 = 1$ )?

6. Нарисовать фазовую кривую системы

$$\dot{x} = x - y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = 3x + z,$$

проходящую через точку  $(1, 0, 0)$ .

7. Найти все  $\alpha, \beta, \gamma$ , при которых 3 функции  $\sin \alpha t, \sin \beta t, \sin \gamma t$  линейно зависимы.

8. Нарисовать на плоскости  $(x_1, x_2)$  траекторию точки, совершающей малые колебания:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad U = \frac{1}{2} (5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2).$$

Начальные условия:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0.$$

9. На первоначально покоившийся математический маятник длины  $1 \text{ м}$  и весом  $1 \text{ кг}$  в течение  $1 \text{ сек}$  действовала горизонтальная сила  $100 \text{ Г}$ . Найти амплитуду колебаний, которые установятся после прекращения действия силы (в см).

\*) Во всех числовых задачах допускается ошибка в  $10-20\%$  ответа.

10. Исследовать, устойчиво ли по Ляпунову нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1, \end{cases} \quad \omega(t) = \begin{cases} 0,4 & \text{при } 2k\pi \leq t < (2k+1)\pi, \\ 0,6 & \text{при } (2k-1)\pi \leq t < 2k\pi, \end{cases} \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

11. Найти все особые точки системы

$$\dot{x} = xy + 12, \quad \dot{y} = x^2 + y^2 - 25.$$

Исследовать их устойчивость, определить типы особых точек и нарисовать фазовые кривые.

12. Найти все особые точки системы на торе  $\{(x, y) \bmod 2\pi\}$

$$\dot{x} = -\sin y, \quad \dot{y} = \sin x + \sin y.$$

Исследовать их устойчивость, определить типы особых точек и нарисовать фазовые кривые.

13. Из эксперимента известно, что при преломлении света на границе раздела двух сред синусы углов, образованных падающим и преломленным лучами с нормалью к поверхности раздела, обратно пропорциональны показателям преломления сред:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Найти форму световых лучей на плоскости  $(x, y)$  с показателем преломления  $n = n(y)$ . Рассмотреть случай  $n(y) = \frac{1}{y}$  (в полуплоскости  $y > 0$  с таким показателем преломления реализуется геометрия Лобачевского).

14. Нарисовать лучи, выходящие по различным направлениям из начала координат на плоскости с показателем преломления  $y^2 - y^2 + 1$ .

Решение этой задачи объясняет явление миража. Показатель преломления воздуха над пустыней имеет максимум на некоторой высоте, так как в более высоких и в более низких (горячих) слоях воздух более разрежен, а показатель преломления обратно пропорционален скорости. Колебания луча вблизи слоя с максимальным значением показателя преломления и воспринимаются как мираж.

Другое явление, объясняемое теми же колебаниями луча, — звуковой канал в океане, по которому звук распространяется на сотни километров. Причина этого явления — игра температуры и давления, приводящая к образованию слоя с максимальным показателем преломления (т. е. минимальной скоростью звука) на глубине 500—1000 м. Звуковой канал можно использовать, например, для предупреждения о цунами.

15. Нарисовать геодезические на торе, пользуясь теоремой Клеро: произведение расстояния до оси вращения на синус угла геодезической с меридианом вдоль каждой геодезической на поверхности вращения постоянно.

## Предметный указатель

Автоколебания 84  
Адамара лемма 78  
Алгебра дифференциальная 33  
— Ли 69  
Амплитуда комплексная 162  
Атлас 205  
Атласы эквивалентные 206

База расслоения 214  
Базис собственный 93  
Бесселя уравнение 170  
Биения 163

Вандермонда определитель 172  
Ван-дер-Поля уравнение 85  
Вариация постоянных 183  
Вейерштрасса признак 91  
Вектор касательный 36, 213  
— скорости 36  
Вронского определитель 170 и д.

Гамильтона канонические уравнения 59, 71  
Гипергеометрическое уравнение 171  
Гипотеза Пуанкаре 211  
График отображения 11  
Группа однопараметрическая диффеоморфизмов 12  
— — преобразований 10  
— — — линейных 23

Детерминированность 7  
Дивергенция 175  
Дирихле принцип ящиков 145  
Диффеоморфизм 12  
Дифференцирование 69  
— функций 67  
Дифференцируемость 8, 23

Закон сохранения энергии 74  
— эволюции локальный 14  
Замена переменных 34  
Значение критическое функции 75  
— регулярное отображения 231

Инвариантность линеаризации 87  
Индекс кривой 222, 229  
— особой точки 225, 232  
Интеграл первый 70  
— —, зависящий от времени 72  
— — локальный 71  
Интегрирование дифференциальных уравнений 33

Касание кривых 35, 36  
Квазиногодчен 94, 156  
Классификация дифференцируемая 128  
— линейная 129  
— топологическая 129, 137  
Клеро уравнение 63  
Колебания главные (собственные) 155  
— малые 154  
— слабо нелинейные 165  
Коммутатор 69  
Компактность 208  
Комплексификация вещественного линейного уравнения 116  
— — оператора 109  
— — пространства 109  
Конечномерность 7  
Коши последовательность 90  
Кривая 110  
— — интегральная потока 11  
— — уравнения 17, 32  
— Лиссажу 156  
— параметризованная 211  
— фазовая 10  
— — дифференциального уравнения 16  
— — замкнутая 65

Лемма Адамара 78  
— Морса 78  
Линеаризация 86  
Линии уровня энергии 75  
— — — критические 82  
— — — некритические 80  
Липшица условие 189  
Лиссажу кривая 156  
Лиувилля теорема 173, 175  
— формула 104  
Ломаная Эйлера 100  
Ляпунова функция 131

Матрица системы 88  
— Якоби 38  
Матье уравнение 171, 179  
Маятник 15, 34, 43, 48, 57, 74, 162, 182  
Метод ломаных Эйлера 99  
— малого параметра 60  
Метрика 90  
Милнора сфера 211  
Многообразие 204  
— дифференцируемое 204  
— — конечномерное 11  
— — ориентированное 206  
— параллелизованное 215  
— связанное 209  
Многодчен Чебышева 156  
Морса лемма 78

- Норма 89  
 Ньютона — Лейбница формула 18
- Овеществление комплексного пространства** 108  
 — оператора 108  
**Оператор диагональный** 93  
 — комплексно сопряженный 110  
 — линейный однородный дифференциальный первого порядка 69  
 — нильпотентный 93  
 — производящий 97  
**Определитель Вандермонда** 172  
 — Вронского 170 и д.  
 — матрицы 101  
 — оператора 101  
**Отклонение падающего тела от вертикали** 62  
**Отображение** 10, 23  
 — дифференцируемое 12  
 — многообразия 209  
 — касательное 216  
 — Пикара 187  
 — сжатое 185, 192  
 Оценка априорная 79
- Падение вертикальное** 15  
 —, отклонение от вертикали 62  
**Параллелизуемость** 215  
**Период полураспада** 20  
**Пикара отображение** 187  
**Плоскость вещественная** 109  
 — мнимая 109  
**Поворот эллиптический** 120  
**Подмногообразие** 211  
**Подмножество многообразия компактное** 208  
 — — открытое 208  
**Подобие** 127  
**Поле векторное** 13, 216  
 — — линейризованное 86  
 — направлений 17  
**Положение равновесия** 17  
 — — устойчивое асимптотически 139  
 — — по Ляпунову 138  
**Последовательность Коши** 90  
**Поток фазовый, заданный векторным полем** 218  
 — — локальный 49  
 — —, соответствующий уравнению 23  
**Потоки эквивалентные дифференцируемо** 127  
 — — линейно 127  
 — — топологически 127  
**Признак Вейерштрасса** 91  
**Принцип ящиков Дирихле** 145  
**Проблема Рауса — Гурвица** 142, 226  
**Продолжение решения** 51  
 — — уравнения Ньютона 78  
**Произведение прямое дифференциальных уравнений** 27  
 — — множеств 11  
**Производная кривой** 111  
 — отображения в точке 38  
 — функции по направлению вектора 67  
 — — векторного поля 68  
**Пространство касательное** 34, 36, 213  
 — метрическое 90  
 — нормированное 91  
 — фазовое 7, 9, 10  
 — расширенное 11, 16, 17  
 — цилиндрическое 83  
**Процесс детерминированный** 7  
 — дифференцируемый 8  
 — конечномерный 7  
 Пуассона скобки 69
- Равновесие устойчивое по Ляпунову** 138  
**Размерность многообразия** 209  
**Распад радиоактивный** 14, 20  
**Расслоение касательное** 212, 214  
**Рауса — Гурвица проблема** 142, 226  
**Резонанс** 163  
 — параметрический 180  
**Решение уравнения** 16  
 — — линейного общее 124  
 — — стационарное 17
- Связность многообразия** 209  
**Седло** 28, 137  
**Сепаратриса** 77  
**Система гамильтонова** 178  
 — дифференциальных уравнений 59, 62  
 — — — нормальная 62  
 — консервативная с одной степенью свободы 73  
**Система координат допустимая** 35  
 — неавтономная 32  
**Скобки Пуассона** 69  
**Скорость фазовая** 13  
**След матрицы** 102  
 — оператора 102  
**Слой расслоения** 214  
**Сопряженность** 127  
**Спираль логарифмическая** 114  
**Степень отображения** 231  
 — — в регулярной точке 230  
**Структура дифференцируемая** 36  
 — многообразия 205  
 — — дифференцируемого 206  
**Сфера Милнора** 211
- Тейлора формула для многочленов** 93  
**Теорема дифференцируемости для неавтономного случая** 54  
 — — для уравнения  $n$ -го порядка 59  
 — единственности для неавтономного случая 54  
 — — для уравнения  $n$ -го порядка 58  
 — — локальная 49  
 — Лиувилля 173, 175  
 — о выпрямлении 198  
 — о еж 215  
 — о зависимости от параметра для неавтономного случая 55  
 — о непрерывной зависимости и дифференцируемости по параметру 49  
 — о продолжении 51  
 — — для неавтономного случая 56  
 — — для уравнения  $n$ -го порядка 59  
 — о ранге матрицы 198  
 — о сжатых отображениях 185  
 — о сумме индексов 225  
 — об обратной функции 40  
 — об устойчивости по первому приближению 139  
 — основная (о выпрямлении) 47, 48  
 — — для неавтономного случая 54  
 — сравнения 21  
 — существования 49  
 — — для неавтономного случая 54  
 — — для уравнения  $n$ -го порядка 59  
**Тождество Якоби** 69  
**Тор двумерный** 143  
**Точка критическая функции** 75  
 — неподвижная 11  
 — особая векторного поля 13  
 — регулярная 230  
 — фазовая 9, 10
- Узел 28  
 Уравнение в вариациях 60, 195

- Уравнение Вая-дер-Поля 85  
 —, заданное векторным полем 16  
 — Клеро 63  
 — комплексифицированное 116  
 — линейное 86 и д., 88  
 — с переменными коэффициентами 167  
 — с переменными коэффициентами 31  
 — неавтономное 29  
 — с разделяющимися переменными 30  
 Уравнения канонические Гамильтона 59, 71  
 Ус седла входящий 137  
 — — выходящий 137  
 Условие Липшица 189  
 — начальное 17  
 Устойчивость положения равновесия асимптотическая 139  
 — — — по Ляпунову 138
- Фокус неустойчивый 114  
 — устойчивый 114  
 Формула Лиувилля 104  
 — Ньютона — Лейбница 18  
 — Тейлора для многочленов 93  
 — Эйлера 98  
 Функторы 109  
 Функции линейно независимые 156  
 Функция дифференцируемая 12  
 — Ляпунова 131  
 — обратная 40  
 — показательная 89
- Характеристика эйлёрова 232
- Центр 120  
 Цикл предельный 45, 66  
 — — неустойчивый 85  
 — — устойчивый 85
- Частоты собственные 155  
 Чебышева многочлен 156  
 Число оборотов векторного поля 229
- Эйлера ломаная 100  
 — формула 98  
 Эйлера характеристика 232  
 Эквивалентность дифференцируемая 127  
 — линейная 127  
 — топологическая 127  
 Экспонента комплексного числа 99  
 — оператора 92  
 — — диагонального 93  
 — — нильпотентного 93  
 Энергия кинетическая 73  
 — полная механическая 73, 74  
 — потенциальная 73
- Якоби матрица 39  
 — тождество 69

*Владимир Игоревич Арнольд*

Обыкновенные дифференциальные уравнения

М., 1975 г., 240 стр. с илл.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Т. С. Плетнева, Т. А. Панькова*

---

Печать с матриц. Подписано к печати 27.02.75  
Бумага тип. № 3, 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 15.  
Условн. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 15,28. Заказ 567.  
Тираж 30 000 экз. Цена книги 67 коп.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 193352, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 29, с матриц ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» им. А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.