

Д. В. КОЛОТКИН

**Методы
теории вероятностей
и теории надежности
в расчетах
сооружений**



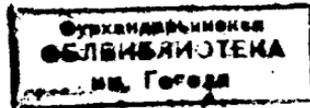
38.1
54

В. В. БОЛОТИН
чл.-корр. АН СССР

Методы
теории вероятностей
и теории надежности
в расчетах сооружений

*Издание второе,
переработанное и дополненное*

369041
140692



Москва
Стройиздат
1982

Печатается по решению секции литературы по строительной физике и конструкциям редакционного совета Стройиздата.

Рецензент проф. д-р техн. наук О. В. Лужин

Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Стройиздат, 1981. — 351 с.

Книга посвящена систематическому изложению новых разделов строительной механики — статистической динамики и теории надежности конструкций. Излагаются методы расчета конструкций на действие статических и динамических нагрузок случайного характера. Излагается теория надежности, основанная на интерпретации отказа как случайного выброса из допустимой области в пространстве качества. Даются методы оценки надежности для многомерных евклидовых и функциональных пространств качества. Методы теории надежности применяются для обоснования нормативных расчетов конструкций и сооружений. Изложение иллюстрируется примерами из строительной механики.

Книга рассчитана на работников научно-исследовательских и проектных организаций в области строительства, машиностроения, авиации и других областей техники, а также на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по расчету и испытанию различных конструкций.

Ил. 103, список лит.: 119 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 29 июля 1978 г. обращает особое внимание на меры по повышению эффективности научно-исследовательских работ в области строительства и ускорению внедрения результатов научно-исследовательских работ в практику строительства. Главным направлением для практического внедрения результатов строительной механики — совершенствование методов расчета и проектирования конструкций и сооружений, снижение их материалоемкости и стоимости при одновременном обеспечении надежности и долговечности. Теоретической основой этого направления служит раздел строительной механики — теория надежности конструкций. Основы этой теории были изложены в книге автора «Статистические методы в строительной механике», вышедшей двумя изданиями в 1961 и 1965 гг. Более систематизированное изложение теории надежности конструкций было дано в книге автора «Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений» (1971 г.). Настоящая книга представляет собой существенно переработанное и дополненное второе издание этой книги.

Книга состоит из четырех глав. Гл. 1 посвящена методам статистической динамики и их применению к системам с конечным и бесконечным числом степеней свободы. В гл. 2 дается применение этих методов к задачам строительной механики. В гл. 3 излагается теория надежности конструкций. При этом отказы конструкций трактуются как выбросы некоторых случайных векторов из допустимых областей в пространстве качества. Излагаются методы оценки показателей надежности и долговечности конструкций. В результате переработки глава существенно расширена (главным образом разделами, в которых дается развитие теории надежности конструкций, трактующихся как распределенные системы). Гл. 4 посвящена приложениям теории надежности конструкций к обоснованию нормативных методов расчета; рассматриваются вопросы назначения расчетных нагрузок, расчетных сопротивлений и нормативных показателей надежности, а также проблема оптимального проектирования конструкций с учетом соображений надежности.

Книга написана по материалам лекций, которые автор читал в течение ряда лет студентам старших курсов и аспирантам Московского ордена Ленина энергетического института. Основные результаты книги докладывались на Всесоюзных конференциях по проблемам надежности в строительной механике, которые проводились каждые три-четыре года начиная с 1965 г.

При подготовке настоящего издания автору оказали помощь В. П. Чирков, В. П. Радин, Н. Н. Добромислов, В. Л. Васенин, которым автор выражает глубокую благодарность.

этому правильное решение проблемы надежности и долговечности конструкции возможно лишь с привлечением теории случайных функций. Согласно второй идее, за основной показатель надежности принимаем вероятность пребывания параметров системы в некоторой допустимой области, нарушение нормальной эксплуатации интерпретируется при этом как выход из этой области. Третья идея состоит в признании того, что выход конструкции из строя, как правило, является следствием постепенного накопления повреждений: остаточных деформаций, износа и т. п. Эти повреждения, достигнув определенной величины, начинают препятствовать нормальной эксплуатации конструкции. Таким образом, свойственная ранним работам элементарная трактовка показателя надежности как вероятности выполнения некоторого неравенства, связывающего случайные величины, уступает место более углубленной и более адекватной трактовке на основе теории случайных функций.

Такой подход к надежности конструкций был предложен автором в первом издании книги [17]. Дальнейшее развитие теории дано в докладе на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [22], а также в более поздних работах [24, 25, 28]. Третья глава этой книги целиком посвящена теории надежности конструкций, излагаемой с единой точки зрения.

В последние годы широко развернулись работы по обоснованию и совершенствованию нормативных расчетов с использованием понятий и методов теории надежности. Эти работы ведутся и в строительстве [30, 70, 82, 106, 109, 110], и в других областях техники [50, 55, 62, 84, 112]. Некоторые основные результаты нашли отражение в последней главе этой книги.

Вопросы статистической динамики конструкций также получили широкое развитие в последние годы. К ним в первую очередь относятся исследования по колебаниям упругих систем, находящихся под действием случайных сил: случайных порывов в атмосфере, пульсаций давления в турбулентном пограничном слое, пульсаций акустического давления вблизи работающего двигателя и т. п. Аналогичные задачи возникают в связи с расчетом высотных сооружений на действие ветра. Работы зарубежных авторов по этой тематике представлены, в частности, в сборнике [94]. Другая группа работ связана с расчетом судовых и ограждающих конструкций на действие нерегулярного волнового давления. Некоторые из этих работ отражены в книге В. В. Екимова [47]. Весьма важной для строительной практики является разработка теории сейсмостойкости и ударостойкости сооружений, учитывающей случайный характер нагрузок [11, 41, 85].

Ряд работ посвящен изучению влияния случайных начальных неправильностей срединной поверхности на поведение пластин и оболочек при статических и динамических нагрузках. Одна из целей этих работ состояла в истолковании расхождений между результатами испытаний оболочек на устойчивость и теоретическими данными. Высокая чувствительность критических усилий к начальным несовершенствам, с одной стороны, и случайный характер этих несовершенств — с другой, приводят к большому разбросу критических усилий, для описания которого необходимо привлекать методы теории вероятностей и математической статистики. Общая характеристика этого направления и библиографический обзор даны в книге [17] и статьях [9, 56—58].

Все эти вопросы принадлежат к широкому классу задач статистической динамики, в которых случайный элемент вносится разбросом геометрических и физических свойств самой конструкции (а не случайным характером внешних воздействий). В качестве дополнительных примеров можно указать задачу о влиянии случайного микрорельефа и случайных включений на концентрацию напряжений, на задачу о деформировании конструкций, лежащих на упругом основании со случайными свойствами, и т. п. К тому же классу принадлежат в сущности и задачи теории микронеоднородных сред: поликристаллов, стохастически армированных материалов и т. д. Назначение этой теории — предсказание поведения микронеоднородных сред на основании известных свойств композитов из известных законов их вероятностного распределения. Теория микронеоднородных сред является составной частью физических основ теории упругости и пластичности, а к строительной механике имеет косвенное отношение. Однако в методологическом отношении она тесно связана со статистической динамикой и может рассматриваться как один из ее разделов.

Во многих публикациях упругие системы заменялись эквивалентными в некотором смысле системами с конечным числом степеней свободы, а нередко — системами с одной степенью свободы. Затем применялся математический аппарат из родственных областей: статистической теории автоматического управления, статистической теории связи и т. п. Подобные исследования носили обычно лишь качественный, методический характер. Реальные конструкции представляют собой системы с бесконечным числом степеней свободы. Для описания их случайного поведения нужно ставить и решать стохастические краевые задачи. К настоящему времени теория стохастических краевых задач недостаточно разработана, хотя и есть некоторые эффективные методы решения. Обзор этих методов с примерами применения к стохастическим задачам теории пластин и оболочек был дан в статье [20]. В книге [17] при изложении вопросов статистической динамики преобладал подход, основанный на приведении конструкций к системам с конечным числом степеней свободы. В этой книге конструкции трактуются как распределенные системы; при этом приведение к дискретным системам трактуется как один из приближенных методов решения стохастических краевых задач.

В заключение кратко остановимся на возражениях, которые выдвигали в прошлом, да и сейчас продолжают выдвигать противники статистических методов. Эти возражения, в сущности, сводятся к двум основным. Первое из них — сомнение в возможности получения опытных данных в количестве, достаточном для последующей их обработки методами теории вероятностей. Такое сомнение, обоснованное, может быть, в прошлом, в настоящее время уже не должно приниматься во внимание. Развитие автоматики и измерительной техники, обеспечивающей автоматическую регистрацию и даже планирование самого эксперимента, и широкое внедрение электронных вычислительных машин, позволяющих весьма быстро статистически обрабатывать большие объемы информации, — все это снимает не только принципиальные, но и технические трудности. Для расчетов на основе статистических методов нужна не любая информация, а лишь информация, научно организованная и приспособленная для ее последующей обработки методами статистической динамики и теории надежности. Чтобы научиться получать такую информацию,

Глава 1
ЗАДАЧИ
И МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

§ 1.1. Основные понятия¹

Предметом статистической динамики является изучение поведения механических, электрических, радиотехнических, биологических и тому подобных систем при случайных внешних воздействиях и (или) случайном изменении свойств системы. Представляется возможным развить общую теорию поведения таких систем, не прибегая к конкретизации их природы и свойств. При этом на первый план выходят такие вопросы, как формулировка основных задач и методы их решения. Этот путь позволяет придать более общую форму многим результатам, полученным в статистической теории связи, теории систем автоматического управления и других областях прикладной математики. Эта книга посвящена исключительно конструкциям, т. е. механическим системам. Тем не менее при изложении статистической динамики механических систем все же предпочтительнее общая точка зрения. Дело в том, что механические системы отличаются большим разнообразием как структуры, так и свойств. Например, мы встречаем здесь системы с конечным числом степеней свободы, одномерные, двухмерные и трехмерные распределенные системы. В настоящей главе осуществлена попытка изложить постановку задач статистической динамики и методы их решения в возможно более общей форме. Однако общие соображения проиллюстрированы исключительно на примерах из строительной механики.

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся во взаимодействии с окружающей средой. Для простоты вначале предположим, что как свойства системы, так и ее взаимодействие со средой являются чисто детерминистическими. Пусть внешнее воздействие характеризуется элементами q из пространства Q , а поведение системы — элементами u из пространства U . Математическая природа элементов обоих пространств, вообще говоря, про-

¹ Параграфы имеют двойную нумерацию, причем первая цифра обозначает номер главы. В пределах каждой главы для формул принята сплошная нумерация; номер главы указывается лишь в ссылках на формулы из других глав.

извольна. Это могут быть числа, векторы, тензоры, функции одной или нескольких переменных и т. п. Структура и свойства системы характеризуются оператором H , посредством которого каждой реализации внешнего воздействия $q \in Q$ приводится в соответствие реализация поведения $u \in U$. Таким образом,

$$u = Hq. \quad (1)$$

Примером такой системы может служить любая упругая система, нагруженная внешними силами. Роль воздействия играют внешние силы, роль параметров поведения системы — перемещения, напряжения и деформации. Оператор H задается уравнениями строительной механики, а также соответствующими начальными и граничными условиями. Помимо силовых воздействий могут встретиться тепловые, химические, электрические и тому подобные воздействия.

В статистической динамике радиотехнических систем и систем автоматики внешние воздействия часто называются входными параметрами (переменными, процессами), а параметры поведения системы — выходными параметрами (переменными, процессами). Эту терминологию полезно сохранить и при более общем изложении. Таким образом, операторное соотношение (1) устанавливает связь между элементами q пространства входных параметров Q и элементами u пространства выходных параметров U . Указанная связь иллюстрируется простейшей блок-схемой (рис. 1).

Необходимо отметить, что выбор пространств Q и U и, следовательно, оператора H не является единственным. Это порождается многими причинами. Одна из причин заключается в том, что понятия системы и окружающей среды являются в значительной степени условными. Это вызвано не только неоднозначностью при выборе схематизации системы. Даже при заданном уровне схематизации одни и те же факторы могут быть отнесены как к самой системе, так и к окружающей среде. В зависимости от того, где проходит граница между окружающей средой и системой, будет меняться содержание операторного соотношения (1).

Поясним сказанное на примере из строительной механики (рис. 2). Рассмотрим упругий прямолинейный призматический стержень длиной l , нагруженный осевой силой P и распределенной поперечной нагрузкой,

интенсивность которой равна q . Эти силы, вообще говоря, являются функциями времени. Поведение стержня описывается функцией $w(x, t)$ координаты x и времени t ,

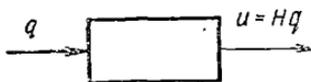


Рис. 1

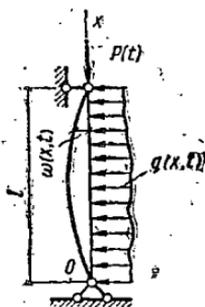


Рис. 2

равной поперечным смещениям точек, которые лежат на оси стержня. При некоторых дополнительных предположениях функция $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k \frac{\partial w}{\partial t} = q. \quad (2)$$

Здесь EJ — жесткость сечения стержня при изгибе; m — масса стержня, отнесенная к единице длины; k — коэффициент вязкого трения.

Кроме того, должны быть поставлены начальные и граничные условия. Например, это могут быть условия:

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (t = 0, 0 \leq x \leq l); \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq t < \infty, x = 0, l). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (2) и условия (3) представляют собой конкретную реализацию операторного соотношения (1). По физическому смыслу взаимодействие системы с окружающей средой характеризуется силами $P(t)$ и $q(x, t)$, которые играют роль входных процессов. Выходным процессом является функция перемещений $w(x, t)$. Итак,

$$w = H[P, q]. \quad (4)$$

Если продольная сила P постоянна, то целесообразно включить ее в систему. Другими словами, целесообразно трактовать упругий стержень, нагруженный постоянной силой P , как систему, на которую действует внешняя нагрузка $q(x, t)$. При таком подходе сила P

становится параметром системы и входит в определение конкретной реализации оператора H . Воздействие, которое может быть включено в свойства системы, будем называть параметрическим (рис. 3).

Имеется еще одна важная причина, вызывающая неоднозначность операторного соотношения (1). Дело в том, что выходные параметры можно выбирать различными способами. В зависимости от этого выбора будет меняться форма оператора H . Пусть пространство U является исчерпывающим в том смысле, что при помощи

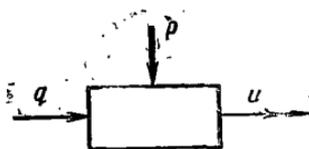


Рис. 3

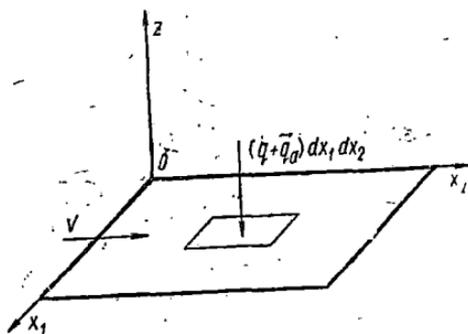


Рис. 4

его элементов можно описать любое возможное поведение системы. Очевидно, что для каждой системы, вообще говоря, существует бесконечное множество исчерпывающих пространств. Все они эквивалентны, поскольку каждое из них может нести полную информацию о поведении системы. Операторы H , соответствующие различным исчерпывающим пространствам, должны выражаться один через другой определенными соотношениями.

Пусть пространство — исчерпывающее, причем по каждому его элементу u можно восстановить соответствующий элемент $q \in Q$. При этом условии существует обратный оператор L , такой, что

$$Lu = q. \quad (5)$$

Заметим, кстати, что задачи строительной механики, теории упругости, теории колебаний и т. п. обычно ставятся именно в виде (5), т. е. в форме, не разрешенной относительно элементов пространства U . Обращение оператора L составляет одну из основных задач расчета механических систем.

Далеко не всегда целью расчета или исследования служит получение исчерпывающей информации о поведении системы. В прикладных задачах часто бывает достаточно ограничиться сведениями о значениях некоторых параметров в отдельных точках или звеньях системы. Например, при статическом расчете конструкции часто ограничиваются определением напряжений лишь в наиболее ответственных элементах, перемещений лишь в тех точках, где ожидается, что они будут максимальными, и т. д. Это вносит еще большее разнообразие в выбор пространства U и, следовательно, оператора H . Для пространств U , которые не являются исчерпывающими, операторы H , вообще говоря, не будут выражаться друг через друга, хотя и могут быть выражены через один из операторов, соответствующих исчерпывающему пространству.

Хотелось бы еще на одном примере проиллюстрировать условность отделения системы от окружающей среды. Пусть тонкая упругая пластинка, нагруженная нормальной нагрузкой интенсивностью q , совершает колебания в потоке газа (рис. 4). При определенных предположениях уравнение колебаний этой пластинки можно представить в виде

$$D\Delta\Delta w + m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k \frac{\partial w}{\partial t} = q + q_a, \quad (6)$$

где $w(x_1, x_2, t)$ — нормальное перемещение точек, лежащих на срединной поверхности пластинки; m — ее масса, отнесенная к единице площади срединной поверхности; k — коэффициент демпфирования; Δ — оператор Лапласа на плоскости переменных x_1, x_2 . Уравнение (6) должно решаться при некоторых начальных и граничных условиях, например при условиях:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (t = 0, x_1, x_2 \in \Omega);$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (0 \leq t < \infty, x_1, x_2 \in \Gamma).$$

Здесь Ω — область, занятая срединной поверхностью; Γ — контур пластинки, на котором она предполагается заземленной; $\partial w / \partial n$ — производная от перемещения по нормали к контуру. Взаимодействие пластинки с газом учитывается давлением последнего $q_a(x_1, x_2, t)$, которое входит в правую часть уравнения (6). Существенно, что давление в каждой точке, вообще говоря, является функ-

ционалом от искомого перемещения $w(x_1, x_2, t)$ на всей поверхности Ω . Однако в одном из простейших случаев, когда обтекание пластинки происходит с большой сверхзвуковой скоростью V , а вносимые ею возмущения достаточно малы, можно положить, что

$$q_a = q_\infty + \frac{\kappa q_\infty}{c_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x_1} \right).$$

Здесь κ — показатель политропы; q_∞ и c_∞ — соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке. Рассматриваемая система является типичной системой с обратной связью (рис. 5). Поскольку давление газа q_a зависит от перемещения, то целесообразно трактовать его не как входной параметр, а как оператор от поведения системы. Таким образом, мы рассматриваем невозмущенный поток газа как составную часть системы. Операторное уравнение

$$Lw = q + L_a w$$

приводится к виду (5), если принять за оператор системы $L - L_a$:

До сих пор мы полагали, что как свойства системы, так и характер внешних воздействий являются чисто детерминистическими. Предметом статистической динамики, как уже было указано, является поведение системы при случайных воздействиях и (или) при случайном изменении свойств системы.

Введенные выше понятия о пространствах входных и выходных параметров и об операторном задании системы полностью сохраняют смысл и при рассмотрении вероятностных задач. Однако

изменяется способ описания указанных параметров, а в случае стохастических систем — и способ описания системы.

Пусть входной параметр q является случайным, т. е. представляет собой случайное число, случайную функцию и т. п. Тогда каждому элементу $q \in Q$ приводится в соответствие некоторая вероятностная мера. Например, если входной параметр есть случайное число, то оно характеризуется функцией распределения (плотностью вероятности). Если входной параметр — случайный вектор, то он задается многомерным совместным распреде-

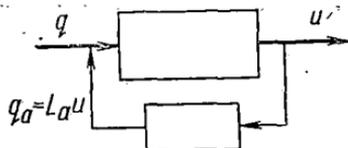


Рис. 5

лением для компонент. Случайная функция времени может быть задана, например, через полную систему совместных функций распределения ее значений в произвольно выбираемые моменты времени. Вместо полного описания путем задания меры в функциональных пространствах нередко используется частичное описание. При этом широко применяются интегралы по вероятностной мере: математические ожидания, дисперсии и другие моменты от случайных величин, моментные и корреляционные функции от случайных процессов и т. д.

На вопросе об описании стохастических систем необходимо остановиться подробно. В теории вероятностей и ее приложениях обычно используется статистическое истолкование вероятности. При этом вероятность случайного события интерпретируется как объективная мера, эквивалентная эмпирической частоте. В соответствии с законом больших чисел вероятность случайного события есть предел, к которому стремится (по вероятности) эмпирическая частота, когда число наблюдений неограниченно возрастает. В свою очередь, применение понятия эмпирической частоты предполагает, что случайное событие является массовым, т. е. что оно допускает многократное воспроизведение в статистически однородных условиях. Отсюда следует, что статистическое истолкование вероятности может быть распространено лишь на такие системы, которые осуществляются в большом числе статистически однородных, сопоставимых экземпляров. Только имея достаточно представительную совокупность систем, мы можем получить статистические оценки свойств системы. С другой стороны, только при этих условиях можно дать статистическое истолкование выводам, которые следуют из решения задач статистической динамики.

Такой подход чрезвычайно бы сузил область применения статистических методов. Выпали бы из рассмотрения не только уникальные (и часто наиболее дорогие и ответственные) системы, но и системы, изготавливаемые в относительно небольшом числе сопоставимых экземпляров. Как уже отмечалось, вероятность есть объективная мера возможности наступления события независимо от того, является оно массовым или нет. Анализ этого вопроса является не технической, а скорее философской, логической и психологической проблемой. Чтобы избежать связанных с нею затруднений, можно воспользо-

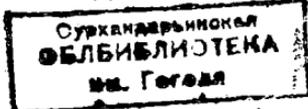
ваться понятием мыслимого ансамбля, т. е. наряду с данной системой рассматривать множество воображаемых сопоставимых систем.

Однако при этом сохраняются существенные трудности, имеющие практический характер. Для получения вероятностных характеристик системы необходимо иметь соответствующую статистическую информацию, а ее, вообще говоря, можно получить только из рассмотрения представительного ансамбля. Этот ансамбль, разумеется, должен быть реальным, а не мыслимым. Аналогичное затруднение возникает даже в том случае, когда система является массовой. В распоряжении экспериментатора очень редко находится число экземпляров, достаточное для того, чтобы делать надежные статистические выводы. К счастью, многие свойства систем обладают эргодичностью, т. е. проявляются не только в ансамбле реализаций, но и во времени и (или) в пространстве. Такие свойства можно изучать, наблюдая за поведением одного экземпляра во времени или изучая, как эти свойства меняются при переходе от одной точки к другой. Примером реализации этого подхода служит предсказание прочности крупного сооружения из бетона или железобетона на основании большого числа испытаний малых лабораторных образцов.

§ 1.2. Задачи статистической динамики. Классификация систем

Соотношения (1) и (5) устанавливают связь между реализациями входных и выходных параметров детерминистической системы. Если входные параметры и (или) параметры системы являются случайными, то возникает вопрос о связи между соответствующими вероятностными мерами или некоторыми характеристиками последних. Установление этой связи при заданной связи между реализациями, собственно, и является предметом статистической динамики. В зависимости от того, какие параметры являются заданными, а какие — искомыми, будем различать четыре типа задач статистической динамики.

Первая, основная задача состоит в нахождении характеристик выходных параметров при известных характеристиках входных параметров и параметров системы. В строительной механике этой задаче соответ-



ует прямой расчет конструкции на действие заданных сил.

Вторая задача является обратной по отношению к первой. Она состоит в нахождении характеристик входных параметров по характеристикам выходных параметров.

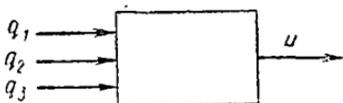


Рис. 6

Свойства системы при этом также предполагаются известными. Решение подобных задач требуется, например, при определении характеристик внешних сил по известным статистическим

данным, относящимся к перемещениям, напряжениям и другим параметрам поведения конструкции. С точки зрения операторных соотношений (1) и (5) решения прямой и обратной задач аналогичны. Однако решение обратной задачи может существенно осложниться, если имеется несколько входных воздействий (рис. 6) и если требуется по поведению системы установить статистические характеристики каждого воздействия в отдельности.

Третья задача заключается в определении свойств стохастической системы по известным характеристикам на ее входе и выходе. В самом общем случае может оказаться неизвестной сама структура системы. Изучение свойств неизвестной системы путем сопоставления ее реакций с входными воздействиями составляет так называемую «проблему черного ящика». Однако в столь общей форме задача ставится весьма редко. Обычно известна не только структура системы, но и информация о ее детерминистических свойствах. Тогда целью исследования является получение информации о стохастических свойствах системы. Один из простейших путей для решения третьей задачи состоит в изучении реакций системы на соответствующим образом выбираемые детерминистические воздействия. Задача осложняется, если внешнее воздействие сопровождается случайными помехами с неизвестными свойствами. Тогда мы имеем, по существу, объединение второй и третьей задач.

Под четвертой задачей статистической динамики мы будем понимать отыскание системы, которая при заданных внешних воздействиях обладает заданными свойствами. Примером может служить задача о синтезе оптимальной системы, т. е. системы, которая обладает на-

илучшими в некотором смысле свойствами. Обычно критерий оптимальности формулируется в виде условия максимума (или минимума) некоторых функционалов от свойств системы и ее реакций на внешние воздействия при дополнительных ограничениях, накладываемых на другие функционалы или параметры системы. Так, при оптимальном проектировании конструкции ставится требование о том, чтобы стоимость конструкции (или ее вес) была минимальна при ограничении снизу несущей способности (или надежности) конструкции.

Задачи синтеза весьма трудны, хотя и есть примеры эффективного решения некоторых классов. Укажем на теорию оптимальных линейных систем связи и управления, обеспечивающих обработку заданного сигнала при минимальной средней квадратической ошибке. При расчете механических систем задачи синтеза в столь общей форме возникают очень редко. Из технических соображений часто бывает задана не только структура системы, но и ряд ее параметров. В этих случаях задача сводится к отысканию оптимальных значений остальных параметров системы.

Часто условие оптимальности заменяется более простыми требованиями. Например, условие минимума веса конструкции заменяется более простым условием равнопрочности ее элементов. Поэтому в дальнейшем, говоря об оптимальных системах, критериях оптимальности и т. п., мы будем трактовать эти понятия в широком смысле. А именно, будем называть систему оптимальной, если она удовлетворяет заранее сформулированным условиям, при которых, по мнению проектировщика, система будет «наилучшей». Подчеркнем, что выбор критерия для оптимизации не входит в задачу статистической динамики. Этот критерий выбирается на основе экономических, технологических и тому подобных соображений и притом выбирается не единственным образом. Один из путей для выбора критерия оптимальности открывает теория надежности.

Если основная задача статистической динамики решена, то, как правило, результаты могут быть использованы для решения остальных задач. В самом деле, решение основной задачи дает соотношения между характеристиками на входе и выходе системы, а также характеристиками системы. В зависимости от того, какие характеристики по условиям задачи известны, мы

найдем из этих соотношений решения второй и третьей задач. Пусть далее поставлена четвертая задача, причем критерий оптимальности сформулирован в виде условия минимума некоторого функционала от поведения системы. Тогда решение основной задачи предоставляет необходимую информацию для решения четвертой задачи. Таким образом, целесообразно сосредоточить внимание на решении основной задачи.

Выбор метода для решения задач статистической динамики в существенной степени зависит от характера системы. Классификацию систем можно провести по различным признакам. Остановимся на некоторых из них.

В зависимости от того, как ведет себя система при одновременном приложении двух или нескольких воздействий, будем различать линейные и нелинейные системы. Система, описываемая операторным уравнением (1), называется линейной, если оператор H удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} H[\alpha q] &= \alpha Hq; \\ H[q_1 + q_2] &= Hq_1 + Hq_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь α — произвольное число; q_1 и q_2 — внешние воздействия. Если оператор H условиям (7) не удовлетворяет, то система называется нелинейной. К линейным системам применим принцип суперпозиции: реакция системы на сумму внешних воздействий может быть найдена как сумма реакций, вычисленных от каждого воздействия в отдельности.

Необходимо указать, что из линейного характера дифференциальных уравнений относительно выходного параметра еще не следует линейность оператора H . В качестве примера рассмотрим задачу, которая описывается уравнением (2) при дополнительных условиях (3). Дифференциальное уравнение (2), а также начальные и краевые условия линейны относительно функции перемещений $w(x, t)$. Соответствующий оператор H является линейным, если входным параметром служит интенсивность поперечной нагрузки $q(x, t)$, а продольная сила P трактуется как параметр системы. Если же продольная сила P относится к числу внешних параметров, то соответствующий оператор становится нелинейным: принцип суперпозиции к операторному уравнению (4) неприменим. Таким образом, система, линейная по отношению к одним воздействиям, может оказаться не-

линейной по отношению к другим воздействиям. В частности, по отношению к параметрическим воздействиям любую систему следует трактовать как нелинейную.

Другой признак для классификации получим, рассматривая поведение свойств системы во времени. Система называется стационарной, если ее свойства неизменны во времени. Оператор H для стационарных систем инвариантен относительно смещения начального момента времени. Оператор H нестационарной системы этим свойством не обладает. Отметим, что одна и та же физическая система в зависимости от уровня схематизаций может рассматриваться как стационарная или нестационарная. Как правило, расширяя систему за счет окружающей среды, мы можем добиться того, что система станет стационарной. В самом деле, самые общие уравнения механических, физических, химических и тому подобных явлений инвариантны относительно смещения начального момента времени. Неинвариантность возникает лишь из-за того, что некоторые процессы рассматривают как внешние, автономные по отношению к системе. В качестве примера рассмотрим конструкцию из бетона, в котором еще не закончился процесс временного упрочнения. Пусть ползучесть конструкции происходит при постоянных нагрузках. Поскольку свойства бетона меняются во времени, то уравнения ползучести будут явно содержать время. Дополним уравнения ползучести кинетическими уравнениями, описывающими физико-химические процессы в бетоне. Если температура бетона постоянна, то расширенная таким образом система уравнений уже не будет содержать времени явно. В случае переменной температуры следует добавить уравнение теплопроводности, учитывающее тепловыделение в бетоне, и т. д.

Можно предложить несколько классификаций систем, основанных на рассмотрении аналитических свойств оператора H . Эти свойства могут быть связаны со структурой пространств Q и U , а могут быть не связаны. Весьма целесообразно различать вырожденные и невырожденные операторы. Оператор H называется вырожденным, если пространства Q и U суть конечномерные евклидовы пространства и если соотношение между элементами этих пространств конечно.

С вырожденным оператором мы встречаемся каждый раз, когда и внешнее воздействие, и поведение

системы описываются конечным числом параметров, причем связь между этими параметрами дается формулами, не содержащими ни дифференциальных, ни интегральных операций. В инженерных расчетах вырожденные операторы встречаются весьма часто, особенно если идет речь о неполном описании поведения системы. В качестве простого примера рассмотрим балку, которая нагружена n случайными силами Q_1, Q_2, \dots, Q_n , которые прикладываются квазистатически. Предположим, что задача состоит в нахождении изгибающих моментов M_1, M_2, \dots, M_m в m сечениях балки. При известных ограничениях связь между моментами и силами дается формулой

$$M_j = \sum_{k=1}^n \eta_{jk} Q_k \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (8)$$

где η_{jk} — элементы матрицы влияния порядка $m \times n$, которые определяются известными методами. Формуле (8) соответствует операторное соотношение (1) с вырожденным оператором.

Очевидно, что вырожденным оператором будет обладать любая система с конечным числом степеней свободы, если положить временные эффекты пренебрежительно малыми. В самом деле, для этой системы мы получим конечную связь между входными и выходными параметрами. В работах по статистической динамике систем автоматического управления такие системы называют безынерционными. Этот термин неудобен в общей статистической динамике, а также в статистической динамике механических систем, где встречаются как системы с конечным числом степеней свободы, так и распределенные системы. Если в дифференциальных уравнениях движения распределенной системы опустить все члены, содержащие производные по времени, то мы получим все же невырожденную (хотя и безынерционную) систему.

Дополнительный аргумент против термина «безынерционная система» вытекает из рассмотрения следующего примера. Пусть конструкция находится под действием динамических сил, заданных с точностью до нескольких случайных параметров. Наиболее естественный способ решения основной задачи для такой системы состоит в отыскании конечных соотношений между искомыми выходными параметрами и параметрами внешних сил, которые на этом этапе полагаются детермини-

стическими. Связь между указанными параметрами характеризует некоторую вырожденную систему. Однако по существу задача остается динамической. Таким образом, понятие вырожденного оператора намного шире, чем понятие оператора для безынерционной системы с конечным числом степеней свободы.

Еще один признак для классификации дает число измерений системы. Будем различать системы с конечным числом степеней свободы (дискретные системы) и распределенные системы. Последние подразделяются на одномерные, двумерные и т. п. системы. Поведение невырожденных дискретных систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно некоторых функций времени. Поведение распределенных систем может описываться как обыкновенными дифференциальными уравнениями (в случае квазистатического воздействия на одномерные системы), так и уравнениями в частных производных. Существенным моментом в задачах, относящихся к распределенным системам, является постановка краевых условий. Говоря о задачах статистической динамики для распределенных систем, мы будем употреблять термин «стохастическая краевая задача».

§ 1.3. Метод решения задач для вырожденных систем

Пусть число входных параметров q_1, q_2, \dots, q_n конечно и пусть эти параметры являются случайными величинами с известной совместной плотностью вероятности $p_q(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Пусть, далее, поведение системы описывается конечным числом выходных параметров — случайных величин u_1, u_2, \dots, u_m . Наконец, предположим, что известна однозначная детерминистическая зависимость между указанными группами параметров:

$$u_j = U_j(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (9)$$

Система, удовлетворяющая этим условиям, является вырожденной. Нахождение распределений для выходных параметров сводится к применению известных формул теории вероятностей, дающих распределение для случайных функций от случайных величин.

Формула для функции распределения выходных параметров u_1, u_2, \dots, u_m имеет вид

$$F_u(u_1, u_2, \dots, u_m) = \int \dots \int p_q(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_1 dq_2 \dots dq_n, \quad (10)$$

где интегрирование производится по области n -мерного пространства входных параметров, для которой справедливо неравенство

$$U_j(q_1, q_2, \dots, q_n) < u_j \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Дифференцируя функцию распределения по ее аргументам, получим выражение для совместной плотности вероятности выходных параметров.

При некоторых дополнительных ограничениях нетрудно получить формулы, непосредственно связывающие плотности вероятности для входных и выходных параметров. Предположим, что $m < n$ и что соотношения (9) допускают обращение относительно m переменных q_1, q_2, \dots, q_m :

$$q_j = Q_j(u_1, u_2, \dots, u_m; q_{m+1}, \dots, q_n) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

Если Q_j — однозначные дифференцируемые функции переменных u_1, u_2, \dots, u_m , то решение основной задачи статистической динамики дается формулой

$$p_u(u_1, u_2, \dots, u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_m; q_{m+1}, \dots, q_n) \times \\ \times \left| \frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right| dq_{m+1} \dots dq_n. \quad (12)$$

Здесь использовано обозначение для якобиана преобразования:

$$\frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_m}{\partial u_1} & \frac{\partial Q_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}.$$

Пусть $m = n$ и пусть соотношения (9) взаимно однозначны. Вместо (12) получаем формулу

$$p_u(u_1, u_2, \dots, u_n) = p_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \left| \frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right|. \quad (13)$$

В простейшем случае, когда $m = n = 1$, эта формула имеет вид

$$p_u(u) = p_q[Q(u)] \left| \frac{dQ(u)}{du} \right|. \quad (14)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $m > n$. Тогда, очевидно, среди m параметров u_1, u_2, \dots, u_m будут функционально зависимыми $m - n$ параметров. Если среди m соотношений (9) можно выбрать n таких, что обратные функции

$$q_j = Q_j(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

однозначны и дифференцируемы, то для плотности вероятности выходных параметров вновь получим формулу (13).

Формулы (12) и (13) могут быть обобщены на случай, когда функции Q_1, Q_2, \dots, Q_n не являются однозначными. В этом случае область изменения аргументов следует разбить на подобласти, в пределах каждой из которых функции Q_1, Q_2, \dots, Q_n остаются однозначными. Затем следует просуммировать вклад каждой из этих подобластей в искомое распределение. Если же функции Q_1, Q_2, \dots, Q_n являются кусочно-непрерывными, то следует воспользоваться общей формулой (10). При этом плотность вероятности $p_u(u_1, u_2, \dots, u_m)$ будет обобщенной функцией, содержащей особенности типа дельта-функции.

Рассмотрим пример применения этих формул. Допустим, что некоторый стержень нагружен изгибающим моментом M_b и крутящим моментом M_t . Опасное состояние стержня достигается тогда, когда некоторая функция моментов M_b и M_t превышает предельное значение, зависящее от свойств материала и геометрии сечения стержня. Например, для стержня круглого сечения из пластического материала эта функция может быть взята в виде

$$M_r = \sqrt{M_b^2 + M_t^2}. \quad (15)$$

Здесь M_r — приведенный момент, определенный в соответствии с критерием текучести, который основан на наибольших касательных напряжениях. Пусть задана совместная плотность вероятности $p_q(M_b, M_t)$ для изгибающего и крутящего моментов. Для расчета надежности стержня необходимо знать плотность вероятности $p_u(M_r)$ приведенного момента M_r . Решение этой задачи сводится к применению формулы (12) при $m=1, n=2$.

Выполним вычисления для случая, когда моменты

M_b и M_t независимы и подчиняются центрированному нормальному распределению:

$$p_q(M_b, M_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_b\sigma_t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{M_t^2}{\sigma_t^2}\right)\right]. \quad (16)$$

Здесь σ_b и σ_t — средние квадратические значения моментов M_b и M_t соответственно (квадратные корни из дисперсий). Для упрощения выкладок перейдем к полярным координатам, положив

$$M_b = M_r \cos \theta; \quad M_t = M_r \sin \theta,$$

где угол θ меняется в пределах $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Совместная плотность вероятности для случайных величин M_r и θ дается формулой типа (13):

$$p_u(M_r, \theta) = p_q(M_r \cos \theta, M_r \sin \theta) \left| \frac{\partial(M_r \cos \theta, M_r \sin \theta)}{\partial(M_r, \theta)} \right|.$$

Используя формулу (16) и замечая, что якобиан преобразования

$$\frac{\partial(M_r \cos \theta, M_r \sin \theta)}{\partial(M_r, \theta)} = M_r,$$

найдем

$$p_u(M_r, \theta) = \frac{M_r}{2\pi\sigma_b\sigma_t} \exp\left[-\frac{M_r^2(\sigma_b^2 \sin^2 \theta + \sigma_t^2 \cos^2 \theta)}{2\sigma_b^2 \sigma_t^2}\right].$$

Плотность вероятности $p_u(M_r)$ определяется интегрированием полученной формулы по углу θ :

$$p_u(M_r) = \int_0^{2\pi} p_u(M_r, \theta) d\theta.$$

Используя известную формулу анализа

$$\int_0^{2\pi} e^{-\alpha \cos \varphi} d\varphi = 2\pi I_0(\alpha),$$

где $I_0(\alpha)$ — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка, получим окончательно

$$p_u(M_r) = \frac{M_r}{\sigma_b\sigma_t} \exp\left[-\frac{M_r^2(\sigma_b^2 + \sigma_t^2)}{4\sigma_b^2 \sigma_t^2}\right] I_0\left(\frac{M_r^2 |\sigma_b^2 - \sigma_t^2|}{4\sigma_b^2 \sigma_t^2}\right). \quad (17)$$

Если дисперсии моментов M_b и M_t одинаковы, т. е. $\sigma_b = \sigma_t = \sigma$, то формула (17) принимает вид

$$p_u(M_r) = \frac{M_r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{M_r^2}{2\sigma^2}\right).$$

При этом приведенный момент подчиняется распределению Релея.

В некоторых случаях достаточно ограничиться вычислением тех или иных числовых характеристик выходных параметров. Так, иногда достаточно знать математические ожидания и дисперсии этих параметров. Вычисления этих и аналогичных числовых характеристик проводятся осреднением соответствующих функциональных зависимостей. Пусть, например, требуется вычислить математическое ожидание неслучайной функции $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ от выходных параметров. При известной совместной плотности вероятности для входных параметров эти вычисления производятся по формуле

$$\langle f(u_1, u_2, \dots, u_m) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(U_1, U_2, \dots, U_m) p_q(q_1, q_2, \dots, q_n) \times \\ \times dq_1 dq_2 \dots dq_n. \quad (18)$$

В подынтегральном выражении выходные параметры выражаются через q_1, q_2, \dots, q_n с учетом зависимостей (9). Здесь и в дальнейшем угловыми скобками обозначается операция вычисления математического ожидания.

В качестве элементарного примера покажем, как вычисляются математическое ожидание и моменты параметров M_1, M_2, \dots, M_m , связанные с параметрами Q_1, Q_2, \dots, Q_n формулой (8). Применяя к обеим частям этой формулы операцию математического ожидания, найдем

$$\langle M_j \rangle = \sum_{k=1}^n \eta_{jk} \langle Q_k \rangle \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (19)$$

Чтобы вычислить моменты второго порядка, составим произведение $M_j M_k$ и определим его математическое ожидание. С учетом формулы (8) получим

$$\langle M_j M_k \rangle = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \eta_{jr} \eta_{ks} \langle Q_r Q_s \rangle \quad (j, k=1, 2, \dots, m) \quad (20)$$

и т. д. В некоторых случаях найденных числовых характеристик достаточно для нахождения совместного распределения $p_u(M_1, M_2, \dots, M_m)$. Так, если совместное распределение параметров Q_1, Q_2, \dots, Q_m — нормальное, то в силу линейности связи (8) будет нормальным распределение параметров M_1, M_2, \dots, M_m . Математические ожидания m случайных величин и матрица $m \times m$ их моментов второго порядка полностью характеризуют m -мерное нормальное распределение.

До сих пор предполагалось, что система является детерминистической. Рассмотрим теперь стохастическую вырожденную систему. Стохастическая вырожденная система — это ансамбль, состоящий из большого числа статистически однородных сопоставимых экземпляров, которые отличаются друг от друга некоторыми параметрами r_1, r_2, \dots, r_s . Для наугад взятого экземпляра эти параметры являются случайными числами. Стохастическая система будет задана, если известна совместная плотность вероятности $p_r(r_1, r_2, \dots, r_s)$ указанных параметров.

Естественный способ вычисления реакции стохастической системы состоит в следующем. Вначале берется один из экземпляров системы и изучается его поведение при внешнем воздействии. При этом находится условное распределение вероятностей для выходных параметров при фиксированных параметрах системы. Затем применяется формула полной вероятности, которая дает распределение выходных параметров для наугад взятого экземпляра; т. е. для стохастической системы.

Поясним сказанное на простейшем примере. Пусть входное воздействие характеризуется одним случайным числом q , реакция системы — одним случайным числом u , а стохастические свойства системы — одним случайным числом r . Пусть далее при фиксированном r связь между входом и выходом дается формулой

$$u = U(q | r)$$

(данные, указанные после вертикальной черты, обозначают условие, при котором устанавливается зависимость). Если обратная функция $q = Q(u | r)$ является однозначной и дифференцируемой, то для условной плотности вероятности $p_u(u | r)$ получаем формулу

$$p_u(u | r) = p_q[Q(u | r)] \left| \frac{\partial Q(u | r)}{\partial u} \right| \quad (21)$$

Эта формула аналогична зависимости (14) и дает распределение выходного параметра системы при заданном значении r . Для наугад взятого экземпляра параметр r является случайной величиной. Пусть $p_r(r)$ — плотность вероятности этой величины. Применяя формулу полной вероятности, найдем безусловную плотность вероятности выходного параметра

$$p_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_u(u | r) p_r(r) dr.$$

С учетом соотношения (21) окончательно получаем

$$p_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_q[Q(u | r)] p_r(r) \left| \frac{\partial Q(u | r)}{\partial u} \right| dr. \quad (22)$$

Формула (22) допускает обобщение на случай, когда число параметров произвольно. Пусть выходные параметры u_1, u_2, \dots, u_m зависят от входных параметров q_1, q_2, \dots, q_n и параметров системы r_1, r_2, \dots, r_s :

$$u_j = U_j(q_1, q_2, \dots, q_n | r_1, r_2, \dots, r_s) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (23)$$

Пусть далее $m < n$ и пусть соотношения (23) имеют обращение относительно m переменных q_1, q_2, \dots, q_m :

$$q_j = Q_j(u_1, u_2, \dots, u_m; q_{m+1}, \dots, q_n | r_1, r_2, \dots, r_s) \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (24)$$

которые являются однозначными и дифференцируемыми функциями переменных u_1, u_2, \dots, u_m . Условная плотность вероятности при фиксированных параметрах системы r_1, r_2, \dots, r_s определяется по формуле типа (12), в которую подставляются функции Q_j согласно (24). Обозначим условную плотность вероятности через $p_u(u_1, u_2, \dots, u_m | r_1, r_2, \dots, r_s)$. Плотность вероятности выходных параметров для стохастической системы найдем по формуле полной вероятности:

$$p_u(u_1, u_2, \dots, u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_u(u_1, u_2, \dots, u_m | r_1, r_2, \dots, r_s) \times \\ \times p_r(r_1, r_2, \dots, r_s) dr_1 dr_2 \dots dr_s. \quad (25)$$

§ 1.4. Метод функций Грина

Анализ поведения невырожденных систем представляет более серьезные трудности. Исчерпывающее решение задачи, состоящее в получении совместных распре-

делений для выходных параметров, может быть получено лишь в некоторых частных случаях. Обычно приходится удовлетворяться более скромной информацией, например сведениями о математических ожиданиях и младших моментных функциях выходных параметров. В этом и следующих параграфах мы рассмотрим вопрос о нахождении моментных функций невырожденных систем. Вначале рассмотрим более простые — линейные дискретные детерминистические системы. Однако многие методы допускают распространение на более общие классы систем.

Цель состоит в том, чтобы при известной связи между входным и выходным процессами, заданной в форме (1) или (5), и известных моментных функциях входного процесса вычислить моментные функции выходного процесса. Соотношения между моментными функциями определяются осреднением уравнений (1) или (5), а также уравнений, которые получаются из последних в результате простых операций. Метод решения задач статистической динамики, основанный на использовании соотношений между моментными функциями входного и выходного процессов, будем называть методом моментных функций. Реализация этого метода существенно зависит от того, в какой форме заданы исходные соотношения: в форме (1), разрешенной относительно выходного процесса, или в форме (5).

Рассмотрим линейную дискретную детерминистическую систему. Движение такой системы обычно описывается одним обыкновенным линейным дифференциальным уравнением или системой таких уравнений. Оператор L в уравнении (5) будет при этом линейным дифференциальным оператором, а оператор H в уравнении (1) — линейным интегральным оператором типа Вольтерра. Исходя из уравнения (1), будем получать явные выражения для моментных функций, содержащие повторные интегральные операции. Используя уравнение (5), мы получим для определения моментных функций выходного процесса линейные дифференциальные уравнения. Отсюда видно, что целесообразно различать две модификации метода моментных функций. Метод, основанный на соотношениях типа (1), называется методом импульсных переходных функций, методом весовых функций и т. п.

Аналогичный метод для решения стохастических

краевых задач использует понятие функции Грина и называется поэтому методом функций Грина [20]. Как импульсная переходная функция для задачи Коши, так и функция Грина для краевой задачи представляют собой реакцию системы на единичное воздействие. Ввиду этого первую модификацию метода моментных функций можно назвать методом функций Грина. Метод, основанный на соотношениях типа (5) (если последние представляют собой дифференциальные уравнения), будем называть методом дифференциальных уравнений.

В данном параграфе мы рассмотрим подробно метод единичных воздействий. Будем исходить из соотношения

$$u = Hq. \quad (26)$$

Пусть система является линейной и детерминистической. Применяя к левой и правой частям соотношения (26) операцию осреднения по множеству реализаций входного процесса и замечая, что операция осреднения линейна и переставима с оператором H , получим

$$\langle u \rangle = H \langle q \rangle. \quad (27)$$

Таким образом, математическое ожидание выходного процесса линейной детерминистической системы связано с математическим ожиданием входного процесса той же зависимостью, что и соответствующие реализации.

Для вычисления моментной функции второго порядка запишем соотношение (26) в форме, дающей выход $u(t)$ в два различных момента времени t_1 и t_2 :

$$u(t_1) = H_{t_1} q(\tau_1); \quad u(t_2) = H_{t_2} q(\tau_2). \quad (28)$$

Здесь H_{t_k} — оператор, преобразующий процесс $q(\tau_k)$ в процесс $u(t_k)$. Умножая первое соотношение (28) на $u(t_2)$, используя второе соотношение и учитывая свойства операторов H_{t_1} и H_{t_2} , получим формулу, связывающую моментные функции второго порядка для входного и выходного процессов.

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = H_{t_1} H_{t_2} \langle q(\tau_1)q(\tau_2) \rangle. \quad (29)$$

Если $u(t)$ и $q(t)$ — одномерные случайные процессы, то произведения в (29) и ниже имеют обычный смысл. Если $u(t)$ и $q(t)$ — многомерные случайные процессы, векторные или тензорные случайные поля, то произведения в (29) должны трактоваться как прямые или внешние (тензорные) произведения. Например, пусть $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\}$ есть n -мерный случайный

процесс. Тогда произведение $u(t_1)u(t_2)$ представляет собой квадратную матрицу размерностью $n \times n$, составленную из упорядоченных попарных произведений компонент $u_j(t_1)$ и $u_k(t_2)$.

Аналогичные соотношения имеют и моментные функции сколь угодно высокого порядка. Пусть t_1, t_2, \dots, t_n — несовпадающие моменты времени. Моментная функция n -го порядка для выходного процесса линейной дискретной детерминистической системы определяется по формуле

$$\langle u(t_1)u(t_2)\dots u(t_n) \rangle = H_{t_1} H_{t_2} \dots H_{t_n} \langle q(\tau_1)q(\tau_2)\dots q(\tau_n) \rangle. \quad (30)$$

Если некоторые моменты времени совпадают, например $t_1 = t_2$, то следует воспользоваться формулой (30), выполнить все вычисления при $t_1 \neq t_2$, и положить в окончательном результате $t_1 = t_2$.

Для приложений значительный интерес представляют центральные моментные функции второго порядка, т. е. моментные функции второго порядка от централизованных случайных процессов. Эти функции будем называть корреляционными. По определению корреляционная функция случайного процесса $q(t)$ вводится как

$$K_q(t_1, t_2) = \langle \tilde{q}(t_1)\tilde{q}(t_2) \rangle, \quad (31)$$

а корреляционные функции выходного процесса — как

$$K_u(t_1, t_2) = \langle \tilde{u}(t_1)\tilde{u}(t_2) \rangle. \quad (32)$$

Здесь и в дальнейшем волнистой чертой сверху обозначены централизованные случайные процессы:

$$\tilde{q} = q - \langle q \rangle; \quad \tilde{u} = u - \langle u \rangle. \quad (33)$$

Формулы (31) и (32) сохраняют смысл для многомерных случайных процессов и случайных полей, если трактовать входящие в них произведения как прямые или внешние произведения. Например, если $u(t)$ и $q(t)$ — n -мерные случайные процессы, то формулы (31) и (32) задают корреляционные матрицы этих процессов.

Принимая во внимание формулы (29), (32) и (33), получим следующую зависимость, связывающую корреляционные функции входного и выходного процессов:

$$K_u(t_1, t_2) = H_{t_1} H_{t_2} K_q(\tau_1, \tau_2). \quad (34)$$

Рассмотрим реализацию операторных формул (27), (29), (30) и (34) для случая, когда внешнее воздействие характеризуется одной функцией времени $q(t)$, а поведение системы — одной функцией времени $u(t)$. Соотношение (26) принимает для этого случая вид

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) q(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Здесь $h(t, \tau)$ — решение соответствующего дифференциального уравнения при $q(t) = \delta(t - \tau)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция, и при нулевых начальных условиях. Это решение имеет смысл реакции системы на единичный импульс, прикладываемый в момент времени $t = \tau$. В теории автоматического управления эта функция называется обычно импульсной переходной функцией (иногда — весовой функцией). Мы будем называть функцию $h(t, \tau)$ функцией Грина.

Формула (35) записана в предположении, что воздействие $q(t)$ задано при $-\infty < t < \infty$. Если система находилась в покое при $t < 0$ и если воздействие задано при $0 \leq t < \infty$, то нижний предел интегрирования следует положить равным нулю. Впрочем, можно сохранить формулу в общем виде (35), если считать в этом случае, что $q(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

С учетом (35) формула (27) для математического ожидания выходного процесса принимает вид

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle q(\tau) \rangle d\tau. \quad (36)$$

Аналогично преобразуются формулы (29) и (30). Например,

$$\langle u(t_1) u(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1) h(t_2, \tau_2) \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2. \quad (37)$$

И вообще

$$\begin{aligned} \langle u(t_1) u(t_2) \dots u(t_n) \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \dots \int_{-\infty}^{t_n} h(t_1, \tau_1) h(t_2, \tau_2) \dots h(t_n, \tau_n) \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \dots q(\tau_n) \rangle \times \\ &\quad \times d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

Особый интерес представляют стационарные системы. Для таких систем функция Грина $h(t, \tau)$ зависит

явно только от разности $t - \tau$. Таким образом, $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, и формула (36) переписывается следующим образом:

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) \langle q(\tau) \rangle d\tau. \quad (38)$$

Вместо формулы (37) получаем

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2) \langle q(\tau_1)q(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \quad (39)$$

и т. д.

Рассмотрим более подробно реализацию операторной формулы (34), связывающей корреляционные функции входного и выходного процессов. С учетом (35) получаем

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)K_q(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \quad (40)$$

Если система является стационарной, то приходим к формуле, которая аналогична (39):

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)K_q(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \quad (41)$$

Пусть, наконец, внешнее воздействие является стационарным случайным процессом. Тогда поведение стационарной системы также будет стационарным случайным процессом. Корреляционные функции инвариантны относительно сдвига начального момента времени:

$$K_q(t_1, t_2) = K_q(t_2 - t_1); \quad K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2 - t_1). \quad (42)$$

Подставляя выражение (42) в формулу (41) и заменяя переменные

$$t_2 - t_1 = \tau; \quad t_1 - \tau_1 = \theta_1; \quad t_2 - \tau_2 = \theta_2,$$

получим окончательно

$$K_u(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\theta_1)h(\theta_2)K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2)d\theta_1 d\theta_2. \quad (43)$$

Проиллюстрируем применение формулы (43) на простом примере. Рассмотрим линейную систему с одной степенью свободы, находящуюся под действием случайной силы $Q(t)$ (рис. 7). Обозначая перемещение через $u(t)$, массу через M , жесткость упругой связи через c , а коэффициент вязкого трения через k , получим уравнение

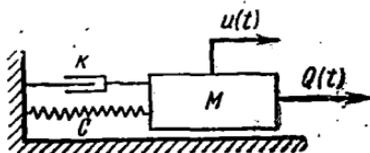


Рис. 7

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + k \frac{du}{dt} + cu = Q(t).$$

Если в этом уравнении ввести обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M}}; \quad 2\varepsilon = \frac{k}{M}, \quad q(t) = \frac{Q(t)}{M},$$

то оно переписывается в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t). \quad (44)$$

Для вычисления корреляционной функции перемещения по заданной корреляционной функции усилия необходимо построить функцию Грина $h(t)$. Согласно (35), эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dh}{dt} + \omega_0^2 h = \delta(t)$$

при нулевых начальных условиях. Вместо того, чтобы решать неоднородное уравнение, можно рассмотреть соответствующее однородное уравнение, принимая начальные условия в виде

$$h = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 1 \quad (t=0).$$

Несложные вычисления дают

$$h(t) = \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t, \quad (45)$$

где через ω_ε обозначена частота собственных колебаний системы, вычисленная с поправкой на силу трения,

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}.$$

При этом полагаем, что $\varepsilon < \omega_0$, т. е. что трение меньше

критического значения. Подставляя выражение (45) в формулу (43), получим

$$K_u(\tau) = \frac{1}{\omega_\varepsilon^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varepsilon(\theta_1 + \theta_2)} \sin \omega_\varepsilon \theta_1 \cdot \sin \omega_\varepsilon \theta_2 \cdot K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (46)$$

Пусть корреляционная функция внешнего воздействия имеет вид

$$K_q = K_0 \delta(\tau), \quad (47)$$

где K_0 — постоянная. При этом внешнее воздействие является дельта-коррелированным, т. е. представляет собой «белый шум». Подстановка выражения (47) в формулу (46) дает

$$K_u(\tau) = \frac{K_0 e^{-\varepsilon |\tau|}}{\omega_\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-2\varepsilon\theta} \sin \omega_\varepsilon \theta \cdot \sin \omega_\varepsilon (|\tau| + \theta) d\theta$$

или после вычисления интеграла

$$K_u(\tau) = \frac{K_0 e^{-\varepsilon |\tau|}}{4\omega_0^2 \varepsilon} \left(\cos \omega_\varepsilon \tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon |\tau| \right). \quad (48)$$

До сих пор мы рассматривали реализации операторных соотношений (27), (29), (30) и т. д. для случая, когда внешнее воздействие (а также и поведение системы) описывается единственной функцией времени. Пусть теперь внешнее воздействие характеризуется n функциями времени $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$, а поведение системы — m функциями времени $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_m(t)$. Пусть далее оператор H является интегральным оператором с матрицей Грина

$$H = \begin{bmatrix} h_{11}(t, \tau) & h_{12}(t, \tau) & \dots & h_{1n}(t, \tau) \\ h_{21}(t, \tau) & h_{22}(t, \tau) & \dots & h_{2n}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1}(t, \tau) & h_{m2}(t, \tau) & \dots & h_{mn}(t, \tau) \end{bmatrix},$$

элементы которой h_{jk} представляют собой реакцию j -й координаты системы на единичный импульс, соответствующий k -му воздействию ($j=1, 2, \dots, m$; $k=1, 2, \dots, n$). Реализация операторного соотношения (26) имеет вид

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^t h_{jk}(t, \tau) q_k(\tau) d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (49)$$

Осредняя соотношение (49) по множеству реализаций, получим формулу, которая является обобщением формулы (36),

$$\langle u_j(t) \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{t_1} h_{jk}(t, \tau) \langle q_k(\tau) \rangle d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (50)$$

Для моментных функций второго порядка получаем формулу

$$\begin{aligned} & \langle u_j(t_1) u_k(t_2) \rangle = \\ & = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_{j\alpha}(t_1, \tau_1) h_{k\beta}(t_2, \tau_2) \langle q_\alpha(\tau_1) q_\beta(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m), \quad (51)$$

аналогичную формуле (37), и т. д.

Введем взаимные корреляционные функции, равные моментным функциям второго порядка от центрированных процессов:

$$\tilde{q}_j = q_j - \langle q_j \rangle; \quad \tilde{u}_k = u_k - \langle u_k \rangle.$$

Обозначим эти функции следующим образом:

$$K_{q_j q_k}(t_1, t_2) = \langle \tilde{q}_j(t_1) \tilde{q}_k(t_2) \rangle; \quad K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = \langle \tilde{u}_j(t_1) \tilde{u}_k(t_2) \rangle. \quad (52)$$

Связь между корреляционными функциями входного и выходного процессов дается формулой

$$\begin{aligned} & K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = \\ & = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_{j\alpha}(t_1, \tau_1) h_{k\beta}(t_2, \tau_2) K_{q_\alpha q_\beta}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m). \quad (53)$$

Эта формула обобщает зависимость (40). Дальнейшие упрощения, связанные со стационарностью системы и (или) стационарностью процессов, проводятся аналогично тому, как это было сделано ранее для одномерных процессов.

§ 1.5. Метод дифференциальных уравнений

Пусть связь между входным и выходным процессами задана в форме

$$Lu = q, \quad (54)$$

где L — дифференциальный оператор. Уравнение (54) связывает случайные функции $u(t)$ и $q(t)$. Осредняя уравнение (54), а также уравнения, которые получаются из него умножением на $u(t_1)$, $u(t_1)u(t_2)$ и т. д., будем получать дифференциальные уравнения относительно моментных функций выходного процесса. Такой путь определения моментных функций, как указывалось ранее, называется методом дифференциальных уравнений.

Связь между математическими ожиданиями входного и выходного процессов получим, осредняя уравнение (54) по множеству реализаций. Если L — линейный детерминистический оператор, то он переставим с оператором осреднения. В результате получаем уравнение относительного математического ожидания выходного процесса

$$L\langle u \rangle = \langle q \rangle. \quad (55)$$

Таким образом, математические ожидания связаны теми же дифференциальными уравнениями, что и соответствующие реализации. Начальные условия для математического ожидания выходного процесса получим осреднением начальных условий для реализаций. Так, если начальные условия для реализации нулевые, то для математического ожидания также ставятся нулевые начальные условия.

Переходим к выводу дифференциальных уравнений относительно моментных функций второго и более высокого порядков. Формальный метод получения этих уравнений аналогичен выводу формул (27), (29) и (30). Пусть L — оператор, переводящий процесс $q(t_k)$ в процесс $u(t_k)$. Этот оператор действует только на функции переменной t_k . Например, если

$$L = a_v \frac{d^v}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1}}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0, \quad (56)$$

где a_0, a_1, \dots, a_v — некоторые постоянные, то оператор L записывается в виде

$$L = a_v \frac{\partial^v}{\partial t_k^v} + a_{v-1} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t_k^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t_k} + a_0.$$

Запишем уравнение (54) для двух моментов времени $t_1 \neq t_2$:

$$Lu(t_1) = q(t_1), \quad Lu(t_2) = q(t_2). \quad (57)$$

Умножая первое уравнение на $L u(t_2)$ и осредняя результат, получим

$$L L_{t_1 t_2} \langle u(t_1) u(t_2) \rangle = L_{t_2} \langle q(t_1) u(t_2) \rangle.$$

Но из второго уравнения (57) после умножения на $q(t_1)$ и осреднения находим

$$L_{t_2} \langle q(t_1) u(t_2) \rangle = \langle q(t_1) q(t_2) \rangle.$$

Учитывая эти соотношения, получим окончательно уравнение относительно моментной функции второго порядка:

$$L L_{t_1 t_2} \langle u(t_1) u(t_2) \rangle = \langle q(t_1) q(t_2) \rangle. \quad (58)$$

Вообще если t_1, t_2, \dots, t_n — несовпадающие моменты времени, то моментная функция n -го порядка удовлетворяет уравнению

$$L L_{t_1 t_2} \dots L_{t_n} \langle u(t_1) u(t_2) \dots u(t_n) \rangle = \langle q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) \rangle. \quad (59)$$

Выпишем также операторное уравнение, связывающее корреляционные функции $K_u(t_1, t_2)$ и $K_q(t_1, t_2)$ выходного и входного процессов.

$$L L_{t_1 t_2} K_u(t_1, t_2) = K_q(t_1, t_2). \quad (60)$$

Уравнения (58) — (60) представляют собой уравнения в частных производных. Они должны решаться при начальных условиях, которые получаются осреднением начальных условий для функций $u(t)$ и для произведений этих функций, взятых в различные моменты времени. Следует заметить, что задача определения моментных функций из этих уравнений несколько отличается от классических задач математической физики. Здесь мы имеем по существу многомерную задачу Коши. Дополнительное своеобразие вносят условия симметрии моментных функций относительно перестановок аргументов t_1, t_2, \dots, t_n . Строгим исследованием корректной постановки этих задач, насколько нам известно, никто не занимался. Поэтому при постановке этих задач будем руководствоваться лишь здравым смыслом.

Поясним постановку задачи для случая, когда оператор L имеет вид (56), а начальные условия для функции $u(t)$ нулевые:

$$u = \frac{du}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} = 0 \quad (t=0). \quad (61)$$

Используя для краткости обозначения:

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle u(t_1)u(t_2) \dots u(t_n) \rangle;$$

$$\psi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_n) \rangle,$$

представим уравнение (59) для моментной функции n -го порядка в виде

$$\prod_{k=1}^n \left(a_v \frac{\partial^v}{\partial t_k^v} + a_{v-1} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t_k^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t_k} + a_0 \right) \varphi = \psi. \quad (62)$$

Начальные условия для функции $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ выберем с учетом начальных условий (61). Эти условия можно получить следующим образом. Записав начальные условия для функции $u(t_k)$ одного из аргументов t_k , умножим каждое из них почленно на произведение функций $u(t_1) u(t_2) \dots u(t_{k-1}) u(t_{k+1}) \dots u(t_n)$. После осреднения находим

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} = \dots = \frac{\partial^{v-1} \varphi}{\partial t_k^{v-1}} = 0 \quad (t_k = 0; k = 1, 2, \dots, n). \quad (63)$$

Можно использовать начальные условия и в другой, по-видимому, эквивалентной форме. Например, записав начальные условия (61) в виде

$$\frac{d^\mu u(t_k)}{dt_k^\mu} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 0, 1, 2, \dots, v-1 \\ t_k = 0; k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right),$$

умножим каждое из них на произведение

$$\prod_{\mu \neq k} \frac{d^\mu u(t_k)}{dt_k^\mu}$$

и осредним по множеству реализаций. В результате получим начальные условия

$$\varphi = \frac{\partial^n \varphi}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} = \dots = \frac{\partial^{n(v-1)} \varphi}{\partial t_1^{v-1} \partial t_2^{v-1} \dots \partial t_n^{v-1}} = 0 \quad (64)$$

$$(t_k = 0; k = 1, 2, \dots, n).$$

Их симметричная форма находится в соответствии с условиями симметрии моментных функций по отношению к перестановке аргументов t_1, t_2, \dots, t_n .

Фактическое решение задач классическими методами математической физики (например, методом разделения переменных) показывает, что при начальных условиях, поставленных в форме (63), решение уравне-

ния (62) существует и определяется единственным образом.

В качестве простого примера рассмотрим определение корреляционной функции на выходе системы, движение которой описывается уравнением (44). Уравнение (60) для этой системы записывается так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \omega_0^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \omega_0^2\right) K_u(t_1, t_2) = K_q(t_1, t_2). \quad (65)$$

Пусть начальные условия для центрированного выходного процесса $\tilde{u}(t)$ — нулевые. Начальные условия для корреляционной функции могут быть представлены как в форме (63):

$$K_u = \frac{\partial K_u}{\partial t_1} = 0 \quad (t_1 = 0);$$

$$K_u = \frac{\partial K_u}{\partial t_2} = 0 \quad (t_2 = 0),$$

так и в форме (64)

$$K_u = \frac{\partial^2 K_u}{\partial t_1 \partial t_2} = 0 \quad (t_1 = 0 \text{ и } t_2 = 0).$$

По-видимому, можно ограничиться постановкой начальных условий при $t_1=0$, дополнив их условием симметрии корреляционной функции:

$$K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2, t_1). \quad (66)$$

Если $u(t)$ — стационарный случайный процесс, то

$$K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2 - t_1).$$

Обозначая $t_2 - t_1 = \tau$ и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{d}{d\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau},$$

перепишем уравнение (65) следующим образом:

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2\right) \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2\right) K_u(\tau) = K_q(\tau). \quad (67)$$

Дополнительные условия получим из рассмотрения свойств корреляционных функций стационарного случайного процесса. Эта функция должна быть четной, т. е.

$$K_u(-\tau) = K_u(\tau). \quad (68)$$

Кроме того, корреляционная функция и ее производные должны быть ограничены на бесконечности, а для корреляционной функции эргодического процесса выполняется более сильное условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} K_u(\tau) d\tau = 0. \quad (69)$$

Заметим, что в силу условия четности (68) достаточно определить решение (67) при $0 \leq \tau < \infty$. При этом если процесс $\tilde{u}(t)$ — дифференцируемый, то из условия (68) вытекает, что

$$\frac{dK_u}{d\tau} = \frac{d^3 K_u}{d\tau^3} = 0 \quad (\tau=0).$$

В противном случае при $\tau=0$ должно быть задано условие скачка нечетных производных, которое устанавливается из рассмотрения поведения в нуле корреляционной функции $K_q(\tau)$.

Допустим, что внешнее воздействие является стационарным белым шумом. Его корреляционная функция имеет вид (47). Из уравнения (67) видно, что четвертая производная от $K_u(\tau)$ содержит сингулярную составляющую $K_0 \delta(\tau)$. Следовательно, третья производная имеет в нуле скачок, равный $\frac{1}{2} K_0$. Вместо неоднородного уравнения (67) с правой частью (47) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) K_u(\tau) = 0$$

с неоднородными начальными условиями:

$$\frac{dK_u}{d\tau} = 0; \quad \frac{d^3 K_u}{d\tau^3} = \frac{1}{2} K_0 \quad (\tau=0). \quad (70)$$

На бесконечности должно выполняться условие ограниченности.

Решение уравнения, как обычно, ищем в виде $K_u = Ce^{r\tau}$, где r — характеристический показатель. Уравнение для определения характеристических показателей имеет вид

$$(r^2 - 2\varepsilon r + \omega_0^2)(r^2 + 2\varepsilon r + \omega_0^2) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$r = \pm \varepsilon \pm i\omega_\varepsilon,$$

где ω_ε — частота собственных колебаний системы, вычисленная с поправкой на демпфирование. Дальнейшие формулы выписываем для случая, когда $\varepsilon < \omega_0$.

На основании условия ограниченности отбросим частные решения, которым соответствуют показатели с положительной действительной частью. Таким образом,

$$K_u(\tau) = C_1 e^{-(\varepsilon - i\omega_\varepsilon)\tau} + C_2 e^{-(\varepsilon + i\omega_\varepsilon)\tau}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из условий (70):

$$C_1 = \frac{K_0}{8i\varepsilon\omega_\varepsilon(\varepsilon - i\omega_\varepsilon)}; \quad C_2 = -\frac{K_0}{8i\varepsilon\omega_\varepsilon(\varepsilon + i\omega_\varepsilon)}.$$

Подстановка найденных значений в решение дает

$$K_u(\tau) = \frac{K_0 e^{-\varepsilon\tau}}{8i\varepsilon\omega_\varepsilon} \left(\frac{e^{i\omega_\varepsilon\tau}}{\varepsilon - i\omega_\varepsilon} - \frac{e^{-i\omega_\varepsilon\tau}}{\varepsilon + i\omega_\varepsilon} \right),$$

откуда после перехода к действительному выражению получаем окончательную формулу

$$K_u(\tau) = \frac{K_0 e^{-\varepsilon\tau}}{4\omega_0^2 \varepsilon} \left(\cos\omega_\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin\omega_\varepsilon\tau \right).$$

Эта формула выведена при $\tau \geq 0$. Заменяя в ней τ на $|\tau|$, распространим ее на всю действительную ось. Переписанная в таком виде, полученная формула совпадает с формулой (48).

Метод дифференциальных уравнений легко обобщается на случай, когда как внешнее воздействие, так и реакция системы являются многомерными процессами. Пусть внешнее воздействие описывается n функциями $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$, а поведение системы — m функциями $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$. Операторное уравнение (54) задается матрицей

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1m} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nm} \end{bmatrix},$$

где L_{jk} — линейные операторы. В развернутом виде уравнение (54) имеет вид

$$\sum_{k=1}^m L_{jk} u_k = q_j \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Уравнения относительно математических ожиданий и моментных функций для многомерного процесса $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_m(t)$ получим, как и ранее, осреднением. Так, для математических ожиданий имеем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^m L_{jk} \langle u_k \rangle = \langle q_j \rangle \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

для моментных функций второго порядка — систему уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m L_{j\alpha} L_{k\beta} \langle u_\alpha(t_1) u_\beta(t_2) \rangle = \langle q_j(t_1) q_k(t_2) \rangle \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

и т. д.

§ 1.6. Метод спектральных представлений

Среди эффективных методов решения задач прикладной математики особое место занимает метод преобразований Фурье. Представляя функции (оригиналы) в виде обобщенных рядов или интегралов Фурье, мы заменяем операции над оригиналами соответствующими операциями над коэффициентами ряда Фурье или трансформантами Фурье. При надлежащем выборе преобразования операции над коэффициентами или трансформантами Фурье могут оказаться значительно проще, чем операции над оригиналами. На заключительном этапе мы вновь возвращаемся к пространству оригиналов. Частными случаями этой широко известной методики являются методы преобразований Лапласа, Фурье — Бесселя и т. п.

Распространение метода преобразований Фурье на случайные функции будем называть методом спектральных представлений. Суть этого метода состоит в том, что случайная функция представляется в виде обобщенного ряда Фурье со случайными коэффициентами или в виде обобщенного интеграла Фурье, спектр которого есть случайная функция. Действия над заданной случайной функцией заменяются действиями над ее коэффи-

циентами или трансформантой Фурье. Часто такой подход дает весьма ощутимые преимущества. Хорошо известным примером служит представление централизованного стационарного случайного процесса в виде стохастического интеграла Фурье. При любом спектральном составе заданного процесса его трансформанта Фурье окзывается белым шумом.

Остановимся на методе спектральных представлений подробнее, начав со случая представления функции в виде ряда Фурье. Пусть случайная функция $q(t)$ может быть представлена в виде конечного или бесконечного ряда

$$q(t) = \sum_k Q_k \varphi_k(t), \quad (71)$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ — некоторая система неслучайных функций; Q_1, Q_2, \dots — случайные величины. Система функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ и система случайных величин Q_1, Q_2, \dots должны быть полными в том смысле, что любая реализация процесса $q(t)$ может быть аппроксимирована рядом (71). Случайный процесс $q(t)$ будет задан, если известна совместная плотность вероятности $p(Q_1, Q_2, \dots)$ коэффициентов ряда (71) или полная система моментов этих коэффициентов.

Рассмотрим прохождение процесса, заданного в форме (71), через линейную детерминистическую систему. Пусть связь между входным и выходным процессами задана в форме (54). Подставляя ряд (71) в уравнение (54) и учитывая линейность системы, получим представление для выходного процесса в виде

$$u(t) = \sum_k Q_k \psi_k(t). \quad (72)$$

Здесь Q_1, Q_2, \dots — коэффициенты ряда (71), $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots$ — детерминистические функции, определяемые из решения уравнения

$$L\psi_k = \varphi_k. \quad (73)$$

Моментные функции выходного процесса $u(t)$ определяются осреднением ряда (72) и рядов, получаемых перемножением (мы предполагаем, что перестановка оператора L и операции суммирования, перемножение рядов и т. п. допустимы). Для математического ожидания выходного процесса получаем формулу

$$\langle u(t) \rangle = \sum_k \langle Q_k \rangle \psi_k(t). \quad (74)$$

Моментная функция второго порядка выходного процесса вычисляется по формуле

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \sum_{j,k} \langle Q_j Q_k \rangle \psi_j(t_1) \psi_k(t_2) \quad (75)$$

и т. д. Таким образом, при заданных моментах коэффициентов ряда (71) решение задачи о прохождении процесса через линейную систему сводится к решению вспомогательного детерминистического уравнения (73) и применению формул типа (74) и (75).

Рассмотрим простой пример применения только что выведенных формул. Пусть линейная колебательная система, уравнение которой имеет вид (44), при $t < 0$ находится в покое. В момент $t=0$ к системе прикладывается случайная нагрузка

$$q(t) = \sum_k Q_k e^{-\alpha_k t}.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — некоторые неслучайные положительные числа; функцию распределения или моменты случайных величин Q_1, Q_2, \dots полагаем известными. Очевидно, мы имеем здесь частный случай разложения (71). Уравнение (73) запишется для данного случая следующим образом:

$$\frac{d^2 \psi_k}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\psi_k}{dt} + \omega_0^2 \psi_k = e^{-\alpha_k t}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, будет

$$\psi_k(t) = \frac{e^{-\alpha_k t} - e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_\varepsilon t - \frac{\alpha_k - \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right)}{\omega_0^2 + \alpha_k^2 - 2\varepsilon \alpha_k}$$

Математическое ожидание и моменты выходного процесса $u(t)$ могут быть теперь найдены по формулам (74), (75) и т. п. Например, средний квадрат процесса $u(t)$ выражается через моменты второго порядка коэффициентов Q_1, Q_2, \dots и функции $\psi_k(t)$:

$$\langle u^2(t) \rangle = \sum_j \sum_k \frac{\langle Q_j Q_k \rangle}{(\omega_0^2 + \alpha_j^2 - 2\varepsilon \alpha_j)(\omega_0^2 + \alpha_k^2 - 2\varepsilon \alpha_k)} \left[e^{-\alpha_j t} - e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_\varepsilon t - \frac{\alpha_j - \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right) \right] \left[e^{-\alpha_k t} - e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_\varepsilon t - \frac{\alpha_k - \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right) \right].$$

Часто бывает целесообразно выделить из ряда (71) математическое ожидание процесса

$$q(t) = \langle q(t) \rangle + \sum_k Q_k \varphi_k(t), \quad (76)$$

а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... выбрать таким образом, чтобы коэффициенты Фурье Q_1, Q_2, \dots были стохастически независимыми. Тогда все взаимные моменты второго порядка этих коэффициентов будут равны нулю:

$$\langle Q_j Q_k \rangle = 0 \quad (j \neq k). \quad (77)$$

Спектральное представление в форме (76) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (77), будем называть стохастически ортогональным представлением или каноническим разложением (по В. С. Пугачеву [66]). Если входной процесс $q(t)$ задан в виде канонического разложения (76), то корреляционная функция выходного процесса определяется по формуле

$$K_u(t_1, t_2) = \sum_k \langle Q_k^2 \rangle \psi_k(t_1) \psi_k(t_2). \quad (78)$$

Для упрощения выкладок часто используются комплексные выражения. В частности, функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... в разложениях (71), (72) и (76), а также случайные коэффициенты Q_1, Q_2, \dots могут быть комплексными. Оператор взятия действительной части от комплексной функции обычно явно не выписывается. При этом целесообразно ввести такое определение для моментов второго порядка и соответствующих моментных функций, чтобы для дисперсий автоматически получались действительные выражения. Этим свойством обладает, например, следующее выражение:

$$K_q(t_1, t_2) = \langle \tilde{q}^*(t_1) \tilde{q}(t_2) \rangle. \quad (79)$$

Здесь звездочка обозначает переход к комплексно-сопряженной величине. Формула (78) для корреляционной функции, заданной в виде (79), переписется так:

$$K_q(t_1, t_2) = \sum_k \langle |Q_k|^2 \rangle \varphi_k^*(t_1) \varphi_k(t_2). \quad (80)$$

До сих пор рассматривались дискретные спектральные представления. Для процессов, заданных при $-\infty < t < \infty$ и, в частности, для стационарных случайных процессов, часто используется спектральное представление в виде обобщенного интеграла Фурье:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \varphi(t|\omega) d\omega.$$

Здесь $\varphi(t|\omega)$ — детерминистическая функция времени t и параметра преобразования ω , $Q(\omega)$ — случайная функция параметра ω . Без ограничения общности можно считать, что параметр ω принимает все возможные действительные значения $-\infty < \omega < \infty$. Функцию $Q(\omega)$ будем называть спектром процесса $q(t)$.

Рассмотрим непрерывный аналог канонического разложения (76):

$$q(t) = \langle q(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \varphi(t|\omega) d\omega. \quad (81)$$

Условие стохастической ортогональности (77) в непрерывном случае принимает вид

$$\langle Q^*(\omega)Q(\omega') \rangle = S_q(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (82)$$

Здесь $S_q(\omega)$ — детерминистическая функция параметра ω ; $\delta(\omega)$ — дельта-функция. Соотношение (82) означает, что спектр канонического разложения является дельта-коррелированной функцией параметра ω . Функцию $S_q(\omega)$ будем называть спектральной плотностью процесса $q(t)$. Учитывая соотношение (82), легко получим формулу, связывающую спектральную плотность $S_q(\omega)$ с корреляционной функцией процесса:

$$K_q(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) \varphi^*(t_1|\omega) \varphi(t_2|\omega) d\omega. \quad (83)$$

Наиболее важным примером стохастически ортогонального интегрального представления типа (81) является разложение центрированного стационарного случайного процесса в интеграл Фурье:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (84)$$

При этом, очевидно, $\varphi(t|\omega) = e^{i\omega t}$. При строгом изложении спектральной теории стационарных процессов используется понятие стохастического интеграла Фурье—Стильтьеса.

Нетрудно показать, что спектр $Q(\omega)$ является дельта-коррелированной функцией. В самом деле, вычисляя по формуле (79) корреляционную функцию процесса $q(t)$

$$K_q(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q^*(\omega)Q(\omega') \rangle e^{i(\omega' t_2 - \omega t_1)} d\omega d\omega',$$

замечаем, что она будет зависеть только от разности $\tau = t_2 - t_1$ в том случае, если спектр $Q(\omega)$ удовлетворяет условию (82). Формула,

$$K_q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (85)$$

устанавливает связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью стационарного случайного процесса. Обратное соотношение имеет вид

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (86)$$

Пусть процесс $q(t)$, заданный в форме

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \varphi(t|\omega) d\omega,$$

проходит через линейную систему, уравнение которой задано в форме (54). Для выходного процесса получим спектральное представление, аналогичное дискретному представлению (72):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \psi(t|\omega) d\omega. \quad (87)$$

Здесь $\psi(t|\omega)$ — детерминистическая функция t , зависящая от ω как от параметра; эта функция определяется как решение уравнения

$$L\psi = \varphi. \quad (88)$$

Используя решение в форме (87), легко вычислим математическое ожидание выходного процесса

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q(\omega) \rangle \psi(t|\omega) d\omega,$$

моментную функцию второго порядка

$$\langle u^*(t_1) u(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q^*(\omega) Q(\omega') \rangle \psi^*(t_1|\omega) \psi(t_2|\omega') d\omega d\omega'$$

и т. д. Если входной процесс $q(t)$ задан в форме (81) со спектром, удовлетворяющим условию (82), то математическое ожидание выходного процесса определяется

из уравнения (55), а корреляционная функция — по формуле типа (78):

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) \psi^*(t_1|\omega) \psi(t_2|\omega) d\omega. \quad (89)$$

Поясним реализацию метода спектральных представлений в непрерывной форме на простом примере. Вновь рассмотрим линейную колебательную систему, движение которой описывается уравнением (44). Пусть система при $t < 0$ находится в покое, а при $t = 0$ на систему начинает действовать случайная нагрузка, которая представляет собой заданную при $t \geq 0$ реализацию стационарного случайного процесса. Таким образом, спектральное представление имеет вид (87), где

$$\varphi(t|\omega) = \begin{cases} 0 & (t < 0); \\ e^{i\omega t} & (t \geq 0). \end{cases}$$

Отметим, что нагрузка $q(t)$ является нестационарной; поведение системы также будет, разумеется, нестационарным.

В соответствии с общей методикой решение уравнения (44) ищется в форме (87). Функция $\psi(t|\omega)$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2 \psi = e^{i\omega t},$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Легко находим, что

$$\psi(t|\omega) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_g t + \frac{i\omega + \varepsilon}{\omega_g} \sin \omega_g t \right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega}$$

Вероятностные характеристики выходного процесса определяются далее осреднением соответствующих выражений, получаемых на основе выражения (87). В частности, корреляционная функция вычисляется по формуле (89), где $S_q(\omega)$ — спектральная плотность процесса $q(t)$, заданного при $-\infty < t < \infty$. Для среднего квадрата выходного процесса

$$\langle |u(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) |\psi(t|\omega)|^2 d\omega.$$

При $t \rightarrow \infty$ средний квадрат стремится к постоянному значению:

$$\langle |u(\infty)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{|\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega|^2}. \quad (90)$$

Это значение соответствует установившейся реакции системы на стационарное воздействие.

Метод спектральных представлений легко распространяется на многомерные случайные процессы. Пусть, например, внешнее воздействие описывается n функциями $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$, а поведение системы — m функциями $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$. Предположим, что внешнее воздействие допускает стохастически ортогональное представление типа (81):

$$q_j(t) = \langle q_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(\omega) \varphi_j(t|\omega) d\omega \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (91)$$

Спектры $Q_j(\omega)$ удовлетворяют условию типа (82):

$$\langle Q_j^*(\omega) Q_k(\omega') \rangle = S_{q_j q_k}(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (92)$$

где $S_{q_j q_k}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности процессов $q_j(t)$ и $q_k(t)$. Решение уравнения (54) ищем в виде

$$u_j(t) = \langle u_j(t) \rangle + \sum_{\alpha=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\alpha}(\omega) \psi_{j\alpha}(t|\omega) d\omega \quad (93)$$

($j = 1, 2, \dots, m$).

Через $\psi_{j\alpha}(t|\omega)$ обозначены решения детерминистической системы уравнений

$$\sum_{k=1}^m L_{jk} \psi_{j\alpha}(t|\omega) = \delta_{j\alpha} \varphi_{\alpha} \quad \left(\begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha = 1, 2, \dots, n \end{array} \right),$$

где $\delta_{j\alpha}$ — символ Кронеккера. Эти решения имеют смысл детерминистических реакций системы на воздействие $q_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(t|\omega)$ при всех остальных $q_j \equiv 0$. Перемножая выражения (93) при различных j и в различные моменты времени, придем после осреднения и учета условия ортогональности (92) к следующей формуле для взаимных корреляционных функций:

$$K_{u_j^{\dagger} u_k}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_{\alpha} q_{\beta}}(\omega) \psi_{j\alpha}^*(t_1|\omega) \psi_{k\beta}(t_2|\omega) d\omega.$$

Эта формула обобщает формулу (89) применительно к многомерным случайным процессам.

§ 1.7. Прохождение стационарного случайного процесса через стационарную линейную систему

Одна из наиболее часто встречающихся задач статистической динамики состоит в изучении реакции стационарных линейных систем на стационарное случайное воздействие. Методы, изложенные в предыдущих параграфах, полностью применимы к этой задаче. Представляет интерес получение простых соотношений, дающих решение задачи в замкнутом виде.

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнением (54):

$$Lu = q. \quad (94)$$

Пусть входной процесс $q(t)$ является стационарным случайным процессом. Поскольку реакция линейной системы на математическое ожидание входного процесса определяется отдельно из уравнения (55), то без ограничения общности можно принять, что процесс $q(t)$ является центрированным, т. е. что $\langle q(t) \rangle \equiv 0$. Процесс $q(t)$ представим в виде стохастического интеграла Фурье (84) со спектром $Q(\omega)$, удовлетворяющим условию (82) и спектральной плотностью $S_q(\omega)$, связанной с корреляционной функцией соотношениями (85) и (86).

Рассмотрим вначале случай, когда оператор L является линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами:

$$L = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n. \quad (95)$$

Здесь a_0, a_1, \dots, a_n — детерминистические числа. Уравнение (88) для данного случая принимает вид

$$L\psi = e^{i\omega t}. \quad (96)$$

Поскольку на функцию $\psi(t)$ не накладывается никаких условий, кроме ограниченности на $\pm\infty$, то решение уравнения (96) будет

$$\psi(t|\omega) = \frac{e^{i\omega t}}{L(i\omega)}.$$

Выражение $L(i\omega)$ получается из выражения (95) для оператора L заменой оператора дифференцирования d/dt на $i\omega$:

$$L(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (89), получим

$$K_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{|L(i\omega)|^2}.$$

Сравнивая результат с формулой типа (85), выражающей корреляционную функцию выходного процесса $K_u(\tau)$ через его спектральную плотность

$$K_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

найдем связь между спектральными плотностями входного и выходного процессов:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|L(i\omega)|^2}. \quad (97)$$

Формула (97) является основным соотношением, дающим решение задачи о прохождении стационарного процесса через стационарную линейную систему. После того как спектральная плотность выходного процесса найдена, легко вычисляются его корреляционная и моментная функции, корреляционные функции производных от выходного процесса, дисперсии выходного процесса и его производных и т. д.

Нетрудно обобщить формулу (97) на более широкий класс операторов L . Пусть, например, оператор L имеет вид

$$L = \frac{L_1\left(\frac{d}{dt}\right)}{L_2\left(\frac{d}{dt}\right)}, \quad (98)$$

где L_1 и L_2 — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. При этом порядок оператора L_2 должен быть по крайней мере на единицу меньше порядка оператора L_1 . Задание оператора L в форме (98) эквивалентно тому, что уравнение системы предполагается имеющим вид

$$L_1 u = L_2 q.$$

Повторяя выкладки, аналогичные приведенным выше, получим для спектральной плотности выходного процесса формулу (97). Функция $L(i\omega)$ будет в этом случае дробно-рациональной функцией.

Рассмотрим еще более широкий класс линейных операторов. Будем трактовать метод спектральных представлений стационарных случайных процессов как обобщение классического метода преобразований Фурье на случайные функции. Будем искать решение операторного уравнения (94) в виде интеграла Фурье:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $U(\omega)$ — трансформанта Фурье для случайной функции $u(t)$. Уравнение (94) в пространстве Фурье будет иметь вид

$$L(i\omega)U(\omega) = Q(\omega),$$

где $L(i\omega)$ — образ оператора L в этом пространстве (импеданс системы). Составляя выражение для корреляционной функции трансформанты $U(\omega)$ и используя формулу типа (82)

$$\langle U^*(\omega)U(\omega') \rangle = S_u(\omega)\delta(\omega - \omega'),$$

вновь придем к формуле (97). При этом $L(i\omega)$, вообще говоря, будет трансцендентной функцией параметра ω . Заметим, что выражение

$$H(i\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$$

называется в теории автоматического управления передаточной функцией системы, а основная формула (97) записывается в виде

$$S_u(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_q(\omega).$$

Передаточная функция $H(i\omega)$ связана с импульсной переходной функцией $h(t)$ (функцией Грина) соотношением

$$H(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Проиллюстрируем применение формулы (97) на простейшем примере. Пусть входная функция $q(t)$ в уравнении (44) является стационарной случайной функцией

со спектральной плотностью $S_q(\omega)$. Импеданс системы имеет вид $L(i\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega$.

Отсюда по формуле (97) находим

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} \quad (99)$$

Используя формулу (99), можно вычислить различные вероятностные характеристики выходного процесса. Например, для среднего квадрата получаем формулу (90), которая ранее была получена из рассмотрения нестационарной реакции системы при $t \rightarrow \infty$. Для широкого класса функций $S_q(\omega)$ интеграл в формуле (90) может быть вычислен в аналитической форме. Допустим, например, что внешнее воздействие является белым шумом. Тогда $S_q(\omega) = S_0 = \text{const}$. Интеграл

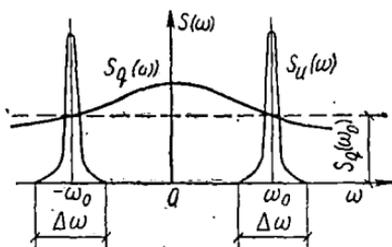


Рис. 8

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}$$

легко находится по теореме вычетов. Окончательно получаем

$$\langle |u|^2 \rangle = \frac{\pi S_0}{2\varepsilon\omega_0^2} \quad (100)$$

Если диссипация в системе достаточно мала, то для среднего квадрата выходного процесса может быть получена приближенная формула, справедливая при произвольной, хотя и медленно меняющейся функции $S_q(\omega)$. В самом деле, при малом ε спектральная плотность (99) принимает большие значения лишь в достаточно малой окрестности частот $\pm\omega_0$ (рис. 8). При этом в формуле (90) интеграл по множеству значений $-\infty < \omega < \infty$ можно приближенно заменить суммой интегралов по двум достаточно малым интервалам $\Delta\omega$, накрывающим частоты $\pm\omega_0$. Если в этих интервалах функция $S_q(\omega)$ меняется достаточно медленно, то по теореме о среднем

ее можно вынести за знак интегрирования. Таким образом,

$$\langle |u|^2 \rangle \approx 2S_q(\omega_0) \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}.$$

Но подынтегральное выражение в правой части принимает вне интервалов $\Delta\omega$ пренебрежимо малые значения. Поэтому можно снова распространить область интегрирования на полубесконечный интервал:

$$\int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} \approx \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} = \frac{\pi}{4\varepsilon\omega_0^2}.$$

В результате приходим к формуле

$$\langle |u|^2 \rangle \approx \frac{\pi S_q(\omega_0)}{2\varepsilon\omega_0^2}. \quad (101)$$

Формула (101) отличается от формулы (100) тем, что в нее входит значение спектральной плотности, соответствующее собственной частоте системы ω_0 . Механический смысл данного приближенного подхода состоит в следующем. При малом демпфировании колебательная система имеет весьма избирательный характер. Из спектра внешнего воздействия она выбирает те компоненты, частоты которых весьма близки к собственной частоте системы. Выходной процесс является узкополосным, т. е. основная часть энергии процесса сосредоточена в узкой части спектра, лежащей вблизи частоты ω_0 . Поэтому реакция системы с большой точностью выражается через значения спектральной плотности входного процесса, соответствующие указанной частоте.

В статистической динамике весьма часто приходится вычислять интегралы типа

$$I_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega)d\omega}{|L(i\omega)|^2}. \quad (102)$$

При этом $L(i\omega)$ обычно является рациональной или дробно-рациональной функцией, все корни которой $s =$

$i\omega$ лежат в левой полуплоскости (в противном случае состояние равновесия системы $u \equiv 0$ было бы неустойчивым). Спектральная плотность $S_q(\omega)$ является четной функцией ω , причем эта функция также обычно бывает дробно-рациональной. Вместо интеграла типа (102) целесообразно рассматривать интеграл

$$I_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_v(\omega) d\omega}{l_v(\omega) l_v(-\omega)}, \quad (103)$$

где $l_v(\omega)$ и $m_v(\omega)$ — полиномы с комплексными коэффициентами. При этом полином $m_v(\omega)$ содержит только четные степени ω , а его степень по крайней мере на две единицы меньше, чем степень полинома $l_v(\omega)l_v(-\omega)$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} l_v(\omega) &= a_0\omega^v + a_1\omega^{v-1} + \dots + a_{v-1}\omega + a_v; \\ m_v(\omega) &= b_0\omega^{2v-2} + b_1\omega^{2v-4} + \dots + b_{v-2}\omega^2 + b_{v-1}. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_v; b_0, b_1, \dots, b_{v-1}$ — комплексные коэффициенты. Все корни полинома $l_v(\omega)$ лежат в верхней полуплоскости. Например, если $l_v(\omega) = L(i\omega)$, то все корни $l_v(\omega)$ получаются из корней $L(i\omega)$ поворотом комплексной плоскости на угол $(1/2)\pi$.

Интеграл (103) вычисляется по теореме вычетов:

$$I_v = 2\pi i \sum_{\rho=1}^v \operatorname{res} \frac{m_v(\omega)}{l_v(\omega) l_v(-\omega)}.$$

Например, если все корни ω_ρ полинома $l_v(\omega)$ простые, то

$$I_v = 2\pi i \sum_{\rho=1}^v \frac{m_v(\omega_\rho)}{l_v'(\omega_\rho) l_v(-\omega_\rho)}.$$

Применение этой формулы требует вычисления явных выражений для корней уравнения $l_v(\omega) = 0$. Если $v > 2$, то вычисления могут сильно осложниться. С другой стороны, поскольку все корни уравнения $l_v(\omega) = 0$ равноправны, то интеграл (103) должен зависеть от симметрических функций этих корней и, следовательно, должен рационально выражаться через коэффициенты полинома $l_v(\omega)$. Вывод формул, связывающих интеграл (103) с коэффициентами полиномов (104), можно найти в специальной литературе. Приведем окончательный результат. Интеграл (103) вычисляется по формуле

$$I_v = \frac{\pi i (-1)^{v+1}}{a_0} \cdot \frac{D_{ab}}{D_a}, \quad (105)$$

где D_a — определитель ν -го порядка;

$$D_a = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{vmatrix},$$

а определитель D_{ab} получается из определителя D_a заменой первого столбца на столбец, составленный из коэффициентов полинома $m_\nu(\omega)$, т. е. на $b_0, b_1, \dots, b_{\nu-1}$:

$$D_{ab} = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\nu-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{vmatrix}.$$

Определитель D_a совпадает с известным определителем Гурвица, который используется для формулировки условия устойчивости дискретных стационарных систем. Кстати, так как система устойчива, то всегда $D_a > 0$. Развернем формулу (105) для случая, когда $\nu = 1, 2, 3$:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi i b_0}{a_0 a_1}; \\ I_2 &= \frac{\pi i}{a_0 a_1} \left(-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2} \right); \\ I_3 &= \frac{\pi i \left(-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3} \right)}{a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Проиллюстрируем применение формул (106) на примере интеграла

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|\omega_0^2 + 2i\varepsilon\omega - \omega^2|^2},$$

входящего в формулу (90) при $S_q(\omega) = \text{const}$. Перепишем его в виде (103). При этом

$$l_2(\omega) = -\omega^2 + 2i\varepsilon\omega + \omega_0^2; \quad m_2(\omega) = 1.$$

Коэффициенты полиномов (104), очевидно, будут $a_0 = -1$; $a_1 = 2i\varepsilon$; $a_2 = \omega^2$; $b_0 = 0$; $b_1 = 1$. Подставляя значения этих коэффициентов во вторую из формул (106), найдем, что

$$I_2 = \pi/2\varepsilon\omega_0^2.$$

В результате приходим к формуле (100).

Рассмотрим теперь многомерное стационарное случайное воздействие $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ на линейную систему. Спектральные представления возьмем в виде стохастических интегралов Фурье со спектрами $Q_j(\omega)$:

$$q_j(t) = \langle q_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (107)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Нетрудно показать, что если все составляющие $q_j(t)$ стационарны и стационарно связаны, то представление (107) является стохастически ортогональным. В самом деле, вычисляя с учетом (107) взаимные корреляционные функции

$$K_{q_j q_k}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q_j^*(\omega) Q_k(\omega') \rangle e^{i(\omega' t_2 - \omega t_1)} d\omega d\omega',$$

замечаем, что правые части будут зависеть только от $\tau = t_2 - t_1$, если выполнено условие стохастической ортогональности (92). Отсюда, кстати, вытекает формула, связывающая взаимные корреляционные функции со взаимными спектральными плотностями

$$K_{q_j q_k}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_j q_k}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (108)$$

а также обратное соотношение

$$S_{q_j q_k}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{q_j q_k}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Решение системы уравнений (54) с правыми частями, представленными в форме (107), ищем в виде

$$u(t) = \langle u_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} U_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Спектры выходного процесса $U_j(\omega)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^m L_{jk}(i\omega) U_k(\omega) = Q_j(\omega) \quad (109)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

где $L_{jk}(i\omega)$ — образы операторов L_{jk} в пространстве Фурье. Пусть $m=n$. Обозначим через $H_{jk}(i\omega)$ элементы матрицы

$$H(i\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(i\omega) & H_{12}(i\omega) & \dots & H_{1n}(i\omega) \\ H_{21}(i\omega) & H_{22}(i\omega) & \dots & H_{2n}(i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1}(i\omega) & H_{n2}(i\omega) & \dots & H_{nn}(i\omega) \end{bmatrix}$$

обратной по отношению к матрице с элементами $L_{jk}(i\omega)$. Будем называть $H_{jk}(i\omega)$ передаточными функциями системы. При помощи передаточных функций решение системы (109) записывается в виде

$$U_j(\omega) = \sum_{k=1}^n H_{jk}(i\omega) Q_k(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда с учетом соотношения

$$\langle U_j^*(\omega) U_k(\omega') \rangle = S_{u_j u_k}(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

где $S_{u_j u_k}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности выходного процесса, получим окончательную формулу

$$S_{u_j u_k}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n H_{j\alpha}(-i\omega) H_{k\beta}(i\omega) S_{q_\alpha q_\beta}(\omega). \quad (110)$$

Эта формула связывает спектральные плотности входного и выходного процессов.

Рассмотрим пример на применение формулы (110). Пусть линейная система с n степенями свободы совершает стационарные случайные колебания под действием внешних сил. Предположим, что допускается полное разделение обобщенных координат, т. е. что уравнения колебаний системы могут быть представлены в виде

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} + 2\epsilon_j \frac{du_j}{dt} + \omega_j^2 u_j = q_j(t) \quad (111)$$

$$(j=1, 2, \dots, n).$$

Здесь ω_j — парциальные собственные частоты системы; ε_j — парциальные коэффициенты демпфирования. Передаточные функции системы $H_{jk}(\omega)$ образуют диагональную матрицу

$$H_{jk}(\omega) = \frac{\delta_{jk}}{L_j(i\omega)},$$

где обозначено

$$L_j(i\omega) = \omega_j^2 + 2i\varepsilon_j\omega - \omega^2.$$

Используя формулу (110), находим

$$S_{u_j u_k}(\omega) = \frac{S_{q_j q_k}(\omega)}{(\omega_j^2 - 2i\varepsilon_j\omega - \omega^2)(\omega_k^2 + 2i\varepsilon_k\omega - \omega^2)} \quad (112)$$

По известным спектральным плотностям далее вычисляются дисперсии, корреляционные моменты, корреляционные функции и другие вероятностные характеристики второго порядка для выходного процесса и его производных. Например, элементы матрицы корреляционных моментов определяются по формуле

$$K_{u_j u_k}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{q_j q_k}(\omega) d\omega}{L_j(-i\omega)L_k(i\omega)} \quad (113)$$

Произведем вычисления по формуле (113) в предположении, что внешние воздействия являются дельта-коррелированными, т.е. что все $S_{q_j q_k}(\omega) = \text{const}$. Интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{L_j(-\omega)L_k(\omega)},$$

где $l_j(\omega)$ — полином второго порядка

$$l_j(\omega) = \omega_j^2 + 2i\varepsilon_j\omega - \omega^2,$$

найдем по теореме вычетов:

$$I = 2\pi i \sum_{\alpha} \frac{1}{l_j(-\omega_{k\alpha})l'_k(\omega_{k\alpha})}$$

Здесь $\omega_{k\alpha}$ — корни уравнения $l_k(\omega) = 0$; лежащие в верхней полуплоскости. После элементарных вычислений получаем

$$K_{u_j u_k}(0) = \frac{4\pi(\varepsilon_j + \varepsilon_k)S_{q_j q_k}}{(\omega_j^2 - \omega_k^2)^2 + 4(\varepsilon_j + \varepsilon_k)(\varepsilon_j\omega_k^2 + \varepsilon_k\omega_j^2)} \quad (114)$$

При $j=k$ получаем дисперсии выходных процессов:

$$K_{u_j u_j}(0) = \frac{\pi S_{q_j q_j}}{2\omega_j^2 \varepsilon_j}.$$

Если демпфирование достаточно мало и если парциальные частоты не слишком близки друг к другу, то побочные элементы корреляционной матрицы ($j \neq k$) малы по сравнению с главными элементами. Например, при $\varepsilon_j \sim \varepsilon_k \approx \varepsilon$ условие малости побочных элементов по сравнению с главными имеет вид

$$\varepsilon^2 \ll (\omega_j - \omega_k)^2. \quad (115)$$

§ 1.8. Элементы статистической динамики нелинейных систем

Анализ поведения нелинейных систем при случайных воздействиях представляет серьезные трудности по сравнению с соответствующим анализом линейных систем. Эти трудности встречаются уже на этапе составления уравнений относительно моментных функций выходного процесса.

Рассмотрим вначале особенности метода дифференциальных уравнений в применении к нелинейным системам. Пусть уравнение системы задано в виде (54), где L — нелинейный оператор. Для нелинейного оператора, вообще говоря, несправедлив принцип суперпозиции. Кроме того, сам оператор непереставим с операцией осреднения, т. е. $\langle Lu \rangle \neq L \langle u \rangle$. Поэтому уравнения относительно моментных функций выходного процесса в общем случае образуют неразделяющуюся систему, каждое уравнение которой содержит старшие моментные функции. Таким образом, в отличие от уравнений относительно моментных функций на выходе линейной системы уравнения для нелинейной системы неоднородны относительно функций одного порядка.

Поясним сказанное на простейшем примере. Пусть уравнение системы имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \mu u^3 = q(t), \quad (116)$$

где μ — некоторая неслучайная постоянная. Уравнение (116) описывает вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с кубической нелинейностью под

действием случайной силы и является, таким образом, вероятностным аналогом уравнения Дуффинга. Переписав уравнение в более компактной форме:

$$L_0 u + \mu u^3 = q(t). \quad (117)$$

Через L_0 обозначена линейная часть оператора L , совпадающая с оператором линейной системы (44). Желая получить уравнение относительно математического ожидания выходного процесса, осредняем уравнение (117) по множеству реализаций. В результате приходим к уравнению

$$L_0 \langle u \rangle + \mu \langle u^3 \rangle = \langle q \rangle,$$

которое наряду с математическим ожиданием $\langle u \rangle$ содержит также средний куб выходного процесса. Уравнение относительно среднего куба будет содержать, в свою очередь, моменты пятого порядка выходного процесса, а также смешанные моменты третьего порядка относительно входных и выходных процессов. Таким образом, попытка замкнуть систему уравнений приводит к бесконечной системе неразделяющихся уравнений.

Аналогичные трудности возникают при определении моментных функций второго порядка. Перемножая уравнение (117) для двух различных моментов времени и осредняя, придём к уравнению:

$$\begin{aligned} & L_0 L_0 \langle u(t_1)u(t_2) \rangle + \mu L_0 \langle u(t_1)u^3(t_2) \rangle + \\ & + \mu L_0 \langle u^3(t_1)u(t_2) \rangle + \mu^2 \langle u^3(t_1)u^3(t_2) \rangle = \langle q(t_1)q(t_2) \rangle. \quad (118) \end{aligned}$$

Здесь индексы под символом оператора указывают, на функции какого аргумента оператор действует. Мы видим, что в это уравнение входят также моментные функции четвертого и шестого порядков.

Выход из положения состоит в переходе к усеченной системе уравнений. Вместо того чтобы рассматривать бесконечную систему, дающую точное решение задачи, ограничиваются рассмотрением приближенной конечной системы. При этом старшие моментные функции исключают при помощи какой-либо подходящей гипотезы. Один из возможных способов состоит в том, что все старшие моментные функции полагаются равными нулю. Другой способ основан на использовании приближенных соотношений, выражающих старшие моментные функции через младшие. Например, можно принять,

что старшие моментные функции связаны с младшими функциями соотношениями, справедливыми для нормальных процессов.

Напомним эти соотношения. Пусть U_1, U_2, \dots, U_n — n -мерный центрированный нормальный случайный вектор. Известно, что все моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка выражаются через корреляционные (бинарные) моменты. Для моментов порядка $k=2s$

$$\langle U_1^{k_1} U_2^{k_2} \dots U_n^{k_n} \rangle = \sum \langle U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} \rangle \langle U_{\alpha_3} U_{\alpha_4} \rangle \dots \langle U_{\alpha_{2s-1}} U_{\alpha_{2s}} \rangle, \quad (119)$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2s$. Сумма, стоящая в правой части, содержит возможные разбиения $2s$ индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s}$ (включая повторяющиеся индексы) на s пар $\alpha_1 \alpha_2, \alpha_3 \alpha_4, \dots, \alpha_{2s-1} \alpha_{2s}$. Общее число слагаемых в правой части формулы (119) равно $(2s-1)!!$. При $k=4$ в правой части стоит 3 слагаемых, при $k=6$ стоит 15 слагаемых и т. д.

Воспользовавшись формулой (119), выразим моментные функции, входящие в уравнение (118), через корреляционную функцию

$$K_u(t_1, t_2) = \langle u(t_1)u(t_2) \rangle$$

(входной и выходной процессы считаем центрированными). Легко найдем, что

$$\langle u(t_1)u^3(t_2) \rangle = 3K_u(t_1, t_2)K_u(t_2, t_2),$$

$$\langle u^3(t_1)u(t_2) \rangle = 3K_u(t_1, t_1)K_u(t_1, t_2),$$

$$\langle u^3(t_1)u^3(t_2) \rangle = 9K_u(t_1, t_1)K_u(t_1, t_2)K_u(t_2, t_2) + 6K_u^3(t_1, t_2).$$

Подставим найденные выражения в уравнение (118). В результате получим замкнутое уравнение относительно корреляционной функции $K_u(t_1, t_2)$:

$$L_0 L_0 K_u(t_1, t_2) + 3\mu K_u(t_2, t_2) L_0 K_u(t_1, t_2) + 3\mu K_u(t_1, t_1) L_0 K_u(t_1, t_2) + \\ + 9\mu^2 K_u(t_1, t_1) K_u(t_1, t_2) K_u(t_2, t_2) + 6\mu^2 K_u^3(t_1, t_2) = K_q(t_1, t_2).$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных. Если процессы $u(t)$ и $q(t)$ — стационарные, то относительно корреляционной функции $K_u(\tau)$ получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$L_0^+ L_0^- K_u(\tau) + 3\mu K_u(0) (L_0^+ + L_0^-) K_u(\tau) +$$

$$+ 9\mu^2 K_u^2(0)K_u(\tau) + 6\mu^2 K_u^3(\tau) = K_q(\tau).$$

При этом для краткости использовано обозначение

$$L_0^\pm = \frac{d^2}{d\tau^2} \pm 2\epsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2.$$

Выше для приближенного замыкания системы уравнений использовалась гипотеза о существовании некоторой связи между старшими и младшими моментными функциями. Еще один способ для получения замкнутых соотношений дает метод малого параметра. Рассмотрим нелинейную систему:

$$L_0 u + \mu f(u) = q(t), \quad (120)$$

где L_0 — линейный оператор; $f(u)$ — однозначная аналитическая детерминистическая функция; μ — малый неслучайный параметр. Попробуем заменить систему (120) рекуррентной последовательностью линейных систем. Для этого будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \dots \quad (121)$$

Разложим в ряд по степеням μ также и нелинейную функцию $f(u)$:

$$f(u) = f(u_0) + \mu f'(u_0)u_1 + \dots$$

При этом u_0 — некоторое порождающее решение. Подставляя ряды в уравнение (120) и приравнивая члены, содержащие одинаковые степени малого параметра, получим последовательность уравнений относительно функций, входящих в разложение (121):

$$L_0 u_0 = q;$$

$$L_0 u_1 = -f(u_0);$$

$$L_0 u_2 = -f'(u_0)u_1;$$

$$\dots$$

Кстати, из первого уравнения видно, что порождающее решение совпадает с решением соответствующей линейной системы. Существенно, что каждое из уравнений этой системы линейно и что правые части уравнений зависят лишь от функций, найденных на предшествующем этапе вычислений.

Пусть обратному оператору $L_0^{-1} = H_0$ соответствует оператор Вольтерра с функцией Грина (импульсной пе-

реходной функцией) $h(t, \tau)$. Тогда решение системы представляется в виде:

$$u_0(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) q(\tau) d\tau;$$

$$u_1(t) = - \int_{-\infty}^t h(t, \tau) f[u_0(\tau)] d\tau;$$

$$u_2(t) = - \int_{-\infty}^t h(t, \tau) f'[u_0(\tau)] u_1(\tau) d\tau,$$

.

Моментные функции выходного процесса определяются осреднением ряда (121). Так, для математического ожидания выходного процесса

$$\langle u(t) \rangle = \langle u_0(t) \rangle + \mu \langle u_1(t) \rangle + \mu^2 \langle u_2(t) \rangle + \dots$$

имеют формулу

$$\langle u(t) \rangle = \langle u_0(t) \rangle - \mu \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle f[u_0(\tau)] \rangle d\tau + \dots$$

Моментные функции второго порядка определяются как

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \langle u_0(t_1)u_0(t_2) \rangle + \mu \langle u_0(t_1)u_1(t_2) + u_0(t_2)u_1(t_1) \rangle +$$

$$+ \mu^2 \langle u_1(t_1)u_1(t_2) + u_0(t_1)u_2(t_2) + u_0(t_2)u_2(t_1) \rangle + \dots$$

После подстановки сюда выражений для функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и т. д. получаем

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \langle u_0(t_1)u_0(t_2) \rangle -$$

$$- \mu \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau_2) \langle u_0(t_1) f[u_0(\tau_2)] \rangle d\tau_2 -$$

$$- \mu \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau_1) \langle u_0(t_2) f[u_0(\tau_1)] \rangle d\tau_1 + \dots \quad (122)$$

Применим формулу (122) для вычисления корреляционной функции на выходе системы Дuffинга (116). Пусть $q(t)$ — центрированный стационарный случайный процесс. Тогда $u(t)$ также будет центрированным стационарным процессом. Замечая, что для стационарной системы $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ и вводя обозначения $t_1 - \tau_1 = \theta_1$, $t_2 - \tau_2 = \theta_2$, $t_2 - t_1 = \tau$, перепишем формулу (122) в виде

$$K_u(\tau) = K_{u_0}(\tau) - \mu \int_0^{\infty} h(\theta_2) \langle u_0(0) u_0^2(\tau - \theta_2) \rangle d\theta_2 -$$

$$- \mu \int_0^{\infty} h(\theta_1) \langle u_0(\tau) u_0^3(-\theta_1) \rangle d\theta_1 + \dots \quad (123)$$

Здесь $K_{u_0}(\tau)$ — корреляционная функция нулевого приближения, т. е.

$$K_{u_0}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

В правую часть формулы (123) входит моментная функция четвертого порядка от нулевого приближения $u_0(t)$. Чтобы найти эту функцию, нужно иметь информацию о распределении процесса $u_0(t)$. Если внешнее воздействие является нормальным, то будет нормальным также и процесс $u_0(t)$. Тогда для определения моментной функции четвертого порядка можно воспользоваться соотношением (119):

$$\langle u_0(0) u_0^3(\tau - \theta_2) \rangle = 3K_{u_0}(0) K_{u_0}(\tau - \theta_2),$$

$$\langle u_0(\tau) u_0^3(-\theta_1) \rangle = 3K_{u_0}(0) K_{u_0}(\tau + \theta_1).$$

Подставляя найденное значение в формулу (123), получим окончательно

$$K_{u_0}(\tau) = K_{u_0}(\tau) - 3\mu K_{u_0}(0) \int_0^{\infty} h(\theta) [K_{u_0}(\tau - \theta) + K_{u_0}(\tau + \theta)] d\theta + \dots \quad (124)$$

Заметим, что для случая нормального входного процесса все выписанные члены найдены точно. Члены, содержащие квадраты и более высокие степени малого параметра, будут зависеть от моментных функций процессов $u_1(t)$, $u_2(t)$ и т. д. При нормальном внешнем воздействии процессы $u_1(t)$, $u_2(t)$ и т. д. свойством нормальности, вообще говоря, обладать не будут. Поэтому вычисление следующих членов разложения вызывает затруднения, сходные с теми, которые встречались в методе дифференциальных уравнений. Чтобы обойти эти затруднения, придется, как и ранее, ввести дополнительные гипотезы о моментных функциях.

Нетрудно видеть аналогию между применением метода малого параметра в статистической динамике и теории нелинейных колебаний. Вообще между методами статистической динамики дискретных нелинейных систем и методами теории нелинейных колебаний много общего. Некоторые приемы по существу являются распространением методов теории колебаний на стохастиче-

ческие системы. Наряду с методом малого параметра в статистической динамике применяются аналоги методов Ван-дер-Поля, Крылова—Боголюбова и т. п. В следующем параграфе мы остановимся несколько подробнее на методе статистической линеаризации, идея которого берет свое начало от методов гармонической и эквивалентной линеаризаций, широко применяемых для расчета нелинейных колебательных систем.

§ 1.9. Метод статистической линеаризации

Метод статистической линеаризации основан на идее о замене нелинейных функций в уравнениях системы подходящими линейными функциями. При этом используется некоторый критерий наилучшего приближения этих функций. Для реализации критерия необходимо иметь сведения о распределении выходного процесса. Поскольку до решения задачи эти сведения отсутствуют, то приходится вводить некоторые вероятностные гипотезы (такой гипотезой может служить, например, гипотеза о нормальности выходного процесса). Заменяв нелинейные функции соответствующим образом выбранными линейными функциями, мы получим для выходного процесса линейное уравнение. Однако коэффициенты этого уравнения будут зависеть от неизвестных параметров распределения. После того как линеаризованная задача решена, можно получить уравнения для определения указанных параметров.

Метод статистической линеаризации аналогичен методу гармонической линеаризации в теории нелинейных колебаний. В основе метода гармонической линеаризации тоже лежит идея о замене нелинейной системы подходящей линеаризованной системой. Параметры линеаризованной системы определяются из некоторого критерия эквивалентности, осуществляемого на множестве гармонических решений. При этом коэффициенты линеаризованной системы оказываются функциями неизвестной амплитуды (иногда фазы и частоты) колебаний. Уравнение для нахождения амплитуды составляется после решения линеаризованных уравнений. Это уравнение оказывается нелинейным.

Поясним идею метода статистической линеаризации на простом примере. Пусть уравнение нелинейной сис-

темы имеет вид (120), где $f(u)$ — детерминистическая функция u . Для некоторого упрощения выкладок будем считать, что входной процесс $q(t)$ является стационарным, центрированным и имеет симметричное распределение, а функция $f(u)$ является нечетной, т. е. $f(u) = -f(-u)$. Тогда выходной процесс $u(t)$ также будет стационарным и центрированным.

Попробуем заменить функцию $f(u)$ некоторой линейной функцией

$$f(u) \approx ku, \quad (125)$$

где k — неслучайная постоянная. Эту постоянную следует выбрать так, чтобы приближение (125) было в некотором смысле наилучшим. Критерий для выбора не является единственным. Например, естественно потребовать, чтобы дисперсии обеих частей соотношения (125) были равны:

$$\langle f^2(u) \rangle = k^2 \langle u^2 \rangle.$$

Отсюда находим, что постоянную k надо выбрать следующим образом:

$$k = \sqrt{\frac{\langle f^2(u) \rangle}{\langle u^2 \rangle}}. \quad (126)$$

В качестве другого критерия для выбора наилучшего приближения возьмем критерий минимума среднего квадратического отклонения двух функций:

$$\langle [f(u) - ku]^2 \rangle = \min.$$

Дифференцируя левую часть по k и приравнявая производную нулю, получим следующую формулу для k :

$$k = \frac{\langle f(u)u \rangle}{\langle u^2 \rangle}. \quad (127)$$

Вообще говоря, формулы (126) и (127) дают различные значения постоянной k . Существенно, что эта постоянная зависит от параметров распределения выходного процесса, которые, в свою очередь, являются неизвестными. Если $q(t)$ — нормальный случайный процесс и если нелинейность достаточно мала, то можно предположить, что выходной процесс $u(t)$ мало отличается от нормального. Тогда для одномерной плотности вероятности можно взять приближенное выражение

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}}, \quad (128)$$

где σ_u^2 — неизвестная дисперсия процесса $u(t)$. Выражения, входящие в формулы (126) и (127), определяются как:

$$\langle f^2(u) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) p(u) du;$$

$$\langle f(u)u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) u p(u) du.$$

Таким образом, коэффициент k в уравнении линеаризованной системы

$$L_0 u + \mu k u = q(t) \quad (129)$$

зависит от неизвестной дисперсии σ_u^2 . Рассматривая дисперсию как заданный параметр или заданную функцию, методами статистической динамики линейных систем находим корреляционную функцию или спектральную плотность на выходе линейной системы (129). На заключительном этапе вычислений составляем и решаем уравнение относительно дисперсии выходного процесса.

Рассмотрим, например, стационарное случайное воздействие на стационарную нелинейную систему. Применяя к уравнению (129) формулу (97), найдем связь между спектральными плотностями на входе и выходе:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|L_0(i\omega) + \mu k(\sigma_u)|^2}.$$

В правую часть входит неизвестная дисперсия σ_u^2 . Выразим эту дисперсию через спектральную плотность. Тогда для определения σ_u^2 получаем соотношение

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{|L_0(i\omega) + \mu k(\sigma_u)|^2} \quad (130)$$

Для широкого класса функций $S_q(\omega)$ и $L_0(i\omega)$ интеграл в правой части уравнения (130) может быть вычислен в конечном виде. В результате мы придем к трансцендентному или алгебраическому уравнению относительно σ_u . Уравнение (130) может быть решено также по методу последовательных приближений или графически.

Применим метод статистической линеаризации к уравнению Дуффинга (116), предполагая, что внешнее воздействие является белым шумом. Для уравнения Дuff-

финга $f(u) = u^3$. Принимая, что выходной процесс распределен нормально, найдем, что

$$\langle f^2(u) \rangle = \langle u^6 \rangle = 15\sigma_u^6.$$

$$\langle f(u)u \rangle = \langle u^4 \rangle = 3\sigma_u^4.$$

Таким образом, коэффициент k в линеаризованном уравнении (129) оказывается равным $k = \alpha\sigma_u^2$. Числовой множитель α составляет $\sqrt{15}$, если линеаризацию проводить по критерию равенства дисперсий. Если же использовать критерий минимума среднего квадратического отклонения, то получается, что $\alpha = 3$. В литературе по теории автоматического управления можно встретить рекомендации о том, что при определении дисперсии выходного процесса в качестве расчетного значения коэффициента линеаризованной системы надо принимать среднее из двух значений. В основе этих рекомендаций неявно лежит предположение о том, что два способа линеаризации берут точное значение дисперсии «в вилку». Убедительные основания для такого вывода отсутствуют. Более того, можно привести примеры, в которых точное значение дисперсии оказывается лежащим вне интервала, ограниченного приближенными значениями. Один из таких примеров будет указан в § 1.11.

Продолжим вычисления. Подставляя найденные значения коэффициента k и оператора L_0 в формулу (130), приведем ее к виду

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega)d\omega}{|\omega_0^2 + \mu\alpha\sigma_u^2 + 2i\varepsilon\omega - \omega^2|^2}.$$

Интеграл в правой части при $S_q(\omega) = \text{const}$ вычисляется элементарно. По аналогии с формулой (100) получим

$$\sigma_u^2 = \frac{\pi S_q}{2\varepsilon(\omega_0^2 + \mu\alpha\sigma_u^2)}. \quad (131)$$

Мы получили относительно σ_u^2 квадратное уравнение. Его единственный положительный действительный корень дает искомое значение дисперсий выходного процесса. Если нелинейность достаточно мала, точнее, если $\mu\alpha\sigma_u^2 \ll \omega_0^2$, то можно применять приближенную формулу

$$\sigma_u^2 \approx \frac{\pi S_q}{2\omega_0^2\varepsilon} \left(1 - \frac{\mu\pi\alpha S_q}{2\omega_0^4\varepsilon} \right). \quad (132)$$

Формулы (131) и (132) можно использовать для приближенного вычисления дисперсии и в следующем случае. Если демпфирование в системе достаточно мало ($\nu \ll \omega_0$), а спектральная плотность входного процесса $S_q(\omega)$ изменяется достаточно медленно, то система является фильтром для воздействий, частота которых близка к ω_0 . Дисперсию выходного процесса найдем, подставляя в указанные формулы значение спектральной плотности $S_q = S_q(\omega_0)$, соответствующее частоте ω_0 .

Нетрудно обобщить метод статистической линеаризации на более широкий класс нелинейных систем и внешних воздействий. Здесь мы ограничимся системами типа ¹

$$L_0 u + \mu f(u, \dot{u}) = q, \quad (133)$$

где $q(t)$ — стационарный случайный процесс. При этом мы откажемся от предположения о том, что процесс $q(t)$ является центрированным. Кроме того, на функцию $f(u, \dot{u})$ не будем накладывать никаких других ограничений, кроме условия однозначности. В рассматриваемых процессах будем выделять флуктуационные составляющие \tilde{q} и \tilde{u}

$$q = \langle q \rangle + \tilde{q}; \quad u = \langle u \rangle + \tilde{u},$$

а функцию $f(u, \dot{u})$ будем линеаризировать в окрестности ее математического ожидания:

$$f(u, \dot{u}) \approx \langle f(u, \dot{u}) \rangle + \tilde{k}u + k_1 \tilde{u}. \quad (134)$$

Для математического ожидания выходного процесса имеем уравнение

$$L_0 \langle u \rangle + \mu \langle f(u, \dot{u}) \rangle = \langle q \rangle. \quad (135)$$

Флуктуационная часть удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое после линеаризации принимает вид

$$L_0 \tilde{u} + \mu \tilde{k} \tilde{u} + \mu k_1 \dot{\tilde{u}} = \tilde{q}. \quad (136)$$

Неслучайные постоянные k и k_1 можно определить разными способами. Применим критерий минимума среднего квадратического отклонения:

$$\langle [f(u, \dot{u}) - \langle f(u, \dot{u}) \rangle - \tilde{k}u - k_1 \dot{\tilde{u}}]^2 \rangle = \min.$$

¹ Здесь (а также, где это удобно, и в дальнейшем) дифференцирование по времени обозначается точкой.

Раскрывая выражение, стоящее в левой части, и дифференцируя его по параметрам k и k_1 , придем к формулам:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\langle f(u, \dot{u}) \tilde{u} \rangle}{\langle \tilde{u}^2 \rangle}; \\ k_1 &= \frac{\langle f(u, \dot{u}) \dot{\tilde{u}} \rangle}{\langle \tilde{u}^2 \rangle}. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Применение формул (137) требует задания совместной плотности вероятности для процесса $u(t)$ и его первой производной. Обычно используется гипотеза нормальности, т. е. полагается, что

$$p(u, \dot{u}) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_{\dot{u}}} \exp \left[-\frac{(u-a)^2}{2\sigma_u^2} \right] \exp \left(-\frac{\dot{u}^2}{2\sigma_{\dot{u}}^2} \right).$$

Здесь σ_u^2 и $\sigma_{\dot{u}}^2$ — дисперсии процесса $u(t)$ и его производной соответственно; a — математическое ожидание процесса $u(t)$. После решения линеаризированной задачи неизвестные параметры распределения легко вычисляются.

Метод статистической линеаризации широко применяется не только к системам с малой и аналитической нелинейностью, но и к существенно нелинейным системам. Рассмотрим, например, нелинейную функцию

$$f(u, \dot{u}) = c \operatorname{sign} u + c_1 \operatorname{sign} \dot{u}.$$

Первый член может быть интерпретирован как взятая с обратным знаком сила упругости в билинейной пружине с большой начальной жесткостью; второй член соответствует силе сухого трения. Такая нелинейность является аналитически нелинеаризируемой. Попытаемся тем не менее заменить ее на множестве случайных движений линейной функцией

$$f(u, \dot{u}) \approx ku + k_1 \dot{u}.$$

Предполагая, что выходной процесс является нормальным с математическим ожиданием, равным нулю, легко получим

$$k = \frac{ac}{\sigma_u}, \quad k_1 = \frac{ac_1}{\sigma_{\dot{u}}}. \quad (138)$$

Числовой коэффициент α в формулах (138) равен единице, если линеаризацию проводить из условия равенства дисперсий. Если же пользоваться формулами (137), то получим

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Несмотря на то, что линеаризация такого неаналитического выражения является довольно смелой операцией, она приводит к разумным результатам при определении дисперсии. Объясняется это тем, что при случайных колебаниях неаналитичный характер нелинейности проявляется не столь заметно, как, скажем, при гармонических колебаниях.

§ 1.10. Сведения из теории марковских процессов

Изложенные выше методы статистической динамики нелинейных систем дают приближенное решение задачи, пригодное лишь при некоторых ограничениях, накладываемых на систему и входные процессы. К этим ограничениям относятся, например, требование малости нелинейных членов, требование близости выходного процесса к нормальному и т. п. Но даже при этих ограничениях мы не получаем при помощи указанных методов достаточно полной информации о выходном процессе. Обычно эта информация ограничивается оценкой математических ожиданий, корреляционных функций и спектральных плотностей. Между тем существуют методы, которые для некоторого класса нелинейных систем и внешних воздействий позволяют находить точные распределения выходных процессов, включая нестационарные и многомерные распределения. Эти методы основаны на теории марковских процессов.

Случайный процесс называется марковским, если его распределение в момент времени t_2 может быть выражено через распределение в предшествующий момент времени $t_1 < t_2$ независимо от предшествующей истории процесса. Таким образом, марковский процесс — это процесс без последействия. Марковские процессы являются абстракцией реальных процессов. Однако многие реальные процессы могут приближенно трактоваться как марковские или во всяком случае могут рассматриваться как

компоненты некоторых многомерных марковских процессов.

Приведем некоторые сведения из теории марковских процессов, причем ограничимся наиболее важным для статистической динамики случаем процессов с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Начнем с одномерного марковского процесса. Рассмотрим случайную функцию $u(t)$, принимающую в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ возможные значения u_0, u_1, \dots, u_n . Введем условную плотность вероятности $p(u_n; t_n | u_{n-1}; t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0)$, имеющую следующий смысл:

$$p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) du_n =$$

$$= P \left[\begin{array}{l} u_n \leq u(t_n) \leq u_n + du_n \\ \left. \begin{array}{l} u_0 \leq u(t_0) \leq u_0 + du_0; \\ u_1 \leq u(t_1) \leq u_1 + du_1; \\ \dots \\ u_{n-1} \leq u(t_{n-1}) \leq u_{n-1} + du_{n-1}. \end{array} \right\} \right]$$

Если условная плотность вероятности удовлетворяет соотношению

$$p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) = p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}), \quad (139)$$

то процесс $u(t)$ называется марковским. Из соотношения (139) следует, что марковский процесс $u(t)$ полностью определяется начальным распределением $p(u_0, t_0)$ и условной плотностью вероятности $p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1})$. В самом деле, по теореме умножения

$$p(u_0, t_0; u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) \times \\ \times p(u_{n-1}, t_{n-1} | u_{n-2}, t_{n-2}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) \dots p(u_1, t_1 | u_0, t_0) p(u_0, t_0).$$

Отсюда, учитывая формулу (139), находим

$$p(u_0, t_0; u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}) p(u_{n-1}, t_{n-1} | u_{n-2}, t_{n-2}) \dots \times \\ \times p(u_1, t_1 | u_0, t_0) p(u_0, t_0). \quad (140)$$

Функция $p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1})$, равная условной плотности вероятности перехода из состояния u_{n-1}, t_{n-1} в состояние u_n, t_n , называется переходной плотностью вероятности. Переходная плотность вероятности обладает обычными свойствами плотности вероятности, и в частности удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}) du_n = 1.$$

Нетрудно получить интегральное уравнение, которому должна удовлетворять переходная плотность вероятности. Рассмотрим три последовательных момента времени $t_0 < t_1 < t_2$. Составляя очевидное соотношение

$$p(u_0, t_0; u_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u_0, t_0; u_1, t_1; u_2, t_2) du_1,$$

выразим входящие в него многомерные плотности через переходную плотность вероятности согласно (140). В результате получим интегральное уравнение Смолуховского:

$$p(u_2, t_2 | u_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u_2, t_2 | u_1, t_1) p(u_1, t_1 | u_0, t_0) du_1. \quad (141)$$

Это уравнение можно получить также и несколько иным путем, рассматривая связь между состояниями в моменты времени t_0 и t_2 через состояние в промежуточный момент времени $t_0 < t_1 < t_2$ и применяя формулу полной вероятности.

Теперь выведем дифференциальное уравнение относительно переходной плотности вероятности. Будем исходить из интегрального уравнения (141). Запишем его для моментов времени $t_0 < t - \Delta t < t$ (в дальнейшем перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$)

$$p(u, t | u_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0) du_1.$$

Здесь u_1 — значение функции $u(t)$ в момент $t - \Delta t$. Умножим это уравнение на функцию $Q(u)$, обращающуюся со всеми производными в нуль на границе области изменения u (в нашем случае при $\pm \infty$) и аналитическую в окрестности значения u_1 . В остальном функция $Q(u)$ является произвольной. После умножения и интегрирования по u получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_0, t_0) Q(u) du = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) Q(u) du \right\} du_1. \end{aligned}$$

Разложим функцию $Q(u)$ в ряд Тейлора в окрестности значения u_1 :

$$Q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q^{(k)}(u_1) (u - u_1)^k.$$

Подставим этот ряд в уравнение, изменим порядок интегрирования и суммирования и перенесем один из членов в левую часть. С учетом условия нормировки переходной плотности вероятности имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [p(u, t | u_0, t_0) - p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0)] Q(u) du = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0) Q^{(k)}(u_1) \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) (u - u_1)^k du \right\} du_1.$$

Следующий шаг состоит в почленном делении уравнения на Δt и в переходе к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $u_1 \rightarrow u$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(u, t | u_0, t_0)}{\partial t} Q(u) du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_0, t_0) Q^{(k)}(u) \kappa_k(u) du. \quad (142)$$

В правой части уравнения (142) введены обозначения

$$\kappa_k(u, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) (u - u_1)^k du.$$

Выражения κ_k называются интенсивностями марковского процесса порядка k . Замечая, что $u - u_1 = \Delta u$, можно переписать формулу для интенсивности в виде

$$\kappa_k(u, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u^k \rangle}{\Delta t}. \quad (143)$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию взятия условного математического ожидания. При осреднении выражений Δu^k величина $u_1(t)$ считается заданной.

Преобразуем правую часть уравнения (142), применяя интегрирование по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(u, t | u_0, t_0)}{\partial t} Q(u) du = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial u} \right)^k [\kappa_k(u, t) p(u, t | u_0, t_0)] Q(u) du.$$

Поскольку функция $Q(u)$ является произвольной, то для равенства левой и правой частей необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\partial}{\partial u} \right)^k (\kappa_k p). \quad (144)$$

Итак, мы получили дифференциальное уравнение (144) относительно переходной плотности вероятности $p =$

$= p(u, t | u_0, t_0)$. Решение этого уравнения должно удовлетворять условию неотрицательности, условию нормировки и начальному условию

$$p = \delta(u - u_0) \quad (t = t_0). \quad (145)$$

Если функция $u(t)$ является непрерывной, то в течение малых интервалов времени Δt она будет получать малые приращения. Все интенсивности (143), начиная с третьей, будут равны нулю. Уравнение (144) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}(\kappa_1 p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\kappa_2 p). \quad (146)$$

Это уравнение, описывающее изменения переходной плотности вероятности непрерывного марковского процесса, называется уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова. Функция $\kappa_1(u, t)$ характеризует среднюю эволюцию процесса $u(t)$ при условии, что $u(t) = u$, и называется коэффициентом сноса. Функция $\kappa_2(u, t)$ характеризует среднее квадратическое отклонение процесса при условии, что $u(t) = u$, и называется коэффициентом диффузии. Заметим, что переходная плотность вероятности $p(u, t | u_0, t_0)$, рассматриваемая как функция начального состояния u_0, t_0 , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} = -\kappa_1 \frac{\partial p}{\partial u_0} - \frac{1}{2} \kappa_2 \frac{\partial^2 p}{\partial u_0^2}, \quad (147)$$

которое является сопряженным по отношению к (146).

Заметим, что уравнению (146) удовлетворяет не только переходная плотность вероятности $p(u, t | u_0, t_0)$ но и одномерная плотность вероятности $p(u, t)$. В самом деле, умножая уравнение (145) почленно на $p(u_0, t_0)$, интегрируя по u_0 и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_0, t_0) p(u_0, t_0) du_0 = p(u, t),$$

придем к уравнению (146) относительно $p(u, t)$. Начальное условие имеет вид

$$p = p(u_0, t_0) \quad (t = t_0), \quad (148)$$

где $p(u_0, t_0)$ — одномерное распределение в начальный момент времени. Определение переходной плотности вероятности можно рассматривать как частный случай определения одномерной плотности вероятности при начальном условии, заданном в форме (145).

Изложенную теорию можно обобщить применительно к многомерным марковским процессам. Пусть $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$ — m -мерный случайный процесс без последействия. Переходная плотность вероятности $p(u, t | u_0, t_0)$ для этого процесса удовлетворяет интегральному уравнению типа (141):

$$p(u_2, t_2 | u_0, t_0) = \int p(u_2, t_2 | u_1, t_1) p(u_1, t_1 | u_0, t_0) du_1,$$

где u_0 , u_1 и u_2 — реализации процесса $u(t)$ в моменты времени t_0 , t_1 и t_2 соответственно; du_1 — элемент объема в m -мерном пространстве. Обозначим приращение компонент вектора $u(t)$ через Δu_1 , Δu_2 , ..., Δu_m . Введем интенсивности многомерного марковского процесса

$$\left. \begin{aligned} x_j(u, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u_j \rangle}{\Delta t}; \\ x_{jk}(u, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u_j \Delta u_k \rangle}{\Delta t}, \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

где угловыми скобками обозначена операция взятия условного математического ожидания. Если любая из компонент процесса меняется непрерывно, то интенсивности более высокого порядка, например

$$x_{jkl}(u, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u_j \Delta u_k \Delta u_l \rangle}{\Delta t},$$

будут равны нулю. Выполняя выкладки, аналогичные тем, которые были сделаны ранее, приходим к уравнению Колмогорова для многомерного марковского процесса:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} (x_j p) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} (x_{jk} p). \quad (150)$$

Переходная плотность вероятности $p(u, t | u_0, t_0)$ должна удовлетворять уравнению (150), а также условиям положительности, нормировки и начальному условию $p = \delta(u - u_0)$ при $t = t_0$. Как и в одномерном случае, уравнению (150) удовлетворяет также плотность вероятности $p(u, t)$. При этом начальное условие берется в виде

$$p = p(u_0, t_0) \quad (t = t_0). \quad (151)$$

§ 1.11. Применение теории марковских процессов к решению задач статистической динамики

Чтобы применить аппарат теории марковских процессов к задачам статистической динамики, необходимо прежде всего установить класс систем, поведение которых может рассматриваться как непрерывный марковский процесс. Очевидно, что должны быть наложены существенные ограничения на оператор в уравнении (5). Рассмотрим вначале случай, когда $u(t)$ является одномерным процессом, а L — дифференциальным оператором.

Нетрудно заметить, что поведение системы будет определяться ее состоянием в какой-либо момент времени независимо от истории только в том случае, если оператор L имеет первый порядок. Другими словами, стохастическое дифференциальное уравнение относительно $u(t)$ должно иметь вид

$$\dot{u} + f(u) = q(t). \quad (152)$$

Здесь $f(u)$ — неслучайная функция. Далее, внешнее воздействие $q(t)$ должно быть дельта-коррелированным; в противном случае история системы будет влиять на ее поведение через стохастическую связанность воздействия. Итак, внешнее воздействие $q(t)$ должно быть белым шумом, т. е. удовлетворять условиям

$$\langle q(t) \rangle = 0, \quad \langle q(t_1)q(t_2) \rangle = s\delta(t_2 - t_1). \quad (153)$$

Вообще говоря, марковость процесса $u(t)$ имеет место и в том случае, когда интенсивность белого шума s зависит от u и t . Мы все же в дальнейшем будем полагать белый шум стационарным, т. е. считать, что $s = \text{const}$. Интенсивность s связана со спектральной плотностью входного процесса S_q соотношением

$$s = 2\pi S_q, \quad (154)$$

которое непосредственно следует из формул (86) и (153).

Приращение Δu функции $u(t)$ за интервал времени Δt согласно уравнению (152) будет¹

$$\Delta u = -f(u)\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} q(\tau)d\tau + o(\Delta t).$$

¹ Здесь и несколько ниже $O(\varepsilon)$ — малая величина порядка ε , $o(\varepsilon)$ — величина более высокого порядка малости, чем ε .

Используя эту формулу, вычислим по формулам (143) интенсивности марковского процесса. Легко найдем, что коэффициент сноса

$$\kappa_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u \rangle}{\Delta t} = -f(u).$$

Далее, средний квадрат приращения Δu составляет

$$\langle \Delta u^2 \rangle = f^2(u) \Delta t^2 + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 + O(\Delta t^3).$$

Поскольку с учетом (153)

$$\int_t^{t+\Delta t} \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle d\tau_2 = s,$$

то формула для среднего квадрата принимает вид

$$\langle \Delta u^2 \rangle = f^2(u) \Delta t^2 + s \Delta t + O(\Delta t^3).$$

Отсюда найдем коэффициент диффузии

$$\kappa_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u^2 \rangle}{\Delta t} = s,$$

который оказывается равным интенсивности входного белого шума.

С учетом вычисленных значений коэффициентов сноса и диффузии запишем уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (146):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} [f(u)p] + \frac{s}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}. \quad (155)$$

Рассмотрим несколько простейших примеров интегрирования уравнения (155). Пусть, например, $f(u) \equiv 0$. При этом дифференциальное уравнение (152) описывает процесс случайных блужданий точки на прямой $-\infty < u < \infty$. Уравнение (155) превращается для этого случая в классическое уравнение диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{s}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2},$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию (145), как известно, будет

$$p(u, t) | u_0, t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(u-u_0)^2}{2s(t-t_0)}\right]. \quad (156)$$

Переходная плотность вероятности (156) соответствует нестационарному гауссовскому процессу с дисперсией, которая увеличивается пропорционально времени.

В силу марковости все многомерные распределения процесса также будут гауссовскими. Заметим, что входной процесс не обязательно должен быть гауссовским. Нормализацию процесса при прохождении через данную систему можно рассматривать как следствие центральной предельной теоремы теории вероятностей. В самом деле, интегрируя уравнение системы, получим, что

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t q(\tau) d\tau.$$

Таким образом, выходной процесс получается в результате суммирования весьма большого числа некоррелирующих импульсов, что и обуславливает его нормальное распределение.

В качестве второго, менее тривиального примера рассмотрим систему с существенной нелинейностью

$$f(u) = c \operatorname{sign} u$$

(здесь c — неслучайная постоянная). Уравнение (155) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c \operatorname{sign} u \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{s}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}.$$

Ограничимся решением этого уравнения для стационарного случая ($\partial p / \partial t = 0$). Перепишем уравнение в виде

$$\frac{d^2 p}{du^2} + \frac{2c}{s} \frac{dp}{du} = 0 \quad (u > 0); \quad \frac{d^2 p}{du^2} - \frac{2c}{s} \frac{dp}{du} = 0 \quad (u < 0),$$

легко найдем его общее решение:

$$p(u) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{2c |u|}{s}\right).$$

Отсюда после удовлетворения условию нормировки получаем

$$p(u) = \frac{c}{s} \exp\left(-\frac{2c |u|}{s}\right). \quad (157)$$

Таким образом, одномерное стационарное распределение оказывается экспоненциальным. Дисперсия этого распределения составляет

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u) du = \frac{s^2}{2c^2}. \quad (158)$$

Используем найденное точное решение, чтобы оценить точность приближенного решения, найденного по

методу статистической линеаризации. Вопрос о линеаризации функции $f(u) = \text{sign } u$ рассматривался в конце § 1.9. Уравнение системы после линеаризации с учетом формул (138) принимает вид

$$u + \frac{\alpha c}{\sigma_u} u = q(t),$$

где коэффициент α равен единице, если линеаризация проводится из условия равенства дисперсий, и равен $\sqrt{2/\pi}$, если проводить линеаризацию из условия минимума среднего квадратического отклонения. Через σ_u^2 обозначена дисперсия выходного процесса.

Спектральную плотность выходного процесса $S_u(\omega)$ найдем по формуле (97):

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{\left| \frac{\alpha c}{\sigma_u} + i\omega \right|^2}.$$

Отсюда получим уравнение для определения дисперсии σ_u^2 :

$$\sigma_u^2 = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\frac{\alpha^2 c^2}{\sigma_u^2} + \omega^2}.$$

Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

найдем, что ненулевой корень уравнения соответствует среднему квадратическому отклонению

$$\sigma_u = s/(2\alpha c).$$

Сопоставляя найденный результат с точной формулой (158), видим, что точные и приближенные значения отличаются лишь числовым множителем. Первый способ линеаризации дает в формуле для среднего квадратического отклонения коэффициент, равный 0,5. По второму способу получаем 0,63. Точное значение коэффициента, как следует из формулы (158), составляет $1/\sqrt{2} = 0,71$. Расхождения довольно велики, хотя оба способа линеаризации предсказывают правильный порядок коэффициента. Существенно, что точное значение лежит вне вилки, образованной двумя способами ли-

неаризации. Таким образом, к распространенным рекомендациям о применении метода статистической линеаризации надо отнестись с осторожностью. Добавим к этому, что метод линеаризации, дающий удовлетворительное приближение для дисперсии, вообще говоря, не пригоден для оценки законов распределения выходного процесса. В рассмотренном выше примере плотность вероятности ведет себя как $e^{-|u|}$, в то время как для нормального распределения, положенного в основу линеаризации, имеем e^{-u^2} . Гипотеза нормальности может привести к грубым ошибкам при оценке малых вероятностей.

Дифференциальные уравнения, описывающие многомерный марковский процесс, аналогичны по структуре уравнению (152):

$$\dot{u}_j + f_j(u_1, u_2, \dots, u_m) = q_j(t) \quad (159)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Здесь $f_j(u_1, u_2, \dots, u_m)$ — неслучайные функции; $q_j(t)$ — стационарные белые шумы:

$$\langle q_j(t) \rangle = 0; \quad \langle q_j(t) q_k(t+\tau) \rangle = s_{jk} \delta(\tau). \quad (160)$$

Интенсивности s_{jk} связаны со спектральными плотностями $S_{q_j q_k}$ входного процесса $q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)$ соотношениями

$$s_{jk} = 2\pi S_{q_j q_k}.$$

Определяя из уравнения (159) приращения компонент выходного процесса

$$\Delta u_j = -f_j(u_1, u_2, \dots, u_m) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} q_j(\tau) d\tau$$

и применяя формулы (149), найдем интенсивности

$$r_j = -f_j(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad r_{jk} = s_{jk} \quad (161)$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, m).$$

Отсюда уравнение Колмогорова (150) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} (f_j p) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m s_{jk} \frac{\partial^2 p}{\partial u_j \partial u_k}. \quad (162)$$

Применим уравнение (162) к нелинейной колебательной системе с одной степенью свободы:

$$\ddot{u} + 2\epsilon \dot{u} + f(u) = q(t). \quad (163)$$

Заметим прежде всего, что даже в том случае, когда внешнее воздействие $q(t)$ является белым шумом, выходной процесс $u(t)$ будет обладать последствием. В самом деле, чтобы определить $u(t)$ при $t_2 > t_1$, необходимо знать не только $u(t_1)$, но и $\dot{u}(t_1)$. Хотя выходной процесс $u(t)$ и не является марковским, но он может рассматриваться как компонента двухмерного марковского процесса $u(t)$, $\dot{u}(t)$. Здесь мы впервые встречаемся с ситуацией, когда увеличение числа измерений фазового пространства позволяет применить аппарат теории марковских процессов:

С формальной точки зрения дело сводится к замене уравнения (163) эквивалентной системой двух уравнений первого порядка. Полагая $u_1 = u(t)$, $u_2 = \dot{u}(t)$, получаем систему дифференциальных уравнений типа (159):

$$\dot{u}_1 = u_2;$$

$$\dot{u}_2 = -2\varepsilon u_2 - f(u_1) + q.$$

Интенсивности двухмерного марковского процесса вычислим по формулам (161):

$$\gamma_{11} = u_2; \quad \gamma_{22} = -2\varepsilon u_2 - f(u_1);$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = 0; \quad \gamma_{23} = s.$$

Уравнение (162) записывается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\dot{u} \frac{\partial p}{\partial u} + 2\varepsilon \left(p + \dot{u} \frac{\partial p}{\partial \dot{u}} \right) + f(u) \frac{\partial p}{\partial \dot{u}} + \frac{s}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{u}^2}. \quad (164)$$

Уравнение (164) является дифференциальным уравнением в частных производных относительно функций трех независимых переменных u , \dot{u} и t . Некоторые частные решения этого уравнения, имеющие важное практическое значение, могут быть сравнительно легко получены. Будем искать стационарное распределение. Полагая в уравнении (164) $\partial p / \partial t \equiv 0$, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left[I(u)p + \frac{s}{4\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \dot{u}} \right] + \\ & + \left(-\frac{\partial}{\partial u} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \right) \left(\dot{u}p + \frac{s}{4\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \dot{u}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение будет удовлетворено, если принять, что

$$p = p_1(u)p_2(u), \quad (165)$$

где функции $p_1(u)$ и $p_2(u)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp_1}{du} + \frac{4\varepsilon}{s} f(u)p_1 = 0;$$

$$\frac{dp_2}{du} + \frac{4\varepsilon}{s} u p_2 = 0.$$

Формула (165) означает, что обобщенная координата и обобщенная скорость в стационарном случае независимы. Плотность вероятности обобщенной координаты имеет вид

$$p_1(u) = C_1 \exp \left[-\frac{4\varepsilon}{s} \Pi(u) \right], \quad (166)$$

где C_1 — постоянная, определяемая из условия нормировки, а $\Pi(u)$ — функция, аналогичная потенциальной энергии системы, т. е.

$$\Pi(u) = \int_{u_0}^u f(u) du. \quad (167)$$

Для обобщенной скорости получаем нормальное распределение:

$$p_2(u) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi s}} \exp \left(-\frac{4\varepsilon}{s} \cdot \frac{u^2}{2} \right). \quad (168)$$

Формула (165), правая часть которой определяется согласно (166) и (168), представляет собой распределение Максвелла—Больцмана для системы с одной степенью свободы. Формула (166) замечательна в том отношении, что дает явную связь между распределением обобщенной координаты и потенциальной энергией системы. Положения равновесия соответствуют экстремумам плотности вероятности. Если положение равновесия устойчиво, то потенциальная энергия имеет минимум, а плотность вероятности — максимум. Наоборот, неустойчивым положениям равновесия соответствуют минимумы плотности вероятности (рис. 9).

До сих пор внешние воздействия предполагались дельта-коррелированными; что сильно сужало область применения аппарата теории марковских процессов. Увеличивая число компонент процесса, можно и в более

общем случае получить уравнения типа (159), где в правых частях стоят белые шумы. Дело в том, что обычно в прикладных расчетах входные процессы предполагаются нормальными, а их спектральные плотности представляются в виде дробно-рациональных функций. Такие процессы можно интерпретировать как результат прохождения нормального белого шума через линейный фильтр. Дополняя уравнения системы уравнениями фильтра, получим расширенную систему, которая будет обладать свойством марковости. Если наибольшая степень знаменателя в выражении для спектральной плотности входного процесса равна $2n$, то число компонент следует увеличить на n .

Поясним этот прием на примере системы (163), на входе которой задан экспоненциально-коррелированный процесс с корреляционной функцией:

$$K_q(\tau) = K_0 e^{-\alpha |\tau|} \quad (169)$$

(K_0 и α — неслучайные положительные константы). Спектральная плотность этого процесса имеет вид

$$S_q(\omega) = \frac{K_0}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (170)$$

Отсюда видно, что экспоненциально-коррелированный процесс может быть представлен как результат прохождения белого шума $q_0(t)$ через систему с импедансом $L(i\omega) = i\omega + \alpha$. Уравнение этой системы будет

$$q + \alpha q = q_0 \quad (171)$$

Интенсивность белого шума составляет $s_0 = 2K_0\alpha$. Дополняя уравнения заданной системы уравнением фильтра и вводя обозначение $u_3 = q(t)$, получим систему:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2; \\ \dot{u}_2 &= -2\alpha u_2 - f(u_1) + u_3; \end{aligned} \quad (172)$$

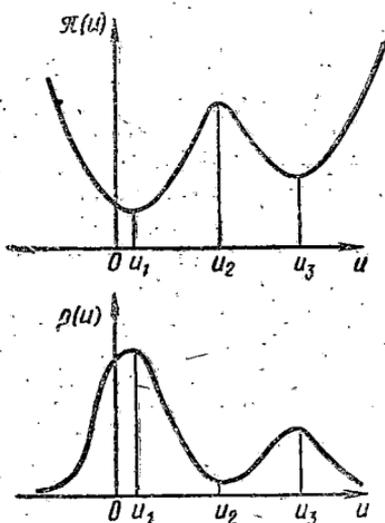


Рис. 9

$$u_3 = -au_3 + q_0,$$

описывающую трехмерный марковский процесс. К этой системе полностью применимы методы, изложенные выше.

Требование о том, чтобы спектральная плотность входного процесса была дробно-рациональной функцией, не является безусловным. Любую аналитическую функцию, представляющую спектральную плотность, можно аппроксимировать при помощи дробно-рациональных выражений со сколь угодно большой точностью. Таким образом, размерность расширенного фазового пространства изменяется в зависимости от того, какая погрешность допускается при расчете.

Представление о возможностях аппарата теории марковских процессов будет неполным, если мы не упомянем еще об одном методе статистической динамики. Речь идет о комбинации методов нелинейной механики, таких, как методы Ван-дер-Поля, Крылова—Боголюбова и Боголюбова—Митропольского, с методом уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова. Как известно, перечисленные методы нелинейной механики приспособлены для описания колебательных процессов, амплитуды и фазы которых меняются достаточно медленно. Аппаратом этих методов служат укороченные уравнения относительно амплитуд и фаз. Нетрудно составить аналогичные уравнения для стохастических систем. Эти уравнения описывают изменение амплитуд и фаз выходного процесса. При некоторых ограничениях, накладываемых на систему и входные процессы, совместная эволюция амплитуд и фаз может рассматриваться как марковский процесс даже в том случае, когда выходной процесс заведомо не является марковским.

§ 1.12. Понятие о стохастических краевых задачах. Случайные поля и их описание

Для решения задач статистической динамики механических систем широко используются методы, основанные на сведении этих систем к системам с конечным числом степеней свободы. Функции, описывающие поведение распределенной системы, представляются в виде разложений по некоторому функциональному бази-

су. Затем при помощи одного из вариационных методов составляются обыкновенные дифференциальные (по времени) или алгебраические уравнения относительно коэффициентов ряда. К полученным уравнениям применяются хорошо разработанные методы статистической динамики дискретных систем.

Вычисления такого рода, особенно если они проводятся с удержанием небольшого числа членов ряда, носят лишь модельный характер и в лучшем случае дают качественное представление о поведении системы. В действительности анализ распределенных систем сводится к решению одномерных, двумерных и трехмерных краевых задач определенного типа. Если внешнее воздействие и (или) свойства системы являются случайными, то это будут стохастические краевые задачи, т. е. задачи о нахождении вероятностных свойств некоторых дифференциальных уравнений со стохастическими краевыми условиями.

К настоящему времени разработано немало методов решения стохастических краевых задач. Многие из них представляют по существу соединение методов математической физики с идеей осреднения по множеству реализаций, пространству или времени. Ряд методов теории одномерных случайных процессов допускает обобщение на задачи теории случайных полей. К этому следует добавить, что случайные поля являются объектом изучения некоторых других отделов точных наук, например статистической физики, квантовой теории поля и теории турбулентности. Правда, в этих дисциплинах краевых задач почти нет, а те немногие задачи, которые имеются, ставятся для неограниченных областей или для простейших граничных условий. Между тем для краевых задач статистической динамики деформируемого твердого тела типичны ограниченные области (подчас сложной конфигурации), достаточно сложные граничные условия и повышенный интерес к поведению решений вблизи границ.

Мы начнем изложение статистической динамики распределенных систем с того, что кратко изложим способы описания случайных полей. Будем различать одно-, двух- и трехмерные поля. Примером одномерного поля служит поле перемещений, изгибающих моментов, перерезывающих сил и т. п. в тонком стержне, рассматриваемом с позиций сопротивления материалов. С фор-

мальной точки зрения нет необходимости проводить различие между функцией времени $u(t)$ и одномерным полем $u(x)$. В качестве примера двумерных случайных полей можно привести распределение перемещений срединной поверхности, распределение моментов и усилий и т. п. в пластине или оболочке. Распределение напряжений, деформаций и перемещений в трехмерном теле образует трехмерное поле. Функции, описывающие динамическое или нестационарное поведение системы, зависят не только от координат, но и от времени. Такие функции будем называть пространственно-временными случайными полями.

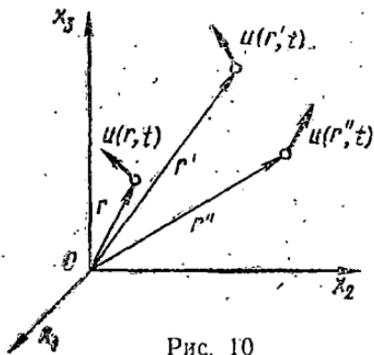


Рис. 10

При рассмотрении распределенных систем будем использовать, как это делается и в других статистических теориях, понятие ансамбля реализаций. Применительно к задачам строительной механики под ансамблем реализаций будем понимать совокупность большого числа конструкций или изделий, выполненных по одному проекту и по единой технологии и находящихся в статистически равноценных условиях эксплуатации или эксперимента. Применение понятия об ансамбле реализаций необязательно связано с предположением о том, что изделие будет изготовлено во множестве образцов. Как уже указывалось в §1.1, во многих случаях в силу стационарности и эргодичности удастся перейти от рассмотрения ансамбля реализаций к анализу эволюции одной реализации во времени.

Величины, с которыми мы имеем дело в статистической динамике распределенных систем, являются скалярами, векторами или тензорами. Таковы векторы объемных и поверхностных сил X_j и q_j , векторы перемещений u_j , тензоры напряжений и деформаций σ_{jk} и ϵ_{jk} и т. д. Число измерений пространства может быть равно одному, двум или трем. Мы будем полагать в дальнейшем, что величины зависят от времени t и радиус-вектора \mathbf{r} , полагая, что $\mathbf{r} = x$ в одномерном случае, $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$ в двумерном случае и $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ в трехмерном случае.

Случайное поле может быть описано несколькими способами. В качестве примера (рис. 10) рассмотрим векторное поле $u_j(\mathbf{r}, t)$. Это поле можно задать при помощи полной системы совместных функций распределения вероятности или при помощи соответствующих плотностей вероятности (по индексам не суммировать):

$$p_j(u_j | r, t), p_{jk}(u_j, u_k | r, t; r', t'), p_{jkl}(u_j, u_k, u_l | r, t; r', t', r'' t''), \dots$$

Произведение $p_j(u_j | \mathbf{r}, t) du_j$ равно вероятности события, состоящего в том, что в точке \mathbf{r} в момент времени t компонента $u_j(\mathbf{r}, t)$ окажется лежащей в интервале числовых значений u_j и $u_j + du_j$:

$$p_j(u_j | r, t) du_j = P[u_j \leq u_j(r, t) \leq u_j + du_j]. \quad (173)$$

Аналогично вводится двухмерная плотность вероятности

$$p_{jk}(u_j, u_k | r, t; r', t') du_j du_k = P \left[\begin{array}{l} u_j \leq u_j(r, t) \leq u_j + du_j \\ u_k \leq u_k(r', t') \leq u_k + du_k \end{array} \right] \quad (174)$$

и т. д. Здесь для упрощения записи возможные значения, которые принимают компоненты вектора $u_j(\mathbf{r}, t)$, обозначены теми же буквами.

По ряду причин, о которых будет сказано несколько ниже, в статистической динамике предпочтителен другой способ описания. Образует моментные функции первого, второго, третьего и т. д. порядка:

$$\langle u_j(r, t) \rangle, \langle u_j(r, t) u_k(r', t') \rangle, \langle u_j(r, t) u_k(r', t') u_l(r'', t'') \rangle, \dots \quad (175)$$

Здесь, как и ранее, угловыми скобками обозначено осреднение по множеству реализаций. Функции первого порядка представляют собой математические ожидания компонент вектора в произвольной точке поля и в произвольный момент времени. Следующие моментные функции характеризуют связь между компонентами в двух точках поля в различные моменты времени и т. д. Связь между моментными функциями и совместными плотностями вероятности дается формулами:

$$\langle u_j(r, t) \rangle = \int u_j p_j(u_j | r, t) du_j,$$

$$\langle u_j(r, t) u_k(r', t') \rangle = \iint u_j u_k p_{jk}(u_j, u_k | r, t; r', t') du_j du_k, \dots \quad (176)$$

Вместо поля $u_j(\mathbf{r}, t)$ часто целесообразно рассматривать поле центрированной величины

$$\tilde{u}_j(r, t) = u_j(r, t) - \langle u_j(r, t) \rangle.$$

Соответствующие моментные функции:

$$K_{jk}(r, t; r', t') = \langle \tilde{u}_j(r, t) \tilde{u}_k(r', t') \rangle;$$

$$K_{jkl}(r, t; r', t'; r'', t'') = \langle \tilde{u}_j(r, t) \tilde{u}_k(r', t') \tilde{u}_l(r'', t'') \rangle \dots \quad (177)$$

называются центральными. Центральные моментные функции второго порядка называются корреляционными функциями. В дальнейшем всюду, если это не оговорено, под моментными функциями будем понимать центральные функции (177).

Нетрудно показать, что моментные функции обладают тензорными свойствами. Например, совокупность корреляционных функций векторного поля образует тензор второго ранга (точнее, тензорное поле удвоенного числа переменных $\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t'$).

Описание случайных полей приобретает большую гибкость, если использовать метод спектральных представлений (ср. § 1.6). Простейшим примером спектрального представления является разложение поля перемещений $u_j(\mathbf{r}, t)$ в ряд по формам собственных колебаний $\varphi_{j\alpha}(\mathbf{r})$:

$$u_j(r, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(t) \varphi_{j\alpha}(r). \quad (178)$$

Здесь α — номер формы колебаний. Коэффициенты ряда $U_{\alpha}(t)$ представляют собой случайные функции времени t . Применяя операцию осреднения, получим, что

$$\langle u_j(r, t) \rangle = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \langle U_{\alpha}(t) \rangle \varphi_{j\alpha}(r);$$

$$\langle u_j(r, t) u_k(r', t') \rangle = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \langle U_{\alpha}(t) U_{\beta}(t') \rangle \varphi_{j\alpha}(r) \varphi_{k\beta}(r') \quad (179)$$

и т. д. Таким образом, для статистического описания поля $u_j(\mathbf{r}, t)$ достаточно знать полную систему моментных функций для коэффициентов $U_{\alpha}(t)$ ряда (178).

Другим примером спектрального представления может служить обобщенное преобразование Фурье по координатам и времени случайного поля $u_j(\mathbf{r}, t)$:

$$u_j(\bar{r}, t) = \iint U(\mathbf{x}, \omega) \psi_j(r, t) |_{\mathbf{x}, \omega} d\mathbf{x} d\omega. \quad (180)$$

Здесь \mathbf{x} — вектор параметров пространственного преобразования Фурье; ω — параметр временного преобра-

зования; $\psi_j(\mathbf{r}, t | \mathbf{x}, \omega)$ — производящая вектор-функция (детерминистическая функция координат и времени, зависящая от \mathbf{x} и ω как от параметров); $U(\mathbf{x}, \omega)$ — некоторое случайное поле в новом пространстве \mathbf{x} , ω , называемое спектром поля $u_j(\mathbf{r}, t)$. Другой формой преобразования Фурье является следующая:

$$u_j(\mathbf{r}, t) = \iint U_j(\mathbf{x}, \omega) \psi(\mathbf{r}, t | \mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} d\omega. \quad (181)$$

Различие состоит в том, что в формуле (180) спектр является скаляром, а в формуле (181) — вектором.

Интегрирование в этих формулах производится по всей области изменения вектора \mathbf{x} ; $d\mathbf{x}$ — элемент объема в этом пространстве (например, в трехмерном случае $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$). Формулы (180) и (181) являются обобщением формулы (81) на пространственно-временные случайные поля.

Важным примером полей, для которых преобразования типа (180) и (181) оказываются весьма удобными, служат стационарные случайные поля. Поле, заданное при $-\infty < t < \infty$, называется стационарным, если его вероятностные характеристики не меняются во времени. Плотности вероятностей для стационарного поля при произвольных t_1, t_2, \dots и произвольном τ удовлетворяют соотношениям:

$$p_j(u_j | r, t) = p_j(u_j | r, t + \tau);$$

$$p_{jk}(u_j, u_k | r, t; r', t') = p_{jk}(u_j, u_k | r, t + \tau; r', t' + \tau)$$

и т. д., а моментные функции $K_{jk}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$, $K_{jkl}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'')$ и т. д. зависят от разностей $t' - t$, $t'' - t$, ... и не зависят от выбора начального момента наблюдения. Обычно стационарное случайное поле является вместе с тем и эргодическим во времени: его временные свойства в каждой точке поля могут быть получены обработкой одной достаточно продолжительной реализации. Если так, то определение моментной функции может быть сведено к осреднению соответствующих произведений по времени и последующему осреднению полученных пространственных полей по множеству реализаций.

Стационарные случайные поля $u_j(\mathbf{r}, t)$ допускают спектральное представление типа (84):

$$u_j(\mathbf{r}, t) = \langle u_j(\mathbf{r}, t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} U_j(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (182)$$

Случайное поле $U_j(\mathbf{r}, \omega)$ в пространстве \mathbf{r} , ω обладает свойством стохастической ортогональности по частоте ω :

$$\langle U_j^*(r, \omega) U_k(r', \omega') \rangle = S_{jk}(r, r', \omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (183)$$

Через $S_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ обозначены детерминистические функции. Эти функции связаны с соответствующими корреляционными функциями зависимостью

$$S_{jk}(r, r', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}(r, t; r', t + \tau) e^{-i\omega t} d\tau, \quad (184)$$

которая является аналогом формулы (86). Функции $S_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ образуют двухточечный тензор второго ранга; они обладают свойствами корреляционных функций по координатам и свойствами временной спектральной плотности. В книге [17], где эти функции, по-видимому, впервые были введены, они названы спектрами пространственной корреляции.

Другим примером спектрального разложения типа (181) служит разложение однородного поля в интеграл Фурье. Поле, заданное во всем пространстве, называется однородным, если его вероятностные характеристики инвариантны относительно сдвигов системы координат. В частности, плотности вероятностей для однородного поля при любых $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \dots$ и любых ρ удовлетворяют соотношениям

$$p_j(u_j | r, t) = p_j(u_j | r + \rho, t);$$

$$p_{jk}(u_j, u_k | r, t; r', t) = p_{jk}(u_j, u_k | r + \rho, t; r' + \rho, t)$$

и т. д. Моментные функции однородного поля зависят лишь от разностей координат $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, $\mathbf{r}'' - \mathbf{r}$ и т. д. Часто однородное поле является вместе с тем и эргодическим, что допускает замену осреднения по множеству реализаций осреднением по всему пространству.

Ограничимся случаем, когда поле $u_j(\mathbf{r}, t)$ является однородным по \mathbf{r} и стационарным по t . Тогда его можно представить в виде интеграла Фурье:

$$u_j(r, t) = \langle u_j(r, t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_j(\kappa, \omega) e^{i(\kappa r + \omega t)} d\kappa d\omega, \quad (185)$$

где κ — волновой вектор; для трехмерного пространства $\kappa \mathbf{r} = \kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2 + \kappa_3 x_3$. Спектр $U_j(\kappa, \omega)$ обладает свойством стохастической ортогональности

$$\langle U_j^*(\kappa, \omega) U_k(\kappa', \omega') \rangle = S_{jk}(\kappa, \omega) \delta(\kappa - \kappa') \delta(\omega - \omega'), \quad (186)$$

где $S_{jk}(\mathbf{r}, \omega)$ — тензор взаимных спектральных плотностей поля $u_{jk}(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, представление (185) обладает свойствами канонического разложения (§ 1.6). Корреляционные функции $K_{jk}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ однородного и стационарного случайного поля зависят лишь от $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ и $\tau = t' - t$; они выражаются через спектральные плотности так:

$$K_{jk}(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{jk}(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{r}\rho + \omega\tau)} d\mathbf{r} d\omega. \quad (187)$$

Обратное соотношение имеет вид

$$S_{jk}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}(\rho, \tau) e^{-i(\mathbf{r}\rho + \omega\tau)} d\rho d\tau, \quad (188)$$

где ν — число измерений пространства, в котором задан вектор u_j ; $d\rho$ — элемент объема в этом пространстве.

Разложение (185), как и введенные ранее разложения (84), (182) и т. п., носит формальный характер. Более строгая интерпретация этих разложений требует рассмотрения предельных переходов или применения понятия стохастического интеграла Фурье—Стилтьеса. Однако разложения типа (185) открывают наиболее короткий и прозрачный путь для получения различных соотношений. В качестве примера определим характеристики поля $v_j(\mathbf{r}, t)$, которое получается дифференцированием централизованного поля $u_j(\mathbf{r}, t)$:

$$v_j(r, t) = \frac{\partial^s u_j(r, t)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3} \partial t^{s_4}} \quad (189)$$

($\nu=3$, $s=s_1+s_2+s_3+s_4$). Дифференцируя формально соотношение (185) и принимая во внимание связь типа (186) между спектром и тензором спектральных плотностей, найдем, что

$$S_{jk}^{(v)}(\mathbf{r}, \omega) = \alpha_1^{2s_1} \alpha_2^{2s_2} \alpha_3^{2s_3} \omega^{2s_4} S_{jk}^{(u)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (190)$$

Затем по формуле (187) можно вычислить корреляционный тензор $K_{jk}^{(v)}(\rho, \tau)$:

$$K_{jk}^{(v)}(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1^{2s_1} \alpha_2^{2s_2} \alpha_3^{2s_3} \omega^{2s_4} S_{jk}^{(u)}(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{r}\rho + \omega\tau)} d\mathbf{r} d\omega. \quad (191)$$

Производная (189) от поля $u_j(\mathbf{r}, t)$ будет существо-

вать, если интеграл (191) сходится при всех ρ и τ . Достаточным условием будет сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1^{2s_1} \kappa_2^{2s_2} \kappa_3^{2s_3} \omega^{2s_4} S_{jk}^{(u)}(\kappa, \omega) d\kappa d\omega < \infty.$$

Дальнейшая специализация случайных полей связана с понятием изотропии. Случайное поле будем называть изотропным, если его вероятностные свойства инвариантны относительно вращений и отражений системы координат. Изотропия поля может быть локальной и общей. Примером локальной изотропии служит поле напряжений в шаре, если вероятностные характеристики в любой точке этого поля зависят только от длины вектора, проведенного из центра, и не зависят от его направления. В дальнейшем мы ограничимся однородными и изотропными полями, свойства которых инвариантны относительно сдвигов, вращений и отражений во всем пространстве.

Рассмотрим вначале скалярное поле $\varphi(\mathbf{r})$. Корреляционная функция однородного и изотропного скалярного поля

$$K(\rho) = \langle \tilde{\varphi}(\tau) \tilde{\varphi}(r + \rho) \rangle$$

зависит только от расстояний между точками поля $\rho = |\rho|$, а спектральная плотность — только от модуля волнового вектора $\kappa = |\kappa|$. Установим связь между $K(\rho)$ и $S(\kappa)$. В целях сокращения записи опустим зависимость поля от времени. Формулы (187) и (188) для скалярного поля принимают вид

$$\left. \begin{aligned} K(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\kappa) e^{i\kappa \rho} d\kappa; \\ S(\kappa) &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\rho) e^{-i\kappa \rho} d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Произведем в формулах (192) частичное интегрирование с учетом свойства изотропии. Начнем со случая двухмерного поля ($\nu=2$). Перейдем от прямоугольных координат ξ_1, ξ_2 к полярным координатам ρ, θ . На плоскости волновых чисел κ_1, κ_2 также введем поляр-

ные координаты κ , ψ . Подставляя во вторую формулу (192) выражения

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \rho \cos \theta, & \xi_2 &= \rho \sin \theta, \\ \kappa_1 &= \kappa \cos \psi, & \kappa_2 &= \kappa \sin \psi,\end{aligned}$$

получим

$$S(\kappa) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} K(\rho) \exp[-i\kappa\rho \cos(\theta - \psi)] \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Но согласно интегральной формуле Пуассона—Бесселя

$$\int_0^{2\pi} \exp[-i\kappa\rho \cos(\theta - \psi)] \, d\theta = 2\pi J_0(\kappa\rho),$$

где $J_0(\kappa\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Таким образом, спектральная плотность двумерного изотропного скалярного поля является преобразованием Фурье—Бесселя от соответствующей корреляционной функции. Аналогично выводится формула, разрешенная относительно спектральных плотностей. При этом, как и следовало ожидать, получается формула обратного преобразования Фурье—Бесселя. Окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned}K(\rho) &= 2\pi \int_0^{\infty} S(\kappa) J_0(\kappa\rho) \kappa \, d\kappa; \\ S(\kappa) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(\rho) J_0(\kappa\rho) \rho \, d\rho.\end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Заметим, что вывод этих формул можно было несколько упростить. В силу изотропии поля вектор κ можно было направить вдоль полярной оси, положив сразу $\psi = 0$.

Примером спектральной плотности изотропного двумерного скалярного поля является выражение

$$S(\kappa) = \frac{c}{\left(1 + \frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}\right)^n}, \quad (194)$$

где c , κ_0 и n — положительные константы. В частности, величина $1/\kappa_0$ характеризует масштаб корреляции поля. При $n=2$ выражение (194) описывает двумерный ана-

лог стационарного марковского (экспоненциально-коррелированного) процесса. Случайное поле при этом не будет дифференцируемым, так как интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 S(x) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 S(x) dx_1 dx_2$$

расходятся. При $n > 2$ получаем дифференцируемое случайное поле. По первой формуле (193) найдем корреляционную функцию поля, спектральная плотность которого имеет вид (194):

$$K(\rho) = 2\pi c \int_0^{\infty} \frac{J_0(x\rho)x dx}{\left(1 + \frac{x^2}{x_0^2}\right)^n}$$

Интеграл в правой части вычисляется, например, по методу контурного интегрирования. В результате находим, что [23]

$$K(\rho) = 2\pi c x_0^2 \frac{(x_0\rho)^{n-1} K_{n-1}(x_0\rho)}{2^{n-1}(n-1)!}, \quad (195)$$

где $K_{n-1}(x_0\rho)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента (функция Макдональда). График безразмерной функции $\varphi(\tau)$ в формуле

$$K(\rho) = 2\pi c x_0^2 \varphi(\tau), \quad \tau = x_0\rho$$

при различных значениях n представлен на рис. 11.

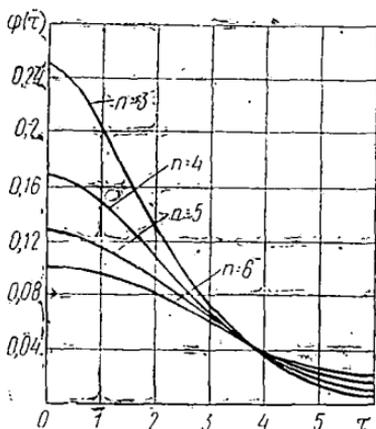


Рис. 11

от прямоугольных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 к сферическим координатам ρ, φ, θ . Аналогичные координаты введем также и в пространстве волновых чисел. Для

сокращения выкладок сразу совместим вектор κ с полярной осью. Тогда в сферических координатах $\kappa = (\kappa, 0, 0)$. Формула принимает вид

$$S(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty K(\rho) \exp(-i\kappa\rho \cos\theta) \sin\theta \rho^2 d\rho d\varphi d\theta.$$

Учитывая известное соотношение из теории бесселевых функций

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta \exp(-i\mu \cos\theta) d\theta = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\mu}\right)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) J_n(\mu),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, и замечая, что

$$J_{1/2}(\mu) = \left(\frac{2}{\pi\mu}\right)^{1/2} \sin\mu,$$

найдем¹

$$\int_0^\pi \exp(-i\kappa\rho \cos\theta) \sin\theta d\theta = 2 \frac{\sin \kappa\rho}{\kappa\rho}.$$

Таким образом, формула для $S(\kappa)$ существенно упрощается. Дополняя найденную формулу аналогичным обратным соотношением, получим окончательно

$$\left. \begin{aligned} K(\rho) &= 4\pi \int_0^\infty S(\kappa) \frac{\sin \kappa\rho}{\kappa\rho} \kappa^2 d\kappa; \\ S(\kappa) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\infty K(\rho) \frac{\sin \kappa\rho}{\kappa\rho} \rho^2 d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

Эти формулы можно трактовать как прямое и обратное преобразования Фурье—Бесселя при помощи функций полуцелого порядка (сферических функций Бесселя).

В качестве примера изотропного трехмерного поля приведем экспоненциально-коррелированное случайное поле, корреляционная функция и спектральная плотность которого даются формулами:

$$K(\rho) = K_0 e^{-\alpha\rho};$$

¹ Этот результат легко получается также и непосредственным интегрированием.

$$S(x) = \frac{K_0 \alpha}{\pi^2 (\alpha^2 + x^2)^2}.$$

Здесь K_0 и α — положительные постоянные. Соответствующее поле не является дифференцируемым. Примером дифференцируемого поля может служить поле с гауссовским законом корреляции:

$$K(\rho) = K_0 \exp(-\alpha \rho^2);$$

$$S(x) = \frac{K_0}{8(\pi\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right).$$

Однородное изотропное скалярное поле в пространстве с любым числом измерений может быть охарактеризовано заданием свойств одномерного поля (случайной функции одной переменной). Эта функция получается в результате сечения поля прямой произвольного направления; будем называть эту функцию сечением поля. Корреляционная функция сечения поля, очевидно, совпадает с корреляционной функцией поля, если рассматривать последнюю как функцию модуля радиус-вектора. Спектральная плотность сечения $T(x)$ связана с корреляционной функцией $K(\rho)$ зависимостью типа (86):

$$T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\rho) e^{-ix\rho} d\rho.$$

Таким образом, спектральная плотность сечения поля, вообще говоря, не равна спектральной плотности поля. Нетрудно получить формулы, связывающие спектральные плотности $S(x)$ и $T(x)$. Например, при $\nu=3$

$$S(x) = -\frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{dT(x)}{dx}.$$

Любая функция, которая является спектральной плотностью одномерного случайного процесса, может служить спектральной плотностью изотропного скалярного поля. Аналогичное утверждение в отношении корреляционных функций, вообще говоря, несправедливо. В самом деле, спектральная плотность $S(x)$ всегда неотрицательная функция: $S(x) \geq 0$. Чтобы функция $K(\rho)$ могла служить корреляционной функцией изотропного скалярного поля, необходимо, чтобы она была преобразованием Фурье—Бесселя типа (193) или (196) (в зависимости от числа измерений) от неотрицательной

функции. Это утверждение является аналогом теоремы Винера—Хинчина из теории одномерных случайных процессов.

Остановимся теперь на свойствах корреляционных тензоров от изотропных однородных векторных и тензорных полей. Очевидно, что требование изотропии будет выполнено, если корреляционные тензоры выражаются через единичные тензоры соответствующего ранга и через скалярные функции расстояний между точками поля. Примером может служить корреляционный тензор векторного поля $u_j(\mathbf{r})$, представленный в виде

$$K_{jk}(\rho) = \langle u_j(r)u_k(r + \rho) \rangle = f_1(\rho)\delta_{jk}, \quad (197)$$

где $f_1(\rho)$ — скалярная функция расстояния между точками $\rho = |\rho|$. В случае тензорного поля второго ранга $s_{jk}(\mathbf{r})$ с симметричным по индексам тензором $s_{jk} = s_{kj}$ корреляционный тензор выражается через две скалярные функции

$$K_{jklm}(\rho) = \langle s_{jk}(r)s_{lm}(r + \rho) \rangle = f_1(\rho)\delta_{jk}\delta_{lm} + f_2(\rho)(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}). \quad (198)$$

Как нетрудно показать, формулы типа (197) и (198) не определяют корреляционные тензоры изотропных полей в самом общем виде. Рассмотрим, например, векторное поле $u_j(\mathbf{r})$. Возьмем две точки поля с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Чтобы упростить рассуждения, выберем обе точки на одной из осей координат, например на оси Ox_1 (рис. 12). Компонента корреляционного тензора

$$K_{11}(r_2 - r_1) = \langle u_1(r_1)u_1(r_2) \rangle$$

характеризует стохастическую связь между компонентами вектора $u_j(\mathbf{r})$, направленными вдоль вектора ρ . Повернем теперь поле на угол $\pi/2$ вокруг оси, проходящей через точку с радиус-вектором \mathbf{r}_1 параллельно оси Ox_2 . Точка радиус-вектора \mathbf{r}_2 переместится при этом в положение радиус-вектора \mathbf{r}_3 , так что $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Для корреляционного тензора, заданного в форме (197), должно выполняться соотношение

$$\langle u_1(r_1)u_1(r_2) \rangle = \langle u_1(r_1)u_1(r_3) \rangle.$$

Но выражение, стоящее в правой части, описывает стохастическую связь между компонентами вектора $u_j(\mathbf{r})$, направленными ортогонально вектору ρ . Из условия изотропии выписанное выше равенство, вообще говоря, не вытекает.

Таким образом, выражения типа (197) и (198) соответствуют некоторому подмножеству изотропных полей. Будем называть эти поля сильно изотропными. В общем случае изотропии

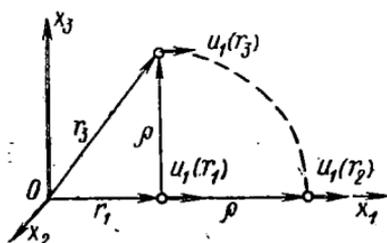


Рис. 12

корреляционные тензоры должны зависеть не только от модуля вектора \$\rho\$, но и от его компонент \$\xi_1, \xi_2, \xi_3\$ (от направляющих косинусов вектора \$\rho\$). Эта зависимость должна быть такова, чтобы при ортогональных преобразованиях она оставалась инвариантной. Другими словами, после ортогонального преобразования компоненты корреляционного тензора должны зависеть от компонент преобразованного вектора \$\rho\$ так же, как непреобразованные компоненты корреляционного тензора зависели от первоначальных компонент \$\rho\$.

Общая запись корреляционного тензора для изотропного однородного векторного поля имеет вид

$$K_{jk}(\rho) = f_1(\rho) \delta_{jk} + f_2(\rho) \xi_j \xi_k.$$

При этом в случае сильной изотропии $f_2(\rho) \equiv 0$. Для изотропного однородного тензорного поля второго ранга с симметричным по индексам тензором $s_{jk}(\mathbf{r})$ имеем

$$K_{jklm}(\rho) = f_1(\rho) \delta_{jk} \delta_{lm} + f_2(\rho) (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) + \\ + f_3(\rho) (\delta_{jk} \xi_l \xi_m + \delta_{lm} \xi_j \xi_k) + f_4(\rho) (\delta_{jl} \xi_k \xi_m + \\ + \delta_{jm} \xi_k \xi_l + \delta_{kl} \xi_j \xi_m + \delta_{km} \xi_j \xi_l) + f_5(\rho) \xi_j \xi_k \xi_l \xi_m.$$

Формула (198) вытекает отсюда при $f_3(\rho) \equiv f_4(\rho) \equiv f_5(\rho) \equiv 0$.

Однородные, а также однородные и изотропные поля являются специальными случаями, типичными для бесконечных областей. При помощи таких полей можно описывать, например, распределение упругих свойств в квазиоднородном и квазиизотропном поликристаллическом материале, распределение пульсаций скорости в однородном турбулентном потоке и т. п. Во многих задачах, однако, представляется возможным использовать конечные реализации однородных или изотропных полей. Например, турбулентные пульсации давления на пластину конечных размеров можно аппроксимировать в виде реализации однородного поля,

заданного на площади срединной поверхности пластины. Поля перемещений и напряжений в пластине не будут однородными; однако для них легко построить спектральное представление, параметрами которого будут служить компоненты волнового вектора k в разложениях типа (185).

В зависимости от выбранного способа описания случайных полей неизвестными функциями в стохастической краевой задаче будут либо функции распределения вероятности для выходных параметров, либо их моментные функции. Первый путь приводит к большим трудностям, которые до сих пор преодолевались лишь ценой перехода от распределенной системы к некоторой эквивалентной системе с конечным числом степеней свободы. Краевые же задачи для моментных функций ставятся довольно легко и некоторые из них поддаются разрешению. Особенно просто определяются математические ожидания и моментные функции второго порядка, несущие основную часть информации о свойствах случайного поля. Это заставляет отдавать предпочтение аппарату моментных функций (совместно с методом спектральных представлений).

§ 1.13. Методы решения линейных стохастических краевых задач

В настоящем параграфе мы дадим обзор постановок линейных стохастических краевых задач и методов их решения, а также проиллюстрируем их на некоторых простейших примерах. Изложение будем строить на примере системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{\nu} L_{jk} u_k = q_j \quad (j=1, 2, \dots, \nu) \quad (199)$$

относительно векторного поля $u_j(\mathbf{r}, t)$. Уравнения (199) можно интерпретировать как уравнения в перемещениях линейной теории упругости или уравнения в перемещениях линейной теории оболочек. При этом $q_j(\mathbf{r}, t)$ — векторное поле нагрузок, $u_j(\mathbf{r}, t)$ — векторное поле перемещений, L_{jk} — линейные дифференциальные операторы теории упругости или теории оболочек. Общая запись (199) пригодна как для статических, так и для динамических задач; операторы L_{jk} могут

включать в себя также силы вязкости. Если не требовать, чтобы числа измерений у векторов q_j , u_j и g были равны, то уравнения (199) можно истолковать как уравнения сопротивления материалов, теории пластин и т. п. Хотя в дальнейшем мы обсуждаем уравнения в перемещениях, однако, все методы применимы для решения краевых задач, сформулированных в напряжениях, а также в смешанной форме.

Для иллюстрации постановок задач и методов их решения используем следующий простой пример. Пусть тонкая круговая цилиндрическая оболочка длиной a нагружена осесимметричной нагрузкой интенсивностью $q(x, t)$, которая является центрированной случайной функцией координаты x и времени t . При некоторых предположениях осесимметричные колебания оболочки будут описываться уравнением относительно нормального перемещения

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho h \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} = q. \quad (200)$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость; E — модуль упругости; ρ — плотность материала оболочки; h — ее толщина; R — радиус кривизны срединной поверхности. Принято, что имеются диссипативные силы, пропорциональные нормальной скорости на срединной поверхности с коэффициентом пропорциональности ϵ .

Торцы оболочки $x=0$ и $x=a$ будем считать открытыми, а временные условия возьмем в двух вариантах. В первом из них при $t=0$ нагрузка прикладывается к покоящейся оболочке. Во втором варианте рассматриваются установившиеся случайные колебания, вызываемые стационарной случайной нагрузкой. Граничные и начальные условия в этих двух случаях имеют вид:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a); \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (t=0); \quad (201)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a); \quad |w| < \infty \quad (t \rightarrow \pm \infty). \quad (202)$$

Относительно интенсивности внешней нагрузки $q(x, t)$ будем предполагать, что она представляет собой пространственно-временной белый шум:

$$\left. \begin{aligned} \langle q(x, t) \rangle &\equiv 0; \\ \langle q(x, t) q(x', t') \rangle &\equiv s \delta(x-x') \delta(t-t') \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

(s — некоторая постоянная). В дальнейшем корреляционные функции полей $q(x, t)$ и $\omega(x, t)$ обозначаем через $K_q(x, t; x', t')$ и $K_\omega(x, t; x', t')$ соответственно.

Методы решения линейных стохастических краевых задач аналогичны методам статистической динамики линейных дискретных систем, описанным в § 1.5—1.8. Начнем с аналога метода функций Грина из § 1.5. Тензор Грина $H_{jk}(r, t; \rho, \tau)$ для системы (199) с соответствующими граничными условиями определяется как решение системы

$$\sum_{k=1}^{\nu} L_{jk} H_{kl}(r, t; \rho, \tau) = \delta_{jl} \delta(r - \rho) \delta(t - \tau) \quad (j, l = 1, 2, \dots, \nu),$$

удовлетворяющее граничным условиям для $u_j(r, t)$ и нулевым начальным условиям при $t = \tau$. Индексы под знаками операторов указывают функциональные аргументы, в пространстве которых оператор действует. При помощи тензора Грина решение системы (199) записывается в виде

$$u_j(r, t) = \sum_{k=1}^{\nu} \int H_{jk}(r, t; \rho, \tau) q_k(\rho, \tau) d\rho d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, \nu),$$

где интеграл берется по всей области изменения переменных r и t . Используя эту формулу, получим следующее выражение для корреляционного тензора поля $u(r, t)$:

$$\begin{aligned} K_{jk}^{(u)}(r, t; r', t') &= \\ &= \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\nu} \iint H_{jl}(r, t; \rho, \tau) H_{km}(r', t'; \rho', \tau') K_{lm}^{(q)}(\rho, \tau; \rho', \tau') d\rho d\tau d\rho' d\tau'. \end{aligned} \quad (204)$$

Формула (204) является обобщением формулы (40) на случай стохастических краевых задач.

Применим этот метод к нашему примеру с дополнительными условиями (201). Функция Грина уравнения (200) ищется как решение уравнения

$$\left(D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^3} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) H(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau),$$

удовлетворяющее условиям

$$H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, a); \quad H = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (t = \tau).$$

Вычисления дают

$$H(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau); \\ \frac{2}{\rho h a} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{\alpha \varepsilon}} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin[\omega_{\alpha \varepsilon}(t-\tau)] \sin \frac{\alpha \pi x}{a} \sin \frac{\alpha \pi \xi}{a} & (t \geq \tau). \end{cases}$$

Здесь $\omega_{\alpha \varepsilon}$ — частоты собственных колебаний оболочки, вычисленные с поправкой на диссипацию;

$$\omega_{\alpha \varepsilon} = \sqrt{\omega_{\alpha}^2 - \varepsilon^2};$$

ω_{α} — частоты собственных колебаний идеально упругой оболочки;

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left(\frac{Eh}{R^2} + \frac{\alpha^4 \pi^4}{a^4} D \right)} \quad (\alpha=1, 2, \dots).$$

Подставляя выражение для функции Грина в формулу типа (204)

$$K_{\omega}(x, t; x', t') = \int_0^a \int_{-\infty}^t \int_0^a \int_{-\infty}^{t'} H(x, t; \xi, \tau) H(x', t'; \xi', \tau') K_q(\xi, \tau; \xi', \tau') d\xi d\xi' d\tau d\tau',$$

после интегрирования получаем следующее стационарное решение:

$$K_{\omega}(x, t; x', t + \tau) = \frac{se^{-\varepsilon|\tau|}}{2\rho^2 h^2 a \varepsilon} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{\alpha}^2} \left(\cos \omega_{\alpha \varepsilon} \tau + \frac{\varepsilon}{\omega_{\alpha \varepsilon}} \sin \omega_{\alpha \varepsilon} |\tau| \right) \sin \frac{\alpha \pi x}{a} \sin \frac{\alpha \pi x'}{a}. \quad (205)$$

Рассмотрим теперь аналог метода дифференцированных уравнений, изложенного в § 1.6. Уравнения, связывающие моментные функции входных и выходных полей, получаются из уравнения (199) умножением их на $u_j(r, t)$, $q_j(r, t)$ или на их произведения и последующего осреднения. Уравнения для математических ожиданий совпадают с (199). Последующие уравнения имеют вид

$$\sum_{m=1}^{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} L_{jm} L_{kn} K_{mn}^{(u)}(r, t; r', t') = K_{jk}^{(q)}(r, t; r', t');$$

$$\sum_{m=1}^{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{p=1}^{\nu} L_{jm} L_{kn} L_{lp} K_{mnp}^{(u)}(r, t; r', t'; r'', t'') =$$

$$= K_{jkl}^{(q)}(r, t; r', t'; r'', t'') \quad (j, k, l = 1, 2, \dots, \nu)$$

и т. п. Граничные и начальные условия для моментных функций получаются из соответствующих условий для перемещений путем осреднения. Можно показать, что краевые задачи для моментных функций принадлежат к тому же типу, что и соответствующие детерминистические задачи.

Составим уравнение для корреляционной функции

$$\left(D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(D \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{Eh}{R^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t'} \right) K_w(x, t; x', t') = K_q(x, t; x', t'). \quad (206)$$

Условиям (201) для функции $w(x, t)$ соответствуют следующие условия для корреляционной функции $K_w(x, t; x', t')$:

$$K_w = \frac{\partial^2 K_w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a); \quad K_w = \frac{\partial K_w}{\partial t} = 0 \quad (t=0);$$

$$K_w = \frac{\partial^2 K_w}{\partial x'^2} = 0 \quad (x'=0, a); \quad K_w = \frac{\partial K_w}{\partial t'} = 0 \quad (t'=0).$$

Заметим, что выписанные граничные условия могут быть заменены эквивалентными им условиями, обладающими симметрией по отношению к перестановке штрихованных и нештрихованных переменных.

В случае (202) временные граничные условия для $K_w(x, t; x', t')$ сводятся к требованию ограниченности при $t \rightarrow \pm\infty$ и $t' \rightarrow \pm\infty$, а также к условиям сопряжения при $t=t'$. Если процесс $w(x, t)$ — стационарный во времени, то, вводя новую переменную $\tau = t' - t$, сократим число аргументов в уравнении (206) до трех. Тогда достаточно поставить начальные условия при $\tau=0$, вытекающие из условий сопряжения, а также условия ограниченности на бесконечности. Мы приходим к краевой задаче для уравнения

$$\left(D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(D \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{Eh}{R^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) K_w(x, x', \tau) = K_q(x, x', \tau) \quad (207)$$

с граничными условиями

$$K_w = \frac{\partial^2 K_w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a); \quad K_w = \frac{\partial^2 K_w}{\partial x'^2} = 0 \quad (x' = 0, a);$$

$$\frac{\partial K_w}{\partial \tau} = \frac{\partial K_w^3}{\partial \tau^3} = 0 \quad (\tau=0); \quad |K_w| < \infty \quad (\tau \rightarrow \pm\infty).$$

Если правая часть уравнения (207) при $\tau=0$ имеет особенность, то это может быть учтено в граничных условиях. Поставленная краевая задача легко решается по методу разделения переменных. Если, как это было принято ранее, нагрузка $q(x, t)$ представляет собой пространственно-временной белый шум, то после элементарных вычислений получаем решение в виде ряда, совпадающее с (205).

Обширная группа методов основана на использовании различных спектральных представлений. При решении задач механики весьма часто используется представление типа (178). Будем искать решение системы уравнений (199) в виде ряда

$$u_j(r, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(t) \varphi_{j\alpha}(r), \quad (208)$$

где $\varphi_{j\alpha}(r)$ — неслучайные векторные функции координат, образующие полную в некотором смысле систему; $U_{\alpha}(t)$ — искомые случайные функции времени (в статических задачах — случайные величины). Используя представление (208), мы по существу заменяем рассмотрение распределенной системы расчетом эквивалентной системы со счетным числом степеней свободы. В практических расчетах ряд (208) обычно усекается; при этом распределенная система по существу заменяется системой с конечным числом степеней свободы. И в том, и в другом случае функции $U_{\alpha}(t)$ можно интерпретировать как обобщенные координаты некоторой дискретной системы. Это позволяет называть метод, основанный на представлении типа (208), методом обобщенных координат.

Уравнения относительно обобщенных координат $U_{\alpha}(t)$ получим, подставляя ряд (208) в уравнения (199) и применяя, например, вариационный метод Бубнова—Галеркина. При некоторых ограничениях, накладываемых на свойства операторов L_{jk} , и надлежащем выборе базисных функций $\varphi_{j\alpha}(r)$ приходим к уравнениям следующего стандартного вида:

$$-\frac{d^2 U_{\alpha}}{dt^2} + 2\varepsilon_{\alpha} \frac{dU_{\alpha}}{dt} + \omega_{\alpha}^2 U_{\alpha} = Q_{\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots). \quad (209)$$

Здесь ω_α — частоты собственных колебаний системы, вычисленные без учета диссипации; ε_α — коэффициенты диссипации; $Q_\alpha(t)$ — обобщенные силы. Для обобщенных сил получаем формулы

$$Q_\alpha = \frac{(q, \varphi_\alpha)}{(\rho \varphi_\alpha, \varphi_\alpha)}, \quad (210)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — некоторая массовая плотность; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — скалярное произведение в функциональном пространстве вектор-функций $u_1(\mathbf{r}), u_2(\mathbf{r}), \dots, u_n(\mathbf{r})$, т. е.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n) d\mathbf{r};$$

$\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ — вектор-функции с компонентами $\varphi_{1\alpha}(\mathbf{r}), \varphi_{2\alpha}(\mathbf{r}), \dots, \varphi_{n\alpha}(\mathbf{r})$. Разделение обобщенных координат в уравнениях (209) достигается в результате того, что в качестве базисных вектор-функций $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ используются формы собственных колебаний системы, вычисленные без учета диссипации.

Моментные функции поля $u_j(\mathbf{r}, t)$ получаются осреднением соответствующих рядов. Так, для моментных функций второго порядка с учетом (208) получаем формулу

$$\langle u_j(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \langle U_\alpha(t) U_\beta(t') \rangle \varphi_{j\alpha}(\mathbf{r}) \varphi_{k\beta}(\mathbf{r}'). \quad (211)$$

Стоящие в ее правой части моментные функции обобщенных координат $U_\alpha(t)$ находятся из уравнений (209) с применением известных методов статистической динамики дискретных систем. Эти функции выражаются через моментные функции обобщенных сил $Q_\alpha(t)$, которые, в свою очередь, выражаются через характеристики поля $q_j(\mathbf{r}, t)$. Например, если $\nu=1$, то формула (210) принимает вид

$$Q_\alpha(t) = \frac{\int q(x, t) \varphi_\alpha(x) dx}{\int \rho \varphi_\alpha^2 dx}$$

Перемножая функции $Q_\alpha(t)$ при разных значениях индексов и аргументов и осредняя, находим

$$\langle Q_\alpha(t) Q_\beta(t') \rangle = \frac{\iint \langle q(x, t) q(x', t') \rangle \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x') dx dx'}{\int \rho \varphi_\alpha^2 dx \int \rho \varphi_\beta^2 dx}. \quad (212)$$

Таким образом, чтобы вычислить моментные функции обобщенных сил, необходимо знать пространственно-временную корреляционную функцию нагрузки $q(x, t)$ и формы собственных колебаний $\varphi_\alpha(x)$.

Возвращаемся к иллюстративному примеру. Решение уравнения (200) ищем в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_\alpha(t) \sin \frac{\alpha\pi x}{a}. \quad (213)$$

Подставляя этот ряд в уравнение и разлагая правую часть в аналогичный ряд, приходим к уравнениям типа (209)

$$\frac{d^2 W_\alpha}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dW_\alpha}{dt} + \omega_\alpha^2 W_\alpha = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots).$$

Моментные функции обобщенных сил определяются согласно формуле (212)

$$\langle Q_\alpha(t) Q_\beta(t') \rangle = \left(\frac{2}{\rho h a} \right)^2 \int_0^a \int_0^a K_q(x, t; x', t') \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \sin \frac{\beta\pi x'}{a} dx dx'.$$

Если пространственно-временная корреляционная функция нагрузки задана в виде (203), то простые вычисления дают

$$\langle Q_\alpha(t) Q_\beta(t') \rangle = \frac{2s\delta_{\alpha\beta}}{\rho^2 h^2 a} \delta(t - t').$$

Взаимные корреляционные функции обобщенных координат для стационарного процесса определяются как

$$\langle W_\alpha(t) W_\beta(t + \tau) \rangle = \frac{s\delta_{\alpha\beta} e^{-\epsilon|\tau|}}{2\rho^2 h^2 a \omega_\alpha^2} \left(\cos \omega_{\alpha\epsilon} \tau + \frac{\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \sin \omega_{\alpha\epsilon} |\tau| \right).$$

Отсюда окончательно получаем формулу для корреляционной функции $K_w(x, t; x', t + \tau)$, совпадающую с формулой (205).

Рассмотрим теперь метод, основанный на применении временных преобразований Фурье [22]. Этот метод эффективен, если внешние силы и искомые перемещения представляют собой стационарный случайный процесс. Поясним этот метод на частном примере. Введем по

формулам типа (184) спектры пространственных корреляций для нагрузок и перемещений:

$$S_q(x, x', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(x, x', \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau;$$

$$S_w(x, x', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_w(x, x', \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Функции $S_q(x, x', \omega)$ и $S_w(x, x', \omega)$ связаны между собой уравнением, которое получается из уравнения (207), если применить к последнему преобразование Фурье по времени:

$$\left(D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} - \rho h \omega^2 - 2i\rho h \varepsilon \omega \right) \left(D \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{Eh}{R^2} - \rho h \omega^2 + 2i\rho h \varepsilon \omega \right) \times \\ \times S_w(x, x', \omega) = S_q(x, x', \omega). \quad (214)$$

Граничные условия для спектра пространственных корреляций $S_w(x, x', \omega)$ остаются такими же, как и для $K_w(x, x', \tau)$. Решение уравнения (214) имеет вид

$$S_w(x, x', \omega) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{S_{\alpha\beta}(\omega)}{F_{\alpha}(-i\omega)F_{\beta}(i\omega)} \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \sin \frac{\beta\pi x'}{a},$$

где обозначено

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \left(\frac{2}{\rho h a} \right)^2 \int_0^a \int_0^a S_q(x, x', \omega) \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \sin \frac{\beta\pi x'}{a} dx dx';$$

$$F_{\alpha}(i\omega) = \omega_{\alpha}^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega.$$

Корреляционная функция находится далее по формуле

$$K_w(x, x', \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(x, x', \omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Если внешние силы образуют однородное случайное поле, то может оказаться эффективным метод пространственных преобразований Фурье. Покажем, как применяется этот метод в форме метода канонических

разложений. Пусть нагрузка $q(x, t)$ допускает представление типа (185):

$$q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, \omega) e^{i(x\alpha + \omega t)} dx d\omega$$

со спектром $Q(x, \omega)$, удовлетворяющим соотношению

$$\langle Q^*(x, \omega) Q(x', \omega) \rangle = S_q(x, \omega) \delta(x - x') \delta(\omega - \omega').$$

Здесь $S_q(x, \omega)$ — пространственно-временная спектральная плотность. Искомые перемещения могут быть представлены в виде

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, \omega) \psi(x, t | x, \omega) dx d\omega.$$

Функции $\psi(x, t | x, \omega)$ определяются из решения детерминистического дифференциального уравнения

$$D \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} \psi + \rho \hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = e^{i(x\alpha + \omega t)}.$$

Дополнительные условия, накладываемые на функцию $\psi(x, t | x, \omega)$, в случае (201) будут

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, a); \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (t = 0).$$

В случае (202) имеем дополнительные условия:

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, a); \quad |\psi| < \infty \quad (t \rightarrow \pm \infty).$$

Корреляционная функция перемещений $w(x, t)$ затем определяется по формуле

$$K_w(x, t; x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_q(x, \omega) \psi^*(x, t | x, \omega) \psi(x', t' | x, \omega) dx d\omega.$$

В отличие от методов, разобранных ранее, этот метод дает решение в форме кратных интегралов. Метод пространственных преобразований Фурье особенно эффективен в случае бесконечных и полубесконечных областей.

§ 1.14. Методы решения нелинейных стохастических краевых задач

Решение нелинейных задач для распределенных систем сопряжено со значительными трудностями. Лишь очень немногие задачи имеют точное решение в замкнутом виде. Поэтому в данной области преобладают приближенные методы. Большая часть приближенных методов статистической динамики дискретных систем, которые были описаны выше, может быть распространена на распределенные системы. Таков, например, метод замыкания цепочки уравнений относительно моментных функций при помощи статистических гипотез о связи между старшими моментными функциями. Метод малого параметра, метод статистической линеаризации и некоторые другие также легко обобщаются на задачи, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Обсуждение нелинейных стохастических задач для распределенных систем мы проведем на примере, допускающем решение в замкнутом виде (этот пример был впервые рассмотрен в статье [20]). Пусть бесконечно длинная круговая цилиндрическая оболочка нагружена осесимметричной случайной нагрузкой с интенсивностью $\dot{q}(x)$, которая является однородной случайной эргодической функцией осевой координаты x . Допустим, что закрепление оболочки таково, что на достаточно большой ее длине a взаимные осевые перемещения точек срединной поверхности в среднем равны нулю. Решающим нелинейным фактором будет осевая сила, препятствующая сближению сечений; эта сила определяется как

$$N = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{Eh}{2a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (215)$$

Вследствие эргодичности функций $w(x)$ правая часть содержит математическое ожидание от квадрата производной $v = dw/dx$:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \langle v^2 \rangle = \sigma_v^2. \quad (216)$$

Уравнение осесимметричной деформации оболочки с учетом осевой силы имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w - N \frac{d^2 w}{dx^2} = q. \quad (217)$$

На функцию $w(x)$ не накладывается никаких дополнительных условий, кроме требования ограниченности на $\pm\infty$.

Уравнение (217) с параметром N , определяемым согласно (215), является нелинейным, поскольку N нелинейно выражается через $w(x)$. Однако нелинейность носит здесь специальный характер и не усложняет существенно решение задачи по сравнению с линейной задачей. Введем спектральные плотности для функций $q(x)$ и $w(x)$:

$$S_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\xi) e^{-ix\xi} d\xi;$$

$$S_w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_w(\xi) e^{-ix\xi} d\xi.$$

Эти плотности связаны уравнением, вытекающим из (217). Решение этого уравнения дает

$$S_w(x) = \frac{S_q(x)}{\left(x^4 D + \frac{Eh}{R^2} + \frac{1}{2} x^2 Eh \sigma_v^2\right)^2}. \quad (218)$$

Правая часть формулы (218) содержит параметр σ_v , который, согласно (216), выражается через спектральную плотность

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 S_w(x) dx.$$

Подставляя сюда выражение (218), приходим к уравнению относительно параметра σ_v :

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 S_q(x) dx}{\left(x^4 D + \frac{Eh}{R^2} + \frac{1}{2} x^2 Eh \sigma_v^2\right)^2}. \quad (219)$$

В простых случаях интеграл, входящий в это уравнение, может быть вычислен. Пусть, например, $S_q(x) = s = \text{const}$. Уравнение (219) принимает вид

$$\sigma_v^2 = \frac{c}{(1 + \chi \sigma_0^2)^{3/2}}, \quad (220)$$

где введены обозначения

$$c = \frac{\pi s}{2^{5/2} D^2 \chi_0^5}; \quad \chi = \frac{1}{4} \chi_0^2 R^2; \quad \chi_0 = \left(\frac{Eh}{R^2 D} \right)^{1/4}$$

Рассмотренная выше задача оказалась столь доступной для решения не только вследствие того, что искомая функция зависит только от одной переменной x . Нетрудно видеть, что исходное уравнение (217) по существу является статистически линеаризованным. Нелинейность входит в него через средний квадрат производной σ_v^2 , а при заданном среднем квадрате уравнение линейно относительно искомой функции $w(x)$.

Найденное решение может служить эталоном для сопоставления различных приближенных методов. Возьмем, например, метод малого параметра. Пусть интенсивность внешней нагрузки достаточно мала. Полагая $q = \mu q_1(x)$, где μ — малый параметр, ищем решение уравнения (217) в виде ряда

$$w = \mu w_1(x) + \mu^3 w_3(x) + \mu^5 w_5(x) + \dots \quad (221)$$

Подстановка ряда в уравнение приводит к системе последовательно разрешаемых уравнений:

$$D \frac{d^4 w_1}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_1 = q_1;$$

$$D \frac{d^4 w_3}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_3 = \frac{1}{2} Eh \alpha_{11} \frac{d^2 w_1}{dx^2};$$

$$D \frac{d^4 w_5}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_5 = \frac{1}{2} Eh \left(\alpha_{11} \frac{d^2 w_3}{dx^2} + 2\alpha_{13} \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)$$

и т. д. Здесь введено обозначение

$$\alpha_{jk} = \left\langle \frac{dw_j}{dx} \frac{dw_k}{dx} \right\rangle.$$

Решение уравнений ищем по методу канонических разложений. Полагая

$$q_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) e^{ix} dx; \quad w_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_j(x) e^{ix} dx,$$

после простых выкладок получим

$$W_1(x) = \frac{Q(x)}{D(x_0^4 + x^4)},$$

$$W_3(x) = - \frac{2\alpha_{11}x^2x_0^2\chi}{x_0^4 + x^4} W_1(x);$$

$$W_5 = - \frac{4x^2x_0^2\chi}{x_0^4 + x^4} \left(\alpha_{13} - \frac{\alpha_{11}^2x^2x_0^2\chi}{x_0^4 + x^4} \right) W_1(x) \dots$$

Спектральную плотность $S_w(\kappa)$ вычислим с учетом формулы (221)

$$S_w(\kappa) = \mu^2 S_{w_1 w_1}(\kappa) + 2\mu^4 S_{w_1 w_3}(\kappa) + \mu^6 [2S_{w_1 w_5}(\kappa) + S_{w_3 w_3}(\kappa)] + \dots, \quad (222)$$

где $S_{w_j w_k}(\kappa)$ — взаимные спектральные плотности функций, образующих ряд (221). Эти спектральные плотности легко выражаются через спектры $W_j(\kappa)$. Пусть $S_q(\kappa) = s = \text{const}$. Умножая ряд (222) на κ^2 и интегрируя, получим ряд для параметра σ_v^2 :

$$\sigma_v^2 = c - \frac{3}{2} \chi c^2 + \frac{33}{8} \chi c^3 + \dots$$

Выписанные члены ряда совпадают с приближенной формулой для σ_v , которая получается, если решение точного уравнения (220) искать в виде ряда по степеням c .

Одним из наиболее эффективных приближенных методов является метод сведения к дискретным системам при помощи разложений типа (208). Представляя решение нелинейной задачи в виде ряда типа (208) и применяя один из вариационных методов, приходим к системе обыкновенных дифференциальных или алгебраических уравнений относительно обобщенных координат W_α . Дальнейшее исследование проводится методами статистической динамики дискретных систем.

Для иллюстрации метода обобщенных координат в применении к нелинейным задачам несколько изменим условия задачи, поставленной в начале параграфа. Пусть оболочка имеет конечную длину a (рис. 13), а нагрузка $q(x)$ является произвольной случайной функцией координаты x . Торцы оболочки $x=0$ и $x=a$ будем считать опертymi и несмещающимися. Осесимметрич-

ная деформация оболочки описывается уравнением (217). Осевая сила N определяется в этом случае не по формуле (215), а по формуле

$$N = \frac{Eh}{2a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (223)$$

Выражение, стоящее в правой части, уже не может быть истолковано аналогично (216).

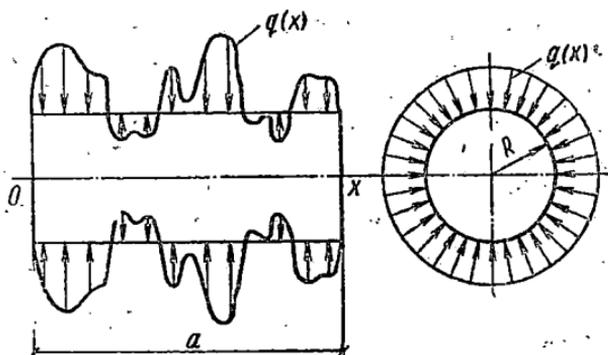


Рис. 13

Будем искать решение уравнения (217) в виде ряда по функциям, удовлетворяющим граничным условиям для опертой оболочки:

$$w(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha} \sin \frac{\alpha \pi x}{a}. \quad (224)$$

Здесь W_{α} — случайные величины. Подставляя этот ряд в формулу (223), легко найдем

$$\int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{2a} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha^2 W_{\alpha}^2.$$

Отсюда после подстановки в уравнение (217) приходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда (224):

$$\left(D \frac{\alpha^4 \pi^4}{a^4} + \frac{Eh}{R^3} \right) W_{\alpha} + \frac{\alpha^2 \pi^4 Eh}{4a^4} W_{\alpha} \sum_{\beta=1}^{\infty} \beta^2 W_{\beta}^2 = Q_{\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots). \quad (225)$$

Уравнения (225) можно использовать для определения моментов случайных величин W_{α} , а по этим мо-

ментам можно вычислить корреляционную функцию перемещения $\omega(x)$. Ввиду нелинейности системы (225) будем получать бесконечную цепочку уравнений относительно моментов. Впрочем, можно найти и точное решение этой системы, которая является дискретным аналогом соотношений из предыдущего примера.

Еще один способ основан на трактовке полученной дискретной системы как вырожденной системы (в смысле § 1.3). Заметим, что соотношения (225) разрешены относительно входных параметров Q_α . Поэтому мы можем сразу применить формулу (13), связывающую плотности вероятностей входных и выходных параметров. Усечем ряд (224), сохранив в нем первые n членов. Пусть $p_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ — известная совместная плотность вероятности для обобщенных сил. Совместная плотность вероятности для обобщенных координат $p_w(W_1, W_2, \dots, W_n)$ определяется как

$$p_w(W_1, W_2, \dots, W_n) = p_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \left| \frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)}{\partial(W_1, W_2, \dots, W_n)} \right|.$$

В правую часть подставляются выражения для Q_α , рассматриваемые согласно (225) как функции обобщенных координат W_1, W_2, \dots, W_n .

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ§ 2.1. Расчет балок,
лежащих на сплошном упругом основании
со случайными характеристиками

Элементы, взаимодействующие с упругим основанием, часто встречаются в расчетных схемах строительной механики. Расчет обычно производится в предположении, что свойства конструкции и основания являются детерминистическими. Это предположение выполняется далеко не всегда. Например, свойства грунтового основания зависят от многих факторов, не поддающихся непосредственному учету, и поэтому обычно носят случайный характер. Коэффициенты жесткости и прочности основания могут меняться случайным образом как при переходе от одной точки основания к другой, так и в целом, т. е. при переходе от одной конструкции к другой. Ввиду сказанного разработка методов расчета конструкций, взаимодействующих со стохастическим упругим основанием, представляет практический интерес.

Задача о деформации балки, лежащей на стохастическом упругом основании винклеровского типа, была впервые поставлена и решена с привлечением теории случайных функций в работе [19]. В дальнейшем эта задача и ее обобщения рассматривались рядом авторов. В частности, В. Л. Благонядин и Е. П. Кудрявцев [7]; Е. П. Кудрявцев, А. В. Новожилов и Н. И. Судакова [53] провели экспериментальное исследование статистических свойств грунтовых оснований, собрали статистический материал о деформациях подземных трубопроводов и провели систематическое сопоставление теоретических и экспериментальных результатов. Ниже мы рассмотрим некоторое обобщение теорий, развитой в статье [19].

Рассмотрим деформацию бесконечно длинного упругого стержня, лежащего на сплошном упругом основании. Будем считать, что свойства основания подчиняются гипотезе Винклера, т. е. что реакция основания пропорциональна прогибу в данной точке, а отлипание балки от основания отсутствует. Изгибную жесткость бал-

ки обозначим через EJ . Коэффициент жесткости основания, равный усилию, которое требуется для погружения отрезка балки единичной длины на единицу глубины, обозначим через c . Выберем систему координат Oxy , как показано на рис. 14. Пусть начальная ось балки

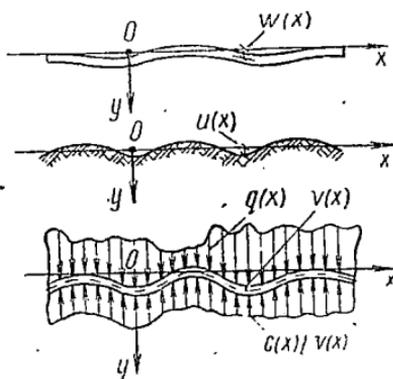


Рис. 14

имеет небольшие искривления в плоскости Oxy . Эти искривления характеризуются функцией $w(x)$, выбираемой таким образом, чтобы ее среднее значение на достаточно большой длине было равно нулю. Основание, подготовленное для укладки балки, будем предполагать неровным. Уравнение кривой, описывающей эту начальную неровность, пусть будет $u=u(x)$. Интенсивность внешних сил, действующих на балку (собственный вес, давление вышележащих слоев грунта и т. п.), обозначим через $q(x)$.

Для отыскания полного прогиба $v(x)$ стержня, нагруженного силами $q(x)$ и реакцией основания $-c(v-u)$, имеем уравнение

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} + cv = q + cu + EJ \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (1)$$

Допустим, что функция начальных искривлений $w(x)$, функция неровностей $u(x)$, внешняя нагрузка $q(x)$ и коэффициент жесткости основания $c(x)$ являются стационарными случайными функциями координаты x . Среднее значение нагрузки и коэффициента жесткости обозначим соответственно через q_0 и c_0 . Среднее значение функции $u(x)$ примем равным нулю. При этих допущениях уравнение (1) вместе с условиями ограниченности решения на бесконечности описывает стохастическую краевую задачу относительно функции $v(x)$. Эта задача будет линейной по отношению к входам $q(x)$, $u(x)$ и $w(x)$; по отношению к входу $c(x)$ эта задача будет нелинейной. Заметим, что с точки зрения приложений наибольший интерес представляет случай-

ная изменчивость коэффициента отпора. Трактую задачу как стохастически нелинейную, применим для ее решения метод малого параметра.

Будем полагать неоднородности статистически малыми в том смысле, что вероятность больших отклонений от средних значений достаточно мала. Тогда функции, входящие в уравнение (1), можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} q &= q_0 + \mu q_1(x); \\ c &= c_0 + \mu c_1(x); \\ u &= \mu u_1(x); \\ w &= \mu w_1(x), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где μ — малый параметр. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, мы будем приписывать ему формальный смысл, а после выполнения всех выкладок будем полагать его равным единице. Учитывая формулы (1), будем искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра μ ;

$$v = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \dots \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим рекуррентную последовательность линейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^4 v_0}{dx^4} + c_0 v_0 &= q_0; \\ EJ \frac{d^4 v_1}{dx^4} + c_0 v_1 &= q_1 - c_1 v_0 + c_0 u_1 + EJ \frac{d^4 w_1}{dx^4}; \\ EJ \frac{d^4 v_2}{dx^4} + c_0 v_2 &= -c_1 v_1 + c_1 u_1; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и т. д. Решение первого уравнения, ограниченное на бесконечности, имеет вид

$$v_0 = \frac{q_0}{c_0}. \quad (5)$$

Это решение имеет смысл перемещения балки в однородных условиях. Рассмотрим второе уравнение системы (4). Вводя обозначение для функции неоднородности

$$r = q_1 - c_1 v_0 + c_0 u_1 + EJ \frac{d^4 w_1}{dx^4}, \quad (6)$$

перепишем это уравнение в виде

$$EJ \frac{d^4 v_1}{dx^4} + c_0 v_1 = r. \quad (7)$$

В правой части этого уравнения стоит стационарная случайная функция x с математическим ожиданием, равным нулю. Для решения этого уравнения применим, например, метод спектральных представлений. Представим правую часть уравнения (7) в виде стохастического интеграла Фурье¹:

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ikx} dk,$$

где k — волновое число; $R(k)$ — обобщенная случайная функция — спектр функции $r(x)$. Для искомой функции введем аналогичное представление:

$$v_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(k) e^{ikx} dk.$$

Связь между спектрами $V_1(k)$ и $R(k)$ дается формулой

$$L_1(k) = \frac{R(k)}{k^4 EJ + c_0}.$$

Отсюда приходим к следующему соотношению, связывающему спектральную плотность $S_{v_1}(k)$ функции $v_1(x)$ со спектральной плотностью $S_r(k)$, соответствующей функции неоднородности (6):

$$S_{v_1}(k) = \frac{S_r(k)}{(k^4 EJ + c_0)^2}. \quad (8)$$

Формулу (8) можно трактовать как частный случай формулы (1.97); роль импеданса системы играет выражение

$$L(ik) = k^4 EJ + c_0.$$

Если неоднородность основания достаточно мала, то полученного приближения достаточно для приближенного описания деформаций балки и основания. В самом деле, из формулы (3) видно, что математическое ожи-

¹ В отличие от гл. 1, где волновые числа обозначались через κ , κ_1 , κ_2 , κ_3 и т. д., далее волновые числа обозначаются через k , k_1 , k_2 , k_3 и т. д.

дание прогиба $v(x)$ отличается от v_0 членами, имеющими порядок μ^2 и выше. Поэтому флуктуационная часть функции $v(x)$ будет

$$\tilde{v}(x) = v(x) - \langle v \rangle = \mu v_1(x) + \dots,$$

где точками обозначены члены, содержащие μ в квадрате и более высокой степени. Следовательно, с точностью до множителя μ^2 (полагаемого после выполнения всех выкладок равным единице) спектральная плотность функции $v(x)$ совпадает со спектральной плотностью (8). Соответствующая корреляционная функция вычисляется по формуле типа (1.85):

$$K_{v_1}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_r(k) e^{ik\xi} dk}{(k^4 EJ + c_0)^2}. \quad (9)$$

Используя формулу (8), можно сделать несколько общих заключений о влиянии различных факторов на прогибы балки и возникающие в ней изгибающие моменты. Характер влияния неоднородностей зависит от соотношения между волновыми числами и параметром

$$k_0 = \left(\frac{c_0}{EJ} \right)^{1/4}, \quad (10)$$

который мы будем называть собственным волновым числом. Собственное волновое число характеризует отношение между жесткостью основания и жесткостью балки. Его механический смысл виден из следующих соображений. Найдем выражение для прогиба балки, лежащей на основании с детерминистическим коэффициентом жесткости c_0 , под действием сосредоточенной силы, приложенной в начале координат. Этот прогиб определится как решение уравнения

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} + c_0 v = \delta(x),$$

удовлетворяющее условию затухания на бесконечности. После несложных вычислений получаем

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{8} k_0^3 EJ} e^{-\frac{k_0 |x|}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{k_0 x}{\sqrt{2}} + \sin \frac{k_0 |x|}{\sqrt{2}} \right).$$

Таким образом, с точностью до множителя $\sqrt{2}$ собственное волновое число (10) совпадает со множителем

при x в выражениях, играющих роль аргумента у тригонометрических функций. Величина, обратная k_0 , имеет порядок характерной длины волны у осциллирующего (хотя и очень быстро затухающего) прогиба.

С учетом формулы (10) выражение для спектральной плотности прогиба (8) принимает вид

$$S_{v_1}(k) = \frac{S_r(k)}{c_0^2 \left(1 + \frac{k^4}{k_0^4}\right)^2}. \quad (11)$$

Для расчета на прочность необходимо знать спектральную плотность изгибающего момента $m_1(x)$, возникающего в сечениях балки. Замечая, что

$$m_1 = EJ \frac{d^2 v_1}{dx^2},$$

и используя правило дифференцирования случайных функций, заданных при помощи спектрального представления Фурье, получим

$$S_{m_1}(k) = \frac{S_r(k)}{k_0^4 \left(\frac{k^2}{k_0^2} + \frac{k_0^2}{k^2}\right)^2}. \quad (12)$$

Предположим для простоты, что функции $q_1(x)$, $c_1(x)$, $u_1(x)$, и $w_1(x)$ стохастически независимы. Тогда с учетом формулы (6) спектральная плотность $S_r(k)$ может быть представлена в виде

$$S_r(k) = S_{q_1}(k) + \frac{q_0^2}{c_0^2} S_{c_1}(k) + c_0^2 S_{u_1}(k) + c_0^2 \left(\frac{k}{k_0}\right)^8 S_{w_1}(k). \quad (13)$$

При этом каждый тип неоднородностей может быть изучен отдельно. Из формул (11) и (13) видно, что неоднородности, обусловленные неравномерностью нагрузки, неравномерностью жесткости основания и неровностью основания, вносят существенный вклад в неоднородность прогиба только при малых волновых числах, т. е. при достаточно больших длинах волн. В то же время компоненты, которым соответствуют достаточно большие волновые числа ($k \gg k_0$), не оказывают заметного влияния. Иной характер имеет влияние начальных искривлений балки. Здесь невелико влияние компонент с малыми волновыми числами ($k \ll k_0$) и достаточно велико влияние компонент с большими волновыми числами.

ми. При этом с увеличением k/k_0 отношение спектральных плотностей $S_{\sigma_1}(k)$ и $S_{\omega_1}(k)$ стремится к единице. Сделанные выводы проиллюстрированы на рис. 15, где кривая 1 соответствует первым трем членам правой части формулы (13), а кривая 2 — последнему члену¹.

Влияние неоднородностей на распределение изгибающих моментов балки носит еще более своеобразный характер. Нетрудно видеть, что выражение, стоящее в скобках в формуле (12), имеет точный минимум при $k=k_0$. Таким образом, отношение спектральных плотностей $S_{m_1}(k)$ и $S_r(k)$ становится максимальным при $k=k_0$. Это означает, что система балка — упругое основание обладает избирательной способностью по отношению к неоднородностям, волновые числа которых

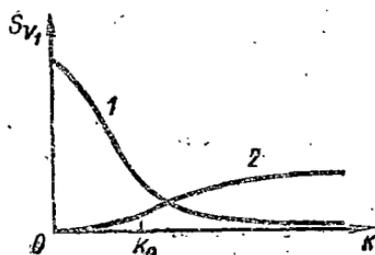


Рис. 15

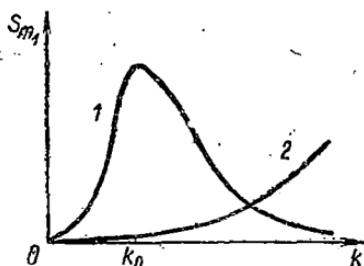


Рис. 16

близки к собственному волновому числу k_0 . Типичные зависимости спектральной плотности изгибающего момента от волнового числа представлены на рис. 16. Как и на рис. 15, кривая 1 отражает влияние неравномерности нагрузки, неравномерности жесткости основания и начальной неровности основания; кривая 2 характеризует влияние начальных искривлений балки.

Избирательные свойства системы балка — упругое основание проявляются также и в следующей задаче. Допустим, что балка нагревается от начальной температуры T_0 , при которой осевая сила в балке равна нулю, до температуры $T_0 + \Delta T$. При этом возникает сжимающая сила

$$N = \alpha E F \Delta T. \quad (14)$$

¹ Графики на рис. 15—16 носят качественный характер; при этом принято, что в рассматриваемом диапазоне волновых чисел спектральные плотности $S_{q_1}(k)$, $S_{c_1}(k)$, $S_{u_1}(k)$ и $S_{\omega_1}(k)$ изменяются достаточно медленно.

Здесь EF — жесткость балки при сжатии; α — коэффициент линейного температурного расширения. Температурными деформациями упругого основания, тангенциальными силами сцепления и т. п. пренебрегаем. Уравнение изгиба балки с учетом осевой силы получается из уравнения (1) добавлением в левую часть произведения осевой силы N на вторую производную от полного прогиба. Ограничимся уравнением первого приближения. Вместо (7) получаем уравнение

$$EJ \frac{d^4 v_1}{dx^4} + N \frac{d^2 v_1}{dx^2} + c_0 v_1 = r, \quad (15)$$

в правой части которого стоит выражение (6). Импеданс системы с учетом формулы (14), имеет вид

$$L(ik) = k^4 EJ - k^2 \alpha EF \Delta T + c_0. \quad (16)$$

При достаточно больших приращениях температуры ΔT импеданс может иметь действительные корни. Наименьшее значение ΔT , при котором эти корни появляются, представляет собой критическую температуру. Приравняв правую часть формулы (16) нулю, получим

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha EF} \left(k^2 EJ + \frac{c_0}{k^2} \right). \quad (17)$$

Правая часть принимает минимальное значение при $k = k_0$. Отсюда видно, что температурное выпучивание балки начинается с преимущественного развития тех волн, длина которых близка к $2\pi/k_0$.

Критическое приращение температуры ΔT вычислим по формуле (17), подставляя в нее k_0 вместо k . В результате получим формулу

$$\Delta T_* = \frac{2\sqrt{EJc_0}}{\alpha EF}. \quad (18)$$

Эта формула, очевидно, совпадает с известной формулой для критической температуры (критической силы) в задаче о продольном изгибе бесконечно длинной балки на винклеровском основании.

С учетом формул (16) и (18) получим формулу для спектральной плотности прогиба $v_1(x)$

$$S_{v_1}(k) = \frac{S_r(k)}{c_0^2 \left(1 + \frac{k^4}{k_0^4} - 2 \frac{k^2}{k_0^2} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_*} \right)^2}. \quad (19)$$

Эта формула аналогична по структуре формуле (11).

Для спектральной плотности изгибающего момента имеем формулу, аналогичную формуле (12):

$$S_{m_1}(k) = \frac{S_r(k)}{k_0^4 \left(\frac{k^2}{k_0^2} + \frac{k_0^2}{k^2} - 2 \frac{\Delta T}{\Delta T_*} \right)^2} \quad (20)$$

Результаты вычислений по формулам (19) и (20) при различных отношениях k/k_0 представлены на рис. 17 и 18. По оси ординат отложены соответствующие безразмерные спектральные плотности. По мере

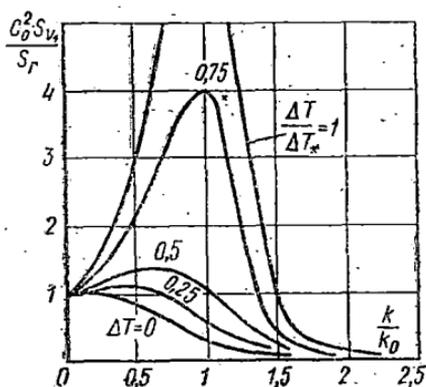


Рис. 17

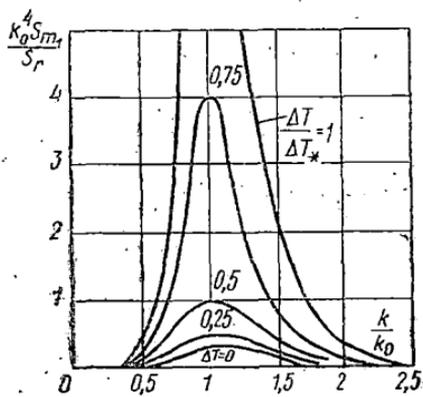


Рис. 18

приближения приращения температуры ΔT к его критическому значению неоднородности прогибов и изгибающих моментов существенно возрастают; наиболее быстро возрастают те компоненты, волновые числа которых близки к собственному волновому числу k_0 . Рассмотрим, например, значение спектральной плотности $S_{m_1}(k)$ при $k=k_0$. При увеличении ΔT от нуля до $1/2 \Delta T_*$ это значение возрастает в 4 раза. При $\Delta T = 1/4 \Delta T_*$ значение спектральной плотности $S_{m_1}(k_0)$ увеличивается в 16 раз по сравнению с начальным значением.

Изложенная теория неоднократно подвергалась экспериментальной проверке как в лабораторных, так и в полевых условиях. Кратко остановимся на результатах полевых испытаний, изложенных в статье [53]. Испытания проводились на трубопроводах (волноводах) из стали и стеклопластика, прокладываемых в грунте на глубине около 1,6 м. На дне траншеи устраивалась песчаная подушка толщиной приблизительно 0,2 м. На нее

укладывались железобетонные плиты, а на плиты насыпался слой песка толщиной около 0,2 м, который служил основанием для трубопровода. Сверху давался еще слой песка толщиной приблизительно 0,2 м, после чего траншея засыпалась грунтом.

Основной причиной неоднородности деформаций трубопроводов является неоднородность основания. Свойства основания изучались путем погружения в него штампов длиной 50 мм с подошвами, форма которых повторяла форму трубопровода. Штампы располагались вдоль прямой линии; расстояние между центрами штампов составляло $\lambda = 55$ мм. Каждая серия испытаний содержала измерения в $n = 90$ точках. Вычисление статистических оценок для математического ожидания и дисперсии коэффициента жесткости

$$\langle c \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j, \quad \langle \tilde{c}^2 \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (c_j - \langle c \rangle)^2,$$

а также для корреляционной функции

$$K_c(m\lambda) = \frac{1}{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} (c_{j+m} - \langle c \rangle)(c_j - \langle c \rangle)$$

производилось на ЭВМ. Например, для одного из типов оснований получены значения

$$\langle c \rangle = 13,83 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2}, \quad \langle \tilde{c}^2 \rangle = 64,5 \text{ кгс}^2 \cdot \text{см}^{-4}.$$

График нормированной корреляционной функции $\rho(\xi)$ для этого случая представлен на рис. 19. Технологические особенности подготовки основания (например, отсыпка песка кучами с последующим выравниванием) могут привести к появлению скрытых периодичностей у функции $c(x)$.

Сравнение теории с экспериментом проводилось на основании измерений кривизны оси трубопровода. Для этого через каждые 50 мм определялись углы поворота касательной к оси. Измерения производились при помощи автоколлиматора и зеркального датчика. Статистические оценки для математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции кривизны находились по формулам:

$$\langle \kappa \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa_j, \quad \langle \tilde{\kappa}^2 \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\kappa_j - \langle \kappa \rangle)^2;$$

$$K_x(m\lambda) = \frac{1}{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} (x_{j+m} - \langle x \rangle)(x_j - \langle x \rangle).$$

Здесь в отличие от определения коэффициента жесткости было принято, что $n=316$, $\lambda=50$ мм. Значения спектральной плотности кривизны оценивались путем численного интегрирования по формуле прямоугольников

$$S_x(k) = \frac{\lambda}{2\pi} K_x(0) + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^n K_x(j\lambda) \cos j\lambda k.$$

Некоторые осложнения появятся из-за необходимости учета начальных искривлений оси трубопровода и случайных ошибок датчиков. Полагая, что начальные

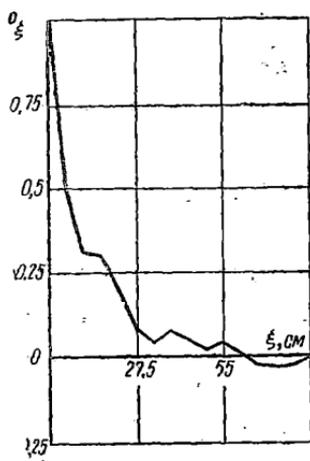


Рис. 19

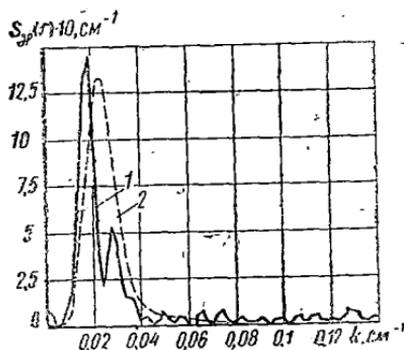


Рис. 20

искривления и дополнительные искривления стохастически независимы, мы найдем искомую спектральную плотность как разность между спектральными плотностями, измеренными до укладки в траншеи и после засыпки трубопровода. Случайные ошибки датчика вызваны его перекосами при движении по внутренней поверхности. Эти ошибки можно рассматривать как однородные функции координаты, стохастически не связанные с кривизной оси. В самом деле, анализ реализаций показывает, что характерные волновые числа этих функций велики по сравнению с собственным вол-

новым числом k_0 . Пусть получены две реализации $x_1(x)$ и $x_2(x)$ кривизны на одном и том же участке. Тогда

$$x_j(x) = x(x) + \eta_j(x),$$

где $\eta_j(x)$ — функция ошибок измерения. Замечая, что функции в разных измерениях между собой не коррелируют, легко получим формулу для спектральной плотности ошибок:

$$S_{\eta}(k) = \frac{1}{4} S_{x_1 - x_2}(k).$$

Здесь $S_{x_2 - x_1}(k)$ — спектральная плотность разности $x_2(x) - x_1(x)$. После того как спектральная плотность $S_{\eta}(k)$ найдена, можно вычислить исправленную спектральную плотность кривизны:

$$S_x(k) = S_{x_j}(k) - S_{\eta}(k).$$

Как показывают измерения, функция ошибок $\eta(x)$ в диапазоне волновых чисел до $3k_0$ близка к белому шуму. При этом интенсивность шума может составлять до 25—30% измеряемой спектральной плотности. Поэтому исключение ошибки датчика совершенно необходимо.

На рис. 20 представлены результаты вычислений спектральной плотности кривизны после ее исправления с учетом начальной кривизны оси и случайных ошибок датчика (кривая 1). Приведем дополнительные сведения о трубопроводе: его изгибная жесткость $EJ = 0,58 \times 10^8$ кгс·см², а собственное волновое число $k_0 = 0,0221$ см⁻¹. Нагрузка от веса грунта на единицу длины трубопровода составляла $q_0 = 8,9$ кгс·см⁻¹. На график нанесена также теоретическая зависимость (кривая 2). Если принять во внимание большое число сделанных допущений, то можно признать, что между расчетом и экспериментом — удовлетворительное согласие. Дополнительные сведения об этом можно найти в статье [53].

§ 2.2. Расчет балок на дискретных упругих опорах со случайными характеристиками

Задача о расчете неразрезных балок на дискретных упругих опорах представляет значительный практический интерес. По ряду технологических и эксплуатационных причин характеристики этих балок могут оказаться случайными. Случайными свойствами могут об-

ладать длины пролетов, коэффициенты жесткости опор, начальные и эксплуатационные осадки опор и т. п. Примером могут служить случайные неточности (рассогласования) опорных сечений как в плане, так и в профиле, неизбежные при прокладке трубопроводов, волноводов и т. д. Неравномерные просадки опор в течение эксплуатации усугубляют разброс параметров конструкций.

Метод расчета многопролетных балок на упругих опорах со случайными характеристиками был разрабо-

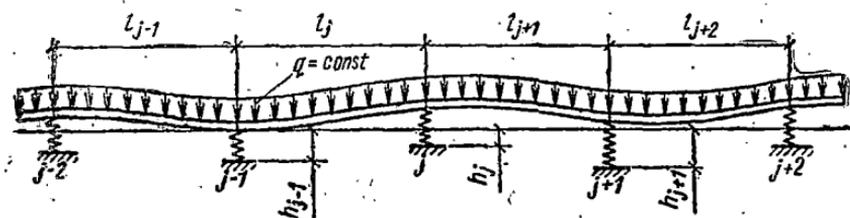


Рис. 21

тан В. Л. Благонядежиным и В. Н. Москаленко [8]. Рассмотрим многопролетную балку с постоянной изгибной жесткостью EJ , лежащую на упругих опорах и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Занумеруем опоры и пролеты так, как указано на рис. 21, и обозначим длины пролетов через l_j , коэффициенты податливости опор через b_j и начальные смещения опор в вертикальной плоскости через h_j . Будем считать, что деформация балки и опор происходит в одной плоскости, а опоры будем трактовать как двусторонние связи. Для определения изгибающих моментов над опорами M_j стандартными методами строительной механики получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{b_{j-1}}{l_{j-1}l_j} M_{j-2} + \left[\frac{l_j}{6EJ} - \frac{b_{j-1}}{l_j} \left(\frac{1}{l_{j-1}} + \frac{1}{l_j} \right) - \frac{b_j}{l_j} \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right) \right] M_{j-1} + \\ & + \left[\frac{l_j + l_{j+1}}{3EJ} + \frac{b_{j-1}}{l_j^2} + b_j \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right)^2 + \frac{b_{j+1}}{l_{j+1}^2} \right] M_j + \\ & + \left[\frac{l_{j+1}}{6EJ} - \frac{b_j}{l_{j+1}} \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right) - \frac{b_{j+1}}{l_{j+1}} \left(\frac{1}{l_{j+1}} + \frac{1}{l_{j+2}} \right) \right] M_{j+1} + \\ & + \frac{b_{j+1}}{l_{j+1}l_{j+2}} M_{j+2} = - \frac{q(l_j^3 + l_{j+1}^3)}{24EJ} - \frac{h_{j-1}}{l_j} + h_j \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{q_{j+1}}{l_{j+1}} - \frac{qb_{j-1}}{l_j} \cdot \frac{l_{j-1} + l_j}{2} + \\
& + qb_j \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right) \frac{l_j + l_{j+1}}{2} - \frac{qb_{j+1}}{l_{j+1}} \cdot \frac{l_{j+1} + l_{j+2}}{2}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Эта система состоит, по существу, из известных «уравнений пяти моментов». Поскольку параметры l_j , b_j и h_j являются случайными, эта система будет стохастической. Представляется целесообразным получить решение этой системы, пригодное для любого числа пролетов, в том числе для бесконечного числа пролетов. Заметим, что по отношению к входным параметрам l_j и b_j система (21) является нелинейной; по отношению к начальным смещениям опор h_j система будет линейной. Чтобы получить достаточно простое решение, учитывающее все три группы случайных факторов, будем считать, что флуктуации длин пролетов и коэффициентов податливости достаточно малы. Это значит, что длины пролетов l_j и коэффициенты податливости b_j мало отличаются от средних значений. При этом условии можно положить

$$l_j = l_0 + \mu \tilde{l}_j; \quad b_j = b_0 + \mu \tilde{b}_j,$$

где l_0 и b_0 — средние значения, $\mu \tilde{l}_j$ и $\mu \tilde{b}_j$ — флуктуационные составляющие; μ — параметр малости, который после выполнения выкладок полагается равным единице. Кроме того, примем, что $h_j = \mu \tilde{h}_j$. Решение системы (21) ищем в виде ряда по степеням μ

$$M_j = M_j^{(0)} + \mu M_j^{(1)} + \mu^2 M_j^{(2)} + \dots \quad (22)$$

Для вычисления первого члена ряда $M_j^{(0)}$ имеем обычные уравнения строительной механики. В частности, при бесконечно большом числе пролетов легко находим, что все моменты $M_j^{(0)}$ равны и составляют

$$M_j^{(0)} = -M_0 = -\frac{ql_0^2}{12}. \quad (23)$$

Уравнения относительно следующего члена получим, удерживая члены, содержащие первые степени малого параметра. После введения обозначений

$$a = \frac{6EJb_0}{l_0^3}, \quad (24)$$

$$Q_j = -\frac{6M_0}{l_0}(\tilde{l}_j + \tilde{l}_{j+1}) - \frac{6EJ}{l_0^2}(\tilde{h}_{j-1} - 2\tilde{h}_j + \tilde{h}_{j+1}) - \\ - \frac{3qb_0EJ}{l_0^2}(\tilde{l}_{j-1}\tilde{l}_j - \tilde{l}_{j+1} + \tilde{l}_{j+2}) - \frac{6qEJ}{l_0}(\tilde{b}_{j-1} - 2\tilde{b}_j + \tilde{b}_{j+1}) \quad (25)$$

система переписывается в виде

$$\alpha M_{j-2}^{(1)} + (1-4\alpha)M_{j-1}^{(1)} + (4+6\alpha)M_j^{(1)} + (1-4\alpha)M_{j+1}^{(1)} + \\ + \alpha M_{j+2}^{(1)} = Q_j. \quad (26)$$

Уравнения (26) можно рассматривать как регулярные уравнения в конечных разностях. Вводя обозначения для вторых и четвертых разностей

$$\nabla_2 M_j = M_{j+1} - 2M_j + M_{j-1};$$

$$\nabla_4 M_j = M_{j+2} - 4M_{j+1} + 6M_j - 4M_{j-1} + M_{j-2},$$

а также обозначая

$$\lambda_j = \frac{\tilde{l}_j + \tilde{l}_{j+1}}{2},$$

можем записать уравнения (26) в виде

$$\alpha \nabla_4 M_j^{(1)} + \nabla_2 M_j^{(1)} + 6M_j^{(1)} = \\ = -\frac{12M_0\lambda_j}{l_0} - \frac{6EJ}{l_0^2} \nabla_2 \tilde{h}_j - \frac{6qb_0EJ}{l_0^2} \nabla_2 \lambda_j - \frac{6qEJ}{l_0} \nabla_2 \tilde{b}_j. \quad (27)$$

Пусть число пролетов весьма велико, чтобы можно было отвлечься от граничных условий на крайних опорах. Тогда задача сводится к решению разностного уравнения (27), на решение которого накладывается требование ограниченности при $j \rightarrow \pm\infty$. Искомое решение построим при помощи разностного аналога функции Грина.

Обозначим через $G_{jk} = M_j^{(1)}$ матрицу решений разностной системы (26) с правой частью $Q_j = \delta_{jk}$. Элементы этой матрицы определяются из системы уравнений

$$\alpha G_{j-2, k} + (1-4\alpha)G_{j-1, k} + (4+6\alpha)G_{j, k} + \\ + (1-4\alpha)G_{j+1, k} + \alpha G_{j+2, k} = \delta_{jk}. \quad (28)$$

Рассмотрим частное решение соответствующей однородной системы, которое как обычно ищем в виде

$$G_j = Cr^j, \quad (29)$$

где C — некоторая постоянная; r — характеристический

корень. Последний определяется из алгебраического уравнения четвертой степени

$$ar^4 + (1 - 4a)r^3 + (4 + 6a)r^2 + (1 - 4a)r + a = 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) является возвратным. Если r — его корень, то $1/r$ тоже является корнем уравнения. Пусть уравнение (30) не имеет кратных корней. Обозначим через r_1 и r_2 пару корней, меньших по модулю единицы. Вводя обозначения

$$r_1 + \frac{1}{r_1} = x_1, \quad r_2 + \frac{1}{r_2} = x_2$$

и замечая, что на основании уравнения (30)

$$x_1 + x_2 = 4 - \frac{1}{\alpha}; \quad x_1 x_2 = 4 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right),$$

легко найдем

$$x_{1,2} = 2 - \frac{1}{2\alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{24}{\alpha}}. \quad (31)$$

Свойства параметров x_1 и x_2 и, следовательно, свойства корней характеристического уравнения (30) зависят от величины α . Пусть $\alpha < 1/24$. Тогда x_1 и x_2 действительны, отрицательны и по модулю больше единицы, и, следовательно,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4} \right); \\ r_2 &= \frac{1}{2} \left(x_2 + \sqrt{x_2^2 - 4} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

С учетом формул (31) и (32) вычислим корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[2 - \frac{1}{2\alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{24}{\alpha}} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{8}{\alpha} \pm \left(2 - \frac{1}{2\alpha} \right) \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{24}{\alpha}}} \right]. \end{aligned}$$

Если α лежит в интервале $1/24 < \alpha < 1/4$, то x_1 и x_2 — комплексно-сопряженные числа:

$$\operatorname{Re} x_{1,2} = 2 - \frac{1}{2\alpha} < 0; \quad \operatorname{Im} x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{24}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}}.$$

Характеристические корни r_1 и r_2 определяются по формуле

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ 2 - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sqrt{3 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{8}{\alpha} \right) + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{8}{\alpha}} \pm \right. \\ \left. \pm i \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{24}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sqrt{3 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{8}{\alpha} \right) - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{8}{\alpha}}} \right] \right\}.$$

Наконец, если $\alpha > 1/4$, то x_1 и x_2 имеют положительные действительные части. Характеристические корни определяются по формуле, которая получается из последней формулы, если знак перед первым радикалом изменить на противоположный.

Возвращаемся к построению матрицы Грина G_{jk} . Эта матрица конструируется из частных решений типа (29), удовлетворяющих условию ограниченности при $|j-k| \rightarrow \infty$. Учитывая условия симметрии решения относительно опоры с номером k , представим матрицу Грина в форме

$$G_{jk} = a_1 r_1^{|j-k|} + a_2 r_2^{|j-k|}. \quad (33)$$

Здесь a_1 и a_2 — некоторые постоянные. Подставляя выражение (33) в уравнения (28) при $|j-k| \geq 2$, видим, что эти уравнения удовлетворяются тождественно. Из уравнений (28) при $j=k$ и $j=k \pm 1$ получаем следующие уравнения для нахождения постоянных a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} & [1 - 4\alpha + (4 + 7\alpha)r_1 + (1 - 4\alpha)r_1^2 + \alpha r_1^3] a_1 + \\ & + [1 - 4\alpha + (4 + 7\alpha)r_2 + (1 - 4\alpha)r_2^2 + \alpha r_2^3] a_2 = 0; \\ & [2 + 3\alpha + (1 - 4\alpha)r_1 + \alpha r_1^2] a_1 + \\ & + [2 + 3\alpha + (1 - 4\alpha)r_2 + \alpha r_2^2] a_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

С учетом уравнения (30) полученную систему можно представить в компактной форме

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r_1} - r_1 \right) a_1 + \left(\frac{1}{r_2} - r_2 \right) a_2 = 0; \\ & \left(\frac{1}{r_1^2} - r_1^2 \right) a_1 + \left(\frac{1}{r_2^2} - r_2^2 \right) a_2 = -\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{\alpha \left(\frac{1}{r_1} - r_1 \right) (x_2 - x_1)};$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \left(\frac{1}{r_2} - r_2 \right) (x_1 - x_2)}. \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) полностью определяют матрицу Грина. При этом параметры x_1 и x_2 , r_1 и r_2 вычисляются по формулам (31) и (32).

Возвратимся к системе уравнений (26). При помощи матрицы Грина решение системы представим в виде

$$M_j^{(1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{jk} Q_k. \quad (35)$$

С точностью до μ можно принять, что флуктуации опорных моментов \tilde{M}_j совпадают с $M_j^{(1)}$. Отсюда после перемножения и осреднения получим общую формулу для корреляционной матрицы опорных моментов:

$$\langle \tilde{M}_j \tilde{M}_k \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{jm} G_{kn} \langle Q_m Q_n \rangle. \quad (36)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении пролета, лежащего между опорами с номерами j и $j+1$, определяется как

$$M_j(\xi_j) = M_j^{(0)} \xi_j + M_j^{(1)} (1 - \xi_j) + M_{j+1}^{(1)} \xi_j, \quad (37)$$

где $\xi_j = x_j / l_0$ — безразмерная координата для соответствующего пролета. Корреляционная функция изгибающих моментов выражается через элементы корреляционной матрицы (36)

$$K(\xi_j, \xi_k) = \langle \tilde{M}_j \tilde{M}_k \rangle (1 - \xi_j)(1 - \xi_k) + \langle \tilde{M}_j \tilde{M}_{k+1} \rangle (1 - \xi_j) \xi_k + \\ + \langle \tilde{M}_{j+1} \tilde{M}_k \rangle \xi_j (1 - \xi_k) + \langle \tilde{M}_{j+1} \tilde{M}_{k+1} \rangle \xi_j \xi_k. \quad (38)$$

В общем случае вычисления по формулам (33), (36) и (38) весьма громоздки. Заметим, что обобщенные силы (25) учитывают влияние трех групп случайных факторов: разброса длин пролетов, разброса коэффициентов податливостей опор и рассогласование началь-

ных уровней опор. Обычно можно принять, что указанные три группы случайных факторов независимы. Тогда их влияние может быть изучено отдельно. Рассмотрим, например, влияние рассогласования в начальном уровне опор. Для этого случая формула (25) принимает вид

$$Q_j = -\frac{6EJ}{l_0^2}(\tilde{h}_{j-1} - 2\tilde{h}_j + \tilde{h}_{j+1}).$$

Если к тому же рассогласования \tilde{h}_j на разных опорах имеют одинаковую дисперсию и стохастически независимы, то формула (36) приводится к виду

$$\langle \tilde{M}_j \tilde{M}_k \rangle = \left(\frac{6EJ}{l_0^2} \right)^2 \langle \tilde{h}^2 \rangle \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{jm} (G_{k,m-2} - 4G_{k,m-1} + 6G_{km} - 4G_{k,m+1} + G_{k,m+2}). \quad (39)$$

Ряд, входящий в эту формулу, может быть просуммирован. Окончательно получаем

$$\langle \tilde{M}_j \tilde{M}_k \rangle = F_{jk} \langle \tilde{h}^2 \rangle,$$

где элементы матрицы F_{jk} определяются по формуле

$$F_{jk} = \nabla_4 [c_{11}^{(j-k)} + 2c_{12}^{(j-k)} + c_{22}^{(j-k)}].$$

При этом ∇_4 — оператор четвертой разности; величины $c_{\mu\nu}^{(k)}$ находятся как

$$c_{\mu\nu}^{(k)} = \begin{cases} \left[\frac{2r_\mu^{|k|+2}}{1-r_\mu^2} + (|k|+1)r_\mu^{|k|} \right] a_\mu^2, & \text{если } \mu = \nu, \\ \left[\frac{r_\mu r_\nu (r_\mu^{|k|} + r_\nu^{|k|})}{1-r_\mu r_\nu} + \frac{r_\mu^{|k|+1} - r_\nu^{|k|+1}}{r_\mu - r_\nu} \right] a_\mu a_\nu, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Эти формулы становятся неудобными для вычислений при $\alpha > 1/24$. Если $\alpha > 1/24$, то формулы можно привести к виду

$$F_{jk} = \nabla_4 f_{j-k},$$

где

$$f_k = \frac{\rho^{|k|+2}}{2\alpha^2(1-\rho^2)\sin^2\beta} \left[\frac{2\rho^2}{1-\rho^2} \cos k\beta + \frac{\sin(|k|+1)\beta}{\sin\beta} \right] \frac{1}{\rho^2 - 2\cos 2\beta + \frac{1}{\rho^2}}$$

$$- (|k|+1) \frac{\rho^2 \cos(|k|-2)\beta - 2 \cos k\beta + \frac{1}{\rho^2} \cos(|k|+2)\beta}{\left(\rho^2 - 2 \cos 2\beta + \frac{1}{\rho^2}\right)^2} +$$

$$+ 2 \frac{\rho^4 \cos(|k|-2)\beta - 3\rho^2 \cos k\beta + 3 \cos(|k|+2)\beta - \frac{1}{\rho^2} \cos(|k|+4)\beta}{\left(\rho^2 - 2 \cos 2\beta + \frac{1}{\rho^2}\right)^3}$$

Параметры ρ и β связаны с корнями r_1 и r_2 соотношениями

$$r_1 = \rho e^{i\beta}; \quad r_2 = \rho e^{-i\beta}.$$

Некоторые дополнительные подробности можно найти в статье [8].

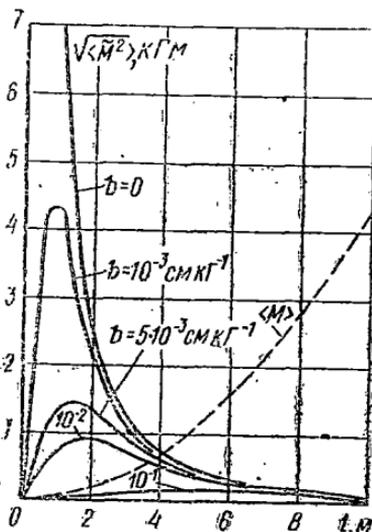


Рис. 22

Для численного примера рассмотрим балку с равными пролетами и изгибной жесткостью $EJ = 6,5 \cdot 10^7$ кгс/см², находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 5,28 \cdot 10^{-2}$ кгс/см⁻¹. Коэффициенты податливости опор будем считать детерминистическими. Единственный случайный фактор, учитываемый в данном примере, — это начальные рассогласования уровней опор. Примем, что эти рассогласования **стохастически** независимы; их среднее квадратическое значение примем равным 0,25 см.

Результаты вычислений дисперсии опорных изгибающих моментов при различных длинах пролета l и различных коэффициентах податливости опор b представлены на рис. 22. Как и следовало ожидать, наибольшая дисперсия наблюдается в случае абсолютно жестких опор ($b \rightarrow 0$). При этом дисперсия будет тем больше, чем меньше длина пролета. В случае податливых опор дисперсия изгибающего момента достигает максимума

при некоторых достаточно малых длинах пролета. С увеличением пролета дисперсия изгибающего момента убывает. Заметим, что с увеличением пролета возрастает математическое ожидание изгибающих моментов (штриховая линия на рис. 22). Поэтому можно ожидать, что для балок со случайно смещающимися опорами существуют некоторые оптимальные с точки зрения прочности длины пролетов.

§ 2.3. Расчет докритических деформаций тонких упругих оболочек

Деформации тонких упругих оболочек под нагрузкой весьма чувствительны к малым начальным отклонениям срединной поверхности от идеальной формы. Это проявляется, в частности, в большом разбросе опытных данных при испытаниях оболочек на устойчивость. Стохастические задачи в теории оболочек обычно решают, применяя прямые методы. При этом распределенная система заменяется эквивалентной в некотором смысле системой с конечным числом степеней свободы. Приближенные решения такого рода оставляют чувство неудовлетворенности. Вместе с тем, если исходить из линеаризованных уравнений, то при некоторых достаточно широких предположениях удается получить точные решения стохастической краевой задачи.

В работе В. В. Болотина и Б. П. Макарова [18] эта задача решается на основе уравнений, получаемых линеаризацией уравнений теории оболочек в окрестности начального напряженного состояния. Используется дополнительное предположение о малости масштаба начальных отклонений и масштаба их корреляции по сравнению с характерными размерами срединной поверхности, а также предположение об однородности поля начальных отклонений. Выводятся общие формулы для корреляционных функций, дисперсий и спектральных плотностей параметров напряженно-деформированного состояния оболочки. Для широкого класса изотропных начальных отклонений результаты выражаются через табулированные функции. Это позволяет изучить зависимость корреляционных свойств перемещений, деформаций и напряжений от свойств начальных отклонений и от начальных напряжений в срединной поверхности.

Пусть дана тонкая упругая оболочка с начальными отклонениями от идеальной формы. Предположим, что внешняя нагрузка такова, что в идеальной оболочке возникает чисто безмоментное напряженное состояние, формы потери устойчивости являются быстро изменяющимися функциями координат, а критические параметры пренебрежимо мало зависят от размеров оболочки и граничных условий на ее контуре. Пусть, далее, отклонения от идеальной формы достаточно малы и имеют достаточно малые масштабы изменчивости и корреляции. При значениях нагрузки, не слишком близких к критическим, этими свойствами будут обладать перемещения точек срединной поверхности нагруженной оболочки. В основу положим уравнения нелинейной теории оболочек

$$D\Delta\Delta w - s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} (b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w) \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} \chi = q;$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi + s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} (b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w) \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w = 0. \quad (40)$$

Здесь $w(x^1, x^2)$ — функция нормальных перемещений; $\chi(x^1, x^2)$ — функция тангенциальных усилий; D — цилиндрическая жесткость; E — модуль упругости; h — толщина оболочки; q — интенсивность нормальной нагрузки; $b_{\alpha\beta}$ — тензор начальной кривизны срединной поверхности; $s^{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор на срединной поверхности. Если отклонения от идеальной формы малы, то для решения стохастической краевой задачи можно применить метод малого параметра. Положим, что

$$b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^{(0)} + \mu b_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad (41)$$

где $b_{\alpha\beta}^{(0)}$ — тензор кривизны идеальной поверхности; μ — малый параметр. Пренебрегая изменением метрики вследствие безмоментной деформации, ищем решение уравнений (40) в виде

$$w = \mu w_1 + \mu^2 w_2 + \dots; \quad \chi = \chi_0 + \mu \chi_1 + \mu^2 \chi_2 + \dots \quad (42)$$

Подстановка в уравнения (40) выражений (41) и (42) после сравнения членов, содержащих μ , дает

$$D\Delta\Delta w_1 - s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} b_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} \chi_1 - N^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w_1 = N^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w_0;$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi_1 + s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} b_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} w_1 = 0. \quad (43)$$

При этом учтено, что

$$-s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} b_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_0 = q.$$

Кроме того, введено обозначение для тензора начальных безмоментных усилий $N^{\alpha\beta}$, а поправка к тензору кривизны (41) выражена через функцию начальных отклонений $\omega_0(x^1, x^2)$:

$$s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_0 = N^{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta}^{(1)} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \omega_0.$$

Так как по предположению масштабы изменения и корреляции функций ω_0 , ω_1 и χ_1 малы по сравнению с масштабами изменения метрики и кривизны идеальной срединной поверхности, то уравнения (43) можно упростить, переписав их в ортогональных координатах (линиях кривизны) $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$ с единичным метрическим тензором и заменив тензорные производные соответствующими частными производными

$$D\Delta\Delta\omega_1 - \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} \right) - N_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = N_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta};$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi_1 + \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_2^2} \right) = 0. \quad (44)$$

Здесь R_1, R_2 — главные радиусы кривизны идеальной срединной поверхности; сохранено правило суммирования по индексам α, β .

Предположим теперь, что $\omega_0(\mathbf{r})$ — случайная функция координат с математическим ожиданием, равным нулю. Рассмотрим область, достаточно удаленную от границ и других линий искажения. Можно ожидать, что при сделанных выше предположениях о характере нагрузки и при быстро изменяющемся поле начальных отклонений $\omega_0(\mathbf{r})$ влияние границ на поведение оболочки во внутренней области будет достаточно мало. Тогда можно вообще отвлечься от эффекта границ, заменяя граничные условия требованием ограниченности функции на бесконечности (краевые эффекты будут рассмотрены в следующем параграфе). Если в достаточно большой области срединной поверхности параметры оболочки и начальные безмоментные усилия можно принять постоянными, а функцию начальных неправильностей $\omega_0(\mathbf{r})$ можно рассматривать как однородное случайное поле, то стохастическая задача решается известным методом из § 1.13.

Однородное центрированное случайное поле $\omega_0(\mathbf{r})$ допускает спектральное представление в виде стохастического интеграла Фурье

$$\omega_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (45)$$

где $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$ — волновой вектор; $d\mathbf{k} = dk_1 dk_2$, $W_0(\mathbf{k})$ — спектр поля $\omega_0(\mathbf{r})$. Последний связан со спектральной плотностью $S_{\omega_0}(\mathbf{k})$ соотношением типа (1.186)

$$\langle W_0^*(\mathbf{k}) W_0(\mathbf{k}') \rangle = S_{\omega_0}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (46)$$

где $\delta(\mathbf{k})$ — двухмерная дельта-функция. Соответствующая корреляционная функция $K_{\omega_0}(\rho)$, где $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, выражается через $S_{\omega_0}(\mathbf{k})$ так:

$$K_{\omega_0}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\omega_0}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\rho} d\mathbf{k}. \quad (47)$$

Представим случайные поля $\omega_1(\mathbf{r})$ и $\chi_1(\mathbf{r})$ в форме интегралов типа (45) и учтем, что поля связаны между собой уравнениями (44). С использованием формул типа (46) получим следующие формулы для спектральных плотностей полей $\omega_1(\mathbf{r})$ и $\chi_1(\mathbf{r})$:

$$S_{\omega_1}(\mathbf{k}) = F^2(\mathbf{k}) S_{\omega_0}(\mathbf{k}); \quad S_{\chi_1}(\mathbf{k}) = G^2(\mathbf{k}) S_{\omega_0}(\mathbf{k}). \quad (48)$$

Здесь введены обозначения

$$F(\mathbf{k}) = \frac{k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta}}{k^4 D + \frac{Eh}{k^4} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right)^2 + k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta}}; \quad (49)$$

$$G(\mathbf{k}) = \frac{Eh}{k^2} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right) F(\mathbf{k}).$$

Кроме того, $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Спектральные плотности остальных параметров напряженно-деформированного состояния оболочки выражаются через $S_{\omega_1}(\mathbf{k})$ и $S_{\chi_1}(\mathbf{k})$, а также через их взаимную спектральную плотность

$$S_{\omega_1 \chi_1}(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}) S_{\omega_0}(\mathbf{k}).$$

Так, флуктуационные напряжения σ_{11} в точках $z = \pm h/2$ определяются как

$$\sigma_{11} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} \pm \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_2^2} \right).$$

Отсюда получаем спектральную плотность

$$S_{\sigma_{11}}(k) = \frac{k_2^4}{h^2} S_{\chi_1}(k) \pm \frac{Ek_2^2}{1-\nu^2} (k_1^2 + \nu k_2^2) S_{\omega_1 \chi_1}(k) + \\ + \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)^2} (k_1^2 + \nu k_2^2)^2 S_{\omega_1}(k). \quad (50)$$

Формулы типа (48) и (50) позволяют сделать некоторые общие выводы об изменении спектрального состава полей $\omega_1(\mathbf{r})$, $\chi_1(\mathbf{r})$ и т. д. в зависимости от характера и начальных безмоментных усилий. Рассмотрим выражение для $F(\mathbf{k})$. Функция $F(\mathbf{k})$ есть по существу передаточная функция системы, связывающая начальные отклонения срединной поверхности от ее идеальной формы с дополнительными отклонениями $\omega_1(\mathbf{r})$. Формулы (48) и (50) сохраняют смысл, пока функция $F(\mathbf{k})$ не имеет действительных полюсов. Уравнение для нахождения полюсов

$$k^4 D + \frac{Eh}{k^4} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right)^2 + k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta} = 0 \quad (51)$$

совпадает с уравнением для нахождения критических усилий в линейной теории устойчивости оболочек. Напомним, что растяжению соответствует случай $N_{11} > 0$, $N_{22} > 0$. Таким образом, теория применима, пока начальные усилия меньше, чем их критические значения, определяемые по линейной теории.

Волновые числа, которые соответствуют наиболее быстро растущим отклонениям, найдем из условий

$$\frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial k_1} = \frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial k_2} = 0. \quad (52)$$

Допустим, что нагрузка задана с точностью до параметра q . Заменяя в уравнении (51) $N_{\alpha\beta}$ на $qN_{\alpha\beta}$, получим, что критическое значение параметра нагрузки

$$q^*(\mathbf{k}) = - \frac{1}{k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta}} \left[k^4 D + \frac{Eh}{k^4} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right)^2 \right]. \quad (53)$$

С другой стороны, с учетом (53) формула (49) для $F(\mathbf{k})$ при $q > q^*(\mathbf{k})$ записывается в виде

$$F(\mathbf{k}) = - \frac{q}{q^*(\mathbf{k}) - q}.$$

Отсюда видно, что функции $q^*(\mathbf{k})$ и $F(\mathbf{k})$ принимают стационарные значения при одинаковых волновых

числах k_1, k_2 . Таким образом, передаточная функция $F(k)$ принимает максимальное значение для отклонений, совпадающих с формами потери устойчивости в линейной теории. Именно эти отклонения растут быстрее всего, пока остаются применимыми линеаризованные уравнения (44).

Определение корреляционных функций по спектральным плотностям (48) и (50) сводится к двумерному преобразованию Фурье типа (47). В общем случае это преобразование может быть проведено только численными методами. Вместе с тем для широкого класса задач аналитические вычисления могут быть доведены до конца. Рассмотрим, например, сферическую оболочку, нагруженную равномерным давлением. Если начальные неправильности оболочки образуют изотропное поле, то интеграл в формулах типа (47) сводится к однократному интегралу по «радиальному» волновому числу k . В самом деле, с учетом соотношений (1.193) формулы для корреляционных функций полей $w_1(r)$ и $\chi_1(r)$ принимают вид

$$K_{w_1}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} F^2(k) S_{w_0}(k) J_0(k\rho) k dk,$$

$$K_{\chi_1}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} G^2(k) S_{w_0}(k) J_0(k\rho) k dk, \quad (54)$$

где $S_{w_0}(k)$, $F(k)$ и $G(k)$ зависят только от модуля k .

В § 1.12 был рассмотрен класс изотропных двумерных случайных полей, для которых спектральная плотность имеет вид (1.194):

$$S_{w_0}(k) = \frac{c}{\left(1 + \frac{k^2}{k_0^2}\right)^n}. \quad (55)$$

Здесь c , k_0 и n — константы; при этом параметр k_0 характеризует масштаб корреляции. Случай $n=2$ соответствует двумерному марковскому полю (аналогу экспоненциально-коррелированной функции одной независимой переменной). При $n > 2$ формула описывает дифференцируемое случайное поле. В дальнейшем полагаем n целым числом ($n=3, 4, \dots$). Корреляционная функция начальных отклонений определяется по формуле (1.195).

Вычисление корреляционных функций для $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\chi_1(\mathbf{r})$ в случае изотропного поля отклонений со спектральной плотностью (55) произведем методом контурного интегрирования. Рассмотрим, например, формулу (54) для корреляционной функции прогиба $\psi_1(\mathbf{r})$. Запишем ее в виде

$$K_{\psi_1}(\rho) = 2\pi c k_0^2 \varphi(k_0 \rho) \quad (56)$$

и вычислим интеграл

$$s\varphi(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{x\tau}{x_0}\right) x^s dx}{(x_0^2 + x^2)^n (x^4 + \beta^2 x^2 + 1)^2} \quad (57)$$

В формулах (56) и (57) введены обозначения

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{k_*}, & x_0 &= \frac{k_0}{k_*}, & s &= \frac{1}{\beta^4 x_0^2 (n-1)}, \\ k_* &= \left(\frac{Eh}{DR^2}\right)^{1/4}, & \beta^2 &= \frac{N}{k_*^2 D}, & \tau &= k_0 \rho. \end{aligned} \quad (58)$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{z\tau}{x_0}\right) z^s}{(x_0^2 + z^2)^n (z^4 + \beta^2 z^2 + 1)^2} \quad (59)$$

Здесь $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля нулевого порядка. Если начальное усилие N больше критического значения, т. е. $\beta^2 > -2$, то функция $f(z)$ голоморфна всюду в верхней полуплоскости, в том числе и на действительной оси, за исключением конечного числа полюсов и точки ветвления $z=0$. Подсчитаем сумму вычетов вокруг всех полюсов функции $f(z)$ в верхней полуплоскости. Выражение (57) примет вид

$$\begin{aligned} s\varphi(\tau) &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1} (n-1)!} \left(\frac{d}{x_0 dx_0}\right)^{n-1} \left[\frac{x_0^4 K_0(\tau)}{(x_0^4 - \beta^2 x^2 + 1)^2} \right] - \\ &= \frac{1}{2\gamma_1} \frac{d}{d\gamma_1} \left[\frac{\gamma_1^4 K_0\left(\frac{\gamma_1 \tau}{x_0}\right)}{(x_0^2 - \gamma_1^2)^n (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^2} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\gamma_2} \cdot \frac{d}{d\gamma_2} \left[\frac{\gamma_2^4 K_0 \left(\frac{\gamma_2 \tau}{x_0} \right)}{\left(x_0^2 - \gamma_2^2 \right)^n \left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2 \right)^2} \right]; \quad (60)$$

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\beta^2 \mp \sqrt{\beta^4 - 4}).$$

В формуле (60) и до конца параграфа $K_n(\tau)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента, т. е. функция Макдональда.

Частным случаем выражения (60) является формула для безразмерной корреляционной функции перемещений пластины (формула пригодна только при растягивающих усилиях в срединной поверхности)

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \left(\frac{d}{x_0 d x_0} \right)^{n-1} \left[\frac{K_0(\tau)}{\left(x_0^2 - \beta^2 \right)^2} \right] + \\ & \frac{\left(x_0^2 - \beta^2 \right) \frac{\tau}{x_0} K_1 \left(\frac{\beta \tau}{x_0} \right) - 2\beta n K_0 \left(\frac{\beta \tau}{x_0} \right)}{2\beta \left(x_0^2 - \beta^2 \right)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (61)$$

В соотношении (61) сохранены обозначения (58). При этом параметр R , который входит в коэффициент k_{**} , заменяется некоторой характерной длиной.

Остановимся подробнее на случае $n=3$. Выражение для безразмерной корреляционной функции (60) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & a_1 \gamma_1 \tau K_1 \left(\frac{\gamma_1 \tau}{x_0} \right) + a_2 \gamma_2 \tau K_1 \left(\frac{\gamma_2 \tau}{x_0} \right) + \\ & + a_3 K_0 \left(\frac{\gamma_1 \tau}{x_0} \right) + a_4 K_0 \left(\frac{\gamma_2 \tau}{x_0} \right) + (a_5 + a_6 \tau^2) K_0(\tau) + a_7 \tau K_1(\tau). \end{aligned} \quad (62)$$

Коэффициенты a_j выражаются через x_0 , γ_1 и γ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 = & \frac{\gamma_1^2}{2 \left(x_0^2 - \gamma_1^2 \right)^3 \left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \right)^2 x_0}; & a_2 = & \frac{\gamma_2^2}{2 \left(x_0^2 - \gamma_2^2 \right)^3 \left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2 \right)^2 x_0}; \\ a_3 = & \frac{\gamma_1^2 \left(3 \gamma_1^4 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 - 2 x_0^2 \gamma_2^2 \right)}{\left(x_0^2 - \gamma_1^2 \right)^4 \left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \right)^3}; & a_4 = & \frac{\gamma_2^2 \left(3 \gamma_2^4 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 - 2 x_0^2 \gamma_1^2 \right)}{\left(x_0^2 - \gamma_2^2 \right)^4 \left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2 \right)^3}; \\ a_5 = & \frac{3x_0^8 - 8x_0^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 2x_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \right) + \gamma_1^4 \gamma_2^4}{\left(x_0^2 - \gamma_1^2 \right)^4 \left(x_0^2 - \gamma_2^2 \right)^4}; \end{aligned} \quad (63)$$

$$a_6 = \frac{1}{8(x_0^2 - \gamma_0^2)^2(x_0^2 - \gamma_2^2)^2}; \quad a_7 = \frac{5x_0^4 - x_0^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 3\gamma_1^2\gamma_2^2}{4(x_0^2 - \gamma_1^2)^3(x_0^2 - \gamma_2^2)^3}.$$

Аналогичная формула для пластины будет

$$s\varphi(\tau) = \frac{\frac{\beta\tau}{x_0} K_1\left(\frac{\beta\tau}{x_0}\right)}{2\beta^2(x_0^2 - \beta^2)^3} + \frac{(5x_0^2 - \beta^2)\tau K_1(\tau)}{4x_0^4(x_0^2 - \beta^2)^3} + \frac{\tau^2 K_0(\tau)}{8x_0^4(x_0^2 - \beta^2)^2} + \frac{3\left[K_0(\tau) - K_0\left(\frac{\beta\tau}{x_0}\right)\right]}{(x_0^2 - \beta^2)^4}. \quad (64)$$

Представляет интерес предельный переход в формулах (62) и (64) при $\tau \rightarrow 0$, в результате которого получаются соответствующие значения безразмерных дисперсий. Для пластины такой предельный переход дает:

$$s\varphi(0) = \frac{(x_0^2 - \beta^2)(2x_0^4 + 5\beta^2 x_0^2 - \beta^4) - 12x_0^4 \beta^2 \ln \frac{x_0}{\beta}}{4\beta^2 x_0^4 (x_0^2 - \beta^2)^4}. \quad (65)$$

Дисперсия функции прогиба для оболочки выражается по-разному в зависимости от параметра нагрузки β . Если $\beta^2 > 2$, то коэффициенты γ_1 и γ_2 вещественны. Безразмерная дисперсия в этом случае

$$s\varphi(0) = b_1 + b_2 \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + b_3 \ln \frac{x_0}{\gamma_1} + b_4 \ln \frac{x_0}{\gamma_2}. \quad (66)$$

При этом коэффициенты b_j зависят от x_0 и β :

$$b_1 = \frac{2x_0^6 \beta^2 + x_0^4(5\beta^4 - 32) - x_0^2 \beta^2(\beta^2 - 10) - 5\beta^4 + 16}{4(\beta^2 - 4)(x_0^4 - x_0^2 \beta^2 + 1)^3};$$

$$b_2 = \frac{2x_0^2}{b} [x_0^8 + 2x_0^4(3\beta^4 - 7) + 6];$$

$$b_3 = \frac{\gamma_1^2}{b} [x_0^8(3\gamma_1^4 + 8\gamma_2^4 - 1) + 2x_0^4 x_2^4(9\gamma_1^4 + 4\gamma_2^4 - 3) + 2x_0^2 \gamma_2^8(2\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \gamma_1^2 \gamma_2^8(3\gamma_1^2 - \gamma_2^2)];$$

$$b_4 = -\frac{\gamma_2^2}{b} [x_0^8(3\gamma_2^4 + 8\gamma_1^4 - 1) + 2x_0^4 \gamma_1^4(9\gamma_2^4 + 4\gamma_1^4 - 3) + 2x_0^2 \gamma_1^8(2\gamma_2^2 - \gamma_1^2) + \gamma_2^2 \gamma_1^8(3\gamma_2^2 - \gamma_1^2)];$$

$$b = (\beta^4 - 4)^{3/2} (x_0^4 - x_0^2 \beta^2 + 1)^4.$$

При $-2 < \beta^2 < 2$ коэффициенты γ_1, γ_2 являются комплексными. Формула для безразмерной дисперсии будет

$$s\varphi(0) = c_1 + c_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2 - \beta^2}{2 + \beta^2} \right)^{1/2} + c_3 \ln \kappa_0, \quad (67)$$

где обозначено:

$$c_1 = b_1; \quad c_2 = 2(\operatorname{Im} b_2 + \operatorname{Im} b_3); \quad c_3 = 2\operatorname{Re} b_3.$$

На рис. 23 представлен график корреляционной функции (64) для пластины, испытывающей всестороннее растяжение. Дополнительные перемещения $\psi_1(r)$ имеют более слабую корреляцию, чем начальные отклонения. С ростом параметра нагрузки корреляция усиливается. При $\beta \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(\tau) \rightarrow \varphi_0(\tau)$, т. е. в пределе начальные отклонения «выправляются».

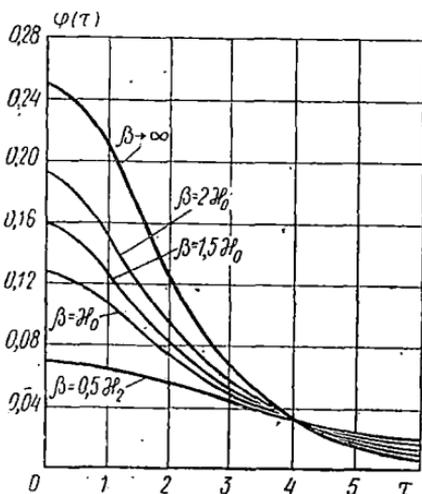


Рис. 23

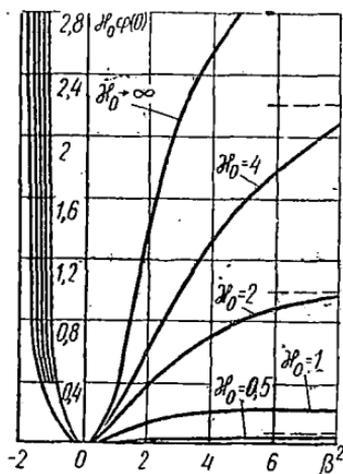


Рис. 24

Результаты вычислений по формулам (66) и (67) показаны на рис. 24. По оси абсцисс отложен параметр нагрузки

$$\beta^2 = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{NR}{Eh^2},$$

по оси ординат — безразмерная дисперсия перемещения $\psi_1(r)$ в сферической оболочке. Параметр $\kappa_0 = k_0/k_*$ принимался равным 0,5, 1, 2 и 4. Кроме того, на рис. 24

нанесена кривая, соответствующая предельному случаю $\kappa_0 \rightarrow \infty$ (дельта-коррелированному полю начальных отклонений). Правые ветви кривых соответствуют растягивающим усилиям. При $\beta^2 \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(0) \rightarrow \varphi_0(0)$. Левые ветви соответствуют сжимающим усилиям. При $\beta^2 \rightarrow -2$, т. е. при стремлении давления к его критическому значению, определяемому по линейной теории, дисперсия перемещений $\omega_1(\mathbf{r})$ стремится к бесконечности.

§ 2.4. Краевые эффекты при докритических деформациях

В предыдущем параграфе был дан метод расчета статистических характеристик перемещений, деформаций и напряжений в тонких упругих оболочках, срединные поверхности которых имеют малые начальные случайные отклонения от идеальной формы. Этот метод основывался на ряде допущений, среди которых одним из наиболее существенных было допущение о том, что условия на контуре оболочки пренебрежимо мало влияют на деформацию во внутренней области. В этом параграфе будут рассмотрены краевые эффекты в тонких упругих оболочках со случайными неправильностями при докритических деформациях.

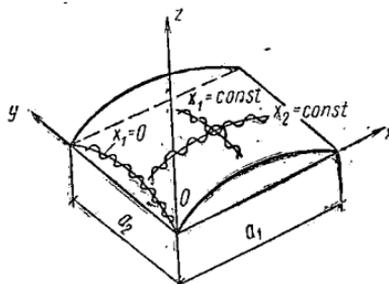


Рис. 25

Будем исходить из линеаризованных уравнений докритической деформации в форме (44). Для упрощения выкладок примем, что линия контура срединной поверхности совпадает с одной из линий кривизны. Пусть это будет линия $x_1 = 0$ (рис. 25). Пусть далее, главные направления тензора начальных безмомент-

ных усилий $N^{\alpha\beta}$ совпадают с линиями кривизны. Полагая в уравнениях (44) $N_{12} = 0$, получим

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w_1 - \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} \right) - \left(N_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + N_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \right) = \\ = N_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + N_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2}; \quad (68) \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi_1 + \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Примем, что начальные отклонения $w_0(\mathbf{r})$ по-прежнему образуют однородное центрированное случайное поле и, следовательно, допускают спектральное представление в форме (45). Запишем эту формулу в развернутом виде

$$w_0(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(k_1, k_2) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2. \quad (69)$$

Спектр $W_0(k_1, k_2)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle W_0^*(k_1, k_2) W_0(k_1', k_2') \rangle = S_{w_0}(k_1, k_2) \delta(k_1 - k_1') \delta(k_2 - k_2'), \quad (70)$$

Рассмотрим сечение поля $w_0(\mathbf{r})$ плоскостью $x_1 = \text{const}$ (понятие о сечении поля было введено в § 1.12). Спектральную плотность этого сечения будем обозначать через $T_{w_0}(k_2)$. Вычислим эффективное волновое число, соответствующее спектральной плотности $T_{w_0}(k_2)$:

$$k_{2e} = \left[\frac{\int_0^{\infty} T_{w_0}(k_2) k_2^2 dk_2}{\int_0^{\infty} T_{w_0}(k_2) dk_2} \right]^{1/2}. \quad (71)$$

Волновое число k_{2e} характеризует скорость изменения поля $w_0(\mathbf{r})$ в направлении касательной к контуру оболочки. Пусть a_2 — характерный размер срединной поверхности оболочки в этом направлении. Если выполняется условие

$$k_{2e} a_2 \gg 1, \quad (72)$$

то при рассмотрении краевых эффектов в областях, достаточно удаленных от угловых точек, точек прило-

жения сосредоточенных сил и т. п., можно отвлекаться от учета граничных условий в направлении $x_1 = \text{const}$. Ищем решение уравнения (68) в виде канонического представления типа (1.180):

$$\begin{aligned} w_1(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(k_1, k_2) \varphi(x_1 | k_1, k_2) e^{ik_2 x_2} dk_1 dk_2; \\ \chi_1(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(k_1, k_2) \psi(x_1 | k_1, k_2) e^{ik_2 x_2} dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (73)$$

Здесь роль базисных функций выполняют выражения:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi(x_1 | k_1, k_2) e^{ik_2 x_2}; \\ \psi_2 &= \psi(x_1 | k_1, k_2) e^{ik_2 x_2}. \end{aligned}$$

Подставим разложения (73) в уравнения (68). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi(x_1 | k_1, k_2)$ и $\psi(x_1 | k_1, k_2)$ (штрихами обозначено дифференцирование по x_1):

$$\begin{aligned} D(\varphi^{IV} - 2k_2^2 \varphi'' + k_2^4 \varphi) - \left(\frac{1}{R_2} \varphi'' - \frac{k_2^2}{R_1} \varphi \right) - (N_1 \varphi'' - k_2^2 N_2 \varphi) = \\ = - (k_1^2 N_1 + k_2^2 N_2) e^{ik_1 x_1}; \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{1}{Eh} (\psi^{IV} - 2k_2^2 \psi'' + k_2^4 \psi) + \left(\frac{1}{R_2} \psi'' - \frac{k_2^2}{R_1} \psi \right) = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{\alpha=1}^8 C_{\alpha} e^{r_{\alpha} x_1} + \varphi_{*}; \\ \psi &= \sum_{\alpha=1}^8 b_{\alpha} C_{\alpha} e^{r_{\alpha} x_1} + \psi_{*}, \end{aligned} \quad (75)$$

где φ_{*} и ψ_{*} — частные решения; C_{α} — постоянные интегрирования; b_{α} — постоянные, зависящие от коэффициентов системы (74) и от корней r_{α} характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{l} D(r^2 - k_2^2)^2 - (N_1 r^2 - k_2^2 N_2) - \left(\frac{r^2}{R_2} - \frac{k_2^2}{R_1} \right) \\ \frac{r^2}{R_2} - \frac{k_2^2}{R_1} \end{array} \right| \frac{1}{Eh} (r^2 - k_2^2)^2 = 0. \quad (76)$$

Для определения восьми постоянных интегрирования C_α должны быть использованы граничные условия. При докритических деформациях среди восьми корней уравнения (76) четыре корня обычно имеют отрицательные действительные части. Если к тому же для этих корней выполняются условия

$$|\operatorname{Re} r_\alpha| a_1 \gg 1, \quad (77)$$

где a_1 — характерный размер срединной поверхности в направлении $x_2 = \text{const}$, то можно использовать концепцию краевого эффекта. А именно, вместо точного удовлетворения граничным условиям на противоположной стороне можно поставить условие ограниченности решения при $x_1 \rightarrow \infty$. При этом необходимо соответствующим образом выбрать частное решение φ_*, ψ_* . Тогда число постоянных, входящих в выражения (75), сокращается до четырех. Пусть, например, на границе $x_1 = 0$ поставлены условия скользящей заделки

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0.$$

Дополняя эти условия требованиями ограниченности

$$\varphi, \varphi', \psi', \psi'' < \infty \quad (x_1 \rightarrow \infty),$$

получим для определения постоянных систему четырех линейных алгебраических уравнений. Таким образом, вычисления существенно упрощаются.

Рассмотрим подробнее условия существования краевого эффекта. Развертывая определитель (76), получаем уравнение

$$\left[(r^2 - k_2^2)^2 - \frac{N_1 r^2 - N_2 k_2^2}{D} \right] (r^2 - k_2^2)^2 + \frac{Eh}{D} \left(\frac{r^2}{R_2} - \frac{k_2^2}{R_1} \right)^2 = 0. \quad (78)$$

Полагая $y = -r^2$, представим уравнение (78) так:

$$y^4 + c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4 = 0. \quad (79)$$

Для коэффициентов уравнения (79) получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} c_1 &= 4k_2^2 + \frac{N_1}{D}; \\ c_2 &= 6k_2^4 + \frac{2N_1 + N_2}{D} k_2^2 + \frac{Eh}{DR_2^2}; \\ c_3 &= 4k_2^6 + \frac{N_1 + 2N_2}{D} k_2^4 + \frac{2Eh}{DR_1 R_2} k_2^2; \end{aligned} \quad (80)$$

$$c_4 = k_2^8 + \frac{N_2}{D} k_2^6 + \frac{Eh}{DR_1^2} k_2^4.$$

Решения типа краевого эффекта будут существовать, если среди корней уравнения (79) нет положительных действительных и нулевых корней. Применяя к уравнению (79) известную теорему Декарта, приходим к достаточным условиям существования краевого эффекта:

$$c_1 > 0; \quad c_2 > 0; \quad c_3 > 0; \quad c_4 > 0. \quad (81)$$

В качестве примера рассмотрим сферическую оболочку, нагруженную равномерным внутренним или внешним давлением. Тогда $R_1 = R_2 = R$; $N_1 = N_2 = N$. Достаточные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} N &> -4k_2^2 D; \\ N &> -k_2^2 D \left(2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{k_*^4}{k_2^4} \right); \\ N &> -k_2^2 D \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{k_*^4}{k_2^4} \right); \\ N &> -k_2^2 D \left(1 + \frac{k_*^4}{k_2^4} \right). \end{aligned} \quad (82)$$

Здесь k_* — параметр оболочки, определяемый по одной из формул (58). С другой стороны, в данном случае нетрудно получить явные выражения для корней уравнения (78):

$$\begin{aligned} r_{1-4} &= \pm k_2; \\ r_{5-8} &= \pm \sqrt{\frac{N}{2D} + k_2^2 \pm \sqrt{\left(\frac{N}{2D}\right)^2 - k_*^4}}. \end{aligned} \quad (83)$$

Из формул (83) вытекают необходимые и достаточные условия существования краевого эффекта:

$$\begin{aligned} N &> -2k_*^2 D, \quad \text{если } |k_2| \leq k_*; \\ N &> -k_2^2 D \left(1 + \frac{k_*^4}{k_2^4} \right), \quad \text{если } |k_2| > k_*. \end{aligned} \quad (84)$$

Условия (82) и (84) проиллюстрированы на рис. 26. Граница, определяемая согласно (82), обозначена сплошной линией, а граница, определяемая согласно

(84), выделена штриховкой. При $|k_2| = k_*$ границы совпадают. Заметим, что соотношение $N = -2k_*^2 D$ соответствует достижению критических напряжений; определяемых согласно линейной теории упругой устойчивости. Таким образом, краевой эффект существует всюду в докритической области. Заметим также, что при $N < -2k_*^2 D$ — осциллирующий краевой эффект [27]. При $N > -2k_*^2 D$ — краевой эффект неосциллирующий.

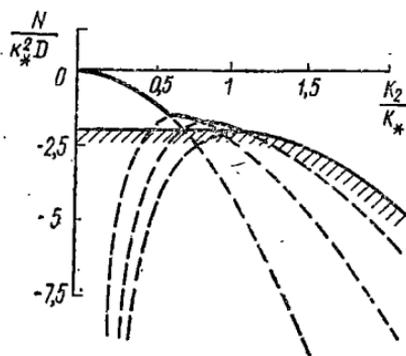


Рис. 26

Как видно из формул (83), в области, достаточно удаленной от границы вырождения краевого эффекта, действительные части характеристических корней имеют порядок волнового числа k_2 . Таким образом, в этой области условие (77) принимает вид $k_2 a_1 \gg 1$. Это значит, что масштаб изменчивости начальных искривлений в направлении контура должен быть мал по сравнению с характерным размером оболочки в направлении по нормали к контуру. Этот вывод находится в соответствии с принципом Сен-Венана.

После того, как функции $\varphi(x_1|k)$ и $\psi(x_1|k)$ найдены, дисперсии, корреляционные функции и т. п. характеристики вычисляются известными методами (§ 1.12). В частности, для среднего квадрата перемещения $w_1(r)$ имеем формулу

$$\langle |w_1(r)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_0}(k) |\varphi(x_1|k)|^2 dk. \quad (85)$$

Как и следовало ожидать, в рамках сделанных допущений средний квадрат не зависит от координаты x_2 .

§ 2.5. Растяжение пластины с начальными неправильностями

Пусть пластина с малыми начальными неправильностями испытывает равномерное растяжение силами N (рис. 27). В этом частном случае в уравнениях (68)

и (74) следует положить $R_1 \rightarrow \infty$; $R_2 \rightarrow \infty$; $N_1 = N_2 = N$. Второе уравнение системы (74) дает $\psi \equiv 0$, а первое уравнение принимает вид

$$D(\varphi^{IV} - 2k_2^2\varphi'' + k_2^4\varphi) - N(\varphi'' - k_2^2\varphi) = -N(k_1^2 + k_2^2)e^{ik_1x_1}.$$

Выпишем общее решение этого уравнения.

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^4 C_{\alpha} e^{r_{\alpha} x_1} - \frac{N e^{ik_1 x_1}}{D(k_1^2 + k_2^2) + N'} \quad (86)$$

где r_{α} — корни характеристического уравнения

$$D(r^2 - k_2^2)^2 - N(r^2 - k_2^2) = 0.$$

Эти корни, очевидно, составляют

$$r_{1,2} = \pm k_2; \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{k_2^2 + \kappa^2},$$

где использовано обозначение

$$\kappa^2 = N/D. \quad (87)$$

Пока выполняется условие $\kappa^2 > -k_2^2$, два характеристических корня — отрицательные действительные числа, т. е. концепция краевого эффекта применима в данной задаче. При положительных κ^2 (т. е. при растягивающих усилиях) эти корни по модулю имеют порядок k_2 и более. Таким образом, можно ожидать выполнения условия (77) и быстрого затухания краевого эффекта. При сжимающих усилиях краевой эффект затухает медленнее. Условие $\kappa^2 = -k_2^2$ как следует из (87), соответствует равенству

$$N = N_{*}(0, k_2) = -k_2^2 D.$$

Здесь $N_{*}(0, k_2)$ — критическое усилие по линейной теории, соответствующее волновому числу k_2 (при этом $k_1 = 0$). Итак, при достижении критического усилия краевой эффект вырождается.

Пусть $\kappa^2 > -k_2^2$. Тогда решение (86), ограниченное на бесконечности, примет вид

$$\varphi = C_1 e^{-k_2 x_1} + C_2 e^{-\sqrt{k_2^2 + \kappa^2} x_1} - \frac{\kappa^2 e^{ik_1 x_1}}{k^2 + \kappa^2}. \quad (88)$$

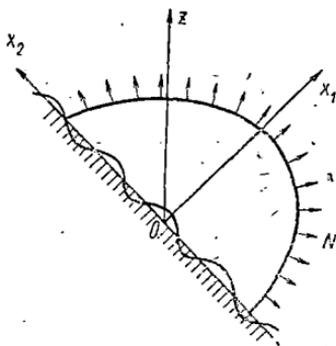


Рис. 27

Как и ранее, используется обозначение $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Вычислим постоянные C_1 и C_2 для случая жесткого заземления пластины на линии $x_1 = 0$. Требуя, чтобы выполнялись условия $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, легко получим

$$C_1 = \frac{x^2 \left(\sqrt{k_2^2 + x^2} + ik_1 \right)}{(k^2 + x^2) \left(\sqrt{k_2^2 + x^2} - k_2 \right)};$$

$$C_2 = - \frac{x^2 (k_2 + ik_1)}{(k^2 + x^2) \left(\sqrt{k_2^2 + x^2} - k_2 \right)}.$$

Выражение (88) после небольших преобразований записывается следующим образом:

$$\varphi(x_1 | k) = \frac{x^2}{(k^2 + x^2) \left(\sqrt{k_2^2 + x^2} - k_2 \right)} \left[\left(\sqrt{k_2^2 + x^2} + ik_1 \right) e^{-k_2 x_1} - (k_2 + ik_1) e^{-\sqrt{k_2^2 + x^2} x_1} - \left(\sqrt{k_2^2 + x^2} - k_2 \right) e^{ik_1 x_1} \right]. \quad (89)$$

Применим формулы (85) и (89) для вычисления среднего квадрата (дисперсии) перемещения при условии, что поле начальных неправильностей $\omega_0(\mathbf{r})$ представляет собой узкополосное поле со спектральной плотностью, аппроксимируемой выражением

$$S_{\omega_0}(k) = \frac{\sigma_0^2}{4} \delta(|k_1| - k_0) \delta(|k_2| - k_0). \quad (90)$$

Здесь σ_0 и k_0 — некоторые положительные постоянные. Подстановка выражения (90) в формулы (85) и (89) дает

$$\begin{aligned} \langle |\omega(\mathbf{r})|^2 \rangle = & \sigma_0^2 \left(\frac{1+n_0}{2+n} \right)^2 \left[(n_0-1)^2 + (2+n)e^{-2k_0 x_1} + 2e^{-2n_0 k_0 x_1} - \right. \\ & \left. - 2(1+n_0)e^{-(1+n_0)k_0 x_1} + 2e^{-k_0 x_1} (n_0-1)(\cos k_0 x_1 - \sin k_0 x_1) + \right. \\ & \left. + 2e^{-n_0 k_0 x_1} (n_0-1)(\cos k_0 x_1 + \sin k_0 x_1) - 2ne^{-k_0 x_1} \cos k_0 x_1 \right], \quad (91) \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$n = N / (k_0^2 D); \quad n_0 = \sqrt{1+n}. \quad (92)$$

Заметим, что правая часть формулы (91) остается конечной при $n > -2$.

На рис. 28 представлены результаты вычисления безразмерной дисперсии перемещения в функции от $k_0 x_1$ при различных значениях параметра n . Как видно из диаграммы, дисперсия перемещения с ростом $k_0 x_1$ довольно быстро приближается к асимптотическому значению

$$\langle |\psi_1(\infty, x_2)|^2 \rangle = \left(\frac{\sigma_0 n}{2+n} \right)^2$$

(исключение составляет случай сжимающей силы, близкой к критическому значению). Вместе с тем, максимальные значения дисперсии в зоне краевого эффекта могут существенно превышать асимптотическое значение.

Аналогично вычисляются дисперсии, корреляционные функции, спектральные плотности и тому подобные характеристики различных полей, которые получаются из полей $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$ посредством линейного преобразования. Рассмотрим вопрос о вычислении этих характеристик в общей форме. Пусть $m(\mathbf{r})$ — некоторое поле, связанное с полями $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$ соотношением

$$m = l_1 \psi_1 + l_2 \chi.$$

Здесь l_1 и l_2 — линейные операторы. Каноническое представление для поля $m(\mathbf{r})$ имеет вид

$$m(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(k) \mu(x_1 | k) e^{ik_2 x_2} dk, \quad (93)$$

где функция $\mu(x_1 | k)$ определяется следующим образом:

$$\mu(x_1 | k) = \{ l_1 [\varphi(x_1 | k) e^{ik_2 x_2}] + l_2 [\psi(x_1 | k) e^{ik_2 x_2}] \} e^{-ik_2 x_2}.$$

Корреляционная функция поля $m(\mathbf{r})$ находится с учетом соотношений (70) и (93):

$$\langle m^*(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_0}(k) \mu^*(x_1 | k) \mu(x_1' | k) e^{ik_2(x_2' - x_2)} dk.$$

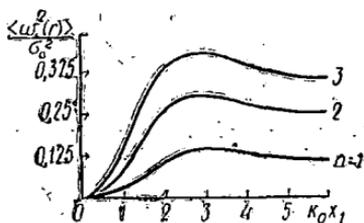


Рис. 28

В частности, полагая $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, получим формулу для среднего квадрата

$$\langle |m(\mathbf{r})|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_0}(k) |\mu(x_1 | k)|^2 dk. \quad (94)$$

Для приложений часто бывает необходимо знать свойства сечения поля $m(\mathbf{r})$ по линии $x_1=0$. Полагая в формуле (93) $x_1=0$, получим

$$m(0, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(k) \mu(0 | k) e^{ik_2 x_2} dk.$$

Выражение, стоящее в правой части, можно трактовать как спектральное представление однородной случайной функции аргумента x_2 . Это представление имеет вид

$$m(0, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} M(k_2) e^{ik_2 x_2} dk_2,$$

где спектр $M(k_2)$ дается формулой

$$M(k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(k) \mu(0 | k) dk_1, \quad (95)$$

Спектральную плотность $T_m(k_2)$ функции $m(0, x_2)$ найдем из условия, что

$$\langle M^*(k_2) M(k_2') \rangle = T_m(k_2) \delta(k_2 - k_2').$$

Принимая во внимание формулу (95), легко получим

$$T_m(k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_0}(k) |\mu(0 | k)|^2 dk_1, \quad (96)$$

Применим формулы (94) и (96) к задаче о растяжении пластины, заземленной по стороне контура $x_1=0$. Возьмем, например, изгибающий момент

$$m_{11} = D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \right).$$

Соответствующая функция $\mu(x_1 | k)$ определяется так:

$$\mu(x_1 | k) = D(\varphi'' - \nu k_2^2 \varphi). \quad (97)$$

Явное выражение для этой функции, получаемое под-

становкой в формулу (97) выражения (89), довольно громоздко; мы его не выписываем. Ограничимся случаем спектральной плотности $S_{w_0}(k)$, заданной в виде (90). Дисперсию изгибающего момента найдем согласно общей формуле (94):

$$\langle |m_{11}(r)|^2 \rangle = \sigma_0^2 |\mu(x_1|k)|^2.$$

Отсюда с учетом (89)

$$\begin{aligned} \langle |m_{11}(r)|^2 \rangle = & k_0^4 D^2 \sigma_0^2 \left(\frac{1+n_0}{2+n} \right)^2 [(1+\nu)^2(n_0-1)^2 + (1-\nu)^2 \times \\ & \times (2+n) e^{-2k_0 x_1} + 2(1-\nu+n)^2 e^{-2n_0 k_0 x_1} - 2(1-\nu)(1-\nu+n) \times \\ & \times (1+n_0) e^{-(1+n_0)k_0 x_1} + 2(1-\nu^2)(n_0-1)(n_0 \cos k_0 x_1 + \sin k_0 x_1) \times \\ & \times e^{-k_0 x_1} - 2(1+\nu)(1-\nu+n)(n_0-1)(\cos k_0 x_1 + \sin k_0 x_1) e^{-n_0 k_0 x_1}], \end{aligned}$$

где сохранены обозначения (92). При $x_1=0$ эта формула дает

$$\langle |m_{11}(0, x_2)|^2 \rangle = \frac{2(k_0^2 D \sigma_0 n)^2}{2+n}. \quad (98)$$

При $x_1 \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\langle |m_{11}(\infty, x_2)|^2 \rangle = \left[\frac{k_0^2 D \sigma_0 (1+\nu)n}{2+n} \right]^2.$$

Квадратный корень из отношения этих выражений дает

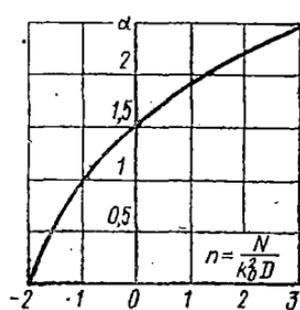


Рис. 29

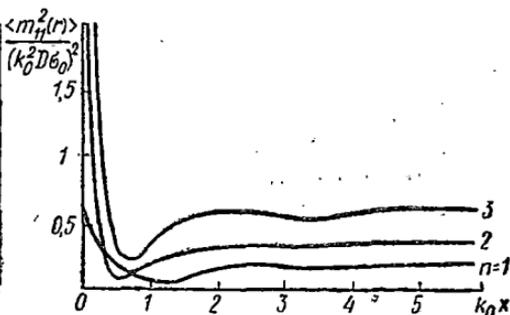


Рис. 30

коэффициент концентрации по среднему квадратическому отклонению

$$\alpha = \frac{\sqrt{2(2+n)}}{1+\nu}. \quad (99)$$

График зависимости коэффициента концентрации (99) от параметра нагрузки n представлен на рис. 29 (принято, что $\nu=0,3$). Даже при малой нагрузке коэффициент концентрации довольно велик.

На рис. 30 представлена зависимость дисперсии изгибающего момента m_{11} от безразмерной координаты $k_0 x_1$ при различных значениях параметра нагрузки n и при $\nu=0,3$. Зона краевого эффекта имеет ширину порядка $1/k_0$, где k_0 — волновое число начальных не-правильностей.

§ 2.6. Случайные термоупругие напряжения в оболочках

Если конструкция подвергается тепловым воздействиям со стохастическими условиями теплообмена, то в конструкции возникают случайные температурные и термоупругие поля. Некоторые стохастические задачи термоупругости для полупространства рассматривались Г. Паркусом [111]. В работе В. В. Болотина и В. Н. Москаленко [21] был предложен метод нахождения статистических характеристик напряжений, деформаций и

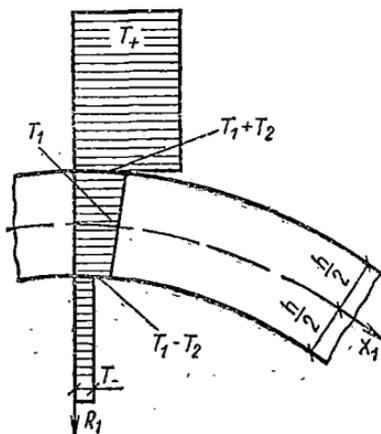


Рис. 31

и перемещений в тонких упругих оболочках, находящихся в случайном пространственно-временном температурном поле. В основу положены уравнения классической теории оболочек и гипотеза о линейном распределении температуры по толщине, аналогичная гипотезе Кирхгофа — Лява. Решение стохастических уравнений строится при помощи метода канонических разложений. Для случая, когда масштаб корреляции температурного поля мал по сравнению с характерными размерами срединной поверхности оболочек, определение статистических характеристик сводится к квадратурам. Ниже применение этого метода будет проиллюстрировано на примере оценки стохастического термо-

температурного поля мал по сравнению с характерными размерами срединной поверхности оболочек, определение статистических характеристик сводится к квадратурам. Ниже применение этого метода будет проиллюстрировано на примере оценки стохастического термо-

упругого краевого эффекта в круговых цилиндрических оболочках.

Рассмотрим тонкую упругую оболочку, отнесенную к ортогональной криволинейной системе координат на срединной поверхности $\Gamma = \{x_1, x_2\}$. Координату, отсчитываемую по нормали к поверхности, обозначим через z . Пусть оболочка находится в контакте с некоторой средой, температура которой является функцией координат и времени: Температуру среды у поверхности оболочки $z = (1/2)h$, называемую в дальнейшем наружной, обозначим через T_+ (Γ, t). Температуру среды у поверхности $z = -(1/2)h$, называемую в дальнейшем внутренней, обозначим через T_- (Γ, t). Допустим, что на границе со средой выполняются условия теплообмена Ньютона с коэффициентами теплообмена κ_+ и κ_- соответственно. Эти коэффициенты будем считать постоянными. Наконец, предположим, что по толщине оболочки температура T изменяется по линейному закону (рис. 31):

$$T = T_1(\Gamma, t) + \frac{2z}{h} T_2(\Gamma, t). \quad (100)$$

Функции T_1 и T_2 удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial t} - \Delta T_1 + \frac{2\varepsilon}{h^2} T_1 + \frac{2\eta}{h^2} T_2 &= \frac{2\varepsilon}{h^2} \theta_1; \\ \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} - \Delta T_2 + \frac{6(\varepsilon + 2)}{h^2} T_2 + \frac{6\eta}{h^2} T_1 &= \frac{6\varepsilon}{h^2} \theta_2. \end{aligned} \quad (101)$$

Здесь $\theta_1(\Gamma, t)$ и $\theta_2(\Gamma, t)$ — входные параметры:

$$\theta_1 = \frac{\beta_+ T_+ + \beta_- T_-}{\beta_+ + \beta_-}, \quad \theta_2 = \frac{\beta_+ T_+ - \beta_- T_-}{\beta_+ + \beta_-}. \quad (102)$$

Кроме того, использованы следующие обозначения: Δ — оператор Лапласа на срединной поверхности; $b = \lambda/c\rho$ — коэффициент температуропроводности для оболочки (λ — коэффициент теплопроводности материала оболочки, c — его удельная теплоемкость, ρ — его плотность); $\beta_{\pm} = \kappa_{\pm} h/\lambda$ — коэффициенты Био для наружной и внутренней поверхностей;

$$\varepsilon = \frac{\beta_+ + \beta_-}{2}; \quad \eta = \frac{\beta_+ - \beta_-}{2}.$$

При составлении уравнений теории тонких упругих оболочек при наличии поля температур, заданного в

форме (100), будем считать упругие характеристики не зависящими от температуры. Уравнения в перемещениях имеют вид

$$\sum_{k=1}^3 L_{\gamma k} u_k = \frac{\alpha E h}{1-\nu} \cdot \frac{1}{H_{\gamma}} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_{\gamma}} + \frac{h}{6R_{\gamma}} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x_{\gamma}} \right);$$

$$\sum_{k=1}^3 L_{3k} u_k = \frac{\alpha E h}{1-\nu} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) T_1 - \frac{h}{6} \Delta T_2 \right]; (\gamma=1, 2). \quad (103)$$

Здесь L_{jk} — известные линейные операторы; u_1 и u_2 — тангенциальные перемещения; $u_3 = w$ — нормальное перемещение; α — коэффициент линейного температурного расширения; H_{γ} — коэффициенты Ламе. Для состояний, быстро меняющихся на срединной поверхности, имеем систему уравнений типа уравнений В. З. Власова:

$$D \Delta \Delta w - \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2\alpha}{h} (1+\nu) D \Delta T_2 = 0;$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \chi + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \alpha \Delta T_1 = 0. \quad (104)$$

Уравнение краевого эффекта у кругового края круговой цилиндрической оболочки будет следующим:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\alpha E h}{R} T_1 + \frac{2\alpha(1+\nu)D}{h} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} = 0. \quad (105)$$

Уравнения (101), (103) — (105) решаются совместно с граничными условиями на контуре срединной поверхности, к которым в случае бесконечных оболочек добавляются условия ограниченности на бесконечности.

Пусть входные параметры θ_1 и θ_2 в уравнениях (101) являются случайными функциями координат и времени t . Тогда решения уравнения (101) и, следовательно, решения уравнений (103) — (105) будут случайными функциями координат и времени. Задача состоит в определении статистических характеристик — математических ожиданий, корреляционных функций, дисперсий и т. п. для выходных параметров T_1 , T_2 , u_1 , u_2 , w , χ , а также параметров напряженно-деформированного состояния. Поскольку уравнения (101), (103) — (105) линейны и имеют детерминистические коэффициенты, то

уравнения, связывающие математические ожидания входных и выходных параметров, получаются осреднением исходных уравнений по множеству реализаций. Получаемые таким образом уравнения и граничные условия имеют тот же вид, что и в соответствующей детерминистической задаче. Поэтому мы в дальнейшем будем предполагать, что входные параметры имеют математические ожидания, равные нулю.

Для решения уравнений стохастической задачи применим метод канонических разложений (§ 1.13). Допустим, что функции $\theta_1(\mathbf{r}, t)$ и $\theta_2(\mathbf{r}, t)$ могут быть разложены в ряды по некоторым системам детерминистических функций $\varphi_{1k}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_{2k}(\mathbf{r}, t)$,

$$\theta_\gamma(\mathbf{r}, t) = \sum_k \Theta_k \varphi_{\gamma k}(\mathbf{r}, t); \quad (\gamma = 1, 2), \quad (106)$$

так что коэффициенты этих рядов θ_k являются случайными некоррелирующими величинами и образуют полную систему случайных величин. Связь между этими коэффициентами и корреляционными функциями для случайных процессов $\theta_\gamma(\mathbf{r}, t)$ дается формулами типа (1.179):

$$\langle \theta_\beta^*(\mathbf{r}, t) \theta_\gamma(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_k \langle |\Theta_k|^2 \rangle \varphi_{\beta k}^*(\mathbf{r}, t) \varphi_{\gamma k}(\mathbf{r}', t'); \quad (\beta, \gamma = 1, 2). \quad (107)$$

Решение уравнений (101) представляется в виде

$$T_\beta(\mathbf{r}, t) = \sum_k \Theta_k \psi_{\beta k}(\mathbf{r}, t); \quad (\beta = 1, 2). \quad (108)$$

Здесь $\psi_{\beta k}(\mathbf{r}, t)$ — решения системы уравнений, получаемых из (101) заменой θ_1 на φ_{1k} , а θ_2 на φ_{2k} . Корреляционные функции для случайных процессов $T_1(\mathbf{r}, t)$ и $T_2(\mathbf{r}, t)$ вычисляются по формуле

$$\langle T_\beta^*(\mathbf{r}, t) T_\gamma(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_k \langle |\Theta_k|^2 \rangle \psi_{\beta k}^*(\mathbf{r}, t) \psi_{\gamma k}(\mathbf{r}', t'); \quad (\beta, \gamma = 1, 2). \quad (109)$$

Далее описанная выше процедура применяется к уравнениям (103), (104) или (105). Ограничимся наиболее простым уравнением (105). Его решение ищем в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_k \Theta_k \chi_k(x, t), \quad (110)$$

где $x = x_1$, а функции χ_k определяются из уравнения

$$D \frac{\partial^4 \chi_k}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} \chi_k - \frac{aEh}{R} \varphi_{1k} + \frac{2a}{h} (1 + \nu) D \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial x^2} = 0 \quad (111)$$

и соответствующих ему граничных условий. Корреляционные функции для прогиба w и его производных находятся далее по формулам типа (109).

Если в одном из координатных направлений оболочку можно рассматривать как бесконечно длинную, то двумерные дискретные разложения (106), (108) и (110) заменяются на дискретные разложения по одной из координат и интегральное разложение — по другой координате. Если входные параметры описывают стационарный временной эргодической случайный процесс, то временная компонента $e^{i\omega t}$ может быть выделена из канонических функций $\varphi_{\beta k}(r, t)$ и т. д. В этом случае каноническое разложение будет интегральным по времени t . Из-за недостатка места мы не входим здесь в детали; некоторые дополнительные соображения будут даны ниже — в связи с задачей о случайном термодинамическом поле в круговой цилиндрической оболочке.

В качестве простейшего примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, находящуюся в среде, температурное поле в которой является симметричным относительно оси оболочки. Пусть температурное поле среды является стационарной случайной функцией времени. Пусть, далее, масштаб корреляции по координате x настолько мал, что оболочку можно рассматривать как бесконечно длинную, а температурное поле как однородную случайную функцию координаты x . Дискретное разложение (106) заменяется при этом интегральным разложением

$$\theta_{\beta}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(k, \omega) a_{\beta}(k, \omega) e^{i(kx + \omega t)} dk d\omega. \quad (112)$$

Здесь $\Theta(k, \omega)$ — дельта-коррелированная случайная функция волнового числа k и частоты ω . Таким образом, базисные функции $\varphi_{\beta}(x, t | k, \omega)$ имеют вид

$$\varphi_{\beta}(x, t | k, \omega) = a_{\beta}(k, \omega) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (113)$$

где функции $a_{\beta}(k, \omega)$ определяются с учетом соотношений (102). Подставляя выражения (113) в уравнения (101), легко найдем базисные функции в интегральных разложениях, соответствующих дискретным разложениям (108):

$$\psi_1 = \frac{2\varepsilon}{Ah^2} \left(c_1 a_1 - \frac{6\eta}{h^2} a_2 \right) e^{i(kx + \omega t)};$$

$$\psi_2 = \frac{6\varepsilon}{Ah^2} \left(c_2 a_2 - \frac{2\eta}{h^2} a_1 \right) e^{i(kx + \omega t)} \quad (114)$$

Здесь использованы обозначения:

$$c_1 = \frac{i\omega}{b} + k^2 + \frac{6(\varepsilon + 2)}{h^2}; \quad c_2 = \frac{i\omega}{b} + k^2 + \frac{2\varepsilon}{h^2}; \quad A = c_1 c_2 - \frac{12\eta^2}{h^4}$$

Дискретному разложению (110) в данном случае соответствует интегральное разложение

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(k, \omega) \chi(x, t | k, \omega) dk d\omega. \quad (115)$$

Базисные функции находим из уравнения (111) с учетом формул (114)

$$\chi(x, t) = \frac{2\alpha\varepsilon E}{ABh^2} \left\{ \left(\frac{c_1 h}{R} - \frac{k^2 \eta}{1 - \nu} \right) a_1 + \left[\frac{c_2 k^2 h^3}{2(1 - \nu)} - \frac{6\eta}{Rh} \right] a_2 \right\} e^{i(kx + \omega t)}, \quad (116)$$

где

$$B = k^4 D + \frac{Eh}{R^2}$$

Используя формулы (112), (113), (115) и (116), трудно вычислить корреляционные функции, спектральные плотности и дисперсии различных параметров. В качестве примера вычислим характеристики изгибающего момента

$$m_{11} = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{h} (1 + \nu) T_2 \right]. \quad (117)$$

Его корреляционную функцию найдем, подставляя выражение (115) в формулу (117), перемножая значения момента при x, t и x', t' и осредняя результат:

$$\begin{aligned} & \langle m_{11}^*(x, t) m_{11}(x', t') \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(k, \omega) \mu^*(x, t | k, \omega) \mu(x', t' | k, \omega) dk d\omega. \end{aligned} \quad (118)$$

Здесь $S_\theta(k, \omega)$ — спектральная плотность поля $\theta(x, t)$. При этом

$$\langle \Theta^*(k, \omega) \Theta(k', \omega') \rangle = S_\theta(k, \omega) \delta(k - k') \delta(\omega - \omega'). \quad (119)$$

Базисная функция μ имеет вид

$$\mu = \frac{2\alpha\varepsilon ED}{ABRh} (f_1 a_1 + f_2 a_2) e^{i(kx + \omega t)}$$

Здесь использованы обозначения

$$f_1 = - \left[c_1 k^2 + \frac{E\eta}{RD(1-\nu)} \right]; \quad f_2 = 6 \left(\frac{1+\nu}{Rh} c_2 + \frac{\eta k^2}{h^2} \right).$$

Связь между спектральными плотностями температурного поля в среде и спектральной плотностью момента m_{11} дается формулой

$$S_{m_{11}}(k, \omega) = \left(\frac{2a\epsilon ED}{|A|BRh} \right)^2 [|f_1 a_1|^2 + 2\text{Re}(f_1^* f_2 a_1^* a_2) + |f_2 a_2|^2] S_\theta(k, \omega). \quad (120)$$

Дисперсию момента m_{11} находим по формуле

$$\langle |m_{11}|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{m_{11}}(k, \omega) dk d\omega. \quad (121)$$

§ 2.7. Термоупругие краевые эффекты

Вычислим вероятностные характеристики выходных параметров у заземленного края $x=0$ круговой цилиндрической оболочки, считая ее полубесконечной (рис. 32). Для упрощения выкладок примем, что температурное поле среды по-прежнему остается осесимметричным, а также стохастически стационарным и однородным. Тогда функции $\theta(x, t)$ по-прежнему задаются в форме (112). Базисные функции ψ_1, ψ_2 определяются из уравнений (101). Если торец оболочки в сечении $x=0$ адиабатически изолирован, то уравнения решаются при условиях



Рис. 32

и условий ограниченности при $x \rightarrow \infty$. В случае изотермических условий вместо (122)

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (122)$$

и условий ограниченности при $x \rightarrow \infty$. В случае изотермических условий вместо (122)

$$\psi_1 = \psi_2 = 0 \quad \text{при } x=0. \quad (123)$$

Наконец, если в сечении $x=0$ не накладывается никаких условий на температурное поле, то достаточно

потребовать ограниченности функций при $\pm \infty$. При этом сохраняются формулы (114).

Переходя к определению функции χ , рассмотрим подробнее последний случай. Подставим в правую часть уравнения (111) выражения (114):

$$D \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2} \chi = \frac{2\alpha \varepsilon EQ}{Ah^2} e^{i(kx + \omega t)} \quad (124)$$

Здесь
$$Q = \left(\frac{c_1 h}{R} - \frac{k^2 \eta}{1 - \nu} \right) a_1 + \left[\frac{c_2 k^2 h^2}{2(1 - \nu)} - \frac{6\eta}{Rh} \right] a_2$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное при $x \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\chi = \frac{2\alpha EQ}{ABh^2} [C_1 e^{-\beta(1+i)x} + C_2 e^{-\beta(1-i)x} + e^{ikx}] e^{i\omega t}, \quad (125)$$

где обозначено

$$\beta = \sqrt{\frac{Eh}{4R^2 D}} \quad (126)$$

Подчиняя решение (125) граничным условиям

$$\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

найдем

$$\chi = \frac{\alpha \varepsilon EQ}{\beta ABh^2} [q(x|k) - 2\beta] e^{i(kx + \omega t)}. \quad (127)$$

В формуле (127) введено обозначение

$$q = \{ [\beta(1+i) - k] e^{-\beta(1+i)x} + [\beta(1-i) + k] e^{-\beta(1-i)x} \} e^{-ikx}.$$

Корреляционную функцию момента $m_{11}(x, t)$ по-прежнему определяем по формуле (118). Обозначая через $\mu_0(x|k, \omega)$ функцию $\mu(x, t|k, \omega)$, умноженную на $e^{-i\omega t}$, приведем формулу к виду

$$\begin{aligned} & \langle m_{11}^*(x, t) m(x', t + \tau) \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(k, \omega) \mu_0^*(x|k, \omega) \mu_0(x'|k, \omega) e^{i\omega \tau} dk d\omega, \quad (128) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0 = & \frac{2\alpha \varepsilon ED}{ABh^2} \left\{ - \left[c_1 k^2 + \frac{Eh}{(1-\nu)RD} \right] \frac{ha_1}{R} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{c_2(1+\nu)}{R^2} + \frac{\eta k^2}{Rh} \right] a_2 - i\beta Q q(x|k) \right\} e^{ikx}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая определение спектральной плотности, найдем выражение для временной спектральной плотности $S_{m_{11}}(\omega)$ изгибающего момента $m_{11}(x, t)$ в фиксированном сечении

$$S_{m_{11}}(\omega | x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(k, \omega) |\mu_0(x | k, \omega)|^2 dk. \quad (129)$$

Дисперсия момента определится по формуле типа (121)

$$\langle |m_{11}(x)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{m_{11}}(\omega | x) d\omega, \quad (130)$$

Оценим отношение вероятностных характеристик напряжений, возникающих вблизи заземленного края и на значительном удалении от него. Отношение математических ожиданий будет равно, очевидно, отношению соответствующих детерминистических напряжений. Полагая, как и ранее, все поля центрированными, вычислим отношение дисперсий. Для упрощения выкладок примем, что температура среды внутри оболочки постоянна, а коэффициенты Био равны: $\beta_+ = \beta_-$. Тогда $T_- \equiv 0$, и формулы (102) дают: $\theta_1 = \theta_2 = 1/2 T_+$. Обозначим спектральную плотность для температуры T_+ просто через $S_T(k, \omega)$. Тогда

$$S_{T_1 T_1}(k, \omega) = S_{T_2 T_2}(k, \omega) = S_{T_1 T_2}(k, \omega) = \frac{1}{4} S_T(k, \omega).$$

Для дисперсии момента m_{11} в точке, достаточно удаленной от заделки, формула (130) с учетом (120) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle |m_{11}(\infty)|^2 \rangle = & \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 E^2}{R^2 h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{k^4}{|c_2|^2} - \frac{6(1+\nu)k^2}{Rh} \left(\frac{1}{c_1^* c_2^*} + \frac{1}{c_1 c_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{36(1+\nu)^2}{|c_1|^2 R^2 h^2} \right] \frac{S_T(k, \omega) dk d\omega}{(k^4 + 4\beta^4)^2}. \quad (131) \end{aligned}$$

Далее, используя формулы (129) и (130), вычислим дисперсию момента m_{11} в сечении $x=0$

$$\langle |m_{11}(0)|^2 \rangle = \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 E^2}{R^2 h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{|c_2|^2} + \frac{3(1+\nu)}{Rh\beta^2} \left(\frac{\beta + ik}{c_1^* c_2^*} + \frac{\beta - ik}{c_1 c_2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{9(1+\nu)^2}{|c_1|^2 R^2 h^2} \cdot \frac{\beta^2 + k^2}{\beta^6} \left] \frac{S_T(k, \omega) dk d\omega}{k^4 + 4\beta^4} \quad (132)$$

Нормальные напряжения σ_{11} от изгиба пропорциональны моменту m_{11} . Поэтому выражение

$$n = \sqrt{\frac{\langle |m_{11}(0)|^2 \rangle}{\langle |m_{11}(\infty)|^2 \rangle}} \quad (133)$$

имеет смысл коэффициента концентрации напряжений в заделке, вычисленного по дисперсии.

Приведем результаты вычислений по формулам (131)—(133) при некоторых частных предположениях относительно спектральной плотности $S_T(k, \omega)$. Пусть температурное поле в среде является пространственно-временным белым шумом

$$S_T = \text{const}, \quad (134)$$

а параметр ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon \gg h/R$. Вычисления по формулам (131) и (132) дают

$$\langle |m_{11}(\infty)|^2 \rangle = \frac{\pi^2 b S_T \alpha^2 \varepsilon^2 E^2}{32 R^2 \beta^3} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\gamma}{2\varepsilon+3} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon+2} \right);$$

$$\langle |m_{11}(0)|^2 \rangle = \frac{\pi^2 b S_T \alpha^2 \varepsilon^2 E^2}{8 R^2 \beta^3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2\gamma}{2\varepsilon+3} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon+2} \right).$$

Параметр γ зависит только от коэффициента Пуассона

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}$$

Отсюда по формуле (133)

$$n = 2 \sqrt{\frac{-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2\gamma}{2\varepsilon+3} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon+2}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2\gamma}{2\varepsilon+3} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon+2}}} \quad (135)$$

Как видно из формулы (135), коэффициент n зависит только от ε и ν . График для коэффициента n показан на рис. 33.

Теперь рассмотрим случай, когда масштаб пространственной корреляции температурного поля велик по сравнению с характерной длиной краевого эффекта

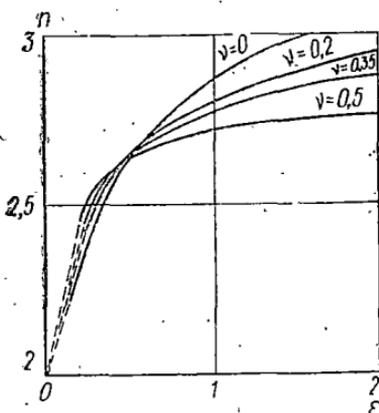


Рис. 33

$(\hbar R)^{1/2}$. Пусть спектральная плотность $S_T(k, \omega)$ может быть взята в виде

$$S_T(k, \omega) = \Psi(\omega)\delta(k). \quad (136)$$

Формулы (131) и (132) принимают вид:

$$\begin{aligned} \langle |m_{11}(\infty)|^2 \rangle &= \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 E^2 b^2}{4(1-\nu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\omega) d\omega}{\omega_2^2 + \omega^2}; \\ \langle |m_{11}(0)|^2 \rangle &= \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 E^2 b^2}{12(1-\nu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_1^2 + \omega^2} \left(1 + \frac{\gamma \varepsilon}{2\varepsilon + 3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega_2^2 + \omega^2} \left(\gamma^2 + 3\gamma \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon + 3} \right) \right] \Psi(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (137)$$

Здесь использованы обозначения

$$\omega_1 = \frac{2\varepsilon b}{\hbar^2}; \quad \omega_2 = \frac{6(\varepsilon + 2)}{\hbar^2} b.$$

Вычислим интегралы в формулах (137), предполагая, что спектральная плотность $\Psi(\omega)$ определяется выражением

$$\Psi(\omega) = \frac{K_0}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}.$$

Это соответствует корреляционной функции вида

$$\langle T_+^*(x, t) T_+(x', t + \tau) \rangle = K_0 e^{-\omega_0 |\tau|}.$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} \langle |m_{11}(\infty)|^2 \rangle &= \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 E^2 b^2 K_0}{4(1-\nu)^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0 + \omega_2)\omega_2}; \\ \langle |m_{11}(0)|^2 \rangle &= \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 E^2 b^2 K_0}{12(1-\nu)^2} \left[\frac{1}{(\omega_0 + \omega_1)\omega_1} \left(1 + \frac{\gamma \varepsilon}{2\varepsilon + 3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\omega_0 + \omega_2)\omega_2} \left(\gamma^2 + 3\gamma \frac{\varepsilon + 2}{2\varepsilon + 3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (138)$$

По формуле (133) находим коэффициент концентрации напряжений в заделке

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{ \left(1 + \frac{\gamma \varepsilon}{2\varepsilon + 3} \right) \frac{3(\varepsilon + 2)[\omega_* + 3(\varepsilon + 2)]}{\varepsilon(\omega_* + \varepsilon)} + } \\ &\quad + \gamma^2 + 3\gamma \frac{\varepsilon + 2}{2\varepsilon + 3}. \end{aligned}$$

Коэффициент n зависит от ε , ν и безразмерного параметра

$$\omega_* = \frac{\omega_0 l^2}{2b}$$

График зависимости коэффициента n от ε при различных ω_* и при $\nu=0,3$ приведен на рис. 34.

Если случайное поле температур вызывается турбулентными пульсациями в жидкости или газе, то естественно принять в следующую аналитическую аппроксимацию для корреляционной функции температуры $\bar{T}_+(x, t)$:

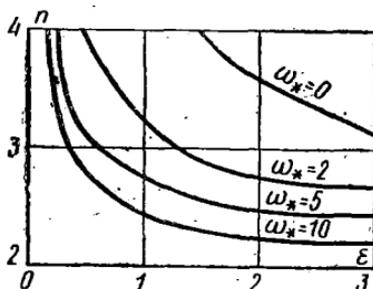


Рис. 34

$$\begin{aligned} < T_+(x, t) T_+(x + \xi, t + \tau) > = \\ &= K_0 e^{-m|\eta|} \times \\ &\times \left(\cos n\eta + \frac{m}{n} \sin n|\eta| \right). \end{aligned}$$

Здесь K_0 , m и n — некоторые положительные константы, а $\eta = \xi - U\tau$. Константа U может быть интерпретирована как средняя скорость сноса вихрей. Этой корреляционной функции соответствует выражение для спектральной плотности

$$S_T(k, \omega) = \frac{2K_0}{\pi} \cdot \frac{m(m^2 + n^2)\delta(\omega + kU)}{(m^2 + n^2 + k^2)^2 - 4n^2k^2}$$

Дальнейшие вычисления производятся по формулам (131) и (132). Интегралы, входящие в правые части этих формул, определяются численными методами. Ряд температурных и термоупругих задач рассмотрен в работах [60, 61].

§ 2.8. Расчет конструкций на сейсмические воздействия

Трудности расчета конструкций и сооружений на сейсмические воздействия обусловлены главным образом недостатком информации о вероятностных свойствах сильных землетрясений и невозможностью резкого

увеличения информации в ближайшем будущем. Поэтому целесообразно развитие теории, которая требовала бы минимального числа статистических данных и все же позволяла бы определять ожидаемый срок службы сооружения с достаточной достоверностью. При этом наиболее существенным моментом теории является выбор способа математического описания сейсмического воздействия [11, 17].

Вероятностная природа сейсмических сил имеет два источника. Первый из них состоит в том, что каждое землетрясение, взятое в отдельности, представляет собой случайный акт. Местоположение эпицентра, глубина залегания очага, количество выделившейся энергии, время, в течение которого произошло это выделение, и т. п. — все эти интегральные признаки, характеризующие землетрясение, являются случайными величинами. Другим источником вероятностной природы землетрясения является то обстоятельство, что к каждой рассматриваемой точке земной поверхности сейсмические волны доходят после многократной дифракции и интерференции в неоднородных слоях земной коры. Вследствие этого движение грунта в каждом пункте представляет собой случайный процесс. Если бы было возможно получить для одного и того же пункта две акселерограммы двух совершенно идентичных по своим интегральным признакам землетрясений, то они отличались бы между собой неповторимыми чертами. Их следовало бы рассматривать как две различные реализации случайного процесса с одинаковыми интегральными признаками. Более того, даже две акселерограммы одного и того же землетрясения, записанные в двух близких, но все-таки различных пунктах, также следует трактовать как различные реализации случайного процесса.

Таким образом, вероятностное описание сейсмического воздействия благодаря самой его природе расчленивается на две части. Первая часть состоит в нахождении частоты повторяемости сильных землетрясений и в построении функции распределения интегральных признаков для сильных землетрясений. Вторая часть состоит в том, чтобы дать надлежащее вероятностное описание нестационарного случайного процесса — движения грунта при фиксированных значениях интегральных признаков. Тогда расчеты, связанные с отысканием характеристик надежности конструкции при сейсмических

воздействиях, должны производиться в такой последовательности. Вначале определяются характеристики надежности при условии, что реализуются сильные землетрясения, дающие в рассматриваемом пункте акселерограммы с заданными интегральными признаками. Затем на основе найденных условных вероятностей, частоты повторяемости сильных землетрясений и функции распределения для интегральных признаков находится полная вероятность, того, что данная конструкция выдержит все сильные землетрясения, которые могут произойти в течение установленного срока эксплуатации (см. также § 3.3).

Такое расчленение вероятностного описания на два этапа позволяет существенно сократить требуемое число статистической информации о землетрясениях. При этом чисто эмпирические сведения могут быть частично заменены соответствующими статистическими гипотезами, подлежащими в дальнейшем проверке, и результатами решения детерминистических задач.

Простейшая схема сейсмического воздействия основана на допущении, что изменением спектрального состава в течение всего землетрясения можно пренебречь. Такое допущение может быть принято в первом приближении, если учесть, что высокочастотные толчки, которыми обычно заканчивается землетрясение, оказывают малое влияние на прочность по сравнению с сильными низкочастотными толчками. Если принять это допущение, то можно представить компоненты ускорения грунта в виде реализации стационарного случайного процесса, модулированного при помощи некоторой медленно изменяющейся функции времени (рис. 35).

Пусть q_1, q_2, \dots, q_m — интегральные признаки землетрясения, в которые, помимо параметров, характеризующих сам акт выделения энергии, включаются расстояние от рассматриваемого пункта до эпицентра, а также параметры, характеризующие свойства земной коры и грунта в данном районе. Предполагается, что известна совместная плотность вероятности $p(q_1, q_2, \dots, q_m)$. Часть из параметров q_1, q_2, \dots, q_m может быть детерминирована. Согласно сказанному выше, каждая компонента ускорения грунта $a(t)$ в первом приближении может быть представлена в виде

$$a(t) = A(q_1, q_2, \dots, q_r; t) \Phi(q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_m; t). \quad (139)$$

Параметры q_1, q_2, \dots, q_r характеризуют медленно изменяющуюся функцию $A(t)$, а параметры $q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_m$ — спектральный состав стационарной случайной функции $\varphi(t)$. Будем называть в дальнейшем функцию $A(t)$ огибающей (хотя она не является огибающей в обычном смысле, а лишь описывает общий

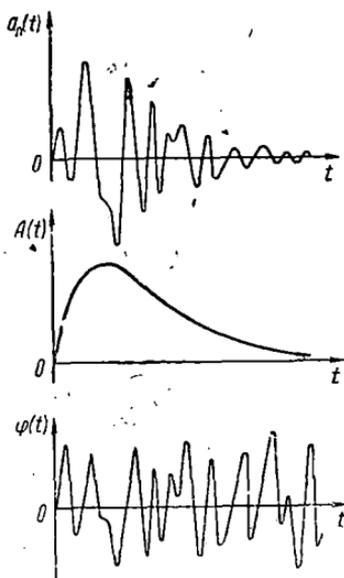


Рис. 35

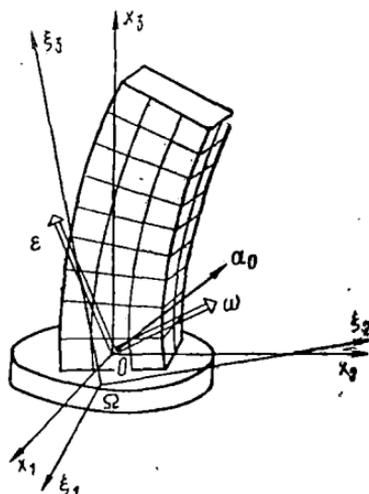


Рис. 36

характер изменения амплитуд во времени). Для огибающей может быть взято, например, выражение

$$A(t) = A_0 e^{-ct} \eta(t), \quad (140)$$

где A_0 и c — некоторые положительные постоянные — функции интегральных признаков q_1, q_2, \dots, q_r ; $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда. Вариант огибающей, принимающей при $t=0$ нулевое значение, имеет вид

$$A(t) = A_0 c t e^{-ct} \eta(t), \quad (141)$$

причем максимальное значение $A(t)$, равное A_0/e , достигается при $t=1/c$. Большие возможности для описания огибающих реальных акселерограмм имеет выражение

$$A(t) = A_0 (e^{-c_1 t} - \beta e^{-c_2 t}) \eta(t).$$

Здесь число констант увеличивается до четырех (A_0 , c_1 , c_2 и β). Некоторые другие предложения содержатся в работах [85, 118].

После того, как подходящая огибающая акселерограммы подобрана, делением значений реализации $a(t)$ на значения функции $A(t)$ можно найти реализации функций $\varphi(t)$. Если эта реализация не сильно отличается от реализации стационарной случайной функции, то ее можно использовать для получения оценки спектральной плотности $S_\varphi(\omega)$. Подходящей аналитической моделью для функции $\varphi(t)$ будет процесс со скрытой периодичностью. Его спектральная плотность, нормированная к единичной дисперсии, имеет вид

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha(\theta^2 + \alpha^2)}{[(\omega - \theta)^2 + \alpha^2][(\omega + \theta)^2 + \alpha^2]}. \quad (142)$$

Для сильных землетрясений обработка акселерограмм при помощи этой модели дает значения параметров $\theta = 5 \dots 30 \text{ c}^{-1}$, $\alpha = 2 \dots 10 \text{ c}^{-1}$. Если для огибающей принять выражение (140) или (141), то обработка акселерограмм даст значения $c = 0,1 \dots 1 \text{ c}^{-1}$.

Рассмотрим теперь методы расчета вероятностных характеристик колебаний, вызываемых сейсмическим воздействием, трактуя при этом сооружение как упругую систему, закрепленную на жестком основании. Пусть это основание как твердое тело совершает сложное случайное движение. Перемещения основания и упругие перемещения будем считать малыми по сравнению с характерными размерами сооружения. Будем пользоваться двумя системами координат — неподвижной (инерциальной) системой $\Omega \xi_1 \xi_2 \xi_3$ и подвижной системой $Ox_1 x_2 x_3$, связанной с основанием (рис. 36). Обозначим ускорение точки относительно неподвижной системы координат через a_0 . Угловую скорость и угловое ускорение трехгранника $Ox_1 x_2 x_3$ по отношению к неподвижному трехграннику $\Omega \xi_1 \xi_2 \xi_3$ обозначим соответственно через ω и ε . Радиус-вектор в подвижной системе координат обозначим через r , относительную скорость и относительное ускорение — через v_r и a_r соответственно. Для абсолютного ускорения a имеем выражение

$$a = a_0 + \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2(\omega \times v_r) + a_r, \quad (143)$$

где первые три члена соответствуют переносному ускорению, предпоследний член — ускорению Кориолиса,

последний член — относительному ускорению. Ввиду малости перемещений в переносном и относительном движениях можно пренебречь членами, нелинейными относительно перемещений и скоростей. В самом деле, пусть u — характерное линейное перемещение, τ — характерное время, H — характерный размер сооружения. Пусть перемещения в переносном и относительном движении имеют одинаковый порядок, так что

$$|a_0| \sim |a_r| \sim u^2/\tau^2, |\omega| \sim u/\tau H, |\varepsilon| \sim u/\tau^2 H, |v_r| \sim u/\tau.$$

Тогда имеем оценки

$$|a_0| \sim |a_r| \sim |\varepsilon \times r| \sim \frac{u}{\tau^2},$$

$$|\omega \times (\omega \times r)| \sim |\omega \times v_r| \sim \frac{u^2}{\tau^2 H}.$$

Отсюда видно, что неучет осестремительного ускорения и ускорения Кориолиса дает погрешность порядка $u/H \ll 1$. В результате вместо соотношения (143) получаем

$$a \approx a_0 + \varepsilon \times r + a_r \quad (144)$$

Для составления уравнений колебаний сооружения достаточно воспользоваться принципом Даламбера для относительного движения, вычисляя абсолютное ускорение согласно приближенной формуле (144).

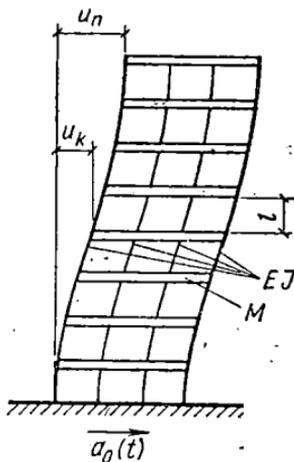


Рис. 37

В качестве примера рассмотрим расчет характеристик упругого колебательного движения плоской многоэтажной рамы, основанию которой сообщается горизонтальное поступательное движение в ее плоскости с ускорением $a_0(t)$ (рис. 37). Пусть суммарная масса ригелей каждого этажа M , суммарная изгибная жесткость стоек EJ и их длина l , а также коэффициенты демпфирования ε одинаковы для всех этажей, число которых обозначим через n . Массой стоек будем пренебрегать, а ригели будем считать абсолютно жесткими. Уравнения малых колебаний, выраженные через относитель-

ные перемещения ригелей $u_k(t)$, имеют вид

$$M \frac{d^2 u_k}{dt^2} + 2M\varepsilon \frac{du_k}{dt} + \frac{12EJ}{l^3} (-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) = -Ma_0(t) \quad (145)$$

$(k = 1, 2, \dots, n).$

В этих уравнениях следует положить

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} - u_n = 0. \quad (146)$$

Уравнения (145) представляют собой дифференциальные по времени и разностные по переменной k уравнения; роль разностных граничных условий играют соотношения (146).

Для решения уравнений (145) применим метод обобщенных координат, приняв за базисные векторы собственные формы в задаче о колебаниях соответствующей упругой системы:

$$u_k(t) = \sum_{\alpha=1}^n U_{\alpha}(t) \varphi_k^{(\alpha)}. \quad (147)$$

Здесь $U_{\alpha}(t)$ — обобщенные координаты; $\varphi_k^{(\alpha)}$ — компоненты векторов собственных форм $\varphi^{(\alpha)}$. Эти векторы найдем как решения системы разностных уравнений

$$-\varphi_{k-1} + 2\varphi_k = \varphi_{k+1} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \varphi_k = 0 \quad (148)$$

$(k = 1, 2, \dots, n)$

с граничными условиями $\varphi_0 = 0, \varphi_{n+1} - \varphi_n = 0$, аналогичными условиями (146). Здесь и в дальнейшем используется обозначение $\omega_0^2 = 12EJ/MI^3$. Вычисления дают $\varphi_k^{(\alpha)} = \sin k\mu_{\alpha}$, где μ_{α} — положительные действительные корни характеристического уравнения $\sin n\mu - \sin(n+1)\mu = 0$, занумерованные в порядке возрастания. Для собственных частот получаем формулу

$$\omega_{\alpha} = \omega_0 \sqrt{2(1 - \cos\mu_{\alpha})} \quad (149)$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, n).$

Подставляя разложение (147) в уравнения (145) и учитывая свойства собственных форм, получим уравнения колебаний в главных координатах

$$\frac{d^2 U_{\alpha}}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dU_{\alpha}}{dt} + \omega_{\alpha}^2 U_{\alpha} = -a_{\alpha}(t) \quad (150)$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, n).$

В правых частях стоят обобщенные ускорения $a_\alpha(t)$, пропорциональные ускорению основания $a_0(t)$:

$$a_\alpha(t) = \gamma_\alpha a_0(t), \quad \gamma_\alpha = \frac{\sum_{k=1}^n \sin k\mu_\alpha}{\sum_{k=1}^n \sin^2 k\mu_\alpha}. \quad (151)$$

Используя соотношения (147) и (151), стандартными методами вычислим корреляционные функции перемещений $u_k(t)$:

$$K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n K_{\alpha\beta}(t_1, t_2) \varphi_j^{(\alpha)} \varphi_k^{(\beta)}. \quad (152)$$

Здесь $K_{\alpha\beta}(t_1, t_2)$ — корреляционные функции обобщенных перемещений, которые выражаются через импульсные переходные функции $h_\alpha(t)$ и через корреляционную функцию ускорения основания $K_{a_0}(t_1, t_2)$ следующим образом:

$$K_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \gamma_\alpha \gamma_\beta \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_\alpha(t_1 - \tau_1) h_\beta(t_2 - \tau_2) K_{a_0}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (153)$$

Для перерезывающих сил в стойках

$$Q_k(t) = \frac{12EJ}{l^3} \sum_{\alpha=1}^n U_\alpha(t) [\varphi_j^{(\alpha)} - \varphi_j^{(\alpha)}]$$

аналогично получим

$$K_{Q_j Q_k}(t_1, t_2) = \left(\frac{12EJ}{l^3} \right)^2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n K_{\alpha\beta}(t_1, t_2) [\varphi_j^{(\alpha)} - \varphi_{j-1}^{(\alpha)}] [\varphi_k^{(\beta)} - \varphi_{k-1}^{(\beta)}]. \quad (154)$$

На рис. 38 приведены результаты вычислений по формулам (153) и (154) при следующих данных: $n=16$, $\omega_0=100 \text{ c}^{-1}$, $\varepsilon=1 \text{ c}^{-1}$. Параметры сейсмического воздействия были взяты такие: $\theta=10 \text{ c}^{-1}$, $\alpha=5 \text{ c}^{-1}$, $c=0,2 \text{ c}^{-1}$. График показывает изменение во времени безразмерных среднеквадратических значений

$$\psi_k(t) = \frac{\omega_0^2}{A_0} [K_{u_k u_k}(t, t)]^{1/2}$$

перемещений ригелей второго, четвертого, восьмого и шестнадцатого этажей. На рис. 39 приведен аналогич-

ный график для безразмерных среднеквадратических значений

$$x_k(t) = \frac{\omega_0^2 t^2}{12EJA_0} [K_{Q_k} Q_k(t, t)]^{1/2}$$

перерезывающих сил в стойках первого, второго, четвертого и восьмого этажей.

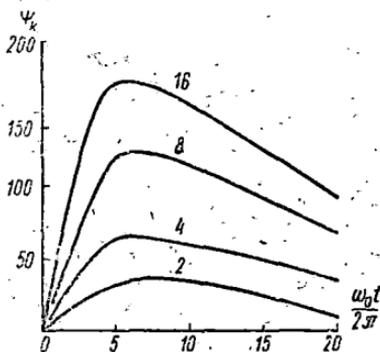


Рис. 38

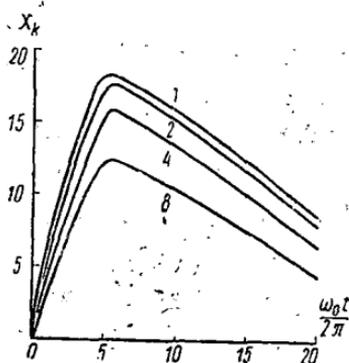


Рис. 39

До сих пор рассматривались линейные системы. Полное описание поведения сооружений при землетрясениях должно включать пластические деформации, выключение части элементов и связей вследствие их разрушения, силы сухого трения, «маятниковый» эффект (влияние сил тяжести при немалых отклонениях) и т. д. Для простейшей системы с одной степенью свободы имеем уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + R\left(u, \frac{du}{dt}\right) = -a_0(t), \quad (155)$$

где нелинейный член $R(u, \dot{u})$ учитывает перечисленные эффекты. Аналитические расчеты для систем типа (155) становятся слишком трудны или даже невыполнимы; удобным универсальным методом расчета становится метод статистического цифрового моделирования (Монте-Карло). При этом в рамках метода удается также включить и оценку надежности по отношению к выборке воздействий, имитирующих сейсмические условия данного района.

Глава 3
**ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ
И ДОЛГОВЕЧНОСТИ СООРУЖЕНИЙ**

§ 3.1. Основные понятия

Современные сооружения, машины и устройства представляют собой сложные системы, предназначенные для выполнения разнообразных функций. Помимо основных функций, составляющих главное назначение систем, может ставиться еще ряд требований. К ним относятся, например, эстетические требования, требования комфорта и т. п. Совокупность свойств, характеризующих полезные функции системы, будем называть ее качеством. Разработка и создание систем, обладающих все более высокими качествами, составляет основное содержание технического прогресса.

Качество системы должно сохраняться в течение всего времени, установленного для эксплуатации системы. В понятие эксплуатации включается не только полезное функционирование системы, но и вся совокупность операций над нею, начиная от изготовления и кончая демонтажем или сносом. Качество может быть утрачено не только во время функционирования, но и, например, при возведении или транспортировании. Вопрос о сохранении качества имеет весьма большое значение. Реальная система всегда в той или иной мере отличается от идеализированной системы, составляющей содержание проекта. Это отличие обусловлено многочисленными технологическими несовершенствами, дефектами материала, некондиционностью комплектующих элементов и т. п. Условия эксплуатации реальной системы также могут существенно отличаться от тех условий, которые рассматривались на стадии проектирования. Поэтому параметры функционирования реальной системы могут оказаться далекими от расчетных значений. Таким образом, не будет обеспечен необходимый уровень качества системы. Система окажется недостаточно эффективной.

Утрата качества может быть не только частичной, но и полной. Примерами служат потеря несущей способности конструкции, поломка машины и т. д. Понятие утраты качества включает в себя широкий круг явлений, начиная от умеренных отклонений парамет-

ров от их расчетных значений до катастрофических разрушений, сопряженных с материальным ущербом и человеческими жертвами.

Эти соображения естественно приводят нас к понятию надежности. Надежностью называется свойство системы, заключающееся в ее способности выполнять определенные задачи в определенных условиях эксплуатации. Другими словами, надежность — это устойчивость качества системы по отношению ко всем возможным возмущениям, которые могут встретиться при изготовлении, возведении, полезном функционировании, транспортировании, хранении и т. п. В зависимости от назначения системы и условий ее эксплуатации надежность может включать такие свойства, как безотказность, долговечность, ремонтпригодность, сохраняемость или любое сочетание этих свойств.

Обеспечение надежности систем является одной из важнейших проблем современной техники. Эта проблема встала во весь рост лишь в последние десятилетия, что обусловлено двумя основными причинами. Первая причина состоит в чрезвычайном увеличении сложности систем. Число элементов в современных технических системах может быть весьма велико; характер взаимодействия между ними сложен и многообразен; функции системы и характер ее взаимодействия с окружающей средой весьма сложны. Другая причина заключается в том, что многие системы имеют весьма ответственные функции; значение некоторых из них имеет национальные и даже общечеловеческие масштабы. Примерами могут служить уникальные сооружения, крупнейшие тепловые, атомные и гидроэнергетические станции, сети крупнейших энергосистем, ракетно-космические и оборонные комплексы и т. п. Нарушение функционирования таких систем может привести к большим материальным и моральным потерям, а также к потерям человеческих жизней.

Разработка методов оценки надежности систем и создания систем, обладающих заданными показателями надежности и долговечности, составляет содержание теории надежности. Хотя основы этой теории (в связи с расчетом сооружений) были сформулированы впервые в 20-х годах этого века, систематическая ее разработка началась лишь в 50-е годы. Современная теория надежности развивается главным образом в связи с

потребностями техники управления и связи. Наиболее существенным достижением теории является создание достаточно общей системы понятий и терминов, применимых в различных областях техники. Эти термины нашли отражение в ГОСТ 13377—75, утвержденном в 1975 г. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые из этих понятий в форме, приспособленной для механических систем.

Одним из основных понятий теории надежности является понятие отказа. Отказом называется событие, которое состоит в нарушении работоспособности системы. Иначе говоря, отказ — это частичная или полная утрата качества системы. К отказам относятся недопустимые отклонения параметров системы от расчетных значений, временные нарушения условий нормальной эксплуатации системы, полный выход системы из строя. Понятие отказа весьма близко по смыслу к понятию предельного состояния в строительной механике и в расчетах сооружений. Однако в теории надежности под предельным состоянием понимается такое состояние системы, которое соответствует технической невозможности или нецелесообразности ее дальнейшей эксплуатации. Таким образом, в теории надежности понятию предельного состояния придается более узкий смысл, чем в строительной механике.

Значительная часть отказов имеет механическое происхождение. Даже в радиотехнических устройствах мы весьма часто встречаемся с отказами, вызванными разрушением или механическим повреждением элементов и связей между ними. Отказы конструкций и сооружений более разнообразны. Примерами отказов, приводящих к выводу конструкции из строя или по крайней мере требующих прекращения ее эксплуатации, могут служить обрушение, опрокидывание, потеря устойчивости равновесия сжатых элементов, хрупкое разрушение и т. п. Многие отказы носят постепенный характер: параметры системы по мере эксплуатации постепенно ухудшаются и в некоторый момент времени достигают значений, при которых дальнейшая эксплуатация становится невозможной или нецелесообразной. К явлениям этого типа принадлежат процессы накопления остаточных деформаций, механический и коррозионный износ, растрескивание и т. п.

Почти все отказы вызваны влиянием случайных

факторов, которые либо заложены в систему при ее изготовлении и возведении, либо действуют на нее в процессе эксплуатации. Поэтому отказы, как правило, носят случайный характер. Трактовка отказов как случайного события является исходным пунктом при построении теории надежности. За основной показатель надежности системы может быть принята вероятность безотказной работы в течение всего срока службы T_* , т. е. вероятность случайного события, состоящего в том, что в течение срока T_* не произойдет ни одного серьезного отказа. Эту вероятность в дальнейшем обозначим через P и назовем просто показателем надежности.

Надежность ответственных систем должна быть достаточно высока. Было предложено [22] оценивать надежность в логарифмических единицах (белах), определяя уровень надежности как

$$\rho = \lg \frac{1}{Q} = -\lg(1-P),$$

где Q — вероятность наступления за срок службы хотя бы одного отказа. Показателю надежности $P = 0,99$ соответствует уровень $\rho = 2$ Б, показателю надежности $P = 0,999$ — уровень $\rho = 3$ Б и т. д. В расчетах, основанных на гипотезе о нормальности всех параметров, естественно пользоваться гауссовским уровнем надежности γ , связанным с показателем надежности P зависимостью

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(\gamma).$$

Здесь $\Phi(\gamma)$ — интеграл Лапласа*. График для пересчета с одного уровня надежности на другой представлен на рис. 40. В интервале значений $0,9 < P < 0,9999$ уровни надежности ρ и γ имеют одинаковый порядок.

Наряду с показателем надежности P , определяемым для всего установленного срока службы T_* , целесообразно рассматривать вероятность безотказной работы

* В литературе применяются функции

$$\Phi_1(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi(\gamma) - 1, \quad \Phi_2(\gamma) = \frac{1}{2} \Phi_1(\gamma),$$

которые также называются интегралами (функциями) Лапласа. Это необходимо учитывать при пользовании таблицами.

на отрезке времени $[0, t]$, где t — переменная величина. Эту функцию времени t будем называть в дальнейшем функцией надежности и обозначать через $P(t)$. Очевидно, что $P \equiv P(T_*)$.

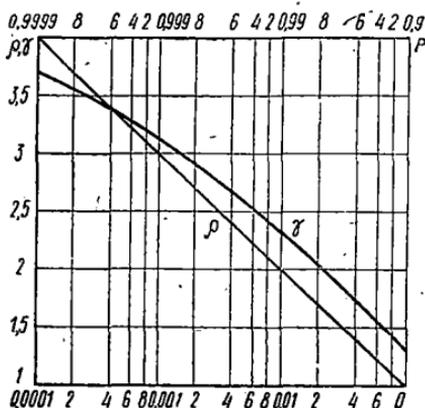


Рис. 40

Функция надежности $P(t)$ содержит в себе значительную информацию о надежности системы. Через эту функцию могут быть выражены некоторые другие показатели надежности и долговечности. К ним относятся, например, плотность распределения времени до первого отказа, равная производной от функции надежности $P(t)$, взятой с обрат-

ным знаком,

$$P(t) = -\frac{dP(t)}{dt}. \quad (1)$$

Произведение $p(t)dt$ представляет собой вероятность отказа на отрезке времени $[t, t+dt]$. Другой характеристикой является интенсивность отказов

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (2)$$

Произведение $\lambda(t)dt$ представляет собой условную вероятность отказа на отрезке времени $[t, t+dt]$ для системы, безотказно проработавшей время t . Таким образом, интенсивность отказов — это плотность распределения времен до первого отказа, определенная при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник. Функция надежности выражается через интенсивность отказов следующим образом:

$$P(t) = P(0) \exp \left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]. \quad (3)$$

Обычно принимается, что $P(0) = 1$. Если интенсивность отказов λ постоянна во времени, то из формулы

(3) вытекает экспоненциальный закон распределения отказов (рис. 41)

$$P(t) = e^{-\lambda t} \quad (4)$$

Экспоненциальный закон широко применяется при расчёте надёжности радиотехнических и электронных устройств. Заметим, что даже для типовых элементов этих устройств изменение отказов во времени не следует формуле (4). Обычно вначале интенсивность отказов относительно велика. Затем она снижается и остаётся примерно постоянной в течение дли-

тельного интервала эксплуатации, увеличиваясь к концу его вследствие старения и износа (рис. 42).

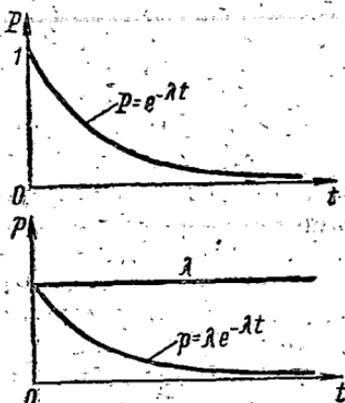


Рис. 41

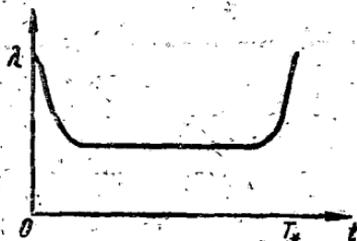


Рис. 42

тельного интервала эксплуатации, увеличиваясь к концу его вследствие старения и износа (рис. 42).

Срок службы системы T является случайной величиной. Если эксплуатация системы прекращается после первого отказа, то функция распределения сроков службы $F(T)$ выражается через функцию надёжности $P(t)$ следующим образом:

$$F(T) = 1 - P(t) |_{t=T} \quad (5)$$

Соответствующая плотность вероятности $p(T)$ определяется по формуле (1) с заменой t на T . Средний срок службы вычисляется как

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} t p(t) dt.$$

Отсюда после интегрирования по частям и использования формулы (1) получаем

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (6)$$

Из приведенных соображений очевидна необходимость рассматривать процесс изменения функции надежности во времени на протяжении всего установленного срока службы системы. В качестве примера сопоставимы два случая изменения функции надежности, показанные на рис. 43. Пусть кривые 1 и 2 относятся к двум разным типам систем, предназначенным для выполнения одинаковых функций в одинаковых условиях. Пусть начальные значения функции надежности $P(0)$ и значения $P(T_*)$, соответствующие установленному сроку службы, у обеих систем одинаковы. Но у первой системы максимум интенсивности отказов смещен в сторону больших значений t . Средний срок службы, вычисляемый по формуле (6), у системы первого типа будет больше. Первая система будет более эффективной, хотя вероятности отказа обеих систем к моменту времени $t=T_*$ равны. Заметим, что вывод относительно эффективности может измениться, если системы проходят предварительную тренировку на отрезке времени $[0, T_0]$, после чего производится отбраковка, ремонт или замена дефектных элементов. При этих условиях вторая система может оказаться более эффективной.

Заметим, что для экспоненциального закона надежности (4) формула (6) дает

$$\langle T \rangle = 1/\lambda.$$

Таким образом, интенсивность отказов при экспоненциальном законе надежности равна обратной величине

от математического ожидания долговечности. Формула (4) принимает вид

$$P(t) = \exp(-t/\langle T \rangle). \quad (7)$$

Выше за независимую переменную принималось время t . В теории надежности в качестве независимой переменной берется более общий параметр — наработка, которая определяется как продолжительность или объем работы, выполненной системой. Нарботка может измеряться в единицах времени (например, в летных часах для самолета), в единицах произведенной продукции, в числе производственных циклов и т. п. Вместо срока службы при этом употребляется более общий термин «ресурс», равный наработке от некоторого начального момента времени до наступления предельного состояния. В дальнейшем, однако, мы будем всюду брать время в качестве независимого переменного, имея в виду, что результаты легко распространяются на более общий случай. Теория надежности содержит также ряд понятий, которые позволяют включать в рассмотрение ремонт, восстановление, профилактику. Эти понятия образуются по такому же принципу, как и введенные выше понятия теории надежности. Так, понятие вероятности безотказной работы — функции надежности $P(t)$ — распространяется на восстанавливаемые системы: после каждого восстановления функция надежности принимает значение, равное единице, после чего значения функции $P(t)$ вновь квази-монотонно уменьшаются. В дальнейшем главное внимание уделено способам вычисления функций надежности для механических систем.

§ 3.2. Некоторые простейшие задачи теории надежности

Одной из основных задач теории надежности является оценка показателей надежности и долговечности систем по известным законам распределения надежности и долговечности ее элементов. Способ вычисления показателей надежности и долговечности существенно зависит от того, как взаимодействуют между собой элементы с точки зрения обеспечения безотказности системы. Рассмотрим некоторые простейшие способы взаимодействия.

Пусть система состоит из m элементов, вероятности безотказной работы которых P_1, P_2, \dots, P_m заданы. При этом элементы взаимодействуют между собой таким образом, что их отказы — стохастически независимые события, а отказ хотя бы одного из элементов

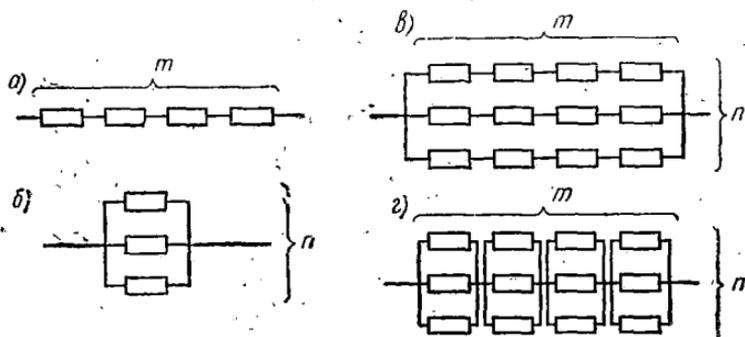


Рис. 44

приводит к отказу системы в целом. Такое соединение называется последовательным (рис. 44, а). Примером этого соединения может служить последовательное включение измерительных приборов, аппаратов и т. п. в электрическую цепь. Если хотя бы один из элементов выйдет из строя, цепь будет разомкнута, и произойдет отказ системы в целом. В качестве примера из строительной механики можно привести статически определимую стержневую систему. Для того чтобы такая система разрушилась, достаточно разрушиться хотя бы одному из ее элементов.

Безотказная эксплуатация системы из последовательно соединенных элементов есть случайное событие, равное пересечению независимых случайных событий — безотказных эксплуатаций каждого из ее элементов. Показатель надежности — вероятность безотказной работы системы — определяется перемножением соответствующих вероятностей

$$P = \prod_{k=1}^m P_k. \quad (8)$$

Если показатели надежности всех элементов равны между собой, т. е. если $P_1 = P_2 = \dots = P_m = P_0$, то показатель надежности системы вычисляется так:

$$P = P_0^m. \quad (9)$$

Как видно из формул (8) и (9), показатели надежности систем из последовательно соединенных элементов меньше показателей надежности каждого из элементов, взятых в отдельности. С увеличением числа элементов надежность системы быстро падает. Если число m достаточно велико, то практически невозможно получить систему, обладающую удовлетворительной надежностью. Пусть, например, $m = 1000$, $P_0 = 0,99$. Тогда по формуле (9) получаем, что показатель надежности системы $P < 10^{-4}$. Практически система оказывается абсолютно ненадежной.

Покажем, как вычисляется срок службы системы из последовательно соединенных элементов. Пусть функции надежности всех элементов одинаковы и имеют вид (4). Тогда по формуле (9)

$$P = e^{-m\lambda t};$$

Математическое ожидание срока службы системы вычислим по формуле (6)

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} P(t) dt = \frac{1}{m\lambda};$$

Выражая интенсивность отказов λ через математическое ожидание срока службы одного элемента $\langle T_0 \rangle$, получим окончательно

$$\langle T \rangle = \frac{1}{m} \langle T_0 \rangle. \quad (10)$$

Таким образом, средний срок службы системы уменьшается обратно пропорционально числу ее элементов.

Остановимся теперь на способе взаимодействия элементов, который в некотором смысле противоположен только что рассмотренному (рис. 44, б). Пусть система состоит из n элементов с вероятностями безотказной работы P_1, P_2, \dots, P_n . Пусть по-прежнему отказы элементов — независимые случайные события; однако отказ системы происходит только в том случае, если откажут все ее элементы. Такое соединение называется параллельным. Примером может служить параллельная работа генераторов, мощность каждого из которых достаточна для обеспечения установленной потребности: система энергоснабжения откажет только тогда, когда выйдут из строя все генераторы. Другим приме-

ром служит стрельба по одной цели несколькими снарядами, если для поражения цели достаточно попадания одного из снарядов.

Труднее привести пример из строительной механики. На первый взгляд, с параллельным соединением мы встречаемся при рассмотрении статически неопределимых систем, выход из строя которых требует разрушения всех избыточных связей. Однако здесь дело обстоит сложнее. Одна из причин заключается в том, что выход из строя одного из элементов системы приводит к перераспределению усилий в остальных элементах. Таким образом, одно из усилий, при которых мы трактуем соединение как параллельное, — независимость отказов отдельных элементов — здесь не выполняется.

В случае последовательного соединения вероятность безотказной работы системы определялась как произведение вероятностей безотказной работы всех ее элементов. В случае параллельного соединения, наоборот, теорема умножения применяется к вероятности наступления хотя бы одного отказа каждого из элементов. Обозначая эти вероятности через Q_1, Q_2, \dots, Q_n , получим

$$Q = \prod_{k=1}^n Q_k.$$

Отсюда показатель надежности системы из параллельно соединенных элементов определяется как

$$P = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P_k). \quad (11)$$

Если показатели надежности всех элементов одинаковы, то вместо формулы (11) имеем

$$P = 1 - (1 - P_0)^n. \quad (12)$$

Надежность системы оказывается здесь выше, чем надежность любого из ее элементов. Пусть, например, $n=2$, $P_0=0,99$. Тогда вероятность безотказной работы системы составляет $P=0,9999$. Способ повышения надежности путем параллельного подключения дублирующих элементов широко применяется повсюду. В теории надежности этот способ называется резервированием. В радиотехнике и электронике при этом говорят о «горячем резервировании» (в отличие от более экономичного «холодного резервирования», при котором резерв-

ные элементы включаются в работу только в том случае, если происходит отказ работающего элемента).

Принимая, что надежность каждого из элементов следует экспоненциальному закону (4), вычислим по формуле (6) средний срок службы системы. С учетом формул (4), (6) и (12) получим

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt.$$

Интеграл в правой части вычисляется при помощи подстановки

$$1 - e^{-\lambda t} = x.$$

В самом деле, интеграл приводится к виду

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx,$$

откуда после интегрирования находим

$$\langle T \rangle = \langle T_0 \rangle \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (13)$$

Пусть, например, $n=10$. Тогда по формуле (13) $\langle T \rangle = 2,929 \langle T_0 \rangle$.

Аналогично вычисляются показатели надежности и долговечности систем при более сложном взаимодействии элементов. На рис. 44, в показана блок-схема общего резервирования, в которой каждая из подсистем дублируется n раз. Формула для вероятности безотказной работы системы имеет вид

$$P = 1 - (1 - \prod_{k=1}^m P_k)^n.$$

Способ образования системы, показанный на рис. 44, г, носит название раздельного резервирования. При этом каждый из элементов дублируется n раз, после чего подсистемы соединяются последовательно. Показатель надежности системы вычисляется как

$$P = \prod_{k=1}^m [1 - (1 - P_k)^n].$$

В литературе по теории надежности [40] большое место занимают методы вычисления показателей надежности систем при различных способах взаимодейст-

вия элементов, способах резервирования и т. д. К другим задачам теории надежности относятся формулировка принципов синтеза систем, обладающих заданными показателями надежности, разработка методов повышения надежности и долговечности, определение экономически обоснованных нормативных показателей надежности и долговечности, обоснование методов контроля качества и методов испытаний, обеспечивающих заданный уровень надежности, обоснование методов индикации и профилактики отказов и т. д.

§ 3.3. Основы общей теории надежности механических систем

В подавляющем большинстве работ по теории надежности почти не затрагиваются те механические, физические и химические явления, которые являются причиной отказов. Изменение показателей надежности элементов системы во времени обычно постулируется в форме некоторых стохастических гипотез; при этом предполагается, что в дальнейшем эти гипотезы подвергаются надлежащей экспериментальной проверке. Применительно к радиоэлектронным устройствам такой путь может быть оправдан. Эти устройства состоят из большого числа элементов массового производства, типы которых ограничены, а условия работы относительно однородны. Однако даже при анализе надежности радиоэлектронных устройств было бы весьма целесообразным более тщательное изучение тех факторов, которые вызывают снижение надежности и долговечности. Это направление только еще начинает развиваться. Имея его в виду, говорят о технической, физической и тому подобной теории надежности (в противовес математической, статистической теории). Однако это противопоставление лишено смысла. Включение в теорию надежности физических аспектов означает расширение ее понятий, методов и области приложения. Статистическая теория является лишь одним из разделов общей теории, в которой наряду с формальным описанием отказов обсуждается также их физическая природа.

Следует отметить, что разработка вопросов надежности сооружений и конструкций с самого начала пошла по иному пути. Совершенно очевидно, что надежность и долговечность конструкций целиком опреде-

ляется взаимодействием между внешней средой, с одной стороны, и свойствами конструкции — с другой. Весьма сложный характер этого взаимодействия, а также взаимодействия элементов между собой, лишает возможности ограничиться понятиями и методами математической теории надежности. С другой стороны, хорошо разработанный аппарат строительной механики, теории упругости, теории пластичности и теории колебаний, распространенный на стохастические задачи, позволяет получать достаточно адекватное описание стохастического поведения конструкции.

Уже в ранних работах, посвященных статистическому истолкованию коэффициента запаса, мы находим способы оценки надежности, в которых явно присутствуют характеристики нагрузок и прочности конструкции. Эти работы по существу являются хронологически первыми шагами по пути создания общей теории надежности. Однако в этих работах использовался аппарат элементарной теории вероятностей и полностью игнорировался фактор времени, который столь существенно входит в понятия надежности и долговечности.

Разработка теории надежности конструкций, основанной на представлении поведения конструкции в виде случайного выброса из области допустимых состояний, началась около 20 лет назад. В 1959 г. была опубликована работа [10], посвященная расчету сооружений на действие сейсмических нагрузок. В этой работе впервые было полностью осуществлено комплексное описание задачи надежности, включая вероятностное задание внешних воздействий, схематизацию системы, решение задачи статистической динамики для этой системы, оценку вероятности безотказной работы системы и осреднение этой вероятности по множеству воздействий и систем. Указанная концепция нашла развитие в книге [17], первое издание которой вышло в 1961 г. Остальное содержание данной главы будет посвящено систематическому изложению теории с более общих позиций.

Рассмотрим поведение некоторой системы при внешних воздействиях. Уравнение системы возьмем в общем виде

$$Lu = q, \quad (14)$$

где q — элемент из пространства входных параметров Q ; u — элемент из пространства выходных параметров U ;

L — оператор системы (см. общие соображения из § 1.1). Пространство U выбирается таким образом, чтобы при помощи его элементов $u \in U$ можно было полностью охарактеризовать любое состояние системы. А именно, каждому состоянию соответствует элемент $u \in U$. При изменении параметра времени t одно состояние переходит в другое. Эволюция состояний описывается функциями $u(t)$; их геометрическим образом служат траектории в пространстве состояний U .

Введем теперь пространство V для описания качества системы. Пусть каждому качеству системы соответствует элемент $v \in V$; при этом время t играет роль параметра. Каждой траектории $u(t)$ в пространстве U соответствует некоторая траектория $v(t)$ в пространстве качества V . Связь между элементами этих пространств и траекториями в них дается операторным соотношением

$$v = Mu. \quad (15)$$

Оператор M может быть, в частности, тождественным оператором. В некоторых случаях пространство V оказывается подпространством от U . Вообще говоря, переход от пространства состояний к пространству качества является нетривиальной операцией.

Множество состояний системы, допустимых с точки зрения качества, образует в пространстве качества V область допустимых состояний Ω_0 . Граница области Ω_0 соответствует предельным состояниям. Эту границу будем называть предельной поверхностью и обозначать через Γ . Если $v \in \Omega_0$, то это означает, что параметры качества системы сохраняются в установленных допусках. Пересечение траекторий $v(t)$ предельной поверхности Γ в направлении внешней нормали соответствует отказу системы. Введенные понятия приобретают особую наглядность, если система является конечно-мерной. Тогда пространства Q , U и V суть евклидовы пространства. На рис. 45 представлены траектории $q(t)$, $u(t)$ и $v(t)$ для случая, когда пространства Q , U и V являются евклидовыми трехмерными пространствами. Некоторые более конкретные примеры будут приведены ниже.

Пусть внешнее воздействие $q(t)$ и (или) оператор системы L являются стохастическими. Тогда траектории $v(t)$ в пространстве качества V будут также стохастическими. Отказ интерпретируется как случайное пере-

сечение траекторией $v(t)$ предельной поверхности Γ (или как случайный выброс элемента из области допустимых состояний). Вероятность безотказной работы — функция надежности определяется как вероятность пребывания элемента $v(\tau)$ в допустимой области Ω_0 на отрезке времени $[0, t]$:

$$P(t) = P\{v(\tau) \in \Omega_0; \tau \in [0, t]\}. \quad (16)$$

Итак, сформулирована общая схема оценки надежности с учетом физических, технических и эксплуатационных аспектов. Эта схема складывается из четырех

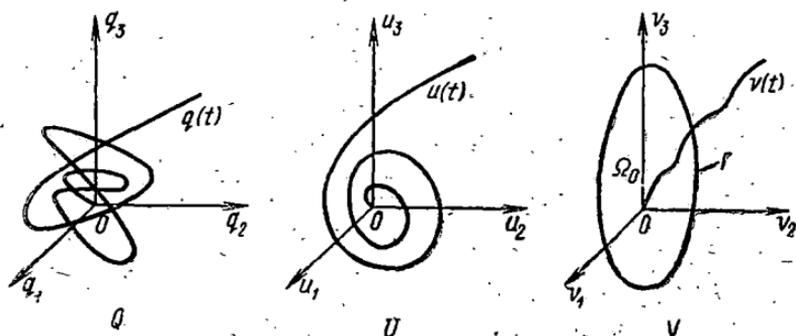


Рис. 45

этапов. Первый этап сводится к схематизации системы и внешних воздействий на нее, т. е. к выбору пространств Q и U . Тем самым вводится оператор L . Второй этап состоит в определении стохастического поведения системы при случайных воздействиях. При этом задача сводится к решению уравнения (14). Согласно нашей терминологии — это задача статистической динамики. Третий этап заключается в выборе пространства качества V и области допустимых состояний Ω_0 . Этот выбор делается на основании технико-экономических соображений с учетом технологических, эксплуатационных и тому подобных требований и существенно неоднозначен. Одним из важнейших факторов, влияющих на выбор пространства V , является стремление к разумному компромиссу между степенью подробности при описании системы и относительной простотой вычислений. Наконец, на последнем этапе (если задача носит поверочный характер) определяется функция надежности $P(t)$ как дополнение до единицы вероятности случайного выбро-

са за пределы допустимой области Ω_0 . Таким образом, функция надежности $P(t)$ определяется как результат учета ряда факторов: внешней среды, свойств системы, технологических, эксплуатационных и т. п. требований.

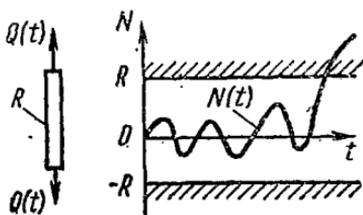


Рис. 46

Выбор пространства качества V и области допустимых состояний Ω_0 поясним на нескольких простых примерах из строительной механики. В качестве первого примера рассмотрим нагружение стержня осевой силой $Q(t)$ (рис. 46). Если сила Q действует квазистатически, то внутренняя осевая сила $N \equiv Q$ может быть принята за параметр состояния системы. Далее, пусть условие безотказной работы (условие прочности) имеет вид

$$-R < N(t) < R,$$

где R — некоторое предельное значение осевой силы. Тогда силу $N(t)$ можно принять и за параметр качества системы. Пространство V будет при этом одномерным евклидовым пространством, т. е. прямой $-\infty < N < \infty$, а область допустимых состояний Ω_0 — отрезком этой прямой. Функция надежности определяется по формуле (16)

$$P(t) = P[-R < N(\tau) < R; 0 \leq \tau \leq t]. \quad (17)$$

Иначе можно написать

$$P(t) = P[\sup_{0 \leq \tau \leq t} |N(\tau)| < R], \quad (18)$$

где $\sup N(\tau)$ — точная верхняя грань значений функции $N(\tau)$ на отрезке $[0, t]$. Если область допустимых значений несимметрична относительно начала координат, например,

$$-\frac{\pi^2 EJ}{4l^2} < N(t) < R,$$

(нижнюю границу образует критическое значение сжимающей силы для консоли), то вместо (18) следует взять формулу

$$P(t) = P\left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} N(\tau) < R, \inf_{0 \leq \tau \leq t} N(\tau) > -\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}\right]. \quad (19)$$

Здесь $\inf N(\tau)$ — точная нижняя грань значений функции $N(\tau)$ на отрезке $[0, t]$.

Заметим, что предельное значение силы может быть функцией времени. В самом деле, прочность некоторых конструкций изменяется во времени под действием физических, химических и тому подобных процессов. При этом может иметь место как упрочнение, так и разупрочнение, причем прочность $R(t)$ может быть случайным процессом. Определения функции надёжности в форме (17) и (18) остаются при этом в силе.

Из приведенного выше примера видно, что граница области Γ области Ω_0 , вообще говоря, является нестационарной и стохастической, что может сильно усложнить вычисление показателей надёжности. При желании можно выбрать параметры качества системы таким образом, чтобы граница Γ была стационарной и детерминистической. Пусть, например, условие безотказной работы задано в виде

$$v_{**}(t) < v(t) < v_*(t),$$

где $v_{**}(t) < 0$ и $v_*(t) > 0$ — случайные функции времени (рис. 47, а). Переходя к новым переменным

$$v_1 = v_*(t) - v(t); \quad v_2 = v(t) - v_{**}(t),$$

получим следующие условия: $v_1 > 0, v_2 > 0$. Мы видим (рис. 47, б), что область допустимых состояний пред-

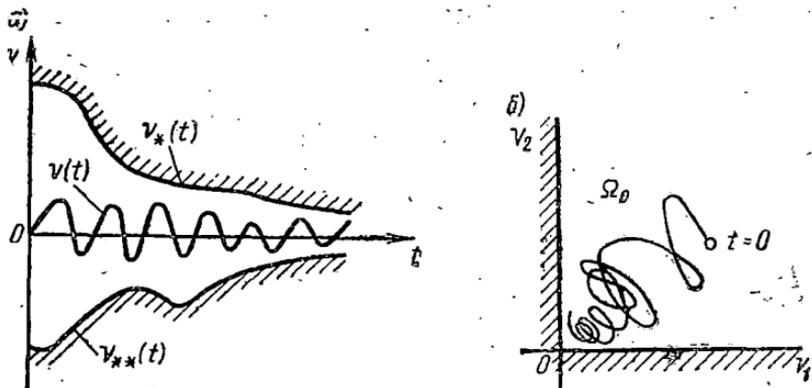


Рис. 47

ставляет собой первый квадрант на плоскости v_1, v_2 . Существенно, что сделанное преобразование связано с переходом от одномерного пространства качества V к двумерному.

В качестве второго примера рассмотрим вал кругового сечения, нагруженный квазистатическими изгибающими моментами $M_x(t)$, $M_y(t)$ и крутящим моментом $M_z(t)$ (рис. 48, а). Пусть условие качества состоит в

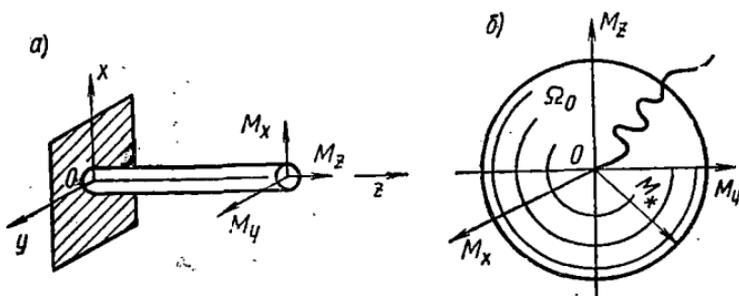


Рис. 48

том, чтобы ни в одной точке вала не появились пластические деформации. Используем условие текучести Сен-Венана

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < \sigma_*$$

где σ — максимальное нормальное; τ — максимальное касательное напряжение в поперечных сечениях вала; σ_* — предельное напряжение. Замечая, что

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}; \quad \tau = \frac{M_z}{2W},$$

где W — момент сопротивления сечения при изгибе, получим следующую область допустимых значений Ω_0 в трехмерном пространстве M_x, M_y, M_z :

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} < M_* \quad (20)$$

В правой части стоит предельное значение момента $M_* = \sigma_* W$. Допустимая область представляет собой внутренность сферы с радиусом M_* (рис. 48, б). Функция надежности $\bar{P}(t)$ определяется как

$$P(t) = P \left[\sup_{0 < \tau < t} \sqrt{M_x^2(\tau) + M_y^2(\tau) + M_z^2(\tau)} < M_* \right], \quad (21)$$

Если принять за параметр качества приведенный момент

$$M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

то пространство качества V становится одномерным. Область возможных значений M_r — полупрямая ($0 \leq M_r < \infty$). Для определения функции надежности вместо формулы (21) получаем.

$$P(t) = P\left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} M_r(\tau) < M_*\right]. \quad (22)$$

На этом примере мы видим, что можно выбирать по-разному пространство V и область допустимых значений Ω_0 , сохраняя функцию надежности инвариантной.

Рассмотрим теперь балку, нагруженную m сосредоточенными силами $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_m(t)$ (рис. 49, а). Пусть балка является статически определимой, а силы прикладываются к балке квазистатически. Будем считать состояние балки допустимым, если максимальное по модулю значение изгибающего момента $M(x, t)$ не превышает предельного значения M_* . Изгибающий момент $M(x, t)$ является кусочно-линейной функцией координаты. Таким образом, его максимальное по модулю значение достигается в одном сечении, которое находится под силами. Во всяком случае для расчета балки на прочность достаточно знать значения изгибающего момента $M(x, t)$ в конечном числе сечений. Обозначим эти значения через $M_1(t), M_2(t), \dots, M_n(t)$. Связь между моментами и внешними силами осуществляется при помощи линейного преобразования

$$M_j(t) = \sum_{k=1}^m \eta_{jk} Q_k(t) \quad (23)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

которое можно рассматривать как реализацию операторных соотношений (14) и (15). Для пространства качества V следует взять n -мерное евклидово пространство моментов M_1, M_2, \dots, M_n . Область допустимых состояний Ω_0 задается неравенствами:

$$\begin{aligned} -M_* &< M_1(t) < M_*, \\ -M_* &< M_2(t) < M_*, \\ &\dots \dots \dots \\ -M_* &< M_n(t) < M_*. \end{aligned} \quad (24)$$

т. е. представляет собой n -мерный куб в пространстве моментов (см. рис. 49, б, где $n=3$). Функция надежности вводится согласно формуле (16) как

$$P(t) = P[-M_* < M_j(\tau) < M_*; j = 1, 2, \dots, n; 0 \leq \tau \leq t]. \quad (25)$$

Приведем еще две эквивалентные записи формулы (25):

$$P(t) = P \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \max_j |M_j(\tau)| < M_* \right];$$

$$P(t) = P \left[\max_j \sup_{0 \leq \tau \leq t} |M_j(\tau)| < M_* \right]. \quad (26)$$

Согласно первой формуле, в каждый момент времени t выбирается максимальное по модулю значение среди моментов $M_1(\tau)$, $M_2(\tau)$, ..., $M_n(\tau)$. Затем из найденных значений, соответствующих интервалу времени $0 \leq \tau \leq t$, образуется новое множество. Функция надежности определяется как вероятность случайного события, состоящего в том, что верхняя грань этого множества не пре-

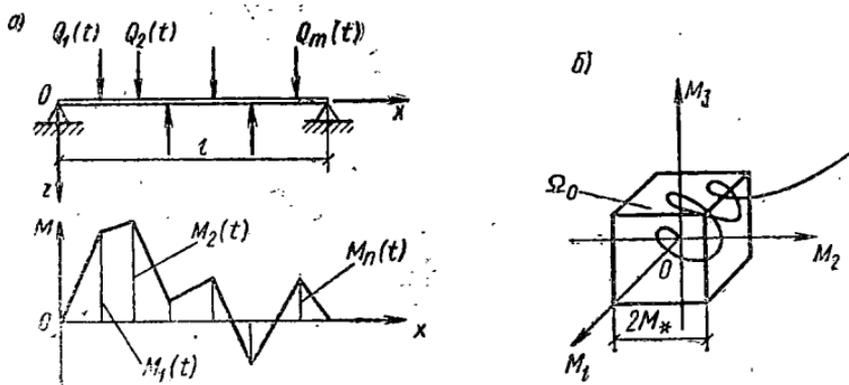


Рис. 49

вышает предельного значения M_* . Иначе интерпретируется вторая формула (26). Здесь вначале для каждого из сечений находятся верхние грани моментов при $0 \leq \tau \leq t$; затем из найденных значений выбирается наибольшее, которое сравнивается с предельным значением. Оба способа, очевидно, эквивалентны. Для аналитической обработки удобнее первоначальная форма (25).

Четвертый пример является некоторым водоизменением предыдущего, третьего примера. Пусть внешняя нагрузка распределена непрерывно по длине балки и пусть ее интенсивность $q(x, t)$ является случайной функцией координаты x и времени t (рис. 50). При квази-

статическом нагружении изгибающий момент $M(x, t)$ связан с интенсивностью нагрузки $q(x, t)$ уравнением

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q. \quad (27)$$

Это уравнение вместе с соответствующими граничными условиями можно трактовать как реализацию операторных уравнений (14) и (15). Допустимые состояния находятся из условия, что

$$\max_{0 \leq x \leq l} |M(x, t)| < M_*, \quad (28)$$

а формула для вычисления функции надежности принимает вид

$$P(t) = P \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \max_{0 \leq x \leq l} |M(x, \tau)| < M_* \right]. \quad (29)$$

Для сохранения введенной выше геометрической интерпретации мы должны выбрать соответствующее функциональное пространство. В данном случае пространство качества V представляет собой множество функций $M(x, t)$, удовлетворяющих уравнению (27) при произвольных непрерывных функциях $q(x, t)$; время t рассматривается при этом как параметр. Иначе говоря, элементами пространства V будут случайные функции $M(x, t)$, заданные на отрезке $0 \leq x \leq l$

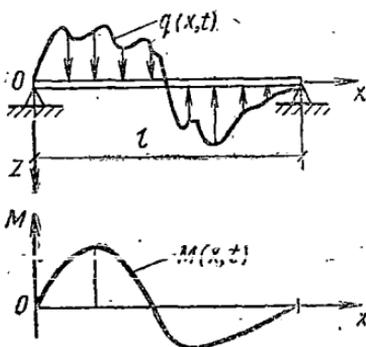


Рис. 50

дважды дифференцируемые и удовлетворяющие граничным условиям, которые соответствуют уравнению (27). Введем в пространстве V норму

$$\| M(x, t) \| = \max_{0 \leq x \leq l} | M(x, t) |, \quad (30)$$

которую можно интерпретировать как «длину» элемента $M(x, t)$. Условие (28) принимает вид

$$\| M(x, t) \| < M_*.$$

Это условие может быть интерпретировано как требование того, чтобы элементы $M(x, t)$ находились внутри

сферы радиусом M_* . Таким образом, допустимая область Ω_0 представляет собой шар в функциональном пространстве с нормой (30). Формула (29) переписывается в виде

$$P(t) = P \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|M(x, \tau)\| \leq M_* \right].$$

Функционально-аналитическая трактовка позволяет описать в единых терминах постановку задач надежности как для дискретных, так и для распределенных систем. Фактические вычисления функции надежности для распределенных систем требуют развития теории случайных выбросов пространственно-временных случайных процессов и случайных полей¹.

Определение функции надежности, согласно формуле (16), основано на допущении, что отказы не различаются по степени их опасности, по размеру связанного с ними ущерба и т. п. Обобщение формулы (16) на случай, когда делать такие различия необходимо, требует рассмотрения экономического аспекта надежности и долговечности.

Как и ранее, выделим в пространстве качества V допустимую область Ω_0 , а остальную часть пространства разобьем на области $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, которые различаются характером отказов. Чтобы учесть различие отказов от степени опасности, по ущербу и т. п., припишем каждой области Ω_α весовой коэффициент h_α . Чем более опасен отказ, тем должен быть больше соответствующий весовой коэффициент. В совокупности весовые коэффициенты должны быть соответствующим образом нормированы. Вместо вероятности отказа

$$Q(t) = \sum_{\alpha=1}^N P[v(\tau) \in \Omega_\alpha; 0 \leq \tau \leq t]$$

введем взвешенную величину

$$Q_h(t) = \sum_{\alpha=1}^N h_\alpha P[v(\tau) \in \Omega_\alpha; 0 \leq \tau \leq t].$$

¹ Заметим, что при решении многих практических задач надежности для распределенных систем можно ограничиться рассмотрением конечно-мерных евклидовых пространств качества. Принимая за параметры качества значения напряжений, перемещений и других факторов в конечном числе заранее выбираемых точек поля, мы приходим к конечно-мерному пространству. Чем больше число взятых точек, тем полнее описывается качество системы и тем точнее будет оценена ее надежность.

Эта величина, вообще говоря, утрачивает смысл вероятности; ее можно истолковать как некоторую меру суммарных потерь, связанных с утратой качества. Весовые коэффициенты h_α пропорциональны ущербу, вызванному отказом соответствующего типа. Обозначая этот ущерб через C_α , мы получим выражение для математического ожидания суммарного ущерба к моменту времени t :

$$\langle C(t) \rangle = \sum_{\alpha=1}^N C_\alpha P[v(\tau) \in \Omega_\alpha; 0 \leq \tau \leq t].$$

Заметим, что разбижка пространства V на области $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_N$ не обязательна. Более корректный подход состоит во введении в каждой точке пространства V и для каждого момента времени t платежной функции $c(v, t)$, равной ущербу в единицу времени при условии, что система находится в данной точке пространства V . Математическое ожидание суммарного ущерба определяется при этом как

$$\langle C(t) \rangle = \int_0^t d\tau \int_V c(v, \tau) p(v, \tau) dv.$$

Здесь $p(v, \tau) dv$ — вероятность обнаружить систему в момент времени τ в элементарном объеме dv .

Используя введенные выше понятия, можно сформулировать различные экономические подходы к проблеме надежности. Наряду с математическим ожиданием ущерба от отказов в экономические расчеты должны войти начальная стоимость системы, сумма эксплуатационных расходов, математическое ожидание прибыли за время эксплуатации системы в допустимой области и т. п. Некоторые соображения, касающиеся экономического аспекта надежности конструкций, будут приведены в § 4.6.

Как уже указывалось выше, область допустимых значений может быть стохастической. Наибольший интерес представляют случайные изменения этой области при переходе от одного элемента ансамбля систем к другому. Если стохастические свойства системы могут быть охарактеризованы конечным числом случайных параметров, то задачу определения функции надежности целесообразно решать в два этапа. На первом этапе рассматривается система с фиксированными параметрами, для которой строится функция надежности. Эта

функция представляет собой, по существу, вероятность пребывания системы в допустимой области при условии, что параметры системы фиксированы. По аналогии с условной вероятностью будем называть найденную функцию условной функцией надежности. На втором этапе применяется формула полной вероятности и вычисляется функция надежности для наугад выбранной системы, принадлежащей данному ансамблю. Описанный метод будем называть методом условных функций надежности.

Обозначим параметры системы через $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$ и будем считать, что совместная плотность вероятности $p(\mathbf{r})$ компонент вектора $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_\alpha)$ задана. Рассмотрим один из элементов ансамбля с фиксированным вектором \mathbf{r} . Реакция этого элемента $u(t|\mathbf{r})$ на случайное внешнее воздействие $q(t)$ ищется как решение уравнения типа (14) с оператором L , зависящим от параметров системы. Обращая оператор, найдем

$$u(t|\mathbf{r}) = H(\mathbf{r})q(t). \quad (31)$$

Здесь $H=L^{-1}$. Далее согласно соотношению (15) перейдем к параметрам качества системы. Оператор M при этом также зависит от компонент вектора \mathbf{r} . После того как стохастические характеристики параметров качества

$$v(t|\mathbf{r}) = M(\mathbf{r})u(t|\mathbf{r}) \quad (32)$$

вычислены, находим условную функцию надежности как вероятность пребывания выбранного элемента ансамбля в соответствующей ему допустимой области:

$$P_0(t|\mathbf{r}) = P\{v(\tau|\mathbf{r}) \in \Omega_0(\mathbf{r}); 0 \leq \tau \leq t\}. \quad (33)$$

Функция надежности для ансамбля в целом определяется по формуле полной вероятности:

$$P(t) = \int \dots \int P_0(t|\mathbf{r})p(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (34)$$

Здесь интегрирование проводится по всей области изменения параметров системы $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$.

Для иллюстрации возвратимся к первому примеру из § 3.3. Пусть предельное значение осевой силы $0 < R < \infty$ является случайной величиной. Тогда, зафиксировав вначале значение R , вычисляем условную функцию надежности. Согласно формуле (33) имеем

$$P_0(t|R) = P\{\sup_{0 \leq \tau \leq t} |N(\tau)| \leq R\}. \quad (35)$$

На втором этапе вычисляем полную функцию надежности по формуле (34)

$$P(t) = \int_0^{\infty} P_0(t|R)p(R) dR. \quad (36)$$

Метод условных функций надежности целесообразно также применять для решения задач, в которых внешнее воздействие представляется как случайный процесс, параметры которого, в свою очередь, являются случайными величинами.

Пусть внешнее воздействие $q(t)$ зависит от случайного вектора $s = (s_1, s_2, \dots, s_\beta)$ с заданной совместной плотностью вероятности $P(s)$. Зафиксируем вначале вектор s . Решив задачу статистической динамики для воздействия $q = q(t|s)$ и перейдя к параметрам качества

$$v(t|s) = MHq(t|s),$$

вычисляем условную функцию надежности

$$P_0(t|s) = P[v(\tau|s) \in \Omega_0; 0 \leq \tau \leq t].$$

Затем по формуле полной вероятности найдём

$$P(t) = \int \dots \int P_0(t|s)p(s)ds. \quad (37)$$

Интегрирование производится по всем возможным значениям параметров s_1, s_2, \dots, s_β .

Поскольку свойства системы, как правило, являются случайными, целесообразно объединить оба подхода. Вообще говоря, случайные параметры $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$ и s_1, s_2, \dots, s_β зависимы. Обозначим их совместную плотность вероятности через $p(r, s)$. Выбрав один из экземпляров системы, найдём его реакцию на одну из реализаций внешнего воздействия. После перехода к параметрам качества определяем условную функцию надежности

$$P_0(t|r, s) = P[v(\tau|r, s) \in \Omega_0(r); 0 \leq \tau \leq t].$$

Формула для безусловной функции надежности

$$P(t) = \int \dots \int P_0(t|r, s)p(r, s) dr ds \quad (38)$$

является обобщением формул (34) и (37). Типичная область применения формул типа (38) — это расчет

сооружений на сейсмические воздействия, где вектор \mathbf{r} характеризует интегральные признаки землетрясения (§ 2.8).

§ 3.4. Выбросы случайного процесса за заданный уровень

Как мы видели в § 3.3, для отыскания функции надежности необходимо уметь вычислять вероятность случайного события, состоящего в том, что на отрезке времени $[0, t]$ не произойдет ни одного выброса за пределы области допустимых состояний в пространстве качества. Решение этой задачи в самом общем случае представляет серьезные трудности [76]. Однако для высоконадежных систем выброс за пределы допустимой области является достаточно редким событием. При этих условиях вероятность выброса можно с достаточной точностью оценить, выражая ее через математическое ожидание числа выбросов на отрезке $[0, t]$. Этот

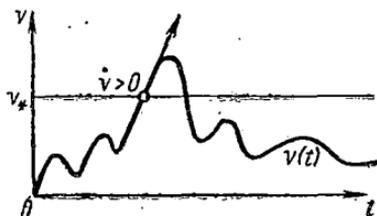


Рис. 51

способ оценки показателей надежности был применен впервые в работе [11].

Рассмотрим вначале следующую простейшую задачу. Пусть $v(t)$ — непрерывный и дифференцируемый случайный процесс с заданной совместной плотностью вероятности $p(v, \dot{v}; t)$ процесса $v(t)$ и его производной $\dot{v}(t)$. Процесс $v(t)$ может быть нестационарным; поэтому плотность вероятности $p(v, \dot{v}; t)$, вообще говоря, зависит от t как от параметра. Из области возможных значений $v(t)$ возьмем некоторое детерминистическое постоянное значение v_* и подсчитаем математическое ожидание числа пересечений процессом $v(t)$ уровня v_* . При этом необходимо различать пересечения, для которых производная $\dot{v} > 0$ (рис. 51) и для которых $\dot{v} < 0$. Первый тип пересечений будем называть положительным, второй тип — отрицательным. Математическое ожидание числа положительных пересечений уровня v_* в единицу времени будем обозначать через $\nu_+(v_*; t)$, а математическое ожидание числа отрицательных пе-

пересечений — через $v_-(v_*; t)$. Число пересечений за неперекрывающиеся промежутки времени обладает свойством аддитивности, поэтому математическое ожидание $N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t)$ положительных пересечений уровня v_* за время $0 \leq \tau \leq t$ связано с математическим ожиданием числа положительных пересечений в единицу времени $v_+(v_*; t)$ соотношением

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t v_+(v_*; \tau) d\tau. \quad (39)$$

Аналогично для отрицательных пересечений имеем

$$N_-(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t v_-(v_*; \tau) d\tau. \quad (40)$$

Если процесс $v(t)$ стационарный, то

$$v_+(v_*) = v_-(v_*). \quad (41)$$

Для нестационарных процессов соотношение (41), вообще говоря, не имеет места.

Нетрудно установить связь между математическим ожиданием числа положительных пересечений в единицу времени и совместной плотностью вероятности $p(v, v; t)$. Рассмотрим достаточно малый отрезок времени Δt . Обозначим через $P_1(v_*; \Delta t)$ вероятность того, что за отрезок Δt произойдет одно положительное пересечение уровня v_* , через $P_2(v_*; \Delta t)$ — вероятность того, что за отрезок Δt произойдет два положительных пересечения и т. д. Математическое ожидание числа положительных пересечений за отрезок времени Δt определим как

$$N_+(v_*; t \leq \tau \leq t + \Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(v_*; \Delta t). \quad (42)$$

Пусть при достаточно малых Δt имеем

$$\begin{aligned} P_1(v_*; \Delta t) &= O(\Delta t); \\ P_k(v_*; \Delta t) &= o(\Delta t); \quad (k \geq 2), \end{aligned} \quad (43)$$

где $O(\Delta t)$ — величина порядка Δt ; $o(\Delta t)$ — величина более высокого порядка малости. Математическое ожидание числа положительных пересечений за единицу времени находим согласно предельному соотношению

$$v_+(v_*; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_+(v_*; t \leq \tau \leq t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (44)$$

Учитывая формулы (42) и (43), можем написать

$$v_+(v_*; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(v_*; \Delta t)}{\Delta t}. \quad (45)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вероятности случайного события, состоящего в том, что за малый промежуток времени Δt произойдет одно положительное пересечение уровня v_* . Эту вероятность выразим через совместную плотность вероятности $p(v, \dot{v}, t)$.

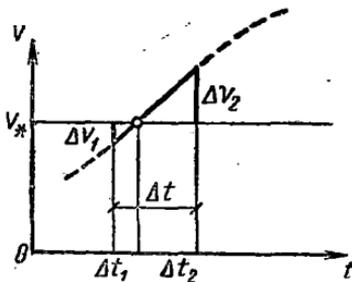


Рис. 52

Пусть точка пересечения разбивает интервал Δt на два интервала: Δt_1 и Δt_2

(рис. 52). Вычислим вероятность случайного события

$$P_1(v_*; \Delta t) = P \left[\begin{array}{l} v_* - \Delta v_1 \leq v(\tau) \leq v_* + \Delta v_2; \\ \dot{v} > 0; \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t \end{array} \right]. \quad (46)$$

Нетрудно найти, что

$$P_1(v_*; \Delta t) = \int_0^{\infty} \dot{v} \int_{v_* - \Delta v_1}^{v_* + \Delta v_2} p(v, \dot{v}; t) dv + o(\Delta t). \quad (47)$$

Далее, замечая, что

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t;$$

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 = \dot{v}(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

получим

$$P_1(v_*; \Delta t) = \Delta t \int_0^{\infty} p(v_*, \dot{v}; t) \dot{v} d\dot{v} + o(\Delta t). \quad (48)$$

Подставим найденные выражения в формулу (45). Производя предельный переход, придем к окончательной формуле

$$v_+(v_*; t) = \int_0^{\infty} p(v_*, \dot{v}; t) \dot{v} d\dot{v}. \quad (49)$$

Математическое ожидание числа положительных пере-

сечений за время $0 \leq \tau \leq t$ определяется согласно формуле (39)

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty p(v_*, \dot{v}; \tau) \dot{v} dv. \quad (50)$$

Для стационарного случайного процесса

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \nu_+(v_*)t. \quad (51)$$

Аналогично выводятся формулы для числа отрицательных пересечений. Не останавливаясь на подробностях, выпишем формулу для математического ожидания числа отрицательных пересечений в единицу времени

$$\nu_-(v_*; t) = \int_{-\infty}^0 p(v_*, \dot{v}; t) |\dot{v}| d\dot{v}. \quad (52)$$

Как известно, совместная плотность вероятности для стационарного случайного процесса и его первой производной обладает свойством

$$p(v, \dot{v}) = p(v, -\dot{v}).$$

Отсюда с учетом формул (49) и (52) приходим к соотношению (41).

В качестве простейшего примера вычислим математическое ожидание числа пересечений $\nu_+(v_*)$ для стационарного гауссовского процесса. Для такого процесса

$$p(v, \dot{v}) = p_1(v)p_2(\dot{v}), \quad (53)$$

где

$$p_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_v} \exp \left[-\frac{(v-a)^2}{2\sigma_v^2} \right];$$

$$p_2(\dot{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{v}}} \exp \left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2} \right). \quad (54)$$

Здесь a — математическое ожидание процесса $v(t)$; σ_v^2 — его дисперсия; $\sigma_{\dot{v}}^2$ — дисперсия производной $\dot{v}(t)$. Если задана спектральная плотность процесса $S_v(\omega)$, то указанные дисперсии выражаются через нее следующим образом:

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) d\omega; \quad \sigma_{\dot{v}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) \omega^2 d\omega. \quad (55)$$

Подставим выражение (53) в формулу (49):

$$v_+(v_*) = p_1(v_*) \int_0^{\infty} p_2(\dot{v}) \dot{v} d\dot{v}.$$

Замечая, что

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2}\right) \dot{v} d\dot{v} = \sigma_v^2,$$

получим

$$v_+(v_*) = \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_v} \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right]. \quad (56)$$

Введем обозначение

$$\omega_e = \frac{\sigma_v}{\sigma_v} = \left[\frac{\int_0^{\infty} S_v(\omega) \omega^2 d\omega}{\int_0^{\infty} S_v(\omega) d\omega} \right]^{1/2}. \quad (57)$$

Параметр ω_e , имеющий размерность s^{-1} , будем называть эффективной частотой процесса $v(t)$. Если процесс $v(t)$ — узкополосный с несущей частотой ω_0 , то по теореме о среднем

$$\int_0^{\infty} S_v(\omega) \omega^2 d\omega \approx \omega_0^2 \int_0^{\infty} S_v(\omega) d\omega.$$

Таким образом, для узкополосного процесса эффективная частота ω_e практически совпадает с несущей частотой ω_0 . С учетом обозначения (57) формула (56) принимает вид

$$v_+(v_*) = \frac{\omega_e}{2\pi} \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right]. \quad (58)$$

Заметим, что математическое ожидание числа положительных пересечений уровня $v_* = a$ составляет

$$v_+(v_*) = \frac{\omega_e}{2\pi}. \quad (59)$$

Отсюда видно, что для стационарного гауссовского процесса эффективная частота ω_e может быть интерпретирована как характерная частота положительных пересечений среднего уровня процесса.

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример. Пусть процесс по-прежнему является гауссовским, однако не является стационарным. К необходимости рассматривать процессы этого типа мы приходим, например, в статистической теории сейсмостойкости [11], в которой сейсмическое воздействие схематизируется в виде нестационарного гауссовского процесса. Другим примером может служить задача о пересечении стационарным гауссовским процессом нестационарного (детерминистического или случайного гауссовского) уровня. Пример такого рода был рассмотрен А. С. Гусевым [42].

Пусть совместная плотность вероятности для процесса и его производной имеет вид

$$p(v, \dot{v}; t) = \frac{1}{2\pi\sigma_v \sigma_{\dot{v}} \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(v - \langle v \rangle)^2}{\sigma_v^2} - \frac{2\rho(v - \langle v \rangle)(\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle)}{\sigma_v \sigma_{\dot{v}}} + \frac{(\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle)^2}{\sigma_{\dot{v}}^2} \right] \right\}. \quad (60)$$

Здесь $\sigma_v(t)$ и $\sigma_{\dot{v}}(t)$ выражаются через средние квадраты центрированного процесса

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \langle v(t) \rangle$$

и его производной, т. е.

$$\sigma_v^2(t) = \langle \tilde{v}^2(t) \rangle; \quad \sigma_{\dot{v}}^2(t) = \langle \dot{\tilde{v}}^2(t) \rangle.$$

Далее, $\rho(t)$ — коэффициент корреляции между процессом и его производной в совпадающие моменты времени

$$\rho(t) = \frac{\langle \tilde{v}(t)\dot{\tilde{v}}(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{v}^2(t) \rangle \langle \dot{\tilde{v}}^2(t) \rangle}}. \quad (61)$$

Указанные функции легко выражаются через корреляционную функцию процесса $v(t)$ в несовпадающие моменты времени, т. е. через функцию

$$K(t_1, t_2) = \langle \tilde{v}(t_1)\tilde{v}(t_2) \rangle.$$

Эти соотношения имеют вид

$$\sigma_v^2(t) = K(t, t); \quad \sigma_{\dot{v}}^2(t) = \left. \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t}. \quad (62)$$

$$\langle \tilde{v}(t) \tilde{v}(t) \rangle = \left. \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t}$$

Подсчитаем математическое ожидание числа пересечений $v_+(0; t)$ уровня $v_* = 0$ (переход к другим уровням осуществляется простым преобразованием исходного процесса). Подставим выражение (60) в формулу (49) и произведем необходимые вычисления. С использованием тождества

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{\langle v \rangle^2}{\sigma_v^2} + \frac{2\rho \langle v \rangle (\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle)}{\sigma_v \sigma_{\dot{v}}} + \frac{(\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle)^2}{\sigma_{\dot{v}}^2} \right] &\equiv \\ &\equiv \frac{\langle \dot{v} \rangle^2}{\sigma_{\dot{v}}^2} + \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} + \frac{\rho \langle v \rangle}{\sigma_v} \right)^2 \end{aligned}$$

результат подстановки принимает вид

$$\begin{aligned} v_+(0; t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_v \sigma_{\dot{v}} \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\langle v \rangle^2}{2\sigma_v^2}\right) \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} + \frac{\rho \langle v \rangle}{\sigma_v} \right)^2\right] \dot{v} d\dot{v}. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла в правой части введем новую переменную

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} + \frac{\rho \langle v \rangle}{\sigma_v} \right).$$

В результате формула для математического ожидания числа пересечений переписется следующим образом:

$$\begin{aligned} v_+(0; t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_v} \exp\left(-\frac{\langle v \rangle^2}{2\sigma_v^2}\right) \int_{u_1}^\infty \left[\langle \dot{v} \rangle + \right. \\ &\left. + \sigma_{\dot{v}} \left(\sqrt{1-\rho^2} u - \frac{\rho \langle v \rangle}{\sigma_v} \right) \right] e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(-\frac{\langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} + \frac{\rho \langle v \rangle}{\sigma_v} \right).$$

Замечая, что

$$\int_{u_1}^\infty u e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-\frac{u_1^2}{2}};$$

$$\int_{u_1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} [1 - \Phi(u_1)],$$

где $\Phi(u)$ — функция Лапласа, получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} v_+(0; t) = & \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_v} \exp\left(-\frac{\langle v \rangle^2}{2\sigma_v^2}\right) \times \\ & \times \left(\sqrt{1-\rho^2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\langle v \rangle}{\sigma_v} - \frac{\rho\langle v \rangle}{\sigma_v}\right)^2\right] + \right. \\ & \left. + \sqrt{2\pi} \left(\frac{\langle v \rangle}{\sigma_v} - \frac{\rho\langle v \rangle}{\sigma_v}\right) \left[1 - \Phi\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\langle v \rangle}{\sigma_v} - \frac{\rho\langle v \rangle}{\sigma_v}\right)\right]\right] \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (63). Пусть необходимо найти математическое ожидание числа положительных пересечений стационарным процессом $v(t)$ ненулевого детерминистического уровня $v_*(t)$. Искомое число будет равно, очевидно, математическому ожиданию числа положительных пересечений нулевого уровня вспомогательным процессом

$$v_1 = v - v_*. \quad (64)$$

Для этого процесса $\langle v_1 \rangle = \rho = 0$, откуда по формуле (63)

$$v_+(0) = \frac{\sigma_{v_1}}{2\pi\sigma_{v_1}} \exp\left(-\frac{\langle v \rangle^2}{2\sigma_{v_1}^2}\right).$$

Подставляя сюда значения $\langle v_1 \rangle = \langle v \rangle - v_*$, $\sigma_{v_1} = \sigma_v$, $\sigma_{v_1} = \sigma_v$, приходим к выведенной ранее формуле (56).

Пусть $v(t)$ — стационарный гауссовский процесс, а уровень $v_*(t)$ — нестационарный гауссовский процесс. Если уровень $v_*(t)$ является достаточно медленно меняющейся функцией времени, то вспомогательный процесс (64) будет близок к стационарному процессу. Положим, что для этого процесса $\rho \approx 0$. Формула (63) принимает вид

$$\begin{aligned} v_+(0; t) \approx & \frac{\sigma_{v_1}}{2\pi\sigma_{v_1}} \exp\left(-\frac{\langle v_1 \rangle^2}{2\sigma_{v_1}^2}\right) \left(\exp\left(-\frac{\langle v_1 \rangle^2}{2\sigma_{v_1}^2}\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{2\pi} \frac{\langle v_1 \rangle}{\sigma_{v_1}} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\langle v_1 \rangle}{\sigma_{v_1}}\right)\right] \right). \end{aligned} \quad (65)$$

При этом

$$\sigma_{v_1}^2 = \sigma_v^2 + \sigma_{v_*}^2, \quad \sigma_{v_1}^2 = \sigma_v^2 + \sigma_{v_*}^2.$$

Приближенное выражение (65) было предложено А. С. Гусевым [43].

В качестве третьего примера рассмотрим пересечение центрированным нестационарным процессом $v(t)$ постоянного уровня v_* . Вводя вспомогательный процесс (64) и полагая в формуле (63) $\langle \dot{v}_1 \rangle = 0$, $\langle v_1 \rangle = -v_*$, придем к выражению

$$\begin{aligned} v_+(v_*; t) = & \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_v} \left\{ \sqrt{1-\rho^2} \exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{2\pi} \frac{\rho v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) \left[1 - \Phi\left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{v_*}{\sigma_v}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

В работе А. Фрейденталя и М. Шинозука [99] была предложена приближенная формула

$$\begin{aligned} v_+(v_*; t) \approx & \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_v} \left[\sqrt{1-\rho^2} \exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{2\pi} \frac{|\rho| v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Эта формула может быть получена из точной формулы (66), если в последней заменить квадратную скобку на единицу, а второе слагаемое в фигурных скобках заменить его абсолютным значением. При этом формула (67) дает для математического ожидания числа пересечений (66) оценку сверху.

§ 3.5. Распределение экстремумов случайного процесса

Рассмотрим непрерывный дважды дифференцируемый случайный процесс $v(t)$ с заданной совместной плотностью вероятности $p(v, \dot{v}, \ddot{v}; t)$. Зададимся вначале целью подсчитать математическое ожидание числа экстремумов процесса $v(t)$ в единицу времени, превышающих заданный уровень v_* . При этом будем различать число максимумов $v_{\max}(v_*; t)$, превышающих заданный уровень v_* (рис. 53), и число минимумов

$v_{\min}(v_*, t)$, превышающих этот уровень. Заметим, что математическое ожидание числа всех максимумов $v_{\max}(-\infty; t)$ и всех минимумов $v_{\min}(-\infty; t)$ может быть найдено с применением формул из предыдущего параграфа. В самом деле, число всех максимумов равно числу отрицательных пересечений нулевого уровня процессом $v(t)$. По формуле (52) находим

$$v_{\max}(-\infty; t) = \int_{-\infty}^0 p_3(0, \ddot{v}; t) |\ddot{v}| d\ddot{v}, \quad (68)$$

где $p_3(v, \ddot{v}; t)$ — совместная плотность вероятности первой и второй производных процесса $v(t)$. Аналогично число всех минимумов процесса $v(t)$ равно числу

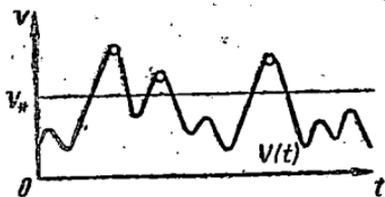


Рис. 53

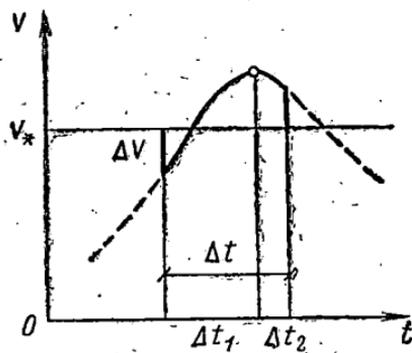


Рис. 54

положительных пересечений нулевого уровня процессом $v(t)$. Используя формулу (49), получаем

$$v_{\min}(-\infty; t) = \int_0^{\infty} p_3(0, \ddot{v}; t) \ddot{v} d\ddot{v}. \quad (69)$$

Если процесс $v(t)$ — стационарный, то $p_3(0, \ddot{v}) \equiv p_3(0, -\ddot{v})$ и, следовательно, $v_{\max}(-\infty) = v_{\min}(-\infty)$.

Переходим к выводу формулы для математического ожидания числа максимумов, превышающих произвольный уровень v_* из области возможных значений процесса $v(t)$. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим достаточно малый интервал времени Δt . Обозначим через $P_1(v_*; \Delta t)$ вероятность случайного события, состоящего в том, что в интервале Δt находится один максимум процесса $v(t)$, превышающий v_* . Через $P_2(v_*; t)$

обозначим вероятность нахождения в интервале Δt двух максимумов и т. д. Далее выразим математическое ожидание числа максимумов за промежутки времени Δt через вероятности $P_k(v_*; \Delta t)$. Учитывая, что вероятность обнаружить в достаточно малом интервале времени Δt два и большее число максимумов является величиной более высокого порядка малости, получим формулу, аналогичную формуле (45):

$$v_{\max}(v_*; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(v_*; \Delta t)}{\Delta t} \quad (70)$$

Теперь вычислим вероятность $P_1(v_*; \Delta t)$. Пусть момент времени, соответствующий максимуму, разбивает интервал Δt на два интервала Δt_1 и Δt_2 (рис. 54). Вычислим вероятность сложного события

$$P_1(v_*; \Delta t) = P \left[\begin{array}{l} v_* - \Delta v \leq v(\tau) < \infty; \\ \Delta \ddot{v}_2 \leq \ddot{v}(\tau) \leq \Delta \ddot{v}_1; \\ \ddot{v}(\tau) < 0; \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t \end{array} \right]$$

Выражая эту вероятность через совместную плотность $p(v, \dot{v}, \ddot{v}; t)$, находим с точностью до малых более высокого порядка:

$$P_1(v_*; \Delta t) = \int_{-\infty}^0 \ddot{v} \int_{\Delta \ddot{v}_2}^{\Delta \ddot{v}_1} d\ddot{v} \int_{v_* - \Delta v}^{\infty} p(v, \dot{v}, \ddot{v}; t) d\dot{v} + o(\Delta t).$$

Произведем в правой части преобразования с учетом соотношений

$$\Delta \dot{v}_1 = -\dot{v} \Delta t_1 + o(\Delta t);$$

$$\Delta \ddot{v}_2 = \ddot{v} \Delta t_2 + o(\Delta t);$$

$$\Delta v = o(\Delta t); \quad \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t.$$

Тогда вероятность $P_1(v_*; \Delta t)$ определится как

$$P_1(v_*; \Delta t) = -\Delta t \int_{-\infty}^0 \ddot{v} \int_{v_*}^{\infty} p(v, 0, \ddot{v}; t) \ddot{v} dv + o(\Delta t).$$

Подставляя найденное значение вероятности в формулу (70), получим окончательно

$$v_{\max}(v_*; t) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{-\infty}^0 p(v, 0, \ddot{v}; t) |\ddot{v}| d\ddot{v}. \quad (71)$$

Полное число максимумов в единицу времени найдем, полагая в формуле (71) $v_* \rightarrow -\infty$. Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(v, 0, \ddot{v}; t) dv \equiv p_3(0, \ddot{v}; t).$$

В правой части стоит совместная плотность вероятности $p_3(v, \ddot{v}; t)$, при $v \equiv 0$. В силу аддитивности математическое ожидание числа максимумов за интервал $0 \leq \tau \leq t$ найдем, умножая $v_{\max}(v_*; \tau)$ на $d\tau$ и интегрируя в пределах от 0 до t . Таким образом,

$$N_{\max}(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t v_{\max}(v_*; \tau) d\tau. \quad (72)$$

Аналогично выводится формула для минимумов, превышающих уровень v_* . Не останавливаясь на подробностях, выпишем окончательные результаты:

$$v_{\min}(v_*; t) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_0^{\infty} p(v, 0, \ddot{v}, \ddot{v}; t) dv; \quad (73)$$

$$N_{\min}(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t v_{\min}(v_*; \tau) d\tau. \quad (74)$$

Используя формулы (71) и (73), нетрудно получить распределение экстремумов случайного процесса. Остановимся, например, на распределении максимумов. Функция распределения максимумов $F_{\max}(v_*; t)$ представляет собой вероятность случайного события, состоящего в том, что взятый наугад максимум окажется меньше, чем v_* . Эту вероятность вычислим, относя математическое ожидание числа максимумов, меньших, чем v_* , к полному числу максимумов в единицу времени:

$$F_{\max}(v_*; t) = \frac{v_{\max}(-\infty; t) - v_{\max}(v_*; t)}{v_{\max}(-\infty; t)}.$$

Плотность вероятности максимумов $p_{\max}(v_*, t)$ определяется путем дифференцирования функции распределения $F_{\max}(v_*; t)$. Отсюда

$$p_{\max}(v_*; t) = -\frac{v'_{\max}(v_*; t)}{v_{\max}(-\infty; t)} \quad (75)$$

(штрихом обозначается операция дифференцирования по v_*). Аналогично плотность распределения минимумов находится как

$$p_{\min}(v_*; t) = -\frac{v'_{\min}(v_*; t)}{v_{\min}(-\infty; t)}. \quad (76)$$

В случае узкополосного процесса для плотностей вероятности $p_{\max}(v_*; t)$ и $p_{\min}(v_*; t)$ могут быть получены приближенные формулы. Заметим, прежде всего, что имеет место очевидное неравенство:

$$v_{\max}(v_*; t) \geq v_+(v_*; t). \quad (77)$$

При этом превышение числа максимумов над числом положительных пересечений происходит вследствие внутренних циклов, содержащих минимумы, величина которых больше, чем v_* .

Если процесс $v(t)$ является узкополосным, то почти все его максимумы лежат выше математического ожидания $\langle v \rangle$, а вероятность обнаружить внутренний цикл достаточно мала. Поэтому число максимумов узкополосного процесса, превышающих уровень $v_* > \langle v \rangle$, будет приблизительно равно числу положительных пересечений этого уровня. Математическое ожидание числа максимумов, меньших, чем математическое ожидание $\langle v \rangle$, может быть приблизительно положено равным нулю. Отсюда приходим к соотношению

$$v_{\max}(v_*; t) \approx \begin{cases} v_+(v_*; t), & \text{если } v_* > \langle v \rangle; \\ v_+(\langle v \rangle; t), & \text{если } v_* \leq \langle v \rangle. \end{cases}$$

Подставляя это соотношение в формулу (75), получим следующую приближенную формулу, применимую к узкополосным процессам:

$$p_{\max}(v_*; t) \approx \begin{cases} -\frac{v'_+(v_*; t)}{v_+(\langle v \rangle; t)}, & \text{если } v_* > \langle v \rangle; \\ 0, & \text{если } v_* \leq \langle v \rangle. \end{cases} \quad (78)$$

Поскольку математическое ожидание числа пересечений определяется проще, чем математическое ожидание числа максимумов, то приближенная формула (78) имеет некоторые преимущества.

Аналогичные упрощения можно ввести для плотности вероятности минимумов. Вместо точной формулы (76) получаем формулу

$$p_{\min}(v_*; t) \approx \begin{cases} 0, & \text{если } v_* \gg \langle v \rangle; \\ -\frac{v'_-(v_*; t)}{v_-(\langle v \rangle; t)}, & \text{если } v_* \ll \langle v \rangle. \end{cases} \quad (79)$$

Применим полученные формулы для вычисления распределений экстремумов стационарного гауссовского процесса. Без ограничения общности можно положить, что $a = \langle v \rangle = 0$ (переход к процессам, для которых это условие не выполняется, сводится к замене уровня v_* на $v_* - a$). Напомним прежде всего, что общее выражение для совместной плотности вероятности n -мерного центрированного гауссовского вектора x_1, x_2, \dots, x_n имеет вид

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} x_j x_k\right).$$

Здесь K — корреляционная матрица с элементами

$$K_{jk} = \langle x_j^* x_k \rangle,$$

L_{jk} — элементы матрицы K^{-1} . Чтобы составить выражение для трехмерной совместной плотности вероятности $p(v, \dot{v}, \ddot{v})$, рассмотрим корреляционную матрицу соответствующего трехмерного вектора v, \dot{v}, \ddot{v} :

$$K = \begin{bmatrix} \langle |v|^2 \rangle & \langle v^* \dot{v} \rangle & \langle v^* \ddot{v} \rangle \\ \langle \dot{v}^* v \rangle & \langle |\dot{v}|^2 \rangle & \langle \dot{v}^* \ddot{v} \rangle \\ \langle \ddot{v}^* v \rangle & \langle \ddot{v}^* \dot{v} \rangle & \langle |\ddot{v}|^2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Выразим элементы матрицы K через спектральную плотность $S_v(\omega)$ процесса $v(t)$. Замечая, что

$$\left\langle \frac{d^\mu v^*}{dt^\mu} \frac{d^\nu v}{dt^\nu} \right\rangle = (-1)^\mu i^{\mu+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) \omega^{\mu+\nu} d\omega,$$

и используя обозначения предыдущего параграфа, включая обозначение для эффективной частоты (57), получим

$$\langle v^2 \rangle = \sigma_v^2; \quad \langle \dot{v}^2 \rangle = \omega_e^2 \sigma_v^2;$$

$$\langle \dot{v}^* \ddot{v} \rangle = \langle v^* \dot{v} \rangle = 0, \quad \langle v^* \ddot{v} \rangle = -\omega_e^2 \sigma_v^2.$$

Кроме того, введем обозначение

$$\langle \ddot{v}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) \omega^4 d\omega = \beta^2 \omega_e^4 \sigma_v^2.$$

Безразмерный параметр β является мерой широкополосности процесса

$$\beta = \frac{\sqrt{\int_0^{\infty} S_v(\omega) \omega^4 d\omega \int_0^{\infty} S_v(\omega) d\omega}}{\int_0^{\infty} S_v(\omega) \omega^2 d\omega}. \quad (80)$$

Для узкополосного процесса, энергия которого сосредоточена в части спектра, лежащей около несущей частоты ω_0 , параметр β близок к единице. С увеличением ширины спектра этот параметр возрастает. Как мы увидим в дальнейшем, параметр β можно также истолковать как отношение математических ожиданий числа экстремумов процесса и числа пересечений нулевого уровня.

С учетом сказанного выше корреляционная матрица K принимает вид

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 & -\omega_e^2 \sigma_v^2 \\ 0 & \omega_e^2 \sigma_v^2 & 0 \\ -\omega_e^2 \sigma_v^2 & 0 & \beta^2 \omega_e^4 \sigma_v^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что двумерный процесс $v(t)$, $\ddot{v}(t)$ стохастически не связан с процессом $v(t)$. Таким образом:

$$p(v, \dot{v}, \ddot{v}) = p_1(v, \ddot{v}) p_2(\dot{v}). \quad (81)$$

Совместную плотность вероятности $p_1(v, \ddot{v})$ представим вначале в виде

$$p_1(v, \ddot{v}) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_v'' \sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{v^2}{\sigma_v^2} - \frac{2\rho v\ddot{v}}{\sigma_v\sigma_v''} + \frac{\ddot{v}^2}{\sigma_v''^2} \right) \right]. \quad (82)$$

Здесь ρ — коэффициент корреляции между функцией $v(t)$ и ее второй производной $\ddot{v}(t)$ в совпадающие моменты времени. Нетрудно связать этот коэффициент с параметром широкополосности (80):

$$\rho = -1/\beta. \quad (83)$$

Для узкополосного процесса $\rho \approx -1$. Этот вывод является естественным, если учесть, что узкополосный процесс мало отличается от синусоидального процесса, для которого $\rho = -1$. С увеличением ширины спектра коэффициент корреляции ρ убывает по модулю. Выражая $\sigma_{\ddot{v}}$ через σ_v и учитывая формулу (83), представим плотность вероятности $p_1(v, \ddot{v})$ в следующей форме:

$$p_1(v, \ddot{v}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_e^2 \sigma_v^2} \exp \left[-\frac{\beta^2 \omega_e^4 v^2 + 2\omega_e^2 v \ddot{v} + \ddot{v}^2}{2(\beta^2 - 1) \omega_e^4 \sigma_v^2} \right]. \quad (84)$$

Подставим выражения (71) и (81) в формулу (75). После несложных преобразований получаем

$$p_{\max}(v_*, t) = \frac{\int_{-\infty}^0 p_1(v_*, \ddot{v}) |\ddot{v}| d\ddot{v}}{\int_{-\infty}^0 p(\ddot{v}) |\ddot{v}| d\ddot{v}}. \quad (85)$$

При этом

$$p(\ddot{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta \omega_e^2 \sigma_v} \exp \left(-\frac{\ddot{v}^2}{2\beta^2 \omega_e^4 \sigma_v^2} \right).$$

Вычислим интеграл в числителе формулы (85)

$$\int_{-\infty}^0 p_1(v_*, \ddot{v}) |\ddot{v}| d\ddot{v} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_e^2 \sigma_v^2} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right) J(v_*), \quad (86)$$

где использовано обозначение

$$J(v_*) = \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{(\ddot{v} + \omega_e^2 v_*)^2}{2(\beta^2 - 1) \omega_e^4 \sigma_v^2} \right] |\ddot{v}| d\ddot{v}.$$

Полагая

$$\frac{\ddot{v} + \omega_e^2 v_*}{\sqrt{\beta^2 - 1} \omega_e^2 \sigma_v} = u; \quad \frac{v_*}{\sqrt{\beta^2 - 1} \sigma_v} = u_1,$$

перепишем интеграл в виде

$$J = \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_e^4 \sigma_v \int_{-\infty}^{u_1} (v_* - \sqrt{\beta^2 - 1} \sigma_v u) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} \Phi(u_1);$$

$$\int_{-\infty}^{u_1} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = -e^{-\frac{u_1^2}{2}},$$

откуда

$$J = \sqrt{\beta^2 - 1} \omega_e^4 \sigma_v^2 \left\{ \sqrt{\beta^2 - 1} \exp\left[-\frac{v_*^2}{2(\beta^2 - 1)\sigma_v^2}\right] + \frac{v_*}{\sigma_v} \sqrt{2\pi} \Phi\left(\frac{v_*}{\sqrt{\beta^2 - 1}\sigma_v}\right) \right\}. \quad (87)$$

Далее, интеграл в знаменателе формулы (85) определяется как

$$\int_{-\infty}^0 p(\ddot{v}) |\ddot{v}| d\ddot{v} = \frac{\beta \omega_e^2 \sigma_v}{\sqrt{2\pi}}. \quad (88)$$

Попутно можем найти математическое ожидание числа всех максимумов в единицу времени. В самом деле, для стационарного процесса формула (68) принимает вид

$$v_{\max}(-\infty) = p_2(0) \int_{-\infty}^0 p(\ddot{v}) |\ddot{v}| d\ddot{v},$$

где $p_2(\ddot{v})$ — плотность вероятности производной, определяемая по второй из формул (54). Подставляя сюда формулу (88), находим

$$v_{\max}(-\infty) = \frac{\beta \omega_e}{2\pi}. \quad (89)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (59) для математического ожидания числа положительных пересечений

среднего уровня, получаем еще одну интерпретацию параметра β :

$$\beta = \frac{\nu_{\max}(-\infty)}{\nu_+(0)}. \quad (90)$$

Возвратимся к формуле (85). Подстановка сюда выражений (86), (87) и (88) после небольших преобразований дает известную формулу Райса

$$p_{\max}(v_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta \sigma_v} \left\{ \sqrt{\beta^2 - 1} \exp \left[-\frac{\beta^2 v_*^2}{2(\beta^2 - 1)\sigma_v^2} \right] + \sqrt{2\pi} \frac{v_*}{\sigma_v} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right) \Phi \left(\frac{v_*}{\sqrt{\beta^2 - 1} \sigma_v} \right) \right\}. \quad (91)$$

Пусть параметр β достаточно близок к единице. Тогда первое слагаемое в фигурных скобках формулы (91) будет достаточно мало по сравнению со вторым. Во втором же слагаемом можно положить

$$\Phi \left(\frac{v_*}{\sqrt{\beta^2 - 1} \sigma_v} \right) \approx \begin{cases} 1, & \text{если } v_* > 0; \\ 0, & \text{если } v_* \leq 0. \end{cases} \quad (92)$$

Таким образом получаем простую формулу для плотности вероятности максимумов узкополосного процесса:

$$p_{\max}(v_*) \approx \begin{cases} \frac{v_*}{\sigma_v^2} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right), & \text{если } v_* > 0; \\ 0, & \text{если } v_* \leq 0. \end{cases} \quad (93)$$

Из формулы (93) видно, что распределение максимумов узкополосного процесса приближенно следует распределению Релея. Кстати, формула (93) может быть получена из приближенной формулы (78), если подставить в нее вместо $\nu_+(v_*)$ выражение (58).

Пусть теперь $\beta \gg 1$. Тогда в формуле (91) второе слагаемое будет мало по сравнению с первым. Для плотности максимумов получаем формулу

$$p_{\max}(v_*) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_v} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right). \quad (94)$$

Следовательно, при $\beta \gg 1$ распределение максимумов гауссовского процесса приближается к гауссовскому распределению.

Кривые распределения (91) для различных значений параметра β представлены на рис. 55. Заметим, что обычно величина параметра β изменяется в небольших пределах. Рассмотрим, например, случайный процесс, спектральная плотность которого принимает постоянное значение в диапазоне частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ и равна нулю вне этого диапазона (рис. 56, а).

Математическое ожидание числа положительных пересечений

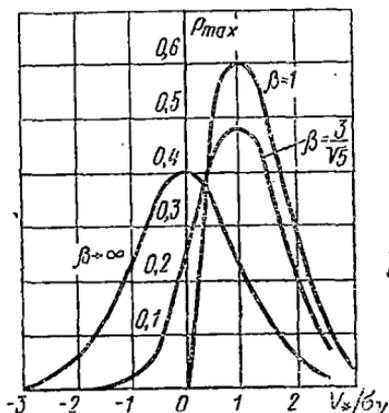


Рис. 55

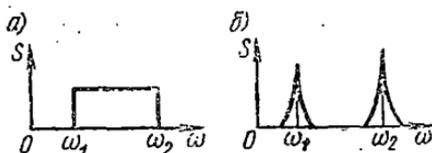


Рис. 56

нулевого уровня в единицу времени определяется по формулам (57) и (59) и составляет

$$\nu_+(0) = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{\theta^3 - 1}{\theta - 1}},$$

где $\theta = \omega_2/\omega_1$. Математические ожидания числа максимумов в единицу времени, определяемое по формуле (68),

$$\nu_{\max}(-\infty) = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{\theta^5 - 1}{\theta^3 - 1}}.$$

Эти числа входят в формулу (90) для коэффициента β , который в данном случае определяется как

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{(\theta^5 - 1)(\theta - 1)}}{\theta^3 - 1}.$$

График, построенный по этой формуле, приведен на рис. 57. В предельном случае $\theta \rightarrow \infty$ (это соответствует переходу к белому шуму) имеем

$$\beta \rightarrow 3\sqrt{5}.$$

В качестве другого примера рассмотрим процесс, представляющий собой сумму независимых узкополосных процессов $v_1(t)$ и $v_2(t)$ (рис. 56, б). Типичная реализация такого процесса показана на рис. 58. Обозначим эффективные частоты процессов v_1 и v_2 через ω_1 и ω_2 , а их дисперсии через σ_1^2 и σ_2^2 . При этом $\omega_2 > \omega_1$. Математическое ожидание числа положительных пересечений нулевого уровня составляет

$$\nu_+(0) = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma^2 \theta^2 - 1}{\gamma^2 + 1}}$$

в то время как математическое ожидание числа максимумов

$$\nu_{\max}(-\infty) = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma^2 \theta^4 + 1}{\gamma^2 \theta^2 + 1}}$$

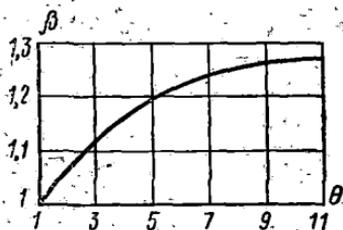


Рис. 57

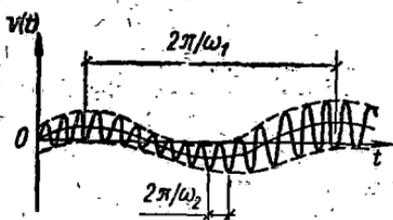


Рис. 58

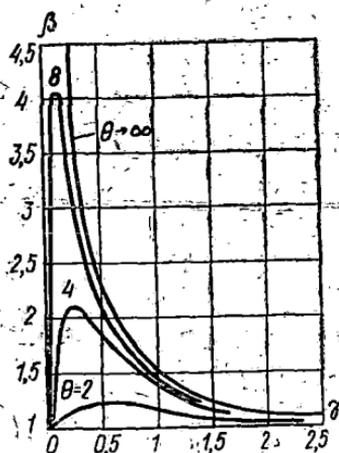


Рис. 59

Здесь использованы обозначения

$$\theta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Коэффициент β определяется как

$$\beta = \frac{\sqrt{(\gamma^2 \theta^4 + 1)(\gamma^2 + 1)}}{\gamma^2 \theta^2 + 1}$$

По этой формуле построен график, приведенный на рис. 59. Максимум коэффициента β достигается при $\gamma\theta = 1$ и составляет

$$\beta_{\max} = \frac{\theta^2 + 1}{2\theta}.$$

Таким образом, параметр β принимает значения, существенно превышающие единицу, только при $\theta \gg 1$.

До сих пор мы занимались распределением максимумов стационарного гауссовского процесса. Ввиду симметрии распределений относительно нулевого уровня плотность вероятности минимумов будет совпадать с плотностью вероятности максимумов, если в последней v_* заменить на $-v_*$. Производя такую замену в формуле (91) и замечая, что

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u),$$

придем к следующей формуле:

$$p_{\min}(v_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta \sigma_v} \left\{ \sqrt{\beta^2 - 1} \exp \left[-\frac{\beta^2 v_*^2}{2(\beta^2 - 1) \sigma_v^2} \right] - \sqrt{2\pi} \frac{v_*}{\sigma_v} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{v_*}{\sqrt{\beta^2 - 1} \sigma_v} \right) \right] \right\}.$$

Приближенная формула типа (93) имеет вид

$$p_{\min}(v_*) \approx \begin{cases} 0, & \text{если } v_* \geq 0; \\ -\frac{v_*}{\sigma_v^2} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right), & \text{если } v_* < 0. \end{cases}$$

§ 3.6. Приближенные оценки для функций надежности. Модели пуассоновского типа

Переходим к основной задаче теории случайных выбросов, представляющей интерес для расчета надежности. Как было указано в § 3.3, определение функции надежности в простейшей постановке сводится к нахождению вероятности случайного события, состоящего в том, что за заданный промежуток времени $0 \leq \tau \leq t$ не произойдет ни одного положительного пересечения процессом $v(t)$ уровня v_* :

$$P(t) = P \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} v(\tau) < v_* \right]. \quad (95)$$

Выведем приближенные формулы, связывающие эту вероятность с математическим ожиданием числа $N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t)$ положительных пересечений уровня v_* за заданный промежуток времени.

Полагая, что $P(0) = 1$, вычислим вначале вероятность того, что за время $0 \leq \tau \leq t$ произойдет хотя бы один отказ:

$$Q(t) = 1 - P(t).$$

С одной стороны, эта вероятность определяется как

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(v_*, 0 \leq \tau \leq t),$$

где $Q_k(v_*, 0 \leq \tau \leq t)$ — вероятность случайного события, состоящего в том, что за время $0 \leq \tau \leq t$ произойдет ровно k положительных пересечений уровня v_* . С другой стороны, математическое ожидание числа положительных пересечений этого уровня выражается через введенные вероятности следующим образом:

$$N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} k Q_k(v_*, 0 \leq \tau \leq t).$$

Составляя разность выписанных выражений, получим

$$N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t) - Q(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) Q_k(v_*, 0 \leq \tau \leq t). \quad (96)$$

Поскольку в правой части соотношения (96) стоит неотрицательная величина, то приходим к соотношению

$$Q(t) \leq N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t). \quad (97)$$

Таким образом, математическое ожидание числа положительных пересечений на отрезке $[0, t]$ дает для вероятности отказа $Q(t)$ оценку сверху. Заметим, что соотношение (97) можно рассматривать как следствие неравенства Чебышева для неотрицательной случайной величины X и положительного числа a :

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{\langle X \rangle}{a}.$$

В самом деле, полагая, что $X = N$, $a = 1$, где N — число положительных пересечений (случайная величина), и замечая, что вероятность отказа $Q = P\{N \geq 1\}$, получаем соотношение (97). Данный выше вывод соотношения (97) имеет, однако, то преимущество, что позво-

ляет получить более точные (в том числе двусторонние) оценки для функции надежности. Эти оценки, содержащие моменты более высокого порядка от числа пересечений, будут приведены несколько ниже.

Для высоконадежных систем выходы за пределы допустимой области являются весьма редкими событиями. При этом математическое ожидание от числа положительных пересечений будет весьма мало по сравнению с единицей. Рассмотрим соотношение (96) при условии, что

$$N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t) \ll 1. \quad (98)$$

В правую часть соотношения (96) входят вероятности двукратного, трехкратного и т. д. положительного пе-

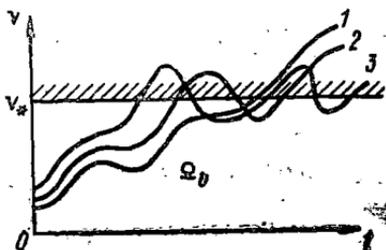


Рис. 60

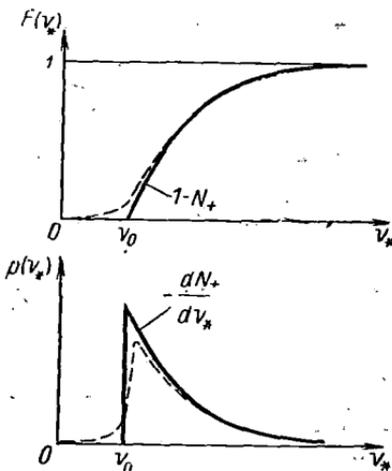


Рис. 61

ресечения процессом $v(t)$ уровня v_* . Естественно предположить, что для широкого класса случайных процессов вероятности многократных выбросов будут пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью однократного выброса, если выполнено условие (98). Другими словами, вероятность обнаружить реализации типа 2, 3 и т. п. (рис. 60) будет пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью обнаружить реализацию типа 1. Вводя несколько более сильное предположение о том, что правая часть соотношения (96) мала по сравнению

с каждым из слагаемых, входящих в левую часть, получим приближенное равенство

$$Q(t) \approx N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t). \quad (99)$$

Отсюда с учетом соотношения (39) получаем для функции надежности (95) приближенную формулу

$$P(t) \approx 1 - \int_0^t v_+(v_*; \tau) d\tau, \quad (100)$$

где $v_+(v_*; \tau)$ — математическое ожидание числа положительных пересечений уровня v_* в единицу времени.

Формулы (99) и (100) были предложены впервые в работах [11, 14, 86]. Кроме того, было введено приближенное распределение для абсолютных максимумов процесса $v(\tau)$ на отрезке $[0, t]$. Обозначим возможные значения абсолютных максимумов через v_* . Функция распределения для v_*

$$F(v_* | 0 \leq \tau \leq t) = P\left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} v(\tau) < v_*\right]$$

совпадает, очевидно, с функцией надежности (95). Отсюда с учетом приближенной формулы (100) можем принять, что для достаточно больших $v_* \gg v_0$

$$F(v_* | 0 \leq \tau \leq t) \approx 1 - N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t).$$

Здесь $v_0(t)$ — корень уравнения

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = 1. \quad (101)$$

Распространяя эту формулу на все значения $v_* > v_0$ и полагая, что $F(v_* | 0 \leq \tau \leq t) \approx 0$ при $v_* \leq v_0$ (рис. 61), получим [14]

$$p(v_* | 0 \leq \tau \leq t) \approx \begin{cases} 0, & \text{если } v_* \leq v_0(t); \\ -\frac{dN_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t)}{dv_*}, & \text{если } v_* > v_0(t). \end{cases} \quad (102)$$

В качестве примера рассмотрим стационарный гауссовский процесс. Для этого процесса математическое ожидание числа положительных пересечений уровня v_* в единицу времени дается формулой (58). Подстановка в формулу (102) дает

$$p(v_* | 0 \leq \tau \leq t) \approx \begin{cases} 0, & \text{если } v_* \leq v_0(t); \\ \frac{\omega_e t}{2\pi} \cdot \frac{v_* - a}{\sigma_v^2} \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right], & \text{если } v_* > v_0(t). \end{cases} \quad (103)$$

Для корня $v_0(t)$ уравнения (101) получаем выражение

$$v_0(t) = a + \sigma_v \sqrt{2 \ln \frac{\omega_e t}{2\pi}}. \quad (104)$$

Формула (99) дает оценку сверху для вероятности редких выбросов; формула (100) дает оценку снизу для функции надежности (95). Следует ожидать, что эти оценки будут достаточно близки к точным значениям, если система является высоконадежной, а процесс $v(t)$ будет достаточно сильно перемешанным. Примером сильно перемешанного случайного процесса может служить эргодический стационарный гауссовский процесс. В качестве примера противоположного типа укажем на синусоидальный процесс с амплитудой, которая изменяется случайным образом от одной реализации к другой (рис. 62). Очевидно, если у такого процесса произойдет однократное положительное пересечение некоторого уровня v_* , то это пересечение повторится столько раз, сколько периодов уложится на от-

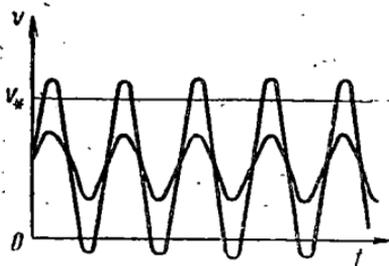


Рис. 62

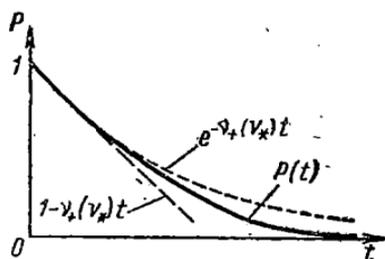


Рис. 63

резке $[0, t]$. При решении конкретных задач надежности представляется возможным на основании физических соображений каждый раз выносить суждение о том, дают ли формулы (99) и (100) грубую одностороннюю оценку или они позволяют найти достаточно точное приближение для вероятности редкого выброса $Q(t)$ и для функции надежности $P(t)$.

Для узкополосных процессов лучше пользоваться приближенными формулами (99) и (100), подставляя в них вместо N_+ и ν_+ математическое ожидание числа выбросов огибающей. Например, для математического ожидания числа положительных пересечений уз-

кополосным центрированным гауссовским процессом вместо (58) получаем формулу

$$\bar{v}_+(v_*) \approx \frac{\bar{\omega}_e}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right). \quad (105)$$

Здесь $\bar{\omega}_e^2 = \omega_e^2 - \theta^2$; θ — несущая частота процесса, относительно которой пик спектральной плотности $S_v(\omega)$ полагается симметричным.

Другой приближенный подход к задаче об определении вероятности редких выбросов основан на использовании распределения Пуассона. Допустим, что в течение времени $0 \leq \tau \leq t$ регистрируется наступление некоторых событий. Пусть k — число событий за время наблюдения, a — математическое ожидание этого числа. Полагая, что распределение событий следует закону Пуассона, получим, что вероятность наступления k событий за время наблюдения $0 \leq \tau \leq t$ составляет

$$P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Явления, которые описываются при помощи такой схемы, называются пуассоновскими потоками событий.

Будем интерпретировать положительное пересечение процессом $v(t)$ уровня v_* как событие в пуассоновском потоке. Тогда функция надежности $P(t)$ определяется как вероятность того, что за время $0 \leq \tau \leq t$ не произойдет ни одного события. Таким образом, функция надежности определяется по формуле пуассоновского распределения при $k = 0$. При этом вместо математического ожидания a следует подставить математическое ожидание числа положительных пересечений $N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t)$. Приближенная формула для функции надежности приобретает вид

$$P(t) \approx \exp\left[-\int_0^t v_+(v_*; \tau) d\tau\right]. \quad (106)$$

Сравнивая формулу (106) с формулой теории надежности (3), приходим к соотношению

$$\lambda(t) = v_+(v_*; t). \quad (107)$$

Таким образом, интенсивность отказов λ отождествляется здесь с математическим ожиданием числа положи-

тельных пересечений уровня v_* в единицу времени. Если процесс $v(t)$ стационарный, то $v_+(v_*) = \text{const}$; отсюда приходим к экспоненциальному закону надежности

$$P(t) \approx \exp[-v_+(v_*)t]. \quad (108)$$

В дальнейшем математические модели отказов, основанные на допущениях об ординарности потока отказов и на редком их появлении, будем называть моделями пуассоновского типа. Для этих моделей удастся выразить функцию надежности через моменты от числа отказов на заданном отрезке времени. Примером служат формулы (100), (106) и (108), связывающие функцию надежности с математическим ожиданием числа отказов.

В последнее время был опубликован ряд математических работ, посвященных установлению условий, при которых приближенное равенство (108) выполняется в асимптотическом смысле. Были доказаны предельные теоремы, относящиеся к стационарным гауссовским процессам. Условия этих теорем содержат некоторые требования перемешанности; кроме того, требуется, чтобы уровень v_* и время наблюдения t увеличивались некоторым согласованным образом. Применение этих теорем к практическим задачам затруднительно. К тому же если даже установлено, что условия теорем выполняются, то остается неясным вопрос об абсолютной величине и знаке погрешности при определении функции надежности. В этом смысле формула (100) имеет то преимущество, что она дает для функции надежности строгую оценку снизу (рис. 63). Заметим, что правая часть формулы (100) представляет собой первые два члена разложения экспоненты (106) в степенной ряд. При выполнении условия (98) формулы (100) и (106) дают весьма близкие результаты. В этом случае следует отдавать предпочтение более простой и надежной формуле (100).

В статье [80] приведено сопоставление результатов, которые дают различные приближенные подходы, с опытными данными. При этом сравниваются средние значения абсолютных максимумов стационарного гауссовского процесса за интервал времени $0 \leq \tau \leq t$. Приведем результаты вычислений, основанные на прибли-

женном распределении (103). Математическое ожидание абсолютного максимума определяется как

$$\langle v_* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_* p(v_*) dv_*$$

Подставляя сюда распределение (103) и интегрируя, получим

$$\langle v_* \rangle = \frac{\omega_e t \sigma_v}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{prgs}_3 \left(\frac{v_0 - a}{\sigma_v} \right) + \frac{a}{\sigma_v} \text{prgs}_2 \left(\frac{v_0 - a}{\sigma_v} \right) \right],$$

где $v_0(t)$ определяется соотношением (104), а $\text{prgs}_n(u)$ — функция χ -распределения Пирсона:

$$\text{prgs}_n(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_u^{\infty} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (109)$$

При больших значениях аргумента могут быть использованы асимптотические представления для функции Пирсона. После упрощения получаем приближенную формулу

$$\langle v_* \rangle \approx a + \sigma_v \left(\sqrt{2 \ln \frac{\omega_e t}{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2 \ln \frac{\omega_e t}{2\pi}}} \right). \quad (110)$$

Аналогичные вычисления, основанные на предельной теореме Крамера для процесса с корреляционной функцией типа $e^{-\alpha^2 t^2}$, дают

$$\langle v_* \rangle \approx a + \sigma_v \left(\sqrt{2 \ln \frac{\omega_e t}{2\pi}} + \frac{C}{\sqrt{2 \ln \frac{\omega_e t}{2\pi}}} \right). \quad (111)$$

Здесь $C = 0,57722 \dots$ — постоянная Эйлера. При достаточно больших $\omega_e t$ второй член в скобках становится малым по сравнению с первым. Расхождения между результатами, которые дают формулы (110) и (111), при этом становятся несущественными. В таблице, взятой из статьи [80], приводятся математические ожидания абсолютного максимума гауссовского процесса, нормированного при $a = 0$, $\sigma_v = 1$.

Систематическое изучение выбросов случайных процессов на электронных моделях было выполнено Н. М. Комаром и Ю. А. Окопным [51, 52]. Исследование про-

№ п. п.	Источник	Корреляционная функция	$\frac{\omega_e t}{2\pi}$		
			2,12	8,5	21,2
1	Опыты В. И. Тихонова	$e^{-\alpha^2 \tau^2}$	1,7	2,48	2,89
2	Оценка по методу [17]	Существует $K''(\tau)$	1,81	2,48	2,83
3	Оценка по предельной теореме Крамера	$e^{-\alpha^2 \tau^2}$	1,7	2,35	2,71

водилось с использованием генератора шума, фильтров, набранных на основе электронной моделирующей установки, и счетчиков числа пересечений. На рис. 64 пока-

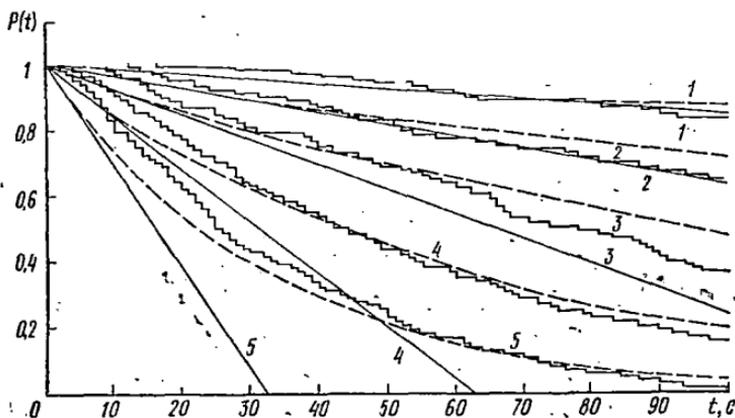


Рис. 64

заны результаты, относящиеся к стационарному квазигавссовскому процессу со спектральной плотностью

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} & (|\omega| \leq \omega_c), \\ 0 & (|\omega| \geq \omega_c). \end{cases} \quad (112)$$

Здесь $\alpha > 0$, ω_c — частота среза. При моделировании были приняты значения $\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_c = 30 \text{ с}^{-1}$. Для этих значений можно положить, что коэффициент σ_0^2

в формуле (112) совпадает с дисперсией процесса $v(t)$. Область допустимых значений взята в виде $v < v_*$.

Статистическая оценка $P(t)$ функции надежности $P(t)$ определялась как

$$P(t) = \frac{n - n(t)}{n}, \quad (113)$$

где n — общее число испытаний; $n(t)$ — число испытаний, при которых первый выброс из области допустимых состояний произошел на отрезке $[0, t]$. Статистические оценки нанесены на рис. 64 ступенчатыми кривыми. Прямые линии соответствуют приближенной формуле (100)

$$P(t) \approx 1 - v_+ t, \quad (114)$$

где $v_+ = \text{const}$. Значение v_+ вычислялось по формуле (58) с учетом соотношения (112). Цифры 1—5 на

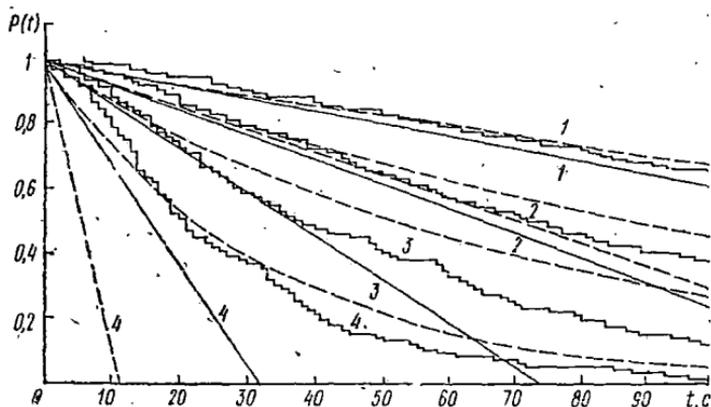


Рис. 65

рис. 64 указывают значения безразмерного уровня v_* / σ_0 , равные соответственно 3,5; 3,25; 3; 2,75; 2,5.

Как видно из рис. 64, оценка (114) дает хорошие результаты в области редких выбросов. В двух случаях наблюдается нарушение неравенства (97). Это не противоречит теореме об оценках для функции надежности, поскольку теория сформулирована для вероятностей, а не для выборочных характеристик.

На рис. 65 дано сопоставление результатов расчета по формуле (58) с результатами электронного модели-

рования стационарного узкополосного квазигaussianского процесса со спектральной плотностью

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sigma_0^2}{\pi} \frac{\alpha(\theta^2 + \alpha^2)}{[(\omega - \theta)^2 + \alpha^2][(\omega + \theta)^2 + \alpha^2]} & (|\omega| \leq \omega_c), \\ 0 & (|\omega| > \omega_c). \end{cases} \quad (115)$$

Здесь θ — несущая частота; обозначения σ_0^2 и ω_c имеют тот же смысл, что и в формуле (112). Сопоставление проведено при $\alpha/\theta = 0,005$. Прямые линии соответствуют оценке (100) с заменой числа выбросов процесса на число выбросов огибающей (105), штриховые — оценке (100) в ее первоначальном виде, ломаные линии дают выборочную оценку, найденную по формуле (113). Цифры 1—4 указывают значения безразмерного уровня v_*/σ_0 , равные соответственно 3; 2,75; 2,5; 2. Как видно из рис. 65, оценки, основанные на математическом ожидании числа выбросов огибающей узкополосного процесса, намного эффективнее, чем оценки, основанные на математическом ожидании выбросов самого процесса.

Еще один способ для проверки точности приближенных формул типа (100) и (106) заключается в установлении двусторонних приближений, внутри которых лежат точные значения функций надежности. Двусторонние оценки, основанные на моментах от числа положительных пересечений предельной поверхности, были указаны в статье [28].

Обозначим через $N(t)$ число выбросов процесса $v(t)$ за уровень v_* на отрезке $[0, t]$, через $\langle N^\alpha(t) \rangle$ — моменты случайной функции $N(t)$. В обозначениях предыдущего текста $\langle N(t) \rangle \equiv N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t)$. Эти моменты выражаются через вероятности $Q_k(t)$ следующим образом:

$$\langle N^\alpha(t) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha Q_k(t) \quad (116)$$

$(\alpha = 1, 2, \dots)$.

Используя соотношение (116) при $\alpha = 1, 2$, приходим к следующему результату: если поток пересечений предельной поверхности ординарный, а значение функций надежности $P(t)$ при $t = 0$ равно единице, то при $t > 0$ функция надежности удовлетворяет неравенствам

$$1 - \langle N(t) \rangle \leq P(t) \leq 1 - \frac{3}{2} \langle N(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle N^2(t) \rangle. \quad (117)$$

Нижняя оценка совпадает с (100). Для применения верхней оценки следует знать, помимо математического ожидания $\langle N(t) \rangle$, средний квадрат числа положительных пересечений. Последняя величина вычисляется по формуле

$$\langle N^2(t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t v_1 v_2 p(v_*, v_*, v_1, v_2; \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dv_1 dv_2. \quad (118)$$

Здесь $p(v_1, v_2, v_1; v_2; \tau_1, \tau_2)$ — совместная плотность вероятности для значений процесса $v(t)$ и его первой производной $\dot{v}(t)$ в два несовпадающих момента времени τ_1 и τ_2 .

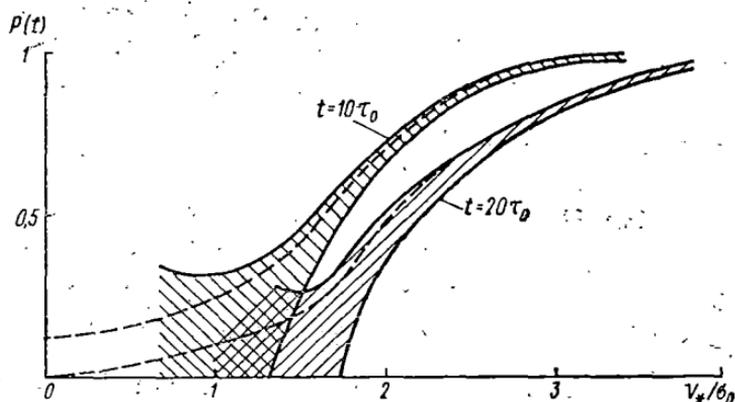


Рис. 66

Реализация формулы (118) требует применения электронных вычислительных машин. На рис. 66 и 67 показаны результаты вычислений для случая, когда $v(t)$ — стационарный гауссовский процесс с корреляционной функцией

$$K(\tau) = \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right), \quad (119)$$

где σ_0 и τ_0 — положительные константы. Эффективность оценок в данном примере объясняется также тем, что процесс с корреляционной функцией (119) является сильно перемешанным.

Если ряды (116) взять при $\alpha = 1,2$ и оборвать их на $k = 2$, то придем к приближенной формуле

$$P(t) \approx 1 - \frac{3}{2} \langle N(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle N^2(t) \rangle. \quad (120)$$

Если пересечения уровня образуют пуассоновский поток, то

$$\langle N^2(t) \rangle = \langle N(t) \rangle + \langle N(t) \rangle^2.$$

В этом случае формула (120) дает значения первых трех членов при разложении точного выражения для

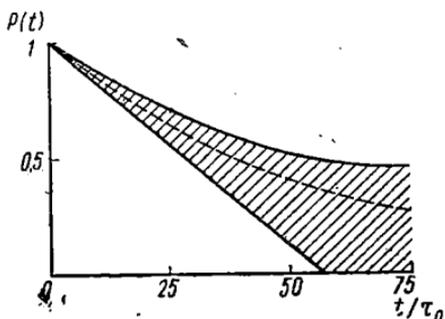


Рис. 67

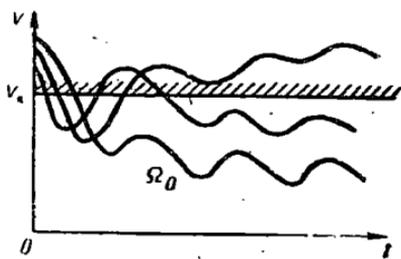


Рис. 68

функции надежности в степенной ряд. На рис. 66 и 67 пуассоновское приближение (106) представлено штриховыми линиями.

Двухстороннее приближение (117) может быть сделано более тесным, если в рядах (116) удержать большее число членов [28]. Тогда в оценки войдут моменты от числа пересечений выше второго порядка. Например, с учетом моментов до четвертого порядка включительно

$$\begin{aligned} 1 - \frac{11}{6} \langle N(t) \rangle + \langle N^2(t) \rangle - \frac{1}{6} \langle N^3(t) \rangle \leq P(t) \leq \\ \leq 1 - \frac{25}{12} \langle N(t) \rangle + \frac{35}{24} \langle N^2(t) \rangle - \frac{5}{12} \langle N^3(t) \rangle + \\ + \frac{1}{24} \langle N^4(t) \rangle. \end{aligned} \quad (121)$$

Все предыдущие результаты существенным образом основывались на условии, что $P(0) = 1$, т. е. что при $t = 0$ система находится в допустимой области. Если это условие не выполнено, т. е. если возможны реализации процесса $v(t)$ типа показанных на рис. 68, то пред-

лагаемыми оценками, строго говоря, пользоваться нельзя. В рассмотренных выше примерах в качестве процесса $v(t)$ были взяты реализации некоторых стационарных гауссовских случайных процессов. Для этих процессов $P(0) = 1 - F(v_*) < 1$. Применение приближенных оценок к стационарным случайным процессам может быть оправдано, если $Q(0) \ll 1$ и, кроме того, рассматриваются такие t , для которых $Q(t) \gg Q(0)$. Эти условия будут удовлетворены, если взять достаточно высокие уровни v_* и соответственно достаточно большие значения t .

Нетрудно внести изменения в формулу (100), делающие ее пригодной при $P(0) \neq 1$. Применим неравенство Буля $P(A+B) \leq P(A) + P(B)$ к ситуации, где случайные события A и B — это отказы при $t=0$ и при $t>0$ соответственно. Заменяя условную вероятность отказа при $t>0$ ее оценкой сверху (97), получим для безусловной вероятности отказа неравенство

$$Q(t) \leq Q(0) + N_+(v_*; 0 < \tau \leq t)[1 - Q(0)]. \quad (122)$$

В терминах функций надежности это соотношение принимает вид

$$P(t) \geq P(0)[1 - N_+(v_*; 0 < \tau \leq t)]. \quad (123)$$

Заметим, что при $P(0) \neq 1$, вообще говоря,

$$N_+(v_*; 0 < \tau \leq t) \neq N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t).$$

Если $P(0) = 1$, то вновь приходим к формуле (100).

§ 3.7. Оценка функций надежности в случае многомерного пространства качества

До сих пор предполагалось, что качество системы характеризуется одним параметром $v(t)$, и, следовательно, пространство V является одномерным евклидовым пространством. Обобщим результаты предыдущих параграфов на случай многомерного евклидова пространства V . Общая схема вычислений остается прежней. Вначале мы выведем формулу для математического ожидания числа пересечений траекторией $v(t)$ границы Γ допустимой области Ω_0 ; затем используем найденное значение для приближенной оценки функции надежности.

Пусть Ω_0 — односвязная область в n -мерном евклидовом пространстве V , ограниченная замкнутой гладкой

поверхностью Γ . Пусть, далее, в этом пространстве стохастически задана случайная траектория $\mathbf{v}(t)$ с совместной плотностью вероятности для вектора $\mathbf{v}(t)$ и его первой производной по времени $\rho(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}; t)$. Найдем математическое ожидание числа пересечений траекторией $\mathbf{v}(t)$ поверхности Γ в направлении внешней нормали к поверхности. В целях краткости эти пересечения будем называть положительными. Математическое ожидание числа пересечений в единицу времени будем обозначать через $\nu_+(\Gamma; t)$. Проведя рассуждения, аналогичные тем,

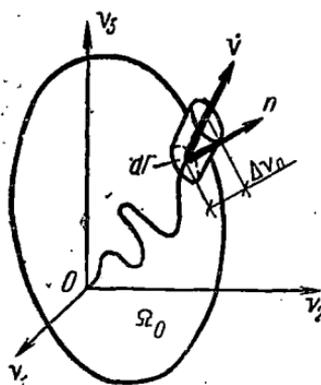


Рис. 69

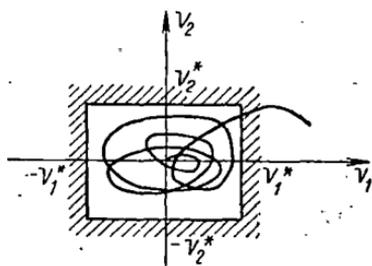


Рис. 70

которые были сделаны при выводе формулы (45), получим следующую формулу для $\nu_+(\Gamma; t)$:

$$\nu_+(\Gamma; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(\Gamma; \Delta t)}{\Delta t} \quad (124)$$

Здесь $P_1(\Gamma; \Delta t)$ — вероятность случайного события, которое заключается в том, что за достаточно малый интервал Δt произойдет одно положительное пересечение поверхности Γ процессом $\mathbf{v}(t)$. Эту вероятность можно записать следующим образом:

$$P_1(\Gamma; \Delta t) = P \left[\begin{array}{l} \mathbf{v}(\tau) \in \Delta\Omega; \\ \dot{v}_n(\tau) > 0; \\ -t \leq \tau \leq t + \Delta t \end{array} \right] \quad (125)$$

где $\Delta\Omega$ — некоторый тонкий слой, окружающий поверхность Γ ; \dot{v}_n — нормальная составляющая первой производной от процесса $\mathbf{v}(t)$, т. е. $\dot{v}_n = (\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{n})$, \mathbf{n} — орт внешней нормали (рис. 69). Выражая вероятность $P_1(\Gamma; \Delta t)$

через совместную плотность вероятности $p(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}; t)$, получим

$$P_1(\Gamma; \Delta t) = \int_{v_n > 0} d\dot{\mathbf{v}} \int_{\Delta\Omega} p(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}; t) d\mathbf{v} + o(\Delta t). \quad (126)$$

Перейдем в формуле (126) к интегрированию по поверхности Γ . Разобьем слой $\Delta\Omega$ на элементарные цилиндры, имеющие основание $d\Gamma$ и высоту, равную нормальной составляющей Δv_n приращения вектора $\mathbf{v}(t)$ за время Δt :

$$\Delta v_n = v_n \Delta t + o(\Delta t).$$

Подстановка в формулу (126) дает

$$P_1(\Gamma; \Delta t) = \Delta t \int_{\Gamma} \int_{v_n > 0} p(v_\Gamma, \dot{\mathbf{v}}; t) \dot{v}_n d\dot{\mathbf{v}} + o(\Delta t). \quad (127)$$

Отсюда, используя формулу (124), получаем

$$v_+(\Gamma; t) = \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{v_n > 0} p(v_\Gamma, \dot{\mathbf{v}}; t) \dot{v}_n d\dot{\mathbf{v}}, \quad (128)$$

где v_Γ берутся на поверхности Γ .

Формула (128) является обобщением формулы (49) на случай многомерного пространства качества V . Заметим, что некоторые ограничения, наложенные ранее на свойства поверхности Γ , могут быть устранены. Например, если поверхность Γ является кусочно-гладкой, то нормальная составляющая \dot{v}_n будет определена всюду, кроме некоторых линий — ребер поверхности. Можно ожидать, что для достаточно перемешанных многомерных случайных процессов вероятность пересечения поверхности Γ через ребра будет пренебрежимо малой. Поэтому формулу (128) можно распространить и на кусочно-гладкие поверхности. Формула (128) распространяется также на случай многосвязной области Ω_0 , а также на случай неограниченных областей (например, полупространства).

Переходим к определению функции надежности

$$P(t) = P[v(\tau) \in \Omega_0; 0 \leq \tau \leq t]. \quad (129)$$

Все рассуждения из § 3.6, относящиеся к приближенным оценкам для функции надежности $P(t)$ и вероятности отказа $Q(t)$, остаются применимыми и в случае

многомерного пространства V . Вместо формулы (100) для функции надежности $P(t)$ получаем оценку снизу

$$P(t) \geq 1 - \int_0^t \nu_+(\Gamma; \tau) d\tau. \quad (130)$$

Предполагая, что отказы образуют пуассоновский поток, получим формулу типа (106)

$$P(t) \approx \exp \left[- \int_0^t \nu_+(\Gamma; \tau) d\tau \right] \quad (131)$$

и т. д. Как и в одномерном случае, формула (130) дает для функции надежности оценку снизу; формула (131) при некоторых ограничениях, накладываемых на свойства процесса $\nu(t)$, дает асимптотическое приближение. При этом принято, что $P(0) = 1$.

Аналогично обобщаются двухсторонняя оценка (117) и уточненная формула (120). При этом существенно используется условие, что $P(0) = 1$. При $P(0) \neq 1$ можно положить, что $P(t) = P(0)P(t | \Omega_0)$, где $P(t | \Omega_0)$ — условная функция надежности для процесса $\nu(t | \Omega_0)$, все реализации которого при $t = 0$ выходят из области Ω_0 , т. е.

$$P(t | \Omega_0) = P\{\nu(\tau) \in \Omega_0; 0 < \tau \leq t | \nu(0) \in \Omega_0\}. \quad (132)$$

Поскольку $P(0 | \Omega_0) = 1$, то все выведенные ранее оценки для функции надежности $P(t)$ применимы к условной функции надежности $P(t | \Omega_0)$. При этом вместо числа выбросов $N(t)$ следует брать число выбросов $N(t | \Omega_0)$ для условного процесса $\nu(t | \Omega_0)$. Например, пуассоновская оценка имеет вид

$$P(t) \approx P(0) \exp [- \langle N(t) | \Omega_0 \rangle]. \quad (133)$$

Рассмотрим примеры приложения выведенных формул. Пусть пространство качества V является двухмерным, а область Ω_0 представляет собой прямоугольник со сторонами $2v_1^*$ и $2v_2^*$ (рис. 70). Подсчитаем математическое ожидание числа положительных пересечений границы прямоугольника Γ двухмерным стационарным гауссовским процессом. Совместная плотность вероятности $p(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$ имеет вид

$$p(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = p_1(v_1, v_2) p_2(\dot{v}_1, \dot{v}_2). \quad (134)$$

Плотность вероятности $\rho_1(v_1, v_2)$ записывается как

$$\rho(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(v_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(v_1 - a_1)(v_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, \quad (135)$$

где σ_1^2 и σ_2^2 — дисперсии процессов $v_1(t)$ и $v_2(t)$ соответственно; a_1 и a_2 — математические ожидания; ρ — коэффициент корреляции этих процессов в совпадающие моменты времени, т. е.

$$\sigma_1^2 = \langle (v_1 - a_1)^2 \rangle; \quad \sigma_2^2 = \langle (v_2 - a_2)^2 \rangle; \\ \rho = \frac{\langle [v_1(t) - a_1][v_2(t) - a_2] \rangle}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Плотность вероятности $\rho_2(\dot{v}_1, \dot{v}_2)$ записывается аналогичным образом:

$$\rho_2(\dot{v}_1, \dot{v}_2) = \frac{1}{2\pi s_1 s_2 \sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\dot{v}_1^2}{s_1^2} - 2r \frac{\dot{v}_1 \dot{v}_2}{s_1 s_2} + \frac{\dot{v}_2^2}{s_2^2} \right) \right]. \quad (136)$$

Здесь использованы обозначения

$$s_1^2 = \langle \dot{v}_1^2 \rangle; \quad s_2^2 = \langle \dot{v}_2^2 \rangle; \quad r = \frac{\langle \dot{v}_1(t) \dot{v}_2(t) \rangle}{s_1 s_2}.$$

Запишем формулу (128) для области Ω_0 , показанной на рис. 70:

$$\nu_+(\Gamma) = \int_{-v_2^*}^{v_2^*} dv_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{v}_2 \int_{-\infty}^{\infty} p(v_1^*, \dot{v}_2, v_1, \dot{v}_2) v_1 dv_1 + \\ + \int_{-v_2^*}^{v_2^*} dv_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{v}_2 \int_{-\infty}^0 p(-v_2^*, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2) |v_1| dv_1 + \\ + \int_{-v_1^*}^{v_1^*} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{v}_1 \int_0^{\infty} p(v_1, v_2^*, \dot{v}_1, \dot{v}_2) v_2 dv_2 + \\ + \int_{-v_1^*}^{v_1^*} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{v}_1 \int_{-\infty}^0 p(v_1, -v_2^*, \dot{v}_1, \dot{v}_2) |v_2| dv_2. \quad (137)$$

Подставляя сюда выражение (134), правую часть этой формулы можно несколько упростить. В самом деле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_2(\dot{v}_1, \dot{v}_2) d\dot{v}_2 = p(\dot{v}_1);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_2(\dot{v}_1, v_2) d\dot{v}_1 = p(\dot{v}_2).$$

Здесь $p(\dot{v}_1)$ и $p(\dot{v}_2)$ — одномерные плотности вероятности производных $\dot{v}_1(t)$ и $\dot{v}_2(t)$. Дальнейшие вычисления дают

$$\int_0^{\infty} p(\dot{v}_1) \dot{v}_1 d\dot{v}_1 = \frac{s_1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \int_0^{\infty} p(\dot{v}_2) \dot{v}_2 d\dot{v}_2 = \frac{s_2}{\sqrt{2\pi}}.$$

В результате формула (137) принимает вид

$$v_+(\Gamma) = \frac{s_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-v_2^*}^{v_2^*} [p_1(v_1^*, v_2) + p_1(-v_1^*, v_2)] dv_2 +$$

$$+ \frac{s_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-v_1^*}^{v_1^*} [p_1(v_1, v_2^*) + p_1(v_1 - v_2^*)] dv_1. \quad (138)$$

Покажем, как вычисляются интегралы, входящие в формулу (138). Возьмем, например, интеграл¹

$$\int_{-v_2^*}^{v_2^*} p(v_1^*, v_2) dv_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-v_2^*}^{v_2^*} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(v_1^* - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2\rho \frac{(v_1^* - a_1)(v_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} dv_2.$$

Выделив в подынтегральном выражении полный квадрат линейной функции от v_2 , введем новую переменную

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{v_2 - a_2}{\sigma_2} - \rho \frac{v_1^* - a_1}{\sigma_1} \right).$$

¹ Аналогичный интеграл рассматривался в § 3.4 при выводе формулы (63).

Тогда интеграл примет вид

$$\int_{-v_2^*}^{v_2^*} p(v_1^*, v_2) dv_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \exp \left[-\frac{(v_1^* - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \int_{u_{-2,+1}}^{u_{+2,+1}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где обозначено

$$u_{\pm 2, +1} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\pm v_2^* - a_2}{\sigma_2} - \rho \frac{v_1^* - a_1}{\sigma_1} \right). \quad (139)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ — интеграл Лапласа, получим

$$\int_{-v_2^*}^{v_2^*} p(v_1^*, v_2) dv_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left[-\frac{(v_1^* - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] [\Phi(u_{+2,+1}) - \Phi(u_{-2,+1})].$$

После вычисления остальных интегралов приходим к формуле

$$\begin{aligned} \gamma_{+}(\Gamma) = & \frac{\omega_1}{2\pi} \left\{ \exp \left[-\frac{(v_1^* - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] [\Phi(u_{+2,+1}) - \Phi(u_{-2,+1})] + \right. \\ & \left. + \exp \left[-\frac{(v_1^* + a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] [\Phi(u_{+2,-1}) - \Phi(u_{-2,-1})] \right\} + \\ & + \frac{\omega_2}{2\pi} \left\{ \exp \left[-\frac{(v_2^* - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] [\Phi(u_{+1,+2}) - \Phi(u_{-1,+2})] + \right. \\ & \left. + \exp \left[-\frac{(v_2^* + a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] [\Phi(u_{+1,-2}) - \Phi(u_{-1,-2})] \right\}. \quad (140) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$u_{\pm j, \pm k} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\pm v_j^* - a_j}{\sigma_j} - \rho \frac{\pm v_k^* - a_k}{\sigma_k} \right); \quad \omega_j = \frac{s_j}{\sigma_j}. \quad (141)$$

Для определения функции надежности достаточно подставить выражение (140) в формулы (130) или (131).

При некоторых дополнительных предположениях формула (140) может быть заменена соотношениями, более удобными для расчетов. Пусть, например, процессы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — центрированные и стохастически независимые. Тогда $a_1 = a_2 = \rho = 0$. Формула (140) принимает вид

$$\nu_+(\Gamma) = \frac{\omega_1}{\pi} \exp\left(-\frac{v_1^{*2}}{2\sigma_1^2}\right) \Phi_1\left(\frac{v_2^*}{\sigma_2}\right) + \frac{\omega_2}{\pi} \exp\left(-\frac{v_2^{*2}}{2\sigma_2^2}\right) \Phi_1\left(\frac{v_1^*}{\sigma_1}\right). \quad (142)$$

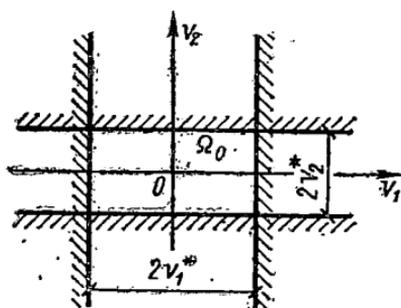


Рис. 71

Здесь $\Phi_1(u)$ — интеграл Лапласа, представленный в форме

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Заметим, что имеют место неравенства типа

$$\Phi(u_{+2}, +1) - \Phi(u_{-2}, +1) < 1.$$

Отсюда вытекает следующее неравенство для среднего числа положительных пересечений границы Γ :

$$\begin{aligned} \nu_+(\Gamma) \leq & \frac{\omega_1}{2\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{(v_1^* - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] + \exp\left[-\frac{(v_1^* + a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \right\} + \\ & + \frac{\omega_2}{2\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{(v_2^* - a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] + \exp\left[-\frac{(v_2^* + a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \right\}. \quad (143) \end{aligned}$$

Очевидно, что в правой части стоит сумма математических ожиданий числа пересечений линий $v_1 = \pm v_1^*$ и $v_2 = \pm v_2^*$, т. е. сумма математических ожиданий числа выбросов процесса за пределы полос $-v_1^* < v_1 < v_1^*$ и $-v_2^* < v_2 < v_2^*$ (рис. 71). Если выбросы — редкие события, а корреляция между компонентами $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — достаточно слабая, то правая часть неравенства (143) может быть использована для приближенной оценки числа выбросов из области Ω_0 . Таким образом, приходим к формуле

$$\nu_+(\Gamma) \approx \frac{\omega_1}{2\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{(v_1^* - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] + \exp\left[-\frac{(v_1^* + a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \right\} +$$

$$+ \frac{\omega_2}{2\pi} \left\{ \exp \left[\frac{(v_2^* - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] + \exp \left[-\frac{(v_2^* + a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \right\}. \quad (144)$$

Формулы (140), (142) и (144) могут быть обобщены на случай произвольного числа измерений. Ограничимся тем, что вычислим математическое ожидание числа положительных пересечений поверхности n -мерного параллелепипеда стационарным гауссовским процессом $v(t)$, полагая компоненты этого процесса стохастически независимыми. Итак, пусть допустимая область Ω_0 задана в виде

$$v_k^{**} < v_k < v_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

а совместная плотность вероятности процесса $v(t)$ и его первой производной — в виде

$$p(v, \dot{v}) = \prod_{k=1}^n p_k(v_k) p_{n+k}(\dot{v}_k).$$

Здесь использованы обозначения

$$p_k(v_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} \exp \left[-\frac{(v_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right],$$

$$p_{n+k}(\dot{v}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \omega_k \sigma_k} \exp \left(-\frac{\dot{v}_k^2}{2\omega_k^2 \sigma_k^2} \right),$$

где a_k — математические ожидания компонент $v_k(t)$; σ_k^2 — их дисперсии; ω_k — эффективные частоты. Подставляя эти выражения в формулу (128), получим

$$v_+(\Gamma) = \sum_{k=1}^n [p_k(v_k^*) + p_k(v_k^{**})] \int_0^\infty p_{n+k}(\dot{v}_k) \dot{v}_k d\dot{v}_k \prod_{l \neq k} \int_{v_l^{**}}^{v_l^*} p_l(v_l) dv_l.$$

Отсюда после вычисления интегралов найдем

$$v_+(\Gamma) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2\pi} \left\{ \exp \left[-\frac{(v_k^* - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] + \exp \left[-\frac{(v_k^{**} - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] \right\} \prod_{l \neq k} \left[\Phi \left(\frac{v_l^* - a_l}{\sigma_l} \right) - \Phi \left(\frac{v_l^{**} - a_l}{\sigma_l} \right) \right]. \quad (145)$$

Заметим, что для высоконадежных систем можно приближенно принять, что

$$\prod_{l \neq k} \left[\Phi \left(\frac{v_l^* - a_l}{\sigma_l} \right) - \Phi \left(\frac{v_l^{**} - a_l}{\sigma_l} \right) \right] \approx 1.$$

Тогда придем к приближенной формуле

$$\gamma_+(\Gamma) \approx \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2\pi} \left\{ \exp \left[- \frac{(v_k^* - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] + \exp \left[- \frac{(v_k^{**} - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] \right\}, \quad (146)$$

дающей, как и формула (144), оценку сверху для математического ожидания числа пересечений. Каждый из членов суммы, стоящей в правой части формулы (146), представляет собой математическое ожидание числа выбросов в единицу времени из слоя $v_k^{**} < v_k < v_k^*$. Будем в дальнейшем называть формулы типа (144) и (146) формулами полосового приближения. Аналогично могут быть получены формулы для случая, когда область Ω_0 является кругом и, вообще, n -мерным шаром [34, 79].

Для приближенного вычисления надежности в случае областей сложной конфигурации можно рекомендовать метод мажорантных оценок. Допустим, что в пространстве качества взяты такие две области Ω_1 и Ω_2 , что $\Omega_1 \subset \Omega_0 \subset \Omega_2$. Например, граница Γ_1 области Ω_1 вписана в границу Γ , а граница Γ_2 области Ω_2 описана вокруг Γ . Тогда для функции надежности имеем

$$P_1(t) \leq P(t) \leq P_2(t),$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — функции надежности для областей Ω_1 и Ω_2 соответственно. В качестве областей Ω_1 и Ω_2 целесообразно взять такие, для которых функции надежности и средние числа выбросов легко вычисляются (рис. 72).

Еще один подход [24, 28] основан на обобщении формул полосового приближения (144) и (146). Пусть поверхность Γ состоит из n кусков γ_k : $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ (см. рис. 73, где изображен двухмерный аналог пространства V). Аналитическое продолжение γ_k в V обозначим через Γ_k . Вероятность события, состоящего в том, что за отрезок времени $(0, t]$ элемент $v(t)$ выйдет из Ω_0 через поверхность γ_k , обозначим через $Q_{\gamma_k}(t)$.

Соответствующую вероятность пересечения поверхности Γ_k обозначим через $Q_{\Gamma_k}(t)$. Очевидно, что $Q_{v_k}(t) \leq Q_{\Gamma_k}(t)$. Отсюда получаем соотношение

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n Q_{v_k}(t) \leq \sum_{k=1}^n Q_{\Gamma_k}(t).$$

Для достаточно перемешанных процессов и редких выбросов знак неравенства можно приближенно заме-

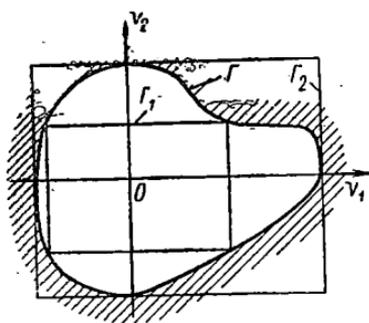


Рис. 72

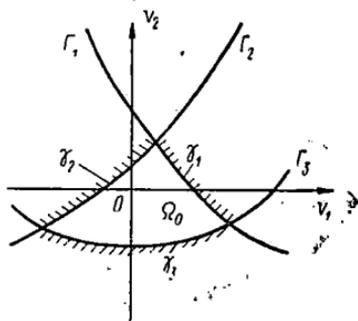


Рис. 73

нить хотя бы знаком равенства по порядку величин. Тогда для функции надежности получаем формулу

$$P(t) \sim 1 - \sum_{k=1}^n N_k(t),$$

где под $N_k(t)$ следует понимать математическое ожидание числа положительных пересечений поверхности Γ_k за отрезок времени $(0, t]$.

§ 3.8. Применение теории надежности к расчету оптимальной виброзащиты оборудования

Вопросам защиты приборов и оборудования от вибрационных воздействий посвящена обширная литература. Если внешнее воздействие является гармоническим, то задача о выборе параметров виброзащитного устройства решается сравнительно элементарными средствами. Но в реальных условиях вибрационные воздействия обычно носят случайный характер. Решение задач об оптимальной виброзащите при случайных внешних воз-

действиях встречает ряд аналитических и принципиальных трудностей.

В теории оптимальной виброзащиты используются критерии, аналогичные критерию минимума среднеквадратической ошибки в теории автоматического управления. Например, ставится условие, чтобы средний квадрат перемещения защищаемого объекта относительно основания, средний квадрат абсолютного ускорения объекта и т. п. принимали минимальные значения. Оставляя пока в стороне вопрос о техническом истолковании подобных условий, заметим, что они являются источниками некоторых далеко идущих затруднений. Одним из первых встречается следующее затруднение. Если подбирать параметры виброзащитного устройства из условия минимума среднеквадратического абсолютного ускорения, то приходим к тривиальному решению: жесткость подвешивания и потери в демпфере должны быть минимальны. Однако при этом получаются недопустимо большие относительные перемещения объекта. Если же минимизировать среднеквадратическое относительное перемещение, то становятся недопустимо большими перегрузки на объекте. Из этого затруднения выходят, дополняя условие минимума одного параметра ограничением, которое накладывается на другой параметр. При этом в зависимости от того, что минимизируется — средний квадрат ускорения или средний квадрат относительного перемещения, получаются различные решения.

Следующая трудность встречается, когда оказывается, что оптимальные параметры линейной виброзащитной системы зависят от интенсивности воздействия. В реальных конструкциях интенсивность вибрационного воздействия редко остается постоянной в течение срока эксплуатации конструкции. Линейные системы, параметры которых подобраны применительно к некоторому уровню воздействия, перестают быть оптимальными при изменении этого уровня. Для выхода из создавшегося затруднения приходится интерпретировать линейную систему как результат статистической линеаризации некоторой нелинейной системы.

Эти трудности усугубляются, если объект обладает несколькими (тем более — бесконечным числом) степенями свободы и если внешнее воздействие является нестационарным случайным процессом. Представляется,

что эти трудности не присущи внутренне теории виброзащиты, а скорее являются следствием неудачного выбора критерия для оптимизации. Инженер требует от системы виброзащиты, чтобы она обеспечивала надежное функционирование объекта. Конечно, средние квадраты перемещений и ускорений на объекте в некоторой степени характеризуют условия надежного функционирования. Но с технической точки зрения было бы правильнее минимизировать вероятность того, что за время эксплуатации объекта его параметры хотя бы раз выйдут из области допустимых значений. Оптимизация по надежности, будучи более естественной и обоснованной, в то же время снимает трудности, возникающие при применении более частных критериев. Этот метод оптимизации применим как к линейным, так и нелинейным системам с произвольным числом степеней свободы; не накладывает также ограничений на стохастическую природу внешних воздействий.

Общая постановка задачи о проектировании виброзащиты формулируется следующим образом [26]. Пусть некоторая механическая система с конечным или бесконечным числом степеней свободы прикрепляется к основанию при помощи конечного числа опор. В общем случае свойства этих опор неизвестны; тогда говорят о выборе структуры виброзащиты. Однако чаще система виброзащиты ищется в классе простых линейных связей, содержащих упругость и вязкое трение. В этом случае неизвестными параметрами являются координаты опор, коэффициенты их жесткости и вязкости. Под действием внешних сил или ускорений, сообщаемых основанию, в системе возникает некоторое вибрационное поле. Из технических соображений выбирается система параметров качества и допустимая область в пространстве параметров качества. Далее вычисляется показатель надежности системы как функция неизвестных параметров виброзащиты. Последние находятся из условия, чтобы этот показатель принимал максимальное значение. Как правило, показатели надежности как функции параметров виброзащиты не имеют изолированного максимума. Кроме того, указанные параметры обычно могут принимать значения лишь из некоторой ограниченной области. Поэтому проектирование виброзащиты сводится к неклассической задаче оптимизации,

которая может быть разрешена лишь численными методами.

Одним из центральных остается вопрос о выборе параметров качества и области их допустимых значений. Чаще всего требуется, чтобы максимальные виброперегрузки оборудования не превышали некоторых предельных значений. Пусть $a(r, t)$ — поле абсолютных ускорений в системе; a_* — предельно допустимое значение вибрационного ускорения. При этих условиях функция надежности вводится как

$$P(t) = P \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \max_r \|a(r, \tau)\| < a_* \right]. \quad (147)$$

Если изолируемая система является абсолютно твердым телом, то максимум абсолютного ускорения достигается в одной из точек, принадлежащих поверхности тела. Если тело — многогранник, то следует проверить каждую из его вершин. Во всяком случае соотношение (147) точно или хотя бы приближенно может быть заменено следующим:

$$P(t) = P \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \max_{1 \leq j \leq n} \|a(r_j, \tau)\| < a_* \right]. \quad (148)$$

Таким образом, пространство параметров качества становится многомерным евклидовым пространством, и метод, изложенный в предыдущем параграфе, может быть применен для вычисления функции надежности.

Наряду с ограничениями, накладываемыми на абсолютные ускорения, могут быть также поставлены ограничения для относительных перемещений различных точек системы. В соотношения типа (148) могут входить также проекции ускорений на некоторые направления и т. п. В этих случаях число измерений пространства параметров качества должно быть увеличено.

Поясним постановку и метод решения задачи на простейшем примере. Будем трактовать объект как систему с одной степенью свободы. Пусть объект массой M при помощи упругой связи с жесткостью c и вязкой связи с коэффициентом трения k прикреплен к основанию, которое совершает колебания с переносным ускорением $a_0(t)$ (рис. 74). Перемещение $u(t)$ объекта относительно основания удовлетворяет уравнению

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \omega_0^2 u = -a_0(t), \quad (149)$$

где $\varepsilon = k/2M$, $\omega_0 = c/M$. Пусть, далее, для надежного

функционирования объекта требуется, чтобы относительное перемещение u и абсолютное ускорение $a = a_0 + \ddot{u}$ не превышали по модулю предельно допустимых значений u_* и a_* соответственно:

$$|u| < u_*, \quad |a| < a_*. \quad (150)$$

Система виброзащиты будет оптимальной по надежности, если вероятность пребывания системы в допустимой области (150) за время $0 \leq \tau \leq T$ будет максималь-

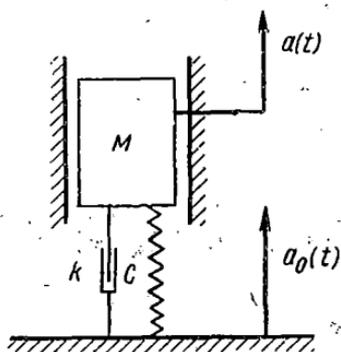


Рис. 74

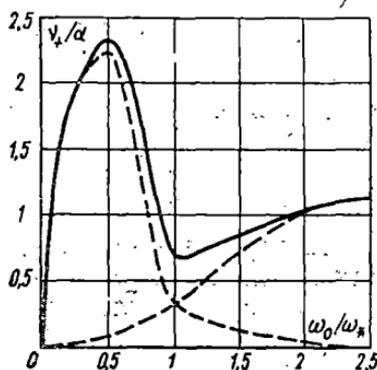


Рис. 75

ной. Таким образом, приходим к критерию оптимизации в виде

$$P \left[\sup_{0 \leq \tau < T} |u(\tau)| < u_*, \quad \sup_{0 \leq \tau < T} |a(\tau)| < a_* \right] \rightarrow \max. \quad (151)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда ускорение основания $a_0(t)$ представляет собой стационарный гауссовский процесс. Математическое ожидание числа $\nu_+(\Gamma)$ выбросов из допустимой области в единицу времени не будет зависеть от времени. Тогда, как это следует из формул (132) и (133), вместо критерия оптимизации (151) может быть принят критерий

$$\nu_+(\Gamma) \rightarrow \min. \quad (152)$$

Поскольку допустимая область (150) представляет собой прямоугольник, то математическое ожидание числа выбросов $\nu_+(\Gamma)$ находится по формулам (140) и (144).

Возьмем для процесса $a_0(t)$ спектральное представление

$$a_0(t) = \langle a_0 \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Здесь $A(\omega)$ — обобщенная случайная функция (спектр процесса). Представляя в аналогичной форме процесс $u(t)$

$$u(t) = \langle u \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

и используя уравнение (149), получим

$$\langle u \rangle = - \frac{\langle a_0 \rangle}{\omega_0^2}. \quad (153)$$

Спектральные плотности процессов $u(t)$ и $a(t)$ выражаются через спектральную плотность $S_{a_0}(\omega)$ процесса $a_0(t)$ формулами:

$$\begin{aligned} S_u(\omega) &= \frac{S_{a_0}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}; \\ S_a(\omega) &= \frac{(\omega_0^4 + 4\varepsilon^2 \omega^2) S_{a_0}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}; \\ S_{ua}(\omega) &= - \frac{(\omega_0^2 + 2i\varepsilon\omega) S_{a_0}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (154)$$

Используя соотношения (153) и (154), далее применим формулы (140) или (144) для математического ожидания числа выбросов. Минимизация этой характеристики по варьируемым параметрам системы дает (при заданных ограничениях) решение задачи об оптимальной виброзащите.

Приведем некоторые численные результаты из статьи [68]. Допустим, что ускорение $a_0(t)$ является экспоненциально-коррелированным процессом. Спектральные плотности процессов $u(t)$ и $a(t)$ находятся по формулам (154). Математическое ожидание числа выбросов определяется по формуле (140). Сплошная линия на рис. 75 показывает зависимость отношения ν_+/α от

безразмерной собственной частоты ω_0/ω_* . При этом через ω_* обозначено

$$\omega_* = (a_*/u_*)^{1/2} \quad (155)$$

Остальные параметры имеют следующие значения: $\langle a_0 \rangle = 0$, $\varepsilon = 0,05 \omega_0$, $a_* = 2\sigma_0$, $u_* \alpha^2 = 10^{-4} \sigma_0$.

Как видно из рис. 75, абсолютный минимум среднего числа выбросов соответствует собственной частоте ω_0 , стремящейся к нулю. Однако из-за ограничений, вытекающих из условий физической осуществимости, этот минимум не представляет практического интереса. Относительный минимум наблюдается вблизи частоты ω_* , определяемой по формуле (155). Штриховые линии на рис. 75 соответствуют выбросам из полос $|u| < u_*$ и $|a| < a_*$. Абсцисса точки пересечения этих линий близка к абсциссе относительного минимума от числа выбросов из области (150). Этот факт становится понятным, если рассмотреть узкополосные колебания массы M . Для этих колебаний можно принять, что $a \approx a_0 - \omega_0^2 u$. Если $\omega = \omega_*$, то фазовая точка на плоскости $\{u, a\}$ будет двигаться по траекториям, близким к диагонали прямоугольника (150). Минимум числа выбросов из этого прямоугольника достигается, таким образом, при условиях, обеспечивающих приблизительную равноопасность выбросов из полос $|u| < u_*$ и $|a| < a_*$.

Зависимость математического ожидания числа выбросов от двух варьируемых параметров (безразмерной собственной частоты ω_0/ω_* и безразмерного параметра демпфирования ε/ω_0) представлена на рис. 76. Вычисления выполнены при $a_* = \sigma_0$, $u_* = 10^{-4} \sigma_0/\alpha^2$. Кривые на этом графике соответствуют равным значениям ν_+ . Изменение демпфирования в широких пределах относительно мало влияет на число выбросов. Зависимость этого числа от собственной частоты более существенна.

Приведенные выше данные относились к случаю, когда вибрация основания представляет собой широкополосный процесс. Некоторые результаты для узкополосного процесса на входе со спектральной плотностью

$$S_{a_0}(\omega) = \frac{2\sigma_0^2}{\pi} \frac{\alpha(\theta^2 + \alpha^2)}{[(\omega - \theta)^2 + \alpha^2][(\omega + \theta)^2 + \alpha^2]} \quad (156)$$

приведены на рис. 77. По оси абсцисс отложено отношение собственной частоты ω_0 к характерной частоте (155).

По оси ординат отложено отношение математического ожидания числа выбросов ν_+ из области (150) к математическому ожиданию числа ν_0 выбросов процесса $a_0(t)$ из полосы $|a_0| < a_*$. При этом

$$\nu_+ = \frac{\theta}{\pi} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\theta^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{a_*^2}{2\sigma_0^2} \right).$$

Числа у кривых обозначают величину отношения θ/ω_* . Остальные параметры приняты следующими: $\langle a_0 \rangle = 0$, $a_* = 2\sigma_0$, $u_* = 10^{-4} \sigma_0/\alpha^2$, $\varepsilon = 0,5 \omega_0$. Расположение

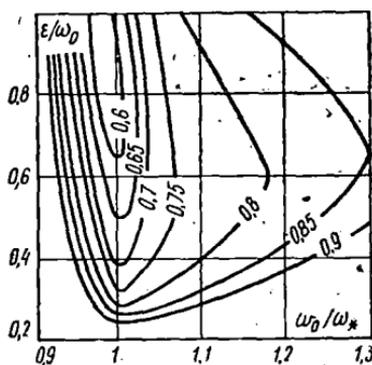


Рис. 76

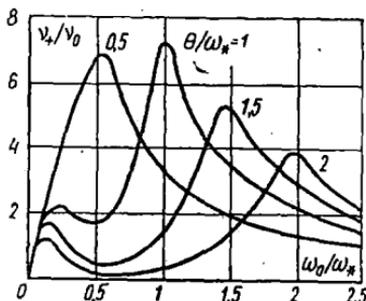


Рис. 77

экстремумов существенно зависит от величины несущей частоты θ . При этом максимум соответствует резонансу системы с несущей частотой; минимумы, если они существуют, располагаются в дорезонансной области. Дальнейшие сведения и более сложные примеры можно найти в статьях [26, 33, 68], где наряду с линейными рассмотрены также и некоторые нелинейные виброзащитные системы.

§ 3.9. Надежность и долговечность систем марковского типа

В предыдущих разделах для оценки надежности механических систем применялась спектральная теория случайных процессов. Другой путь открывает теория марковских процессов, элементы которой были изложены в § 1.10, 1.11. Напомним некоторые сведения.

Пусть эволюция системы в пространстве качества V представляет собой m -мерный марковский процесс $\mathbf{v}(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)\}$. Пусть в начальный момент времени t_0 система находится в точке $\mathbf{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}, \dots, v_{m0}\}$. Эволюция системы при $t > t_0$ описывается переходной плотностью вероятности $p(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0, t_0)$. Эта плотность вероятности, трактуемая как функция переменных v_1, v_2, \dots, v_m, t , удовлетворяет уравнению Колмогорова (1.150),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial v_j} (\kappa_j p) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k} (\kappa_{jk} p). \quad (157)$$

Здесь κ_j и κ_{jk} — интенсивности процесса, определяемые из соотношений (1.149). Если рассматривать $p(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0, t_0)$ как функцию переменных $v_{10}, v_{20}, \dots, v_{m0}, t_0$, то вместо (157) получим сопряженное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} = - \sum_{j=1}^m \kappa_j \frac{\partial p}{\partial v_{j0}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k} (\kappa_{jk} p), \quad (158)$$

где κ_j и κ_{jk} также являются функциями переменных $v_{10}, v_{20}, \dots, v_{m0}, t_0$.

В дальнейшем для простоты ограничения системами, у которых интенсивности κ_j и κ_{jk} от времени явно не зависят. Это условие выполняется для стационарных систем, на входе которых заданы стационарные случайные процессы. Эволюция системы при этом, вообще говоря, будет нестационарным процессом. Переходная плотность вероятности $p(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0, t_0)$ будет зависеть при этом от разности моментов времени $t - t_0$. Поэтому $\frac{\partial p}{\partial t_0} = - \frac{\partial p}{\partial t}$ и уравнение (158) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{k=1}^m \kappa_j \frac{\partial p}{\partial v_{j0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \kappa_{jk} \frac{\partial^2 p}{\partial v_{j0} \partial v_{k0}}. \quad (159)$$

Это уравнение решается при начальных условиях $p = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ при $t = t_0$. В дальнейшем полагаем $t_0 = 0$ и записываем переходную плотность вероятности в виде $p = p(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0)$.

Установим теперь связь между функцией надежности $P(t)$ и переходной плотностью вероятности $p(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0)$. Пусть $\mathbf{v}_0 \in \Omega_0$, где Ω_0 — допустимая область в пространстве V (рис. 78). Условная функция надеж-

ности $P(t | v_0)$ есть вероятность случайного события, состоящего в том, что система, находившаяся при $t = 0$ в точке v_0 , за время $0 \leq \tau \leq t$ ни разу не выйдет за границу Γ области Ω_0 . Связь между условной надежностью и переходной плотностью вероятности $p(v, t | v_0)$ дается формулой

$$P(t | v_0) = \int_{\Omega_0} p(v, t | v_0) dv.$$

Отсюда, интегрируя уравнение (159) почленно, получим для условной надежности уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{j=1}^m z_j \frac{\partial P}{\partial v_{j0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m z_{jk} \frac{\partial^2 P}{\partial v_{j0} \partial v_{k0}}. \quad (160)$$

Его решение должно удовлетворять начальному условию

$$P(0 | v_0) = 1 \text{ при } v_0 \in \Omega_0 \quad (161)$$

и граничному условию

$$P(t | v_0) = 0 \text{ при } v_0 \in \Gamma. \quad (162)$$

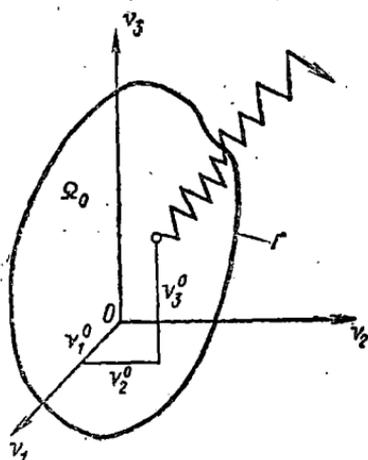


Рис. 78

После того как уравнение (160) решено, вычисляется полная надежность

$$P(t) = \int_{\Omega_0} P(t | v_0) p(v_0) dv_0. \quad (163)$$

Здесь $p(v_0)$ — плотность вероятности вектора $v(t)$ в начальный момент времени.

Применение уравнения (160) встречает двойные трудности. Во-первых, эволюция параметров качества вообще говоря, не является марковским процессом. Эту трудность можно обойти, увеличивая число измерений пространства V . Во-вторых, отыскание решений уравнения (160), особенно в случае большого числа измерений, сложных областей и пере-

менных коэффициентов весьма затруднительно. Проще определяются моменты распределения времени достижения границы

$$\langle T^k(v_0) \rangle = - \int_0^{\infty} t^k \frac{\partial P(t | v_0)}{\partial t} dt. \quad (164)$$

В частности, для математического ожидания вместо (164) получаем формулу

$$\langle T(v_0) \rangle = \int_0^{\infty} P(t | v_0) dt. \quad (165)$$

Формулы (164) и (165) оценивают время достижения границы Γ при условии, что при $t = 0$ система находилась в точке v_0 . Таким образом, $T(v_0)$ — условная долговечность. Для математического ожидания полной долговечности имеем формулу типа (163):

$$\langle T \rangle = \int_{\Omega_0} \langle T(v_0) \rangle p(v_0) dv_0.$$

В дальнейшем знак аргумента в выражении для условной долговечности $T(v_0)$ опускаем.

Интегрируя уравнение (160) почленно по t в пределах от нуля до бесконечности, получим после преобразований уравнение относительно математического ожидания (165):

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial v_{j0} \partial v_{k0}} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial v_{j0}} = -1. \quad (166)$$

Это уравнение было получено впервые Л. С. Понтрягиным [1]. Его решение должно удовлетворять условиям ограниченности, непрерывности и двукратной дифференцируемости внутри Ω_0 и граничному условию

$$\langle T \rangle = 0 \quad \text{при } v_0 \in \Gamma. \quad (167)$$

Простота граничного условия (167) подсказывает следующий путь построения приближенного решения поставленной краевой задачи [18]. Пусть $\varphi_k(v_{10}, v_{20}, \dots, v_{m0})$ — некоторая полная внутри Ω_0 система функций,

удовлетворяющая всем условиям для $\langle T \rangle$. Ищем приближенное решение уравнения (166) в виде следующего усеченного ряда:

$$\langle T \rangle = \sum_{k=1}^n T_k \varphi_k. \quad (168)$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина, коэффициенты T_k этого ряда должны определяться из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} T_k = b_j; \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (169)$$

Здесь

$$a_{jk} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \int_{\Omega_0} \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial v_{\alpha 0} \partial v_{\beta 0}} \varphi_j dv + \sum_{\alpha=1}^m \int_{\Omega_0} \kappa_{\alpha} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_{\alpha 0}} \varphi_j dv; \quad (170)$$

$$b_j = - \int_{\Omega_0} \varphi_j dv.$$

Во многих приложениях интенсивности $\kappa_{\alpha\beta}$ образуют положительно определенную матрицу. Тогда мы имеем классическую краевую задачу для уравнения эллиптического типа. Для некоторых задач такого типа сходимость метода Бубнова-Галеркина может быть строго доказана. Нас, однако, больше интересует скорость приближения к точному решению при сравнительно небольшом числе n членов ряда (168). Для оценки характера приближения рассмотрим несколько простейших задач, для которых получено точное решение.

Рассмотрим простейшее уравнение $v + \gamma v = q(t)$, для которого пространством V служит бесконечная прямая. При $q \equiv 0$ система имеет единственное положение равновесия $v = 0$. Если $\gamma > 0$, то это равновесие будет устойчиво, если $\gamma < 0$, — то неустойчиво. Предположим, что внешняя сила $q(t)$ является дельта-коррелированной стационарной случайной функцией с интенсивностью s . Найдем среднее время достижения границы отрезка — $v_* < v < v_*$. Эта задача была рассмотрена в работе [1]. Она приводит к уравнению типа (166):

$$\frac{s}{2} \cdot \frac{d^2 \langle T \rangle}{dv_0^2} - \gamma v_0 \frac{d \langle T \rangle}{dv_0} = -1 \quad (171)$$

с граничным условием $\langle T \rangle = 0$ при $v_0 = \pm v_*$.

В безразмерных переменных уравнение (171) и соответствующие граничные условия имеют вид

$$\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta}{d\xi} = -1;$$

$$\theta = 0 \text{ при } \xi = \pm 1,$$

где $\theta = \gamma \langle T \rangle$ — безразмерное время достижения границы, $\xi = v_0/v_*$ — безразмерная координата. Безразмерный параметр

$$\mu = \frac{\gamma v_*^2}{s}, \quad (172)$$

очевидно, пропорционален отношению квадрата характерного размера допустимой области v_* к средней длине «размыва» фазовой точки $s(\tau)$ за характерное время системы $\tau = 1/\gamma$. Решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям, будет

$$\theta(\xi) = -2\mu \int_1^\xi \left(e^{\mu\psi^2} \int_0^\psi e^{-\mu\eta^2} d\eta \right) d\psi. \quad (173)$$

Найдем теперь приближенное решение. Из соображений симметрии следует, что $\theta(\xi) = \theta(-\xi)$. Поэтому примем

$$\varphi_k(\xi) = \cos \frac{(2k-1)\pi\xi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Эти функции удовлетворяют, очевидно, всем условиям для функции $\theta(\xi)$. Используя формулы (170), найдем, что в первом приближении

$$\theta_1 = \frac{32\mu}{\pi^3} \cdot \frac{1}{1 - \mu\lambda^2} \left(\lambda = \frac{2}{\pi} \right). \quad (174)$$

На рис. 79 дано сопоставление решения по первому приближению с точным решением, которое показано штриховой линией. При этом принято, что $\mu = 1$. С приближением μ к $(\pi/2)^2$ первое приближение перестает быть удовлетворительным. Если взять два члена ряда, то вместо формулы (174) получим

$$\theta_1 = \frac{32\mu}{\pi^3} \cdot \frac{2(18 - 3\mu\lambda^2)}{36 - 40\mu\lambda^2 + 13\mu^2\lambda^4}$$

При трех членах ряда соответственно находим

$$\theta_1 = \frac{32\mu}{\pi^3} \cdot \frac{9(3600 - 768\mu\lambda^2 + 253\mu^2\lambda^4)}{32400 - 37296\mu\lambda^2 + 16065\mu^2\lambda^4 - 2593\mu^3\lambda^6}$$

Результаты вычислений по этим формулам с учетом аналогичных выражений для θ_2 и θ_3 приведены на рис. 80, где кривые 1, 2 и 3 соответствуют одночленному, дву-членному и трехчленному приближениям. Здесь же

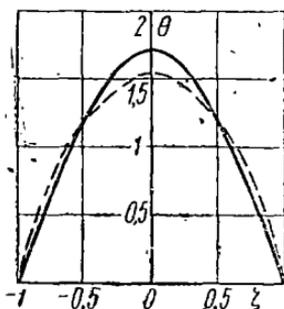


Рис. 79

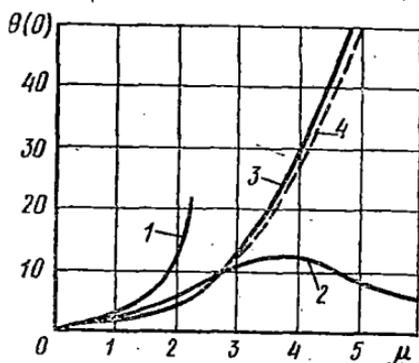


Рис. 80

штриховой линией нанесена кривая 4, соответствующая значению $\theta(0)$ согласно точному решению (173). Как видно из графика, чем ниже уровень внешних возмущений, тем большее число членов ряда должно быть взято для получения удовлетворительного приближения. Приближение с тремя членами ряда дает удовлетворительные результаты вплоть до $\mu = 5$. Заметим, что в случае, когда точка $\zeta = 0$ соответствует неустойчивому равновесию ($\mu < 0$), процесс сходимости значительно быстрее.

В качестве второго примера для оценки погрешности приближенного метода возьмем систему второго порядка [1]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 + \gamma \left[\left(1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{R^2} \right) v_1 - v_2 \right] &= Q_1(t); \\ \dot{v}_2 + \gamma \left[\left(1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{R^2} \right) v_2 + v_1 \right] &= Q_2(t), \end{aligned} \quad (175)$$

для которой определим среднее время достижения границы $v_1^2 + v_2^2 = R^2$. При $Q_1 = Q_2 = 0$ и $\gamma > 0$ эта система имеет устойчивый фокус $v_1 = v_2 = 0$ и неустойчивый предельный цикл $v_1^2 + v_2^2 = R^2$. При $Q_1 = Q_2 = 0$ и $\gamma < 0$, наоборот, фокус $v_1 = v_2 = 0$ будет неустойчивым, а предельный цикл $v_1^2 + v_2^2 = R^2$ — устойчивым.

Переходя к полярным координатам r и ψ , вместо системы (175) получим

$$\begin{aligned} \dot{r} \pm \gamma r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) &= Q_1 \cos \psi + Q_2 \sin \psi; \\ \dot{\psi} &= -\gamma + \frac{1}{r} (-Q_1 \sin \psi + Q_2 \cos \psi). \end{aligned} \quad (176)$$

Рассмотрим случай, когда обобщенные силы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \cos \psi - q_2 \sin \psi; \\ Q_2 &= q_1 \sin \psi + q_2 \cos \psi, \end{aligned}$$

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — стационарные случайные функции типа «белого шума». При этом выполняются условия

$$\begin{aligned} \langle q_1(t) \rangle &= \langle q_2(t) \rangle = 0; \\ \langle q_\alpha(t) q_\beta(t + \tau) \rangle &= s_{\alpha\beta} \delta(\tau), \end{aligned}$$

где $s_{\alpha\beta}$ — коэффициенты интенсивности. Для изотропных толчков коэффициенты интенсивности равны $s_{12} = s_{21} = 0$ и $s_{11} = s_{22} = s$.

Составим соответствующее уравнение Понтрягина

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \langle T \rangle - \gamma r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} - \\ - \gamma \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \psi} = -1. \end{aligned}$$

Кроме граничного условия $\langle T \rangle = 0$ при $r = R$ должно, очевидно, выполняться условие ограниченности функции $\langle T \rangle$ и ее первой производной при $r = 0$. Решение поставленной задачи не зависит от ψ и определяется при помощи квадратур. Введем безразмерное время $\theta = \gamma \langle T \rangle$ и безразмерную координату $\zeta = r/R$. Тогда решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \theta(\zeta) &= -2\mu \int_1^\zeta \left\{ \frac{1}{\psi} \exp \left[\mu \psi^2 \left(1 - \frac{1}{2} \psi^2\right) \right] \times \right. \\ &\times \int_0^\psi \eta \exp \left[-\mu \eta^2 \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2\right) \right] d\eta \Bigg\} d\psi. \end{aligned} \quad (177)$$

Здесь

$$\mu = \frac{\gamma R^2}{s^2} \quad (178)$$

— безразмерный параметр, имеющий тот же смысл, что и параметр (172) в предыдущей задаче.

Приближенное решение будем искать в виде ряда (168), полагая

$$\varphi_k = (1 - \tau^2)^{\tau^2(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

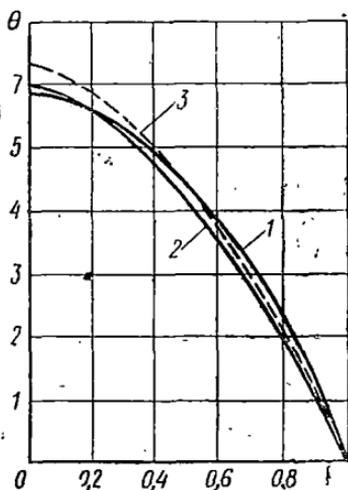


Рис. 81

Если взять один член ряда, то после соответствующих вычислений получим

$$\theta_1 = \frac{35\mu}{70 - 8\mu} \quad (179)$$

Учет двух членов ряда дает

$$\theta_1 = \frac{63(44 - \mu)\mu}{4(1386 - 213\mu + 8\mu^2)} \quad (180)$$

и так далее. Сопоставление результатов, которые дают формулы (179) (кривая 1) и (180) (кривая 2), с точным решением (177) (кривая 3), приведено на рис. 81 для $\mu = 5$.

Из разобранных примеров видно, что применение метода Бубнова-Галеркина дает надежные результаты при одном-двух членах ряда только в том случае, если уровень толчков, характеризуемый параметром μ , достаточно высок. Например, во второй задаче приближение с двумя членами ряда остается удовлетворительным вплоть до $\mu = 8$, т. е. до $\langle T \rangle \approx 25\tau$. (Здесь $\tau = 1/\gamma$ — характерное время системы). Но с увеличением числа членов ряда область применения приближенного решения довольно быстро расширяется. Этим рассматриваемая здесь задача отличается от общеизвестных задач прикладной теории упругости, в которых учет последующих членов ряда, как правило, не вносит существенных изменений. Сходное явление обнаружено ранее в математически аналогичной задаче о флаттере мембраны в сверхзвуковом потоке газа. По-видимому, в обеих задачах оказываются невыполненными условия известной теоремы, требующей полной непрерывности некоторых операторов.

Применим метод к механической системе с n степенями свободы. Движение этой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\rho_{\alpha} \ddot{u}_{\alpha} + 2\varepsilon_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} + h_{\alpha}(u_1, u_2, \dots, u_n) = q_{\alpha}(t); \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (181)$$

Здесь u_{α} — обобщенные координаты; ρ_{α} — инерционные коэффициенты; ε_{α} — коэффициенты демпфирования; h_{α} — некоторые, вообще говоря, нелинейные функции обобщенных координат; q_{α} — обобщенные силы. Пусть, далее, обобщенные силы являются стационарными случайными функциями времени типа «белого шума». При этом должны выполняться следующие условия:

$$\langle q_{\alpha}(t) \rangle = 0; \quad \langle q_{\alpha}(t) q_{\beta}(t + \tau) \rangle = s_{\alpha\beta} \delta(\tau),$$

где $s_{\alpha\beta}$ — некоторые постоянные. При введенных ограничениях совместная эволюция обобщенных координат и обобщенных скоростей будет представлять собой многомерный непрерывный марковский процесс, описываемый уравнением Колмогорова. А именно, полагая

$$u_{\alpha} = v_{\alpha}, \quad \dot{u}_{\alpha} = v_{n+\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

и обозначая $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$, получим, что переходная плотность вероятности $p(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0, t_0)$ должна удовлетворять уравнению (158) с интенсивностями:

$$r_{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{s_{\alpha-n, \beta-n}}{\rho_{\alpha-n} \rho_{\beta-n}} & \begin{cases} (n < \alpha \leq 2n) \\ (n < \beta \leq 2n) \end{cases} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (182)$$

$$r_{\alpha} = \begin{cases} v_{n+\alpha} & (\alpha \leq n); \\ \frac{2\varepsilon_{\alpha-n} v_{\alpha-n} + h_{\alpha-n}}{\rho_{\alpha-n}} & (n < \alpha \leq 2n). \end{cases}$$

В качестве примера задачи, которая приводит к уравнениям типа (181), можно указать на задачу о прощелкивании тонкой упругой криволинейной панели, нагруженной случайными силами (рис. 82). Дифференциальное уравнение, соответствующее простейшей модели такой панели, имеет вид [36, 37]

$$\rho \ddot{u} + 2\varepsilon u + \rho \omega_0^2 (u + \alpha u^2 + \beta u^3) = q(t). \quad (183)$$

Здесь $u(t)$ — обобщенная координата, характеризующая прогиб панели; ρ — инерционный коэффициент; ε — коэффициент демпфирования; ω_0 — частота собственных колебаний; α и β — некоторые постоянные. Если $\alpha > 0$,

$\beta > 0$, то система имеет единственное положение равновесия $u = 0$, и оно устойчиво. Если $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то система может иметь при положения равновесия (u_1, u_2, u_3), одно из которых $u = u_2$ неустойчиво, а два других — устойчивы (рис. 83). При этом нулевое положение рав-

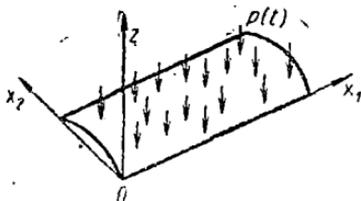


Рис. 82

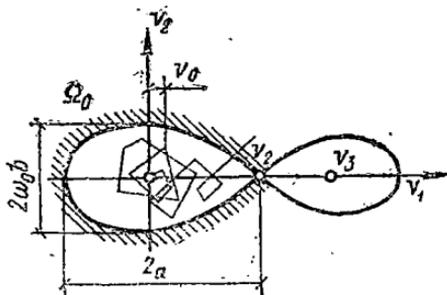


Рис. 83

новесия $u = u_3$ соответствует прощелкнутому состоянию панели. Относительно обобщенной силы $q(t)$, как и ранее, будем предполагать, что она является стационарной случайной функцией типа «белого шума» с интенсивностью s .

Рассмотрим задачу об определении среднего времени $\langle T \rangle$ выхода системы за пределы области, ограниченной петлей сепаратрисы, которая охватывает устойчивое нулевое положение равновесия [87]. Пространством качества в этом случае будет служить фазовая плоскость $v_1 = u$, $v_2 = \dot{u}$. Решение задачи сводится к интегрированию уравнения Понтрягина (166). Согласно формулам (182) найдем, что для уравнения (183)

$$x_{11} = x_{12} = x_{21} = 0; \quad x_{22} = \frac{s}{\rho^2};$$

$$x_1 = v_2, \quad x_2 = -\frac{2\varepsilon v_2}{\rho} - \omega_0^2 (v_1 + \alpha v_1^2 + \beta v_1^3).$$

Уравнение Понтрягина принимает вид

$$\frac{s}{2\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial v_2^2} + v_2 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial v_1} - \left[\frac{2\varepsilon}{\rho} v_2 + \omega_0^2 (v_1 + \alpha v_1^2 + \beta v_1^3) \right] \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial v_2} = -1. \quad (184)$$

Математическое ожидание $\langle T \rangle$ должно удовлетворять условию (167), где Γ — петля сепаратрисы (см. рис. 83).

Пусть $2a$ — длина отрезка, отсеченного указанной петлей сепаратрисы на оси v_1 , а $2\omega_0 b$ — наибольшая ширина в направлении оси v_2 . Тогда петлю сепаратрисы можно приближенно заменить эллипсом, центр которого находится в середине отрезка, отсеченного петлей на оси v_1 , а полуоси эллипса равны a и $\omega_0 b$. Обозначим координату центра эллипса через v_0 . Вводя новые переменные

$$\zeta_1 = \frac{v_1 - v_0}{a}; \quad \zeta_2 = \frac{v_2}{\omega_0 b}; \quad \tau = \omega t; \quad \theta = \omega_0 \langle T \rangle,$$

преобразуем уравнение (184) к виду

$$\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta_2^2} + \gamma^2 \zeta_2 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} - (\lambda \zeta_2 + f_0 + f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_1^2 + f_3 \zeta_1^3) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} = -\gamma. \quad (185)$$

Здесь и в дальнейшем введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\varepsilon\gamma}{\rho\omega_0}; \quad \gamma = \frac{b}{a}; \\ f_0 &= \frac{v_0}{a} \left(1 + \frac{\alpha v_0}{a^2} + \frac{\beta v_0^2}{a^3} \right); \\ f_1 &= 1 + \frac{2\alpha v_0}{a^2} + \frac{3\beta v_0^2}{a^3}; \\ f_2 &= \frac{\alpha}{a} + \frac{3\beta v_0}{a^3}; \quad f_3 = \frac{\beta}{a^3}. \end{aligned}$$

В качестве параметра, аналогичного параметру μ , который был введен по формулам (172) и (178), здесь взят параметр

$$\mu = \frac{\rho^2 \omega_0^2 ab}{s},$$

пропорциональный отношению характерной площади области $ab\omega_0$ к средней площади размыва $s/\rho^2\omega_0^2$ за характерное время $\tau \approx 1/\omega_0$.

После выполненных преобразований эллипс, аппроксимирующий соответствующую петлю сепаратрисы, превращается в окружность единичного радиуса. Для удобства дальнейших вычислений перейдем к полярным

координатам r, ψ , положив $\zeta_1 = r \cos \psi, \zeta_2 = r \sin \psi$.
Вместо (185) получаем уравнение

$$\frac{1}{2\mu} \left(\sin^2 \psi \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\psi}{r} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial \psi} + \frac{\cos^2 \psi}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right) - R(r, \psi) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \Psi(r, \psi) \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\gamma. \quad (186)$$

Здесь

$$R(r, \psi) = \frac{\lambda r}{2} - \frac{1}{4\mu r} - \frac{1}{2} \left(\lambda r + \frac{1}{2\mu r} \right) \cos 2\psi + \left(f_0 + \frac{f_2 r^2}{4} \right) \sin \psi + \\ + \frac{1}{2} \left[r(f_1 - \gamma^2) + \frac{f_3 r^3}{2} \right] \sin 2\psi + \frac{f_2 r^2}{4} \sin 3\psi + \frac{f_3 r^3}{8} \sin 4\psi; \\ \Psi(r, \psi) = \frac{3}{8} f_3 r^2 + \frac{1}{2} (f_1 + \gamma^2) + \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\mu r^2} \right) \sin 2\psi + \\ + \left(\frac{f_0}{r} + \frac{3f_2 r}{4} \right) \cos \psi + \frac{1}{2} (f_3 r^2 + f_1 - \gamma^2) \cos 2\psi + \\ + \frac{f_2 r}{4} \cos 3\psi + \frac{f_3 r^2}{8} \cos 4\psi.$$

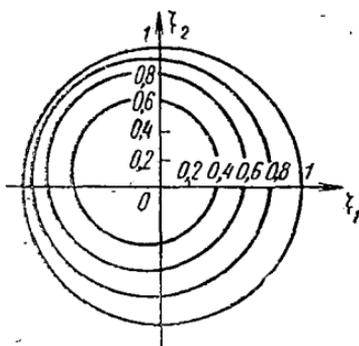


Рис. 84

Решение уравнения (186) должно удовлетворять граничному условию $\Theta(1, \psi) = 0$, а также условиям непрерывности и двукратной дифференцируемости внутри области. Этим условиям удовлетворяет разложение

$$\theta(r, \psi) = \sum_j \sum_k \theta_{jk} \psi_{jk}. \quad (187)$$

где

$$\psi_{jk} = \frac{1}{2} (1-r^2) r^{2(j-1)} \left\{ [1 + (-1)^k] r^k \sin \frac{k\psi}{2} + [1 - (-1)^{k-1}] r^{k-1} \cos \frac{(k-1)\psi}{2} \right\}.$$

Ограничимся при вычислениях первыми четырьмя членами ряда (187):

$$\theta = \theta_{11}(1-r^2) + \\ + \theta_{12}(1-r^2)r^2 + \\ + \theta_{21}(1-r^2)r^2 \sin \psi + \\ + \theta_{22}(1-r^2)r^2 \cos \psi.$$

Коэффициенты разложения определяются из системы уравнений типа (169). На рис. 84 показаны изохроны — геометрические места точек на фазовой плоскости, соответствующие равному среднему времени достижения границы. Изохроны построены при следующих значениях параметров: $\mu = 5,0$; $\lambda = 0,05$; $\alpha = -1,1$; $\beta = 0,26$; $a = 0,63$; $v_0 = 0,37$; $b = 0,113$. Из графиков видно, что изохроны смещены в направлении биссектрисы второго квадранта фазовой плоскости. Отсюда следует, что среднее время достижения границы для изображаемой точки, находящейся при $t = 0$ во втором квадранте, превышает соответствующее время выхода на границу из точек, расположенных симметрично в других квадрантах фазовой плоскости.

Аналогичный прием можно использовать для нахождения приближенных решений уравнения (160) с дополнительными условиями (161) и (162). Эти решения ищутся в виде

$$P(t) | v_0 = \sum_{k=1}^n f_k(t) \varphi_k(v_0),$$

где в отличие от ряда (168) коэффициентами служат неизвестные функции времени $f_k(t)$. Подстановка этого ряда в уравнение (160) приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, которые интегрируются, например, численно при начальных условиях, вытекающих из (161). Реализацию такого приема можно найти в статье [32].

§ 3.10. Кумулятивные методы отказов

Как известно, подавляющее большинство отказов сооружений и машин связано с постепенным накоплением повреждений: пластических деформаций, усталостных повреждений, износа и т. п. Математическим отражением этого факта могут служить кумулятивные модели отказов, которые описывают квазимонотонное ухудшение параметров качества системы, происходящее в процессе ее эксплуатации и взаимодействия с окружающей средой [14, 16].

Понятие кумулятивной модели введем следующим образом. Пусть допустимая область Ω_0 является вышуклым телом в n -мерном евклидовом пространстве V в том смысле, что для любых двух элементов $v_1, v_2 \in \Omega_0$

выполняется условие $cv_1 + (1-c)v_2 \in \Omega_0$ при любом $0 < c < 1$. Пусть, далее, точка $v = 0$ принадлежит области Ω_0 . Тогда условие $v \in \Omega_0$ может быть представлено в виде

$$\|v\| < 1, \quad (188)$$

где $\|v\|$ — надлежащим образом выбранная норма в пространстве V . Для построения $\|v\|$ можно, например, применить следующий способ. Пусть луч, проведенный из точки $v = 0$ через точку $v \neq 0$, пересекает поверхность Γ в точке v_Γ . Тогда

$$\|v\| = \frac{|v|}{|v_\Gamma|}, \quad (189)$$

где $|v|$ — длина вектора v . Для допустимой области в виде симметричного прямоугольного параллелепипеда $|v_j| < v_{j*} (j=1, \dots, n)$

$$\|v\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{|v_1|}{v_{1*}}, \dots, \frac{|v_n|}{v_{n*}} \right\}.$$

Для симметричного эллипсоида с центром в начале координат и с полуосями v_{j*} аналогично получаем

$$\|v\| = \left[\left(\frac{v_1}{v_{1*}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{v_n}{v_{n*}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

и так далее.

Рассмотрим теперь случайный процесс $v(t)$, заданный на отрезке времени T . Этот процесс будем называть кумулятивным на отрезке T , если для любых $t_1, t_2 \in T$ выполняется условие

$$\|v(t_2)\| \geq \|v(t_1)\| \quad (t_2 > t_1). \quad (190)$$

Примером кумулятивного процесса может служить любой процесс накопления повреждений, происходящий без естественного или искусственного (ремонт, восстановление) залечивания. Так, согласно линейной модели накопления усталостных повреждений [17] условие разрушения вводится как

$$\sum \frac{n(s_j)}{N(s_j)} = 1. \quad (191)$$

Здесь $n(s_j)$ — число циклов нагружения в условиях эксплуатации с характерным параметром нагрузки s_j (например, максимальным напряжением цикла); $N(s_j)$ — предельное число циклов при программных

испытаниях с заданным характерным параметром s_j суммирование проводится по всем повреждающим циклам. Условие (191) соответствует использованию меры повреждения v , равной нулю для неповрежденного элемента и единице — для разрушенного элемента; промежуточные значения определяются соотношением

$$v = \sum_j \frac{n(s_j)}{N(s_j)} \quad (192)$$

В более общем случае, когда учитывается зависимость процесса накопления повреждений от истории нагружения, мера повреждения вводится как

$$v_j = v_{j-1} + \omega(s_j, v_{j-1}) \quad (193)$$

($j = 1, 2, \dots$),

где $\omega(s_j, v_{j-1}) \geq 0$ есть повреждение, вносимое j -м циклом нагружения при условии, что к началу этого цикла достигнуто значение v_{j-1} . Непрерывный аналог соотношения (193) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = f[s(t), v], \quad (194)$$

где мера повреждения $v(t)$ оказывается управляемой при помощи случайного процесса $s(t)$, описывающего условия эксплуатации и взаимодействия системы с окружающей средой.

Основное свойство кумулятивных моделей устанавливается условием (190). Согласно этому условию вектор качества системы квазимоноotonно приближается к границе допустимой области, так что вероятность его невыхода из допустимой области на любом отрезке $[t_1, t_2]$ совпадает с вероятностью нахождения его в этой области в момент t_2 . Отсюда функция надежности

$$P(t) = P\{v(\tau) \in \Omega_0; \tau \in [t_0, t]\} = P\{v(t) \in \Omega_0\}. \quad (195)$$

Поэтому определение характеристик надежности и долговечности для многих типов кумулятивных моделей оказывается много проще. Но, вообще говоря, использование кумулятивных моделей не может снять полностью проблему отыскания вероятности первого выброса. Пусть, например, процесс нагружения — немонотонный, и пусть за меру повреждения $v(t)$ принята остаточная пластическая деформация. Величина эта в существенной степени зависит от экстремальных значений процес-

са нагружения $s(t)$, которые достигаются на отрезке $[t_0, t]$. Таким образом, чтобы найти распределение меры повреждений на конце этого отрезка, требуется изучение процессов $s(t)$ и $v(t)$ на всем отрезке.

Значительные упрощения можно получить, используя аддитивный характер последовательностей типа (193) или ее аналогов — случайных процессов, определяемых уравнениями типа (194). Если для суммы (193) или для интеграла уравнения (194) выполняются условия центральной предельной теоремы, то значения меры повреждения будут распределены асимптотически нормально. Тогда функция надежности (195) будет полностью определяться значениями математического ожидания $\langle v(t) \rangle$ и корреляционной матрицы процесса $K_v(t_1, t_2)$.

В виде простейшей модели возьмем континуальный аналог закона линейного суммирования повреждений (192)

$$\frac{dv}{dt} = f(t). \quad (196)$$

Здесь $f(t)$ — повреждение, накапливаемое в единицу времени (стационарная случайная функция времени). При выполнении условий центральной предельной теоремы значения процесса $v(t)$ при временах t , больших по сравнению с временем корреляции процесса $f(t)$, будут распределены по закону, близкому к нормальному¹:

$$p(v, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v(t)}} \exp \left\{ -\frac{[v - \langle v(t) \rangle]^2}{2\sigma_v^2(t)} \right\}. \quad (197)$$

Связь между вероятностными характеристиками процессов $v(t)$ и $f(t)$ при условии, что $v(t_0) = v_0$, дается соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= v_0 + \int_{t_0}^t \langle f(\tau) \rangle d\tau, \\ K_v(t_1, t_2) &= \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_{t_0}^{t_2} K_f(t', t'') dt''. \end{aligned} \quad (198)$$

¹ Точную формулировку центральной предельной теоремы применительно к уравнению (196) можно найти в книге Ибрагимова И. А., Линника Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., Наука, 1965.

В частности, если $f(t)$ — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $K_f(\tau)$, то для дисперсии процесса $v(t)$ получаем формулу

$$\sigma_v^2(t) = 2 \int_{t_0}^{t-t_0} (t-t_0-\tau) K_f(\tau) d\tau. \quad (199)$$

Из (196) и (198) следует, что математическое ожидание меры повреждений, найденное при условии, что $v(t_0) = v_0$, меняется во времени по закону

$$\langle v \rangle = v_0 + \mu(t-t_0), \quad (200)$$

где $\mu = \langle f \rangle$. Закон изменения дисперсии во времени зависит от свойств корреляционной функции $K_f(\tau)$. Однако если характерное время τ_0 корреляции процесса $f(t)$ мало по сравнению с длиной интервала $[t_0, t]$, то можно приближенно принять

$$\int_{t_0}^{t-t_0} (t-t_0-\tau) K_f(\tau) d\tau \approx (t-t_0) \int_0^{\infty} K_f(\tau) d\tau.$$

Тогда дисперсия процесса $v(t)$ также изменяется во времени по линейному закону

$$\sigma_v^2 \approx \nu(t-t_0), \quad (201)$$

где ν — некоторая постоянная.

Пусть для процесса $f(t)$ выполнены условия центральной предельной теоремы. Тогда для значений этого процесса при $t-t_0$, достаточно больших по сравнению с характерным временем корреляции процесса $f(t)$, получаем асимптотическое представление (197). При $\Omega_0 = \{v: v < v_*\}$ функция надежности (195) представляется в виде

$$P(t) \approx \Phi \left[\frac{v_* - v_0 - \mu(t-t_0)}{\sqrt{\nu(t-t_0)}} \right]. \quad (202)$$

В качестве примера рассмотрим вычисление функции надежности для системы, внешнее воздействие на которую представляет собой узкополосный стационарный гауссовский процесс $s(t)$, а долговечность определяется согласно линейной модели суммирования усталостных повреждений (192). Пусть число циклов до разрушения достаточно велико. Переходя в формуле

(192) от суммирования к интегрированию по времени t , получим после осреднения

$$\langle v \rangle = \frac{\omega_e t}{2\pi} \left\langle \frac{1}{N(s)} \right\rangle \quad (203)$$

Здесь ω_e — эффективная частота процесса; s — максимальное напряжение циклов. Поскольку кривая усталости $N = N(s)$ взята для фиксированного экземпляра конструкции, то формула (203) описывает накопление повреждений в этом экземпляре. Характеристическое значение условной долговечности T_c найдем с учетом (203) из условия, что $\langle v \rangle = 1$. Отсюда

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_e} \left\langle \frac{1}{N_s} \right\rangle^{-1},$$

или, после введения плотности вероятности максимумов $p(s)$ процесса $s(t)$,

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_e} \left[\int_0^{\infty} \frac{p(s) ds}{N(s)} \right]^{-1} \quad (204)$$

Вообще говоря, мера повреждения $v(t)$ является случайной функцией, а показатель долговечности T — случайной величиной (рис. 85). Однако чем больше чис-

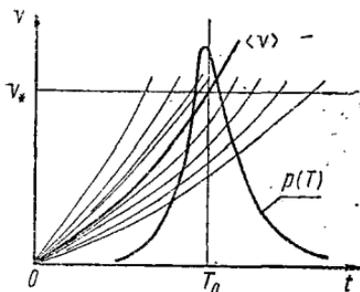


Рис. 85

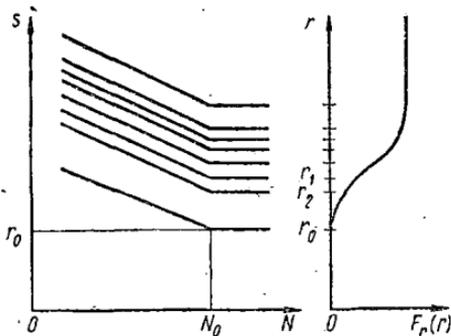


Рис. 86

ло циклов до разрушения, тем меньше относительная изменчивость условной долговечности. Поэтому в первом приближении примем, что

$$p(T) = \delta(T - T_c)$$

(см. аналогичные соображения в § 4.5).

Переходим к вычислениям. Выражение для кривой усталости возьмем в виде

$$N = \begin{cases} N_0 \left(\frac{r}{s} \right)^m & (s \geq r), \\ \infty & (s < r), \end{cases} \quad (205)$$

где N_0 — число циклов, соответствующее перелому на кривой усталости; m — положительный показатель степени; r — характерное значение параметра прочности (предел выносливости). Параметры N_0 и m будем считать детерминистическими, а параметр r — случайной величиной. Семейство кривых усталости (205) в логарифмической шкале показано на рис. 86.

Плотность вероятности максимумов узкополосного гауссовского процесса $s(t)$ с математическим ожиданием, равным нулю, определяется согласно формуле (93) как

$$p(s) = \frac{s}{\sigma_s^2} \exp \left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2} \right) \quad (s > 0). \quad (206)$$

Подставляя выражения (205) и (206) в формулу (204), получим

$$T_c(r) = \frac{2\pi N_0}{\omega_e} r m \sigma_s^2 \left[\int_r^\infty s^{m+1} \exp \left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2} \right) ds \right]^{-1}.$$

Интеграл в правой части выражается через функцию χ -распределения Пирсона или через неполную гамма-функцию. Окончательно получаем [14]

$$T_c(r) = \frac{2\pi N_0}{\omega_e} \left(\frac{r}{\sigma_s} \right)^m \frac{1}{2^{m/2} \Gamma \left[1 + \frac{m}{2}, \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma_s} \right)^2 \right]}. \quad (207)$$

Условная функция надежности в рамках сделанных гипотез определяется по формуле

$$P_0(t | r) = 1 - \eta[t - T_c(r)], \quad (208)$$

где $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

Чтобы найти полную функцию надежности, используем формулу типа (36). Нетрудно показать, что если

условная функция надежности имеет вид (208), то полная функция надежности определяется как

$$P(t) = 1 - F_r[r_c(t)]. \quad (209)$$

Здесь $F_r(r)$ — функция распределения параметра r ; $r_c(t)$ — корень уравнения

$$T_c(r) = t. \quad (210)$$

Формулы (208) и (209) не учитывают влияния разброса реализаций процесса $s(t)$. Для приближенного учета этого разброса можно воспользоваться асимптотическим распределением (202)

$$P_0(t | r) \approx \Phi \left[\frac{1 - \mu(r)}{\sqrt{\nu(r)t}} \right].$$

При этом оказывается, что $\mu(r) = 1/T_c(r)$, где $T_c(r)$ — характеристическая долговечность (204). Для вычисления параметра $\nu(r)$ нужно знать корреляционную функцию процесса $s(t)$. Не останавливаясь на подробностях, приведем ориентировочный критерий возможности пренебречь разбросом процесса $s(t)$:

$$\left(\frac{\tau_0}{T_e} \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_s}{r} \right)^{m/2} 2^{m/4} \left[\frac{\Gamma(1+m) - \Gamma^2(1+m/2)}{\Gamma(1+m/2)} \right]^{1/2} \ll 1.$$

Здесь τ_0 — характерное время корреляции процесса $s(t)$, $T_e = 2\pi/\omega_e$.

§ 3.11. Основы теории надежности распределенных систем

Расчет надежности распределенных систем требует распространения теории случайных выбросов на случайные поля и случайные пространственно-временные процессы. Эта область теории случайных функций разработана весьма слабо. Обзор исследований, относящихся к статистике морского волнения, содержится в статье Лонге-Хиггинса [107]. Некоторые результаты были получены Ю. К. Беляевым [4]. Применение методов теории случайных полей к задачам надежности распределенных систем было дано впервые в статье [25]. Изложение в данном параграфе в основном следует этой статье. Вначале рассмотрим n -мерное, не зависящее от времени скалярное случайное поле $\nu(\mathbf{r})$, заданное в области G . Примером может служить поле перемещений в тонкой пластине, поле интенсивности напряжений

(второго инварианта девиатора напряжений) в трехмерном теле и т. п. Поле $v(\mathbf{r})$ будем считать дифференцируемым по каждой из координат x_1, x_2, \dots, x_n . Предположим, что допустимые состояния удовлетворяют условию $v(\mathbf{r}) < v_*$, где v_* — некоторая величина из области возможных значений поля. Мера надежности оказывается в этом случае функцией области G и вводится следующим образом:

$$P(G) = P \left[\sup_{\mathbf{r} \in G} v(\mathbf{r}) < v_* \right]. \quad (211)$$

Для получения оценок надежности $P(G)$ применим способ, аналогичный тому, который использовался ранее в теории надежности дискретных систем. Выделим в объеме G множество точек, для которых $v(\mathbf{r}) > v_*$. Совокупности этих точек образуют подмножества $G_1(v_*)$, $G_2(v_*)$, ... множества G . Эти подмножества будем называть выбросами поля $v(\mathbf{r})$ за уровень v_* (рис. 87). Математическое ожидание числа выбросов за уровень v_* в единице объема обозначим через $\nu_+(v_*; \mathbf{r})$. Математическое ожидание числа выбросов в объеме G вводится как

$$N_+(v_*; G) = \int_G \nu_+(v_*; \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (212)$$

где $d\mathbf{r} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Вычислив значение $N_+(v_*; G)$, далее можем применить оценки типа (100), (106) и т. д. для функции надежности $P(G)$. В самом деле, строгая оценка снизу выражается через математическое ожидание числа выбросов в объеме G следующим образом:

$$P(G) \geq 1 - N_+(v_*; G). \quad (213)$$

Если поле $v(\mathbf{r})$ достаточно перемешанное, а уровень v_* достаточно высок, то выполняется асимптотическое соотношение

$$P(G) \approx \exp[-N_+(v_*; G)]. \quad (214)$$

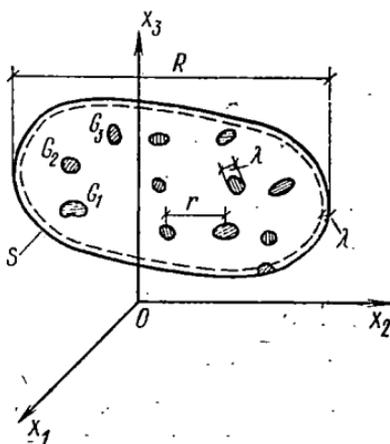


Рис. 87

В случае $n = 1$ математическое ожидание числа выбросов определяется по формулам (49) и (50). Обобщение этих формул на случай $n > 1$ встречает затруднения. Если поле $v(\mathbf{r})$ является дважды дифференцируемым по любой из координат, то целесообразно заменить формулы (213) и (214) аналогичными формулами, содержащими математическое ожидание числа максимумов. Действительно, в пределах одного выброса за уровень v_* содержится хотя бы один максимум. Отсюда математическое ожидание $N_{\max}(v_*; G)$ числа максимумов в объеме G , превышающих уровень v_* , связано с числом выбросов $N_+(v_*; G)$ соотношением

$$N_{\max}(v_*; G) \geq N_+(v_*; G). \quad (215)$$

Учитывая формулы (213) и (214), получим для показателя надежности $P(G)$ строгую оценку снизу:

$$P(G) \geq 1 - N_{\max}(v_*; G). \quad (216)$$

Если уровень v_* достаточно высок, то можно ожидать, что в пределах каждого выброса будет, как правило, не больше одного максимума. При этих условиях приближенное равенство имеет вид

$$N_{\max}(v_*; G) \approx N_+(v_*; G). \quad (217)$$

Это соотношение может быть использовано для вычисления функции надежности высоконадежных систем. Из формулы (217) получаем

$$P(G) \approx 1 - N_{\max}(v_*; G). \quad (218)$$

Формула (214) принимает вид

$$P(G) \approx \exp[-N_{\max}(v_*; G)]. \quad (219)$$

В оценках (215) и (216), а также в приближенных формулах (218) и (219) в общее число максимумов включались максимумы, достигаемые на границе области G . Если поле однородно, а характерный размер выбросов $\lambda(v_*)$ мал по сравнению с характерным размером области G (рис. 87), то доля максимумов, достигаемых на границе, будет достаточно мала. В самом деле, математическое ожидание числа выбросов, расположенных в области G , имеет порядок отношения объема области к объему, приходящемуся на один выброс. Отсюда

$$N_+(v_*; G) \sim (R/r)^n,$$

где r — характерное расстояние между выбросами; n — число измерений пространства. В то же время математическое ожидание числа выбросов, выходящих на поверхность S , имеет порядок отношения объема поверхностного слоя толщиной λ к характерному объему одного выброса:

$$N_{+}(v_{*}; S) \sim \frac{\lambda R^{n-1}}{r^n} \sim \frac{\lambda}{R} N_{+}(v_{*}; G).$$

При достаточно высоком уровне v_{*} имеет место соотношение $\lambda(v_{*}) \ll R$, откуда $N_{+}(v_{*}; S) \ll N_{+}(v_{*}; G)$ *.

В дальнейшем под $N_{\max}(v_{*}; G)$ будем подразумевать математическое ожидание числа внутренних (аналитических) максимумов поля $v(r)$ в объеме G . При таком истолковании строгие оценки (215) и (216), вообще говоря, утрачивают смысл. Однако сохраняют смысл приближенная формула (217) для числа редких выбросов, а также основанные на ней приближенные формулы (218) и (219) для функции надежности высоконадежных систем.

Остановимся на методах вычисления математического ожидания числа $v_{\max}(v_{*}; r)$ аналитических максимумов поля в единице объема. Это число связано с $N_{\max}(v_{*}; G)$ формулой

$$N_{\max}(v_{*}; G) = \int_G v_{\max}(v_{*}; r) dr. \quad (220)$$

Вычислим математическое ожидание числа $v_{\max}(v_{*}; r)$ максимумов в единице объема. Получаем соотношение

$$v_{\max}(v_{*}; r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{P_1(v_{*}; \Delta r)}{\Delta r}, \quad (221)$$

аналогичное соотношению (70). Здесь $P_1(v_{*}; \Delta r)$ — вероятность случайного события, состоящего в том, что внутри параллелепипеда объемом $\Delta r = \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ окажется один максимум, превышающий уровень v_{*} . Условие $\Delta r \rightarrow 0$ следует понимать в том смысле, что длины сторон параллелепипеда $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ имеют

* Предполагается, что характерные размеры выбросов по всем направлениям имеют одинаковый порядок. Примером поля противоположного типа может служить совокупность плоских параллельных волн, т. е. поле с волновыми числами $k_1 \neq 0, k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$. Если G — ограниченная область, то любой выброс этого поля выходит на поверхность S .

одинаковый порядок $\Delta r \rightarrow 0$, т. е. равномерно стремятся к нулю.

Введем обозначение для n -мерного вектора $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, где $\varphi_j = dv/dx_j$. Далее, введем матрицу \mathbf{H} размерностью $n \times n$ с элементами

$$x_{jk} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Эта матрица, очевидно, будет симметричной. Из элементов матрицы \mathbf{H} , не равных между собой тождественно, образуем вектор κ . Обозначим через $K_{(+)}$ множество векторов κ , которым соответствует положительно определенная матрица \mathbf{H} , а через $K_{(-)}$ — множество векторов, которым соответствует отрицательно определенная матрица \mathbf{H} . Вероятность $P_1(v_*, \Delta r)$ записывается следующим образом:

$$P_1(v_*; \Delta r) = P \left[\begin{array}{l} v_* - \Delta v \leq v(\rho) < \infty \\ \varphi(\rho) \in \Delta \varphi \\ \kappa(\rho) \in K_{(-)} \\ \rho \in \Delta r \end{array} \right].$$

Здесь $\Delta v = O(\Delta r)$, $\Delta \varphi$ — параллелепипед в пространстве φ , включающий точку $\varphi = 0$ и имеющий стороны

$$\Delta \varphi_j = \sum_{k=1}^n x_{jk} \Delta x_k + o(\Delta r); \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Объем этого параллелепипеда, очевидно, будет

$$\Delta \varphi = |\det \mathbf{H}| \Delta r + o(\Delta r^n).$$

Пусть задана совместная плотность вероятности для полей $v(\mathbf{r})$, $\varphi(\mathbf{r})$, $\kappa(\mathbf{r})$:

$$p(v, \varphi, \kappa; \mathbf{r}) \equiv p(v; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \kappa_{11}, \kappa_{12}, \dots, \kappa_{nn}; \mathbf{r}).$$

Вероятность $P_1(v_*; \Delta r)$ выражается через эту плотность вероятности следующим образом:

$$P_1(v_*; \Delta r) = \int_{\kappa \in K_{(-)}} d\kappa \int d\varphi \int_{v_* - \Delta v}^{\infty} p(v, \varphi, \kappa; \mathbf{r}) dv.$$

При достаточно малом объеме Δr и медленно меняющейся подынтегральной функции правая часть этой

формулы может быть упрощена. В самом деле, можем написать, что

$$\int_{\Delta\varphi} \Phi(\varphi) d\varphi = \Phi(0) |\det H| \Delta\tau + o(\Delta\tau^n).$$

Формула для вероятности обнаружения аналитического максимума принимает вид

$$P_1(v_*, \Delta\tau) = \Delta\tau \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{x \in K(-)} p(v, 0, x; \tau) |\det H| dx + o(\Delta\tau^n).$$

Подставляя это выражение в формулу (221) и переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим окончательную формулу [4, 107]

$$v_{\max}(v_*; \tau) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{x \in K(-)} p(v, 0, x; \tau) |\det H| dx. \quad (222)$$

Из формулы (222) легко выводятся другие формулы, относящиеся к распределению максимумов случайного поля. Так, для полного числа максимумов в единице объема

$$v_{\max}(-\infty; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{x \in K(-)} p(v, 0, x; \tau) |\det H| dx.$$

Плотность вероятности максимумов определяется как

$$p_{\max}(v_*; \tau) = - \frac{1}{v_{\max}(-\infty; \tau)} \frac{\partial v_{\max}(v_*; \tau)}{\partial v_*}.$$

Подставляя сюда выражение (222), получим формулу

$$p_{\max}(v_*; \tau) = \frac{1}{v_{\max}(-\infty; \tau)} \int_{x \in K(-)} p(v_*, 0, x; \tau) |\det H| dx$$

и т. д. Аналогично выводится соотношение для минимумов случайного поля. Так, математическое ожидание

числа минимумов в единице объема, превышающих уровень v_* , дается выражением

$$v_{\min}(v_*; r) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{x \in K(+)} p(v_*; 0, x; r) |\det H| dx.$$

Применим формулу (222) для вычисления математического ожидания числа максимумов двухмерного случайного поля. Пусть $n = 2$. Тогда $x \in K(-)$, если выполняются условия

$$x_{11} < 0, x_{22} < 0, \det H = x_{11} x_{22} - x_{12}^2 > 0.$$

Формула (222) принимает вид

$$v_{\max}(v_*) = \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{-\infty}^0 dx_{11} \int_{-\infty}^0 dx_{22} \int_{-\sqrt{x_{11}x_{22}}}^{\sqrt{x_{11}x_{22}}} (x_{11}x_{22} - x_{12}^2) \times \\ \times p(v, 0, 0, x_{11}, x_{22}, x_{12}) dx_{12}. \quad (223)$$

Рассмотрим в качестве примера однородное гауссовское поле $v(x_1, x_2)$ с математическим ожиданием, равным нулю, и спектральной плотностью $S_v(k_1, k_2)$. Введем шестимерный вектор $u = \{v, \varphi_1, \varphi_2, x_{11}, x_{22}, x_{12}\}$. Совместная плотность вероятности компонент этого вектора записывается в виде

$$p(u) = \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{|\det K|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{\beta=1}^6 L_{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta}\right). \quad (224)$$

Здесь K — шестимерная квадратная матрица с элементами

$$K_{\alpha\beta} = \langle u_{\alpha}^* u_{\beta} \rangle,$$

а $L = K^{-1}$. Принимая во внимание формулу

$$\left\langle \frac{\partial^{\alpha} v^*}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \cdot \frac{\partial^{\beta} v}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}} \right\rangle = \\ = (-1)^{\alpha} i^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(k_1, k_2) k_1^{\alpha_1+\beta_1} k_2^{\alpha_2+\beta_2} dk_1 dk_2,$$

связывающую моменты второго порядка от производных поля $v(\mathbf{r})$ со спектральной плотностью этого поля, легко выразим элементы матрицы K через дисперсии

функций v , φ_1 , φ_2 , χ_{11} , χ_{22} и χ_{12} . В этой формуле $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$. В результате получаем

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 & 0 & -\sigma_{\varphi_1}^2 & -\sigma_{\varphi_2}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi_2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{\varphi_1}^2 & 0 & 0 & \sigma_{\chi_{11}}^2 & \sigma_{\chi_{12}}^2 & 0 \\ -\sigma_{\varphi_2}^2 & 0 & 0 & \sigma_{\chi_{12}}^2 & \sigma_{\chi_{22}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\chi_{12}}^2 \end{bmatrix} \quad (225)$$

Мы видим, что часть элементов матрицы K обращается в нуль. Например,

$$\langle v^* \varphi_1 \rangle = i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(k_1, k_2) k_1 dk_1 dk_2 = 0$$

вследствие соотношения $S_v(k_1, k_2) = S_v(-k_1, k_2)$. Далее,

$$\langle \varphi_1^* \chi_{12} \rangle = i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(k_1, k_2) k_1^2 k_2 dk_1 dk_2 = 0$$

вследствие соотношения $S_v(k_1, k_2) = S_v(k_1, -k_2)$ и т. д. В результате совместная плотность вероятности (224) представляется в виде произведения трех плотностей вероятности

$$p(u) = p_1(v, \chi_{11}, \chi_{22}) p_2(\varphi_1, \varphi_2) p_3(\chi_{12}),$$

а основная формула (223) принимает вид

$$v_{\max}(v_*) = p_2(0, 0) \int_{v_*}^0 dv \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(\chi_{11}, \chi_{22}) p_1(v, \chi_{11}, \chi_{22}) d\chi_{11} d\chi_{22}. \quad (226)$$

При этом использовано обозначение

$$f(\chi_{11}, \chi_{22}) = \int_{-\sqrt{\chi_{11}\chi_{22}}}^{\sqrt{\chi_{11}\chi_{22}}} (\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}^2) p_3(\chi_{12}) d\chi_{12}. \quad (227)$$

Для плотности вероятности $p_1(v, \chi_{11}, \chi_{22})$ имеем выражение типа (224)

$$p(u) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det A}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 B_{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} \right). \quad (228)$$

Здесь $\mathbf{u} = (v, \kappa_{11}, \kappa_{22})$; \mathbf{A} — матрица, составленная из соответствующих элементов матрицы \mathbf{K} , т. е.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & -\sigma_{\varphi_1}^2 & -\sigma_{\varphi_2}^2 \\ -\sigma_{\varphi_1}^2 & \sigma_{\kappa_{11}}^2 & \sigma_{\kappa_{12}}^2 \\ -\sigma_{\varphi_2}^2 & \sigma_{\kappa_{12}}^2 & \sigma_{\kappa_{22}}^2 \end{bmatrix}; \quad (229)$$

\mathbf{B} — соответствующая обратная матрица. Как видно из формулы (225), компоненты φ_1 и φ_2 стохастически независимы. Отсюда для совместной плотности вероятности производных поля $v(x_1, x_2)$ получаем формулу

$$p_2(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\varphi_1}\sigma_{\varphi_2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_1^2}{\sigma_{\varphi_1}^2} + \frac{\varphi_2^2}{\sigma_{\varphi_2}^2} \right) \right].$$

Наконец, для смешанной второй производной κ_{12} имеем распределение

$$p_3(\kappa_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\kappa_{12}}} \exp \left(-\frac{\kappa_{12}^2}{2\sigma_{\kappa_{12}}^2} \right). \quad (230)$$

Вычислим функцию $f(\kappa_{11}, \kappa_{22})$, входящую в правую часть формулы (226). Согласно соотношению (227)

$$f(\kappa_{11}, \kappa_{22}) = \kappa_{11}\kappa_{22} \int_{-\sqrt{\kappa_{11}\kappa_{22}}}^{\sqrt{\kappa_{11}\kappa_{12}}} p_2(\kappa_{12}) d\kappa_{12} - \int_{-\sqrt{\kappa_{11}\kappa_{22}}}^{\sqrt{\kappa_{11}\kappa_{22}}} p_3(\kappa_{12}) \kappa_{12}^2 d\kappa_{12}.$$

Подставляя сюда выражение для $p_3(\kappa_{12})$ согласно формуле (230) и замечая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi_1(u);$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \text{prg}_3(u),$$

где $\Phi_1(u)$ — интеграл Лапласа, а $\text{prg}_n(u)$ — функция χ -распределения Пирсона

$$\text{prg}_n(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_u^\infty x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

получаем

$$f(x_{11}, x_{22}) = x_{11} x_{22} \Phi_1 \left(\frac{\sqrt{x_{11} x_{22}}}{\sigma_{x_{12}}} - \sigma_{x_{12}}^2 \left[1 - \operatorname{prgs} \left(\frac{\sqrt{x_{11} x_{22}}}{\sigma_{x_{12}}} \right) \right] \right). \quad (231)$$

С учетом формулы (226) выражение для среднего числа максимумов (226) принимает вид

$$\nu_{\max}(v_*) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\varphi_1}\sigma_{\varphi_2}} \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(x_{11}, x_{22}) p_1(v, x_{11}, x_{22}) dx_{11} dx_{22}. \quad (232)$$

Таким образом, определение среднего числа максимумов поля $v(x_1, x_2)$ сводится к вычислению кратных квадратур от произведения функции (227) на совместную плотность вероятности (228) поля и его вторых производных. Эти вычисления уже не могут быть проделаны в общем виде. Но при некоторых частных предположениях (например, при предположении об узкополосности поля) аналитические трудности могут быть преодолены. В дальнейшем остановимся подробнее на случае узкополосного поля.

Пусть спектральная плотность $S_v(k_1, k_2)$ имеет вид

$$S_v(k_1, k_2) = \frac{\sigma_v^2}{4} \delta(|k_1| - k_1^0) \delta(|k_2| - k_2^0), \quad (233)$$

где k_1^0 и k_2^0 — волновые числа, в окрестности которых сосредоточена энергия поля. Непосредственные операции со спектральной плотностью (233) приводят к матрице (229) с определителем, равным нулю. Поэтому для построения совместной плотности вероятности $p_1(v, x_{11}, x_{22})$ используем следующие соображения. Если поле $v(x_1, x_2)$ — узкополосное, то его реализации будут мало отличаться от двоякопериодического поля с длинами волн $2\pi/k_1^0$ и $2\pi/k_2^0$. Поэтому приближенно можно принять, что

$$x_{11} \approx -k_1^{02} v, \quad x_{22} \approx -k_2^{02} v.$$

Тогда совместную плотность вероятности $p_1(v, x_{11}, x_{22})$ можно представить в виде

$$p_1(v, x_{11}, x_{22}) \approx p(v) \delta(x_{11} + k_1^{02} v) \delta(x_{22} + k_2^{02} v), \quad (234)$$

где

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right). \quad (235)$$

Подставляя выражения (234) и (235) в формулу (232) и замечая, что

$$\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(x_{11}, x_{22}) p_1(v, x_{11}, x_{22}) dx_{11} dx_{22} = \begin{cases} p(v) f(-k_1^0 v, -k_2^0 v), & \text{если } v \geq 0; \\ 0, & \text{если } v < 0, \end{cases}$$

получим следующую формулу для среднего числа максимумов, превышающих уровень $v_* > 0$:

$$\nu_{\max}(v_*) = \frac{k_1^0 k_2^0}{(2\pi)^{3/2} \sigma_v^3} \int_{v_*}^{\infty} \left\{ v^2 \Phi_1\left(\frac{v}{\sigma_v}\right) - \sigma_v^2 \left[1 - \text{pr}S_3\left(\frac{v}{\sigma_v}\right) \right] \right\} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) dv. \quad (236)$$

Таким образом, вычисление среднего числа максимумов сводится к однократным квадратурам.

В случае редких максимумов ($v_* \gg \sigma_v$) могут быть получены более простые формулы. Замечая, что при больших u выполняются асимптотические соотношения

$$\Phi_1(u) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} + \frac{3}{u^5} - \dots \right);$$

$$\text{pr}S_3 u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(u + \frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} + \dots \right),$$

получим, что

$$u^2 \Phi_1(u) - 1 + \text{pr}S_3(u) = u^2 + O(1).$$

Таким образом, при $v_* \gg \sigma_v$ формула (236) может быть представлена в виде

$$\nu_{\max}(v_*) \approx \frac{k_1^0 k_2^0}{(2\pi)^{3/2} \sigma_v^3} \int_{v_*}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) dv. \quad (237)$$

Из этой формулы, в частности, видно, что редкие максимумы асимптотически следуют такому же закону, что и распределение Максвелла

$$f(u) = \text{const} \cdot u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Интеграл в правой части формулы (237) выражается через использованную ранее функцию χ — распределение Пирсона:

$$\int_u^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{pr}_{S_3} u.$$

Отсюда

$$\nu_{\max}(v_*) \approx \frac{k_1^0 k_2^0}{4\pi} \operatorname{pr}_{S_3} \left(\frac{v_*}{\sigma_v} \right).$$

Однако если согласовывать уровень точности со введенными ранее предположениями, то функция pr_{S_3} должна быть заменена ее асимптотическим выражением. В результате приходим к окончательной формуле для математического ожидания числа максимумов, превышающих достаточно высокий уровень $v_* \gg \sigma_v$:

$$\nu_{\max}(v_*) \approx \frac{k_1^0 k_2^0 v_*}{(2\pi)^{3/2} \sigma_v} \exp \left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2} \right). \quad (238)$$

Для определения математического ожидания полного числа максимумов формулы (237) и (238) непригодны. Вместе с тем, как нетрудно заметить,

$$\nu_{\max}(-\infty) = \operatorname{const} k_1^0 k_2^0,$$

где константа имеет порядок единицы. Формулы (237) и (238) могут быть обобщены на случай однородного узкополосного поля в пространстве произвольного числа измерений. На подробностях здесь не останавливаемся.

Переходим к полям, зависящим от времени. Рассмотрим скалярное поле $v(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} \in G \subset R^n$, $t \in [0, \infty)$. Пусть на поле наложено одностороннее ограничение. Функция надежности (16) определяется при этом как

$$P(t) = P \left\{ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \sup_{\mathbf{r} \in G} v(\mathbf{r}, \tau) < v_* \right\}. \quad (239)$$

Введем следующую интерпретацию выброса из Ω_0 . Рассмотрим $(n+1)$ -мерное пространство R^{n+1} переменных $y = \{\mathbf{r}, \tau\}$ (в дальнейшем используем обозначение $n+1 = m$). Область изменения y представляет собой цилиндр $G_t = G \times [0, t]$. Каждое связное множество точек в G_t , для которых $v(y) > v_*$, соответствует одному из выбросов поля $v(\mathbf{r}, t)$ из Ω_0 (см. рис. 88, где

$n = 2$). Для краткости эти множества также будем называть выбросами.

Пусть поле $v(\mathbf{r}, t)$ — дважды дифференцируемое по всем аргументам, а вероятность пересечения выброса с границей области G_i пренебрежимо мала. Тогда $N_{\max}(t)$ можно отождествлять с математическим ожиданием числа аналитических максимумов в G_t . Для вычисления последней характеристики применяются формулы (220) и (221).

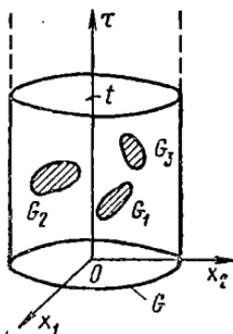


Рис. 88

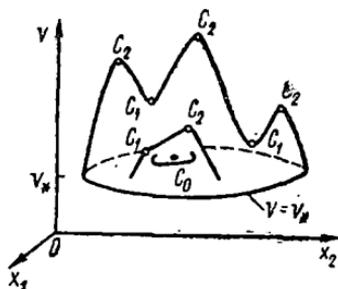


Рис. 89

Более точный подсчет математического ожидания числа выбросов случайного поля основан на топологических соображениях [88]. Пусть на замкнутом m -мерном многообразии M_m задана дважды дифференцируемая функция $v(\mathbf{y})$. Точки многообразия, в которых градиент функции обращается в нуль, называются критическими. Пусть ни в одной из критических точек определитель матрицы \mathbf{H} не обращается в нуль. Классифицируем критические точки в зависимости от числа j отрицательных собственных значений матрицы \mathbf{H} . Если $j = 0$, то критическая точка C_0 соответствует минимуму функции $v(\mathbf{y})$. Если $j = m$, то критическая точка C_m соответствует максимуму функции; в остальных случаях будем иметь минимаксы (седла) различных типов. Число точек каждого типа на многообразии M_m будем обозначать через n_0, n_1, \dots, n_m .

Пусть вероятность попадания критических точек на границу выброса пренебрежимо мала. Каждый выброс связностью b в пространстве R^m топологически отображим на m -мерную сферу. Поскольку граница выброса является поверхностью уровня $v = v_*$, а внутренность

выброса — областью больших значений, то каждая поверхность уровня в R^m будет гомеоморфна критической точке сферы M_m типа C_0 , т. е. минимуму. Применяя известную теорему Морса*, придем к формуле

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j n_j + b = \varepsilon, \quad (240)$$

связывающей числа критических точек n_0, n_1, \dots, n_m , находящихся внутри выброса. Здесь ε — эйлерова характеристика многообразия M_m , равная нулю, если m — нечетное число, и двум, если m — четное число. Для односвязных выбросов формула (240) принимает вид

$$\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} n_j = 1, \quad (241)$$

не зависящий от размерности многообразия M_m . Таким образом, для односвязного выброса в m -мерном пространстве R^m альтернированная сумма чисел критических точек, начатая с числа максимумов, равна единице. Частным случаем формулы (241) служит связь между числом превышающих заданный уровень v_* максимумов и минимумов непрерывной функции $v(t) : n_{\max} - n_{\min} = 1$. Для двухмерного поля $v(y_1, y_2)$ формула (241) дает связь между числом максимумов, минимумов и седловых точек:

$$n_{\max} - n_{\text{sad}} + n_{\min} = 1. \quad (242)$$

Формула (242) проиллюстрирована на рис. 89, где $n_{\max} = 4$, $n_{\text{sad}} = 4$, $n_{\min} = 1$.

Вернемся к задаче об определении математического ожидания $N(t)$ числа выбросов внутри цилиндра G_t . Пусть случайное поле $v(y)$ таково, что вероятностью пересечения выбросов с границей цилиндра G_t и вероятностью появления многосвязных выбросов в G_t можно пренебречь. Рассмотрим одну из реализаций поля. Для каждого из выбросов данной реализации составим соотношение (241). Суммируя эти соотношения почлен-

* Morse M., Cairns S. S. Critical point theory in global analysis and differential topology. New York, Academic Press, 1969.

но и осредняя по множеству реализаций, получим окончательную формулу

$$N(t) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} N_j(t), \quad (243)$$

где $N_j(t)$ — математическое ожидание числа критических точек типа j внутри G_t . Таким образом, математическое ожидание $N(t)$ числа выбросов внутри G_t равно альтернированной сумме математических ожиданий $N_j(t)$ числа критических точек, начинающейся с числа максимумов. Чтобы формула (243) была внутренне непротиворечивой, необходимо, чтобы среднее число изолированных минимумов было пренебрежимо мало по сравнению с числом критических точек других типов. В самом деле, если реализация поля содержит изолированные минимумы, превышающие уровень v_* , то при $v > v_*$ могут наблюдаться многосвязные выбросы (см. рис. 89). Поэтому, например, для случая $m = 2$ формулу (243) следует переписать так:

$$N(t) \approx N_{\max}(t) - N_{\text{sad}}(t). \quad (244)$$

Математическое ожидание числа критических точек различных типов вычисляется по формулам типа (222):

$$N_j(t) = \int_{G_t} dy \int_{v_*}^{\infty} dv \int_{x \in K_j} p(v, 0, x; y) \det \mathbf{H} | dx. \quad (245)$$

Здесь K_j — множество значений x_{jk} , для которых матрица \mathbf{H} имеет j отрицательных собственных значений.

Для численного примера рассмотрим двухмерное поле $v(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$, не зависящее от времени. Поле $v(\mathbf{r})$ полагаем однородным, изотропным, гауссовским и центрированным, а его корреляционную функцию возьмем в виде

$$K(\xi) = \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\rho_0^2}\right). \quad (246)$$

Здесь σ_0^2 и ρ_0 — положительные константы (дисперсия поля и масштаб корреляции соответственно), а $\xi = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Спектральная плотность поля записывается как

$$S(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_0^2 \rho_0^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} k^2 \rho_0^2\right). \quad (247)$$

где $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$ — волновой вектор; $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Совместная плотность вероятности $p(\mathbf{u})$ вектора $\mathbf{u} = \{v, \varphi_1, \varphi_2, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}\}$ имеет вид (224) с корреляционной матрицей (225).

Подставляя выражения (224), (225), (246) и (247)

в формулу (245), приходим к шестикратному несобственному интегралу. По переменным $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$ этот интеграл тривиален, а по v и κ_{12} берется аналитически.

Дальнейшие вычисления производились на ЭВМ. На рис. 90 показана зависимость математических ожиданий v_{\max} , v_{sad} и v_{min} критических точек, приходящихся на единицу площади G , от безразмерного уровня v_*/σ_0 . При низких уровнях

v_*/σ_0 число v_{min} достаточно велико. Это указывает на то, что вероятность обнаружения многосвязных выбросов за этот уровень уже нельзя пренебрегать, и, следовательно, одно из условий применения формул (241) и (243) нарушается. Если $v_*/\sigma_0 > 2$, то $v_{\text{min}} \ll v_{\text{max}}$, $v_{\text{min}} \ll v_{\text{sad}}$. Математическое ожидание числа выбросов может быть приближенно оценено как

$$v \approx v_{\text{max}} - v_{\text{sad}} \quad (248)$$

При $v_*/\sigma_0 = 3$ расхождение между v и v_{max} не превышает 1%.

§ 3.12. Примеры оценки надежности распределенных систем

Рассмотрим тонкую упругую оболочку с малыми начальными неправильностями. Пусть свойства начальных неправильностей, нагрузки и геометрии оболочки таковы, что применима корреляционная теория докритических деформаций, изложенная в § 2.3. Предположим, что мерой качества системы является близость срединной поверхности нагруженной оболочки к идеальной форме. Примем за параметр качества полное нормальное отклонение точек срединной поверхности $v =$

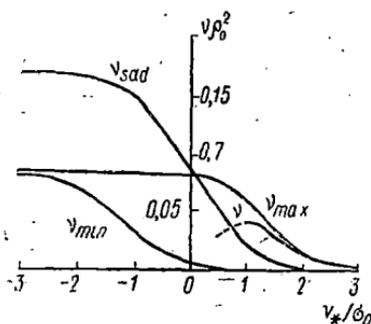


Рис. 90

$= \omega_0 + \omega$, где $\omega_0(\mathbf{r})$ — начальное отклонение, $\omega(\mathbf{r})$ — дополнительное упругое перемещение по нормали к срединной поверхности. Предельное значение полного отклонения обозначим через v_* . Условие качества принимает при этом вид $|v| < v_*$, а функция надежности определяется при помощи формулы (211). Здесь G — область, занятая срединной поверхностью оболочки.

Отвлекаясь от краевых эффектов, можно использовать для оценки надежности результаты из § 2.3. Пусть перемещения достаточно малы. Тогда можно ограничиться первым членом ряда в формуле (2.42) для $\omega(\mathbf{r})$. Полагая параметр малости μ равным единице, получим приближенное соотношение

$$v \approx \omega_0 + \omega_1. \quad (249)$$

Обозначим спектральную плотность полных отклонений через $S_v(\mathbf{k})$. С учетом формул (249) и (248) получим

$$S_v(\mathbf{k}) = [1 + F(\mathbf{k})]^2 S_{\omega_0}(\mathbf{k}), \quad (250)$$

где передаточная функция $F(\mathbf{k})$ определяется по первой формуле (2.49). Если случайное поле $\omega_0(\mathbf{r})$ является гауссовским, то в рассматриваемом приближении поле $v(\mathbf{r})$ также будет гауссовским. Тогда для определения математического ожидания числа максимумов $v_{\max}(v_*)$ на единицу площади срединной поверхности, превышающих уровень v^* , можно применить формулу (232). После этого надежность оценивается по формулам (213) и (214).

Произведем вычисления для пластины, начальные неправильности которой образуют узкополосное гауссовское случайное поле. Тогда согласно формуле (2.90) аппроксимируем его спектральную плотность как

$$S_{\omega_0}(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_0^2}{4} \delta(|k_1| - k_0) \delta(|k_2| - k_0). \quad (251)$$

Передаточную функцию $F(\mathbf{k})$ найдем по первой формуле (2.49), полагая в ней $R_1 \rightarrow \infty$; $R_2 \rightarrow \infty$; $N_{11} = N_{22} = N$; $N_{12} = 0$:

$$F(\mathbf{k}) = - \frac{N}{(k_1^2 + k_2^2)D + N}. \quad (252)$$

Используя формулы (251) и (252), вычислим по формуле (250) спектральную плотность $S_0(\mathbf{k})$

$$S_v(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_v^2}{4} \delta(|k_1| - k_0) \delta(|k_2| - k_0).$$

где σ_v^2 — дисперсия полного отклонения v , т. е.

$$\sigma_v = \frac{2\sigma_0}{2+n}. \quad (253)$$

В формуле (253) использовано обозначение (2.92), т. е.

$$n = \frac{N}{k_0^2 D}. \quad (254)$$

Заметим, что дисперсия σ_v^2 остается конечной, пока $n > -2$. Равенство $n = -2$ соответствует достижению сжимающими усилиями N критического значения $N_*(k_0, k_0)$, которое вычисляется по линейной теории при $k_1 = k_2 = k_0$.

Математическое ожидание числа максимумов поля $v(\mathbf{r})$ на единицу площади, превышающих достаточно высокий уровень v_* , находится по формуле (238)

$$v_{\max}(v_*) = \frac{k_0^2 v_*}{(2\pi)^{3/2} \sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right). \quad (255)$$

Функция надежности $P(G)$ оценивается далее при помощи формул (213) или (214). Первая формула дает для надежности оценки снизу¹

$$P(G) \approx 1 - \frac{k_0^2 G}{\sqrt{2\pi}^{3/2}} \cdot \frac{v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right).$$

Согласно второй формуле получаем

$$P(G) \approx \exp\left[-\frac{k_0^2 G}{\sqrt{2\pi}^{3/2}} \cdot \frac{v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right)\right].$$

В этих формулах G — площадь, занимаемая срединной поверхностью пластины. Напоминаем, что выбросы на границе области, а также краевые эффекты в этом расчете не учитываются.

Оценка надежности из условий прочности встречает большие трудности. Пусть, например, поставлено требование, которое базируется на условии пластичности типа Мизеса:

$$m_{11}^2 + m_{22}^2 - m_{11}m_{22} + 3m_{12}^2 < m_*^2.$$

Здесь m_{11} и m_{22} — изгибающие моменты в пластине;

¹ При этом просуммировано число редких выбросов за уровни v_* и $-v_*$.

m_{12} — крутящий момент; m_* — предельное значение момента. Для определения функции надежности

$$P(G) = P\left[m_{11}^2(r) + m_{22}^2(r) - \frac{m_{11}(r)m_{22}(r)}{r \in G} + 3m_{12}^2(r) < m_*^2\right] \quad (256)$$

надо уметь оценивать вероятность выбросов тензорного поля $m_{jk}(r)$. Если ввести скалярное поле приведенного момента

$$m_r = \sqrt{m_{11}^2 + m_{22}^2 - m_{11}m_{22} + 3m_{12}^2},$$

то вместо (256) получаем более простое выражение

$$P(G) = P\left[\sup_{r \in G} m_r(r) < m_*\right]. \quad (257)$$

Однако приведенный момент $m_r(r)$ связан с компонентами $m_{jk}(r)$ и, следовательно, с полем $\omega_0(r)$ нелинейными соотношениями. Поэтому при гауссовском поле $\omega_0(r)$ поле $m_0(r)$ гауссовским не будет, и формулы (232) и (238) для оценки надежности (257) непригодны. Еще одна трудность связана с тем, что при расчете на прочность, вообще говоря, необходимо учитывать краевые эффекты. Как было показано в § 2.4, на защемленном контуре пластины коэффициент концентрации по дисперсии изгибающего момента может существенно превышать единицу. Отсюда следует ожидать, что основной вклад в снижение надежности будет внесен краевыми эффектами.

Пренебрегая вероятностью выброса приведенного момента $m_r(r)$ во внутренней области, возьмем условие прочности в виде

$$m_r(r) < m_* \quad (r \in \gamma),$$

где γ — контур пластины. Если контур γ защемлен, то приведенный момент на контуре равен взятому по модулю изгибающему моменту $m(r)$. Последний пропорционален второй производной от $\omega_1(r)$ по нормали к контуру и представляет собой сечение гауссовского поля. Для вычисления математического ожидания числа положительных пересечений моментом $m(r)$ уровня m_* на единицу длины контура применим формулу (58):

$$\nu_+(m_*) = \frac{k_c}{2\pi} \exp\left(-\frac{m_*^2}{2\sigma_m^2}\right). \quad (258)$$

Здесь σ_m^2 — дисперсия изгибающего момента на конту-

ре, k_e — эффективное волновое число. Для границы, совпадающей с линией $x_1 = \text{const}$, имеем

$$\sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} T_m(k_2) dk_2,$$

где $T_m(k_2)$ — спектральная плотность, определяемая по формуле (2.96), а k_e определяется по формуле (2.71).

Пусть спектральная плотность начальных неправильностей имеет вид (251). Тогда $k_e = k_0$, а σ_m определяется по формуле (2.91):

$$\sigma_m = k_0^2 D \sigma_0 n \sqrt{\frac{2}{2+n}}. \quad (259)$$

Здесь по-прежнему n — параметр нагрузки (254). По формуле типа (100) определим функцию надежности. Пусть контур пластины образован линиями $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$. Математическое ожидание числа выбросов на единицу длины этих линий вычисляется по формуле (258). Обозначая длину заземленного контура через Δ , получим

$$P(\Delta) \approx 1 - \frac{k_e \Delta}{\pi} \exp\left(-\frac{m_*^2}{2\sigma_m^2}\right).$$

Здесь просуммированы математические ожидания числа выбросов за уровни v_* и $-v_*$. Заметим в заключение, что ввиду узкополосности поля полученные оценки надежности могут оказаться сильно заниженными. Чтобы получить лучшее приближение, необходимо использовать понятие о выбросах огибающей поля (см. также § 3.6).

Рассмотрим более сложный пример [29]. Пусть тонкая упругая оболочка, близкая к сферической с радиусом срединной поверхности R , нагружена равномерным давлением, которому соответствует безмоментное усилие N . Срединная поверхность представляет собой случайное поле, масштабы изменчивости и корреляции ко-

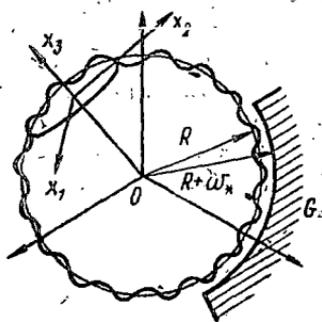


Рис. 91

того малы по сравнению с R . Это позволяет описать локальные деформации оболочки в декартовых координатах $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$, введенных на плоскости, отсекающей достаточно малый сегмент поверхности G (рис. 91). Относительно функции начальных неправильностей $w_0(\mathbf{r})$ предполагаем, что она представляет собой дважды дифференцируемое однородное гауссовское поле с математическим ожиданием, равным нулю. Пусть по соображениям функционирования системы на нормальное перемещение $v(\mathbf{r})$ относительно идеальной сферы наложено ограничение $v(\mathbf{r}) < v_*$, где v_* — некоторое предельное значение. Оценим надежность системы как функцию параметра усилия N , уровня v_* и площади срединной поверхности G .

Введя масштаб длины и безразмерный параметр внешней нагрузки

$$\lambda_0 = \left(\frac{DR^2}{Eh} \right)^{1/4}, \quad n = \frac{N\lambda_0^2}{2D}, \quad (260)$$

запишем уравнения для упругой пологой сферической оболочки с малыми начальными неправильностями в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w_1 - \Delta\lambda_1 &= 2n\Delta(w_0 - w_1); \\ \Delta\Delta x_1 + \Delta w_1 &= 0. \end{aligned} \quad (261)$$

Здесь $w_1(\mathbf{r})$ — по-прежнему дополнительное нормальное перемещение, $x_1(\mathbf{r})$ — функция дополнительных усилий в срединной поверхности.

Для дальнейших вычислений возьмем спектральную плотность начальных неправильностей в виде (247). Спектральная плотность $S_v(\mathbf{k})$ поля $v(\mathbf{r})$ связана со спектральной плотностью $S_{w_0}(\mathbf{k})$ поля $w_0(\mathbf{r})$ соотношением

$$S_v(\mathbf{k}) = \left(\frac{k^4 + 1}{k^4 + 2nk^2 + 1} \right)^2 S_{w_0}(\mathbf{k}), \quad (262)$$

вытекающим из уравнений (261). Отличные от нуля элементы корреляционной матрицы \mathbf{K} определяются как

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \sigma_0^2 A_1, \\ \langle \varphi_1^2 \rangle &= \langle \varphi_2^2 \rangle = -\langle v x_{11} \rangle = -\langle v x_{22} \rangle = \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0^2} A_3, \end{aligned}$$

$$\langle \kappa_{11}^2 \rangle = \langle \kappa_{22}^2 \rangle = \frac{3\sigma_0^2}{8\rho_0} A_5, \quad (263)$$

$$\langle \kappa_{12}^2 \rangle = \langle \kappa_{11}\kappa_{22} \rangle = \frac{\sigma_0^2}{8\rho_0} A_5,$$

где введены обозначения для интегралов

$$A_\alpha(\rho_0, n) = \int_0^\infty \left(\frac{k^4 + 1}{k^4 + 2nk^2 + 1} \right)^2 \exp\left(-\frac{k^2}{2\rho_0}\right) k^\alpha dk$$

$$(\alpha = 1, 3, 5). \quad (264)$$

При достаточно высоких уровнях v_*/σ_0 число максимумов ν_{\max} функции $v(r)$ значительно превышает ν_{sad} и ν_{min} . При умеренных уровнях v_*/σ_0 разница между ν и ν_{\max} становится заметной. Например, если $n = -0,75$, а $v_* = 3\sigma_0$, то $\nu_{\max} \approx 10^{-2}$, $\nu_{\text{sad}} \approx 0,4 \cdot 10^{-2}$, $\nu_{\text{min}} \approx 0,3 \cdot 10^{-4}$. Некоторые численные результаты представлены на рис. 92. Сплошные линии соответствуют математическому ожиданию числа выбросов, найденному по формуле (248). Штриховые линии показывают число ν_{\max} . С приближением параметра n к его критическому значению $n = -1$ число критических точек, превышающих заданный уровень, быстро возрастает.

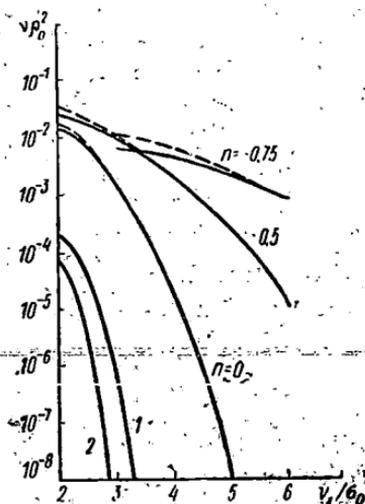


Рис. 92

§ 3.13. Методы редукции в теории надежности распределенных систем

Остановимся на приближенных методах решения задач надежности для континуальных систем [28], основанных на редукции к конечно-мерным подпространствам. Для определенности рассмотрим случай, когда качество определяется одной скалярной функцией $v(r, t)$

координат \mathbf{r} и времени t . В пространстве V функция-надежности вводится как

$$P(t) = P \{ v(\mathbf{r}, \tau) \in \Omega_0; \mathbf{r} \in G; \tau \in [0, t] \}. \quad (265)$$

Для s -мерного подпространства V_s

$$P_s(t) = P \{ v_\alpha(\tau) \in \Omega_s; \alpha = 1, 2, \dots, s; \tau \in [0, t] \}. \quad (266)$$

где Ω_s — проекция допустимой области Ω_0 на V_s . Задача состоит в выборе такого способа построения подпространства V_s , чтобы функция надежности, определяемая по (266), служила эффективной оценкой для функции надежности (265).

Пусть V — гильбертово пространство, в котором построен ортонормированный базис $\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}), \dots$. Допустим, что можно выбрать s элементов $\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}), \dots, \psi_s(\mathbf{r})$ так, чтобы реализации поля $v(\mathbf{r}, t)$ удовлетворительно аппроксимировались при помощи усеченного ряда

$$v(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^s v_\alpha(t) \psi_\alpha(\mathbf{r}). \quad (267)$$

Элементы пространства V_s характеризуются коэффициентами Фурье

$$v_\alpha(t) = (v(\mathbf{r}, t), \psi_\alpha(\mathbf{r})) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (268)$$

На вопросе об определении допустимой области Ω_s в пространстве V_s необходимо остановиться подробнее. Пусть уравнение предельной поверхности Γ в пространстве V имеет вид $F[v(\mathbf{r})] = 0$. Подставим в левую часть этого уравнения ряд (267). В результате получим уравнение

$$F_s(v_1, v_2, \dots, v_s; \mathbf{r}) = 0 \quad (269)$$

которому должны удовлетворять точки предельной поверхности Γ_s в пространстве V_s . Уравнение (269) определяет n -параметрическое семейство поверхностей (n — размерность вектора \mathbf{r}). Если F_s — дифференцируемая по всем x_1, x_2, \dots, x_n функция, то предельную поверхность естественно искать среди кусков дискриминантной поверхности, уравнения характеристик которой имеют вид:

$$\begin{aligned} F_s(v_1, v_2, \dots, v_s; \mathbf{r}) &= 0; \\ \frac{\partial F_s(v_1, v_2, \dots, v_s; \mathbf{r})}{\partial x_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (270)$$

Однако часто встречаются случаи, когда дискриминантная поверхность не существует (пример будет рассмотрен ниже).

Для решения задач статистической динамики обычно используется разложение элементов состояний $u(\mathbf{r}, t)$ в ряды по полному базису $\varphi_1(\mathbf{r}), \varphi_2(\mathbf{r}), \dots$. В связи с этим возникает мысль о том, чтобы принять за параметры качества коэффициенты Фурье в гильбертовом пространстве U . Используя метод редукции, представим элементы состояний в виде усеченного ряда

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^s u_{\alpha}(t) \varphi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (271)$$

что соответствует введению подпространства U_s . Далее, примем, что $v_{\alpha}(t) \equiv u_{\alpha}(t)$. Если базис — ортонормированный, то

$$v_{\alpha}(t) = (u(\mathbf{r}, t), \varphi_{\alpha}(\mathbf{r})) \quad (272)$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, s).$

Предельная поверхность Γ строится аналогично предыдущему. Прикладные расчеты проводятся по опасным точкам (опасным сечениям). Это означает, что в области G выбирается s точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$ так, чтобы поле $v(\mathbf{r}, t)$ достаточно полно характеризовалось его значениями в этих точках. Конечно-мерное фазовое пространство V_s образуется из элементов

$$v_{\alpha}(t) = v(\mathbf{r}_{\alpha}, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (273)$$

Рассмотрим примеры определения допустимой области Ω_s . Для наглядности ограничимся случаем $s = 2$. Для первого примера возьмем прямолинейный стержень длиной l , опертый по концам. Допустимую область возьмем в виде $|\omega| < \omega_*$, где $\omega(x, t)$ — прогиб оси стержня, ω_* — предельное значение прогиба. Приняв за основу определение пространства V_s согласно (272), разложим функцию прогиба в ряд по полной системе функций $\varphi_{\alpha}(\xi) = \sin \alpha \xi$ ($\xi = \pi x / l$, $\alpha = 1, 2, \dots$). При $s = 2$ допустимая область в V_2 определяется из условия

$$|v_1 \sin \xi + v_2 \sin 2\xi| < 1, \quad (274)$$

где $v_1 = \omega_1 / \omega_*$, $v_2 = \omega_2 / \omega_*$. Если в (274) ввести знак равенства, то получим два однопараметрических семейства кривых на плоскости $\{v_1, v_2\}$. Эти кривые показаны на рис. 93. Граница области Γ_2 образована двумя

дискриминантными кривыми (огibaющими). Их уравнения в параметрической форме определяются согласно (270):

$$v_1 \sin \xi + v_2 \sin 2\xi = \pm 1;$$

$$v_2 \cos \xi + 2v_1 \cos 2\xi = 0,$$

где $0 < \xi < \pi$. Отсюда

$$v_1 = \pm \frac{\cos 2\xi}{\sin^3 \xi}, \quad v_2 = \pm \frac{\cos \xi}{2 \sin^2 \xi}.$$

Поверхность Γ_2 включает две особые точки $v_1 = 0, v_2 = \pm 1$. Если образовать пространство V_2 по методу (273), то область Ω_2 будет ограничена шестью отрезками прямых. Например, при $\xi_1 = 1/4, \xi_2 = 1/2$ получим

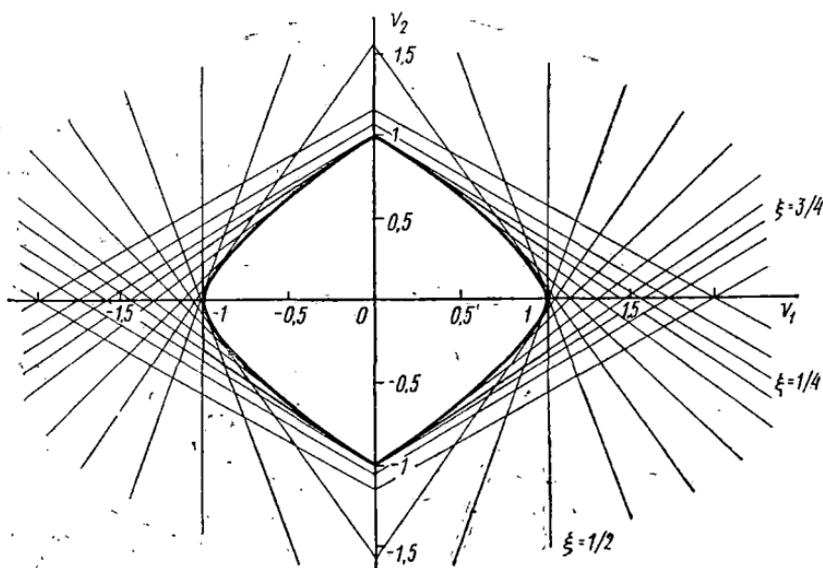


Рис. 93

шестиугольник, показанный на рис. 93. Допустимая область, определенная согласно первому способу, вписана в этот шестиугольник и, следовательно, дает более осторожную оценку надежности.

Для второго примера возьмем круговую в плане пластину постоянной толщины. Пусть пластина имеет радиус R и зашкреплена по контуру $r = R$. Ограничимся

случаем осесимметричной деформации. Прогиб $w(r, t)$ представим в виде усеченного ряда типа (267):

$$w(r, t) = \sum_{\alpha=1}^s w_{\alpha}(t) \varphi_{\alpha}(r). \quad (275)$$

Здесь $\varphi_{\alpha}(r)$ — полная на отрезке $[0, R]$ система функций

$$\varphi_{\alpha}(r) = J_0\left(\frac{\kappa_{\alpha} r}{R}\right) - \frac{J_0(\kappa_{\alpha})}{I_0(\kappa_{\alpha})} I_0\left(\frac{\kappa_{\alpha} r}{R}\right),$$

а κ_{α} — корни характеристического уравнения

$$J_0(\kappa) I_0'(\kappa) - J_0'(\kappa) I_0(\kappa) = 0,$$

занумерованные в порядке возрастания: $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots$. Пусть по условиям задачи область Ω_0 задана в виде $|w(r, t)| < w_*$. Удерживая в разложении (275) первые два члена ряда и принимая за параметры качества отношения $v_1 = w_1/w$, $v_2 = w_2/w$, спроектируем область

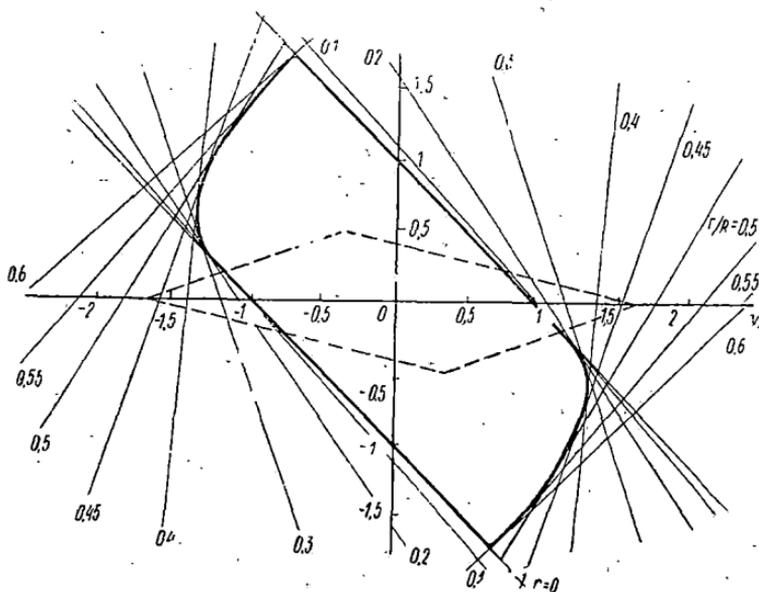


Рис. 94

Ω_0 на V_2 . Как и в предыдущем примере, область Ω_2 ограничена отрезками огибающих (рис. 94). Если, следуя способу (273), наложить ограничения на прогиб в точ-

ках $r = 0$ и $r = 0,5 R$, то получим параллелограмм, показанный на рис. 94.

Рассмотрим еще один пример, построенный на основе условия предыдущей задачи. Пусть пластина упругая, а на приведенный по Мизесу момент m наложено ограничение $m(r, t) < m_*$. Формула для приведенного момента в случае осесимметричной деформации принимает вид

$$m = (m_r^2 + m_\theta^2 - m_r m_\theta)^{1/2},$$

где m_r и m_θ — радиальный и окружной радиальные моменты, т. е.

$$m_r = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right),$$

$$m_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right).$$

а ν — коэффициент Пуассона. Представим прогиб $\omega(r, t)$ в виде ряда (275) при $s = 2$. Вычисления показывают, что дискриминантная кривая в смысле (270) в данном случае не существует, а область Ω_2 образована из четырех отрезков прямых. Эти прямые соответствуют ограничениям на $m(r, t)$, накладываемым при $r = 0$ и $r = R$. Границы области Ω_2 для случая $m_* R^2 / D \omega_* = 10$, $\nu = 0,3$ показаны на рис. 94 штриховыми линиями.

§ 3.14. Теоретические основы текущего прогнозирования долговечности

Теория надежности наряду с методами прогнозирования надежности и долговечности систем на стадии их проектирования позволяет также рационально подойти к вопросам планирования профилактических осмотров, текущих ремонтов и замен и т. п. Одно из новых приложений теории надежности — прогнозирование индивидуальной надежности и долговечности сложной системы (конструкции, сооружения или машинного агрегата) по результатам текущих наблюдений над поведением системы. При этом наряду с понятиями и методами теории надежности здесь используются понятия теории диагностики и идентификации — направления в теории систем, посвященного методам оценивания параметров системы и ее состояния по результатам наблюдений [6]. Ниже, следуя в основном статье [31], мы изложим прин-

цпы текущего прогнозирования индивидуальной надежности и долговечности. Простые примеры применения этих принципов можно найти в той же статье.

Рассмотрим некоторую систему, состояние которой контролируется на основании косвенных измерений. Совокупность результатов измерений в момент времени t будем называть диагностическим вектором, или вектором признаков, и обозначать через $w(t)$. Вектор признаков является элементом некоторого пространства W , которое будем называть диагностическим пространством, или пространством признаков.

Пусть процесс $w(t)$ наблюдается в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k , а результаты измерений равны w_1, w_2, \dots, w_k . Для краткости будем пользоваться обозначениями для множеств $T_k = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ и $w(T_k) = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Предположим, что на основании некоторого правила по

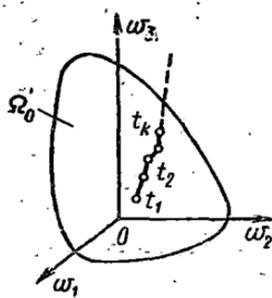


Рис. 95

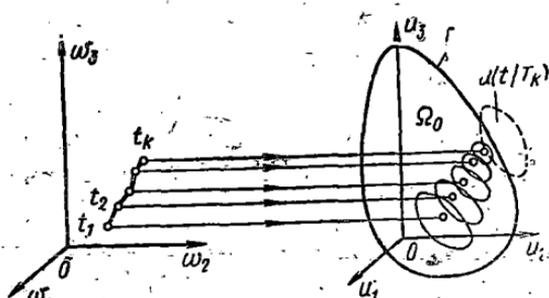


Рис. 96

результатам наблюдений $w(T_k)$ построен прогноз этого процесса на отрезке времени $(t_k, t]$. Этот прогнозируемый процесс будем обозначать через $w(t|T_k)$. Простейший подход к задаче прогнозирования надежности и долговечности основан на концепциях технической диагностики. Пусть в пространстве W выделена область Ω_0' , соответствующая допустимым с точки зрения эксплуатации состояниям системы (рис. 95). Тогда естественно принять следующее правило: система, нормально эксплуатируемая при $t \leq t_k$, допускается к эксплуатации до момента времени $t_{k+1} > t_k$, если выполняется условие $w(t|T_k) \in \Omega_0'$ при всех $t \in (t_k, t_{k+1}]$. В рамках этой схемы возможен учет стохастического характера процесса $w(t)$, если в каждой точке пространства W задать

значение апостериорной вероятности отказа или какой-либо другой подходящей вероятностной меры.

Недостатком такого подхода является то, что в нем, в сущности, используются лишь результаты наблюдений над процессом в пространстве W , так что не привлекаются ни априорная информация, ни модельные соображения. Непосредственное использование этой схемы, особенно в стохастической постановке, потребует слишком большого числа измерений по сравнению с числом измерений, которое можно произвести на сложных, малосерийных и уникальных системах. Эти затруднения в значительной степени преодолеваются, если прогнозирование вести не в пространстве признаков W , а в пространстве состояний U .

Как и в теории надежности, пространство состояний U выбирается таким образом, чтобы в рамках разумной модели системы ее состояние в каждый момент времени t определялось заданием вектора $u(t)$. Изменение состояния во времени описывается дифференциальным уравнением модели

$$\dot{u} = f(u, q, a), \quad (276)$$

которое можно рассматривать как конкретизацию операторного уравнения (14). Здесь q — вектор внешних воздействий на систему, a — вектор параметров системы. Связь между векторами u и w задается в виде

$$w = g(u, p, b), \quad (277)$$

где p — вектор помех в системе измерения; b — вектор, включающий параметры системы измерения и, может быть, некоторые параметры системы, влияющие на связь между u и w .

Пусть область допустимых состояний Ω_0 задана в пространстве U . Задача состоит в том, чтобы, используя уравнения (276) и (277), найти значения $u(T_k)$, соответствующие наблюдаемым величинам $w(T_k)$ и произвести по ним прогнозирование процесса $u(t)$ на отрезок $(t_k, t_{k+1}]$. Для решения вопроса о прогнозируемой долговечности применяется правило, аналогичное ранее указанному правилу для пространства W : функционирование системы, нормально эксплуатируемой при $t \leq t_k$, разрешается продолжить до момента времени $t_{k+1} > t_k$, если $u(t | T_k) \in \Omega_0$ при всех $t \in (t_k, t_{k+1}]$.

Реальные задачи прогнозирования долговечности, как правило, являются стохастическими. Вектор внеш-

них воздействий q и вектор помех p обычно представляют собой случайные функции t , а числовые векторы a и b задаются априорными распределениями вероятностей. При этом $u(t)$ есть случайный процесс, а условная функция надежности вводится как

$$P(t|T_k) = P\{u(\tau) \in \Omega_0; t_k < \tau \leq t|w(T_k)\}. \quad (278)$$

Главное различие между функциями надежности (33) и (278) состоит в том, что в (33) функция надежности зависит от информации, заданной в пространстве качества V , а в (278) информация задана в диагностическом пространстве W . Кроме того, допустимая область задается в пространстве состояний U , а не в пространстве V . В пространстве U движение системы при детерминистически заданных $q(t)$ и a однозначно устанавливается из уравнения модели (276), в то время как пространство V может иметь меньшую размерность, чем U .

Связь между процессами $w(t)$ и $u(t)$ проиллюстрирована на рис. 96. Если соотношение (277) является стохастическим, то каждому наблюдаемому значению w_k будет соответствовать некоторое вероятностное (размытое) множество значений u_k . Переход из пространства W в пространство U осуществляется при помощи условной плотности вероятности $p\{u(T_k)|w(T_k)\}$. Следующий шаг состоит в отыскании условной функции надежности, соответствующей некоторым фиксированным значениям $u(T_k)$ процесса $u(t)$ на множестве T_k :

$$P[t|u(T_k)] = P\{u(\tau) \in \Omega_0; t_k < \tau \leq t|u(T_k)\}. \quad (279)$$

Функция надежности (278) выражается через функцию (279) и условную плотность вероятности $p\{u(T_k)|w(T_k)\}$ как

$$P(t|T_k) = \int_{\Omega_0^k} P[t|u(T_k)] p\{u(T_k)|w(T_k)\} du(T_k). \quad (280)$$

Описанная схема может быть сравнительно легко реализована, если все параметры системы, а также все необходимые вероятностные характеристики случайных процессов, входящих в уравнения (276) и (277), заданы. Обычная ситуация состоит в том, что часть из этих параметров в лучшем случае задана своими априорными распределениями. Примером могут служить данные

о случайных вибрационных нагрузках или о циклической прочности элементов конструкций. Для прогнозирования надёжности и долговечности конкретной конструкции необходимо в принципе знать реализации этих величин для данной конструкции. Вместо этого мы имеем априорные распределения и другие априорные вероятностные характеристики, относящиеся ко всему ансамблю (возможно, только мыслимому) аналогичных систем, работающих в аналогичных условиях. Некоторая информация, пригодная для оценивания параметров данной конкретной системы и параметров ее состояния, содержится в результатах наблюдений $w(T_k)$ над системой в процессе функционирования. Извлечение этой информации составляет задачу идентификации.

В дальнейшем полагаем, что если среди характеристик случайных процессов $u(t)$ и $w(t)$ имеются такие, которые заданы априорными распределениями, то они отнесены к векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно. Требуется по значениям вектора признаков $w(T_k)$ найти подходящие оценки вектора состояний $\hat{\mathbf{u}}(T_k) = \{ \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k \}$, а также оценки $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$ векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Эти оценки могут быть получены, например, по обобщенному методу наименьших квадратов:

$$\sum_{\alpha=1}^k c_{\alpha} \langle \|\hat{w}_{\alpha} - w_{\alpha}\|^2 \rangle \rightarrow \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}(T_k)} \quad (281)$$

Здесь \hat{w}_{α} — расчетные значения процесса $w(t)$ при $t=t_{\alpha}$ и при заданных \mathbf{a} , \mathbf{b} и $\mathbf{u}(T_k)$; c_{α} — весовые коэффициенты, позволяющие учесть убывающую роль ранних наблюдений. Введение коэффициентов c_{α} целесообразно, если в процессе эксплуатации системы ожидаются достаточно резкие изменения условий работы, что должно приводить к резким и существенным изменениям векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Оператор математического ожидания в (281) является условным; он соответствует фиксированным значениям векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и $\mathbf{u}(T_k)$.

Если вектор \mathbf{b} известен (что включает в себя по предположению и задание класса распределений), то из (277) можно непосредственно найти апостериорную плотность вероятности $p(\mathbf{u} | \mathbf{w})$, а по этой плотности — оценки вектора состояний $\hat{\mathbf{u}}(T_k)$. Далее оценивается

вектор \mathbf{a} , например, из условия, аналогичного условию (281)

$$\sum_{\alpha=1}^k c_{\alpha} \langle \|\hat{u}_{\alpha} - u_{\alpha}\|^2 \rangle \rightarrow \min_{\mathbf{a}} \quad (282)$$

После того, как произведена идентификация состояний, естественно далее использовать в качестве исходной информации множество значений $\hat{u}(T_k)$. Тогда вместо формулы (280) будем иметь

$$P(t|T_k) \equiv P[t|\hat{u}(T_k)]. \quad (283)$$

Различие двух подходов легко видеть, сравнивая рис. 96 и 97. Вычисления по формуле (280) значитель-

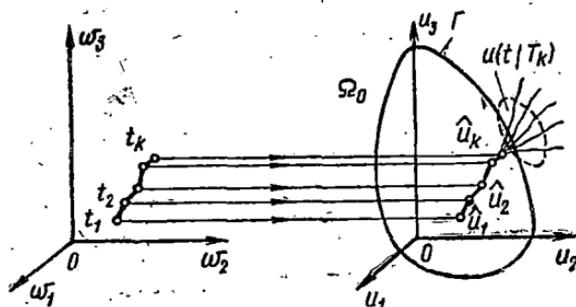


Рис. 97

но сложнее, чем по формуле (283). Обе формулы используют одну и ту же информацию, однако в формуле (283) она учтена в «загрубленной» форме. Если условное распределение достаточно компактно и если процесс $\mathbf{u}(t)$ находится достаточно далеко от предельной поверхности Γ , то результаты вычислений по этим формулам будут мало отличаться. С приближением к предельной поверхности лучше пользоваться формулой (280).

Успешное решение задачи идентификации сильно зависит от выбора уравнения состояния (276) и соответствующей модели отказа. Если можно принять, что поведение системы в будущем определяется ее состоянием в момент t_k последнего измерения, то наиболее подходящей моделью будет модель марковского типа. При этом условная функция надежности будет определяться как $P[t|\mathbf{u}(T_k)] \equiv P[t|\mathbf{u}(t_k)]$ и будет вычисляться как решение уравнения Колмогорова при соответствующих

начальных условиях. Среди параметров системы, подлежащих оцениванию, будут коэффициенты сноса κ_α и коэффициенты диффузии $\kappa_{\alpha\beta}$. Коэффициенты сноса могут быть достаточно эффективно оценены по результатам наблюдения индивидуальной траектории $\mathbf{u}(t)$. Для оценки коэффициентов диффузии необходимо иметь либо результаты наблюдений над поведением представительного ансамбля аналогичных систем, либо, по меньшей мере, располагать адекватной математической моделью системы и надежными статистическими данными о нагрузках.

Если влияние предыстории существенно, а система высоконадежная, то естественно использовать модели отказов, основанные на рассмотрении моментов от числа выбросов. Методы оценки надежности из § 3.6 распространяются на условные процессы. Например, экспоненциальная оценка пуассоновского типа принимает вид

$$P\{t|u(T_k)\} \approx \exp\left[-\int_{t_k}^t v_+(\tau|T_k) d\tau\right],$$

где $v_+(t|T_k)$ — математическое ожидание числа выбросов условного процесса $\mathbf{u}(t|T_k)$ в единицу времени из области Ω_0 (интенсивность отказов). Для вычисления $v_+(t|T_k)$ пригодны те же формулы, что и приведенные в § 3.6, с тем отличием, что в них подставляются вероятностные характеристики соответствующих условных процессов.

Допустим, что безусловный процесс является нормальным с математическим ожиданием $\mathbf{m}(t)$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K}(t, t')$. Условный процесс также будет нормальным с математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$\mathbf{m}(t|T_k) = \mathbf{m}(t) + \mathbf{K}(t, T_k)\mathbf{K}^{-1}(T_k, T_k)[\mathbf{u}(T_k) - \mathbf{m}(T_k)],$$

$$\mathbf{K}(t, t'|T_k) = \mathbf{K}(t, t') - \mathbf{K}(t, T_k)\mathbf{K}^{-1}(T_k, T_k)\mathbf{K}(T_k, t').$$

Здесь $\mathbf{u}(T_k)$ и $\mathbf{m}(T_k)$ — матрицы-столбцы, составленные соответственно из значений матриц-столбцов $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{m}(t)$ при $t \in T_k$; $\mathbf{K}(t, T_k)$, $\mathbf{K}(T_k, T_k)$ и $\mathbf{K}(T_k, t')$ — матрицы размерностью $n \times kn$, $kn \times kn$ и $kn \times n$ соответственно, сформированные из значений матрицы $\mathbf{K}(t, t')$:

$$\mathbf{K}(t, T_k) = (\mathbf{K}(t, t_1), \dots, \mathbf{K}(t, t_k));$$

$$K(T_k, T_k) = \begin{pmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_k) \\ K(t_2, t_1) & \dots & K(t_2, t_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_k, t_1) & \dots & K(t_k, t_k) \end{pmatrix}; K(T_k, t') = \begin{pmatrix} K(t_1, t') \\ K(t_2, t') \\ \dots \\ K(t_k, t') \end{pmatrix}$$

При использовании моделей пуассоновского типа оцениванию подлежат значения вектора средних $m(t)$ и корреляционной матрицы $K(t, t')$ в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k . Здесь возникают еще большие затруднения, чем при оценке параметров марковских моделей. Для преодоления трудностей нужна дополнительная информация о модели системы и о действующих нагрузках.

Класс моделей, более удобный для вычисления условных функций надежности, образуют кумулятивные модели отказов (§ 3.10). Для этих моделей вследствие условий (188) и (190) выполняется соотношение

$$P\{t | u(T_k)\} = P\{u(t) \in \Omega_0 | u(T_k)\},$$

что весьма упрощает вычисление функции надежности. Кроме того, уравнения кумулятивных моделей, как правило, содержат при прочих равных условиях меньшее число параметров, чем другие стохастические модели, что облегчает оценивание этих параметров по результатам текущего диагностирования.

Конечная цель состоит в установлении такого момента времени, который с точки зрения накопленной к данному моменту времени диагностической информации является оптимальным для прекращения эксплуатации. Решающее правило для прогнозирования оптимального срока службы должно основываться на некоторой экономической модели. Некоторые соображения по этому вопросу приведены в § 4.6.

ОБОСНОВАНИЕ НОРМАТИВНЫХ РАСЧЕТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

§ 4.1. Вступительные замечания

В этой главе мы рассмотрим приложения теории надежности к обоснованию и совершенствованию форм расчета строительных конструкций. Одной из главных целей этого расчета является получение гарантии того, что за время эксплуатации конструкции не наступит ни одно из недопустимых предельных состояний, а интенсивность отказов, требующих ремонта или временного прекращения эксплуатации, не будет слишком велика. Для определенности пока будем говорить о предельных состояниях по несущей способности, записывая «условие прочности» в виде

$$S < R. \quad (1)$$

Здесь в зависимости от методики расчета S — нагрузка, действующая на конструкцию, усилие в элементе конструкции или напряжение в нем; R — несущая способность (сопротивление), измеряемая в тех же единицах, что и величина S .

Как внешняя нагрузка, так и несущая способность являются, вообще говоря, случайными величинами, законы распределения которых можно установить, систематически накапливая и изучая опытные факты, относящиеся к однородным условиям. Характер распределений таков, что в большинстве случаев не существует вполне определенного и имеющего практический смысл верхнего предела — для внешних нагрузок, равно как и нижнего предела — для несущей способности. Поэтому условие (1) не может быть заменено условием

$$\max S < \min R, \quad (2)$$

и абсолютное требование, чтобы выполнялось неравенство (1), лишено смысла. Можно лишь поставить условие, чтобы в течение срока службы сооружения оно было выполнено с вероятностью, достаточно близкой к единице. Таким образом, мы пришли к вероятностной трактовке инженерных расчетов.

Традиционные методы расчета, разумеется, содержат элементы статистического подхода, хотя бы в более или

менее завуалированной форме. «Условие прочности» (1) заменяется условием

$$S_n \leq \frac{R_n}{k}, \quad (3)$$

где S_n — нормативная нагрузка; R_n — нормативная несущая способность; k — коэффициент запаса.

Нормативные значения нагрузок и несущей способности входят в условие (3) как некоторые вполне определенные, детерминистические величины. По отношению к реальным величинам, имеющим случайный характер, они играют роль либо некоторых средних или наиболее вероятных значений, либо средних в группе наибольших (наименьших) значений. На формирование нормативных значений большее влияние, нежели теоретические соображения, оказали традиция и историческая преемственность. Нормативные значения нагрузок, несущих способностей и коэффициентов запаса взаимно обусловлены: для любой конструкции можно подобрать бесчисленное множество троек значений этих параметров, приводящих к одному и тому же расчетному результату. Значения коэффициентов запаса, а также тесно с ними связанные значения нормативных нагрузок и нормативных сопротивлений выработывались, исправлялись и уточнялись главным образом эмпирическим способом, обобщением многолетнего опыта проектирования и эксплуатации конструкций. Между тем, как видно из сущности задачи, здесь возможны в принципе и теоретические подходы с широким привлечением аппарата теории вероятностей и теории надежности. Применяемые совместно с технико-экономическим анализом и с учетом результатов инженерной практики вероятностные методы открывают возможности для теоретического обоснования существующих нормативных документов для разработки новых, более прогрессивных и экономичных инженерных методов расчета.

Приведенные выше соображения в настоящее время стали общепризнанными и едва ли могут вызвать возражения. Это стало возможным, однако, лишь в результате многолетней работы ряда исследователей, которые способствовали разъяснению вероятностей природы коэффициента запаса и популяризации статистических методов исследования среди инженеров. Эти соображения

легли также в основу метода расчета по предельному состоянию.

Центральное место в методе занимает понятие предельного состояния. Под предельным состоянием понимается любое нарушение или прекращение нормальной эксплуатации конструкции. Примерами предельных состояний служат обрушение, опрокидывание, потеря устойчивости, хрупкое разрушение, возникновение больших остаточных деформаций, механический и коррозионный износ и т. п. К предельным состояниям относятся также некоторые обратимые явления (например, возникновение значительных упругих деформаций, высокого уровня вибрации или шумов), если эти явления препятствуют нормальной эксплуатации. В нормативных документах предельные состояния обычно классифицируются по степени опасности: различают предельные состояния типа потери несущей способности, ведущие к прекращению эксплуатации, большим материальным потерям, опасности для человеческих жизней и т. п., и предельные состояния, вызывающие временное прекращение или частичное нарушение условий нормальной эксплуатации. Понятие предельного состояния в точности соответствует понятию отказа в теории надежности.

Основная формула метода расчета по предельному состоянию, согласно СНиП в действующей ныне редакции, имеет вид

$$\sum_j n_j S_j \leq m \Phi(\kappa_1 R_1, \kappa_2 R_2, \dots). \quad (4)$$

Здесь S_j — нормативные нагрузки, действующие на конструкцию; n_j — коэффициенты нагрузки; R_j — нормативные сопротивления (например, нормативные пределы прочности или пределы текучести материалов, из которых изготовлена конструкция); κ_j — коэффициенты материала; m — коэффициент условий работы сооружения.

Положительные качества метода предельных состояний общеизвестны. Помимо того, что в этом методе на первое место выдвигается понятие предельного состояния конструкции, он в гораздо большей степени, чем исторически предшествовавший ему метод допускаемых напряжений, дает возможность отразить вероятностную природу условий прочности. Это достигается благодаря расшифровке коэффициента запаса, расчленению его на отдельные компоненты и приданию каждому компонен-

ту определенного физического смысла, связанного с изменчивостью тех или иных величин. Коэффициенты нагрузки характеризуют изменчивость внешних нагрузок и определяются как отношения нагрузок, соответствующих достаточно малым вероятностям появления, к нормативным нагрузкам. Коэффициенты материала аналогичным образом характеризуют изменчивость прочности материала. Перечисленные коэффициенты назначаются исходя из эмпирических распределений для соответствующих случайных факторов и из накопленного опыта строительства; при составлении новых норм, как известно, широко использовался положительный опыт, накопленный в предшествующих нормах.

Несмотря на то, что отдельные стороны метода предельных состояний нуждаются в уточнении и доработке, в целом он представляет собой более совершенный и прогрессивный метод, чем классический метод расчета. Оставаясь по форме детерминистическим, метод предельных состояний все же тесно связан с вероятностными методами и дает толчок целому ряду исследований, использующих аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Настоящая глава отведена вопросу об обосновании нормативных расчетов конструкций. Этому важному приложению теории надежности посвящена обширная литература [30, 46, 70, 82, 106, 109 и др.]. Мы ограничимся лишь освещением основных идей в этой области, характеристикой современного состояния и указанием основных направлений дальнейшего развития. Те или иные чисто технические детали будут приводиться лишь для иллюстрации общих положений.

§ 4.2. Полувероятностная интерпретация нормативных расчетов

В простейшей интерпретации нормативных расчетов, использующей случайный характер нагрузок и сопротивлений, неравенства (1) и (2) заменяются на

$$S_p \leq R_p \quad (5)$$

Здесь S_p — достаточно редко встречающееся высокое значение параметра нагрузки; R_p — достаточно редко встречающееся низкое значение соответствующего сопротивления. Эти значения будем называть расчетными.

Для того чтобы обоснованно выбрать расчетные нагрузки и расчетные сопротивления, нужно иметь сведения о совместном распределении $p(R, S)$ или (в случае независимости нагрузок и сопротивлений) о распределениях $p(R)$ и $p(S)$.

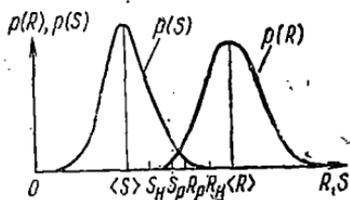


Рис. 98

Тогда расчетные значения нагрузок и сопротивлений будут равны некоторым квантилям¹ соответствующих распределений. Соотношение (5) схематически иллюстрировано на рис. 98, где, помимо расчетных значений, показаны также сред-

ние значения (математические ожидания) $\langle R \rangle$ и $\langle S \rangle$, а также нормативные значения R_n и S_n .

Информация о распределении $p(R)$ как минимум должна содержать математическое ожидание $\langle R \rangle$ и среднее квадратическое отклонение σ_R (или коэффициент изменчивости $\omega_R = \sigma_R / \langle R \rangle$). Введем расчетное значение сопротивления $R_p = \langle R \rangle (1 - \gamma_R \omega_R)$, где $\gamma_R > 0$ — некоторый числовой коэффициент, косвенно связанный с требуемой надежностью. Например, если принять для R нормальный закон распределения, то $\gamma_R = 3$ будет соответствовать такому сопротивлению, что вероятность обнаружения меньшего значения будет примерно 0,00135. Такое сопротивление обычно считается редко встречающимся, и оно может быть принято за расчетное. При этом вероятность обнаружения большего значения (в данном примере эта вероятность равна 0,99865) обычно называют обеспеченностью расчетного сопротивления. Принимая среднее сопротивление за нормативное значение R_n и вводя коэффициенты материала в формулу (4) как $\kappa = R_p / R_n$, приходим к вероятностной интерпретации коэффициентов материала

$$\kappa = 1 - \gamma_R \omega_R. \quad (6)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что чем выше изменчивость механических свойств материала и чем выше требования к надежности, тем меньшим дол-

¹ Квантилью x_v случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ называется такое ее значение, которое удовлетворяет уравнению $F(x_v) = v$.

жен назначаться коэффициент материала. Если нормативное сопротивление отличается от среднего значения, что является типичным для нормативных документов, то его можно представить в виде $R_n = \langle R \rangle (1 - \eta_R \omega_R)$, где $\eta_R > 0$ — некоторый коэффициент. В этом более общем случае коэффициент материала вводится как

$$\alpha = \frac{1 - \eta_R \omega_R}{1 - \eta_R \omega_R} \quad (7)$$

Выше для интерпретации коэффициента материала, в сущности, неявно использовалось нормальное распределение. Против этого могут быть выдвинуты серьезные возражения. Одно из них состоит в том, что нормальное распределение не ограничено ни снизу, ни сверху и простирается в область отрицательных значений. Имея распределение, заданное с точностью до трех или четырех параметров, можно достаточно хорошо аппроксимировать эмпирическое распределение вблизи его центра. Однако для расчета на прочность основной интерес представляет возможность надежной экстраполяции выбранных кривых в сторону таких низких значений прочности, вероятность появления которых очень мала.

Для того чтобы на основании эмпирических данных с достаточной достоверностью получить отрезки кривой распределения, относящиеся к малым вероятностям (например, порядка 0,001), нужно располагать числом испытаний, во много раз превышающим реальные возможности массового эксперимента. Надежная экстраполяция эмпирических данных в область весьма малых вероятностей возможна лишь при условии, если из каких-либо общетеоретических соображений известны асимптотические свойства распределений в области малых вероятностей. Эти данные могут быть получены лишь на базе статистических теорий прочности [17, 119], практическое значение которых в связи с этим значительно возрастает.

Для статистического истолкования коэффициентов нагрузки в нормативной формуле (4) необходимо обратиться к распределениям нагрузок. Среди различных типов нагрузок, действующих на сооружения и конструкции, наиболее изученными с точки зрения статистического распределения являются ветровая и снеговая нагрузки. В отличие от кривых распределения прочности они обладают двумя особенностями. Во-первых, они

обнаруживают ярко выраженную асимметрию, что вовсе исключает возможность их аппроксимации при помощи нормального распределения. Во-вторых, эти кривые оказываются зависящими от времени, в течение которого велись наблюдения за изменчивостью нагрузок; в частности, вероятность достижения больших значений заметно возрастает с увеличением срока наблюдения.

Вообще поскольку нагрузки представляют собой случайные процессы, их вероятностное описание должно включать сведения о временных свойствах: спектральном составе, временной корреляции и т. п. К сожалению, многие эмпирические данные о нагрузках не только не содержат этой информации но и сопровождаются сведениями о том, как производились измерения и обработка результатов. Например, для правильного истолкования эмпирических распределений снеговой нагрузки нужно знать, с каким временным интервалом производились наблюдения над толщиной снегового покрова, измерялись ли значения в заранее выбираемые моменты времени или брались максимальные значения на заданном временном интервале. Во всяком случае распределение $p(S)$ должно относиться к максимальным значениям нагрузки на отрезке времени T_* , равном установленному сроку службы сооружения.

Простейший способ для пересчета результатов относительно кратковременных наблюдений стационарного процесса $s(t)$ на длительные отрезки времени состоит в следующем. Отрезок T разбивается на меньшие отрезки $\Delta T = T/m$, каждый из которых достаточно велик, чтобы корреляция максимумов для двух соседних интервалов была пренебрежимо малой. Например, для снеговой нагрузки таким естественным интервалом является год. Тогда абсолютные максимумы S для каждого интервала ΔT можно приближенно рассматривать как случайные величины в последовательности независимых испытаний. Зная плотность вероятности $p_{\Delta T}(S)$ и функцию распределения $F_{\Delta T}(S)$, можно оценить плотность вероятности $p_T(S)$ максимальных значений S на отрезке T по формуле

$$p_T(S) = m F_{\Delta T}^{m-1}(S) p_{\Delta T}(S). \quad (8)$$

Этот подход схематически проиллюстрирован на рис. 99, где показана плотность вероятности $p(s)$ значений стационарного случайного процесса $s(t)$, плотность вероят-

ности $\rho_{\Delta T}(S)$ абсолютных максимумов процесса на отрезке ΔT , а также результат пересчета $\rho_T(S)$ на более продолжительный отрезок $T = m\Delta T$.

Расчетное значение нагрузки в соотношении (5) выразим через среднее значение (математическое ожидание) $\langle S \rangle$ как $S_p = \langle S \rangle (1 + \gamma_S \omega_S)$, где ω_S — коэффициент изменчивости нагрузки, $\gamma_R > 0$ — числовой коэффициент, аналогичный ранее введенному коэффициенту γ_R . Этот коэффициент характеризует обеспеченность расчетной нагрузки, т. е. вероятность обнаружения меньших значений нагрузки, чем принятое расчетное значение S_p . Если за нормативное значение нагрузки принята ее средняя величина $\langle S \rangle$, то коэффициент нагрузки в нормативной формуле (4) интерпретируется как

$$n = 1 + \gamma_S \omega_S. \quad (9)$$

Если же нормативная нагрузка связана со средним значением соотношением $S_n = \langle S \rangle (1 + \eta_S \omega_S)$, то вместо (9) получаем

$$n = \frac{1 + \gamma_S \omega_S}{1 + \eta_S \omega_S}. \quad (10)$$

Весьма существенно, что в этих формулах среднее значение $\langle S \rangle$ и коэффициент изменчивости ω_S относятся к максимальным значениям нагрузок, наблюдаемым на отрезке времени, равном установленному сроку службы сооружения. Значительное отличие эмпирических распределений максимумов нагрузок от нормального закона служит дополнительным препятствием к тому, чтобы рассматривать формулы (9) и (10) как нечто большее, чем простейшую наглядную интерпретацию.

Используя формулы (4), (7) и (10), нетрудно выразить коэффициент запаса в «классическом условии прочности» (3) через параметры сопротивлений и нагрузок:

$$k = m \frac{1 + \gamma_S \omega_S}{1 + \eta_S \omega_S} \frac{1 - \gamma_R \omega_R}{1 - \gamma_R \omega_R}. \quad (11)$$

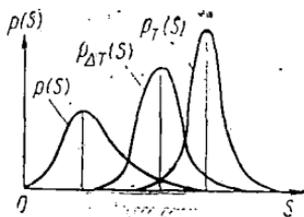


Рис. 99

Коэффициент условий работы m , вошедший в (11) из (4), позволяет ввести в коэффициент запаса k дополнительные резервы, учитывающие, например, степень ответственности сооружения.

§ 4.3. Применение элементарных вероятностных моделей

Следующий шаг по пути статистической интерпретации нормативных расчетов основан на вероятностных моделях, использующих элементарные понятия теории вероятностей без привлечения теории случайных процессов. Эти модели будут вполне применимы, если нагружение представляет собой единичный дискретный акт или последовательность таких актов, если исключить из рассмотрения процессы накопления повреждений и т. п. С некоторыми оговорками эти модели могут быть использованы также и для нагрузок, непрерывно развертывающихся во времени, если в расчеты ввести распределения максимальных значений нагрузок на всем рассматриваемом отрезке времени.

Некоторые соображения, относящиеся к элементарным моделям отказов, были приведены в предыдущей главе. Здесь, следуя в основном книге [17], приведем некоторые дальнейшие результаты, находящиеся в тесной связи с нормативными методами расчета конструкций.

Допустим, что состояние конструкции в условиях эксплуатации может быть охарактеризовано конечным числом независимых параметров $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Одни из этих параметров характеризуют внешнюю нагрузку, другие — прочность материала, третьи — отступление условий работы конструкции от расчетной схемы и т. д. В число параметров q_1, q_2, \dots, q_n мы не будем включать те величины, которые в конструкции реализуются в точном соответствии с расчетом или с малыми допусками, влиянием которых на работу конструкции можно пренебречь. Например, в их число не включаются параметры, характеризующие размеры и форму сооружения (за исключением, может быть, задач устойчивости и родственных им, где малые отступления от проектных размеров приобретают важное значение). Таким образом, все параметры q_1, q_2, \dots, q_n мы будем считать случайными, предполагая, что известна их совместная плотность вероятности $p(q)$. Для краткости эти

параметры мы будем называть определяющими параметрами.

Основная задача расчета состоит в определении вероятности того, что недопустимое предельное состояние не будет достигнуто, и в сопоставлении найденной вероятности с некоторым нормативным значением. Запишем условие недопустимости предельного состояния (1) в виде

$$\Psi(q) = R(q) - \dot{S}(q) > 0. \quad (12)$$

Вероятность случайного события, состоящего в том, что неравенство (12) будет выполнено, есть не что иное, как мера надежности системы:

$$P = \int_{\Psi(q) > 0} p(q) dq. \quad (13)$$

Задача определения надежности P сводится, таким образом, к интегрированию плотности вероятности $p(q)$ по той части пространства определяющих параметров q_1, q_2, \dots, q_n , где выполняется условие (1) («область безопасности»).

Поскольку вероятность P должна быть весьма близка к единице, то удобнее вычислять вероятность $Q = 1 - P$:

$$Q = \int_{\Psi(q) < 0} p(q) dq. \quad (14)$$

Тогда основное расчетное условие примет вид

$$Q \leq Q_*. \quad (15)$$

Здесь Q_* — нормативное значение вероятности достижения предельного состояния — достаточно малое число, которое устанавливается на основании технико-экономических соображений, опыта строительства и эксплуатации и т. д.

Формулы (12), (14) и (15) дают принципиальное решение задачи расчета конструкций на надежность. Необходимо отметить, что для их применения требуется знать не только совместную плотность вероятности $p(q)$, но и решение соответствующей детерминистической задачи для всей интересующей нас области изменения параметров q_1, q_2, \dots, q_n . Решение этой задачи дается обычными методами строительной механики. Таким образом, вероятностный подход не может заменить решения детерминистической задачи. Напротив, он предполагает

решение этой задачи в объеме, нередко большем, чем классические методы расчета.

Н. С. Стрелецкий [73] исходил из понятия недифференцированного коэффициента запаса

$$k = \frac{R(q)}{S(q)} \quad (16)$$

Этот коэффициент в отличие от входящего в условие (3) нормативного коэффициента запаса является случайной величиной. Выберем среди определяющих параметров такой, который будет взаимно однозначной дифференцируемой функцией коэффициента k и остальных $n-1$ параметров: $q_1 = h(k, q_2, \dots, q_n)$. Используя формулу (1.12) вычислим плотность вероятности $p(k)$:

$$p(k) = \int p[h(k, q_2, \dots, q_n), q_2, \dots, q_n] \left| \frac{\partial h(k, q_2, \dots, q_n)}{\partial k} \right| dq_2 \dots dq_n \quad (17)$$

Отсюда можно найти вероятность наступления предельного состояния

$$Q = \int_0^1 p(k) dk.$$

Еще один подход основан на анализе распределений функции $\Psi(q)$, вводимой согласно (12). Производя замену переменных $q_1 = h_1(\Psi, q_2, \dots, q_n)$, получим формулу, аналогичную формуле (17):

$$p(\Psi) = \int p[h_1(\Psi, q_2, \dots, q_n), q_2, \dots, q_n] \left| \frac{\partial h_1(\Psi, q_2, \dots, q_n)}{\partial \Psi} \right| dq_2 \dots dq_n.$$

Вероятность наступления предельного состояния вычисляется как

$$Q = \int_{-\infty}^0 p(\Psi) d\Psi \quad (18)$$

А. Р. Ржаницын [69] принял, что вектор q распределен нормально и что функция $\Psi(q)$, названная им «функцией неразрушимости», является линейной функцией определяющих параметров

$$\Psi = \sum_{k=1}^n a_k q_k \quad (19)$$

Аналогичные допущения использовались Фрейденталем [98]. Эти допущения позволили прийти к весьма простым расчетным формулам, которые в ряде случаев да-

ют явную зависимость между мерой надежности и вероятностными характеристиками определяющих параметров.

Рассмотрим вначале случай, когда задана совместная плотность вероятности параметров R и S , характеризующая математическими ожиданиями $\langle R \rangle$ и $\langle S \rangle$ и корреляционной матрицей с элементами K_{RR} , K_{SS} и $K_{RS} = K_{SR}$. «Функция неразрушимости» $\Psi = R - S$ имеет математическое ожидание и дисперсию, равные

$$\langle \Psi \rangle = \langle R \rangle - \langle S \rangle, \quad D(\Psi) = K_{RR} - 2K_{RS} + K_{SS}. \quad (20)$$

Величину, обратную коэффициенту изменчивости ω_ψ , А. Р. Ржаницын назвал характеристикой безопасности γ :

$$\gamma = \frac{1}{\omega_\psi} = \frac{\langle R \rangle - \langle S \rangle}{\sqrt{K_{RR} - 2K_{RS} + K_{SS}}}. \quad (21)$$

Чем больше характеристика безопасности γ , тем меньше вероятность разрушения. Очевидно, что характеристика γ совпадает с введенным в § 3.1 гауссовским уровнем надежности.

Обычно корреляционная связь между нагрузкой и несущей способностью отсутствует. Вводя коэффициенты изменчивости ω_R и ω_S , перепишем формулу (21) в виде

$$\gamma = \frac{x - 1}{\sqrt{\omega_R^2 x^2 + \omega_S^2}}. \quad (22)$$

При этом отношение $x = \langle R \rangle / \langle S \rangle$ представляет собой величину, которую мы будем называть условным коэффициентом запаса (последний, в отличие от «истинного» коэффициента запаса (16) не является случайной величиной). Решая формулу (22) относительно x , выразим явно условный коэффициент запаса через вероятностные характеристики сопротивлений и нагрузок и гауссовский уровень надежности:

$$x = \frac{1}{1 - \gamma^2 \omega_R^2} \left[1 + \sqrt{1 - (1 - \gamma^2 \omega_R^2)(1 - \gamma^2 \omega_S^2)} \right]. \quad (23)$$

Для ориентировки на рис. 100 дан график для условного коэффициента запаса x , построенный при $\omega_R = \omega_S$. По горизонтали наряду с характеристикой γ отложены значения меры надежности P и логарифмического уровня надежности $\rho = -\lg(1 - P)$.

Формулы (21) и (22) обобщаются на случай любого числа определяющих параметров q_1, q_2, \dots, q_n при условии, что функция $\Psi(q)$ линейна, а параметры имеют нормальное распределение. Для характеристики безопасности γ получаем формулу

$$\gamma = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \langle q_k \rangle}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k K_{q_j q_k}}}. \quad (24)$$

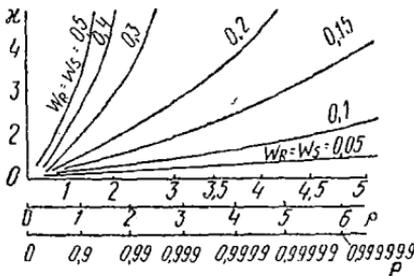


Рис. 100

Был предложен ряд обобщений описанного подхода, включающих отказ от нормального закона распределения и линейного характера условия (12). Однако при обобщениях теряется основное достоинство этого подхода — простота конечных формул и возможность непосредственной интерпретации результатов в привычных терминах нормативных расчетов. Основной же недостаток — неучет фактора времени — в этих обобщениях сохраняется.

§ 4.4. Применение моделей пуассоновского типа

Изложенные выше подходы к истолкованию норм расчета строительных конструкций базировались на элементарных стохастических моделях. Это не позволило правильно ввести фактор времени: установленный срок службы сооружений, изменчивость нагрузок во времени, их сочетание во времени и т. п. В последнее время был предпринят ряд усилий для привлечения к нормативным расчетам понятий теории случайных процессов. Представление о современном состоянии в этой области дают сборники трудов [106, 110].

Сооружения и строительные конструкции должны быть высоконадежными системами, а их отказы, связанные с потерей несущей способности, — крайне редкими событиями. Наиболее подходящими моделями для этих типов отказов являются модели пуассоновского типа.

При некоторых ограничениях на свойства нагрузок и сопротивлений соотношения, основанные на моделях пуассоновского типа, допускают истолкование в терминах норм расчета строительных конструкций. В частности, удается установить соотношения для расчетных нагрузок, коэффициентов перегрузки и нормативных коэффициентов запаса в зависимости от нормативной надежности сооружения в целом, установленного срока службы, числа расчетных элементов или слабых мест в конструкции, степени ответственности данного элемента, статистических характеристик сопротивлений и статистических характеристик нагрузок, включая характеристики изменчивости и сочетания во времени [30].

Рассмотрим $2m$ -мерное пространство качества, элементы которого имеют составляющие $r_k(t)$, $s_k(t)$ ($k = 1, \dots, m$). Составляющие $s_k(t)$ интерпретируются как нагрузки, действующие на k -тый элемент конструкции, составляющие $r_k(t)$ — как соответствующие сопротивления. Допустимая область Ω_0 задается в виде

$$\Omega_0 = \{r, s: s_k(t) < r_k(t); k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (25)$$

Принимается, что $P(0) = 1$, $Q(t) = 1 - P(t) \ll 1$ для всех рассматриваемых t , т. е. система является высоконадежной. Полагая статистическую зависимость между компонентами процессов пренебрежимо малой, а поток выбросов из Ω_0 — пуассоновским, получаем приближенную оценку типа (3.131) для условной функции надежности

$$P(t | r) \approx \exp \left[- \sum_{k=1}^m \int_0^t v_k(\tau | r) d\tau \right]. \quad (26)$$

Здесь $v_k(t | r)$ — математические ожидания числа выбросов в единицу времени за поверхность $r_k(t) - s_k(t) = 0$ при условии, что компоненты $r_k(t)$ процесса $r(t)$ заданы. Для условной вероятности отказа $Q(t | r)$ используем более удобную для аналитических вычислений линейную оценку типа (3.130). В результате получаем

$$Q(t | r) \approx \sum_{k=1}^m \int_0^t v_k(\tau | r) d\tau. \quad (27)$$

Безусловная вероятность отказа определяется по формуле типа (3.34)

$$Q(t) = \int Q(t | r) p(r; t) dr, \quad (28)$$

где $p(\mathbf{r}; t)$ — совместная плотность вероятности для компонент процесса $\mathbf{r}(t)$. Условие надежности системы (15) перепишем в виде

$$Q(t) \leq Q_*(t), [t \in (0, T_*)]. \quad (29)$$

Здесь T_* — установленный срок службы; $Q_*(t) = 1 - P_*(t)$, а нормативная надежность системы $P_*(t)$, вообще говоря, является функцией времени (рис. 101).

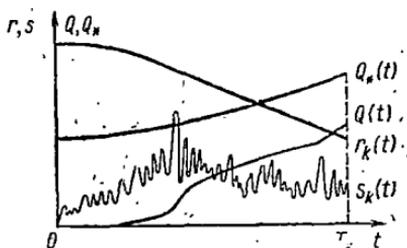


Рис. 101

Для того, чтобы получить обозримые аналитические результаты, проведем дальнейшую специализацию статистической модели. Пусть $s_k(t)$ представляют собой квазистационарные дифференцируемые нормальные процессы с математическими ожиданиями

$\langle s_k(t) \rangle > 0$, дисперсиями $D[s_k(t)] \equiv \sigma_{s_k}^2(t)$ и эффективными частотами $\omega_{r_k}(t)$, которые являются медленно меняющимися (по сравнению с реализациями) функциями времени. Относительно $r_k(t)$ положим, что они являются медленно меняющимися нормальными процессами с математическими ожиданиями $\langle r_k(t) \rangle > 0$, дисперсиями $D[r_k(t)] \equiv \sigma_{r_k}^2(t)$ и пренебрежимо малыми вероятностями обнаружения на отрицательной полуоси. Кроме того, как обычно, примем, что $\sigma_{s_k}(t) \ll \langle s_k(t) \rangle$, $\sigma_{r_k}(t) \ll \langle r_k(t) \rangle$, точнее, что выполняется условие

$$u_k \equiv \frac{\sigma_{r_k}^2 \langle s_k \rangle + \sigma_{s_k}^2 \langle r_k \rangle}{\sigma_{r_k} \sigma_{s_k} \sqrt{\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2}} \gg 1. \quad (30)$$

Вычисляя по формуле типа (3.58) математическое ожидание числа выбросов, оценим условную вероятность отказа (27)

$$Q(t|r) \approx \sum_{k=1}^m \int \exp \left[-\frac{(r_k - \langle s_k \rangle)^2}{2\sigma_{s_k}^2} \right] \frac{\omega_{s_k} d\tau}{2\pi}. \quad (31)$$

В рамках сделанных предположений совместная

плотность вероятности для сопротивлений определяется как

$$p(r) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{r_k}} \exp \left[-\frac{(r_k - \langle r_k \rangle)^2}{2\sigma_{r_k}^2} \right], \quad (32)$$

где перенормировочные коэффициенты для усеченных нормальных распределений положены равными единице. Для вычисления безусловной вероятности отказа следует подставить формулы (31) и (32) в формулу (28). Интегрирование дает

$$Q(t) \approx \sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\sigma_{s_k}}{\sqrt{\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2}} \exp \left[-\frac{(\langle r_k \rangle - \langle s_k \rangle)^2}{2(\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2)} \right] \Phi(u_k) \frac{\omega_{s_k} d\tau}{2\pi}$$

где $\Phi(u)$ — по-прежнему означает нормированную функцию нормального распределения. Но в силу предположения (30) можно принять, что $\Phi(u_k) \approx 1$. Окончательное выражение для безусловной вероятности отказа принимает вид

$$Q(t) \approx \sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\sigma_{s_k}}{\sqrt{\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2}} \exp \left[-\frac{(\langle r_k \rangle - \langle s_k \rangle)^2}{2(\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2)} \right] \frac{\omega_{s_k} d\tau}{2\pi}. \quad (33)$$

Все величины, входящие под знак интеграла, вообще говоря, являются функциями медленного времени τ . Необходимо напомнить, что данный вывод относится к высоконадежным системам и что для функции надежности использована приближенная линейная оценка (3.130).

Формула (33) вместе с неравенством (29) содержит в себе все составные части нормативных расчетов. Эта формула выражает вероятность отказа в зависимости от статистических характеристик нагрузок и сопротивлений, включая их изменчивость во времени, в зависимости от числа элементов системы и от установленного срока службы T_* . Учет зависимости статистических характеристик от времени позволяет описать различные расчетные случаи, старение и износ, а зависимость нормативной надежности от времени позволяет включить в расчет экономические и морально-технические факторы.

Эффект сочетания нагрузок может быть учтен так, как это сделано в статье [15]. Например, если нагрузка $s_k(t)$ равна сумме нагрузок, обладающих такими же свойствами, то в формуле (33) достаточно выразить $\langle s_k(t) \rangle$, $\sigma_{s_k}(t)$ и $\omega_{s_k}(t)$ через математические ожи-

дания слагаемых, их корреляционные функции и корреляционные функции их производных.

Явные формулы для нормативных коэффициентов получаются, например, в простейшем случае, когда $m = 1$, $s(t)$ представляет собой стационарный процесс, а r — случайная величина (индексы опущены). Подставляя (33) в (29) при $t = T_*$ и решая неравенство относительно математического ожидания нагрузки, получим

$$\langle r \rangle \gg (1 + \alpha \omega_s) \langle s \rangle, \quad (34)$$

где $\omega_s = \sigma_s / \langle s \rangle$ — коэффициент изменчивости нагрузки; α — коэффициент, определяемый по формуле

$$\alpha = \sqrt{2 \left(1 + \frac{\sigma_r^2}{\sigma_s^2} \right) \ln \left(\frac{\omega_s T_*}{2\pi Q_*} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_r^2}{\sigma_s^2}}} \right)}. \quad (35)$$

Здесь обозначено $Q_* = Q_*(T_*)$.

Правая часть неравенства (34) интерпретируется как расчетная нагрузка, а коэффициент

$$n = 1 + \alpha \omega_s \quad (36)$$

соответствует коэффициенту нагрузки в нормативных расчетах. Его можно также истолковать как коэффициент запаса, исчисляемый по отношению к математическим ожиданиям сопротивления и нагрузок. Если расчетные значения сопротивления и нагрузок отличаются от их математических ожиданий, то коэффициент запаса n необходимо соответствующим образом перенормировать. Графики для коэффициента α приведены на рис. 102, где $T_s = 2\pi/\omega_s$, а цифры у кривых указывают логарифмические уровни нормативной надежности $\rho = -\lg Q_*$. При попытках применить эти данные к реальным ситуациям необходимо иметь в виду, что t , T_* и T_s не обязательно измеряются в единицах физического или календарного времени и что эти единицы должны быть согласованы между собой, а также с принятым способом измерения и обработки статистических данных.

Рассмотрим формулы (34)—(36): Они выражают расчетные величины через статистические характеристики нагрузок и сопротивлений, нормативную надежность и установленный срок службы, т. е. через те параметры, которые в первую очередь определяют надежность эле-

ментов конструкции. Все эти факторы входят в расчетную формулу недифференцированно. Это отличает ее от соответствующей формулы (4) СНиП СССР. Это обстоятельство естественным образом вытекает из рассматриваемой стохастической модели, которая, во всяком случае, является не менее общей и разумной, чем другие стохастические модели, привлекаемые для интерпретации нормативных формул.

Более общая формула (33) не может быть непосредственно использована для определения расчетных нагрузок и расчетных сопротивлений. Это не только является следствием ее аналитической сложности, но и вытекает из существа задачи. Задача об обеспечении нормативной надежности сооружения не имеет единственного решения: нормативная надежность может быть обеспечена бесконечным числом сочетаний надежностей элементов, образующих систему. Чтобы устранить эту неопределенность, необходимо оптимальным образом распределить надежность сооружения среди его элементов. Таким образом, мы естественно приходим к оптимизационному подходу, некоторые аспекты которого будут обсуждены в одном из следующих параграфов.

Рассмотренная стохастическая модель принадлежит к числу моделей пуассоновского типа. Ее можно распространить на более сложное пространство качества, существенно нестационарные процессы, процессы, отличающиеся от нормальных и т. п. Нетрудно обобщить модель на случай, когда наряду с непрерывно действующими нагрузками на сооружение действуют кратковременные нагрузки с заданными вероятностями проявления и т. п. Однако эти обобщения приводят к громоздким уравнениям или к алгоритмам, требующим приме-

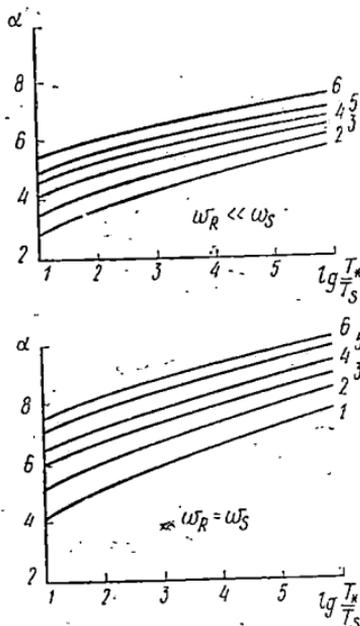


Рис. 102

нения ЭВМ. Все это показывает, что на основании более совершенных стохастических моделей едва ли удастся получить достаточно простые нормативные формулы. Кроме того, из анализа стохастических моделей следует, что факторы, влияющие на надежность сооружения, взаимодействуют между собой весьма сложным образом, так что расщепление коэффициента запаса на составляющие (коэффициенты нагрузки, коэффициенты материала, коэффициенты условий работы, коэффициенты сочетания нагрузок) с теоретической точки зрения не оказывается оправданным. Возвращение к недифференцированным коэффициентам запаса, назначаемым с учетом установленного срока службы сооружения, его нормативной надежности, числа элементов и степени их ответственности, статистических характеристик сопротивления и нагрузок (в том числе с учетом их временных свойств — изменчивости во времени и корреляции между собой) не обязательно должно рассматриваться как шаг назад по пути совершенствования норм. Естественно ожидать табличной формы задания коэффициентов запаса. Структура аналитических соотношений, вытекающих из рассмотрения стохастических моделей отказов, могла бы служить основанием для выбора структуры таблиц и функциональных зависимостей для недифференцированных коэффициентов запаса. В частности, вхождение в правую часть формулы (35) величины T_* указывает на необходимость явного введения в нормативные документы установленного срока службы сооружения; вхождение в правую часть величины Q_* говорит о необходимости более четкой классификации сооружений по степени их ответственности, а предельных состояний — по тяжести последствий.

§ 4.5. Применение кумулятивных моделей отказов

Обеспечение высокой надежности по отношению к потере несущей способности и к другим отказам аварийного характера является необходимым. Вместе с тем эти отказы составляют весьма небольшую часть от общего числа отказов конструкций и сооружений. Наиболее часто встречающиеся отказы — это постепенные отказы, которые связаны с прекращением или частичным нарушением нормальных условий эксплуатации. Именно постепенные отказы, как правило, влияют на

текущие затраты по эксплуатации конструкций и сооружений, определяя в значительной степени их экономичность и эффективность. Недостаточное внимание к этому типу отказов находит отражение в том, что расчетно-теоретическая глава СНиП, в сущности, не содержит рекомендаций, относящихся к постепенным отказам. Между тем теория надежности конструкций естественно включает в себя описание и этого типа отказов.

Среди постепенных отказов важное место занимают механические отказы: накопление пластических деформаций и деформаций ползучести, накопление усталостных повреждений [12, 14, 17]. Наряду с механическими отказами к постепенным отказам относятся многие отказы немеханической и смешанной природы: растрескивание, выветривание, коррозионный и механический износ и др. Эти отказы не обязательно приводят к аварийным ситуациям, но могут существенно снижать эксплуатационные и эстетические качества, требовать перерыва в эксплуатации, ремонта и т. п. С точки зрения теории надежности отказы, связанные с постепенным необратимым накоплением повреждений, описываются при помощи кумулятивных моделей.

Остановимся вначале на некотором развитии теории кумулятивных моделей отказов из § 3.10. Рассмотрим уравнение типа (3.194)

$$\frac{dv}{dt} = f[s(t), r, v]. \quad (37)$$

Здесь $v(t)$ — векторный процесс накопления повреждений, $s(t)$ — векторный процесс, характеризующий условия нагружения, r — случайный вектор, характеризующий сопротивление системы. Векторы v , s и r включают в себя компоненты как механического, так и немеханического происхождения. Например, среди компонентов вектора s могут быть температура, влажность, концентрация агрессивных веществ и т. п. На правую часть уравнения (37) наложено условие, что все $f_j \geq 0$. Это обеспечивает необратимость процесса накопления повреждений и, следовательно, выполнение условия (3.190). Условие $v \in \Omega_0$ будем записывать в виде (3.188), т. е. выражать через норму вектора v :

$$\|v\| < 1. \quad (38)$$

Случайный процесс $v(t)$ зависит от двух групп факторов случайной природы, входящих в уравнение (37).

Это случайный процесс нагружения $s(t)$ и случайные свойства системы, характеризуемые вектором \mathbf{r} . Поскольку вектор \mathbf{r} характеризует начальные свойства системы, а их изменение во времени (старение, износ и т. п.) включено в векторный процесс $\mathbf{v}(t)$, то учет случайных факторов нагрузки и системы может быть произведен последовательно. Вначале рассматривается условный процесс $\mathbf{v}(t|\mathbf{r})$ и вычисляется условная функция надежности для системы с фиксированным значением вектора \mathbf{r} . По формуле (3.195) с учетом (38) получаем

$$P_0(t|\mathbf{r}) = P\{\|\mathbf{v}(t|\mathbf{r})\| < 1\}. \quad (39)$$

Соответствующий условный показатель долговечности будем обозначать через $T(\mathbf{r})$. На втором этапе вычисляется безусловная функция надежности

$$P(t) = \int P_0(t|\mathbf{r})p(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad (40)$$

где $p(\mathbf{r})$ — плотность вероятности вектора \mathbf{r} .

Наибольшие трудности в практических расчетах составляет учет разброса нагрузочных реализаций $s(t)$. Если этот разброс относительно невелик, то целесообразно поступить так, как делают при оценке усталостной долговечности (§ 3.10). Для условной функции надежности возьмем аппроксимацию типа (3.208)

$$P_0(t|\mathbf{r}) \approx 1 - \eta[t - T_c(\mathbf{r})], \quad (41)$$

где $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда; $T_c(\mathbf{r})$ — характеристический показатель долговечности. Последний целесообразно ввести как корень уравнения

$$\langle \|\mathbf{v}(t|\mathbf{r})\| \rangle = 1. \quad (42)$$

Угловыми скобками обозначено условное математическое ожидание (при фиксированном \mathbf{r}). Этот приближенный подход был проиллюстрирован на рис. 85.

Подставим приближенное соотношение (41) в формулу (40) для безусловной функции надежности. В результате получаем

$$P(t) = \int p(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad (43)$$

$$T(\mathbf{r}) > t$$

Интегрирование проводится по той области в пространстве значений \mathbf{r} , в которой выполняется неравенство $T(\mathbf{r}) > t$. В частности, если v и r — одномерные случай-

ные величины, то условие (42) заменяется на условие $\langle v(r) \rangle = 1$, а формула (43) принимает вид (3.209)

$$P(t) = 1 - F_r[r_c(t)]. \quad (44)$$

Здесь $F_r(r)$ — функция распределения параметра r ; $r_c(t)$ — корень уравнения

$$T_c(r) = t. \quad (45)$$

Теперь приведем некоторые простые соотношения, которые могут быть использованы как нормативные формулы. Пусть процесс нагружения — стационарный и характеризуется одним скалярным параметром s . Тогда удобной и достаточно универсальной аппроксимацией для эмпирического показателя долговечности будет следующая:

$$T_c(r) = \begin{cases} T_0 \left(\frac{r - r_0}{s - r_0} \right)^m & (s > r_0), \\ \infty & (s \leq r_0). \end{cases} \quad (46)$$

При этом T_0 — некоторая постоянная времени; r_0 — неслучайная величина, характеризующая минимальный уровень сопротивления, при котором вносятся повреждения; r — случайная величина, характеризующая сопротивление наугад выбранной системы или элемента, а показатель степени m принимает значения из отрезка $[1, \infty)$. Зависимость (46) широко применяется в машиностроении при обработке результатов испытаний на циклическую и длительную прочность [50, 72]. При этом постоянная r_0 играет роль минимального предела выносливости (предела длительной прочности). Вместо временных параметров $T_c(r)$ и T_0 в соотношениях типа (46) могут быть использованы соответствующие числа циклов или блоков нагружения.

Согласованное с соотношением (46) распределение случайной величины r имеет вид

$$F_r(r) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{r_c} \right)^\alpha \right] & (r > r_0), \\ 0 & (r \leq r_0), \end{cases} \quad (47)$$

где r_0 — минимальное сопротивление из (46); r_c — еще одна характеристика, имеющая размерность сопротивления, $\alpha \in [1, \infty)$. Формула (47) соответствует распределению Вейбулла [119], которое широко применяется для описания разброса хрупкой и циклической прочно-

сти [17]. Будучи асимптотическим распределением минимальных значений в совокупности случайных величин, имеющих нижнюю грань r_0 , это распределение носит достаточно универсальный характер и поэтому может быть использовано для описания многих процессов повреждения немеханического характера.

Подставляя (46) и (47) в формулы (44) и (45), после несложных вычислений приходим к выражению для функции надежности

$$P(t) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{s-r_0}{r_c}\right)^\alpha \left(\frac{t}{T_0}\right)^\beta\right] & (s > r_0), \\ 1 & (s \leq r_0). \end{cases} \quad (48)$$

Это не что иное, как закон надежности Вейбулла с показателем степени

$$\beta = \alpha/m. \quad (49)$$

Соответствующая интенсивность отказов будет

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{T_0} \left(\frac{s-r_0}{r_c}\right)^\alpha \left(\frac{t}{T_0}\right)^{\beta-1}, \quad (50)$$

причем $\lambda'(t) > 0$, если $\alpha > m$ и $\lambda'(t) < 0$, если $\alpha < m$. При $\alpha = m$ приходим к экспоненциальному закону надежности.

Параметры, входящие в формулы (46)–(48), определяются из некоторых базовых испытаний. Планирование этих испытаний и обработка результатов проводятся примерно так же, как и при исследовании циклической прочности металлов [17, 50]. Для каждого конкретного типа отказов необходимо выбрать подходящие физические параметры, характеризующие уровень нагружения и уровень сопротивления. Численное значение параметров r_0 , r_c , α , m и T_0 определяется статистической обработкой результатов базовых испытаний, которые включают в себя испытания при различных постоянных уровнях нагружения или некоторые программные испытания. Для сокращения продолжительности испытаний и уменьшения числа образцов предложены различные приемы, известные под названием ускоренных и форсированных испытаний на долговечность. Описание этих приемов выходит за рамки книги.

Структура нормативных формул для расчета на постепенные отказы существенно зависит от того, как фор-

мулируется критерий надежности. Например, если критерий надежности взят в виде

$$P(T_*) \geq P_*, \quad (51)$$

где T_* — установленный срок службы; P_* — предельно допустимое значение показателя надежности к истечению этого срока, то из формулы (48) следует соотношение

$$s \leq r_0 + r_c \left[\ln \left(\frac{1}{P_*} \right) \right]^{1/\alpha} \left[\left(\frac{T_0}{T_*} \right)^{1/m} \right]. \quad (52)$$

Это соотношение можно истолковать как связь между расчетной нагрузкой s и расчетным сопротивлением, стоящим в правой части неравенства. При этом правая часть явно и довольно простым образом зависит от установленного срока службы T_* и нормативного значения показателя надежности P_* , а также от параметров, входящих в формулу (46) для эмпирической долговечности. Если нормируется интенсивность отказов, т. е. условие надежности берется в виде

$$\lambda(T_*) \leq \lambda_*, \quad (53)$$

то связь между расчетной нагрузкой и расчетным сопротивлением будет иметь вид

$$s \leq r_0 + r_c \left(\frac{\lambda_* T_0}{\beta} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{T_0}{T_*} \right)^{\beta-1}. \quad (54)$$

При заданных нагрузках и сопротивлениях соотношения (52) и (54) можно использовать для выбора периодичности планово-предупредительного ремонта. Так, беря соотношение (52) со знаком равенства и разрешая его относительно T_* , получаем формулу

$$T_* = T_0 \left(\frac{r_c}{s - r_0} \right)^m \left[\ln \left(\frac{1}{P_*} \right) \right] \frac{1}{\beta}, \quad (55)$$

которая выражает время до ближайшего ремонта через параметры нагрузок и сопротивления, а также через нормативные значения меры надежности. Возможен также и экономико-оптимизационный подход для установления периодичности ремонтов. Этот подход основан на максимизации математического ожидания от алгебраической суммы прибыли за время эксплуатации системы, расходов на ремонт и убытков, связанных с вынужденной остановкой эксплуатации. Некоторые подробности будут приведены в следующем параграфе.

§ 4.6. Оптимизационные подходы к расчету строительных конструкций

Цель проектирования и расчета — создание оптимальных в определенном смысле конструкций. Естественно, что уже на ранних этапах развития теории надежности конструкций наметились ее связи с теорией оптимального проектирования. Одно из первых предложений мы находим еще у Н. Ф. Хоциалова. В последние годы число публикаций в этой области резко увеличилось. Примерами могут служить работы [26, 38, 46, 70, 78]. Обзор других публикаций содержится в [67, 109]. Ниже мы рассмотрим основные направления в области оптимизационных подходов к расчетам надежности и обсудим возникающие при этом трудности.

Простейшая оптимизационная постановка в теории надежности конструкций может рассматриваться как вероятностная модификация обычного критерия наименьшего веса (наименьшей стоимости). Допустим, что при проектировании мы имеем возможность распоряжаться некоторым набором конструктивных параметров, характеризующих форму и размеры элементов, тип и структуру соединений и т. п. Вектор конструктивных параметров обозначим через a , а область его допустимых значений — через A . В качестве целевой функции $C(a)$ возьмем массу или объем конструкции или ее стоимость. Функцию $C(a)$ в дальнейшем называем просто стоимостью. Критерий для нахождения вектора конструктивных параметров a имеет вид

$$C(a) \rightarrow \min; P(a) \geq P_*; a \in A, \quad (56)$$

где P_* — минимально допускаемое нормативное значение показателя надежности. Существенное преимущество критерия оптимизации, основанного на соображениях надежности, состоит в том, что многочисленные и разнородные ограничения типа условий прочности, жесткости и устойчивости заменяются здесь единым ограничением на показатель надежности P .

Наряду с критерием минимальной стоимости используется также двойственный ему критерий максимальной надежности

$$P(a) \rightarrow \max; C(a) \leq C_*; a \in A. \quad (57)$$

Здесь C_* — максимально допустимое значение стоимо-

сти. Заметим, что задачи (56) и (57) нелинейны и, вообще говоря, многоэкстремальны.

Вместо начальной стоимости $C(a)$ часто предлагают минимизировать математическое ожидание от суммы начальной стоимости (величины капитальных вложений) и расходов, связанных с эксплуатацией конструкции, включая возмещение ущерба от отказов. В простейшем случае приходим к оптимизационной задаче типа [70, 103, 109]

$$C_0(a) + [1 - P(a)]C_1(a) \rightarrow \min; \quad P(a) \geq P_*; \quad a \in A, \quad (58)$$

где $C_1(a)$ — сумма потерь, связанных с отказами. Эта модель допускает далеко идущие обобщения, учитывающие расходы, связанные с предварительными испытаниями, профилактикой отказов, повторными отказами, ремонтом и восстановлением, учетом отдаленности капитальных затрат и т. п. Отметим, что при учете фактора времени надежность и ее нормативное значение становятся функциями времени, а целевая функция — функционалом от функции надежности $P(t)$. Например, вместо (58) получаем [22]

$$C_0(a) - \int_0^{T_*} c_1(a, \tau) P'(a, \tau) d\tau \rightarrow \min; \\ P(a, \tau) \geq P_*(\tau); \quad a \in A; \quad \tau \in [0, T_*], \quad (59)$$

где T_* — нормативный срок службы; $c_1(a, t)$ — интенсивность функции потерь. Если необходимо различать отказы по степени приносимого ущерба, то вместо (59) можно взять задачу

$$C_0(a) + \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(a, t) L_{\alpha}(a) \rightarrow \min; \\ P(a, \tau) \geq P_*(\tau); \quad a \in A; \quad \tau \in [0, T_*]. \quad (60)$$

При этом Q_{α} — вероятность наступления отказа; L_{α} — стоимость соответствующего ущерба.

Некоторые авторы не вводят в соотношения типа (56) и (58) ограничений по надежности. Безусловная оптимизация дает при этом значение вектора a_0 , по которому можно подсчитать соответствующее «оптимальное» значение показателя надежности $P(a_0)$. Это значение реализует некоторый компромисс между требованиями экономичности и надежности. К сожалению, до сих пор не проанализирован вопрос, каковы абсолютные величины этих «оптимальных» значений показате-

лей надежности, как они относятся к значениям показателей надежности, обеспечивающим безопасность, и насколько «оптимальные» значения показателей чувствительны к выбору экономических и технических моделей и к изменениям численных параметров этих моделей. Вообще, несмотря на большую привлекательность оптимизационных подходов к задачам надежности, их освоение происходит весьма медленно. Причиной служит недостаточная разработанность экономических моделей, условный характер численных значений стоимостных показателей, принципиальные трудности учета отказов, сопряженных с «неэкономическим» ущербом, и многое другое.

Наибольшие шансы на успех оптимизационные подходы указанного выше типа имеют, на наш взгляд, в тех задачах, где предельно допустимый риск отказа достаточно высок и где можно говорить о применимости закона больших чисел. Примером служат расчеты эффективности антисейсмических мероприятий. Значения безусловной функции надежности сооружений в сейсмических районах должны быть достаточно высоки и сопоставимы с таковыми для несейсмических районов. Однако значения условной функции надежности, соответствующей крайне редко встречающимся сильным землетрясениям, не обязательно очень высоки. Экономический подход здесь может быть вполне оправдан, хотя, на наш взгляд, он должен дополняться проверкой безопасности по полной функции надежности.

Не встречаются особых затруднений также те оптимизационные подходы, в которых не используются понятия экономического характера. Например, если высокая надежность системы может быть обеспечена чисто техническими мероприятиями, не приводящими к высоким затратам, то критерий максимальной надежности (57) освобождается от ограничения на стоимость. В результате приходим к принципу максимальной надежности, который использовался в § 3.8 для оптимального проектирования виброзащитных устройств:

$$P(a) \rightarrow \max_a; \quad a \in A. \quad (61)$$

Зачастую система допускает разбиение на подсистемы, взаимодействующие между собой (в смысле теории надежности) по закону последовательного соединения. В этом случае оптимизация может быть проведена в

пределах каждой из подсистем. В связи с этим возникает задача о некотором квазиоптимальном распределении нормативного показателя надежности для системы в целом между подсистемами. Покажем, как такой подход реализуется применительно к вероятностной модели, рассмотренной в § 4.4.

Пусть $C(r_1, r_2, \dots, r_m; Q_*)$ — функция стоимости, равная, например, математическому ожиданию суммы начальной стоимости сооружения и ущерба, связанного с отказом его элементов. Здесь r_k — характерное нормативное сопротивление k -го элемента, связанное с его нормативным показателем надежности $P_k \equiv 1 - Q_k$ уравнением

$$\int_0^{T_*} \frac{\sigma_{s_k}}{\sqrt{\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2}} \exp \left[-\frac{(\langle r_k \rangle - \langle s_k \rangle)^2}{2(\sigma_{r_k}^2 + \sigma_{s_k}^2)} \right] \frac{\omega_{s_k} d\tau}{2\pi} = Q_k. \quad (62)$$

Согласно формулам (29), (33) и (62)

$$\sum_{k=1}^m Q_k \leq Q_*, \quad (63)$$

что соответствует заложенному в рассматриваемой стохастической модели предложению о последовательном (в смысле теории надежности) соединении элементов.

Нормативные значения Q_k находятся из решения оптимизационной задачи [30]

$$C[r_1(Q_1), \dots, r_m(Q_m); Q_1 + \dots + Q_m] \rightarrow \min_{Q_1, \dots, Q_m} \quad (64)$$

при дополнительном условии (63). Например, если стоимость всех элементов, а также потери, связанные с их отказами, равны между собой, то из соображений симметрии вытекает, что все $Q_k = Q_*/m$. Чем выше стоимость элементов и соответствующая функция потерь, тем выше нормативный показатель надежности для данного элемента.

Чтобы привести данный подход в соответствие с нормами, достаточно разбить элементы по степени их ответственности и по порядку их стоимости на классы и приписать элементам каждого класса равные нормативные показатели надежности. Тогда вместо (63) получим

$$m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + \dots = Q_*, \quad (65)$$

где m_j — число элементов сооружения, принадлежащих данному классу. Нетрудно также выписать аналогичные соотношения для систем с резервированием. Если из эмпирических или интуитивных соображений задать отношения Q_2/Q_1 , Q_3/Q_1 , ..., то нормативные показатели надежности элементов вычисляются для каждого класса в зависимости от нормативного показателя надежности сооружения в целом и от числа элементов. После этого задача об определении расчетных нагрузок и расчетных сопротивлений может быть решена однозначно.

Описанный подход объединяет в себе два направления по упрощению вероятностно-оптимизационных постановок с целью приведения их в соответствие с уровнем нормативных расчетов. Первое направление — расчленение системы на подсистемы с отдельной оптимизацией по стоимости или по надежности каждой из подсистем. Второе направление состоит в том, чтобы заменить строгие критерии оптимальности некоторыми квазиоптимальными критериями. Именно таким критерием является принцип равной надежности для подсистем равной ответственности и стоимости одинакового порядка. Очевидно, что принцип равной надежности представляет собой стохастический аналог принципа равнопрочности (равнонапряженности), который с успехом заменяет критерий наименьшего веса даже для таких конструкций, где эквивалентность критериев заведомо не выполняется.

Остановимся на оптимизационных задачах, связанных с прогнозированием индивидуальной долговечности (§ 3.14). Пусть система непрерывно эксплуатируется во времени t , и пусть в некотором масштабе прибыль, принесенная в единицу времени, составляет $\pi(t)$. Пусть, далее, в системе возможно появление нескольких несовместимых типов отказов, каждый из которых требует остановки системы. Стоимость ущерба, приносимого каждым из типов отказов, обозначим, как и ранее, через L_α . Математическое ожидание выигрыша в случае, если система, диагностированная в последний раз в момент времени t_k , будет находиться в эксплуатации до момента времени t , равно

$$C(t | T_k) = \int_{t_k}^t P(\tau | T_k) \pi(\tau) d\tau - \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(t | T_k) L_{\alpha}. \quad (66)$$

Здесь $Q_{\alpha}(t | T_k)$ — вероятности наступления отказов каждого типа на отрезке $(t_k, t]$:

$$Q_{\alpha}(t | T_k) = P \{u(\tau) \uparrow \Gamma_{\alpha}; t_k < \tau \leq t | w(T_k)\}. \quad (67)$$

Через $u(\tau) \uparrow \Gamma_{\alpha}$ обозначено событие, состоящее в пересечении вектором $u(t)$ куска Γ_{α} поверхности Γ в направлении из области Ω_0 .

С ростом t первое слагаемое $C_+(t | T_k)$ в правой части (66) растет, второе слагаемое $C_-(t | T_k)$, взятое по модулю, возрастает, так что математическое ожидание выигрыша — немонотонная функция времени. В качестве критерия для выбора момента t_* прекращения эксплуатации естественно принять условие максимума функции выигрыша

$$C(t | T_k) \rightarrow \max_t. \quad (68)$$

Это и есть искомое решающее правило. Это правило иллюстрировано на рис. 103. Существенно, что прогнозируемый оптимальный срок эксплуатации t_* ; вообще говоря, изменяется от одного наблюдения к другому. При достаточно стабильных условиях эксплуатации прогноз момента останова будет уточняться по мере накопления результатов измерений. Если же произойдет непредвиденное изменение условий нагружения, ухудшение состояния системы и т. п., то включенная в общий алгоритм идентификация состояния и параметров сооружения позволит учесть эти явления при выдаче рекомендаций на будущее. Аналогичные рассуждения приводят

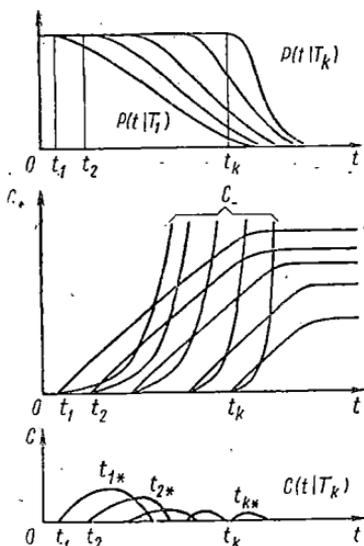


Рис. 103

нас к моделям для определения на стадии проектирования оптимального полного или межремонтного срока службы T_* . Соответствующая целевая функция получается, например, добавлением к целевой функции из (60) взятого с обратным знаком математи-

ческого ожидания прибыли за срок непрерывной эксплуатации T_* . Минимизация может проводиться как по параметру T_* , так и по совокупностям параметров a и T_* .

§ 4.7. Заключение

Методы теории вероятностей и теории надежности позволяют надлежащим образом истолковать нормативные нагрузки и коэффициенты запаса и открывают пути для их более глубокого изучения. Дальнейшее развитие статистических методов позволит, несомненно, делать различные качественные, а иногда и количественные выводы о закономерностях, лежащих в основе нормативных расчетов. Наконец, статистические методы и методы теории надежности дают теоретическую основу для правильной постановки сбора и обработки статистических сведений, относящихся к нагрузкам, характеристикам материала и другим расчетным параметрам.

Вместе с тем было бы неправильно придавать этим методам абсолютное значение и противопоставлять статистические методы обычным нормативным методам. По своему назначению строительные конструкции должны обладать высокой степенью надежности. Наступление предельного состояния для конструкций, работающих в нормальных условиях, не может рассматриваться как массовое событие. При этом оказывается неприменимы закон больших чисел и статистическое истолкование вероятности. Кроме того, мы почти нигде не располагаем настолько обширными статистическими материалами, чтобы с уверенностью судить о столь малых вероятностях. Поэтому при использовании статистических методов приходится прибегать к недостаточно обоснованной экстраполяции эмпирических распределений в области малых вероятностей. Ввиду этого условный характер вычисляемых вероятностей усугубляется. Наконец, имеется еще одно соображение. Вероятностное описание условий работы конструкции под нагрузкой является более полным, чем чисто детерминистическое описание, но все же остается теоретической схемой. Ряд эксплуатационных и технологических (притом случайных) факторов приходится исключать из рассмотрения. Между тем в обычных расчетах они неявно учитываются при выборе расчетных коэффициентов.

Итак, методы теории вероятностей и теории надежности, несомненно, являются мощным и весьма полезным средством теоретического истолкования, исследования и совершенствования нормативных методов расчета. Подчеркивая их значение для исследования и уточненного расчета, следует в то же время высказать мнение, что нормативные методы расчета конструкций по своей форме должны все же оставаться детерминистическими, а соответствующие расчетные величины и нормативные коэффициенты должны назначаться и корректироваться в первую очередь на основании опыта проектирования, возведения и эксплуатации конструкций.

Успешное развитие нормативных методов расчета конструкций требует дальнейших исследований в области теории и практики надежности конструкций. В частности, к перспективным направлениям относятся накопление экспериментальных данных о нагрузках, об отказах сооружений и конструкций, о величине ущерба, связанного с отказом конструкции, о надежности массовых конструкций, находящихся в типичных условиях эксплуатации, развитие методов статистического контроля качества материалов и изделий заводского изготовления, изучение экономики проектирования, строительства и эксплуатации с целью разработки более совершенных экономических моделей и уточнения их числовых характеристик. Наряду с методами оценки надежности на стадии проектирования важное практическое значение имеют методы и средства профилактики отказов, повышения и сохранения надежности, совершенствование которых требует осуществления широкой программы натурных наблюдений, разработки приборов и аппаратуры, создания научно обоснованных программ исследования и математического обеспечения к ним.

Методам теории надежности принадлежит видная роль в ускорении технического прогресса, в повышении эффективности, качества и экономичности технических разработок и их осуществлений. Экономический эффект от применения методов теории надежности к расчетам сооружений и машин складывается не только из возможной экономии материалов и средств, но и из предупреждения возможных потерь вследствие отказов, повреждений и катастроф.

Помимо основной области применения, теория надежности оказывает сильное влияние на общее повы-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Витт А. О статистическом рассмотрении динамических систем. — В кн.: Андронов А. А. Собрание трудов. М., Изд. АН СССР, 1956.

2. Барштейн М. Ф. Воздействие нерегулярной волны на сквозные инженерные сооружения. — Строительная механика и расчет сооружений, 1964, № 1.

3. Барштейн М. Ф., Зубков А. Н. Статистический анализ боковых сил, возникающих при движении мостового крана. — Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 1.

4. Беляев Ю. К. О всплесках и бликах случайных полей. — Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 3.

5. Беляев Ю. К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1970, № 2.

6. Биргер И. А. К математической теории технической диагностики. — В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, РИНТИП, 1968.

7. Благонадежин В. Л., Кудрявцев Е. П. Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи. — Докл. научно-техн. конф. МЭИ, Динамика и прочность машин. Изд. МЭИ, 1965.

8. Благонадежин В. Л., Москаленко В. Н. Изгиб многопролетных квазирегулярных балок со статистическими характеристиками. — Строительная механика и расчет сооружений, 1969, № 2.

9. Болотин В. В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек. — Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.

10. Болотин В. В. Применение статистических методов для оценки прочности конструкций при сейсмическом воздействии. — Изв. АН СССР, Инженерный сборник, 1959, т. 25.

11. Болотин В. В. Статистическая теория сейсмостойкости сооружений. — Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., 1959, № 4.

12. Болотин В. В. Некоторые обобщения теории суммирования усталостных повреждений и их приложения к анализу долговечности при действии случайных сил. — Изв. вузов, сер. Машиностроение, 1959, № 8.

13. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких упругих оболочках при наличии источников тепла. — Прикл. матем. и мех., 1960, т. 24., № 2.

14. Болотин В. В. Прочность и накопление повреждений при случайных нагрузках. — В сб.: Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1961, вып. 7.

15. Болотин В. В. О сочетании случайных нагрузок, действующих на сооружение. — Строительная механика и расчет сооружений, 1962, № 2.
16. Болотин В. В. Накопление усталостных повреждений при напряжениях; представляющих собой широкополосный случайный процесс. — В сб.: Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1963, вып. 9.
17. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. — М., Стройиздат. 1965.
18. Болотин В. В., Макаров Б. П. О приближенном решении некоторых задач статистической динамики. — Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
19. Болотин В. В. Об упругих деформациях подземных трубопроводов, прокладываемых в статистически неоднородном грунте. — Строительная механика и расчет сооружений, 1965, № 1.
20. Болотин В. В. Стохастические краевые задачи в теории пластин и оболочек. — Сб. докл. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М., Наука, 1966.
21. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Случайные термоупругие напряжения в оболочках. — Сб. докл. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М., Наука, 1966.
22. Болотин В. В. Механика твердого тела и теория надежности. Сб. докл. II Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Механика твердого тела. М., Наука, 1966.
23. Болотин В. В., Макаров Б. П. Корреляционная теория докритических деформаций тонких упругих оболочек. — Прикл. матем. и мех., 1968, т. 32, № 3.
24. Болотин В. В. Теория надежности механических систем с конечным числом степеней свободы. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1969, № 5.
25. Болотин В. В. Теория надежности распределенных механических систем. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1969, № 6.
26. Болотин В. В. Теория оптимальной виброзащиты при случайных воздействиях. — Тр./МЭИ, М., 1970, вып. 74, Динамика и прочность машин.
27. Болотин В. В. Стохастические краевые эффекты при докритических деформациях упругих оболочек. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1970, № 2.
28. Болотин В. В. Задачи теории надежности в механике деформируемых твердых тел. — В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию Н. И. Мухомелишвили). М., Наука, 1972.
29. Болотин В. В., Волоховский В. Ю. О деформации упругой сферической оболочки со случайными начальными неправильностями. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1972, № 5.
30. Болотин В. В. К статистической интерпретации норм расчета строительных конструкций. — Строительная механика и расчет сооружений, 1977, № 1.
31. Болотин В. В. О прогнозировании надежности и долговечности машин. — Изв. АН СССР, Машиноведение, 1977, № 5.
32. Васенин В. Л., Днепров И. В., Синячек М. Н. Прогнозирование надежности систем марковского типа. — Изв. вузов, Машиностроение, 1977, № 9.
33. Волоховский В. Ю., Радин В. П. О выборе оптимальных параметров нелинейных виброзащитных систем при случайных воздействиях. — Изв. АН ССР. Механика твердого тела, 1972, № 2.

34. Волоховский В. Ю., Чирков В. П. Выбросы стационарного гауссовского процесса из прямоугольных областей. — Тр./МЭИ, 1974, вып. 185, Вопросы устойчивости и колебаний.

35. Волоховский В. Ю. Исследование оценок для функции надежности распределенных механических систем методом статистического моделирования. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1973, № 5.

36. Вольмир А. С., Кильдибеков Н. Г. Вероятностные характеристики поведения цилиндрической оболочки при действии акустической нагрузки. — Прикладная механика, 1965, т. 1, вып. 3.

37. Вольмир А. С., Культербаев Х. П. Исследование нелинейных колебаний цилиндрических панелей под действием ветра. — Прикладная механика, 1974, т. 10, вып. 3.

38. Гайнулина С. Х. Учет надежности при проектировании конструкций наименьшего веса. — В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, РИНТИП, 1968.

39. Гершензон М. М., Ермоленко А. Ф. О двухсторонних оценках для функции надежности. — Тр./МЭИ, 1972, вып. 101, Динамика и прочность машин.

40. Гнеденко В. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., Наука, 1965:

41. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсных сил. М., Госстройиздат, 1961.

42. Гусев А. С. К анализу выбросов случайных функций. — Изв. вузов, Машиностроение, 1967, № 8.

43. Гусев А. С. О распределении амплитуд в широкополосных случайных процессах при схематизации их по методу полных циклов. — Изв. АН СССР, Машиностроение, 1974, № 1.

44. Диментберг М. Ф. О нижней оценке долговечности при стационарных случайных нагрузках. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 3.

45. Диментберг М. Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных воздействиях. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 5.

46. Дривинг А. Я. Экономический подход к определению оптимальных запасов конструкций. — Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 5.

47. Екимов В. В. Вероятностные методы в строительной механике корабля. Л., Судостроение, 1966.

48. Ермоленко А. Ф. Корреляционная функция и дисперсия меры повреждения при стационарном случайном воздействии. — Тр./МЭИ, 1974, вып. 184, Динамика и прочность машин.

49. Каган А. Я. Исследование изгиба балок конечной длины на случайном упругом основании методом Монте-Карло. — Строительная механика и расчет сооружений, 1972, № 3.

50. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М., Машиностроение, 1977.

51. Комар Н. М. Экспериментальное изучение выбросов стационарных случайных процессов. — Тр./МЭИ, 1970, вып. 74, Динамика и прочность машин.

52. Комар Н. М., Окопный Ю. А. Изучение надежности механических систем на электронных моделях. — Надежность и контроль качества, 1971, № 12.

53. Кудрявцев Е. П., Новожилов А. В., Судакова Н. И. Статистическое исследование деформационных свойств песчаных оснований. — Основания, фундаменты и механика грунтов. 1967, № 6.
54. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., Наука, 1970.
55. Макаревский А. И. и др. Прочность самолета (методы нормирования расчетных условий прочности самолета). М., Машиностроение, 1975.
56. Макаров Б. П. Применение статистического метода для анализа экспериментальных данных по устойчивости оболочек. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
57. Макаров Б. П. Анализ нелинейных задач устойчивости оболочек при помощи статистического метода. — Инженерный журнал, 1963, т. 3, № 1.
58. Макаров Б. П. Статистический анализ несовершенных цилиндрических оболочек. — В сб.: Расчеты на прочность. М., Машиностроение, 1969, вып. 15.
59. Мастаченко В. Н. О статистическом моделировании в строительной механике. — В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, РИНТИП, 1968.
60. Москаленко В. Н. Стохастические краевые эффекты в осесимметричных задачах термоупругости для круговых цилиндрических оболочек. — Механика твердого тела, 1967, № 3.
61. Москаленко В. Н. Стохастические термоупругие краевые эффекты в пластинах. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1967, № 5.
62. Николаенко Н. А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций. М., Машиностроение, 1967.
63. Новожилов А. В. Изгиб тонких пластин на упругом стохастическом основании. — Тр./МЭИ, 1970, вып. 74, Динамика и прочность машин.
64. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
65. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М., Наука, 1973.
66. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М., Физматгиз, 1962.
67. Почтман Ю. М., Харитон Л. Е. Оптимальное проектирование конструкций с учетом надежности. — Строительная механика и расчет сооружений, 1976, № 6.
68. Радин В. П. Об оптимизации линейных виброзащитных систем по надежности. — Прикладная механика, 1972, т. 8, вып. 9.
69. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Стройиздат, 1954.
70. Ржаницын А. Р. Экономический принцип расчета на безопасность. — Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 3.
71. Романов Ю. И. О возможности представления сейсмического воздействия в виде стационарного случайного процесса. — Строительная механика и расчет сооружений, 1963, № 5.
72. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963.
73. Стрелецкий Н. С. Основы статистического учета коэффициентов запаса прочности сооружений. М., Стройиздат, 1947.

74. Тимашев С. А. Методы нормирования надежности сооружений с неэкономической ответственностью. — В кн.: Вопросы надежности железобетонных конструкций. Куйбышев, 1973.

75. Тимашев С. А. Статистическое исследование устойчивости тонких выпуклых ортотропных оболочек. — В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, РИНТИП, 1971, вып. 2.

76. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., Наука, 1970.

77. Хоциалов Н. Ф. Запасы прочности. — Строительная промышленность, 1929, № 10.

78. Чирас А. А. К вопросу рационального проектирования упругопластических дискретных систем при случайных нагрузках. — В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, РИНТИП, 1968.

79. Шепутис А. М., Статулявичус В. А. О вероятностях выхода случайных процессов и полей из заданной области. — В сб.: Проблемы надежности в строительной механике, Вильнюс, РИНТИП, 1971, вып. 2.

80. Шукайло В. Ф. О распределении абсолютного максимума стационарного случайного процесса. — Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 6.

81. Amazigo J. C. Buckling under axial compression of long cylindrical shells with random axisymmetric imperfections. — Quart. Appl. Math., 1969, v. 26, No 4.

82. Ang A. H.-S., Amin M. Safety factors and probability in structural engineering. — Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Struct. Div., 1969, No ST-7.

83. Benjamin J. R., Cornell C. A. Probability, statistics and decision for civil engineers. New York, Mc Graw-Hill Book Co, 1970.

84. Black H. C. Safety, reliability and airworthiness. — In: Internat. Conf. on Structural Safety and Reliability. Oxford, Pergamon Press, 1972.

85. Bogdanoff J. L., Schiff A. Earthquake effects in the safety and reliability analysis of engineering structures. — In: Internat. Conf. on Structural Safety and Reliability. Oxford, Pergamon Press, 1972.

86. Bolotin V. V. Statistical theory of the aseismic design of structures. — In: Proc. of the Second World Conf. on Earthquake Engineering. Tokyo, 1960.

87. Bolotin V. V. Statistical aspects in the theory of structural stability. — In: Dynamic Stability of Structures, Oxford, Pergamon Press, 1967.

88. Bolotin V. V. Reliability theory and stochastic stability. — In: Study on Stability, University of Waterloo, 1971, No 6.

89. Bolotin V. V. Stochastic models of cumulative damage in composite materials. — Engineering Fracture Mechanics, 1976, v. 8.

90. Brooks R. D. Structural fatigue research and its relation to design. — In: Fatigue in Aircraft Structures. Academic Press, New York, 1956.

91. Butler J. P. Reliability analysis in the estimation of transport-type aircraft fatigue performance. — In: Internat. Conf. on Structural Safety and Reliability. Oxford, Pergamon Press, 1972.

92. Cohn M. Z., Parimi S. R. Multicriteria probabilistic structural design. — In: Proc. 3rd Canad. Congr. Appl. Mech., Calgary, 1971.

93. **Chopra P. S., Wang P. J., Hartz B. J.** Probabilistic prediction of multiple fracture under service conditions. — *Nuclear Engng and Design*, 1974, v. 28, No 3.
94. **Crandall S. H.** (ed.), *Random vibration*. Cambridge, Technology Press, 1958, v. 1; 1963, v. 2.
95. **Davenport A. G.** Structural safety and reliability under wind action. — In: *Internat. Conf. on Structural Safety and Reliability*. Oxford, Pergamon Press, 1972.
96. **Förster H.** Bruchlastspielzahl bei statistisch verteilten Beanspruchungen. — *Maschinenbau*, 1968, Bd 17, H. 7.
97. **Fraser W. B., Budiansky B.** The buckling of a column with random initial deflections. — *Journ. Appl. Mech.*, 1969, v. 36, No 2.
98. **Freudenthal A. M.** Safety and probability of structural failure. — *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1954, No 408.
99. **Freudenthal A. M., Shinozuka M.** Probability of structural failure under earthquake acceleration. — *Trans. Japan Soc. Civil Engrs*, 1965, No 118.
100. **Freudenthal A. M.** Statistical approach to brittle fracture. — In: *Fracture* (ed. Liebovitz), v. 2. New York, Academic Press, 1968.
101. **Grandori G., Benedetti D.** On the choice of the acceptable seismic risk. — *Earthquake Engng and Struct. Dynamics*, 1973, v. 2.
102. **Ijengar R. N., Ijengar K. T. S. R.** A nonstationary process model for earthquake accelerograms. — *Bull. Seism. Soc. America*, 1969, v. 59, No 3.
103. **Johnson A. I.** Strength, safety and economical dimensions of structures. — *Bull. Div. Struct. Engng, Roy. Inst. Technology, Stockholm*, 1953, No 12.
104. **Kaul M. K., Penzien J.** Stochastic seismic analysis of yielding offshore towers. — *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Engng Mech. Div.*, 1974, v. 100, No EM-5.
105. **Konishi I.** Safety and reliability of suspension bridges. — In: *Internat. Conf. on Structural Safety and Reliability*. Oxford, Pergamon Press, 1972.
106. **Lind N. C.** (ed.), *Structural reliability and codified design*. University of Waterloo, 1970.
107. **Longuet-Higgins M. S.** The statistical analysis of random moving surface. — *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1957, v. 249 A, No 966.
108. **Maier M.** Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen. — *Berlin, Springer-Verlag*, 1926.
109. **Murzewski J.** Bezpieczenstwo konstrukcji budowlanych. — *Warszawa, Arkady*, 1970.
110. **Murzewski (red.).** Stochastyczna mechanika konstrukcji. — *Warszawa, Wyd. Polskiej Akademii Nauk*, 1973.
111. **Parkus H.** Wärmespannungen bei zufallsabhängiger Oberflächentemperatur. — *Zeitschr. angew. Math. Mech.*, 1962, Bd 42, H. 10—11.
112. **Payne A. O.** The fatigue of aircraft structures. — *Engineering Fracture Mechanics*, 1976, v. 8.
113. **Roorda J.** Some statistical aspects of the buckling of imperfection-sensitive structures. — *Journ. Mech. Phys. Solids*, 1969, v. 17, No 2.

114. **Rosenblueth E.** Distribution of structural response to earthquake. — Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Engng Mech. Div., 1962, No EM-3.

115. **Schueller G. I.** On the structural reliability of reactor safety containments. — Nuclear Engng and Design, 1974, v. 3.

116. **Shinozuka M.** Probability of structure failure under random loading. — Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Engng Mech. Div., 1964, No EM-5.

117. **Shinozuka M.** Methods of safety and reliability analysis. — In.: Internat. Conf. on Structural Safety and Reliability. Oxford, Pergamon Press, 1972.

118. **Trifunac M. D.** A method for synthesizing realistic strong ground motion. — Bull. Seism. Soc. Amer., 1971, v. 61, No 6.

119. **Weibull W.** A statistical theory of the strength of materials. — Proc. Roy. Swedish Inst. Engng Res., Stockholm, 1939, No 151.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
Глава 1. Задачи и методы статистической динамики	
§ 1.1. Основные понятия	10
§ 1.2. Задачи статистической динамики. Классификация систем	17
§ 1.3. Метод решения задач для вырожденных систем	23
§ 1.4. Метод функций Грина	29
§ 1.5. Метод дифференциальных уравнений	37
§ 1.6. Метод спектральных представлений	44
§ 1.7. Прохождение стационарного случайного процесса через стационарную линейную систему	52
§ 1.8. Элементы статистической динамики нелинейных систем	62
§ 1.9. Метод статистической линеаризации	68
§ 1.10. Сведения из теории марковских процессов	74
§ 1.11. Применение теории марковских процессов к решению задач статистической динамики	80
§ 1.12. Понятие о стохастических краевых задачах. Случайные поля и их описание	88
§ 1.13. Методы решения линейных стохастических краевых задач	103
§ 1.14. Методы решения нелинейных стохастических краевых задач	113
Глава 2. Применение методов теории вероятностей в строительной механике	
§ 2.1. Расчет балок, лежащих на сплошном упругом основании со случайными характеристиками	119
§ 2.2. Расчет балок на дискретных упругих опорах со случайными характеристиками	130
§ 2.3. Расчет докритических деформаций тонких упругих оболочек	139
§ 2.4. Краевые эффекты при докритических деформациях	149
§ 2.5. Растяжение пластины с начальными неправильностями	154
§ 2.6. Случайные термоупругие напряжения в оболочках	160
§ 2.7. Термоупругие краевые эффекты	166
§ 2.8. Расчет конструкций на сейсмические воздействия	171
Глава 3. Теория надежности и долговечности сооружений	
§ 3.1. Основные понятия	180
§ 3.2. Некоторые простейшие задачи теории надежности	187
§ 3.3. Основы общей теории надежности механических систем	192

	Стр.
§ 3.4. Выбросы случайного процесса за заданный уровень . . .	206
§ 3.5. Распределение экстремумов случайного процесса . . .	214
§ 3.6. Приближенные оценки для функции надежности. Модели пуассоновского типа	226
§ 3.7. Оценка функций надежности в случае многомерного пространства качества	239
§ 3.8. Применение теории надежности к расчету оптимальной виброзащиты оборудования	249
§ 3.9. Надежность и долговечность систем марковского типа	256
§ 3.10. Кумулятивные модели отказов	269
§ 3.11. Основы теории надежности распределенных систем	276
§ 3.12. Примеры оценки надежности распределенных систем	291
§ 3.13. Методы редукции в теории надежности распределенных систем	297
§ 3.14. Теоретические основы текущего прогнозирования долговечности	302
Глава 4. Обоснование нормативных расчетов строительных конструкций	
§ 4.1. Вступительные замечания	310
§ 4.2. Полувероятностная интерпретация нормативных расчетов	313
§ 4.3. Применение элементарных вероятностных моделей	318
§ 4.4. Применение моделей пуассоновского типа	322
§ 4.5. Применение кумулятивных моделей отказов	328
§ 4.6. Оптимизационные подходы к расчету строительных конструкций	334
§ 4.7. Заключение	340
Список литературы	343

Владимир Васильевич Болотин

**МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ В РАСЧЕТАХ СООРУЖЕНИЙ**

Редакция литературы по строительным материалам и конструкциям

Зав. редакцией П. И. Филимонов

Редактор А. В. Болотина

Мл. редактор Л. А. Табачник

Внешнее оформление художника А. Г. Монсеева

Технический редактор Н. Г. Бочкова

Корректор И. В. Медведь

ИБ № 2102

Сдано в набор 20.02.81. Подписано в печать 22.01.82.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 2. Гарнитура «Литературная»
Печать высокая. Усл. печ. л. 18,48. Усл. кр.-отг. 18,48. Уч. изд. л. 17,80:
Тираж 7.000 экз. Изд. № AVIII-7635 Зак. № 38. Цена 1 р. 40 к.

Стройиздат

101442. Калевская, 23а

Калужское производственное объединение «Полиграфист», пл. Ленина, 5