В. А. ПОДОЛЬСКИЙ
А. М. СУХОДСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В. А. ПОДОЛЬСКИЙ,
А. М. СУХОДСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для средних специальных учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1974

517
П44
УДК[516+517+519.1/2](075)

Подольский В. А. и Суходский А. М.

П44 Сборник задач по высшей математике. Учеб. пособие для техникумов. М., «Высш. школа», 1974.

352 с. с ил.

Задачник составлен в соответствии с программой по высшей математике для техникумов и включает ,аналитическую геометрию, теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, комбинаторику и элементы теории вероятностей.

В каждом параграфе проводится необходимый теоретический материал. Типовые задачи сопровождаются подробными решениями. В конце каждой главы имеются задачи смешанного типа.

Всего в «Сборнике» содержится более 2000 задач.

Предназначается для учащихся средних специальных учебных заведений.

П $\frac{20203-556}{001(01)-74}$ 250—74 517

Рецензенты: канд. физ.-матем. наук, доц. *Э. З. Шувалова* и ст. препод. *Л. М. Нахимсон*.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Глава 6. Производная и дифференциал

Глава 7. Исследование функций методами дифференциального исчисления

Глава 8. Неопределенный интеграл

Глава 9. Определенный интеграл

Глава 10. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

Глава 11. Дифференциальные уравнения

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Сборник задач» составлен в соответствии с новой программой по курсу «Элементы высшей математики» для учащихся средних специальных учебных заведений, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР в 1972 г. В него включены задачи по элементам аналитической геометрии на плоскости, элементам дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, основам дифференциальных уравнений, теории рядов и теории вероятностей, а также по комплексным числам и комбинаторике.

В начале каждого раздела программы кратко излагаются основные теоретические положения, после чего приводится достаточное количество типовых задач. Часть из них сопровождается решениями, к некоторым задачам имеются методические указания, значительно облегчающие решение задачи.

Всего в «Сборнике» содержится свыше 2000 задач, что позволит преподавателю подобрать нужный материал не только для работы на уроках и домашних заданий, но и для самостоятельных и контрольных работ.

Авторы заранее признательны всем лицам, которые выскажут свои замечания и пожелания, направленные на улучшение данного «Сборника».

Авторы

ГЛАВА 1

МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПРЯМОЙ

Система координат на прямой l считается заданной, если на этой прямой указаны:

1) положительное направление;
2) точка O — начало координат;
3) линейная единица для измерения длин.

Координатой произвольной точки M прямой l называется число x, равное длине отрезка OM, взятой со знаком «плюс», если направление от начала координат O к точке M совпадает с положительным направлением на прямой, и со знаком «минус» — в противном случае. Тот факт, что точка M имеет координату x, записывается следующим образом: $M(x)$.

Рассмотрим основные задачи аналитической геометрии на прямой.

1. *Расстояние AB между точками $A(x_A)$ и $B(x_B)$* вычисляется по формуле

$$AB = |x_A - x_B|. \tag{1}$$

2. *Координата x_M точки M, делящей отрезок AB в отношении* $\lambda > 0$ (т. е. точка M удовлетворяет соотношению $\frac{AM}{MB} = \lambda$), находится по формуле

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}. \tag{2}$$

В частности, при делении отрезка пополам, т. е. при $\lambda = 1$ получаем *формулу для нахождения координаты середины отрезка:*

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}. \tag{3}$$

1.1. Построить точки: $A(2)$, $B(-1)$, $C\left(\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-\frac{1}{4}\right)$, $E(-\sqrt{2})$, $F(3\sqrt{2})$, принимая масштабный отрезок равным 1 см.

1.2. Указать на координатной прямой точки, координаты x которых удовлетворяют неравенству: 1) $2 < x < 3$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant 0$; 3) $2 \leqslant x < 5$; 4) $-8 < x \leqslant -1$; 5) $x \leqslant 3$; 6) $x \geqslant -1$; 7) $x > 0$.

1.3. Даны точки $A(-1)$ и $B(3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение. Длина отрезка AB находится по формуле (1):

$$AB = |x_A - x_B| = |-1 - 3| = 4.$$

1.4. Определить расстояние между точками A и B в каждом из следующих случаев: 1) $A(0)$, $B(-1)$; 2) $A(-2)$, $B(8)$; 3) $A(3)$, $B(-1)$; 4) $A(-7)$, $B(-5)$.

Полученные результаты проверить построением.

1.5. Найти точку B, зная, что она имеет положительную координату и отстоит от точки $A(-2)$ на расстоянии, равном 5 единицам. Результат проверить построением.

1.6. Найти координату точки M, делящей отрезок, ограниченный точками $M_1(2)$ и $M_2(8)$, в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (2) имеем

$$x_M = \frac{x_{M_1} + \lambda x_{M_2}}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 8}{1 + \frac{1}{2}} = 4.$$

1.7. Даны точки $M_1(-3)$ и $M_2(4)$. Найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении: 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = \frac{3}{4}$; 3) $\lambda = 1$; 4) $\lambda = 0$.

1.8. На отрезке AB найти точку M, отстоящую от точки $A(-9)$ на расстоянии, вдвое большем, чем от точки $B(3)$.

Решение. Задача сводится к делению отрезка AB точкой M в отношении $\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{2}{1} = 2$. По формуле (2) имеем

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{-9 + 2\cdot 3}{1+2} = -1.$$

Таким образом, $M(-1)$.

1.9. Найти точку A', симметричную точке $A(3)$ относительно точки $B(-1)$.

Решение. Точка B является серединой отрезка AA'. По формуле (3) имеем

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2}.$$

Подставляя в это равенство $x_A = 3$ и $x_B = -1$, найдем координату $x_{A'}$ точки A':

$$-1 = \frac{3 + x_{A'}}{2},$$

откуда $x_{A'} = -5$.

1.10. Определить координату середины отрезка AB в каждом из следующих случаев: 1) $A(-8)$, $B(-3)$; 2) $A(5)$, $B(9)$; 3) $A(-3)$, $B(3)$.

1.11. Найти координаты точек, симметричных точке $A(-2)$ относительно: 1) начала координат; 2) точки $B(2)$. Результаты проверить построением.

1.12. Найти точку M, отстоящую от точки $A(-5)$ на расстоянии, втрое большем, чем от $B(-2)$, и лежащую вне отрезка AB.

Указание. Точка B делит отрезок AM в отношении $\lambda = \frac{AB}{BM} = \frac{2}{1}$.

1.13. В точках, координаты которых 1, 2, 3, 4, соответственно помещены массы 1, 2, 3, 4 кг. Найти координату центра тяжести системы.

1.14. В точках $A(-3)$ и $B(7)$ помещены грузы весом 6 Н и 18 Н. Найти точку приложения равнодействующей.

Указание. Из механики известно, что точка приложения равнодействующей делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{18\text{ Н}}{6\text{ Н}} = \frac{3}{1}$.

§ 2. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольная декартова система координат на плоскости считается заданной, если на плоскости указаны:

1) две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано положительное направление,— *оси координат.* Первая из осей называется *осью абсцисс*, вторая — *осью ординат.* Точка O пересечения осей координат называется *началом координат*;

2) линейная единица для измерения длин.

Прямоугольными декартовыми координатами произвольной точки M плоскости называется упорядоченная пара чисел x и y, где x — координата проекции точки M на ось абсцисс, а y — координата проекции точки M на ось ординат. Тот факт, что точка M имеет координаты x и y, записывается так: $M(x; y)$.

1.15. Построить точки $A(3; 2)$, $B(0; 5)$, $C(-2; 0)$, $D(-3; -7)$, $E(6; -2)$.

1.16. Построить пятиугольник $ABCDE$, если координаты его вершин A (6; 0), B (5; 2), C (0; 3), D (—7; 1), E(—4; —6).

1.17. Указать, в каких четвертях лежат точки A(—2; 1), B (3; — 1), C (4; 5), $D\left(-2\frac{1}{2}; -2\right)$.

1.18. В каких четвертях может находиться точка, если: 1) ее ордината отрицательна; 2) ее абсцисса положительна?

1.19. На оси Oy взята точка с координатой (—3). Каковы ее координаты на плоскости?

1.20. Где расположены точки, имеющие: 1) равные абсциссы; 2) равные ординаты; 3) равные координаты?

1.21. Определить координаты точки, симметричной точке A (4; —2) относительно оси абсцисс; относительно оси ординат.

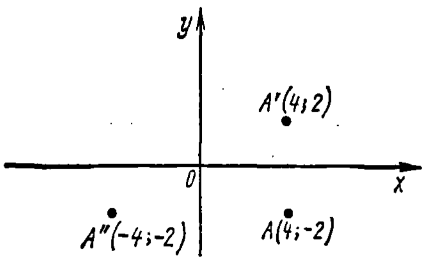


Рис. 1

Решение. Точка A', симметричная точке A относительно оси абсцисс, лежит на перпендикуляре к оси абсцисс (рис. 1); поэтому A' имеет такую же абсциссу, что и A; т. е. $x_{A'} = 4$. Кроме того, A' отстоит от оси абсцисс на том же расстоянии, что и точка A, т. е. на расстоянии, равном 2 единицам. Следовательно, ордината точки A' равна 2. Таким образом, получаем A' (4; 2).

Рассуждая аналогично, находим точку A'' (—4; —2), симметричную точке A относительно оси ординат.

1.22. Найти точки, симметричные точкам A (—3; —1) и B (0; —4) относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат.

1.23. Сторона квадрата равна 5 единицам. Две его смежные стороны лежат на осях координат. Определить координаты вершин квадрата (рассмотреть 4 случая).

1.24. Диагонали квадрата со стороной, равной 2 единицам, лежат на осях координат. Найти координаты его вершин.

1.25. Одна из вершин правильного треугольника со стороной, равной 4 единицам, совпадает с началом координат. Найти координаты остальных вершин, если известно, что одна из сторон треугольника лежит на оси абсцисс (рассмотреть 4 случая).

§ 3. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Расстояние AB между точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ вычисляется по формуле

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}. \qquad (1)$$

В частности, *расстояние от точки A до начала координат O* определяется следующим образом:

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}. \qquad (2)$$

1.26. Определить расстояние между точками $A(-2; 7)$ и B (13; —1).

Решение. Длину отрезка AB вычислим по формуле (1):

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=$$

$$=\sqrt{(-2-13)^2+(7+1)^2}=17.$$

1.27. Найти расстояние между точками A и B, если: 1) A (3; —4), B(6; —8); 2) A (10; 0), B (2; —6); 3) A (—11; —4), B (1; —9); 4) A (8; —4), B (—2; 1).

1.28. Найти расстояние от начала координат каждой из следующих точек: 1) A (—3; —4); 2) B (—12; 0); 3) C (—10; 24); 4) D (8; —15); 5) E $(-6; 6\sqrt{3})$.

1.29. Найти периметр треугольника, вершины которого находятся в точках A (2; —1), B (—1; 3) и C (2; 7).

1.30. Убедиться в том, что точки A (0; 1), B (—1; —2) и C (2; 7) лежат на одной прямой.

Указание. Точки A, B и C лежат на одной прямой, если длина большего из трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, равна сумме длин двух остальных.

1.31. Установить, будет ли треугольник ABC остроугольным, тупоугольным или прямоугольным в каждом из следующих случаев: 1) A (1; 4), B (5; 8), C (3; 2); 2) A (2; 1), B(—2; 5), C (—1; 3); 3) A (1; —1), B (—2; 1), C (1;2).

Указание. Треугольник является остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли квадрат большей его стороны меньше, равен или больше суммы квадратов двух других сторон.

1.32. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (—5; 1) и B (3; 2).

Решение. Искомая точка M лежит на оси ординат, поэтому ее абсцисса $x_M = 0$. Для нахождения ординаты y_M этой точки воспользуемся тем фактом, что $MA = MB$. По формуле (1) имеем

$$MA = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(0+5)^2 + (y_M - 1)^2} = \sqrt{25 + (y_M - 1)^2},$$

$$MB = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(0-3)^2 + (y_M - 2)^2} = \sqrt{9 + (y_M - 2)^2}.$$

Отсюда получаем уравнение относительно y_M:

$$\sqrt{25 + (y_M - 1)^2} = \sqrt{9 + (y_M - 2)^2}.$$

Решая его, найдем ординату y_M точки M:

$$25 + y^2 - 2y + 1 = 9 + y^2 - 4y + 4,$$

или

$$2y = -13,$$

откуда $y_M = -6{,}5$. Итак, искомая точка M (0; —6,5).

1.33. На осях координат найти точки, отстоящие от точки K (—6; 8) на расстоянии, равном 10.

1.34. Из точки A (—7; —3) к окружности с центром в точке C (5; —8) и радиусом, равным 5, проведены касательные. Найти их длины.

1.35. Найти точку D, равноудаленную от точек A (1; 2), B (9; 2), C (2; —5).

1.36. Найти точку, равноудаленную от осей координат и от точки C (2; 4).

§ 4. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении λ (т. е. точка M удовлетворяет условию $\frac{AM}{MB} = \lambda$), находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},$$
$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{1}$$

В частности, при делении отрезка пополам, т. е. при $\lambda = 1$, получаем *формулы для нахождения координат середины отрезка:*

$$x = \frac{x_A + x_B}{2},$$
$$y = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{2}$$

1.37. Отрезок, ограниченный точками A (1; 4) и B (4; —14), разделен на три равные части. Найти координаты точек деления C и D.

Решение. Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$. Следовательно, по формулам (1) имеем

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2,$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot(-14)}{1+\frac{1}{2}} = -2.$$

Таким образом, C (2; —2).

Точка D делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1} = 2$. Отсюда

$$x_D = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot 4}{1+2} = 3.$$

$$y_D = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot(-14)}{1+2} = -8$$

и, следовательно, D (3; —8).

1.38. Найти координаты точки, делящей отрезок AB, где A (3; 5) и B (1; —4), в отношении: 1) $\lambda = 3$; 2) $\lambda = 1$; 3) $\lambda = \frac{1}{4}$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$.

1.39. Найти координаты середины отрезка AB, если координаты его концов таковы: 1) A $(-1;\ 2)$, B $(3;\ -6)$; 2) A $(4;\ 7)$, B $(-2;\ -3)$; 3) A $(0;\ -5)$, B $(5;\ 0)$.

1.40. Найти длины медиан треугольника ABC, вершины которого A $(2;\ 1)$, B $(-4;\ -1)$, C $(-2;\ 5)$.

1.41. Найти координаты центра тяжести треугольника ABC, вершины которого $A(-3;\ 1)$, B $(0;\ -5)$, C $(-2;4)$.

Указание. Центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, причем эта точка делит каждую из медиан в отношении $2:1$ (считая от вершины).

1.42. Доказать, что координаты центра тяжести треугольника ABC могут быть вычислены по формулам

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

1.43. Даны две вершины A $(6;\ 2)$ и B $(3;\ -2)$ треугольника ABC и точка M $(3;\ 1)$ пересечения его медиан. Определить координаты вершины C.

1.44. Дан треугольник ABC: A $(-1;\ 3)$, B $(2;\ 1)$, C $(7;\ -3)$. Определить длину биссектрисы угла A.

Указание. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

1.45. Отрезок, координаты концов которого A $(-3;\ 7)$ и B $(6;\ -1)$, разделен на четыре равные части. Найти координаты точек деления.

1.46. Даны две точки A $(-4;\ 3)$ и B $(2;\ -1)$. На прямой AB найти точку C, удаленную от A на расстояние, втрое большее, чем от B, и расположенную по ту же сторону от A, что и B.

Решение. Точка B делит отрезок AC в отношении $\lambda = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$. По формуле (1) имеем:

$$x_B = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda} \quad y_B = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda}.$$

Подставляя в эти соотношения координаты точек A и B и $\lambda = 2$, получим уравнения относительно координат искомой точки C:

$$2=\frac{-4+2x_C}{3},\ -1=\frac{3+2y_C}{3},$$

откуда $x_C=5$, $y_C=-3$. Таким образом, $C\ (5;\ -3)$.

1.47. Один из концов отрезка AB находится в точке A $(5;\ -4)$, а его серединой является точка C $(0;\ -3)$. Найти координаты другого конца отрезка.

1.48. Известны две вершины A $(3;\ 0)$ и B $(-5;\ 7)$ треугольника ABC и координата центра тяжести M $(1;\ 14)$. Найти координаты третьей вершины C треугольника.

1.49. Даны две вершины A $(-6;\ -5)$ и B $(2;\ 4)$ параллелограмма $ABCD$ и точка M $(3;\ 1)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D.

1.50. В параллелограмме $ABCD$ известны вершины A $(1;\ -2)$, B $(2;\ 3)$ и C $(5;\ 6)$. Найти вершину D.

1.51. Отрезок AB разделен точками C $(0;\ -2)$ и D $(-3;\ 1)$ на три равные части. Найти координаты концов отрезка.

1.52. На прямой, проходящей через точки A $(-3;\ 8)$ и B $(1;\ -2)$, найти точку C, абсцисса которой $x_C=-2$.

Решение. Так как $x_A<x_C<x_B$, то точка C лежит внутри отрезка AB. Найдем отношение $\lambda=\frac{AC}{CB}$, в котором точка C делит отрезок AB. Для этого воспользуемся формулой (1):

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}.$$

Подставляя в это соотношение абсциссы точек A, B и C, получим уравнение относительно λ:

$$-2=\frac{-3+\lambda\cdot 1}{1+\lambda},$$

откуда $\lambda=\frac{1}{3}$. Теперь можно найти ординату y_C точки C:

$$y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{8+\frac{1}{3}\cdot(-2)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{11}{2}.$$

Таким образом, $C\left(-2;\ \frac{11}{2}\right)$.

1.53. На отрезке, соединяющем точки A $(4;\ -2)$ и B $(7;\ 4)$, найти точку C, ордината которой $y_C=1$.

1.54. Найти точки пересечения прямой, проходящей через точки A $(4;\ -3)$ и B $(1;\ 2)$, с осями координат.

1.55. На прямой, проходящей через точки A $(1;\ -2)$ и B $(0;\ -8)$, найти точку C, имеющую равные координаты.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

Всякое уравнение, связывающее две переменные x и y, вообще говоря, определяет *линию*, т. е. геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Имеет место и обратное утверждение. *Каждой линии на плоскости соответствует уравнение с двумя переменными x и y*, а именно, *такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей ей.*

Одна из основных задач аналитической геометрии состоит в составлении уравнения линии, если известен геометрический закон ее образования.

При этом желательно придерживаться следующего плана:

1) подходящим образом задать систему координат;

2) взять произвольную (текущую) точку M $(x;\ y)$, принадлежащую данному геометрическому месту точек;

3) составить соотношение между текущими координатами x и y, используя свойство, определяющее рассматриваемое геометрическое место;

4) проверить, действительно ли полученная зависимость между x и y есть уравнение данной линии, т. е. убедиться в том, что любая точка, координаты которой удовлетворяют полученному уравнению, принадлежит данной линии, а любая точка, координаты которой этому уравнению не удовлетворяют, данной линии не принадлежит.

1.56. Проверить, принадлежат ли линии L, определяемой уравнением $y = 2x^3-1$, следующие точки: 1) A $(-1;-3)$; 2) B $(2;\ 1)$.

Решение. Если координаты точки M удовлетворяют уравнению линии L, то эта точка принадлежит данной линии L; в противном случае точка M линии L не принадлежит.

1) Подставив координаты $x = -1$, $y = -3$ точки A в уравнение $y = 2x^3-1$, в результате получим тождественное равенство: $-3 = 2(-1)^3-1$, или $-3 = -3$. Это означает, что точка A принадлежит линии L.

2) Координаты $x = 2$, $y = 1$ точки B уравнению $y = 2x^3-1$ не удовлетворяют, ибо $1 \neq 2\cdot 2^3-1$. Следовательно, точка B $(2;\ 1)$ не принадлежит линии L.

1.57. Выяснить, какие из указанных точек принадлежат линии $y = \frac{1}{1-x^2}$: 1) $A\,(2;\ 0)$; 2) $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{4}{3}\right)$; 3) $C\,(-1\ ;2)$; 4) $D\left(-3;-\frac{1}{8}\right)$; 5) $E\left(3;-\frac{1}{8}\right)$.

1.58. Указать несколько точек, координаты которых удовлетворяют одному из следующих уравнений:
1) $2x - 4y + 3 = 0$; 2) $y = 0$;
3) $x^2 + y^2 = 4$; 4) $y^2 = 2x + 1$.

1.59. Построить линии L_1 и L_2, определяемые уравнениями: 1) $y - x = 0$; 2) $x - y^2 = 0$.

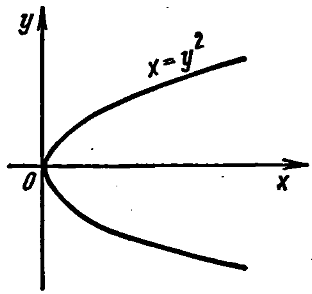


Рис. 2

Решение. 1) Линия L_1, определяемая уравнением $y - x = 0$, или, что то же, $y = x$, состоит из точек, у которых абсцисса x и ордината y равны между собой. Очевидно, эта линия есть биссектриса I и III координатных углов.

2) Выразим в уравнении $x - y^2 = 0$ одну из координат через другую: $x = y^2$. Придавая y различные произвольные значения, например, $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, найдем соответствующие значения x: $9, 4, 1, 0, 1, 4, 9$. В результате мы получаем точки $(-3; 9)$, $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$, $(3; 9)$, принадлежащие линии L_2. Построив эти точки на координатной плоскости и соединив их плавной линией, получим искомую кривую* (рис. 2).

1.60. Построить (по точкам) линии, соответствующие уравнениям: 1) $y = -x$; 2) $2x - y + 1 = 0$; 3) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 4) $y = \frac{1}{1 + x^2}$; 5) $y = \frac{1}{x}$; 6) $y = x^3$; 7) $y = x^2 - 1$.

1.61. Найти точку пересечения линий L_1 и L_2, уравнения которых $y^2 - x^2 = 5$ и $2x - y - 1 = 0$.

Решение. Координаты точки пересечения линий L_1 и L_2 должны удовлетворять каждому из уравнений, определяющих эти линии. Следовательно, нахождение точки пересечения сводится к совместному решению системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 5, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $y = 2x - 1$. Подставляя

---

* В главе 7 будет дан детальный способ построения линии, определяемой уравнением.

выражение для y в первое уравнение, получим $-x^2+(2x-1)^2=5$.

Упростим последнее уравнение: $3x^2-4x-4=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-\frac{2}{3}$. Тогда $y_1=3$, $y_2=-\frac{7}{3}$. Таким образом, линии L_1 и L_2 пересекаются в двух точках: $(2;\ 3)$ и $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$.

1.62. Найти точки пересечения следующих линий: 1) $2x-y+1=0$ и $2x+y-5=0$; 2) $x^2+y^2=25$ и $x=3$; 3) $y=\frac{1}{1+x}$ и $x+y-1=0$; 4) $y=\frac{6}{x}$ и $x^2+y^2=13$.

1.63. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек A и B. Построить полученное геометрическое место точек.

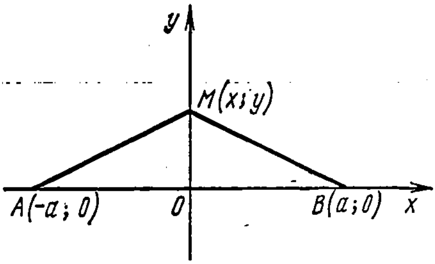


Рис. 3

Решение. 1. За ось абсцисс примем прямую, соединяющую точки A и B, с положительным направлением от A к B; начало координат поместим в середине отрезка AB (рис. 3). Тогда, принимая длину отрезка AB за $2a$, получим $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$.

2. Возьмем текущую точку $M(x;\ y)$, принадлежащую данному геометрическому месту.

3. Из определения геометрического места следует, что $MA=MB$. Выражая длины отрезков MA и MB по формуле расстояния между двумя точками, получим

$$MA=\sqrt{(x+a)^2+y^2},\quad MB=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Тогда условие $MA=MB$ выражается следующим уравнением относительно текущих координат x и y:

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}. \qquad (*)$$

Упростим это уравнение. Для этого возведем обе его части в квадрат и приведем подобные члены:

$$(x+a)^2=(x-a)^2,$$

или

$$x^2+2ax+a^2=x^2-2ax+a^2,$$

откуда

$$x=0. \qquad (**)$$

Очевидно, что уравнения (*) и (**) равносильны.

4. Уравнение $x=0$ (ось ординат) есть уравнение искомого геометрического места точек. Действительно, любая точка M $(0;\ y)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, принадлежит искомому геометрическому месту, поскольку

$$MA=MB=\sqrt{a^2+y^2}.$$

Таким образом, геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.

1.64. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от начала координат и точки A $(-2;-3)$.

1.65. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от начала координат и точки A $(1;\ 3)$.

1.66. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки A $(3;\ 0)$ и оси ординат.

1.67. Составить уравнение окружности с центром в точке S $(a;\ b)$ и радиусом r.

1.68. Найти уравнение геометрического места точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A $(1;\ -2)$ и B $(-1;\ 2)$ есть величина постоянная, равная 20.

1.69. Записать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек A $(0;\ 4)$ и B $(-1;\ 2)$ есть величина постоянная, равная 1.

1.70. Вывести уравнение траектории точки M, если в каждый момент движения расстояние ее от точки A $(4\sqrt{3};-4)$ вдвое больше, чем от точки B $(\sqrt{3};\ -1)$.

§ 6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

Два уравнения

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad (1)$$

где t — вспомогательная переменная, определяют в декартовой системе координат некоторую линию L. При этом величины x и y для каждого значения t рассматриваются как координаты точки, принадлежащей этой линии.

Равенства (1) называются *параметрическими уравнениями* линии L, а t — переменным *параметром*.

Если из уравнений (1) исключить параметр t, то уравнение той же линии L запишется в виде $F(x, y) = 0$.

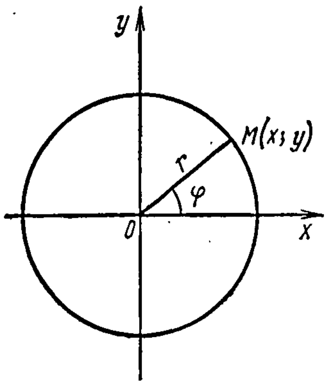


Рис. 4

1.71. Составить параметрические уравнения окружности радиуса r, центр которой находится в начале координат.

Решение. Очевидно, что текущие координаты x и y точки M, лежащей на окружности, являются функциями угла φ между осью Ox и радиусом OM (рис. 4). Поэтому угол φ примем за переменный параметр. Выразим текущие координаты x и y через параметр φ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Эти равенства и являются параметрическими уравнениями окружности.

Если обе части каждого из полученных уравнений возвести в квадрат и почленно сложить (этим достигается исключение параметра φ из уравнений), то уравнение той же окружности запишется в виде

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1.72. Линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - 1. \end{cases}$$

Найти декартовы координаты точек, если соответствующие значения параметра t равны $1; -2; 2; \frac{1}{3}; 0$.

1.73. Указать декартовы координаты точек линии

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$$

если соответствующие значения параметра t таковы: $0; \frac{\pi}{2}; -\pi; \pi; 2\pi$.

1.74. На линии

$$\begin{cases} x = t^3 + 2, \\ y = t^2 - 4t + 3 \end{cases}$$

дана точка A (3; 0). Найти значение параметра t, соответствующее этой точке.

Решение. Подставив в первое уравнение $x = 3$, приходим к уравнению относительно t:

$$3 = t^3 + 2, \qquad (*)$$

или

$$t^3 - 1 = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим $t = 1$.

Аналогично, подставляя во второе уравнение $y = 0$, получаем уравнение

$$t^2 - 4t + 3 = 0, \qquad (**)$$

корни которого $t = 1$ и $t = 3$.

Значение параметра $t = 1$ является единственным общим корнем уравнений (*) и (**). Следовательно, точке A (3; 0) соответствует значение $t = 1$.

1.75. На линии

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

даны точки A (1; 1), B (1; —1), $C\left(\frac{1}{9}; 3\right)$. Найти значения параметра t, соответствующие этим точкам.

1.76. Линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2 - 5t + 6, \\ y = t^2 - 4t + 3. \end{cases}$$

Выделить из нижеследующих точек те, которые принадлежат этой линии, и указать соответствующие им значения параметра t: 1) A (6; 3); 2) B (2; 0); 3) C (0;—1); 4) D (12;7); 5) E (2; 3); 6) F (6; 8); 7) K (0; 0); 8) P (—1; 2).

1.77. Даны параметрические уравнения линии

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t + 1. \end{cases}$$

Исключив параметр t, записать уравнение этой линии в форме $F(x, y) = 0$.

1.78. Линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Записать уравнение линии в виде $F(x, y) = 0$.

1.79. Записать уравнения линии

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - 2 \end{cases}$$

в виде $F(x, y) = 0$.

1.80. Отрезок AB постоянной длины скользит своими концами по осям декартовой системы координат. Составить параметрические уравнения линии, которую описывает точка M этого отрезка, делящая его на части $MA = a$ и $MB = b$ (рис. 5).

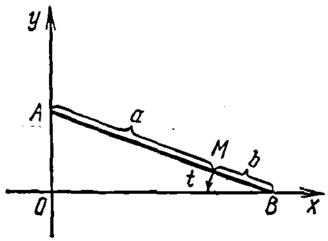


Рис. 5

Указание. За параметр t принять угол, образуемый отрезком AB с отрицательным направлением оси Ox.

1.81. Отрезок AB постоянной длины $2a$ скользит своими концами по осям декартовой системы координат. Из начала координат на этот отрезок опущен перпендикуляр OM. Составить параметрические уравнения геометрического места оснований этих перпендикуляров.

Указание. За параметр t взять угол, образуемый отрезком AB с отрицательным направлением оси Ox.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Задача преобразования координат состоит в том, чтобы зная координаты $(x; y)$ точки в одной (старой) системе координат, найти ее координаты $(x'; y')$ в другой (новой) системе.

Формулы преобразования прямоугольных координат при параллельном переносе осей координат имеют вид

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \tag{1}$$

или

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \tag{1'}$$

где a и b — координаты нового начала O' в старой системе координат.

Формулы преобразования прямоугольных координат при повороте осей координат на угол α без изменения начала координат имеют следующий вид*:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \qquad (2)$$

или

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \qquad (2')$$

При этом угол α берется положительным, если поворот осей координат совершается в положительном направлении («против часовой стрелки»), и отрицательным в противном случае (рис. 6).

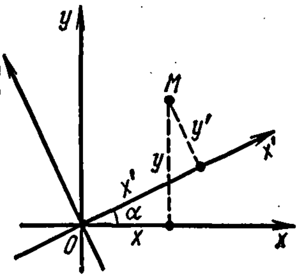


Рис. 6

1.82. Дана точка $A\,(2;-1)$. Найти координаты этой точки, если: 1) сохраняя направление осей, перенести начало координат в точку $O'\,(-4;\,2)$; 2) повернуть оси координат в положительном направлении на угол 30°?

Решение. 1) Полагая в формулах (1') $x = 2$, $y = -1$, $a = -4$, $b = 2$, получим

$$x' = 2 - (-4) = 6,\quad y' = -1 - 2 = -3.$$

Итак, в новой системе точка A имеет координаты $(6;\,-3)$.

2) В этом случае $x = 2$, $y = -1$, $\alpha = 30°$. По формулам (2') имеем

$$x' = 2\cos 30° + (-1)\sin 30° = \frac{2\sqrt{3}-1}{2},$$

$$y' = -2\sin 30° + (-1)\cos 30° = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

1.83. Найти новые координаты точек $A\,(2;-3)$, $B\,(0;\,1)$, $C\,(-5;\,4)$ в системе, полученной переносом начала координат с сохранением направления осей в точку $O'\,(1;\,-2)$.

1.84. Дана точка $A\,(-4;\,3)$. Найти новые координаты этой точки, если сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку O', координаты которой: 1) $(2;3)$, 2) $(-2;\,1)$, 3) $(2;\,0)$, 4) $(-3;\,-1)$.

1.85. Относительно двух систем координат, имеющих одно и то же направление осей, известны координаты некоторой точки A: $(5;\,-2)$ и $(-3;\,4)$. Каковы координаты начала каждой из этих систем относительно другой?

---

* Отметим, что формулы (2') получаются из формул (2), если в них поменять местами старые и новые координаты, заменяя одновременно α на $-\alpha$.

1.86. Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала второй системы относительно первой суть (3; 2). Чему равны координаты начала первой системы относительно второй?

1.87. Оси координат повернуты в положительном направлении на угол 30°. Известны координаты точек A $(1; \sqrt{3})$ и B $(0; -2)$ в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе.

1.88. Даны точки A (2; 0), B (0; —3), C (—2; 1). Каковы будут новые координаты этих точек, если оси координат повернуть на угол 45° в отрицательном направлении?

1.89. Найти координаты точки A (—1; 1) в системе, полученной поворотом в положительном направлении осей координат на угол α, если: 1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 60°$; 4) $\alpha = 90°$.

1.90. Какой вид примет уравнение параболы $y = 2x^2 - 4x + 5$, если, сохраняя направление осей, перенести начало координат в точку O' (1; 3)?

Решение. Полагая в формулах (1) $a = 1$, $b = 3$, получим выражения старых координат через новые:

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 3.$$

Запишем уравнение параболы в новой системе координат. Для этого заменим x и y в уравнении параболы их выражениями через x' и y':

$$y' + 3 = 2(x' + 1)^2 - 4(x' + 1) + 5.$$

После приведения подобных членов имеем

$$y' = 2x'^2.$$

1.91. Какой вид примет уравнение параболы $y = x^2 + 4x$, если перенести начало координат в точку O' (—2; —4), сохраняя направления осей?

1.92. Гипербола задана уравнением $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Записать ее уравнение в системе координат, полученной переносом начала координат с сохранением направления осей в точку O' (1; 2).

1.93. Какой вид примет уравнение гиперболы $y = \frac{1}{x}$, если оси координат повернуть в положительном направлении на угол 45°?

1.94. Какой вид примет уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$, если оси координат повернуть на произвольный угол α?

ГЛАВА 2

ПРЯМАЯ

§ 1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Если на плоскости произвольно взята декартова система координат, то *всякое уравнение первой степени относительно текущих координат x и y*

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

где A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат.

Верно и обратное утверждение: *в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени вида* (1).

Уравнение (1) называется *общим уравнением прямой.*

Частные случаи уравнения (1) приведены в следующей таблице.

	Значения коэффициентов	Уравнение прямой	Положение прямой
1	$C=0$	$Ax+By=0$	Прямая проходит через начало координат.
2	$A=0$	$y=b$, где $b=-\dfrac{C}{B}$	Прямая параллельна оси Ox.
3	$B=0$	$x=a$, где $a=-\dfrac{C}{A}$	Прямая параллельна оси Oy.
4	$A=C=0$	$y=0$	Прямая совпадает с осью Ox.
5	$B=C=0$	$x=0$	Прямая совпадает с осью Oy.

2.1. Проверить, проходит ли прямая $2x + 3y - 5 = 0$ через точки $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (1;\ 1)$, $C\ \left(-\frac{1}{2};\ -2\right)$, $D\left(0;\ \frac{5}{3}\right)$, $E\left(5;\ -\frac{5}{3}\right)$, $F\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$.

2.2. Проверить, проходит ли через точку $A\ (2;\ -1)$ каждая из следующих прямых: 1) $x - 2 = 0$, 2) $3x + 5y -$

$-1=0$, 3) $y+1=0$, 4) $x-4y+1=0$, 5) $x+2y=0$, 6) $2x-3=0$.

2.3. Построить прямую $3x-2y+6=0$.

Решение. Для построения прямой достаточно знать какие-либо две ее точки, например, точки ее пересечения с осями координат. Точку A пересечения прямой с осью Ox можно получить, если в уравнении прямой принять $y=0$. Тогда имеем $3x+6=0$, т. е. $x=-2$. Таким образом, $A\ (-2;\ 0)$.

Точка B пересечения прямой с осью Oy имеет абсциссу $x=0$; следовательно, ордината y точки B находится из уравнения $-2y+6=0$, т. е. $y=3$. Таким образом, $B\ (0;\ 3)$.

2.4. Построить следующие прямые: 1) $2x-4y+1=0$, 2) $x-3y=0$, 3) $3x+5=0$, 4) $2y-3=0$.

2.5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A\ (-1;\ 2)$ параллельно координатным осям.

2.6. Прямая, параллельная оси ординат, отсекает на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 3 единицам. Написать уравнение этой прямой.

2.7. Одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а противоположная — с точкой $A\ (5;\ -5)$. Написать уравнения сторон квадрата.

2.8. Одна из вершин квадрата находится в начале координат, а точка пересечения его диагоналей — в точке $S\ (-1;\ 1)$. Составить уравнения сторон квадрата.

2.9. Две стороны прямоугольника лежат на координатных осях, а одна из вершин имеет координаты $(-2;\ -3)$. Составить уравнения сторон прямоугольника.

§ 2. УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПРЯМОЙ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И НАЧАЛЬНОЙ ОРДИНАТОЙ

Углом наклона прямой к оси Ox называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть в положительном направлении ось абсцисс до ее совпадения с данной прямой. Направление любой прямой характеризуется ее *угловым коэффициентом* k, который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси Ox, т. е.

$$k=\operatorname{tg}\varphi.$$

Исключение составляет только лишь прямая, перпендикулярная оси Ox, которая не имеет углового коэффициента.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и пересекающей ось Oy в точке, ордината которой равна b (начальная ордината), записывается в виде

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Угловой коэффициент k прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, находится как коэффициент при x в выражении y через x: $k = -\frac{A}{B}$.

Угловой коэффициент k прямой, заданной двумя точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, вычисляется по формуле*

$$k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}. \qquad (2)$$

2.10. Написать уравнение с угловым коэффициентом и начальной ординатой для прямой $2x + 3y + 7 = 0$.

2.11. Найти угловой коэффициент каждой из следующих прямых: 1) $x - 4y - 7 = 0$; 2) $3y + 5 = 0$; 3) $5x - 2y = 0$; 4) $10x + 5y + 12 = 0$.

2.12. Найти угол наклона к оси Ox каждой из следующих прямых, заданных двумя точками: 1) A (2; 5) и B (7; 6); 2) C (—3; 2) и D (—1; 5); 3) E (1; —3) и F (—2; 1); 4) K (3; —4) и L (—3; 2); 5) M (2; —4) и N (—3; —4).

Указание. Воспользоваться формулой (2).

2.13. Составить уравнение прямой, которая отсекает на отрицательной полуоси Oy отрезок, равный 2 единицам, и образует с осью Ox угол $\varphi = 30°$.

Решение. Прямая пересекает ось Oy в точке B (0; —2) и имеет угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Полагая в уравнении (1) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $b = -2$, получим искомое уравнение

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 2,$$

или, в общем виде,

$$\sqrt{3}\, x - 3y - 6 = 0.$$

2.14. Написать уравнения прямых, отсекающих на положительной полуоси Oy отрезок, равный 3 единицам, и образующих с осью Ox следующие углы: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°; 4) 150°.

2.15. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox углы: 1) 45°; 2) 60°; 3) 120°.

---

* Эта формула имеет смысл в случае, если $x_A \neq x_B$.

2.16. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A $(-1;\ 2)$ и B $(0;\ -3)$.

Указание. Угловой коэффициент прямой находится по формуле (2); начальная ордината $b = -3$.

2.17. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: 1) A $(2;\ 3)$ и B $(0;\ 1)$; 2) C $(0;\ -5)$ и D $(-2;\ -5)$; 3) E $(-3;\ 4)$ и F $(0;\ 0)$.

2.18. Прямая, проходящая через точку A $(-2;\ 3)$, образует с осью Ox угол $135°$. Составить уравнение этой прямой.

Решение. Уравнение прямой будем искать в виде $y = kx + b$. Угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} 135° = -1$. Искомая прямая $y = -x + b$ проходит через точку A $(-2;\ 3)$, поэтому ее координаты $x = -2$, $y = 3$ должны удовлетворять уравнению этой прямой, т. е.

$$3 = -(-2) + b,$$

откуда $b = 1$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$y = -x + 1,$$

или

$$x + y - 1 = 0.$$

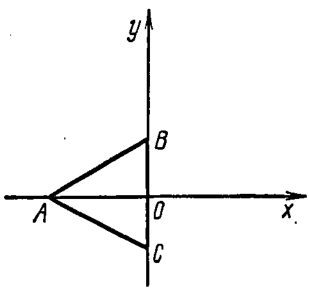


Рис. 7

2.19. По прямой $2x + 5y - 15 = 0$ направлен луч света, который дойдя до оси абсцисс, отражается от нее. Написать уравнение отраженного луча.

2.20. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(0;\ 2)$ и образующей с осью Ox угол, вдвое больший угла, который составляет с той же осью прямая $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$.

2.21. Равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 2 единицам, расположен так, как показано на рис. 7. Составить уравнения его сторон.

2.22. Уравнение одной из сторон ромба $2x + y - 3 = 0$. Написать уравнения остальных его сторон, если диагонали ромба совпадают с осями координат.

2.23. Составить уравнения сторон квадрата, диагонали которого служат осями координат. Длина стороны квадрата равна a.

2.24. Основания равнобочной трапеции равны 18 и 6 единицам, а боковые стороны составляют с основанием угол в 30°. Написать уравнения сторон трапеции, если осями координат являются большее основание и ось симметрии трапеции.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Уравнением прямой в отрезках называется уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{1}$$

где a и b — соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy, т. е. длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях, взятые с определенными знаками.

2.25. Общее уравнение прямой $2x-3y-6=0$ привести к уравнению в отрезках.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $2x-3y=6$ и разделим обе его части на свободный член:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$$

Это и есть уравнение данной прямой в отрезках.

2.26. Привести к уравнениям в отрезках следующие уравнения прямых: 1) $3x-4y+12=0$; 2) $-5x+6y+30=0$; 3) $4x+5y-20=0$; 4) $3x-2y-1=0$. Построить эти прямые.

2.27. Составить уравнение прямой, пересекающей ось абсцисс в точке (—3; 0),а ось ординат в точке (0; 4).

2.28. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 2 единицам, а на отрицательной полуоси ординат отрезок, равный 5 единицам.

2.29. Привести к общему виду уравнение $\frac{x}{7}+\frac{y}{-5}=1$.

2.30. Найти углы наклона к оси Ox и начальные ординаты следующих прямых:

$$1)\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1; \qquad 2)\ \frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1;$$

3) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1$; 4) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-3}=1$.

2.31. Какая зависимость существует между a и b, если угол наклона прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ к оси Ox равен: 1) 45°; 2) 135°; 3) 30°; 4) 150°?

2.32. Диагонали ромба равны 8 и 3 единицам. Написать уравнения сторон ромба, если бо́льшую диагональ принять за ось Ox, а меньшую — за ось Oy.

2.33. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x-5y+20=0$.

2.34. Через точку A (1; 2) провести прямую, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. По условию $a=b$. Следовательно, уравнение прямой принимает вид $x+y=a$. Так как точка с координатами (1; 2) принадлежит этой прямой, то $x=1$, $y=2$ удовлетворяют уравнению $x+y=a$: $1+2=a$, откуда $a=3$.

Итак, искомое уравнение имеет вид $x+y=3$, или $x+y-3=0$.

2.35. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку (2; 3) и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 12 кв. ед.

2.36. Прямая проходит через точку (—1; —9) и отсекает на отрицательной полуоси абсцисс отрезок, втрое меньший, чем на отрицательной полуоси ординат. Составить уравнение этой прямой.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ В ДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_A;\ y_A)$ и имеющей угловой коэффициент k, записывается в виде

$$y-y_A=k(x-x_A) \tag{1}$$

Пучком прямых называется совокупность прямых плоскости, проходящих через одну и ту же точку A — центр пучка. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение пучка прямых, поскольку любая прямая пучка может быть получена из уравнения (1) при соответствующем значении углового коэффициента k. Исключение составляет лишь одна прямая пучка, которая параллельна оси Oy — ее уравнение $x=x_A$.

2.37. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (—2; 5) и образующей с осью Ox угол 45°.

Решение. Угловой коэффициент искомой прямой $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Поэтому, воспользовавшись уравнением (1), получаем

$$y - 5 = 1 \cdot [x - (-2)],$$

или

$$x - y + 7 = 0.$$

2.38. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; —3) и образующей с осью Ox угол 120°.

2.39. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку (—2; 1) и образует с осью Ox угол, вдвое меньший, чем прямая $2\sqrt{3}x + 2y - 1 = 0$ с той же осью.

2.40. Точка C делит отрезок между точками A (4; —3) и B (—8; 6) в отношении $\lambda = 2:1$. Через эту точку провести прямую, составляющую с осью Ox угол 135°.

2.41. Из точки A (—3; 5) под углом 45° к оси абсцисс направлен луч света, который, дойдя до этой оси, отражается от нее. Составить уравнения падающего и отраженного лучей.

2.42. Луч света, выходящий из точки A (5; —2), отражается от оси абсцисс, причем отраженный луч проходит через точку B (—7; —6). Составить уравнения падающего и отраженного лучей.

Указание. Угловые коэффициенты падающего и отраженного от оси абсцисс лучей равны по величине и противоположны по знаку. Можно также воспользоваться тем фактом, что отраженный луч лежит на прямой, проходящей через точку, симметричную точке A относительно оси абсцисс.

2.43. Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку (—4; 3). Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью Ox углы: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 120°; 5) 135°. Построить эти прямые.

2.44. Из пучка прямых, проходящих через точку (—2; 5), выбрать прямую, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.

2.45. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A (3; —5) и B (—4; 3).

Решение. Угловой коэффициент искомой прямой

$$k = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-5-3}{3-(-4)} = -\frac{8}{7}.$$

Зная угловой коэффициент $k = -\frac{8}{7}$ и точку A (3; —5), через которую эта прямая проходит, запишем ее уравнение:

$$y + 5 = -\frac{8}{7}(x - 3),$$

или

$$8x + 7y + 11 = 0.$$

Ясно, что получится то же уравнение, если вместо точки A взять точку B.

2.46. Из пучка прямых с центром в точке (2; — 5) выбрать прямую: 1) проходящую через точку (3;—2); 2) через точку (—3; —5); 3) через точку (2; 6); 4) отсекающую на положительной полуоси ординат отрезок, равный 3 единицам.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A; y_A)$ *и* $B(x_B; y_B)$, имеет вид

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}. \qquad (1)$$

Если точки A и B определяют прямую, *параллельную оси* Ox $(y_A = y_B)$ *или оси* Oy $(x_A = x_B)$, то уравнение такой прямой записывается соответственно в виде

$$y = y_A \text{ или } x = x_A. \qquad (2)$$

2.47. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A (—3; 5) и B (7; —2).

Р е ш е н и е. Воспользуемся уравнением (1):

$$\frac{x - (-3)}{7 - (-3)} = \frac{y - 5}{-2 - 5},$$

или

$$\frac{x + 3}{10} = \frac{y - 5}{-7},$$

откуда

$$7x + 10y - 29 = 0.$$

2.48. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки: 1) A (4; —1) и B (—2; —9); 2) C (0; 3) и D (—4; 2); 3) E (—3; 7) и F (—3; —5); 4) K (9; —2) и L (—3; —2).

2.49. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (—2; 8) и середину отрезка MN, где M (6; —5), N (—2; 1).

2.50. Даны координаты вершин треугольника M (—1; 3), N (4; —2), P (0; —5). Составить уравнения его сторон.

2.51. Вершины четырехугольника имеют координаты P (1; 0), $Q\left((2; \frac{5}{3}\right)$, R (5; 2), S (6;—1). Найти точку пересечения его диагоналей.

2.52. Вершины треугольника имеют координаты A (2; 6), B (—6; 0), C (—3; —4). Составить уравнения его сторон и медиан.

2.53. Даны вершины треугольника: A (—12; —2), B (4; 10), C (—6; —10). Написать уравнение биссектрисы угла A.

Указание. Точка K пересечения искомой биссектрисы со стороной BC делит отрезок BC в отношении $\lambda = AB : AC$.

2.54. Найти длину биссектрисы угла A треугольника с вершинами A (4; —2), B (7; —2), C (4; 5).

2.55. Под каким углом к оси Ox должен быть направлен луч света, чтобы отраженный луч проходил через точки $A\ (-2; \sqrt{3})$ и $B\ (-3;\ 2\sqrt{3})$?

2.56. Проверить, лежат ли точки A (5; 2), B (3; 1) и C (—1; —1) на одной прямой.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и C:

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A},$$

или

$$\frac{x-5}{-6} = \frac{y-2}{-3}.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки B ($x_B = 3$ и $y_B = 1$), получим

$$\frac{3-5}{-6} = \frac{1-2}{-3},$$

т. е. $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Таким образом, координаты точки B удовлетворяют уравнению прямой AC — это означает, что точка B лежит на прямой AC.

2.57. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки: 1) $A(-2; -7)$, $B(1; -1)$, $C(4; 5)$; 2) $D(-2; 9)$, $E(2; -7)$, $F(0; 1)$; 3) $K(-1; -1)$, $L(-3; -7)$, $M(2; 7)$.

2.58. Найти ординату точки $P(5; y)$, лежащей на одной прямой с точками $M(-1; 8)$ и $N(2; -1)$.

2.59. Найти точку $M(x; y)$, лежащую на одной прямой с точками $P(1; -7)$ и $Q(-2; 5)$, если координаты искомой точки равны между собой.

2.60. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-3; 4)$, $B(-9; 6)$ и $C(5; 2)$. Составить уравнение средней линии, параллельной стороне AC.

§ 6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Условия *пересечения, параллельности* или *совпадения* двух прямых, заданными своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

приведены в следующей таблице.

Взаимное расположение прямых	Условие
Пересечение	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.
Параллельность	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.
Совпадение	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то *условие параллельности** этих прямых состоит в равенстве из угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

2.61. Установить совпадают, параллельны или пересекаются (в последнем случае найти точку пересечения)

* Здесь совпадение рассматривается как частный случай параллельности.

следующие пары прямых:

$$1)\ x - y + 3 = 0,\quad 2x - 2y - 7 = 0;$$

$$2)\ 2x - y + 4 = 0,\quad 4x - 2y + 9 = 0;$$

$$3)\ x + 3y - 1 = 0,\quad 2x + 6y - 2 = 0;$$

$$4)\ 5x - y + 1 = 0,\quad 10x - 3y + 2 = 0;$$

$$5)\ 3x + 2y - 4 = 0,\quad 5x + 6y - 12 = 0;$$

$$6)\ 2x - 3y = 0,\quad 6x - 9y = 0;$$

$$7)\ y - 5 = 0,\quad 3y + 15 = 0;\qquad 8)\ 4x - 1 = 0,\ 8y + 2 = 0;$$

$$9)\ 2x + 3 = 0,\quad 2x - 1 = 0;$$

$$10)\ 4x - y + 1 = 0,\quad 2x + 3y - 17 = 0;$$

$$11)\ 5x + 3 = 0,\quad 10x + 7y + 2 = 0.$$

2.62. Через точку пересечения прямых $x - 2y - 4 = 0$ и $2x - 3y - 7 = 0$ провести прямую, составляющую с осью Ox угол $45°$.

2.63. Найти периметр треугольника, ограниченного прямыми $4x - 3y + 6 = 0$, $x + 3y - 36 = 0$ и осью ординат.

2.64. Проверить, проходят ли через одну и ту же точку следующие прямые:

$$1)\ \begin{array}{l} 2x + y - 5 = 0, \\ 3x - 2y - 3 = 0, \\ x - 5y - 14 = 0; \end{array}\qquad 2)\ \begin{array}{l} x - 2y + 5 = 0, \\ 2x + 3y - 4 = 0, \\ x + 1 = 0; \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{l} 2x - y + 7 = 0, \\ x = 0, \\ 3x + 2y - 14 = 0; \end{array}\qquad 4)\ \begin{array}{l} 3y + 5 = 0, \\ 3x + 6y + 8 = 0, \\ 6x + 3y + 1 = 0. \end{array}$$

Указание. Найти точку пересечения любых двух прямых и проверить, проходит ли через нее третья прямая.

2.65. При каком значении m прямые

$$mx + (1 - m)y - 3 = 0,$$

$$2x - 3y - 5 = 0,$$

$$7x + 5y - 2 = 0$$

проходят через одну точку? Найти эту точку.

2.66. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 3y - 1 = 0$ и отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 4 единицам.

Решение. Искомая прямая проходит через точку A (4; 0), а ее угловой коэффициент равен угловому коэффициенту данной прямой, т. е. $k = -\frac{2}{3}$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, получим

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 4),$$

или

$$2x + 3y - 8 = 0.$$

2.67. Составить уравнение прямой, если известно, что она проходит через точку (—1; 4) и параллельна: 1) прямой $2x + 3y - 5 = 0$; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат; 4) биссектрисе II и IV координатных углов; 5) прямой $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$.

2.68. Прямая проходит через точку A (4; —7) и параллельна прямой, соединяющей точки P (—4; 3) и Q (2; —5). Составить ее уравнение.

2.69. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x + 2y + 7 = 0$ и $4x + 3y + 9 = 0$ и параллельной прямой $y = -2x + 3$.

2.70. Через точку пересечения прямых $7x - 2y - 3 = 0$ и $5x + y - 7 = 0$ провести прямую, параллельную биссектрисе I и III координатных углов.

2.71. Даны две точки A (—1; 6) и B (9; —8). Через середину отрезка AB провести прямую, параллельную прямой $2x - 3y + 5 = 0$.

2.72. Координаты вершин треугольника A (—2; 3), B (4; —2) и C (1; 5). Составить уравнения прямых, проходящих через каждую из вершин параллельно противолежащей стороне.

2.73. В треугольнике ABC известны вершины A (—3;—4); B (1; —2) и C (7; —2). Составить уравнение средней линии, параллельной стороне AC.

2.74. Даны вершины четырехугольника A (—4; —2), B (—3; 1), C (4; 3), D (5; —3). Показать, что середины сторон этого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2.75. Зная уравнения двух сторон параллелограмма

$x-y+1=0$ и $2x+3y-6=0$ и одну из его вершин C (7; 1), составить уравнения двух других сторон.

2.76. В параллелограмме $ABCD$ даны вершины A (—1; 3), B (4; 6), C (1; —5). Составить уравнения его сторон.

2.77. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон $2x+y-1=0$ (AB), $3x-2y-5=0$ (AD) и точка K (—3; 5) пересечения диагоналей AC и BD. Найти уравнения сторон BC и CD.

Решение. 1. Вершину A параллелограмма найдем как точку пересечения прямых AB и AD:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ 3x-2y-5=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем A (1; —1).

2. Координаты точки C найдем исходя из того, что K есть середина отрезка AC:

$$x_K=\frac{x_A+x_C}{2}, \qquad y_K=\frac{y_A+y_C}{2}.$$

Подставляя в эти равенства координаты точек A и K, получим уравнения для нахождения координат точки C:

$$-3=\frac{1+x_C}{2}; \qquad 5=\frac{-1+y_C}{2}.$$

Отсюда $x_C=-7$, $y_C=11$ и C $(-7; 11)$.

3. Так как стороны BC и AD параллельны, то их угловые коэффициенты равны между собой: $k_{BC}=k_{AD}=\frac{3}{2}$. Аналогично $k_{CD}=k_{AB}=-2$.

4. Уравнение стороны BC найдем как уравнение прямой, проходящей через данную точку C (—7; 11) с заданным угловым коэффициентом $k=\frac{3}{2}$:

$$y-11=\frac{3}{2}(x+7),$$

или

$$3x-2y+43=0.$$

Аналогично найдем уравнение стороны CD:

$$y-11=-2(x+7),$$

или

$$2x+y+3=0.$$

2.78. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон $x-4y+1=0$ (AB) и $3x+y-2=0$ (AD) и точка M $(1;\ -3)$ — середина стороны BC. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

§ 7. УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Условие перпендикулярности двух прямых, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, состоит в выполнении соотношения

$$k_1k_2+1=0;$$

или

$$k_1=-\frac{1}{k_2},$$

т. е. *угловые коэффициенты этих прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

2.79. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A $(-4;\ 3)$ перпендикулярно прямой $2x-3y-4=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1=\frac{2}{3}$; искомая прямая перпендикулярна данной, поэтому ее угловой коэффициент $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2}$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой:

$$y-y_A=k_2(x-x_A),$$

или

$$y-3=-\frac{3}{2}(x+4),$$

откуда

$$3x+2y+6=0.$$

2.80. Даны прямые $x+y-4=0$ (1), $6x+8y-11=0$ (2), $2x-2y+3=0$ (3), $4x-3y+7=0$ (4), $9x+9y+5=0$ (5) и $x-y-2=0$ (6). Указать, какие из них между собой параллельны, а какие — перпендикулярны.

2.81. Дана прямая $4x+5y-2=0$ и точка M $(-3;\ 2)$. Через точку M провести две прямые, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна данной прямой.

2.82. На прямую $2x+7y-3=0$ опустить перпендикуляр из начала координат.

2.83. Проверить, является ли треугольник прямоугольным, если координаты его вершин A (4; —5), B (7; 6) и C (—7; —2).

2.84. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (2; 3) перпендикулярно прямой, соединяющей точки P (1; 7) и Q (—2; —5).

2.85. Составить уравнение перпендикуляра, восставленного в середине отрезка, соединяющего точки M (—1; 7) и N (3; —1).

2.86. Составить уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $2x + y - 4 = 0$ и проходящей через середину ее отрезка, заключенного между осями координат.

2.87. Даны координаты двух противоположных вершин ромба M (—3; 2) и N (7; —6). Составить уравнения диагоналей ромба.

2.88. Треугольник ABC задан уравнениями своих сторон: $2x + 7y - 1 = 0$ (AB), $3x - 2y + 11 = 0$ (BC) и $3x - 5y + 7 = 0$ (AC). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

2.89. На прямой $2x - 5y - 12 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек A (—1; 3) и B (3; —5).

2.90. Даны вершины треугольника A (—5; 6), B (28; 7), C (15; 0). Найти длину высоты, опущенной из вершины A.

Р е ш е н и е. 1. Составим уравнение стороны BC:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},$$

или

$$\frac{x - 28}{-13} = \frac{y - 7}{-7},$$

откуда

$$7x - 13y - 105 = 0.$$

2. Так как высота AD перпендикулярна прямой BC, то $k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}}$. Но $k_{BC} = \frac{7}{13}$; отсюда $k_{AD} = -\frac{13}{7}$.

3. Уравнение высоты AD получим как уравнение прямой, проходящей через точку A (—5; 6) с заданным угловым коэффициентом $k_{AD} = -\frac{13}{7}$:

$$y - 6 = -\frac{13}{7}(x + 5),$$

или

$$13x + 7y + 23 = 0.$$

4. Определим координаты точки D пересечения высоты со стороной BC. Для этого решим систему

$$\begin{cases} 13x + 7y + 23 = 0, \\ 7x - 13y - 105 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $x = 2$, $y = -7$. Таким образом, $D(2; -7)$.

5. Длину высоты AD вычислим по формуле расстояния между двумя точками:

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{49 + 169} = \sqrt{218}.$$

2.91. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $(3; 4)$ на прямую $2x + 5y + 3 = 0$.

2.92. Найти расстояние от точки $(-1; 3)$ до прямой $3x - 4y + 40 = 0$.

2.93. Найти расстояние от начала координат до прямой $5x - 12y + 26 = 0$.

2.94. Известны уравнения сторон треугольника: $x + 3y - 3 = 0$, $3x + y + 11 = 0$ и $x - y - 3 = 0$. Найти длину высоты, которая опущена из вершины, лежащей на оси абсцисс.

2.95. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x - 3y - 5 = 0$ и $2x - 3y + 21 = 0$.

Указание. Задача сводится к отысканию расстояния от точки, взятой на одной из этих прямых, до второй прямой.

2.96. Какая из точек $A(8; 9)$, $B(-5; -7)$ и $C(-11; -3)$ расположена ближе всего к прямой $6x + 8y - 15 = 0$?

2.97. К какой из двух прямых: $3x + 5y - 8 = 0$ или $5x - 3y + 15 = 0$ точка $M(-1; 2)$ находится ближе?

2.98. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(2; -4)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид

$$y - y_A = k(x - x_A),$$

или

$$y + 4 = k(x - 2),$$

или

$$kx - y - (2 + 4k) = 0. \qquad (*)$$

Для определения углового коэффициента k этой прямой воспользуемся тем, что она отстоит от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам. Найдем это расстояние непосредственно. Уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $kx - y - (2+4k) = 0$, имеет вид $y = -\frac{1}{k}x$, или $x + ky = 0$. Решив совместно уравнения этих двух прямых

$$\begin{cases} kx - y - (2+4k) = 0, \\ x + ky = 0, \end{cases}$$

получим координаты точки C их пересечения:

$$x_C = \frac{2k(k+2)}{1+k^2}; \quad y_C = -\frac{2(k+2)}{1+k^2}.$$

Отсюда находим расстояние от начала координат до прямой l:

$$OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \frac{2}{1+k^2}\sqrt{k^2(k+2)^2 + (k+2)^2} =$$

$$= \frac{2(k+2)}{1+k^2}\sqrt{k^2+1} = \frac{2(k+2)}{\sqrt{k^2+1}}.$$

С другой стороны, по условию $OC = 2$. Таким образом, получаем уравнение для нахождения углового коэффициента k искомой прямой l:

$$\frac{2(k+2)}{\sqrt{k^2+1}} = 2, \text{ или } k + 2 = \sqrt{k^2+1},$$

откуда $k = -\frac{3}{4}$. Таким образом, подставляя найденное значение $k = -\frac{3}{4}$ в уравнение (*), получаем уравнение прямой:

$$-\frac{3}{4}x - y - \left(2 - 4 \cdot \frac{3}{4}\right) = 0$$

или окончательно,

$$3x + 4y + 10 = 0.$$

В заключение отметим, что отыскивая уравнение прямой l в виде $y - y_A = k(x - x_A)$, мы предполагали тем самым, что эта прямая не параллельна оси ординат. Но очевидно, что прямая $x = 2$ (параллельная оси Oy) также удовлетворяет условию задачи, так как она проходит через точку A (2; —4) и отстоит от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам (рис. 8).

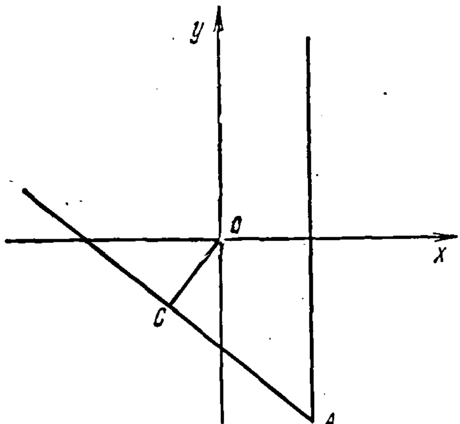


Рис. 8

2.99. Написать уравнения прямых, проходящих через точку A (4; 1) и отстоящих от точки B (—4; 0) на расстоянии, равном 4 единицам.

2.100. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x+4y-1=0(l)$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 1.

Решение. Уравнение каждой из прямых будем искать в виде $y=kx+b$. Так как искомая прямая параллельна прямой l, то ее угловой коэффициент $k=-\frac{3}{4}$ и, следовательно, ее уравнение принимает вид

$$y=-\frac{3}{4}x+b,$$

или

$$3x+4y-4b=0. \qquad (*)$$

Для отыскания параметра b воспользуемся тем, что расстояние от любой точки прямой l, например, от точки A (3; —2), до прямой (*) согласно условию равно 1. Но это расстояние может быть вычислено и непосредственно. Запишем для этого уравнение прямой h, проведенной из точки A перпендикулярно прямой l:

$$y+2=\frac{4}{3}(x-3),$$

или

$$4x-3y-18=0.$$

Решив, далее, совместно уравнения прямых h и l

$$\begin{cases} 4x-3y-18=0, \\ 3x+4y-4b=0, \end{cases}$$

найдем координаты точки B их пересечения:

$$x_B=\frac{72+12b}{25}, \quad y_B=\frac{16b-54}{25}.$$

Тогда искомое расстояние равно длине отрезка AB:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{72+12b}{25} - 3\right)^2 + \left(\frac{16b-54}{25} + 2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(12b-3)^2+(16b-4)^2}}{25}.$$

Приравнивая это выражение единице, получим уравнение относительно b:

$$\frac{\sqrt{(12b-3)^2+(16b-4)^2}}{25} = 1,$$

или

$$(12b-3)^2 + (16b-4)^2 = 25^2$$

и окончательно

$$2b^2 - b - 3 = 0.$$

Решения этого уравнения таковы: $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = -1$. Подставляя полученные значения b в уравнение (*), запишем уравнения искомых прямых:

$$3x + 4y - 6 = 0 \text{ и } 3x + 4y + 4 = 0.$$

2.101. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $5x + 12y + 6 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 5 единицам.

2.102. Найти точки пересечения с прямой $5x - 3y + 4 = 0$ прямых, параллельных прямой $5x + 12y - 5 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 3 единицам.

2.103. Найти точки, равноудаленные от точек M (5; —2) и N (3; 0) и отстоящие от прямой $4x + 3y + 5 = 0$ на расстоянии, равном 2 единицам.

§ 8. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Под *углом между двумя прямыми* понимается один из двух смежных углов, образованных при их пересечении. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \tag{1}$$

причем знак «плюс» соответствует острому углу φ, а знак «минус» — тупому.

Заметим, что если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Oy, то формула (1) не имеет смысла. В этом случае острый угол φ вычисляется непосредственно по формуле $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$, где φ_1 и φ_2 — углы наклона прямых к оси Ox.

2.104. Найти острый угол между прямыми

$$x - 3y + 5 = 0 \text{ и } 2x + 4y - 7 = 0.$$

Решение. Угловые коэффициенты данных прямых таковы: $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Тангенс острого угла φ между этими прямыми найдем по формуле (1):

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \right| = 1.$$

Отсюда $\varphi = 45°$.

2.105. Вычислить острый угол между прямыми:

1) $y = 3x - 5$ и $y = -2x + 3$;
2) $8x - 2y - 5 = 0$ и $2x - 2y + 1 = 0$;
3) $3x + y + 7 = 0$ и $10x + 2y - 3 = 0$;
4) $x + 2y - 8 = 0$ и $5x - y + 3 = 0$.

2.106. Найти острый угол между прямой $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точки A (1; —1) и B (5; 7).

2.107. Стороны треугольника заданы уравнениями $3x - 2y + 6 = 0$ (AB); $2x + y - 10 = 0$ (BC); $x - 3y + 2 = 0$ (AC). Найти углы, которые медиана BM образует со сторонами AB и BC.

2.108. Найти внутренние углы треугольника ABC, если координаты его вершин A (1; 2), B (2; 2), C (0; 3).

Решение. Прежде всего выясним, не является ли один из углов треугольника ABC прямым или тупым. Для этого вычислим длины его сторон:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-2)^2} = 1,$$

$$AC = \sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{5}.$$

Так как $BC^2 > AB^2 + AC^2$, то треугольник ABC — тупоугольный, причем его угол A, как лежащий против большей стороны BC, — тупой и, следовательно, углы B и C — острые.

Найдем, далее, угловые коэффициенты прямых AB, BC и AC:

$$k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{2-2}{1-2}=0,\ k_{AC}=\frac{2-3}{1-0}=-1,$$

$$k_{BC}=\frac{2-3}{2-0}=-\frac{1}{2}.$$

Теперь, воспользовавшись формулой (1), вычислим тангенсы внутренних углов треугольника ABC:

$$\operatorname{tg} A=-\left|\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}\cdot k_{AC}}\right|=-\left|\frac{0-(-1)}{1+0\cdot(-1)}\right|=-1$$

(перед модулем берется знак «минус», так как угол A — тупой);

$$\operatorname{tg} B=\left|\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}\right|=\left|\frac{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} C=\left|\frac{k_{AC}-k_{BC}}{1+k_{AC}\cdot k_{BC}}\right|=\left|\frac{-1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{1}{3}$$

(в выражениях для $\operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} C$ перед модулем берется знак «плюс», поскольку углы B и C — острые).

Отсюда $A=135°$, $B=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $C=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

2.109. Вычислить углы треугольника, заданного координатами своих вершин: A (2; 4), B (—1; —2) и C (11; 13).

2.110. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (—1; 2) и составляющей угол 45° с прямой $x-3y+2=0$.

2.111. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC известны вершина острого угла A (2; 6) и уравнение противолежащего катета BC: $x-7y+15=0$. Составить уравнения двух других сторон.

Решение. 1. Угловой коэффициент прямой AC, перпендикулярной к стороне BC, $k_{AC}=-\frac{1}{k_{BC}}=-7$. Поэтому уравнение стороны AC имеет вид

$$y-y_A=k_{AC}(x-x_A),$$

или

$$y-6=-7(x-2),$$

т. е.

$$7x + y - 20 = 0.$$

2. Уравнение стороны AB будем искать в виде

$$y - y_A = k_{AB}(x - x_A),$$

или

$$y - 6 = k_{AB}(x - 2).$$

Угловой коэффициент стороны AB найдем, воспользовавшись формулой (1):

$$\operatorname{tg} \widehat{ABC} = \left| \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} \right|$$

(перед модулем берется знак «плюс», так как $\widehat{ABC} = 45°$ — острый). Подставляя в это равенство $\widehat{ABC} = 45°$, $k_{BC} = \frac{1}{7}$, получим уравнение относительно k_{AB}:

$$1 = \left| \frac{k_{AB} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7} k_{AB}} \right|,$$

откуда

$$\frac{k_{AB} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7} k_{AB}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{k_{AB} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7} k_{AB}} = -1.$$

Решая каждое из полученных уравнений, находим $k_{AB} = \frac{4}{3}$ и $k_{AB} = -\frac{3}{4}$. Таким образом, задача имеет два решения (рис. 9). В первом случае уравнение гипотенузы AB имеет вид

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 2),$$

или

$$4x - 3y + 10 = 0,$$

а во втором

$$y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 2),$$

или

$$3x + 4y - 18 = 0.$$

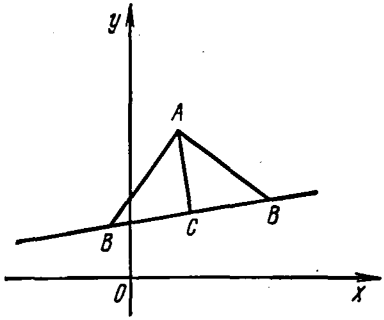


Рис. 9

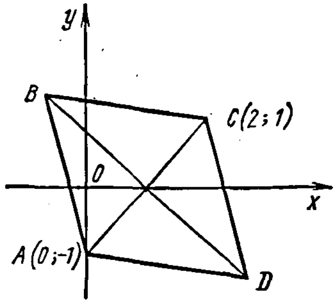


Рис. 10

2.112. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC даны вершина острого угла A (1; 3) и уравнение противолежащего катета $2x - y + 4 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

2.113. Противоположные вершины квадрата находятся в точках B (—2; 2) и D (0; —3). Составить уравнения сторон квадрата.

2.114. В ромбе $ABCD$ с острым углом 60° точки A (0; —1) и C (2; 1) являются противоположными вершинами, причем AC — меньшая диагональ (рис. 10). Написать уравнения сторон ромба.

§ 9. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

2.115. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку (—4; 2) и 1) параллельна оси Ox; 2) параллельна оси Oy; 3) параллельна биссектрисе II и IV координатных углов; 4) образует угол 60° с прямой $y = \sqrt{3}x - 2$; 5) перпендикулярна прямой $4x + 5y - 3 = 0$.

2.116. Показать, что точки A (1; 2) и B (—2; 3) лежат по разные стороны от прямой l, уравнение которой $2x - y + 4 = 0$.

Указание. Сравнить абсциссу точки пересечения прямых AB и l с абсциссами точек A и B.

2.117. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 1 = 0$ и $x + 3y - 7 = 0$ проведена прямая перпендикулярно первой из данных прямых. Каково расстояние полученной прямой от начала координат?

2.118. Даны вершины треугольника: A (—6; 2), B (10; 10), C (0; — 10). Составить уравнения и найти длины его медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины A.

2.119. Даны две вершины A (4; 4) и B (1; 0) треугольника ABC и точка M (1; 3) пересечения его медиан. Составить уравнения сторон треугольника.

2.120. В треугольнике ABC, заданном своими вершинами A (5; —2), B (—3; —3), C (—1; —6), определить острый угол между биссектрисой угла C и медианой, проведенной из вершины A.

2.121. Найти точку, симметричную точке A (—5; 2) относительно прямой $3x - 4y - 7 = 0$.

2.122. Луч света, выйдя из точки A (—3; 10), отражается от прямой $2x - 3y + 23 = 0$ и попадает в точку B (2; 12). Найти уравнение отраженного луча.

Указание. Отраженный луч лежит на прямой, проходящей через точку B и точку, симметричную точке A относительно данной прямой.

2.123. Даны вершины треугольника: A (—1; 6), B(—5; —2), C (1; 0). Показать, что этот треугольник—прямоугольный. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника.

2.124. Вершинами треугольника служат точки A (—8; 1), B (1; —2), C (6; 3). Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника.

2.125. Треугольник задан своими вершинами A (—2; —1), B (1; 3), C (—2; 3). Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник.

2.126. В треугольнике ABC известны координаты середин его сторон: M_1 (—1; 5), M_2 (3; 1), M_3 (—5; —1). Составить уравнения сторон и медиан треугольника.

2.127. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x - y - 10 = 0$, $2x - 11y - 20 = 0$ и $2x + 7y + 16 = 0$.

2.128. Даны вершины четырехугольника: A (—1; 0), B (0; 5), $C\left(2\frac{3}{4}; 5\right)$, D (2; —1). Показать, что около этого четырехугольника можно описать окружность. Найти центр этой окружности.

2.129. Даны координаты вершин треугольника: K (4;—2), L (—2; 5), M (—5; 0). Требуется: 1) составить уравнения высот; 2) убедиться в том, что все высоты пересекаются в одной точке.

2.130. Составить уравнение прямой, отстоящей от точки P (4; 1) на расстоянии, равном 3 единицам, и параллельной прямой $8x + 15y - 1 = 0$.

2.131. Показать, что отрезки прямых $2x - y + 4 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$, $4x - 2y + 1 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$ образуют трапецию. Найти внутренние углы трапеции.

2.132. Известны уравнения сторон четырехугольника $x - 2y + 2 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, $x - 4y - 8 = 0$ и $x - 4y + 8 = 0$. Найти его площадь.

2.133. Показать, что точки M (4; 3), N (5; 0), P (—5;—6) и Q (—1; 0) являются вершинами трапеции. Найти острый угол между диагоналями и высоту этой трапеции.

2.134. Известны две вершины A (5; —4) и B (7; 4) треугольника ABC и точка P (6; —4) пересечения его высот. Составить уравнения сторон треугольника и найти его площадь.

2.135. В параллелограмме известны уравнения двух сторон $7x - 24y + 13 = 0$ и $3x - 4y + 20 = 0$ и точка пересечения диагоналей (—7; 1). Определить длины высот параллелограмма.

2.136. Даны уравнения двух сторон ромба $x + 2y - 7 = 0$ и $x + 2y - 13 = 0$ и уравнение его диагонали $x - y + 2 = 0$. Найти координаты вершин ромба и вычислить его площадь.

2.137. Две вершины равностороннего треугольника находятся в точках A (1; 0) и B (2; $\sqrt{3}$). Найти третью вершину C.

2.138. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны вершина прямого угла C (—3; —1) и уравнение гипотенузы $3x + y - 2 = 0$. Составить уравнения катетов и найти две остальные вершины.

2.139. Точки (—3; 1) и (—7; —5) являются противоположными вершинами квадрата. Найти две его другие вершины.

2.140. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $5x + 12y = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 3 единицам.

2.141. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x + 4y - 2 = 0$ и $12x + 9y + 13 = 0$. Убедиться в том, что эти биссектрисы перпендикулярны друг к другу.

Указание. Задача сводится к проведению биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC, где A — точка пересечения заданных прямых, а B и C — точки, лежащие на этих прямых.

Г Л А В А 3

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение окружности с центром в точке $S(a;\ b)$ и радиусом r имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

Это *каноническое* уравнение окружности (рис. 11).

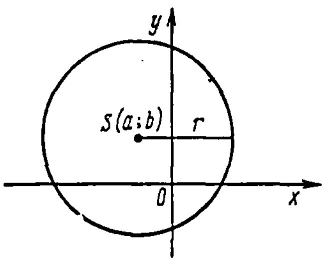


Рис. 11

Уравнение второй степени относительно текущих координат x и y является уравнением окружности тогда и только тогда, когда в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует. Таким образом, это уравнение имеет вид

$$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+F=0. \qquad (2)$$

В этом случае говорят, что окружность задана *общим* уравнением.

Для определения координат центра и радиуса окружности, заданной общим уравнением, надо с помощью тождественных преобразований уравнение (2) привести к виду (1).

3.1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: 1) $S(4;\ -7)$, $r=5$; 2) $S(-6;\ 3)$, $r=\sqrt{2}$; 3) $S(3;\ -2)$, $r=3$; 4) $S(0;\ -2)$, $r=\frac{1}{2}$; 5) $S(-1;\ 0)$, $r=\sqrt{3}$.

3.2. Как расположены по отношению к окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ следующие точки: $A(-1;\ -1)$, $B(2;\ -3)$, $C(-3;\ 5)$, $D(4;\ -1)$, $E(2;\ -2)$; $F(5;\ 7)$, $K(1;\ 0)$?

3.3 Проходит ли окружность с центром в точке $S(-5;\ 7)$ и радиусом, равным 10, через точку $M(-11;\ 15)$?

3.4. Окружность с центром в точке $S(12;\ -5)$ проходит через начало координат. Составить уравнение этой окружности.

3.5. Известно, что концы одного из диаметров окружности находятся в точках M_1 (2; —7) и M_2 (—4; 3). Составить уравнение окружности.

3.6. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $12x+5y+60=0$, заключенный между осями координат.

3.7. Окружность касается оси Ox в начале координат и пересекает ось Oy в точке (0; —10). Составить уравнение окружности.

3.8. Составить уравнение окружности, имеющей центр на оси Ox и проходящей через точки $A\left(6; 4\sqrt{2}\right)$ и $B\left(0; -2\sqrt{5}\right)$.

3.9. Окружность, проходящая через две точки A (3; —1) и B (—4; —8), имеет радиус $r=13$. Написать уравнение окружности.

3.10. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку M (2; 1).

Решение. Так как окружность касается осей координат, то она полностью лежит в одной из координатных четвертей, а именно в I четверти, поскольку одна из ее точек M (2; 1) находится в этой четверти. По той же причине центр искомой окружности S (a; b) равноотстоит от осей координат. Следовательно, он имеет равные положительные координаты ($a=b>0$), а радиус r этой окружности равен a. Таким образом, каноническое уравнение искомой окружности принимает вид

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2.$$

Для нахождения a воспользуемся тем, что точка M (2; 1) лежит на окружности:

$$(2-a)^2+(1-a)^2=a^2,$$

или

$$a^2-6a+5=0.$$

Отсюда $a_1=1$ и $a_2=5$. Это означает, что условию задачи удовлетворяют две окружности:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

и

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

3.11. Окружность, касающаяся осей координат, проходит через точку M (—2; —4). Написать ее уравнение.

3.12. Составить уравнение окружности, касающейся координатных осей и лежащей в IV четверти, если ее радиус равен $\sqrt{5}$.

3.13. Центр окружности, касающейся осей координат, лежит на прямой $2x - y + 3 = 0$. Составить уравнение окружности.

3.14. Составить уравнение окружности, проходящей через три данные точки: A (—1; 3), B (—2; —4) и C (6; 2).

3.15. Вершины треугольника имеют координаты A (—2; 9), B (—4; 5) и C (5; 8). Найти уравнение описанной около треугольника окружности.

3.16. Окружность, центр которой лежит на прямой $x - y - 1 = 0$, проходит через точки M (4; —11) и N (6; 3). Составить уравнение этой окружности.

3.17. Окружность, проходящая через точки M (—8; —10) и N (—1; 7), касается оси ординат. Составить ее уравнение.

3.18. Определить координаты центра S и радиус r окружности, заданной общим уравнением

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 18y + 20 = 0.$$

Р е ш е н и е. Приведем данное уравнение к виду (1). Для этого разделим все его члены на 9, а затем сгруппируем отдельно члены, содержащие x и y:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + \frac{20}{9} = 0.$$

Дополним выражения, стоящие в каждой из скобок, до полного квадрата:

$$x^2 + 4x = (x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2) - 4 = (x + 2)^2 - 4;$$

$$y^2 - 2y = (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2) - 1 = (y - 1)^2 - 1.$$

Теперь данное уравнение принимает вид

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + \frac{20}{9} = 0,$$

или

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 - \frac{25}{9} = 0,$$

откуда

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), получим $a = -2$, $b = 1$ и $r = \frac{5}{3}$. Таким образом, данная окружность имеет центр в точке S (—2; 1) и радиус $r = \frac{5}{3}$.

3.19. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус r: 1) $x^2+y^2-8x+12y-29=0$; 2) $x^2+y^2+16x-20y-5=0$; 3) $x^2+y^2+7y-18=0$; 4) $2x^2+2y^2-12x-7=0$; 5) $4x^2+4y^2+16x-32y-41=0$; 6) $9x^2+9y^2-72x+18y-208=0$.

3.20. Найти точки пересечения с осями координат каждой из окружностей: 1) $x^2+y^2-4x+4y+3=0$; 2) $x^2+y^2+6x+11y+10=0$; 3) $9x^2+9y^2-9x-4=0$.

3.21. Составить уравнение окружности, проходящей через точку A (3; —6) и концентрической с окружностью $x^2+y^2+6x-4y-62=0$.

3.22. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ и $x^2+y^2-24x+2y-51=0$.

3.23. Найти точки пересечения прямой $x-y+1=0$ с окружностью $x^2+y^2-4x+16y-5=0$.

3.24. Составить уравнение общей хорды двух пересекающихся окружностей $x^2+y^2+12x-10y+45=0$ и $x^2+y^2-8x+6y=0$.

3.25. Показать, что окружности $x^2+y^2+12x-14y+49=0$ и $x^2+y^2-18x+2y-39=0$ касаются внешним образом, и написать уравнение их общей касательной в точке касания.

Указание. Две окружности касаются друг друга внешним образом в том и только в том случае, если длина отрезка, соединяющего их центры, равна сумме радиусов этих окружностей.

3.26. Как расположены относительно окружности $x^2+y^2+8x-4y-5=0$ следующие прямые: 1) $x-y+2=0$; 2) $3x+4y-21=0$; 3) $x-y-2=0$?

3.27. Окружность задана уравнением $x^2+y^2-6x+14y-6=0$. Составить уравнение ее диаметра, перпендикулярного хорде $x-2y-2=0$.

3.28. Дана окружность $x^2+(y-2)^2=9$. Через точку $P\left(1; \frac{3}{2}\right)$ провести такую хорду, которая в этой точке делилась бы пополам.

3.29. Составить уравнение окружности, которая имеет центр в точке S (8; 6) и касается прямой $5x-12y-46=0$.

3.30. Написать уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=13$ в точке M (—2; —3).

3.31. Окружность задана уравнением $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. Составить уравнение касательной в точке M $(-2;\ -1)$.

3.32. Провести касательную к окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ в точке M $(4;\ -6)$.

§ 2. ЭЛЛИПС

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная $(2a)$, *большая, чем расстояние между фокусами* $(2c)$.

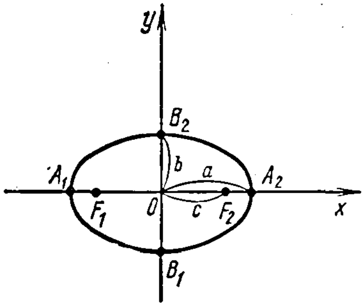


Рис. 12

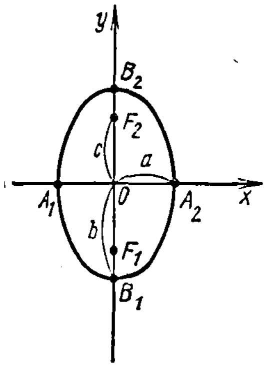


Рис. 13

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy — перпендикуляр к оси абсцисс в середине отрезка F_1F_2 (рис. 12). Тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Точки A_1 и A_2, B_1 и B_2 пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются *вершинами* эллипса. Отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются *осями* эллипса, причем A_1A_2 — *большой осью*, а B_1B_2 — *малой осью*, так как $a > b$. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т. е.

$$e = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

Очевидно, что $e < 1$.

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1), расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy (рис. 13), то тогда $b > a$ и уже большой осью будет отрезок $B_1B_2 = 2b$, а малой осью — отрезок $A_1A_2 = 2a$. Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e = \frac{c}{b}, \tag{2'}$$

где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

3.33. Найти оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду (1), для чего свободный член перенесем вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), находим $a = 5$, $b = 3$. Отсюда оси эллипса $2a = 10$, $2b = 6$, а координаты вершин таковы: A_1 (—5; 0), A_2 (5; 0), B_1 (0; —3), B_2 (0; 3). Далее, имеем $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках F_1 (—4; 0) и F_2 (4; 0). Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле (2): $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

3.34. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов:

1) $16x^2 + 25y^2 = 400$; 2) $4x^2 + 9y^2 = 36$;

3) $16x^2 + 9y^2 = 144$; 4) $25x^2 + 9y^2 = 900$.

3.35. Как расположены по отношению к эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ следующие точки: A (—3; 0), B (0; —5), C (2; 3), $D\left(-\frac{3}{4};\ \sqrt{15}\right)$, E (—2; —2) и $F\left(3; \frac{4}{3}\right)$?

3.36. Составить простейшее уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если его полуоси равны 4 и $\sqrt{5}$.

3.37. Составить простейшее уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если известно, что он проходит через точки $M_1\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ и $M_2(-2; 0)$. Найти координаты фокусов эллипса.

3.38. Известны большая полуось эллипса $a = 4$ и точка $M\left(-2; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, лежащая на эллипсе. Составить простейшее уравнение эллипса и найти расстояние от точки M до фокусов эллипса.

3.39. Составить простейшее уравнение эллипса, у которого длина малой оси равна 24, а один из фокусов имеет координаты $(-5; 0)$.

3.40. Расстояние между фокусами эллипса равно 30, а большая ось, лежащая на оси Ox, равна 34. Написать простейшее уравнение эллипса и найти его эксцентриситет.

3.41. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого сумма полуосей равна 36, а расстояние между фокусами, лежащими на оси Oy, равно 48.

3.42. Малая полуось эллипса, расположенная на оси Oy, равна $3\sqrt{2}$, а эксцентриситет его $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Составить простейшее уравнение эллипса и найти координаты его фокусов.

3.43. Составить простейшее уравнение эллипса, если известно, что один из его фокусов находится в точке $(6; 0)$, а эксцентриситет $e = \frac{2}{3}$.

3.44. Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что его малая ось видна из фокуса под прямым углом.

3.45. Расстояние между фокусами эллипса равно расстоянию между вершинами большой и малой осей. Найти эксцентриситет эллипса.

3.46. Показать, что уравнение

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

представляет собой уравнение эллипса. Найти центр, оси, вершины, фокусы и эксцентриситет этого эллипса.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные x и y:

$$(5x^2 - 30x) + (9y^2 + 18y) + 9 = 0.$$

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

$$5x^2 - 30x = 5[(x^2 - 2\cdot 3x + 9) - 9] = 5(x-3)^2 - 45;$$

$$9y^2 + 18y = 9[(y^2 + 2y + 1) - 1] = 9(y+1)^2 - 9.$$

Данное уравнение преобразуем теперь к виду

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 - 45 - 9 + 9 = 0,$$

или

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45,$$

откуда

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Введем обозначения $x' = x - 3$, $y' = y + 1$. Произведенную замену переменных будем рассматривать как преобразование декартовых координат $(x;\ y)$ в координаты $(x';\ y')$ при параллельном сдвиге координатных осей, причем новое начало координат находится в точке $O'\ (3;\ -1)$ (рис. 14). В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

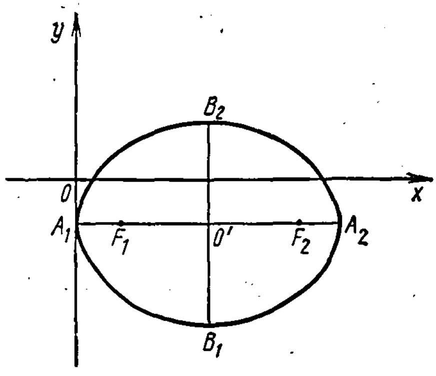


Рис. 14

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет эллипс с центром в точке O' (3; —1) и полуосями $a = 3$ и $b = \sqrt{5}$. Кроме того, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-5} = 2$; отсюда находим эксцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$.

Остается найти координаты вершин и фокусов эллипса. В новой системе координаты вершин таковы: A_1 (—3; 0), A_2 (3; 0), B_1 $(0; -\sqrt{5})$ и B_2 $(0; \sqrt{5})$; координаты фокусов

F_1 (—2; 0) и F_2 (2; 0). Так как старые координаты выражаются через новые по формулам $x = x' + 3$, $y = y' - 1$, то, возвращаясь к первоначальной системе координат, окончательно получим: A_1 (0; — 1), A_2 (6; — 1), B_1 (3;— $\sqrt{5}$— 1), B_2 (3; $\sqrt{5}$—1), F_1 (1; —1), F_2 (5; — 1).

3.47. Найти центр, оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипсов:

$$1)\ 9x^2 + 18x + 16y^2 - 64y - 71 = 0;$$

$$2)\ 9x^2 + 10y^2 + 40y - 50 = 0.$$

3.48. Составить уравнение эллипса, длина большой оси которого равна 20, а фокусы находятся в точках F_1 (—1; 0) и F_2 (5; 0).

3.49. Составить уравнение эллипса, фокусы которого F_1 (—4; —2) и F_2 (2; —2), а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$.

3.50. Малой осью эллипса служит отрезок, соединяющий точки B_1 (5; 1) и B_2 (5; —7); расстояние между его фокусами равно 10. Составить уравнение эллипса и найти координаты фокусов.

3.51. На эллипсе $5x^2 + 9y^2 = 180$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше расстояния ее от левого фокуса.

3.52. Дан эллипс $16x^2 + 25y^2 = 400$ и окружность, имеющая центр в верхней вершине малой оси эллипса и проходящая через его фокусы. Найти точки пересечения эллипса и окружности.

3.53. В эллипс $8x^2 + 10y^2 = 160$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Найти площадь этого прямоугольника.

3.54. Эллипс, эксцентриситет которого $e = \frac{1}{2}$, а фокусы лежат на оси Ox, проходит через точку M (—4; $\sqrt{15}$). Составить простейшее уравнение эллипса и найти расстояния от его фокусов до точки M.

3.55. Найти длину отрезка прямой $3x - 4y - 12 = 0$, заключенного внутри эллипса $9x^2 + 16y^2 = 144$.

3.56. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} =$ с биссектрисами координатных углов.

3.57. Найти точки пересечения эллипсов

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.58. Составить уравнение общей хорды эллипса $\frac{x^2}{16}+$ $+\frac{y^2}{4}=1$ и окружности $x^2+y^2-8y=0$.

3.59. На эллипсе $6x^2+8y^2=120$ найти точки, отстоящие от его большой оси на расстоянии, равном 3 единицам.

3.60. Найти длину хорды, проходящей через фокус эллипса $13x^2+18y^2=468$ и перпендикулярной его большой оси.

§ 3. ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (2a), меньшая, чем расстояние между фокусами (2c).

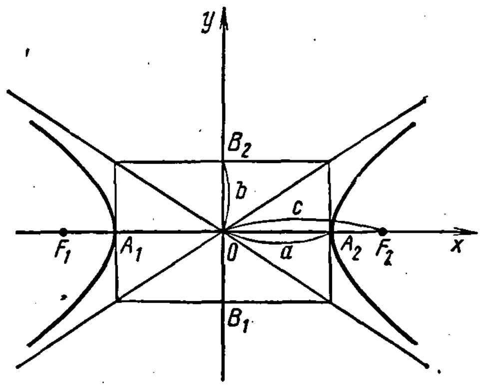


Рис. 15

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy — перпендикуляр в середине отрезка F_1F_2 (рис. 15). Тогда уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2, называемых *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок B_1B_2 — *мнимой осью* гиперболы.

Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны ее полуосям.

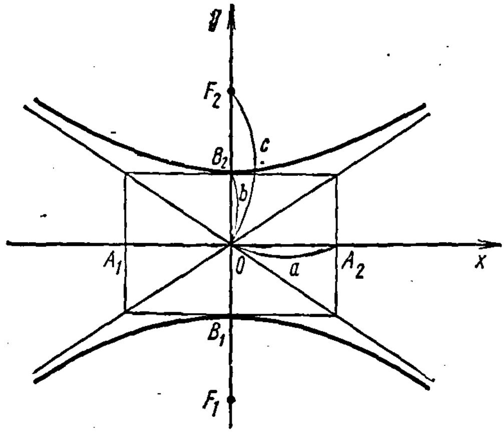


Рис. 16

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к ее действительной оси:

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Очевидно, что $e > 1$.

Гипербола имеет две *асимптоты*, уравнения которых

$$y = \frac{b}{a} x$$

и $\qquad (3)$

$$y = -\frac{b}{a} x.$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси Ox и имеет длину $2a$, а действительная ось длиной $2b$ направлена по оси Oy, то уравнение гиперболы (рис. 16) имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле

$$e = \frac{c}{b}. \qquad (2')$$

Ее асимптоты те же, что и у гиперболы (1).

Гиперболы (1) и (4) называются *сопряженными*.

Гипербола называется *равносторонней*, если ее действительные и мнимые оси равны, т. е. $a = b$. Простейшее уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (5)$$

или

$$-x^2 + y^2 = a^2. \qquad (5')$$

3.61. Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы

$$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0.$$

Решение. Перенесем свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим $a = 3$, $b = 4$. Таким образом, действительная ось гиперболы $2a = 6$, а мнимая ось $2b = 8$; координаты вершин A_1 (—3; 0) и A_2 (3; 0). Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$; следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках F_1 (—5; 0) и F_2 (5; 0). Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (2): $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. Наконец, подставляя значения $a = 3$ и $b = 4$ в формулы (3), получаем уравнения асимптот гиперболы: $y = \frac{4}{3}x$ и $y = -\frac{4}{3}x$.

3.62. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет следующих гипербол:

1) $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$; 2) $9x^2 - 4y^2 - 144 = 0$;
3) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$; 4) $9x^2 - 7y^2 + 252 = 0$.

3.63. Составить простейшее уравнение гиперболы, действительная ось которой лежит на оси абсцисс и проходящей через точки M_1 (3; —2) и M_2 (—6; $2\sqrt{10}$). Найти эксцентриситет и координаты фокусов гиперболы.

3.64. Составить простейшее уравнение гиперболы, действительная ось которой равна 6, а расстояние между фокусами равно 8. Написать уравнение сопряженной гиперболы.

3.65. Сумма полуосей гиперболы равна 17, а эксцентриситет $e = \frac{13}{12}$. Написать простейшее уравнение гиперболы и найти координаты ее фокусов.

3.66. Составить уравнения прямых, проходящих через фокусы гиперболы $7x^2 - 5y^2 = 35$ и образующих с осью x угол 60°.

3.67. Через точку M (—5; 2) провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$.

3.68. Асимптотами гиперболы служат прямые $y = \pm\frac{3}{4}x$, а один из фокусов находится в точке (—10;0). Написать уравнение гиперболы и найти ее эксцентриситет.

3.69. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{3}$, а фокусы находятся в точках (6; 0) и (—6; 0). Составить уравнени гиперболы и написать уравнения ее асимптот.

3.70. Определить острый угол между асимптотами и эксцентриситет гиперболы $x^2 - 3y^2 = 27$.

3.71. Точка M $(6; -2\sqrt{2})$ лежит на гиперболе, урав нения асимптот которой $y = \pm\frac{2}{3}x$. Составить уравне ние гиперболы.

3.72. Составить уравнение гиперболы, имеющей об щие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$ при условии, что эксцентриситет ее $e = 1{,}2$.

3.73. Известно, что гипербола проходит через фокус эллипса $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$, а ее фокусы находятся в вер шинах этого эллипса. Составить уравнение гиперболы

3.74. Составить простейшее уравнение гиперболы фокусами на оси Oy, если известно отношение ее полуосеı $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ и точка M $(4; -3\sqrt{6})$, лежащая на гиперболе

3.75. Написать уравнения гиперболы и ее асимптот если вершины ее находятся в точках (0; 4) и (0; —4), а эк сцентриситет $e = \frac{3}{2}$.

3.76. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{4}{3}x$, а один из ее фокусов находится в точк $(0; 5\sqrt{2})$. Составить уравнение гиперболы и найти ее э сцентриситет.

3.77. Составить уравнение равносторонней гипербол проходящей через точку A $(-\sqrt{11}; \sqrt{2})$.

3.78. Составить уравнение равносторонней гипербол фокусы которой находятся в фокусах гиперболы $5x^2 - 3y^2 = 60$.

3.79. Для равносторонней гиперболы, один из фок сов которой находится в точке $(-7\sqrt{2}; 0)$, написать ура нение сопряженной гиперболы.

3.80. Показать, что уравнение

$$5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0$$

представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду (ср. с решением задачи 3.46):

$$5(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) - 45 + 4 + 21 = 0;$$

$$5(x+3)^2 - 4(y-1)^2 = 20,$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Обозначим $x' = x + 3$, $y' = y - 1$. Таким образом, мы производим преобразование параллельного переноса осей координат в точку O' $(-3;\ 1)$. В новой системе координат данное уравнение принимает вид

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1,$$

т. е. определяет гиперболу с центром в точке O' $(-3;\ 1)$ и полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{5}$ (рис. 17). Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$, то $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

Нетрудно найти координаты вершин и фокусов в новой координатной системе: A_1 $(-2;\ 0)$, A_2 $(2;\ 0)$, F_1 $(-3;\ 0)$, F_2 $(3;\ 0)$. Так как $x = x' - 3$, $y = y' + 1$, то, возвращаясь

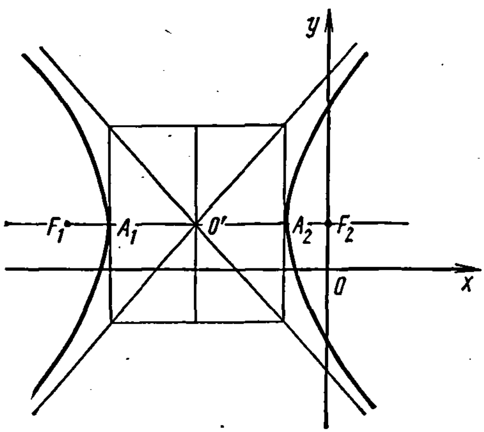


Рис. 17

к старой системе координат, получим $A_1(-5;\ 1)$, $A_2(-1;1)$, $F_1(-6;\ 1)$, $F_2(0;\ 1)$.

Остается найти асимптоты гиперболы. В новой системе координат уравнения асимптот имеют вид $y' = \pm \frac{b}{a}x'$,

т. е. $y' = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x'$. Заменяя теперь x' на $x+3$, а y' на $y-1$, получим уравнения асимптот в первоначальной системе координат:

$$y-1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x+3).$$

3.81. Найти центр, оси, вершины, эксцентриситет и асимптоты следующих гипербол:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

2) $x^2 - y^2 + 4x - 10y - 25 = 0$;

3) $x^2 - 3y^2 + 6y - 15 = 0$.

3.82. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-5;\ 0)$ и $F_2(11,\ 0)$, а расстояние между вершинами равно 12.

3.83. Даны вершины гиперболы $A_1(-9;\ 2)$ и $A_2(1;\ 2)$ и ее эксцентриситет $e = 2{,}6$. Составить уравнение гиперболы, найти ее фокусы и асимптоты.

3.84. Асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны, а фокусами ее служат точки $F_1(-3;\ -5)$ и $F_2(5;-5)$. Написать уравнения гиперболы и ее асимптот.

3.85. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ со следующими прямыми: 1) $x + 6y = 0$; 2) $x - 3y = 0$; 3) $5x + 21y + 6 = 0$.

3.86. Через левый фокус гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Найти расстояние между точками пересечения этих прямых с гиперболой.

3.87. Найти точки пересечения равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 33$ с окружностью $x^2 + y^2 = 65$.

3.88. Найти расстояние между точками пересечения гипербол $x^2 - y^2 = 15$ и $xy = 4$.

§ 4. ПАРАБОЛА

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется *параметром* параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно ее директрисе, называется *осью*, а точка пересечения параболы с ее осью — *вершиной* параболы.

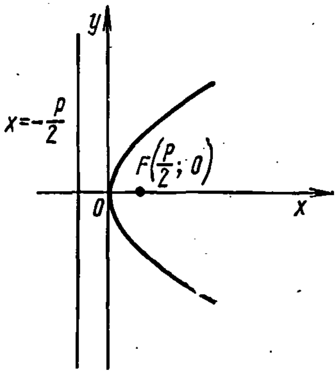


Рис. 18

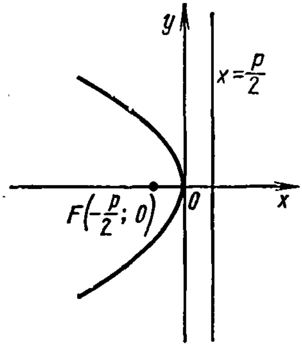


Рис. 19

Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берется ось параболы, а за другую — прямая, перпендикулярная оси параболы и проведенная посредине между фокусом и директрисой.

Тогда уравнение параболы примет вид:

$$y^2 = 2px \quad (\text{рис. } 18); \tag{1}$$

$$y^2 = -2px \quad (\text{рис. } 19); \tag{2}$$

$$x^2 = 2py \quad (\text{рис. } 20); \tag{3}$$

$$x^2 = -2py \quad (\text{рис. } 21). \tag{4}$$

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{5}$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.

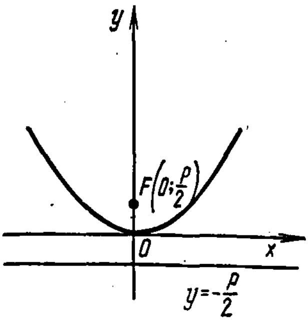


Рис. 20

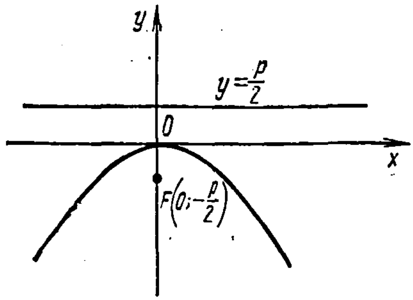


Рис. 21

Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \quad (m \neq 0) \qquad (6)$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат.

Уравнения (5) и (6) приводятся к простейшему виду (1)—(4) путем тождественных преобразований с последующим параллельным переносом координатной системы.

3.89. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 4x$.

Решение. Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим, что $2p = 4$, откуда $\frac{p}{2} = 1$. Таким образом, точка F (1; 0) — фокус параболы, а прямая $x + 1 = 0$ — ее директриса.

3.90. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы для каждой из парабол:
1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = -12x$; 3) $x^2 = 10y$; 4) $x^2 = -16y$.

3.91. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке F (0; —8).

Решение. Фокус параболы лежит на оси ординат, а вершина — в начале координат, поэтому уравнение параболы можно записать либо в виде $x^2 = 2py$, либо в виде $x^2 = -2py$. Далее, поскольку ордината фокуса отрицательна, то уравнение параболы следует искать в виде $x^2 = -2py$. Фокусное расстояние параболы $OF = \frac{p}{2} = 8$, откуда $2p = 32$ и окончательно получаем

$$x^2 = -32y.$$

3.92. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты фокуса: 1) F (0; 4); 2) F (0; —3); 3) F(6; 0); 4) F(—2,5; 0).

3.93. Парабола симметрична относительно оси Ox, вершина ее находится в начале координат, а расстояние между фокусом и вершиной равно 12. Написать уравнение параболы.

3.94. Парабола, симметричная относительно оси Oy, имеет вершину в начале координат и проходит через точку (6; —2). Написать уравнение параболы и определить координаты ее фокуса.

3.95. Парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии Ox проходит через точку $M\left(\frac{1}{3}; 4\right)$. Составить уравнение параболы, найти ее фокус и директрису и определить длину отрезка, соединяющего фокус с точкой M

3.96. Директрисой параболы, вершина которой находится в начале координат, служит прямая $2x - 3 = 0$. Составить уравнение параболы и найти ее фокус.

3.97. На параболе $y^2 = 36x$ найти точки, расстояния которых до фокуса равны 34.

3.98. Через фокус параболы $x^2 = -8y$ проведена прямая, составляющая с осью Ox угол $135°$. Написать уравнение этой прямой и найти точку ее пересечения с директрисой.

3.99. На параболе $y^2 = 36x$ взята точка M (x; y), находящаяся от директрисы на расстоянии, равном 13. Определить расстояние этой точки от вершины параболы.

3.100. Через фокус параболы $y^2 = 48x$ проведена прямая, параллельная заданной прямой $y = \sqrt{3}\,x + 1$. Найти длину образовавшейся хорды.

3.101. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 9x$ с прямыми: 1) $3x + y - 6 = 0$; 2) $2x - y + 5 = 0$; 3) $y - 6 = 0$.

3.102. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 24x$ с эллипсом $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

3.103. Составить уравнение и найти длину общей хорды параболы $y^2 = 36x$ и окружности $(x + 12)^2 + y^2 = 400$.

3.104. Найти длину общей хорды двух парабол, вершины которых находятся в начале координат, а фокусы — в точках F_1 $(-6;\ 0)$ и F_2 $(0;\ -6)$.

3.105. Показать, что уравнение

$$2x^2 - 12x + y + 13 = 0$$

представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого выразим y через x и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 12x - 13,$$

или

$$y = -2\left(x^2 - 6x + \frac{13}{2}\right),$$

или

$$y = -2\left[(x^2 - 2x\cdot 3 + 9) - 9 + \frac{13}{2}\right],$$

откуда

$$y = -2(x - 3)^2 + 5.$$

Следовательно,

$$y - 5 = -2(x - 3)^2,$$

или

$$-\frac{1}{2}(y-5)=(x-3)^2.$$

Положим теперь $y'=y-5$, $x'=x-3$. Тем самым мы производим преобразование параллельного переноса координатных осей без изменения их направления в точку O' (3; 5). В новой системе координат уравнение параболы примет вид

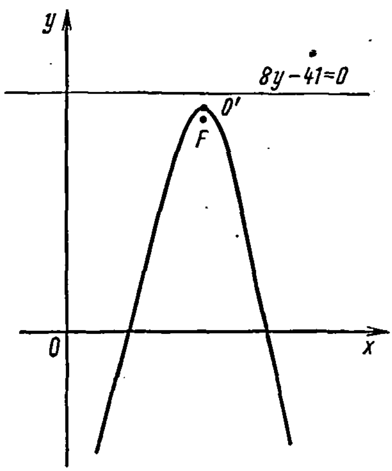


Рис. 22

$$-\frac{1}{2}y'=x'^2.$$

Отсюда $2p=\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{p}{2}=\frac{1}{8}$. Таким образом, в новой системе координат данная парабола имеет фокус $F\left(0; -\frac{1}{8}\right)$, осью параболы является ось $O'y'$ (ее уравнение $x'=0$), а уравнение директрисы $y'=\frac{1}{8}$ (рис. 22).

Возвращаясь к старой системе координат, получим: вершина параболы O' (3; 5);

координаты фокуса F:

$$x_F=x'_F+3=0+3=3,$$

$$y_F=y'_F+5=-\frac{1}{8}+5=\frac{39}{8}, \text{ т. е. } F\left(3; \frac{39}{8}\right);$$

уравнение оси параболы $x-3=0$;

уравнение директрисы $y-5=\frac{1}{8}$, или $8y-41=0$.

3.106. Найти координаты вершины и фокуса, составить уравнения оси и директрисы для каждой из следующих парабол:

1) $y^2+2y+4x-11=0$;
2) $4x^2+4x-8y-19=0$;
3) $x^2-6x+8y-47=0$;
4) $y^2+8y-x+16=0$;
5) $x^2+10x+6y+25=0$.

3.107. Найти расстояние между фокусом параболы $x^2+4x-4y+24=0$ и той точкой ее директрисы, абсцисса которой равна 5.

3.108. Фокус параболы находится в точке $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$, а параметр $p=3$. Составить уравнение параболы, если направление ее оси симметрии совпадает с положительным направлением оси абсцисс.

3.109. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке (7; 2), а фокус — в точке (7; 5).

3.110. Вершина параболы, симметричной относительно оси Ox, находится в точке (3; 0), а на оси ординат парабола отсекает хорду, длина которой равна 24. Составить уравнение параболы, найти ее фокус и директрису.

3.111. Парабола, симметричная относительно оси Oy, проходит через точку (—6; 1), а вершина ее находится в точке (0; —5). Составить уравнение параболы, найти ее фокус и директрису.

3.112. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке $\left(\frac{9}{2}; -1\right)$, а директрисой служит прямая $2x-3=0$.

3.113. Вершина параболы находится в точке (—3; 4), а директрисой является прямая $2y-9=0$. Составить уравнение параболы.

3.114. Парабола, ось симметрии которой параллельна оси Ox, проходит через начало координат; вершина параболы A (—8; —4). Составить уравнения параболы, ее оси и директрисы и найти координаты фокуса.

3.115. Мостовая арка имеет вид параболы, уравнение которой $y^2=96x$. Найти величину пролета арки, если ее высота равна 6 м.

3.116. Диаметр параболического зеркала равен 120 см, а глубина его 15 см. На каком расстоянии от вершины параболы необходимо поместить источник света, чтобы отраженный луч был параллелен оси параболы?

3.117. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, имеет форму параболы, параметр которой $p=8$. Определить, на каком расстоянии от места выхода струя падает на землю, если наибольшая высота подъема равна 4 м.

3.118. Тело, брошенное под острым углом к горизонту, описало дугу параболы и упало на расстоянии 32 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, если наибольшая высота, достигнутая телом, равна 12 м.

§ 5. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

3.119. Какие кривые описываются следующими уравнениями:

1) $x^2+2y^2+2x-8y+5=0$;

2) $2x^2+2y^2-3x-4y-10=0$;

3) $3x^2-4y-12x=0$;

4) $3x^2-4y^2-12x=0$;

5) $3x^2-4y^2-12x+24=0$;

6) $y^2+2y-4x+9=0$;

7) $2x^2-2y^2+2x=0$?

3.120. Через фокус параболы $y^2=-8x$ проведены две прямые, одна из которых составляет с осью Ox угол $60°$, а другая — $120°$. Точки пересечения этих прямых с параболой последовательно соединены между собой. Найти площадь полученного четырехугольника.

3.121. Составить уравнение эллипса, имеющего общие фокусы с гиперболой $x^2-2y^2=24$, если эксцентриситет его равен $\frac{3}{5}$.

3.122. Найти длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $9x^2+16y^2=576$.

3.123. Найти расстояние от центра окружности $x^2+y^2+6x+2y-5=0$ до асимптот гиперболы $9x^2-16y^2=144$.

3.124. На параболе $y^2=32x$ взяты две точки M_1 и M_2, расстояния которых до фокуса этой параболы равны 10. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок M_1M_2.

3.125. Вершина параболы лежит в конце одного из диаметров окружности $x^2+y^2=9$. Составить уравнение параболы, если общая хорда параболы и окружности лежит на прямой $y-2=0$.

3.126. Под какими углами видны из центра окружности $x^2+y^2-8y-9=0$ отрезок, соединяющий фокусы эллипса $9x^2+25y^2=225$, и большая ось этого эллипса?

3.127. Равносторонняя гипербола $x^2-y^2=16$ проходит через фокусы эллипса. Составить простейшее уравнение этого эллипса, если отношение эксцентриситетов гиперболы и эллипса равно $\sqrt{3}$.

3.128. Из фокуса параболы $y=\frac{x^2}{16}$ опущен перпендикуляр на прямую, проходящую через центр эллипса $x^2+2y^2+6x-7=0$ и составляющую с осью Ox угол $135°$. Составить уравнение и найти длину этого перпендикуляра.

3.129. Директриса параболы пересекает эллипс $9x^2+$ $+20y^2=324$ в точках $(-4;\ 3)$ и $(4;\ 3)$, а расстояние от этих точек до фокуса параболы равно $2\sqrt{5}$. Составить уравнение параболы.

3.130. Окружность с центром в начале координат проходит через фокусы гиперболы $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. Найти площадь прямоугольника, образованного в результате последовательного соединения точек пересечения асимптот гиперболы с окружностью.

3.131. Вершина параболы совпадает с центром окружности $x^2+y^2-4x-5=0$, а фокус — с началом координат. Составить уравнение параболы; найти точки ее пересечения с окружностью; вычислить площадь трапеции, одним из оснований которой является общая хорда параболы и окружности, а другим — отрезок директрисы параболы, заключенный внутри окружности.

3.132. Найти угол, под которым из фокуса параболы $x^2-4x+8y-20=0$ видна большая ось эллипса $x^2+2y^2=16$.

3.133. Вершина параболы совпадает с одним из фокусов гиперболы $9x^2-16y^2=144$. Составить уравнение параболы, если известно, что ее директриса проходит через точки $(-4;\ -3)$ и $(-4;\ 3)$.

3.134. Ось симметрии параболы параллельна оси ординат, а уравнение директрисы $y-10=0$. Составить уравнение параболы, если она пересекает ось Ox в точках $(-5;\ 0)$ и $(11;\ 0)$.

3.135. Вершины эллипса, большая ось которого лежит на оси абсцисс, совпадают с вершинами равносторонней гиперболы. Составить уравнения обеих кривых, если известно, что точка M $(6;\ 2)$, лежащая на гиперболе, равноудалена от ближайших к ней фокусов эллипса и гиперболы.

ГЛАВА 4

ПРЕДЕЛЫ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* x, *стремящемся к* a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Математически это записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a так, что x принимает только значения, меньшие a, то число A_1 называется *левым пределом* функции $f(x)$ в точке a. При этом пишут

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A_1.$$

Аналогично определяется *правый предел* функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A_2.$$

В случае, если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, т. е. $A_1 = A_2 = A$, число A есть предел этой функции.

Число B называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$. Математическая запись имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = B.$$

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к a, если для любого $N > 0$ существует число δ, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > N$.

В этом случае пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \to \infty$.

Между бесконечно малой и бесконечно большой функциями существует тесная связь, которая выражается следующими теоремами.

1. *Функция, обратная по величине бесконечно большой, является бесконечно малой.*

2. *Функция, обратная по величине бесконечно малой, отличной от нуля, есть бесконечно большая.*

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) *сумма или разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;*

2) *произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную (в частности, на постоянную или бесконечно малую функцию) есть функция бесконечно малая.*

Бесконечно большие функции обладают следующими свойствами:

1) *сумма бесконечно большой функции и функции ограниченной есть бесконечно большая функция того же знака;*

2) *сумма двух бесконечно больших функций одинакового знака есть бесконечно большая функция того же знака;*

3) *произведение бесконечно большой функции на функцию, превосходящую по абсолютному значению некоторую положительную постоянную (в частности, на бесконечно большую функцию) есть функция бесконечно большая.*

4.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3.$$

Решение. Пусть ε — произвольное положительное число. Требуется доказать: существует такое число $\delta > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих условию $0 < |x - 2| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|(2x - 1) - 3| < \varepsilon.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$2|x - 2| < \varepsilon, \text{ или } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, взяв в качестве δ число $\frac{\varepsilon}{2}$, получим: для любого $\varepsilon > 0$ найдено такое $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, что из неравенства $0 < |x - 2| < \delta$ следует неравенство

$$|(2x - 1) - 3| < \varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 1) = 3$.

4.2. Доказать, что $\log_a x$ $(0 < a < 1)$ есть положительная бесконечно большая функция при x, стремящемся к нулю справа.

Решение. Для любого $M > 0$ неравенство $\log_a x > M$ выполняется при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < x < a^M.$$

Поэтому, полагая $\delta = a^M$, получим: для любого положительного числа M указано такое число δ, что из неравенства $0 < x < \delta$ следует неравенство

$$\log_a x > M.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$, т. е. при $0 < a < 1$ $\log_a x$ — положительная бесконечно большая функция при x, стремящемся к нулю справа.

4.3. Доказать, что функция a^x $(a > 1)$ есть бесконечно малая при $x \to -\infty$ и положительная бесконечно большая при $x \to +\infty$.

Решение. 1. Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|a^x - 0| < \varepsilon$$

выполняется при всех $x < \log_a \varepsilon = N$. Таким образом, произвольному $\varepsilon > 0$ поставлено в соответствие такое число $N = \log_a \varepsilon$, что из неравенства $x < N$ вытекает неравенство $a^x < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, т. е. a^x $(a > 1)$ — бесконечно малая функция при $x \to -\infty$.

2. Пусть M — любое положительное число. Тогда неравенство

$$a^x > M$$

выполняется при всех $x > \log_a M = N$. Таким образом, для любого положительного числа M указано такое число $N = \log_a M$, что из неравенства $x > N$ вытекает неравенство $a^x > M$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, т. е. a^x $(a > 1)$ есть положительная бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.

4.4. Исходя из определения предела, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 8$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} (5 - 2x) = 5$;

3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x} = -1$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x + 3} = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

4.5. Доказать, что функция $f(x) = x^3$ при $x \to 0$ является бесконечно малой. При каких x значения функции будут отличаться от нуля меньше, чем на: а) 0,01; б) 0,001; в) 0,0001?

4.6. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ при $x \to 4$ является положительной бесконечно большой. Каким должно быть число $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x - 4| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x)| > N$? Найти δ, если: а) $N = 100$; б) $N = 1000$; в) $N = 10\,000$.

4.7. Исходя из определения предела, доказать, что $\log_a x$ $(a > 1)$ при x, стремящемся к нулю справа, есть отрицательная бесконечно большая функция.

4.8. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \text{ если } a > 1;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty, \text{ если } 0 < a < 1.$$

4.9. Убедиться в том, что при $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Решение. Представим a^x в виде

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}.$$

Как было показано в задаче 4.3, функция $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ есть положительная бесконечно малая при $x \to -\infty$ и положительная бесконечно большая при $x \to +\infty$ (поскольку $\frac{1}{a} > 1$). Следовательно, в силу теоремы о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами, функция a^x является положительной бесконечно большой при $x \to -\infty$ и положительной бесконечно малой при $x \to +\infty$.

4.10. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, вычислить:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x \sin x$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \log_3 x)$; 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x + 3^x)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-8x+\log_{1/2}x)$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+\operatorname{arctg} x)$.

Указание. Воспользоваться результатами, полученными в задачах 4.2, 4.3, 4.7, 4.8 и 4.9.

4.11. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

4.12. Доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0,$$

если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

Указание. Представить отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в виде произведения $f(x)\cdot\dfrac{1}{\varphi(x)}$ и использовать теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой функциями.

4.13. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{5^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\log_3 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\log_{1/2}x}{x}$.

§ 2. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

При вычислении предела элементарной функции $f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ определена в предельной точке $x=a$. Тогда

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \tag{1}$$

2. Функция $f(x)$ в предельной точке $x=a$ не определена или же вычисляется предел функции при $x\to\infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее простых) вопрос сводится непосредственно к применению теорем о свойствах бесконечно больших и бесконечно малых функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x=a$ или при $x\to\infty$ представляет собой неопределенность $\left(\text{типа } \frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0\cdot\infty, \ \infty-\infty, \ 1^{\infty}, \ 0^0, \ \infty^0\right)$.

Приведем основные теоремы, на которых основано вычисление пределов.

1) *Если существуют* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, *то*:

а) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$ $\left[\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0\right]$.

2) *Если в некоторой окрестности точки $x=a$ (кроме, быть может, точки a) выполнено условие $f(x)=\varphi(x)$ и если предел одной из этих функций в точке a существует, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

3) *Если существует* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ *и $f(x)$ — элементарная функция, то*

$$\lim_{x\to a} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to a}\varphi(x)].$$

Например,

$$\lim_{x\to a}\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}\varphi(x)}, \quad \lim_{x\to a}\log_c\varphi(x)=\log_c\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4) *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2}$$

5) *Второй замечательный предел:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \tag{3}$$

4.14. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\lg|x|}+2\cos x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\lg x-2^{-x})$.

Решение. 1) Функция $f(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$ определена в предельной точке $x=-1$. Следовательно, по формуле (1) имеем

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}=\frac{(-1)^2+5\cdot(-1)-3}{\log_2[(-1)^2+1]}=-\frac{7}{\log_2 2}=-7.$$

2) Функция $\varphi(x)=\dfrac{x}{\lg|x|}+2\cos x$ в предельной точке $x=0$ не определена. Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\lg|x|}+2\cos x\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\lg|x|}+\lim_{x\to0}(2\cos x).$$

Так как

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\lg|x|}=0$$

(под знаком предела стоит произведение двух бесконечно малых функций x и $\dfrac{1}{\lg|x|}$), а

$$\lim_{x\to0}(2\cos x)=2,$$

в силу формулы (1), то

$$\lim_{x\to0}\varphi(x)=0+2=2.$$

3) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}x\lg x=+\infty$ (под знаком предела стоит произведение двух бесконечно больших функций x и $\lg x$) и $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}(x\lg x-2^{-x})=+\infty.$$

В задачах 4.15 — 4.34 найти пределы.

4.15. $\lim\limits_{x\to0,1}\dfrac{5x+4}{-x+1}$. **4.16.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3+5x-2}$. **4.18.** $\lim\limits_{x\to64}\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+5\right)$.

4.19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$. **4.20.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 0,5} \arcsin(x-1)$. 4.22. $\lim\limits_{x\to 0,75} \arccos\sqrt{x}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} 5x$. 4.24. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{x} + 3\operatorname{arcctg} x\right)$.

4.25. $\lim\limits_{x\to\infty} [x(x-1)]$. 4.26. $\lim\limits_{x\to\infty} [x(x-5)+3]$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-2x+7)$. 4.28. $\lim\limits_{x\to\infty} (-x^2-6x+15)$.

4.29. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+3}{(x+1)^2}$. 4.30. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{5x-3}\log_2 x)$.

4.31. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x^2+7x}{5^x}$. 4.32. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-\log_{1/4} x\right)$.

4.33. $\lim\limits_{x\to 3} 0,99^{\frac{5}{|x-3|}}$. 4.34. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\log_{1/3}|x|}$.

4.35. Вычислить односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{4}{(x-2)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$.

Решение. 1) Пусть $x<2$. Тогда при $x\to 2-0$ функция $x-2$, а следовательно, и $(x-2)^3$ есть отрицательная бесконечно малая; поэтому функция $4\cdot\frac{1}{(x-2)^3}$ — отрицательная бесконечно большая, т. е.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{4}{(x-2)^3} = -\infty.$$

При $x\to 2+0$ функция $x-2$, а следовательно, и $(x-2)^3$ — величина положительная бесконечно малая; поэтому $4\cdot\frac{1}{(x-2)^3}$ — положительная бесконечно большая функция, т. е.

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{4}{(x-2)^3} = +\infty.$$

2) Пусть $x<1$. Тогда при $x\to 1-0$ имеем: $x-1$ — отрицательная бесконечно малая величина; следовательно, $\frac{1}{x-1}\to-\infty$ и $2^{1/(x-1)}\to 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} = 1.$$

Если $x > 1$, то при $x \to 1-0$ получим: $x-1$ — положительная бесконечно малая величина; следовательно, $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ и $2^{1/(x-1)} \to +\infty$, тогда $\frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} = 0.$$

В задачах 4.36 — 4.44 найти односторонние пределы.

4.36. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \frac{x+2}{x-1}$. **4.37.** $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} \frac{3-x}{(x-5)^2}$. **4.38.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}\pm 0} \operatorname{tg} 2x$.

4.39. $\lim\limits_{x\to \pm 0} \left(5^{1/x}+1\right)$. **4.40.** $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{\lg(2-x)}{2-x}$.

4.41. $\lim\limits_{x\to 1+0} \log_7 \log_4 x$. **4.42.** $\lim\limits_{x\to +0} \left(\frac{1}{\log_3 x} + 2\arccos x\right)$.

4.43. $\lim\limits_{x\to \pm 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. **4.44.** $\lim\limits_{x\to -0} (7x + \operatorname{ctg} 3x)$.

4.45. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 5x}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$.

Решение. 1) Функция $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в предельной точке $x = 2$ не определена. Так как при $x = 2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то мы имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на выражение $x-2$, дающее неопределенность. Тогда

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1},$$

Последнее равенство справедливо при всех $x \neq 2$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \quad (\text{при } x \neq 2).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-3}{x-1}$. Так как дробь $\frac{x-3}{x-1}$ в предельной точке $x = 2$ определена, то по формуле (1) получим

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2-3}{2-1} = -1.$$

2) В этом случае также получаем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Преобразование функции $\varphi(x) = \frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$ сводится к уничтожению иррациональности в числителе: для этого умножим числитель и знаменатель на выражение $3+\sqrt{x+9}$ и затем сократим дробь на $x \neq 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3+\sqrt{x+9}} =$$

$$= -\frac{1}{3+\sqrt{0+9}} = -\frac{1}{6}.$$

3) Здесь имеет место неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^4 (наивысшая степень x в данной дроби). Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}}{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{3} = 0.$$

4) Здесь получается неопределенность типа $0\cdot\infty$. Представим функцию $p(x) = x\cdot\operatorname{ctg} 3x$ в виде дроби, которая в точке $x = 0$ дает неопределенность типа $\frac{0}{0}$, после чего преобразуем ее так, чтобы можно было воспользоваться первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg} 3x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos 3x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$, поскольку, сделав замену переменной $3x = t$ (если $x \to 0$, то и $t \to 0$) получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} \left(3 \cdot \frac{\sin t}{t}\right) =$$

$$= 3 \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x) = \frac{1}{3}$*.

5) Положим $\arcsin 5x = y$; тогда $5x = \sin y$, откуда $x = \frac{1}{5} \sin y$; если $x \to 0$, то $y \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 5x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{1}{5} \sin y} = 5 \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 5.$$

6) В этом случае имеем неопределенность типа $\infty - \infty$. Умножив и разделив данную функцию на выражение $x + \sqrt{x^2 + 3}$, получим

$$\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 3})(x + \sqrt{x^2 + 3})}{x + \sqrt{x^2 + 3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = 0.$$

7) Функция $r(x) = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$ при $x \to \infty$ представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (неопределенность типа 1^{∞}). Преобразуем функцию $r(x)$ таким образом, чтобы ис-

* Более простой метод решения подобных примеров дается в § 3 этой главы.

пользовать второй замечательный предел. Для этого из дроби $\frac{x-3}{x+1}$ исключим целую часть:

$$\frac{x-3}{x+1}=\frac{(x+1)-4}{x+1}=1+\frac{-4}{x+1}$$

и сделаем замену переменной, положив $-\frac{4}{x+1}=t$. Тогда, если $x\to\infty$, то $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{4}{t}-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{-\frac{4}{t}}\cdot(1+t)^{-2}\right]=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{4}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-4}\cdot 1=\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-4}=e^{-4}.$$

В задачах **4.46 — 4.121** найти пределы.

4.46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$.

4.47. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$.

4.48. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{x^3-27}$.

4.49. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$.

4.50. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$.

4.51. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$.

4.52. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$.

4.53. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

4.54. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{x^3-64}$.

4.55. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

4.56. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

4.57. $\lim\limits_{z\to -a}\frac{z^3+a^3}{a^2-z^2}$.

4.58. $\lim\limits_{z\to a}\frac{z^2-a^2}{a^4-z^4}$.

4.59. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

4.60. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$.

4.61. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$.

4.62. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$. **4.63.** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

4.64. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$. **4.65.** $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

4.66. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. **4.67.** $\lim\limits_{x\to64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$.

4.68. $\lim\limits_{\varphi\to0} \dfrac{16^{\varphi}-1}{1-4^{\varphi}}$. **4.69.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$.

4.70. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$. **4.71.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2}$.

4.72. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+7x-1}{3x^2-5x+6}$. **4.73.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$.

4.74. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-7x-12}{2x^2-5x-8}$.

4.75. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1x+b_0}$.

4.76. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$. **4.77.** $\lim\limits_{x\to-3} \left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$.

4.78. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. **4.79.** $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

4.80. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$. **4.81.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

4.82. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x-\sec x)$. **4.83.** $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{ctg} 2x-2\operatorname{cosec} 4x)$.

4.84. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$. **4.85.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{2x-3})$.

4.86. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})$.

4.87. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x-1}-x)$. **4.88.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+10x}-x)$.

4.89. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-\sqrt{x^2+7x})$. **4.90.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{4x^2+3x}-2x)$.

4.91. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$. 4.92. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3}{9\cdot 5^x+4}$.

4.93. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3\cos^2 \dfrac{x}{2}}$. 4.94. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$.

4.95. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$. 4.96. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$.

4.97. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$. 4.98. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{\sec x+\operatorname{cosec} x}$.

4.99. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$. 4.100. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x}$. 4.101. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{ctg} 5x$.

4.102. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 10x}{\sin^2 2x}$. 4.103. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 10\pi x}{\operatorname{tg} 5x}$.

4.104. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}$. 4.105. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{8}\operatorname{tg}^2\dfrac{5x}{4}$.

4.106. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$. 4.107. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\arcsin 12x}$.

4.108. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$. 4.109. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\sin 3x}$.

4.110. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{\arcsin 10x}$. 4.111. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\arcsin(x-1)}$.

4.112. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$. 4.113. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^x$.

4.114. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$. 4.115. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{2x}$.

4.116. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}$. 4.117. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-5}{x-2}\right)^x$.

4.118. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$. 4.119. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

4.120. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{-\sec x}$. 4.121. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Указание. Положить $\operatorname{tg} x = 1+\alpha$; тогда если $x\to\dfrac{\pi}{4}$, то $\alpha\to 0$.

§ 3. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. ПРИНЦИП ЗАМЕНЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ

Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ сравниваются между собой путем вычисления предела их отношения.

1) *Если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0,$$

то α *есть бесконечно малая высшего порядка, чем* β.

2) *Если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = \infty,$$

то α *есть бесконечно малая низшего порядка, чем* β.

3) *Если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = c \neq 0,$$

то α *есть бесконечно малая того же порядка, что и* β.

В частности, если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

то α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми* ($\alpha \sim \beta$). Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Вычисление некоторых пределов заметно упрощается, если воспользоваться **принципом замены эквивалентными**: *при нахождении предела дроби можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменять эквивалентными величинами.*

4.122. Пусть $x \to 0$. Сравнить с бесконечно малой $\beta(x) = x$ бесконечно малую $\alpha(x)$, если: 1) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x$; 2) $\alpha(x) = \sin^3 x$; 3) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x}$; 4) $\alpha(x) = \sin 2x + x^2$.

Решение. 1) Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x \sim x$.

2) Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sin^2 x = 1 \cdot 0 = 0,$$

то $\alpha(x)=\sin^3 x$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta(x)=x$.

3) Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$$

$\alpha(x)=\sqrt[3]{x}$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $\beta(x)=x$.

4) Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)+\lim_{x\to 0}x=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

Таким образом, $\alpha(x)=\sin 2x+x^2$ и $\beta(x)=x$ — бесконечно малые одного порядка.

4.123. Пусть $x\to 0$. Сравнить с бесконечно малой $\delta(x)=x^2$ бесконечно малую $\gamma(x)$: 1) $\gamma(x)=\operatorname{tg}^2 3x$; 2) $\gamma(x)=x^3-2x^2+3x-1$; 3) $\gamma(x)=x\sqrt[3]{x}+\sin x$; 4) $\gamma(x)=2-2\cos x$.

4.124. Какая из переменных $1-x$ или $\sqrt{1-x}$ представляет собой бесконечно малую более высокого порядка при $x\to 1$?

4.125. Показать, что при $x\to 0$

$$\arcsin x\sim x \text{ и } \operatorname{arctg} x\sim x.$$

4.126. Показать, что $\cos 2x$ при $x\to\frac{\pi}{4}$ есть бесконечно малая величина того же порядка малости, что и $\sin 4x$.

4.127. Сравнить порядки бесконечно малых величин $\sin x-\operatorname{tg} x$ и $x^2\sqrt{x}$ при $x\to 0$.

4.128. Радиус шара стремится к нулю. Показать, что объем его представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, нежели его поверхность, и того же порядка, что и объем описанного около шара цилиндра.

В задачах 4.129—4.132 доказать эквивалентность бесконечно малых при $x\to 0$.

4.129. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$. **4.130.** $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$.

4.131. $\sin x+\operatorname{tg} x\sim 2x$. **4.132.** $\operatorname{tg} x-\sin x\sim x^3$.

4.133. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение. Здесь мы имеем отношение двух бесконечно малых функций $1-\cos x$ и $\sin^2 x$ при $x\to 0$. Для вычисления данного предела воспользуемся принципом замены эквивалентными.

Заменим бесконечно малые $\sin^2 x$ и $1-\cos x$ простейшими эквивалентными им бесконечно малыми: так как $\sin x \sim x$, то

$$(\sin x)^2 \sim x^2 \text{ и } 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

В задачах 4.134—4.145, применяя принцип замены эквивалентными, найти следующие пределы.

4.134. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 20x}$.

4.135. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$.

4.136. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{3}}{\operatorname{tg} 2x}$.

4.137. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{x\sin 2x}$.

4.138. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

4.139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

4.140. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{tg} 6x}{\arcsin\frac{x^3}{2}}$.

4.141. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x-x^2}$.

4.142. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x^3}{x^2\operatorname{arctg}^2 4x^2}$.

4.143. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{\operatorname{tg} x}}$.

4.144. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 8\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}\cdot\sin 6\alpha}$.

4.145. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\arcsin 9\varphi^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}{\sin^3 3\varphi\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{4}}$.

ГЛАВА 5

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА И ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ

Если x_1 и x_2 — значения аргумента x, а $f(x_1)$ и $f(x_2)$ — соответствующие значения функции $y = f(x)$, то $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента* x на отрезке $[x_1, x_2]$, а величина $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ — *приращением функции* на этом отрезке.

5.1. Дана функция $y = x^2 - 2x + 3$. Вычислить приращения аргумента и функции, соответствующие изменению аргумента: а) от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$; б) от $x_1 = -1$ до $x_2 = 3$.

Решение. Имеем

а) $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$; $\Delta y = (1^2 - 2\cdot 1 + 3) - (0^2 - 2\cdot 0 + 3) = -1$;

б) $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 4$; $\Delta y = (3^2 - 2\cdot 3 + 3) - [(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3] = 6 - 6 = 0$.

5.2. Найти приращение функции $y = x^3$, соответствующее приращению аргумента от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$.

5.3. Найти приращение функции $y = x^2 - 2x + 3$, соответствующее приращению аргумента: а) от $x_1 = -1$ до $x_2 = 0$; б) от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$; в) от $x_1 = 2$ до $x_2 = 5$.

5.4. Найти приращение функции $y = \cos x$, соответствующее приращению аргумента: а) от $x_1 = \frac{\pi}{4}$ до $x_2 = \frac{\pi}{3}$; б) от $x_1 = \frac{\pi}{2}$ до $x_2 = 0$; в) от $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ до $x_2 = \frac{\pi}{6}$.

5.5. Для функции $y = 9 - x^2$ найти Δy, если: а) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$; б) $x = 2$, $\Delta x = -1$; в) $x = -1$, $\Delta x = 0{,}2$.

5.6. Найти приращение функции $y = 3x - x^3$ в точке $x = -2$, если независимая переменная x получает приращение: а) $\Delta x = 2$, б) $\Delta x = 0{,}5$; в) $\Delta x = -3$.

5.7. Сторона квадрата равна 2 см. Найти приращение площади квадрата, если его сторона: а) увеличивается на 0,1 см; 2) уменьшается на 0,2 см.

5.8. Радиус шара равен 5 см. Найти приращение поверхности и объема шара, если его радиус получает приращение 0,3 см.

§ 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Первое определение непрерывности. *Функция* $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x = a$, *если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции*, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Второе определение непрерывности. *Функция* $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x = a$, *если существует предел функции в этой точке, который равен значению функции в этой точке*, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Примером непрерывной функции может служить любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения.

Точка $x = a$ называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = a$, но в самой точке $x = a$ не удовлетворяет условию непрерывности.

Точки разрыва функции делятся на два типа. *К точкам разрыва* I *рода* относятся такие точки, в которых *существуют конечные односторонние пределы*: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (левый предел) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (правый предел). *К точкам разрыва* II *рода* относятся те точки, в которых *хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.*

5.9. Показать, используя первое определение непрерывности, что функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой.

Решение. Пусть $x = x_0$ — любая точка числовой прямой; значение функции в этой точке $y(x_0) = x_0^2$. Придадим аргументу $x = x_0$ произвольное приращение Δx. В результате функция получит некоторое приращение Δy, равное

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2.$$

Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2) = 0.$$

Следовательно, функция $y = x^2$, согласно первому определению, непрерывна в любой точке $x = x_0$ числовой прямой.

В задачах 5.10—5.15, пользуясь первым определением непрерывности, показать, что данные функции непрерывны во всей своей области определения.

5.10. $y = x^2 - 2x$. 5.11. $y = 1 - x^3$. 5.12. $y = \frac{1}{x^2+1}$.

5.13. $y = e^x$. 5.14. $y = \sin x$. 5.15. $y = \cos 3x$.

5.16. Даны функции 1) $y = \frac{1}{x+3}$ и 2) $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$.

Найти точки разрыва и исследовать их характер. Построить схематично графики функций в окрестности точек разрыва.

Решение. 1) Функция $y = \frac{1}{x+3}$ определена при всех значениях x, кроме $x = -3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, состоящей из двух интервалов $(-\infty, -3)$ и $(-3, +\infty)$.

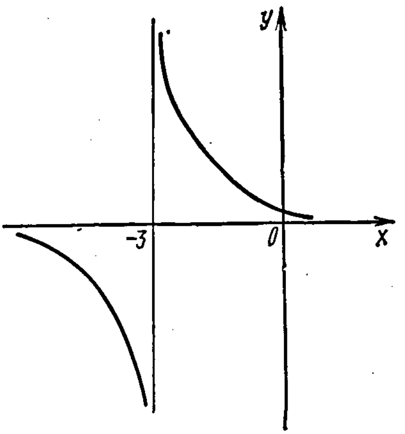


Рис. 23

Следовательно, единственной точкой разрыва является точка $x = -3$ (функция определена в окрестности этой точки, в самой же точке нарушается условие непрерывности — функция в ней не определена). Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы этой функции при стремлении аргумента x к точке разрыва $x = -3$:

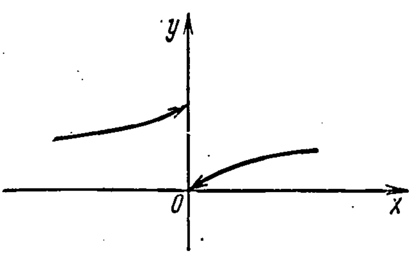


Рис. 24

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{1}{x+3} = +\infty, \quad \lim_{x\to -3-0} \frac{1}{x+3} = -\infty.$$

Следовательно, в точке $x = -3$ функция $y = \frac{1}{x+3}$ имеет бесконечный разрыв (рис. 23); точка $x = -3$ есть точка разрыва II рода.

2) Рассуждая аналогично, получим, что точкой разрыва функции $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ является точка $x = 0$.

Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to +0} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 0; \quad \lim_{x\to -0} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 1.$$

Таким образом, левый и правый пределы исследуемой функции в точке разрыва $x = 0$ конечны (рис. 24). Поэтому $x = 0$ — точка разрыва I рода.

В задачах **5.17—5.33** для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер.

5.17. $y = \frac{1}{2-x}$. **5.18.** $y = \frac{1}{(x+5)^2}$. **5.19.** $y = \frac{2}{x^2-1}$.

5.20. $y = \frac{1}{x^2-4x+3}$. **5.21.** $y = \frac{3}{2^x-1}$. **5.22.** $y = \frac{\sin x}{x}$.

5.23. $y = \lg(x-3)^2$. **5.24.** $y = \frac{1}{\lg|x|}$. **5.25.** $y = 5^{1/x}+2$.

5.26. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. **5.27.** $y = \lg|\sin x|$. **5.28.** $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x^2}$.

5.29. $y = \begin{cases} 2-x & \text{при } x \leqslant 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Числовая ось, являющаяся областью определения функции $y = f(x)$, разбита на три интервала $(-\infty, 0]$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, в каждом из которых $f(x)$ задана соответственно элементарными функциями: $\varphi(x) = 2-x$, $\psi(x) = \cos x$, $\eta(x) = 0$ (рис. 25). Внутри каждого из отмеченных интервалов эти функции определены и, следовательно, непрерывны. Таким образом, остается исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность только в точках $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в которых «стыкуются» области определения функций, составляющих функцию $y = f(x)$.

Вычислим односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$. Так как $f(x) = 2 - x$ при $x \leqslant 0$, то

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (2 - x) = 2.$$

Так как $f(x) = \cos x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \cos x = 1.$$

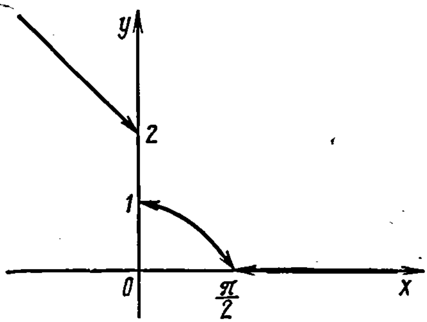


Рис. 25

Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва I рода; в ней функция $y = f(x)$ претерпевает скачок.

Односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ таковы:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \cos x = 0 \quad \left[f(x) = \cos x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} 0 = 0 \quad \left[f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant \frac{\pi}{2}\right].$$

Значение функции $f(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ равно $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Отсюда следует, что в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ непрерывна, так как

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, исследуемая функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси за исключением точки $x = 0$, в которой она претерпевает разрыв I рода — скачок.

5.30. $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ x+1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

5.31. $y = \begin{cases} -x-1 & \text{при } x < -1, \\ 0 & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

5.32. $y = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$

5.33. $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ \sin x & \text{при } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

§ 3. ИНТЕРВАЛЫ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ

Для нахождения *интервалов знакопостоянства* элементарной функции $y = f(x)$, рассматриваемой на некотором интервале (a, b) оси абсцисс, поступают следующим образом. На интервал (a, b) наносят все те точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или претерпевает разрыв. Эти точки разбивают интервал (a, b) на несколько частей, в каждой из которых функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль и, следовательно, сохраняет свой знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемой части оси Ox.

5.34. Найти интервалы знакопостоянства функции

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x}.$$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=-1$ и $x=0$. Представив исследуемую функцию в виде

$$y=\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)},$$

убеждаемся, что она обращается в нуль при $x=2$ и $x=3$ и претерпевает бесконечные разрывы в точках $x=0$ и $x=-1$.

Полученные точки $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$ разбивают ось Ox на пять интервалов: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ $(0, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет вполне определенный знак (рис. 26).

Методом проб находим этот знак в каждом интервале. Для этого подставляем в выражение для y какие-либо значения из этих интервалов, например, $x=-2$, $x=-0{,}5$, $x=1$, $x=2{,}5$, $x=5$. Тогда:

в интервале	$(-\infty, -1)$	имеем	$y(-2)>0$;
»	»	$(-1, 0)$	»	$y(-0{,}5)<0$;
»	»	$(0, 2)$	»	$y(1)>0$;
»	»	$(2, 3)$	»	$y(2{,}5)<0$;
»	»	$(3, +\infty)$	»	$y(5)>0$.

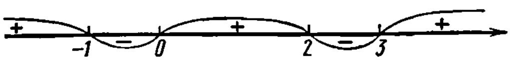


Рис. 26

В задачах 5.35—5.57 найти интервалы знакопостоянства следующих функций.

5.35. $y=\frac{x}{x-1}$. **5.36.** $y=x^2-4x+4$. **5.37.** $y=x^2+3x+2$.

5.38. $y=1-x^2$. **5.39.** $y=\frac{x^2-4}{-x^2+3x}$.

5.40. $y=\frac{(x-4)^2}{x^2-4x+3}$. **5.41.** $y=\frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$.

5.42. $y=(x^2-2x-3)\sqrt{x}$. **5.43.** $y=\frac{\sqrt{1-x}}{4-x^2}$.

5.44. $y=\frac{x^2-9}{(x-5)\sqrt[3]{x+1}}$. **5.45.** $y=3^x-1$. **5.46.** $y=2-2^x$.

5.47. $y=\frac{5^x-25}{x}$. **5.48.** $y=\lg x+1$. **5.49.** $y=\lg(x+1)$.

5.50. $y=\lg(5-x)$. **5.51.** $y=\log_{1/3}x-2$.

5.52. $y=\log_{1/7}(x+3)$. **5.53.** $y=x\lg x$.

5.54. $y=\sin x$ $(0<x<2\pi)$. **5.55.** $y=\cos x$ $(-\pi<x<\pi)$.

5.56. $y=\sin 2x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

5.57. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

5.58. Решить неравенство $\frac{x^2-9}{x^2-x-2}>0$.

Решение. Найдем интервалы знакопостоянства функции $y=\frac{x^2-9}{x^2-x-2}$:

$$(-\infty, -3),\ (-3, -1),\ (-1, 2),\ (2, 3),\ (3, +\infty).$$

Выделив из них те, в которых функция положительна, получим решение данного неравенства: $y>0$ в интервалах $(-\infty, -3)$, $(-1, 2)$ и $(3, +\infty)$.

В задачах 5.59—5.73 решить неравенства.

5.59. $\frac{x-3}{x+2}<0$. **5.60.** $x^2+2x-3>0$. **5.61.** $x^4-1>0$.

5.62. $\frac{x^3+1}{x}<0$. **5.63.** $\frac{3x-x^2}{x^2+4x+4}<0$.

5.64. $\frac{x^2-5x+6}{x^3-1}<0$. **5.65.** $\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}>0$.

5.66. $\frac{\sqrt{x}(3-x)}{x+5}>0$. **5.67.** $\frac{x^2-5x}{\sqrt[3]{x-1}}<0$. **5.68.** $8^x-2^x<0$.

5.69. $\left(\frac{1}{3}\right)^x-3<0$. **5.70.** $\lg(x+2)<0$. **5.71.** $\lg x+2<0$.

5.72. $\log_{1/2}(x-1)<0$. **5.73.** $\lg\lg x>0$.

Г Л А В А 6

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения Δy к приращению Δx аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Если этот предел конечный, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x *бесконечную производную.*

6.1. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$. Вычислить $y'(8)$.

Решение. Найдем приращение функции $y = \sqrt{x+1}$, соответствующее данному приращению Δx аргумента x:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sqrt{x + \Delta x + 1} - \sqrt{x+1}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Подставляя в выражение для y' значение $x = 8$, получим

$$y'(8) = \frac{1}{2\sqrt{8+1}} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

В задачах 6.2—6.10 найти производные от указанных функций, пользуясь непосредственно определением производной.

6.2. $y = 5x + 3$. **6.3.** $y = x^2 - 4$. **6.4.** $y = x^2 + 3x - 2$.

6.5. $y = x^3 - 4x$. **6.6.** $y = \sqrt{x-2}$ **6.7.** $y = \frac{1}{x-1}$.

6.8. $y = \sin x$. **6.9.** $y = \cos 3x$. **6.10.** $y = \operatorname{tg} 2x$.

6.11. Дана функция $f(x) = 3x^2 - 4x + 9$. Найти $f'(1)$.

6.12. Дана функция $f(x) = \sin 2x$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6.13. Дана функция $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Найдя $f'(x)$, вычислить $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f'(\pi)$.

6.14. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Найти $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, $f'(0)$.

6.15. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$.

6.16. Дана функция $\varphi(x) = \frac{8}{x}$. Показать, что $\varphi'(-2) = \varphi'(2)$.

6.17. Показать, что функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Основные правила дифференцирования

а) $c' = 0$; б) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; в) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Здесь $c = \text{const}$, а u и v — дифференцируемые функции

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
2. $(\sin x)' = \cos x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

9. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

10. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6.18. Найти производные следующих функций:

1) $y = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $y = (x^3+1)\sin x$;

3) $y = \frac{x-1}{2\arccos x}$; 4) $y = 2^x + x\ln x$.

Решение. 1) Запишем данную функцию следующим образом:

$$y = 2x^3 - x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$y' = \left(2x^3 - x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{2}{3}}\right)' = (2x^3)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(3x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 2(x^3)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + 3\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 2\cdot 3x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

2) Имеем

$$y' = [(x^3+1)\sin x]' = (x^3+1)'\sin x + (x^3+1)(\sin x)' =$$

$$= [(x^3)' + (1)']\cdot\sin x + (x^3+1)(\sin x)' = (3x^2+0)\sin x +$$

$$+ (x^3+1)\cos x = 3x^2\sin x + (x^3+1)\cos x.$$

3) Имеем

$$y' = \left(\frac{1}{2}\,\frac{x-1}{\arccos x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\arccos x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)'\arccos x - (\arccos x)'(x-1)}{\arccos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot\arccos x - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x-1)}{\arccos^2 x} =$$

$$=\frac{\arccos x+\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\arccos^2 x}=\frac{\sqrt{1-x^2}\arccos x+x-1}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}.$$

4) Имеем

$$y'=(2^x+x\ln x)'=(2^x)'+(x\ln x)'=2^x\ln 2+[x'\ln x+x(\ln x)']=$$
$$=2^x\ln 2+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=2^x\ln 2+\ln x+1.$$

В задачах **6.19—6.127**, используя таблицу производных основных элементарных функций и правила дифференцирования, найти производные указанных функций*.

6.19. $y=-5x+3$. **6.20.** $y=4x^2-0{,}6x+7$.

6.21. $y=11x^3+2x^2-0{,}95$. **6.22.** $y=2x^5-4x^3-3x^2+\frac{1}{2}x-1$.

6.23. $y=-9x^3+0{,}2x^2-0{,}1x+5$.

6.24. $y=ax^3+(b-2a)x^2+(3a+2b)x-2a$.

6.25. $y=2x^{-2}-x^{-1}$. **6.26.** $y=x^{-4}-3x^{-3}-0{,}7x^{-2}+3$.

6.27. $r=0{,}32\varphi^{-3}-0{,}11\varphi^{-1}+0{,}24\varphi$.

6.28. $y=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{6}{7x^4}$. **6.29.** $y=\frac{3x^2-6x+7}{4x}$.

6.30. $y=\frac{6x^4-7x^3+x^2-5x+3}{2x^3}$. **6.31.** $y=x^{\frac{1}{4}}-8x^{\frac{3}{4}}$.

6.32. $y=x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}$. **6.33.** $y=4x^{\frac{7}{2}}-9x^{\frac{5}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}+5$.

6.34. $y=6x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-\frac{2}{3}}+1$. **6.35.** $s=5t^{\frac{1}{2}}-2t^{-\frac{2}{3}}+3t^{-1}$.

6.36. $y=-6\sqrt{x}+\frac{3}{x}$. **6.37.** $y=5\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}$.

6.38. $y=-\sqrt[3]{x^2}+6x^2\sqrt[7]{x}-\frac{5}{x^3}+2$.

6.39. $y=2\sqrt[4]{x}+9x^2\sqrt[3]{x^2}-3x\sqrt[5]{x^3}+\frac{7}{x^2}$.

6.40. $y=(3x-2)(7x+4)$. **6.41.** $y=(2x+5)(-3x^2+4x+2)$.

---

* Учащимся не рекомендуется увлекаться упрощением выражений, полученных в результате дифференцирования, так как основная цель этой главы заключается в освоении техники дифференцирования, а не в проверке умения производить тождественные преобразования.

6.42. $y=(4x^3-2x^2-5x)(x^2-7x)$.

6.43. $y=(9-2x)(2x^3-9x^2+1)$.

6.44. $y=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$.

6.45. $y=\left(6\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^2}\right)(7x-3)$.

6.46. $y=\left(3x^2-\frac{1}{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{x}+0{,}1x\right)$.

6.47. $s=\left(2\sqrt[4]{t^3}+t^3\right)\left(\frac{2}{t}-\sqrt{t}\right)$. 6.48. $y=\frac{x}{x+1}$.

6.49. $y=\frac{x-1}{5x-2}$. 6.50. $y=\frac{2x+3}{3x+7}$. 6.51. $y=\frac{5x^2}{x-3}$.

6.52. $y=\frac{x^2+2x}{3-4x}$. 6.53. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$. 6.54. $y=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}+2}$.

6.55. $s=\frac{\sqrt[3]{t^2}-t}{t+\sqrt[3]{t^2}}$. 6.56. $y=\frac{x^2+7x+5}{x^2-3x}$.

6.57. $y=\frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$. 6.58. $r=\frac{\sqrt{\varphi}-2\varphi}{\sqrt[4]{\varphi}+1}$.

6.59. $y=3\sin x-5x\cos x$. 6.60. $y=2\sqrt{x}\sin x-\frac{\cos x}{x}$.

6.61. $y=(\sin x+3\cos x)\sqrt[3]{x}$. 6.62. $y=\frac{3\cos x}{2x+1}$.

6.63. $y=\frac{-5\sin x}{2+\sqrt{x}}$. 6.64. $y=\frac{x-\sin x}{\sqrt{x}}$.

6.65. $s=\frac{t^2+2\cos t}{\sin t}$. 6.66. $y=\frac{1+4\sin x}{2-3\cos x}$.

.67. $r=\frac{2\cos\varphi-\sin\varphi}{3\sin\varphi+\cos\varphi}$. 6.68. $y=\frac{3\sqrt[3]{x}-\cos x}{2\sin x}$.

.69. $y=x^2\operatorname{tg}x$. 6.70. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x+2}$. 6.71. $y=\frac{4\cos x}{\operatorname{tg}x-2x}$.

.72. $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\operatorname{ctg}x-1}$. 6.73. $s=\frac{\operatorname{ctg}t}{2\sqrt{t}-1}$.

6.74. $y = x^{\frac{4}{5}} \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. **6.75.** $y = \frac{\sin x}{x^2} + x^{\frac{2}{3}} \cos x$.

6.76. $y = -3\arcsin x + 4\sqrt{x}$.

6.77. $y = 5\arccos x - x^2 \arcsin x$. **6.78.** $y = \sin x \cdot \arccos x$.

6.79. $y = (\operatorname{tg} x - 1) \arcsin x$. **6.80.** $y = \frac{\arcsin x}{x+1} - \frac{2}{x^2}$.

6.81. $y = \sqrt{x} \arccos x - \frac{2}{\arcsin x}$. **6.82.** $y = \frac{9\sqrt[3]{x^2} + 2}{\arccos x}$.

6.83. $y = \frac{\arccos x}{x - \arcsin x}$. **6.84.** $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

6.85. $y = -8\sqrt[4]{x} \operatorname{arcctg} x$. **6.86.** $y = \frac{2\operatorname{arctg} x - x}{3\operatorname{arcctg} x}$.

6.87. $y = (x - \operatorname{arcctg} x)(\operatorname{arctg} x - 2x)$. **6.88.** $y = \frac{\operatorname{arcctg} x}{\sin x + 1}$.

6.89. $y = \left(\sqrt[5]{x^3} - 1\right) \operatorname{arctg} x$. **6.90.** $y = \frac{3}{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x}$.

6.91. $y = e^x - 3x^2$. **6.92.** $y = 8\sin x - 4^x$. **6.93.** $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$.

6.94. $y = \frac{\cos x}{e^x}$. **6.95.** $y = x^2 \cdot 3^x$. **6.96.** $y = e^x\left(x^2 + \sqrt{x} - 1\right)$.

6.97. $y = \frac{9^x - 1}{9^x + 1}$. **6.98.** $y = 5^x(x^5 - 10x)$. **6.99.** $y = \frac{7^x - 3}{\sin x}$.

6.100. $r = \frac{\cos\varphi + \varphi^2}{e^{\varphi}}$. **6.101.** $y = 6^x \operatorname{arctg} x$.

6.102. $s = \frac{3\operatorname{ctg} t}{e^t - 1}$. **6.103.** $y = 4^x \arccos x - \frac{e^x}{x^2}$.

6.104. $y = \frac{x^3}{2^x} - \frac{4^x - 1}{\operatorname{tg} x}$. **6.105.** $y = 2\ln x - \frac{3}{x^2}$.

6.106. $y = 8\sqrt[4]{x^3} - 3\log_9 x$. **6.107.** $y = x^2 \log_4 x$.

6.108. $y = \frac{3\ln x}{x}$. **6.109.** $y = \frac{\sin x + 1}{\lg x}$. **6.110.** $y = \frac{e^x - 2}{\ln x}$.

6.111. $y = \frac{\log_2 x + 1}{\sqrt[3]{x}}$. **6.112.** $y = \frac{\log_5 x}{5^x}$.

6.113. $r=\frac{\varphi^3+\ln\varphi}{e^\varphi}$. 6.114. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{e^x-x}$.

.115 $y=\ln x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{2^x}{x}$. 6.116. $s=(\ln t-\log_2 t)\sqrt[5]{t^2}$.

.117. $y=\left(\sqrt[4]{x^3}+\ln x\right)\left(e^x-2\sqrt{x}\right)$.

.118. $y=(\cos x-2^x)(4^x+3\sin x)$. 6.119. $y=\frac{e^x\cos x}{1+\ln x}$.

.120. $y=\frac{3\sin x-\cos x}{x\operatorname{tg} x}$. 6.121. $y=\frac{2^x\arcsin x-4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

.122. $y=\frac{7^x+1}{x^2\operatorname{arctg} x}$. 6.123. $y=\frac{\operatorname{tg} x\cdot\ln x}{5^x}$.

.124. $y=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)6^x}{\operatorname{arctg} x}$. 6.125. $r=\frac{10^\varphi\ln\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi}$.

.126. $y=(e^x\cos x-4x)(x^2-e^x\sin x)$.

.127. $(3^x\arccos x-2\arcsin x)(e^x+3^x)$.

6.128. Показать, что если S — площадь круга, а r — радиус, то $\frac{dS}{dr}$ равняется длине окружности.

6.129. Показать, что если V — объем шара, а R — его адиус, то $\frac{dV}{dR}$ равняется поверхности шара.

6.130. Пусть V — объем кругового цилиндра, h — высота, а r — радиус основания. Показать, что при остоянном r производная $\frac{dV}{dh}$ равна площади основания линдра, а при постоянном h производная $\frac{dV}{dr}$ равна бо- овой поверхности цилиндра.

6.131. Дана функция $f(x)=5x^2-16\sqrt{x}+7$. Найти $'(1)$, $f'(4)$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

6.132. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x$. Найти $f'(1)-f'(-1)$.

6.133. Дана функция $\varphi(x)=3x+\frac{60}{x}-\frac{64}{x^3}+5$. айти корни производной $\varphi'(x)$.

6.134. Даны функции $f_1(x) = \frac{\cos x}{x}$ и $f_2(x) = x \sin x$. Найти $\frac{f_1'(1)}{f_2'(1)}$.

6.135. Показать, что функция $y = xe^x$ удовлетворяет уравнению $\frac{dy}{dx} - \frac{(x+1)y}{x} = 0$.

6.136. Показать, что функция $y = x^2 \ln x$ удовлетворяет уравнению $y'x - 2y = x^2$.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $y = y(u)$ и $u = u(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = y[u(x)]$ есть также дифференцируемая функция, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{1}$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.*

6.137. Найти производные функций:

1) $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$; 2) $y = \cos^2 \frac{x}{6}$.

Решение. 1) Положим $y = \ln u$, где $u = x^2 - 3x + 1$. Тогда по формуле (1) найдем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (2x - 3) = \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 1}.$$

2) Полагая $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = \frac{1}{6}x$, получим

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot (-\sin v) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \cos \frac{x}{6} \cdot \sin \frac{x}{6} =$$

$$= -\frac{1}{6} \sin \frac{x}{3}.$$

В задачах **6.138—6.320** вычислить производные заданных функций.

6.138. $y = \sin(2x - 1)$. **6.139.** $y = (5x + 2)^4$.

6.140. $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$. **6.141.** $y = \arcsin \frac{x}{2}$.

6.142. $y=\operatorname{arcctg} 2\sqrt{x}$. 6.143. $y=\sqrt[3]{e^x-1}$.
6.144. $y=\ln^3 x$. 6.145. $y=\ln(3x^2-2x+5)$.
6.146. $y=\sqrt{x^2+4}$. 6.147. $y=\sin^2 x$.
6.148. $y=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$. 6.149. $y=\cos x^2$. 6.150. $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$.
6.151. $y=e^{\sqrt[4]{x}}$. 6.152. $y=10^{5-3x}$. 6.153. $y=2^{\frac{1}{x}}$.
.154. $y=\sqrt[3]{x^2-6x}$. 6.155. $y=\dfrac{1}{\ln 3x}$.
.156. $y=\operatorname{arctg}(3-x^2)$. 6.157. $y=2\sqrt[4]{\arcsin^3 x}$.
.158. $y=3^{\operatorname{ctg} x}$. 6.159. $y=\log_3\sqrt{2x^2-5x+1}$.
.160. $y=\sqrt[3]{2+\log_2 x}$. 6.161. $y=e^{\arccos x}$. 6.162. $y=\operatorname{arctg} 5^{-x}$.
.163. $y=\ln\dfrac{5x-3}{2x+7}$. 6.164. $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.
.165. $y=\sin\operatorname{arcctg} x$. 6.166. $y=\ln\sqrt[6]{\cos x}$.
.167. $y=\sqrt[3]{2^{4-5x}}$. 6.168. $y=\operatorname{arctg}\ln x$.
.169. $y=\dfrac{1}{\ln^2 x}$. 6.170. $y=\sqrt{1-e^x}$. 6.171. $y=\dfrac{2}{\cos 5x}$.
.172. $y=\sin\dfrac{1}{x^2}$. 6.173. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$. 6.174. $y=e^{2^x}$.
.175. $y=\ln(\arcsin x-x)$. 6.176. $y=5^{x^3-3x^2+2x}$.
.177. $y=\arccos(x^2-1)$. 6.178. $y=7e^{-x^2}$.
.179. $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$. 6.180. $y=\arcsin\sin x$.
.181. $y=\dfrac{1}{\ln\sin x}$. 6.182. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x^2}$. 6.183. $y=\dfrac{\sin x^2}{x}$.
.184. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos 2x}$. 6.185. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$. 6.186. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

6.187. $y=\cos\frac{x}{x+1}$. 6.188. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

6.189. $y=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg} x^2$. 6.190. $y=\cos 2^x+4^{\sqrt{x}}$.

6.191. $y=\frac{1}{6}(e^{6x}-e^{-6x})$. 6.192. $y=2\ln\ln x-\ln 2x$.

6.193. $y=\sqrt{x}\operatorname{ctg} 2x$. 6.194. $y=e^{-x^2}\ln x$.

6.195. $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$. 6.196. $y=(3-2x)^3(x-1)^2$

6.197. $y=3x\sqrt{1-x^3}$. 6.198. $y=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)$.

6.199. $y=3^{\operatorname{tg} x}\cos x$. 6.200. $y=\frac{\arccos 2x}{e^{\sqrt{x}}}$. 6.201. $y=\frac{x^2-1}{\sin 3x}$.

6.202. $y=12x^3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2}$. 6.203. $y=\frac{\ln\cos x}{x^2+1}$.

6.204. $y=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$. 6.205. $y=7^{-x^2}e^{-5x}$.

6.206. $y=\ln\left(1-\sqrt{x}\right)+2\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

6.207. $y=e^{-x}\ln\operatorname{tg} x$. 6.208. $y=\arcsin^2 x-\sqrt{\operatorname{arcctg} x}$.

6.209. $y=e^{-3x}\sin 3x$. 6.210. $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$.

6.211. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 6.212. $y=\frac{\lg ex}{\cos 2x}$.

6.213. $y=\cos(1-\pi x)\sqrt{1-e^{2x}}$. 6.214. $y=\sin 8x\cdot\ln\frac{x}{8}$.

6.215. $y=\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}$. 6.216. $y=e^{\cos x}\sqrt{\sin x}$.

6.217. $y=3\sin^2 x\cos x+\cos^3 x$. 6.218. $y=\frac{\operatorname{ctg} 2x}{2^{3-2x}}$.

6.219. $y=6\sqrt[3]{e^{4x}}-7^{\operatorname{tg} x}$. 6.220. $y=3^{2x}\operatorname{ctg}\ln x$.

6.221. $y=\frac{\arcsin x^2}{2-3x}$. 6.222. $y=\frac{\ln\operatorname{tg} x}{e^{1-2x}}$.

6.223. $y=(5x^2-3x)^3-\sqrt[4]{e^{4x-5}+2}$.

6.224. $y=\arccos\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\ln(x^2-2x)$.

6.225. $y=\sqrt{7-4x}\,\mathrm{ctg}\,3x$. 6.226. $\frac{\ln(2x-1)}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$.

6.227. $y=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}-\log_4 e^x$. 6.228. $y=\cos^2\frac{x}{3}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

6.229. $y=2^{\sqrt[5]{x}}\sin^3 x$. 6.230. $y=\sqrt{2x-x^2}-\arccos(1-x)$.

6.231. $y=2^{x^2-x}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. 6.232. $y=\sqrt[3]{\cos x}\,e^{-\arcsin x}$.

6.233. $y=\ln\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}^2 x-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}^4 x$.

6.234. $y=\sqrt{3x-1}\,[\ln(3x-1)+5]$. 6.235. $y=\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1}$.

6.236. $y=\ln(x^2-a^2)+\ln\frac{x-a}{x+a}$.

6.237. $y=x\arcsin\frac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}$.

6.238. $y=\arccos\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. 6.239. $y=\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$.

6.240. $y=\frac{\arcsin 7x}{1-7x}$. 6.241. $y=\arccos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

6.242. $y=2\ln\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{\sin^2 x}$. 6.243. $y=\frac{1}{3}\sin^3 x\,(6\cos^2 x+7)$.

6.244. $y=\ln(e^{-2x}+xe^{-2x})$. 6.245. $y=\mathrm{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

6.246. $y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2-3x}}{2x+1}$.

6.247. $y=\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\,\mathrm{arctg}\,(x-1)$.

6.248. $y=\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

6.249. $y=\mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. 6.250. $y=xe^{\frac{1}{\ln x}}$. 6.251. $y=e^{\cos 5x}$.

6.252. $y=\sqrt{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}$. 6.253. $y=2^{\mathrm{tg}\,x^2}$.

6.254. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{1-x^2}$. 6.255. $y=\ln^2\ln x$.

6.256. $y=\arcsin(2\ln^3 x)$. 6.257. $y=\sqrt[3]{\cos e^x}$.

6.258. $y=\sin^2(\operatorname{tg} x)$. 6.259. $y=\arccos\ \sin\frac{x}{3}$.

6.260. $y=e^{2^{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}}$. 6.261. $y=\ln\log_4\sin x$.

6.262. $y=3^{1-2\sqrt{\cos x}}$.

6.263. $y=\sin^6\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$. 6.264. $y=2\arccos\sqrt{\sin x}$.

6.265. $y=\ln^3(x^2-2\ln x)$. 6.266. $y=\sqrt[3]{\arcsin(2x+1)}$.

6.267. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. 6.268. $y=\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\operatorname{tg}x-1}\right)$.

6.269. $y=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{8}-\sqrt{x}\right)$. 6.270. $y=\cos\ln(2x-x^2)$.

6.271. $y=4\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. 6.272. $y=\sin^4\cos(\pi x-3)$.

6.273. $y=\ln(1+\sin^2 x)$. 6.274. $y=\ln\cos\frac{1}{x}$.

6.275. $y=\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-4x}$. 6.276. $y=e^{\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{x}\right)}$.

6.277. $y=4^{\operatorname{arctg}3x}$. 6.278. $y=e^{\cos^2 x}-e^{\sin^2 x}$.

6.279 $y=x^2\ln^3\left(-\frac{1}{x}\right)$. 6.280. $y=\ln\sin\frac{x+2}{x}$.

6.281. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 6.282. $y=\sqrt{\sin x}\,e^{\sqrt{\sin x}}$.

6.283. $y=\frac{8}{\operatorname{arctg}e^{4x}}$. 6.284. $y=\operatorname{arcctg}\ln\frac{1}{x^2}$.

6.285. $y=\frac{1}{\cos^2 3x}$. 6.286. $y=x\arcsin(3\ln^2 x)$.

6.287. $y=\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. 6.288. $y=7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

6.289. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}}$. 6.290. $y=12^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

6.291. $y=\frac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. 6.292. $y=\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{\sin x}$.

6.293. $y=\arcsin\sqrt{1-e^x}$. 6.294. $y=\sin x\cdot e^{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x}$.

6.295. $y=6^{\sin^2 x+4\sin x}$. 6.296. $y=\frac{1+\ln\sin 2x}{\sin 2x}$.

6.297. $y=e^{-x^2}\cdot\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$. 6.298. $y=4\left(\sqrt{3x}-\operatorname{tg}\sqrt{3x}\right)$.

6.299. $y=\sin 3^x\cdot\cos^2 3^x$. 6.300. $y=\ln x\cdot\sin\sqrt{\ln x}$.

6.301. $y=5\operatorname{arctg} e^{\sqrt{5x}}-\ln(e^{5x}+1)$. 6.302. $y=2^{\sqrt{\sin x}}\operatorname{tg} x$.

6.303. $y=2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{8}}$. 6.304. $y=\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$.

6.305. $y=\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 2x+\ln\cos^2 2x)$.

6.306. $y=\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$.

6.307. $y=5^{\ln\operatorname{ctg}2x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}4x}$.

6.308. $y=\sin^2\frac{1-x}{1+x}$. 6.309. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}$.

6.310. $y=\operatorname{ctg}^2\operatorname{ctg} x+2\operatorname{ctg}\operatorname{ctg} x$.

6.311. $y=10x\arccos\sqrt{1-5x}$.

6.312. $y=\sin 3x\cdot e^{\frac{1}{\cos 3x}}$. 6.313. $y=\frac{\arcsin^2 2x}{2}-\sqrt{1-4x^2}$.

6.314. $y=4e^{\sqrt{\ln x}}(1-\sqrt{\ln x})$. 6.315. $y=\ln\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

6.316. $y=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$. 6.317. $y=\sqrt{1-9x^2}\,e^{\arcsin 3x}$.

6.318. $y=2+\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg}^4 3x$. 6.319. $y=\frac{3^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

6.320. $y=\sqrt{x^2-1}\,e^{\arcsin\frac{1}{x}}$.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее производной:

$$y'' = [f'(x)]'.$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной:

$$y''' = [f''(x)]' \text{ и т. д.}$$

Производная n-го порядка (n-я производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее $(n-1)$-й производной:

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

6.321. Найти третью производную от функции $y = x \ln 2x$ в точке $x = 2$.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1.$$

Дифференцируя производную y', найдем

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x}.$$

Отсюда третья производная

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}.$$

При $x = 2$ имеем $y'''(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

В задачах **6.322—6.333** найти производные второго порядка от указанных функций.

6.322. $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$. **6.323.** $y = (2x+5)^3$.

6.324. $y = \frac{1}{x-1}$. **6.325.** $y = \cos^2 x$. **6.326.** $y = e^{-x^2}$.

6.327. $y = 5^{\sqrt{x}}$. **6.328.** $y = \operatorname{arctg} 3x$.

6.329. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. **6.330.** $y = x \cdot \sin 2x$.

6.331. $y = \ln \operatorname{tg} x$. **6.332.** $y = e^x \cos x$. **6.333.** $y = \frac{1}{6}(e^{3x} + e^{-3x})$.

6.334. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

6.335. Дана функция $r(\varphi) = \varphi^2 e^{-\varphi}$. Найти $r''(-1)$, $r''(0)$, $r''(2-\sqrt{2})$.

6.336. Показать, что функция $y = x^2 \ln x$ удовлетворяет уравнению $xy'' - y' = 2x$.

6.337. Показать, что функция $s(t) = \arcsin t$ удовлетворяет уравнению $(t^2-1)\frac{d^2s}{dt^2} + t\frac{ds}{dt} = 0$.

6.338. Показать, что функция $y = e^x \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + 5y = 0$.

6.339. Дана функция $f(x) = xe^x$. Найти $f'''(-3)$, $f'''(-1)$, $f'''(0)$.

6.340. Дана функция $r(\varphi) = \cos^2 2\varphi$. Найти $r'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $r'''\left(-\frac{\pi}{24}\right)$, $r'''\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

6.341. Показать, что функция $y = 5e^{-2x} - 3e^x$ удовлетворяет уравнению $y''' - 3y' + 2y = 0$.

6.342. Для функции $y = x^\alpha$ (α — любое действительное число) вычислить $y^{(n)}$.

6.343. Дана функция $y = 2^x$. Вычислить $y^{(n)}$.

6.344. Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin x$.

§ 5. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Если функция $y = y(x)$ задана уравнением, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной y' надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'. Чтобы найти y'', надо уравнение продифференцировать дважды по x и т. д.

6.345. Найти вторую производную y'' от функции y, заданной неявно уравнением $y^3 - 3y + 3x = 1$.

Решение. Дифференцируя по x обе части данного равенства и считая при этом y функцией от x, находим

$$3y^2y' - 3y' + 3 = 0,$$

или

$$y^2y' - y' + 1 = 0, \tag{*}$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1-y^2}.$$

Равенство (*) снова продифференцируем по x:

$$2yy' \cdot y' + y^2y'' - y'' = 0.$$

Найдем отсюда $y'' = \frac{2yy'^2}{1-y^2}$ и, заменяя y' через $\frac{1}{1-y^2}$ окончательно получим

$$y'' = \frac{2y}{(1-y^2)^3}.$$

В задачах 6.346—6.356 найти производную $y' = \frac{dy}{dx}$ от неявной функции.

6.346. $3x + 7y - 15 = 0$. 6.347. $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

6.348. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. 6.349. $x^3+y^3=8$. 6.350. $\cos(x+y)=y$.

6.351. $xy=\operatorname{ctg} y$. 6.352. $\operatorname{arctg}(x+y)=x$. 6.353. $x^3-y^3=x^2y^2$.

6.354. $\ln y + \frac{y}{x} = 0$. 6.355. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}$.

6.356. $5^x + 5^y = 5^{x+y}$.

В задачах 6.357 — 6.362 найти вторую производную $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции.

6.357. $x^2 + y^2 = 1$. 6.358. $x = e^{x+y}$. 6.359. $x = \ln xy$.

6.360. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$. 6.361. $y = 2x + \operatorname{arctg} y$.

6.362. $x^3 + y^3 - 3y = 0$.

6.363. Найти значение y' в точке $x = 1$ для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 - 2xy^2 + 1 = 0$, если $y(1) = -1$.

Решение. Продифференцировав по x обе части уравнения, имеем

$$2x - 2(y^2 + 2xyy') = 0.$$

Полагая $x = 1$ и $y = -1$, получим

$$1-1-2\cdot 1\cdot(-1)\,y'=0,$$

откуда $y'(1)=0$.

6.364. Найти $y'(1)$ для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $5^x-\sin y=5x+y^2$, если $y(1)=0$.

6.365. Вычислить $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $y\operatorname{arctg} y-\arcsin x=0$, если $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$.

6.366. Показать, что функция $y=y(x)$, заданная уравнением $e^x=xy$, удовлетворяет соотношению $xy'=y(x-1)$.

6.367. Показать, что функция $y=y(x)$, заданная уравнением $\sin y=x^2-y$, удовлетворяет соотношению $y'=x\cdot\sec^2\frac{y}{2}$.

§ 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Логарифмическая производная функции $f(x)>0$ есть производная от логарифма данной функции $\ln f(x)$:

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Вычисление логарифмической производной называется *логарифмическим дифференцированием*. Логарифмическое дифференцирование применяется при вычислении производной *степенно-показательной функции*, т. е. функции вида

$$y=[u(x)]^{v(x)},$$

а также при нахождении производной произведения нескольких функций или производной дроби.

6.368. Вычислить производную y' от функции $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$.

Решение. Найдем логарифм данной функции:

$$\ln y=\sqrt{x}\ln\sin x.$$

ифференцируя обе части этого равенства, получим

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sin x+\sqrt{x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x},$$

ткуда

$$y'=y\left[\frac{\ln\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\operatorname{ctg} x\right],$$

или

$$y' = (\sin x)^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\operatorname{ctg} x\right].$$

6.369. Дана функция $y = \dfrac{\sqrt[3]{3x-1}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}$. Найти y'.

Решение. Непосредственное вычисление производной сопряжено с громоздкими выкладками, поэтому предварительно найдем логарифм данной функции:

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{1}{5}\ln(15x-4).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{3(3x-1)} + \frac{2}{2(2x+1)} - \frac{15}{5(15x-4)},$$

или

$$y' = y\left(\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4}\right).$$

Отсюда найдем

$$y' = \frac{\sqrt[3]{3x-1}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}\left(\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4}\right).$$

В задачах 6.370—6.381 найти производные следующих функций.

6.370. $y = x^{x+1}$. **6.371.** $y = x^{\sin 2x}$. **6.372.** $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg} 2x}$.

6.373. $y = (\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$. **6.374.** $y = (\sin 3x)^{x^2-1}$.

6.375. $y = (\cos 2x)^{\sin x}$. **6.376.** $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}}$.

6.377. $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$. **6.378.** $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{\cos 3x}$.

6.379. $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\sin 8x}$. **6.380.** $y = (x^2-1)^{\frac{1}{x}}$.

6.381. $y = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{x^2}$.

6.382. Дана функция $y = (x+1)^{\sqrt{x}}$. Вычислить $y'(1)$

В задачах 6.383—6.389 найти производные следующих функций.

6.383. $y=(2x+3)^3(5x-2)(x-1)$.

6.384. $y=(2x-5)^4(3x+1)^5(x-2)^3$.

6.385. $y=\sqrt[5]{(x+2)^2(x^2-1)^3\sqrt{x-4}}$.

6.386. $y=\dfrac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}\,(4x-5)^2}{(2x+7)^3}$.

6.387. $y=\dfrac{(4x-7)^3\sqrt[5]{(5x+2)^4}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}$.

6.388. $y=\dfrac{e^x\arcsin x}{x^2-1}$.

6.389. $y=\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1}\cdot\sin 2x}$.

6.390. Вычислить $y'(0)$ для функции $y=\sqrt[5]{\dfrac{(1-x^2)\cos x}{(x^2+1)^3}}$.

6.391. Найти те значения x, при которых производная функции $y=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{4x^2-1}}{(2x+1)^3}$ обращается в нуль.

§ 7. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если зависимость функции y от независимой переменной x задана с помощью вспомогательной переменной (параметра) t:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \qquad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

6.392. Функция задана параметрически

$$\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^3+5. \end{cases}$$

Определить первую и вторую производные от y по x.

Решение. Имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t,$$

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx}\left(y'_x\right) = \frac{d}{dt}\left(y'_x\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y'_x\right)}{x'_t} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t\right)}{2t} = \frac{\frac{3}{2}}{2t} = \frac{3}{4t}.$$

В задачах 6.393—6.403 для функций, заданных параметрически, найти указанные производные.

6.393. $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$ Найти $\frac{dy}{dx}$.

6.394. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt[4]{t}. \end{cases}$ Найти $\frac{dy}{dx}$.

6.395. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^t. \end{cases}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$.

6.396. $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t. \end{cases}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{3}}$.

6.397. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = \operatorname{arcctg} t. \end{cases}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-\frac{1}{6}}$.

6.398. $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}}$.

6.399. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$ и $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$.

6.400. $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = t^5 - 7. \end{cases}$ Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6.401. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6.402. $\begin{cases} x = e^{-\varphi}, \\ y = e^{3\varphi}. \end{cases}$ Найти $\left(\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0}$ и $\left(\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{1}{5}}$.

6.403. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=1}$ и $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1}$.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции $y = y(x)$ при данном значении аргумента $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 (рис. 27):

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

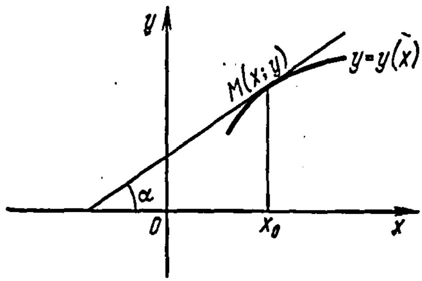


Рис. 27

Если $y(x)$ имеет при $x = x_0$ бесконечную производную, то уравнение касательной таково:

$$x = x_0. \tag{3}$$

Уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно касательной, записывается в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0). \tag{4}$$

6.404. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке M_0 (1; —1).

Р е ш е н и е. Найдем производную функции $y = 2x^2 - 6x + 3$ при $x = 1$. Имеем $y' = 4x - 6$, откуда $y'(1) = -2$.

Воспользовавшись уравнением (2), получим искомое уравнение касательной:

$$y - (-1) = -2(x - 1),$$

или

$$2x + y - 1 = 0.$$

Уравнение нормали найдем, используя уравнение (4):

$$y+1=\frac{1}{2}(x-1),$$

или

$$x-2y-3=0.$$

6.405. Составить уравнения касательной и нормали:

1) к гиперболе $y=\frac{x+1}{x-1}$ в точке A (2; 3);

2) к кривой $y=x^3+4x^2-1$ в точке с абсциссой $x_0=-1$;

3) к параболе $y=x^2-4x+4$ в точках, ординаты которых равны единице.

6.406. Дана кривая $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Написать уравнение касательной к этой кривой в точке с абсциссой $x_0=1$.

Указание. При $x=1$ функция $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ имеет бесконечную производную и, следовательно, уравнение касательной записывается в виде (3).

6.407. Найти угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к гиперболе $x^2-4y^2=1$ в точке $A\left(2; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.408. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2-2x+2y-3=0$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

6.409. Из точки A (—1; —5), не лежащей на параболе $y=x^2-3x-8$, провести касательные к ней.

Решение. Пусть x_0, $y(x_0)$ — координаты точки касания M_0 одной из касательных к данной параболе. Тогда уравнение касательной имеет вид (2):

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0),$$

или

$$y-(x_0^2-3x_0-8)=(2x_0-3)(x-x_0). \qquad (*)$$

Так как касательная проходит через точку A (—1; —5), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (*), т. е.

$$-5-(x_0^2-3x_0-8)=(2x_0-3)(-1-x_0).$$

Тем самым получено уравнение относительно абсциссы x_0 точки касания M_0, решая которое, определяем $x_0 = 0$ и $x_0 = -2$. Подставляя полученные значения абсцисс точек касания в уравнение (*), находим искомые уравнения касательных:

$$y - (-8) = (2 \cdot 0 - 3)(x - 0)$$

и

$$y - 2 = [2 \cdot (-2) - 3]\,[x - (-2)],$$

или

$$3x + y + 8 = 0 \text{ и } 7x + y + 12 = 0.$$

6.410. Составить уравнение касательной, проведенной из точки $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ к кривой $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

6.411. На линии $y = x^3 - 3x^2$ найти точки, в каждой из которых касательная параллельна оси абсцисс.

6.412. На синусоиде $y = \sin x$ найти точки, в каждой из которых касательная параллельна прямой $x - y + 1 = 0$.

6.413. К кривой $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ провести касательные, параллельные прямой $3x - y + 1 = 0$.

6.414. Составить уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 32$, перпендикулярных прямой $x + y + 4 = 0$.

6.415. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между координатными осями, делится в точке касания пополам.

6.416. Составить уравнение касательной к кривой

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^2 + t - 3 \end{cases}$$

в точке $M\ (3; -1)$.

Решение. Определим прежде всего значение t, соответствующее точке $M\ (3; -1)$. Это значение должно одновременно удовлетворять уравнениям

$$t^2 - 1 = 3 \text{ и } t^2 + t - 3 = -1,$$

т. е.

$$t^2 = 4 \text{ и } t^2 + t - 2 = 0.$$

Корни первого уравнения $t_1 = -2$ и $t_2 = 2$; корни второго уравнения $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$. Таким образом, точке M соответствует значение $t = -2$.

Угловой коэффициент касательной к кривой в точке M равен значению производной y'_x в этой точке:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t+1}{2t}\bigg|_{t=-2} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, уравнение искомой касательной имеет вид

$$y-(-1) = \frac{3}{4}(x-3),$$

или

$$3x - 4y - 13 = 0.$$

6.417. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

6.418. Найти точки кривой

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 9t^2 + 12t, \\ y = t^2 - t + 1, \end{cases}$$

в которых касательная параллельна оси Oy.

Указание. Найти значения параметра t, при которых $x'_t = 0$.

6.419. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = t^2 - 3t + 3, \\ y = t^2 - 4t + 3 \end{cases}$$

в точке M (1; —1).

§ 9. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная $y'(x_0)$ от функции $y = y(x)$, вычисленная при значении аргумента $x = x_0$, представляет собой *скорость изменения этой функции* относительно независимой переменной x в точке $x = x_0$.

В частности, если зависимость между пройденным путем s и временем t при прямолинейном движении выражается формулой $s = s(t)$, то скорость движения в любой момент времени t есть $\frac{ds}{dt}$, а ускорение (т. е. скорость изменения скорости движения) есть $\frac{d^2s}{dt^2}$.

6.420. Точка движется прямолинейно по закону $s = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - t$ (s выражается в метрах, t — в секундах). Найти скорость и ускорение движения через 1 с после начала движения.

Решение. Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 + 4t - 1.$$

Отсюда $v(1) = 4$ (м/с).

Ускорение прямолинейного движения равно второй производной пути по времени:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t + 4,$$

и, следовательно, $a(1) = 6$ (м/с^2).

6.421. Закон прямолинейного движения точки выражается формулой $s = 1 + t^2 - \frac{1}{4}t^4$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти скорость и ускорение движения в моменты времени $t = 0$, $t = 2$, $t = 3$.

6.422. Точка движется по оси абсцисс по закону $x = \frac{t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t}{4}$ (x — в метрах, t — в секундах). В какой момент времени точка остановится?

6.423. Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $s = \ln(1 + t^2)$. Найти кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 2 с после начала движения.

6.424. Скорость прямолинейно движущегося тела прямо пропорциональна квадратному корню из пройденного пути. Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

6.425. Вращающееся колесо задерживается тормозом. Угол φ, на который колесо поворачивается в течение t с, определяется равенством $\varphi = 1 + 2t - 5t^2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение движения через 2 с после включения тормоза. Определить, в какой момент времени колесо остановится.

Указание. Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, угловое ускорение $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

6.426. Радиус основания цилиндра увеличивается со скоростью 3 м/с, а высота его уменьшается со скоростью 2 м/с. Какова скорость изменения объема цилиндра?

Р е ш е н и е. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Продифференцируем обе части этого равенства по времени t, учитывая, что V, r и h зависят от t:

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right).$$

Так как по условию $\frac{dr}{dt} = 3\,(\text{м/с})$ $\frac{dh}{dt} = -2\,(\text{м/с})$ то

$$\frac{dV}{dt} = \pi\,(6rh - 2r^2).$$

Полученная формула и определяет скорость изменения объема.

6.427. Радиус круга изменяется со скоростью 5 м/с. С какой скоростью изменяется длина его окружности?

6.428. Сторона квадрата увеличивается со скоростью 3 м/с. Какова скорость изменения площади квадрата в момент, когда его сторона равна 4 м?

6.429. Точка движется по параболе $y = \sqrt{x}$. Какая из ее координат меняется быстрее?

§ 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциалом dy функции $y = y(x)$ называется главная часть ее приращения пропорциональная приращению Δx независимой переменной x.

Дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению Δx:

$$dx = \Delta x.$$

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = y(x)$ равен *произведению ее производной на дифференциал независимой переменной:*

$$dy = y'(x)dx. \qquad (1)$$

Соотношение (1) остается в силе и в том случае, когда x есть функция другого аргумента — в этом заключается *инвариантность* формы дифференциала.

Если Δx достаточно мало по абсолютной величине, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx имеет место приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy.$$

или

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x) \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

6.430. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - x + 1$ при $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}01$. Каковы абсолютная и относительная погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом?

Решение. Имеем

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = y(3 + 0{,}01) - y(3) =$$
$$= [(3 + 0{,}01)^2 - (3 + 0{,}01) + 1] - (3^2 - 3 + 1) = 0{,}0501.$$

Дифференциал функции найдем по формуле (1):

$$dy = y'(x) \cdot \Delta x = y'(3) \cdot 0{,}01 = (2x - 1)_{x=3} \cdot 0{,}01 =$$
$$= (2 \cdot 3 - 1) \cdot 0{,}01 = 0{,}05.$$

Абсолютная погрешность

$$|dy - \Delta y| = |0{,}05 - 0{,}0501| = 0{,}0001.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}0001}{0{,}0501} \approx 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

В задачах 6.431—6.437 найти дифференциалы функций для произвольных значений аргумента и его приращения.

6.431. $y = \frac{1}{x^2}$. **6.432.** $y = \frac{x+2}{x-1}$. **6.433.** $y = \operatorname{arctg} 2x$.

6.434. $y = \ln(1 + x^2)$. **6.435.** $y = \sin^2 x$.

6.436. $y = 5^{x^2} \arccos \frac{1}{x}$. **6.437.** $y = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

6.438. Показать, что дифференциал dy и приращение Δy линейной функции $y = ax + b$ при любом значении аргумента совпадают.

6.439. Найти приращение и дифференциал функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 9$ и $\Delta x = 0{,}2$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

6.440. Найти приращение и дифференциал функции $y = \frac{1}{x-1}$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, получающиеся при замене приращения функции ее дифференциалом.

6.441. На сколько (приблизительно) увеличилось ребро куба, если объем его изменился с 27 м³ до 27,2 м³?

Решение. Если y — ребро куба, то его объем $V = y^3$. Таким образом, задача сводится к отысканию приращения Δy функции $y = \sqrt[3]{V}$ при $V = 27$ и $\Delta V = 27{,}2 - 27 = 0{,}2$. Приращение Δy найдем, исходя из приближенного равенства

$$\Delta y \approx dy = y'dV = \frac{1}{3\sqrt[3]{V^2}}\Delta V = \frac{1}{3 \cdot 9} \cdot 0{,}2 = 0{,}007 \text{ (м)}.$$

6.442. На сколько (приблизительно) изменится сторона квадрата, если его площадь уменьшить с 16 м² до 15,82 м²?

6.443. При измерении стороны квадрата допущена ошибка в 1%. По полученному приближенному значению вычислена площадь квадрата. Какая при этом допущена погрешность?

Решение. Если x — точное значение стороны квадрата, а $x + dx$ — полученное в результате измерения ее значение, то ошибка измерения $dx = \Delta x = \pm 0{,}01\ x$. Ошибка ΔS, сделанная при измерении площади S квадрата, в нашем случае приближенно равна

$$\Delta S \approx dS = d(x^2) = 2x \cdot dx = 2x(\pm 0{,}01\,x) =$$
$$= \pm 0{,}02\,x^2 = \pm 0{,}02\ S,$$

что составляет 2% площади.

6.444. В результате измерения радиуса круга допущена ошибка в 1%. Показать, что при вычислении площади круга по формуле $S = \pi r^2$, где r — полученный в результате измерения радиус, погрешность составляет 2% от площади.

6.445. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{8{,}01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$ и положим $x = 8$, $\Delta x = 0{,}01$. Тогда, воспользовавшись формулой (2), найдем $y\,(8{,}01) = \sqrt[3]{8{,}01}$:

$$y\,(8 + 0{,}01) \approx y\,(8) + y'\,(8) \cdot 0{,}01,$$

т. е.

$$y(8{,}01) \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0{,}01 = 2 + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot 0{,}01 =$$

$$= 2 + \frac{0{,}01}{12} = 2{,}0008.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{8{,}01} \approx 2{,}0008$.

6.446. Доказать справедливость следующих приближенных равенств:

а) $(1+\alpha)^k \approx 1 + k\alpha$; б) $\sqrt[k]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{k}{\alpha}$;

в) $\ln(1+\alpha) \approx \alpha$.

Указание. Рассмотреть функции $(1+x)^k$, $\sqrt[k]{1+x}$, $\ln(1+x)$ и воспользоваться формулой (2), считая $x = 0$ и $\Delta x = \alpha$.

В задачах 6.447—6.453 найти приближенное значение заданных выражений.

6.447. $\sqrt[4]{17}$. **6.448.** $\lg 10{,}08$. **6.449.** $\cos 32^\circ$. **6.450.** $\operatorname{tg} 44^\circ 52'$.

6.451. $\arcsin 0{,}48$. **6.452.** $\sqrt[3]{26{,}97}$. **6.453.** $0{,}96^3$.

6.454. Выразить абсолютную погрешность функции $y = \ln x$ через абсолютную погрешность ее аргумента.

Решение. Если при непосредственном измерении некоторой величины x допущена достаточно малая погрешность Δx, то при вычислении величины y по формуле $y = \ln x$ это приводит к некоторой погрешности $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$. Заменяя приращение Δy функции $y = \ln x$ ее дифференциалом dy, получим выражение для абсолютной погрешности натурального логарифма:

$$\Delta y = |y'_x| \Delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

т. е. абсолютная погрешность равна относительной погрешности аргумента.

6.455. Для следующих функций получить выражения для определения абсолютных погрешностей через абсолютные погрешности их аргументов:

1) $y = \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y = \ln \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $y = \ln \operatorname{tg} x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

ГЛАВА 7

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором интервале, если в этом интервале каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число интервалов монотонности (которые иногда чередуются с интервалами постоянства функции).

Монотонность функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее первой производной $f'(x)$, а именно, *если в некотором интервале $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция возрастает (убывает) в этом интервале*. Следовательно, отыскание интервалов монотонности функции $y = f(x)$ сводится к нахождению интервалов знакопостоянства ее первой производной $f'(x)$.

Отсюда получаем **правило нахождения интервалов монотонности функции:**

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить методом проб знак $f'(x)$ в интервалах, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$; интервалы, в которых $f'(x) > 0$, являются интервалами возрастания функции, а интервалы, в которых $f'(x) < 0$, — интервалами убывания функции. При этом если на двух соседних интервалах, граничная точка которых является нулем производной $f'(x)$, знак $f'(x)$ одинаков, то они составляют единый интервал монотонности.

7.1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5$.

Решение. Область определения данной функции — вся числовая ось. Дифференцируя, находим

$$y' = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1).$$

Точек разрыва производная y' не имеет. Нулями производной y' будут корни уравнения $x^2(x-1) = 0$, т. е. $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Область определения функции — ось Ox — разбивается полученными точками на три интервала $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, в каждом из которых y' сохраняет определенный знак. Подставляя в выражение для y' значения $x = -5$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 5$ из этих интервалов, получим соответственно знаки «—», «—», «+» (рис. 28). Следовательно, в интервале $(-\infty, 1)$ функция убывает, а в интервале $(1, +\infty)$ — возрастает.

7.2. Определить интервалы монотонности функции $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x$.

Рис. 28

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Дифференцируя, получим

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x = -1$ и не существует при $x = 0$. Этими двумя точками ось абсцисс разбивается на три интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$. Методом проб выясняем знак y' в каждом из полученных интервалов:

в интервале $(-\infty, -1)$ имеем $y'(-8) > 0$;

» » $(-1, 0)$ » $y'\left(-\frac{1}{8}\right) < 0$;

» » $(0, +\infty)$ » $y'(8) > 0$.

Таким образом, в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает, а в интервале $(-1, 0)$ — убывает.

7.3. Показать, что функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ монотонны во всей своей области определения.

7.4. Доказать, что функция $y = x - \sin x$ возрастает на всей числовой оси.

В задачах 7.5—7.16 найти интервалы монотонности функций.

7.5. $y = x^2 - 4x + 7$. 7.6. $y = 1 - x^3 + x^2$. 7.7. $y = x^3 - x$.

7.8. $y=(2x+1)^2$. **7.9.** $y=\dfrac{1}{(1-x)^3}$. **7.10.** $y=\dfrac{x+2}{x-3}$.

7.11. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$. **7.12.** $y=x\left(\sqrt{x}-2\right)$.

7.13. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$. **7.14.** $y=\ln(1+x^2)+x$.

7.15. $y=x^2\ln x$. **7.16.** $y=xe^{-x}$.

§ 2. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка $x=x_0$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x ($x \neq x_0$) этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \qquad [f(x) > f(x_0)].$$

Точки максимума и минимума функции называются *точками ее экстремума*, а значение функции в точке максимума (минимума) — *максимумом* (*минимумом*) или *экстремумом* функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками экстремума являются лишь те из критических точек, при переходе через которые первая производная $f'(x)$ меняет знак, а именно, *если при переходе через критическую точку $x=x_0$ в положительном направлении знак $f'(x)$ меняется с «+» на «—» (с «—» на «+»), то точка $x=x_0$ есть точка максимума (минимума).*

Отсюда получаем правило отыскания экстремумов функции $y=f(x)$:

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.
2. Определить методом проб знак $f'(x)$ в интервалах, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$.
3. Из этих точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых производная $f'(x)$ имеет разные знаки — это и есть экстремальные точки. При этом экстремальная точка $x=x_0$ является точкой максимума, если при движении по оси Ox в положительном направлении она отделяет интервал, в котором производная $f'(x) > 0$, от интервала, в котором $f'(x_0) < 0$, и точкой минимума — в противном случае.

В заключение заметим, что точки, в которых производная обращается в нуль, иногда проще исследовать на экстремум, выяснив знак второй производной $f''(x_0)$: *точка $x=x_0$, в которой $f'(x_0)=0$, а $f''(x)$ существует и отлична от нуля, является экстремальной, а именно, точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f''(x_0)>0$.*

7.17. Найти экстремумы функции $y = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Вычислим производную:

$$y' = 3x^2\sqrt[3]{(x-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x-1}}(9x - 9 + 2x) = \frac{x^2(11x-9)}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x=0$ и $x=\frac{9}{11}$ и не существует при $x = 1$. Полученные точки разбивают числовую ось на четыре интервала, в каждом из которых y' сохраняет определенный знак: $(-\infty, 0), \left(0, \frac{9}{11}\right)$ $\left(\frac{9}{11}, 1\right)$, $(1, +\infty)$. Найдем знак производной y' в полученных интервалах:

в интервале		$(-\infty, 0)$	имеем	$y'(-1) > 0$;
»	»	$\left(0, \frac{9}{11}\right)$	»	$y'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$;
»	»	$\left(\frac{9}{11}, 1\right)$	»	$y'\left(\frac{10}{11}\right) < 0$;
»	»	$(1, +\infty)$	»	$y'(5) > 0$.

Экстремальными являются точки $x_1 = \frac{9}{11}$ — точка максимума и $x_2 = 1$ — точка минимума. Экстремумы функции получим, вычислив ее значения в экстремальных точках: $y\left(\frac{9}{11}\right) = \frac{729}{1331}\sqrt[3]{\frac{4}{121}} \approx 0{,}176$ — максимум и $y(1) = 0$ — минимум функции.

7.18. Найти экстремумы функции $y = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x = 0$. Дифференцируя, имеем

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{3x-2x+2}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

Производная y' обращается в нуль только при $x = -2$ и имеет единственную точку разрыва $x=0$. Эти точки $x = -2$ и $x = 0$ делят числовую ось на три интервала $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$. Определим знак производной в каждом из полученных интервалов:

в интервале $(-\infty, -2)$ имеем $y'(-8) > 0$;
» $(-2, 0)$ » $y'(-1) < 0$;
» $(0, +\infty)$ » $y'(8) > 0$.

Экстремальной точкой является только точка $x = -2$ (точка максимума). Точка $x = 0$ не является экстремальной, так как в ней функция не определена. Итак, функция в точке $x = -2$ имеет максимум, равный $y(-2) = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

7.19. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x.$$

Решение. Так как $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π, то достаточно найти ее экстремумы на отрезке $[-\pi, \pi]$. Дифференцируя, получим

$$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x\cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

Производная $f'(x)$ существует на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ и обращается в нуль в точках $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$.

Для исследования функции на экстремум выясним знак второй производной

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$$

каждой из полученных точек. Имеем:

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) > 0,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) > 0,$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} < 0.$$

тсюда следует, что

при $x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad y = y_{\min} = -3;$

при $x = \frac{\pi}{6}$ $\quad y = y_{\max} = 1{,}5;$

при $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad y = y_{\min} = 1;$

при $x = \frac{5\pi}{6}$ $\quad y = y_{\max} = 1{,}5.$

Итак, исследуемая функция в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) имеет минимум, авный соответственно -3 и 1, а в точках $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ — максимум, равный 1,5.

7.20. Проверить, что функция $y = x^3 - 1$ не имеет стремумов.

7.21. Показать, что функция $y = \frac{1}{x^2}$ не имеет экстремумов.

В задачах 7.22—7.38 исследовать на экстремум слеющие функции.

.22. $y = x^2 - 5x + 3$. **7.23.** $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$.

.24. $y = (x-1)^2 (x-5)^2$. **7.25.** $y = (x+2)(x-2)^3$.

7.26. $y=\frac{5x}{1+x^2}$. 7.27. $y=\frac{x^2+1}{x}$. 7.28. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}$.

7.29. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. 7.30. $y=-\frac{16}{\sqrt{x^2+5}}$.

7.31. $y=5-4\sqrt[3]{x^2}$. 7.32. $y=\sqrt[3]{x^2-4x}$.

7.33. $y=3e^{-x^2}$. 7.34. $y=\frac{\ln x}{x}$. 7.35. $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$.

7.36. $y=\sin x+\cos x$. 7.37. $y=\frac{e^x}{x}$. 7.38. $y=\frac{1}{\cos x}$.

§ 3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Для отыскания *наибольшего и наименьшего значений фун ции*, непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$, надо вычислить зн чения этой функции на концах отрезка и во всех ее критическі точках, принадлежащих этому отрезку (такими точками в данн случае являются точки, в которых первая производная функц обращается в нуль или не существует). Наибольшее и наименьш из полученных значений являются соответственно наибольшим наименьшим значением функции на отрезке.

В случае, если исследуемая функция претерпевает разрыв в которых точках отрезка $[a, b]$ или же задана на бесконечном инте вале, то необходимо дополнительно рассмотреть ее поведение окрестности точек разрыва и при $x\to\pm\infty$.

7.39. Найти наибольшее и наименьшее значения сл дующих функций:

1) $f(x)=x^3-3x^2+4$ на отрезке $[1, 3]$;

2) $\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. 1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрез $[1, 3]$. Находим

$$f'(x)=3x^2-6x.$$

В данном случае критическими являются только точк в которых производная $f'(x)$ равна нулю, т. е. $x=0$ $x=2$. Отрезку $[1, 3]$ принадлежит лишь одна из этих кр тических точек, а именно $x=2$. Вычислим значения фун ции $f(x)$ в точке $x=2$ и на концах отрезка $x=1$ и $x=$

$$f(2)=0,\quad f(1)=2,\quad f(3)=4.$$

Таким образом, наибольшее значение функции равно 4 и достигается на правой границе отрезка в точке $x = 3$; наименьшее значение функции равно нулю и достигается ею во внутренней точке $x = 2$.

2) Функция $\varphi(x)$ претерпевает разрыв в точке $x = 0$, принадлежащей отрезку $[-2, 2]$. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

$$\lim_{x \to +0} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -0} \varphi(x) = -\infty.$$

Следовательно, вблизи точки $x=0$ функция $\varphi(x)$ достигает сколь угодно больших по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значений, и, следовательно, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения.

В задачах 7.40—7.48 определить наибольшее и наименьшее значения следующих функций.

7.40. $y = 2x^2 - 8x + 1$ на отрезке $[0, 3]$.

7.41. $y = x^5 - 5x^3 - 8$ на отрезке $[0, 2]$.

7.42. $y = \sqrt{9 - x^2}$ на отрезке $[-3, 3]$.

7.43. $y = \arcsin x^2$ на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

7.44. $y = x \ln x$ на отрезке $[1, e]$.

7.45. $y = \frac{1}{1+x^2}$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

7.46. $y = \frac{1}{\sin x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

7.47. $y = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{x}$ в интервале $[1, +\infty)$.

7.48. $y = 2x + \cos 2x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

§ 4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

При решении задач на вычисление наибольших и наименьших значений величин надо прежде всего точно определить, для какой величины в задаче требуется найти наибольшее (или наименьшее) значение. Эта величина и будет исследуемой функцией. Затем одну из величин, от изменения которых зависит изменение функции, следует взять за независимую переменную и выразить через нее функцию. При этом желательно в качестве независимой переменной выбрать ту величину, через которую исследуемая функция выражается проще всего. После этого решается задача на нахождение наибольшего (или наименьшего) значения полученной функции в некотором промежутке изменения независимой переменной, который обычно устанавливается из самого существа задачи.

Заметим, что в случаях, когда решение вопроса о том, является ли значение функции, вычисленное в полученной критической точке, наибольшим или наименьшим, подсказывается условием задачи, аналитическое исследование может быть опущено.

7.49. В данный шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

Решение. Обозначим высоту, радиус основания и объем цилиндра соответственно через h, r и V. Тогда объем цилиндра

$$V = \pi r^2 h.$$

Учитывая, что $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, получим выражение для объема цилиндра:

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right).$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

в промежутке $(0,\ 2R)$. Производная этой функции

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right).$$

Приравнивая $V'(h)$ нулю, получим единственную критическую точку $h_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}R$, принадлежащую интервалу $(0, 2R)$, в которой $V(h)$ и принимает наибольшее значение $V(h_0) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Итак, наибольший объем имеет цилиндр, высота которого $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

7.50. Электрическую лампочку можно передвигать по ертикальной прямой OB (рис. 29). На каком расстоянии т горизонтальной плоскости ее следует поместить, чтобы точке A этой плоскости получить наибольшую освещен- юсть?

Решение. Освещенность вычисляется по формуле

$$J = c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

де $r = AB$, $\varphi = \angle OAB$, c=const 'сила света источника B). За независимую переменную, с изменеием которой менялось бы растояние лампочки от плоскости тола, а следовательно, и освеенность J, можно выбрать люую из следующих величин: преде всего саму величину h, заем φ или r. Взяв за независимую переменную угол φ ı воспользовавшись тем, что $r = \frac{a}{\cos\varphi}$, получим довольно ростое выражение J через φ:

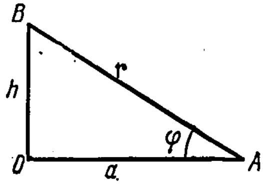


Рис. 29

$$J = \frac{c}{a^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Найдем наибольшее значение полученной функции $J(\varphi)$ промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ изменения независимой переменой φ. Дифференцируя $J(\varphi)$, получим

$$'(\varphi) = \frac{c}{a^2}(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi) = 2\frac{c}{a^2}\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2\varphi\right).$$

ешая уравнение $J'(\varphi) = 0$, находим, что функция $J(\varphi)$ интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственную критическую точу $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как на концах промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ункция $J(\varphi)$ равна нулю, а $J(\varphi_0) > 0$, то при $\varphi = \varphi_0$ свещенность $J(\varphi)$ будет наибольшая.

Таким образом,

$$h = a\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

то и есть искомая величина.

7.51. Данное положительное число m разложить н два слагаемых так, чтобы произведение их было наиболь шим.

7.52. Разность двух чисел равна 7. Каковы должны быт эти числа, чтобы произведение их было наименьшим?

7.53. Из куска проволоки длиной 20 см требуется со гнуть прямоугольник наибольшей площади. Каковы раз меры этого прямоугольника?

7.54. Из всех прямоугольников, имеющих перимет 20 см, выделить тот, у которого диагональ — наименьшая

7.55. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c Каковы должны быть катеты этого треугольника, чтоб его площадь была наибольшей?

7.56. В данный полукруг радиуса R вписать прямоу гольник с наибольшим периметром.

7.57. Показать, что из всех равнобедренных треуголь ников, вписанных в данный круг радиуса r, наибольши периметр имеет равносторонний треугольник.

7.58. Найти стороны прямоугольника наибольшей пло щади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

7.59. На странице книги печатный текст должен зани мать (вместе с промежутками между строками) 192 см^2 Верхнее и нижнее поля должны быть по 4 см, правое левое поля — по 3 см. Если принимать во внимание толь ко экономию бумаги, то каковы наиболее выгодные ра меры страницы?

7.60. Из круглого бревна диаметра D вырезать балк прямоугольного сечения так, чтобы площадь сечения был наибольшей.

Указание. В круг диаметра D вписать прямоугольни наибольшей площади.

7.61. Определить размеры цилиндра объемом 10 м имеющего наименьшую полную поверхность.

7.62. Бак с квадратным основанием должен вмещат 27 л. Каковы должны быть его размеры, чтобы полная п верхность была наименьшей?

7.63. Из квадратного листа жести, сторона которог 42 см, вырезают по углам одинаковые квадраты и из оста шейся части склеивают открытую коробку. Какова д жна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вмест мость коробки была наибольшей?

7.64. В данный шар радиуса R вписать цилиндр, имеюий наибольшую боковую поверхность.

7.65. В шар радиуса R вписать прямой круговой конус наибольшей боковой поверхностью.

7.66. В данный прямой круговой конус вписать цилиндр аибольшего объема.

7.67. Из круглого бревна диаметра D требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала аибольшее сопротивление на изгиб?

Указание. Сопротивление балки на изгиб прямо пропорионально произведению ширины сечения на квадрат его высоты.

7.68. Секундный расход воды при истечении ее через тверстие в толстой стене определяется по формуле

$$Q = cy\sqrt{h - y},$$

де y — диаметр отверстия, h — глубина его низшей точки, — некоторая постоянная. При каком y значение Q явяется наибольшим?

7.69. Показать, что мощность N тока, получаемого от гальванического элемента во внешней цепи, будет наиольшей, если сопротивление R внешней цепи равно внутеннему сопротивлению r самого элемента.

Указание. Мощность тока определяется по формуле

$$N = \frac{r^2}{R} + R.$$

§ 5. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) в некотором интерале, если она расположена ниже (выше) касательной, проведенной кривой в любой точке этого интервала. Выпуклость или вогнусть кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно, *если в некоором интервале* $f''(x) < 0$ $[f''(x) > 0]$, *то кривая выпукла* (*вогута*) *в этом интервале.*

Таким образом, отыскание интервалов выпуклости и вогнуости графика функции $y = f(x)$ сводится к нахождению интервалов накопостоянства ее второй производной $f''(x)$.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отеляет участок выпуклости от участка вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ могут служить лько точки, абсциссы которых являются критическими точками II рода, т. е. точки, находящиеся внутри области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается нуль или терпит разрыв.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ являются лиш только те из указанных точек, *при переходе через которые втор производная $f''(x)$ меняет знак.*

Отсюда получаем правило отыскания интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции:

1. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращаетс в нуль или терпит разрыв.

2. Определить методом проб знак $f''(x)$ в интервалах, на кото рые полученные в п. 1 точки делят область определения $f(x)$; ин тервалы, в которых $f''(x) < 0$, являются интервалами выпуклости а интервалы, в которых $f''(x) > 0$,— интервалами вогнутости гр фика функции $y = f(x)$. При этом если на двух соседних интервалах граничная точка которых является нулем второй производно $f''(x)$, знак $f''(x)$ одинаков, то они составляют единый интервал вы пуклости или вогнутости.

3. Из полученных в п. 1 точек выделить те, в которых функци $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых втора производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки — это и есть абсцис сы точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

7.70. Найти интервалы выпуклости и вогнутости і точки перегиба графика функции $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 60x - 5$.

Решение. Функция определена на всей числовоі оси. Дифференцируя ее дважды, получим

$$f'(x) = 15x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 60,$$

$$f''(x) = 60x^3 + 60x^2 - 120x = 60x(x-1)(x+2).$$

Вторая производная существует на всей числовой оси і обращается в нуль при $x = -2$, $x = 0$ и $x = 1$. Этими точ ками область определения разбивается на четыре интер вала $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, в каждом и которых $f''(x)$ сохраняет знак. Определяя знак второї производной в произвольно взятой точке каждого из интер валов, получим знак ее в соответствующем интервале

в интервале		$(-\infty, -2)$	имеем	$f''(-3) < 0$,
»	»	$(-2, 0)$	»	$f''(-1) > 0$,
»	»	$(0, 1)$	»	$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$,
»	»	$(1, +\infty)$	»	$f''(2) > 0$.

Таким образом, в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0, 1)$ кривая выпукла, а в интервалах $(-2, 0)$ и $(1, +\infty)$ — вогнута.

Граничные точки $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ этих интервалов являются абсциссами точек перегиба. Вычислим значения функции $y = f(x)$ в этих точках:

$$f(-2) = 19, \ f(0) = -5, \ f(1) = 43.$$

Итак, данная функция имеет три точки перегиба: $(-2; 19)$, $(0; -5)$, $(1; 43)$.

7.71. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции $\varphi(x) = 9\sqrt[3]{x}(x^2-7x)+7x+63$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Найдем первую и вторую производные:

$$\varphi'(x) = 21x^{\frac{4}{3}} - 84x^{\frac{1}{3}} + 7,$$

$$\varphi''(x) = 28\sqrt[3]{x} - 28\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 28\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Вторая производная $\varphi''(x)$ обращается в нуль при $x = 1$ и не существует при $x = 0$. Этими двумя точками ось абсцисс разбивается на три интервала $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Определим знак $\varphi''(x)$ в каждом из полученных интервалов:

в интервале $(-\infty, 0)$ имеем $\varphi''(-1) < 0$;

» » $(0, 1)$ « $\varphi''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$;

» » $(1, +\infty)$ » $\varphi''(2) > 0$.

Таким образом, в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$ кривая выпукла, а в интервале $(1, +\infty)$ — вогнута. Граничная точка $x = 1$ двух последних интервалов является абсциссой точки перегиба. Сама точка перегиба имеет координаты $(1; 16)$.

7.72. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $\psi(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Решение. Функция $y = \psi(x)$ определена на всей числовой оси за исключением точки $x = -1$. Дифференцируя дважды, получим:

$$\psi'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad \psi''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная $\varphi''(x)$ всюду отлична от нуля и терпит разрыв в точке $x = -1$. Эта точка разбивает ось абсцисс на два интервала $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$. Определим знак $\varphi''(x)$ в этих интервалах:

в интервале $(-\infty, -1)$ имеем $\varphi''(-2) > 0$;
» » $(-1, +\infty)$ » $\varphi''(0) < 0$.

Таким образом, в интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута, а в интервале $(-1, +\infty)$—выпукла. Точек перегиба рассматриваемая кривая не имеет, так как в граничной точке $x = -1$ полученных интервалов функция не определена.

7.73. Показать, что кривая $y = x^4$ вогнута на всей числовой оси.

7.74. Показать, что кривая $y = \frac{x^2}{2} - \cos x$ вогнута на всей числовой оси.

7.75. Показать, что парабола $y = ax^2 + bx + c$ выпукла при $a < 0$ и вогнута при $a > 0$.

В задачах 7.76—7.88 исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба графики следующих функций.

7.76. $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37$.

7.77. $y = x^5 - 5x^4 - 7x + 178$. 7.78. $y = \frac{x-7}{x+2}$.

7.79. $y = \frac{x}{x^2+1}$. 7.80. $y = x^2 - \frac{1}{x}$. 7.81. $y = x\sqrt{x} - 8x + 4$.

7.82. $y = 4 - \sqrt[3]{x+2}$. 7.83. $y = \sin x$ в интервале $(0, 2\pi)$.
7.84. $y = \ln(1+x^2)$. 7.85. $y = x \ln x$. 7.86. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

7.87. $y = e^{-x^2}$. 7.88. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

7.89. Выяснить вид графика функции, если известно, что в интервале (a, b): 1) $y > 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$; 2) $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$; 3) $y < 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$; 4) $y < 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$.

§ 6. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Общее исследование функции и построение ее графика рекомендуется выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.

2. В случае, если область определения функции симметрична относительно начала координат, проверить, не является ли функ-

ия четной или нечетной; проверить также, не является ли она риодической.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции; выяснить оведение функции на концах интервалов знакопостоянства (в м числе и на бесконечности), построить схематично график на онцах интервалов знакопостоянства.

4. Найти интервалы монотонности функции, ее экстремумы.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функии, его точки перегиба.

6. Построить график функции, используя полученные результы исследования.

7.90. Построить график функции $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Решение. 1. Область определения данной функции остоит из двух интервалов $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

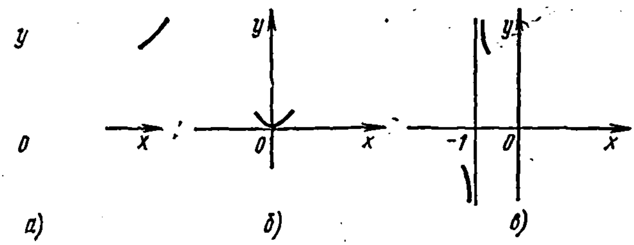


Рис. 30

2. Так как область определения функции не симметрича относительно начала координат, то она не является ни етной, ни нечетной; исследуемая функция непериодична.

3. Функция обращается в нуль при $x = 0$ и терпит разыв при $x = -1$. Полученными точками область опреееления функции делится на три интервала $(-\infty, -1)$, $1, 0)$, $(0, +\infty)$, в каждом из которых она сохраняет пределенный знак, а именно:

в интервале $(-\infty, -1)$ имеем $y(-2) < 0$;
» » $(-1, 0)$ » $y(-0{,}5) > 0$;
» » $(0, +\infty)$ » $y(1) > 0$.

Для выяснения поведения функции на концах интералов знакопостоянства вычислим следующие пределы рис. 30):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2}{x+1}=+0,\quad \lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x^2}{x+1}=\pm\infty.$$

Таким образом, в точке $x=-1$ функция претерпевае бесконечный разрыв.

4) Дифференцируя данную функцию, получим

$$y'=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Производная y' обращается в нуль при $x=-2$ и $x=0$ терпит разрыв при $x=-1$. Этими точками числовая ос делится на четыре интервала: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1$ $0)$, $(0, +\infty)$. Выясним знак производной y' в каждом и этих интервалов:

в интервале		$(-\infty, -2)$	имеем	$y'(-3)>0$;
»	»	$(-2, -1)$	»	$y'(-1{,}5)<0$;
»	»	$(-1, 0)$	»	$y'(-0{,}5)<0$;
»	»	$(0, +\infty)$	»	$y'(1)>0$.

Следовательно, в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$ функ ция возрастает, а в интервалах $(-2, -1)$ и $(-1, 0)$ — убы вает. Точки $x=-2$ и $x=0$ являются соответствені точками максимума и минимума. Находим значения функ ции в экстремальных точках:

$$y_{\max}(-2)=-4,\quad y_{\min}(0)=0.$$

5. Дифференцируя дважды данную функцию, получим

$$y''=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}=$$

$$=2\cdot\frac{(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x)}{(x+1)^4}=2\cdot\frac{1}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная y'' терпит разрыв при $x=-1$. Этой точкой числовая ось разбивается на два интервала: $(-\infty$ $-1)$ и $(-1, +\infty)$. Определим знак второй производної в этих интервалах:

в интервале		$(-\infty, -1)$	имеем	$y''(-2)<0$;
»	»	$(-1, +\infty)$	»	$y''(0)>0$.

Таким образом, в интервале $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, в интервале $(0, +\infty)$ — вогнута. Точек перегиба нет.

6. Собирая полученные данные воедино, построим гра фик функции (рис. 31).

7.91. Построить график функции $y=xe^x$.

Решение. 1. Область определения функции — вся числовая ось: $(-\infty, +\infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной. Исследуемая функция непериодична.

3. Так как функция обращается в нуль только при $x=0$, то она имеет два интервала знакопостоянства $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. В первом интервале исследуемая функция отрицательна, во втором — положительна. Для выяснения поведения функции на концах интервалов знакопостоянства вычислим следующие пределы (рис. 32):

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} xe^x = -0, \ \lim_{x\to\pm 0} xe^x = \pm 0.$$

4. Найдем производную данной функции:

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

Производная y' обращается в нуль при $x = -1$. Точка $x=-1$ делит область определения функции $y = xe^x$ на два интервала $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$. В первом интервале $y' < 0$, во втором $y' > 0$. Следовательно, исследуемая функция в интервале $(-\infty, -1)$ убывает,

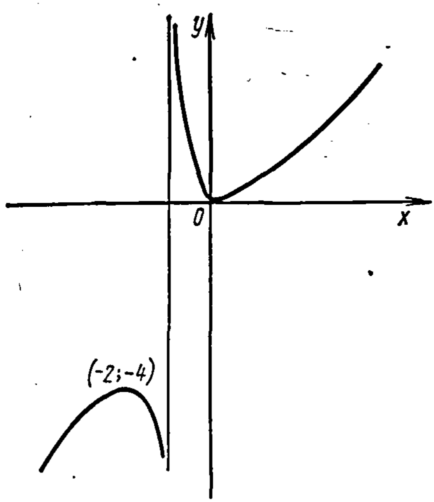


Рис. 31

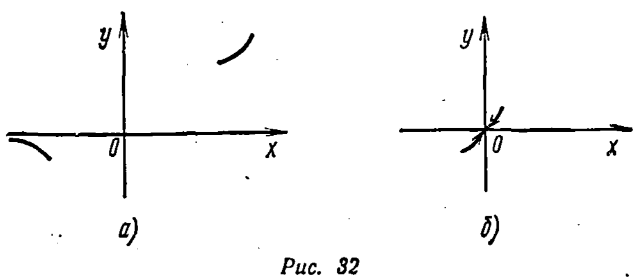


Рис. 32

а в интервале $(-1, +\infty)$ — возрастает. Точка $x=-1$ есть точка минимума; минимум функции в этой точке равен $y(-1)=-\frac{1}{e}$.

5. Находим вторую производную

$$y''=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x).$$

Она обращается в нуль при $x=-2$; мы получили два интервала знакопостоянства второй производной: $(-\infty, -2)$ и $(-2, +\infty)$. В первом интервале $y''<0$, во втором $y''>0$. Следовательно, график функции $y=xe^x$ в интервале $(-\infty, -2)$ выпуклый, а в интервале $(-2, +\infty)$ — вогнутый; $x=-2$ — абсцисса точки перегиба. Точка перегиба имеет координаты $\left(-2;\ -\frac{2}{e^2}\right)$.

6. По полученным данным строим график функции (рис. 33).

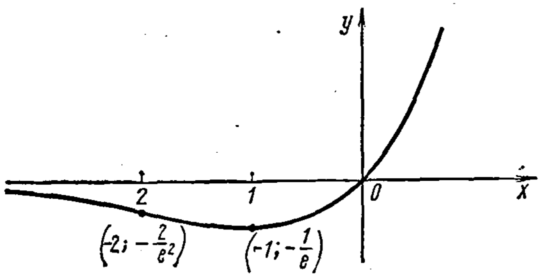


Рис. 33

7.92. Исследовать функцию $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ и построить ее график.

Решение. 1. Исследуемая функция определена при всех значениях x, исключая точки $x=\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2. Функция является нечетной, так как

$$f(-x)=\sin(-x)+\frac{1}{\sin(-x)}=-\sin x+\frac{1}{-\sin x}=$$

$$=-\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=-f(x).$$

Функция периодическая с периодом 2π, поскольку

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\frac{1}{\sin(x+2\pi)}=\sin x+\frac{1}{\sin x}=f(x).$$

Отсюда следует, что достаточно исследовать данную функцию в интервале $(0, \pi)$.

3. Так как в интервале $(0, \pi)$ выполняется неравенство $\sin x > 0$, то функция положительна в каждой точке интервала $(0, \pi)$.

Исследуем поведение функции на концах интервала — в точках $x=0$ и $x=\pi$:

$$\lim_{x\to+0}\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=+\infty, \quad \lim_{x\to\pi-0}\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=+\infty.$$

4. Вычислим производную

$$y'=\cos x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\cos x\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.$$

Производная определена в каждой точке интервала $(0, \pi)$ и обращается в нуль только в точке $x=\frac{\pi}{2}$ этого интервала. Этой очкой интервал $(0, \pi)$ елится на два интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. · первом интервале $\iota'<0$ и, следовательью, функция убывает, о втором интервале $'>0$ и, следователько, функция возрастает. Точка $x=\frac{\pi}{2}$ — очка минимума; минимальное значение $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

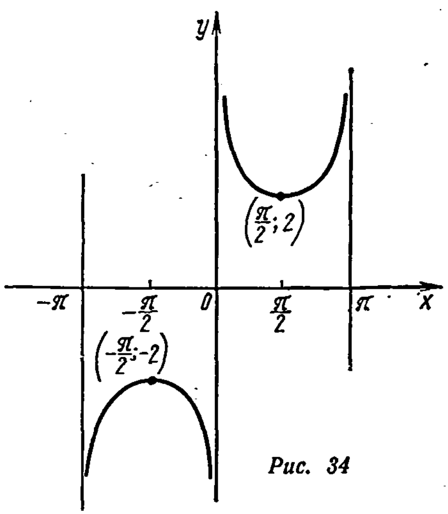


Рис. 34

5. Вычислим вторую производную

$${}''=\frac{3\cos^2 x\sin^3 x+2\sin x\cos^4 x}{\sin^4 x}=\frac{\cos^2 x(3\sin^2 x+2\cos^2 x)}{\sin^3 x}.$$

Из полученного выражения для второй производной видим, что она положительна во всем интервале $(0, \pi)$, за исключением точки $\frac{\pi}{2}$, в которой обращается в нуль. Отсюда следует, что кривая вогнута в интервале $(0, \pi)$.

6. По данным исследования строим график функции в интервале $(0, \pi)$. Затем, используя симметрию графика относительно начала координат (функция нечетна), строим кривую в интервале $(-\pi, 0)$ (рис. 34).

В задачах **7.93—7.128** исследовать данные функции и построить их графики.

7.93. $y=x^2-5x+4$. **7.94.** $y=x^3-x^2$. **7.95.** $y=\frac{x}{x+2}$.

7.96. $y=\frac{1}{1+x^2}$. **7.97.** $y=\frac{1}{x^2-1}$. **7.98.** $y=\frac{x}{1+x^2}$.

7.99. $y=\frac{x}{x^2-1}$. **7.100.** $y=\frac{1}{x^3-1}$. **7.101.** $y=\frac{x^4+1}{x^2}$.

7.102. $y=\frac{4+x^2}{x}$. **7.103.** $y=\frac{8-x^3}{x^2}$. **7.104.** $y=x^2+\frac{16}{x}$.

7.105. $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$. **7.106.** $y=x-\sqrt{x}$. **7.107.** $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$.

7.108. $y=\sqrt{4x^2-1}$. **7.109.** $y=\sqrt{9-x^2}$.

7.110. $y=\sqrt{5+x^2}$. **7.111.** $y=x\sqrt{x-4}$. **7.112.** $y=x \quad x+5$.

7.113. $y=\sqrt{8+x^3}$. **7.114.** $y=\sqrt{x^2-x}$. **7.115.** $\sqrt{x-x^2}$.

7.116. $y=2^{1/x}$. **7.117.** $y=xe^{-x}$. **7.118.** $y=e^x-x$.

7.119. $y=\frac{\ln x}{x}$. **7.120.** $y=\ln(x^2-1)$. **7.121.** $y=\frac{1}{1-e^x}$.

7.122. $y=x-\ln x$. **7.123.** $y=\sin x-\cos x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

7.124. $y=2\sin^2 x-\cos 2x \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

7.125. $y=\frac{2-\sin^2 2x}{2} \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. **7.126.** $y=x-\operatorname{arctg} x$.

7.127. $y=\ln\sin x \quad (0<x<\pi)$.

7.128. $y=\ln\cos x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

ГЛАВА 8

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \quad [\text{или } dF(x) = f(x)dx].$$

Любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных для функций $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \text{ если } d\,[F(x)+C]=f(x)dx.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1 $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$; $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)dx$; $\int dF(x)=F(x)+C$.

2. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx$.

3. $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$.

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

   $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases}\arcsin x + C,\\ -\arccos x + C.\end{cases}$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$.

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases}\operatorname{arctg} x + C,\\ -\operatorname{arcctg} x + C.\end{cases}$

Проинтегрировать функцию $f(x)$ — значит найти ее неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

8.1. Найти интегралы:

$$1)\ \int \frac{3x^2-5x\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx;\quad 2)\ \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx,$$

$$3)\ \int \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\,dx,\quad 4)\ \int \frac{dx}{\sin^2 2x}.$$

Решение. 1) Разделив почленно числитель на знаменатель, разложим подынтегральную функцию на слагаемые, после чего проинтегрируем каждое из полученных слагаемых:

$$\int \frac{3x^2-5x\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int\left(3x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{7}{6}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx =$$

$$= \int 3x^{\frac{5}{3}}dx - \int 5x^{\frac{7}{6}}dx + \int 2x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 3\int x^{\frac{5}{3}}dx -$$

$$-5\int x^{\frac{7}{6}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{3}}dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 5\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} +$$

$$+2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{9}{8}\,x^{\frac{8}{3}} - \frac{30}{13}x^{\frac{13}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Здесь через C обозначен результат суммирования всех произвольных постоянных, получающихся при интегрировании каждого слагаемого.

2) Представим подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

3) Используя тригонометрическую формулу

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2},$$

олучим

$$\int \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3}\, dx = \int \frac{1+\cos x}{6}\, dx = \frac{1}{6}\int (1+\cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\int dx + \int \cos x\, dx\right] = \frac{1}{6}(x + \sin x) + C.$$

4) Преобразуем подынтегральную функцию таким образом:

$$\frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{1}{4\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

сюда

$$\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}\right] = \frac{1}{4}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

В задачах 8.2—8.75 найти интегралы.

. $\int x^7\, dx$. 8.3. $\int \frac{x^3}{2} dx$. 8.4. $\int \frac{dx}{2}$. 8.5. $\int \frac{dx}{x^4}$.

. $\int (x^4 - 5x^2 + 3)\, dx$. 8.7 $\int (-3t^3 + 6t^2 - t)\, dt$.

. $\int (6x^5 - 5x^4 + 3x^2 + 2x + 1)\, dx$.

. $\int x(x+1)(x+2)\, dx$. 8.10. $\int u^2 (u-1)(u-2)\, du$.

1. $\int (1-x^3)^2\, dx$. 8.12. $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}}$. 8.13 $\int \sqrt{2x}\, dx$.

4. $\int (6\sqrt{v} - 5v^2)\, dv$. 8.15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 8.16. $\int \frac{8}{x} dx$.

7. $\int \frac{1-3x+4x^2}{x} dx$. 8.18. $\int \frac{x^3-3x^2+1}{x^5} dx$.

9. $\int \frac{x^2-3x+2}{x-1} dx$. 8.20. $\int (1-x)(2+\sqrt{x})\, dx$.

8.21. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 8.22. $\int \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}\,dx$.

8.23. $\int \frac{3\sqrt[4]{x^3}-10\sqrt{x}+7x-3}{\sqrt[4]{x}}\,dx$. 8.24. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

8.25. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$. 8.26. $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}\,dx$.

8.27. $\int \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}\,dx$. 8.28. $\int \frac{27-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}+9}\,dx$.

8.29. $\int 2\sin x\,dx$. 8.30. $\int \frac{\cos x}{3}\,dx$. 8.31. $\int (7\sin x-4\cos x)\,dx$

8.32. $\int \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-6\cos x\right)dx$.

8.33. $\int \left(\frac{1}{2}\cos u-5\sin u+7\sqrt[4]{u^3}\right)du$. 8.34. $\int 3^{x-1}\,dx$.

Указание. Представить подынтегральную функцию в вид $3^{x-1}=\frac{1}{3}\cdot 3^x$.

8.35. $\int 3^x e^x\,dx$. 8.36. $\int \frac{2^x}{e^x}\,dx$. 8.37. $\int 4^x(4^x-1)\,dx$.

8.38. $\int \frac{81^x-3^x}{9^x}\,dx$. 8.39. $\int (5^x-1)(e^x+1)\,dx$.

8.40. $\int (4e^x+3\sin x)\,dx$. 8.41. $\int (5\cos\varphi-2\cdot 6^{\varphi})\,d\varphi$.

8.42. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$. 8.43. $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

8.44. $\int \left(\cos x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$. 8.45. $\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}\,dx$.

8.46. $\int \frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$. 8.47. $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x}\,dx$. 8.48. $\int \frac{1+\cos 2x}{3\cos x}\,d$

8.49. $\int \frac{\sin 2x}{5\cos x}\,dx$. 8.50. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx$.

Указание Воспользоваться формулой $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$.

8.51. $\int \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos 2x}\, dx.$

Указание. Воспользоваться формулой

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

8.52. $\int \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 2x}\, dx.$ 8.53. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}.$

8.54. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos 2x}\, dx.$ 8.55. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

Указание. Воспользоваться формулой $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$

8.56. $\int \operatorname{ctg}^2 x \cdot dx.$ 8.57. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2\, dx.$

8.58. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx.$

Указание. Воспользоваться формулой $\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x.$

8.59. $\int 3 \cos^2 \frac{x}{2}\, dx.$ 8.60. $\frac{1 + \cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx.$

8.61. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx.$ 8.62. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\, dx.$

8.63. $\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$ 8.64. $\int \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^4}}\, dx.$

8.65. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx.$ 8.66. $\int \frac{1+x^2}{1-x^4}\, dx.$

8.67. $\int \frac{\sqrt{x^2-1} + 1}{x^2-1}\, dx.$ 8.68. $\int \frac{1-x^2}{1-x^4}\, dx.$

8.69. $\int \frac{2+x^2}{1+x^2}\, dx.$

Указание. Представить числитель в виде $2 + x^2 = (1+x^2) + 1.$

8.70. $\int \frac{1+3x^2}{x^2 (1+x^2)}\, dx.$

Указание. Представить числитель в виде $1+3x^2=2x^2+(1+x^2).$

8.71. $\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx.$ 8.72. $\int \frac{x^2-3}{1-x^2}\, dx.$

8.73. $\int \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)}\,dx$. **8.74.** $\int \frac{5+2\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x}\,dx$.

8.75. $\int 6^x\left(1-\frac{6^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СПОСОБОМ ПОДСТАНОВКИ

Любая формула интегрирования вида

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

в частности, таблица простейших интегралов, остается в силе, если в подынтегральном выражении и в правой части сделать замену переменной $x = \varphi(t)$.

Сформулированное свойство неопределенного интеграла лежит в основе интегрирования *способом подстановки*. Этот способ заключается в том, что стараются сделать такую подстановку $t = \psi(x)$, чтобы данный интеграл свести к одному из табличных.

8.76. Найти интегралы:

$$1)\ \cos 2x\,dx,\ 2)\ \int \frac{x^2dx}{5+x^3},\ 3)\ \int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x},$$

$$4)\ \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}},\ 5)\ \sqrt[5]{1-2x}\,dx.$$

Решение. 1) Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет стоять аргумент $2x$ подынтегральной функции $\cos 2x$. Так как $d(2x) = 2dx$, то

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\underbrace{d(2x)}_{2dx}.$$

Следовательно, подстановка $2x = t$ приводит рассматриваемый интеграл к табличному:

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной интегрирования x, окончательно получим

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

2) Так как $d(5+x^3)=3x^2dx$, то

$$\int \frac{x^2\,dx}{5+x^3}=\frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{d(5+x^3)}^{3x^2dx}}{5+x^3}.$$

Полагая $5+x^3=t$, получим

$$\int \frac{x^2dx}{5+x^3}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|5+x^3|+C.$$

3) Поскольку $d(\cos x)=-\sin x\,dx$, то

$$\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}=-\int \frac{\overbrace{d(\cos x)}^{-\sin x\,dx}}{1+\cos^2 x}.$$

Отсюда, применяя подстановку $t=\cos x$, приходим к табличному интегралу:

$$\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}=-\int \frac{dt}{1+t^2}=-\operatorname{arctg} t+C=-\operatorname{arctg}(\cos x)+C.$$

4) Из соотношения $d(e^x)=e^xdx$ получаем

$$\int \frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int \frac{\overbrace{d(e^x)}^{e^xdx}}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Воспользовавшись подстановкой $t=e^x$, приходим к табличному интегралу:

$$\int \frac{e^xdx}{\sqrt{1-(e^x)^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin e^x+C.$$

5) Подстановка $t=1-2x$ приводит данный интеграл к табличному:

$$\int \sqrt[5]{1-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int (1-2x)^{\frac{1}{5}}\,\underbrace{d(1-2x)}_{-2dx}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{5}}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=-\frac{5}{12}\sqrt[5]{t^6}+C=$$

$$=-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(1-2x)^6}+C.$$

В задачах 8.77—8.164 найти интегралы.

8.77. $\int \sin\frac{x}{3}\, dx$. 8.78. $\int \cos 4x\, dx$. 8.79. $\int \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)dx$.

8.80. $\int 3^{-x}dx$. 8.81. $\int 4^{5x-1}\, dx$. 8.82. $\int e^{2-3x}\, dx$.

8.83. $\int (8x+5)^{10}dx$. 8.84. $\int (3-2x)^6\, dx$.

8.85. $\int \frac{dx}{(5-4x)^3}$. 8.86. $\int \sqrt{6x-5}\, dx$.

8.87. $\int \sqrt[4]{(2-3x)^3}\, dx$. 8.88. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$. 8.89. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+4}}$.

8.90. $\int \frac{dx}{7x+9}$. 8.91. $\int \frac{dx}{11-6x}$. 8.92. $\int \frac{x-2}{x^2-3x+2}\, dx$.

8.93. $\int \frac{x}{x+1}\, dx$.

Указание. Выделить в подынтегральной функции целую часть путем деления числителя на знаменатель.

8.94. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 8.95. $\int \frac{dx}{16+25x^2}$. 8.96. $\int \frac{dx}{1-16x^2}$.

8.97. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$. 8.98. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$. 8.99. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

8.100. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+1}}$. 8.101. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$.

8.102. $\int \frac{e^x dx}{(e^x-5)^3}$. 8.103. $\int 7^x(7^x+3)^4dx$. 8.104. $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$.

8.105. $\int \frac{x^3\, dx}{x^2+1}$. 8.106. $\int \frac{x^5dx}{x^6-3}$. 8.107. $\int \frac{2x-1}{x^2-x-4}\, dx$.

8.108. $\int \frac{2x-3}{4+3x-x^2}\, dx$. 8.109. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+1}}\, dx$.

8.110. $\int \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$. 8.111. $\int \frac{3x^2-10x}{x^3-5x^2}\, dx$.

.112. $\int \frac{e^x dx}{e^x+4}$. 8.113. $\int \frac{6^x dx}{1-6^x}$. 8.114. $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

.115. $\int \operatorname{ctg} x\, dx$. 8.116. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{4}\, dx$.

.117. $\int \operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx$. 8.118. $\int \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) dx$.

.119. $\int \operatorname{ctg}(1-\pi x) dx$. 8.120. $\int \frac{(7+\sqrt{x})^4 dx}{\sqrt{x}}$.

.121. $\int \frac{dx}{(5+\sqrt{x})^3\sqrt{x}}$. 8.122. $\int \frac{(4+\sqrt[3]{x})^5 dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

.123. $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 8.124. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x}\, dx}{x}$. 8.125. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

.126. $\int \frac{6^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$ 8.127. $\int 3x \cdot 3^{x^2}\, dx$.

.128. $\int \sqrt[3]{e^{3x}-9}\, e^{3x} dx$. 8.129. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

.130. $\int \frac{4^x dx}{\sqrt[3]{5+4^x}}$. 8.131. $\int \frac{e^{5x} dx}{1-e^{10x}}$ 8.132. $\int \frac{8^x dx}{64^x+1}$.

.133. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. 8.134. $\int \frac{6^x\, dx}{\sqrt{36^x+1}}$ .8 135. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$.

.136. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$. 8.137. $\int \cos x \sqrt[5]{\sin^4 x}\, dx$.

.138. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{4\cos^2 x}\, dx$. 8.139. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x \cos^2 x}}$.

140. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}{2\sin^2 x}\, dx$. 8.141. $\int \frac{\arcsin x - 1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

.142. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$. 8.143. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}\, dx$.

144. $\int \frac{dx}{\operatorname{arcctg}^2 x(1+x^2)}$. 8.145. $\int x^2 \sin x^3\, dx$.

146. $\int 5^x \cos 5^x\, dx$. 8.147. $\int \sqrt{1-\sin x}\cos x\, dx$.

8.148. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{2\cos x + 1}}$. 8.149. $\int \cos^2 x\,dx$. 8.150. $\int 4\sin^2 x\,d$

8.151. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. 8.152. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 4}$. 8.153. $\int \frac{\sin x\,dx}{9+\cos^2 x}$

8.154. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\sqrt{2+\mathrm{ctg}^2 x}}$. 8.155. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$.

8.156. $\int \frac{dx}{x(9-\ln^2 x)}$. 8.157. $\int \frac{dx}{(\mathrm{arctg}^2 x + 16)(1+x^2)}$.

8.158. $\int \frac{4^x dx}{\sqrt{16^x+9}}$. 8.159. $\int \frac{\cos\frac{3}{x}\,dx}{x^2}$.

8.160. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x}$. 8.161. $\int \frac{x^3\,dx}{\cos^2 x^4}$.

8.162. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\,dx}{x^3}$. 8.163. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Указание. Воспользоваться формулой $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и разделить числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{x}{2}$.

8.164. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

8.165. Найти интегралы:

$$1)\ \int \cos^3 x\,dx,\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx,\ \int \mathrm{tg}^3 x\,dx;$$

$$2)\ \int \sin^4 x\,dx,\ \int \sin^2 x\cos^4 x\,dx;$$

$$3)\ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx,\ \int \mathrm{tg}^4 x\,dx;\qquad 4)\ \int \sin 3x\cos 5x\,dx.$$

Решение. 1) Рассматриваемые интегралы, сод жащие в числителе нечетную степень синуса или косину найдем, отделив от этой степени один множитель:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\cdot\cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\ d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Аналогично находим

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,d(\cos x) =$$

$$= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)d(\cos x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

Точно так же находится следующий интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,dx =$$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,d(\cos x) = \int\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos^3 x}\right)d(\cos x) =$$

$$= \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

2) Данные интегралы от четной степени синуса или косинуса найдем понижением степени по формулам

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}, \quad \sin t\cos t = \frac{\sin 2t}{2}.$$

Используя первые две из приведенных здесь формул, получим

$$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int\Bigl(1 - 2\cos 2x +$$

$$+ \frac{1+\cos 4x}{2}\Bigr)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Аналогично находим

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x\cos 2x\,dx\right] =$$

$$=\frac{1}{8}\left[\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{2}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x)\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

3) Интегралы от отношения четных степеней синуса и косинуса найдем, используя следующие тригонометрические формулы:

$$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\operatorname{tg}^2 t\,,\quad \frac{1}{\sin^2 t}=1+\operatorname{ctg}^2 t.$$

Тогда

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=-\int\operatorname{ctg}^2 x(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,d(\operatorname{ctg}x)=-\int(\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x)\,d(\operatorname{ctg}x)=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+C.$$

Аналогично получаем

$$\int\operatorname{tg}^4 x\,dx=\int\frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\operatorname{tg}^2 x\sin^2 x\,d(\operatorname{tg}x)=$$

$$=\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}d(\operatorname{tg}x)=\int\frac{\operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x+1}d(\operatorname{tg}x).$$

Выделив в числителе целую часть, получим

$$\int\operatorname{tg}^4 x\,dx=\int\left(\operatorname{tg}^2 x-1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1}\right)d(\operatorname{tg}x)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}x+C=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C.$$

4) Используя тригонометрическую формулу

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

получим

$$\int\sin 3x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx=$$

$$-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

В задачах 8.166—8.185 найти интегралы.

.166. $\int \sin^3 x\,dx$. 8.167. $\int \cos^3 4x\,dx$. 8.168. $\int \cos^4 x\,dx$.

.169. $\int \sin^4 \frac{x}{2}\,dx$. 8.170. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$. 8.171. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

.172. $\int \operatorname{tg}^3 5x$. 8.173. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$. 8.174. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

.175. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$. 8.176. $\int \sin^2 3x\cos^4 3x\,dx$.

.177. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. 8.178. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$.

.179. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$. 8.180. $\int \sin^2 \frac{x}{4}\cos^3 \frac{x}{4}\,dx$.

.181. $\int \cos^5 x\,dx$. 8.182. $\int \sin^5 3x\,dx$. 8.183. $\int \sin 2x\cos 3x\,dx$.

.184. $\int \cos 7x\cos 3x\,dx$. 8.185. $\int \sin x\sin 5x\,dx$.

8.186. Найти интегралы:

1) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$.

Решение. Для нахождения интегралов, содержащих адикалы вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, могут быть именены соответственно подстановки $x=a\sin t$ (или $=a\cos t$), $x=a\operatorname{tg} t$ (или $x=a\operatorname{ctg} t$), $x=\frac{a}{\sin t}$ ıли $x=\frac{a}{\cos t}\Big)$.

1) Воспользуемся подстановкой $x=2\sin t$. Тогда $dx=2\cos t\,dt$ и, следовательно,

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx=\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt=4\int \cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int (1+\cos 2t)dt=2t+\sin 2t+C.$$

Но $\sin t = \frac{x}{2}$, $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$, $\sin 2t$

$= 2\sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$.

поэтому окончательно имеем

$$\int \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C.$$

2) Применим подстановку $x = 3 \operatorname{tg} t$. Отсюда $dx = \frac{3}{\cos^2 t}\, dt$ и

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{9\operatorname{tg}^2 t + 9}}{3\operatorname{tg} t} \cdot \frac{3}{\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3\int \frac{dt}{\cos t \cdot \operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t} = 3\int \frac{dt}{\sin t \cos^2 t}.$$

Введя в числитель «тригонометрическую единиц $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ и разделив почленно числитель поды тегральной функции на знаменатель, получим

$$I = 3\int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t}\, dt = 3\int \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin t}\right) dt =$$

$$= -3\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} + 3\int \frac{dt}{\sin t} = 3 \cdot \frac{1}{\cos t} + 3\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} +$$

(последний интеграл был вычислен в задаче 8.163).

Возвратимся теперь к старой переменной x. Им

$$\operatorname{tg} t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + 1}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\right)} = \frac{x}{3 + \sqrt{x^2+9}}$$

В результате окончательно получаем

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\, dx = \sqrt{x^2+9} + 3\ln \frac{x}{3+\sqrt{x^2+9}} + C.$$

3) Произведем подстановку $x = \frac{5}{\sin t}$. Тогда $dx = -\frac{5\cos t}{\sin^2 t}\,dt$ и

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = -\int \frac{\sqrt{\frac{25}{\sin^2 t} - 25}}{\frac{5}{\sin t}} \frac{5\cos t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= -5 \int \frac{\operatorname{ctg} t \cos t}{\sin t}\,dt = -5 \int \operatorname{ctg}^2 t\,dt =$$

$$= 5 \int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 t}\right) dt = 5t + 5\operatorname{ctg} t + C.$$

Вернемся теперь к старой переменной x. Имеем $\sin t = \frac{5}{x}$, $t = \arcsin\frac{5}{x}$, $\operatorname{ctg} t = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} =$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{25} - 1} = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5},$$

поэтому

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = 5\arcsin\frac{5}{x} + \sqrt{x^2-25} + C.$$

В задачах 8.187—8.195 найти интегралы.

8.187. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$. **8.188.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$.

8.189. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **8.190.** $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$.

8.191. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. **8.192.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$.

8.193. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$. **8.194.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

8.195. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

С помощью *формулы интегрирования по частям*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{1}$$

(u и v — дифференцируемые функции от x) нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию более простого интеграла $\int v\,du$.

8.196. Найти интегралы:

$$1)\ \int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx;\quad 2)\int xe^{2x}dx;$$

$$3)\ \int (1-x)\sin x\,dx;\quad 4)\int x\operatorname{arctg} x\,dx.$$

Решение. 1) Положим

$$u=\ln x,\ dv=\sqrt[3]{x^2}\,dx,$$

откуда

$$du=\frac{dx}{x},\quad v=\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}.$$

По формуле (1) получим

$$\int \ln x\sqrt[3]{x^2}\,dx=\ln x\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\int\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\frac{3}{5}\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

2) Полагая

$$u=x,\quad dv=e^{2x}dx,$$

найдем

$$du=dx,\ v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}.$$

Отсюда

$$\int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

3) Пусть

$$u=1-x,\ dv=\sin x\,dx.$$

Тогда

$$du=-dx,\ v=\int\sin x\,dx=-\cos x.$$

По формуле (1) получим

$$\int(1-x)\sin x\,dx=(1-x)(-\cos x)-$$

$$-\int\cos x\,dx=(x-1)\cos x-\sin x+C.$$

4) Полагая

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x\,dx,$$

олучим

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

огда по формуле (1) имеем

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

В задачах 8.197—8.215 найти интегралы.

.197. $\int x \sin x\,dx$. 8.198. $\int x \cos 4x\,dx$.

.199. $\int (2x-3) \cos x\,dx$. 8.200. $\int (1-4x) \sin 2x\,dx$.

.201. $\int x^2 \ln x\,dx$. 8.202. $\int (x-1) \ln x\,dx$.

.203. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$. 8.204. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$. 8.205. $\int \frac{x}{\sin^2 3x}\,dx$.

.206 $\int (2x+1)\, e^{2x} dx$. 8.207. $\int (2-x)\, e^{-3x} dx$.

.208. $\int x^2 e^x dx$. 8.209. $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

.210. $\int \arcsin x\,dx$. 8.211. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. 8.212. $\int \ln x\,dx$.

.213. $\int \ln^2 x\,dx$. 8.214. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$.

8.215. $\int (x+2)\, 3^x dx$.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен, сводится к выделению полного квадрата из квадратного трехчлена.

8.216. Найти интегралы:

$$1)\int\frac{dx}{x^2-4x+4};\quad 2)\int\frac{dx}{x^2-2x+2};$$

$$3)\int\frac{dx}{8-2x-x^2};\quad 4)\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}.$$

Решение. 1) Квадратный трехчлен x^2-4x+ есть полный квадрат двучлена $x-2$. Отсюда

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+4}=\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}+C.$$

2) Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат

$$x^2-2x+2=(x^2-2x+1)-1+2=(x-1)^2+1.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}=$$
$$=\operatorname{arctg}(x-1)+C.$$

3) Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, получим

$$8-2x-x^2=-(x^2+2x-8)=-[(x^2+2x+1)-1-8]=$$
$$=-[(x+1)^2-9]=9\left[1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2\right].$$

Отсюда

$$\int\frac{dx}{8-2x-x^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{9}\cdot 3\int\frac{d\left(\frac{x+1}{3}\right)}{1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x+1}{3}}{1-\frac{x+1}{3}}\right|+$$
$$+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+4}{x-2}\right|+C.$$

4) Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$4x^2-8x+3=4\left(x^2-2x+\frac{3}{4}\right)=$$

$$=4\left[\left(x^2-2x+1\right)-1+\frac{3}{4}\right]=4\left[(x-1)^2-\frac{1}{4}\right]=$$

$$=[2(x-1)]^2-1,$$

откуда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{[2(x-1)]^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d[2(x-1)]}{\sqrt{[2(x-1)^2]-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2(x-1)+\sqrt{4x^2-8x+3}\right|+C.$$

В задачах 8.217—8.232 найти интегралы.

8.217. $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$. 8.218. $\int\frac{dx}{x^2+8x+16}$.

8.219. $\int\frac{dx}{x^2-3x-4}$. 8.220. $\int\frac{dx}{x^2+3x}$.

8.221. $\int\frac{dx}{3x^2+5x+3}$. 8.222. $\int\frac{x^3-2x-2}{x^2-2x+2}dx$.

Указание. Из подынтегральной функции выделить целую асть, разделив числитель на знаменатель.

8.223. $\int\frac{2x^4-3x^2-21x+1}{x^2-3x+2}\,dx$. 8.224. $\int\frac{dx}{8x-25-x^2}$.

8.225. $\int\frac{dx}{5x-x^2-6}$. 8.226. $\int\frac{dx}{2x^2-3x+1}$.

8.227. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. 8.228. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

8.229. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. 8.230. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$.

8.231. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}$. 8.232. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x+3x^2}}$.

8.233. Найти интегралы:

$$1) \int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\,dx; \quad 2) \int \frac{1+2x}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx.$$

Решение. 1) Выделим в числителе производную квадратного трехчлена x^2-5x-4, стоящего в знаменателе:

$$x-3=\frac{1}{2}(2x-5)-\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x-3}{x^3-5x+4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-5)-\frac{1}{2}}{x^2-5x+4}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-5)\,dx}{x^2-5x+4}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-5x+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C.$$

2) Выделяя в числителе производную квадратного трехчлена $1+x-3x^2$, стоящего в знаменателе, получим

$$1+2x=-\frac{1}{3}(1-6x)+\frac{4}{3}.$$

Тогда

$$\int \frac{1+2x}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{3}(1-6x)+\frac{4}{3}}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx =$$

$$=-\frac{1}{3}\int \frac{(1-6x)\,dx}{\sqrt{1+x-3x^2}}+\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-3x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int (1+x-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+x-3x^2)+$$

$$+\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{12}-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}}=-\frac{2}{3}\sqrt{1+x-3x^2}+$$

$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\frac{13}{12}}}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1+x-3x^2}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{\sqrt{13}}+C.$$

В задачах 8.234—8.248 найти интегралы.

.234. $\int\frac{x}{x^2+x-2}\,dx$. 8.235. $\int\frac{3x+1}{x^2-2x+2}\,dx$.

.236. $\int\frac{x+1}{x^2-5x+7}\,dx$. 8.237. $\int\frac{3x-5}{x^2+4x+4}\,dx$.

.238. $\int\frac{1-8x}{2x^2+x}\,dx$. 8.239. $\int\frac{3x+1}{x^2+3x-4}\,dx$.

.240. $\int\frac{4x+1}{x^2+5x+8}\,dx$. 8.241. $\int\frac{x^2}{x^2+5x+8}\,dx$.

.242. $\int\frac{(x-1)^2}{x^2-8x+17}\,dx$. 8.243. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$.

.244. $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^2+8x+7}}\,dx$. 8.245. $\int\frac{3x-2}{\sqrt{12-3x^2}}\,dx$.

.246. $\int\frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$. 8.247. $\int\frac{x+4}{\sqrt{-3+8x-4x^2}}\,dx$.

.248. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx$.

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

В задачах 8.249—8.275 найти интегралы.

.249. $\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$. 8.250. $\int\frac{dx}{2x^2-8x+15}$.

.251. $\int\frac{3^x}{4-9^x}\,dx$. 8.252. $\int xe^{8x}dx$. 8.253. $\int x^6e^{x^7}dx$.

.254. $\int\frac{\sin^2 2x}{\cos^6 2x}\,dx$. 8.255. $\int\frac{6-4x}{9+3x-x^2}\,dx$.

8.256. $\int \frac{\sin 5x\,dx}{1+\cos^2 5x}$.

8.257. $\int (x+2)\cos x\,dx$.

8.258. $\int \frac{x}{\sin^2 6x}\,dx$.

8.259. $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}\,dx$.

8.260. $\int \sin\,5x\cdot\cos 3x\,dx$.

8.261. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

8.262. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

8.263. $\int \frac{e^x dx}{\sin^2 e^x}$.

8.264. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{-3x^2+8x-4}}\,dx$.

8.265. $\int \arccos 2x\,dx$.

8.266. $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin^2 4x}\,dx$.

8.267. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$.

Указание. Освободиться от иррациональности в знаменателе.

8.268. $\int \frac{(2^x-3^x)^2}{6^x}\,dx$.

8.269. $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

Указание. Разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 x$.

8.270. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

8.271. $\int \sin^4 x\cdot\cos^4 x\,dx$.

8.272. $\int \operatorname{tg}^6 x\cdot\sec^4 x\,dx$.

8.273. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-4x+3}}\,dx$.

8.274. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Указание. Умножить числитель и знаменатель на $\sqrt{1-x}$.

8.275. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$.

ГЛАВА 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Определенным интегралом в пределах от a до b от функции (x), непрерывной на отрезке $[a, b]$, называется приращение любой е первообразной $F(x)$ при изменении аргумента x от значения $= a$ до значения $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Простейшие свойства определенного интеграла

1) *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного исла функций равен алгебраической сумме определенных интегралов т слагаемых функций:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

2) *Постоянный множитель можно выносить за знак опреде-енного интеграла:*

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

3) *При перестановке пределов интегрирования определенный нтеграл меняет знак на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4) *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

5) *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

9.1. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_0^2 4x^3dx;\quad 2)\ \int_0^1 (x-2e^x)\,dx;$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx;\quad 4)\ \int_1^e \sqrt[3]{x}\ln x\,dx.$$

Решение. 1) Найдем одну из первообразных $F(x)$ для функции $4x^3$. Так как

$$\int 4x^3dx = 4\cdot\frac{x^4}{4}+C = x^4+C,$$

то $F(x) = x^4$. По формуле (1) получаем

$$\int_1^2 4x^3dx = x^4\Big|_1^2 = 2^4-1^4 = 16-1 = 15.$$

2) По формуле (1) имеем

$$\int_0^1 (x-2e^x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-2e^x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}-2e\right)-(0-2e^0) =$$

$$= \frac{1}{2}-2e+2=\frac{5}{2}-2e.$$

3) Первообразную $F(x)$ для функции $\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ получим, вычислив неопределенный интеграл

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = 3\sqrt[3]{\sin x}+C.$$

Отсюда $F(x)=3\sqrt[3]{\sin x}$ и по формуле (1) имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx = 3\sqrt[3]{\sin x}\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=3\left(\sqrt[3]{\sin\frac{\pi}{2}}-\sqrt[3]{\sin 0}\right) = 3.$$

4) Для нахождения неопределенного интеграла $\int\sqrt[3]{x}\ln x\,dx$ применим формулу интегрирования по час-

тям. Полагая $u=\ln x$, $dv=\sqrt[3]{x}\,dx$, получим $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$. Отсюда

$$\int\sqrt[3]{x}\ln x\,dx=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\ln x-\int\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\ln x-\frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4}+C$$

и

$$\int_1^e\sqrt[3]{x}\ln x=\left[\frac{3}{4}\sqrt{x^4}\ln x-\frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4}\right]_1^e=$$

$$=\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{e^4}\ln e-\frac{9}{16}\sqrt{e^4}\right)-\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}\ln 1-\frac{9}{16}\sqrt[3]{1^4}\right)=$$

$$=\frac{3}{16}\sqrt[3]{e^4}+\frac{9}{16}=\frac{3\,(\sqrt[3]{e^4}+3)}{16}.$$

В задачах 9.2—9.36 вычислить определенные интегралы.

9.2. $\int_2^3 3x^2dx$. **9.3.** $\int_0^{36}\sqrt{x}\,dx$. **9.4.** $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{x^2}$. **9.5.** $\int_1^8\frac{7x\sqrt[3]{x}}{2}\,dx$.

9.6. $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{e}\frac{dx}{x}$. **9.7.** $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{2}{x^3}dx$. **9.8.** $\int_{-1}^{2}(3x^2+4x-1)\,dx$.

9.9. $\int_0^8\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1\right)dx$. **9.10.** $\int_1^4\left(2x-\frac{9}{2}\sqrt{x}-\frac{8}{x^2}\right)dx$.

9.11. $\int_1^{e^3}\frac{4\sqrt[3]{x^2}-12+9x}{3x}\,dx$. **9.12.** $\int_1^{e^2}\frac{1-2x\ln x}{x^2}\,dx$.

9.13. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$. **9.14.** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}$. **9.15.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1-4\sin^2x+4\sin^4x}$.

9.16. $\int\limits_{5}^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$. 9.17. $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$. 9.18. $\int\limits_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$.

9.19. $\int\limits_{1}^{3} 2^x (2^x+1)\,dx$. 9.20. $\int\limits_{0}^{3} (\cos x-5^x)\,dx$.

9.21. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{9-x^2}$. 9.22. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 9.23. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

9.24. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$. 9.25. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (4\operatorname{ctg} 2x-6\operatorname{tg} 2x)\,dx$.

9.26. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$. 9.27. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^2 x\,dx$. 9.28. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (e^{-x}-\operatorname{tg}^2 x)\,dx$.

9.29. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 9.30. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{x^6-4}\,dx$.

9.31. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\sin^2 x}$. 9.32. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin 5x\cos 7x\,dx$.

9.33. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\cos 7x\,dx$. 9.34. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 4x\,dx$.

9.35. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} xe^{3x}dx$. 9.36. $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

При вычислении определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* $x = \varphi(t)$ [или $t = \psi(x)$] мы приходим к определенному интегралу с новой переменной интегрирования t, причем старые пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределами $t_1 = \psi(a)$ и $t_2 = \psi(b)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1=\psi(a)}^{t_2=\psi(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле осуществляется по следующей формуле:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx. \qquad (2)$$

9.37. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$; 2) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_2^{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$.

Решение. 1) Так как

$$\cos x\,dx = d(\sin x),$$

то с помощью подстановки $t = \sin x$ рассматриваемый интеграл приводится к табличному. Вычислим новые пределы интегрирования: при $x_1 = 0$ получаем $t_1 = \sin 0 = 0$, при $x_2 = \frac{\pi}{2}$ имеем $t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2) Введем новую переменную $t = 1 + x^2$. Тогда

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,d\,t.$$

Вычислим пределы интегрирования по переменной t: $t_1 = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$ при $x_1 = \sqrt{3}$ и $t_2 = 1 + (\sqrt{8})^2 = 9$ при $x_2 = \sqrt{8}$. Отсюда

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_4^9 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^9 =$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{19}{3}.$$

3) Произведем замену переменной интегрирования п формуле $x = \frac{2}{\sin t}$. Тогда $dx = -\frac{2\cos t}{\sin^2 t}$ $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 t} - 4} = 2\operatorname{ctg} t$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x_1 = 2$ имеем $\sin t = \frac{2}{2} = 1$, откуд $t_1 = \frac{\pi}{2}$; при $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ имеем $\sin t = \frac{2\cdot 3}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $t_2 = \frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$\int_2^{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\operatorname{ctg} t\cdot\sin^2 t\cdot 2\cos t}{4\sin^2 t}\,dt =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)dt =$$

$$= \left[\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln 3 - 1).$$

В задачах 9.38—9.69 способом замены переменной вычислить интегралы.

9.38. $\int\limits_{-2}^{5} \sqrt[3]{5x+2}\,dx$. 9.39. $\int\limits_{-7}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$. 9.40. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{(1+2x)^2}$.

9.41. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^2}\,dx$. 9.42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0} \sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right) dx$.

9.43. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9+25x^2}$. 9.44. $\int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16-3x^2}}$.

9.45. $\int\limits_{0}^{1} (x^3-1)^2\, x^2\,dx$. 9.46. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

9.47. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2 dx}{1-4x^3}$. 9.48. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1+9^x}$.

9.49. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$. 9.50. $\int\limits_{-0,25}^{-0,5} \frac{4^x dx}{\sqrt{1-16^x}}$. 9.51. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2^x dx}{1-4^x}$.

9.52. $\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{8x\,dx}{\sin^2 x^2}$. 9.53. $\int\limits_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^3 dx}{(1-x^4)^2}$. 9.54. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{5x}\,dx$.

9.55. $\int\limits_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. 9.56. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{24}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) dx$.

$$9.57.\ \int_0^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x\, dx. \quad 9.58.\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx.$$

$$9.59.\ \int_{-\frac{\sqrt[4]{\pi}}{2}}^{0} x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 8x^4\right) dx. \quad 9.60.\ \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{\pi}{4} - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

$$9.61.\ \int_{25}^{196} \frac{dx}{x - 4\sqrt{x}}.$$

Указание. Сделать подстановку $x = t^2$.

$$9.62.\ \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx. \quad 9.63.\ \int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}. \quad 9.64.\ \int_{15}^{99} \frac{dx}{3 - \sqrt{x+1}}.$$

$$9.65.\ \int_{-27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - 2}. \quad 9.66.\ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx. \quad 9.67.\ \int_0^2 \sqrt{(4-x^2)^3}\, dx.$$

$$9.68.\ \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}. \quad 9.69.\ \int_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$$

9.70. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы: 1) $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$, 2) $\int_1^{e} \sqrt[4]{x} \ln x\, dx$.

Решение. 1) Полагая $u = x$, $dv = \sin x\, dx$, получим $du = dx$, $v = -\cos x$. Тогда по формуле (2) имеем

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = x \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\, dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

2) Пусть $u = \ln x$, $\sqrt[4]{x}\, dx = dv$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$,

$v = \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5}$. По формуле (2) получаем

$$\int_1^e \sqrt[4]{x}\ln x\,dx = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt[4]{e^5} - \frac{4}{5}\int_1^e \sqrt[4]{x}\,dx = \frac{4}{5}\sqrt[4]{e^5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt[4]{e^5} - \frac{16}{25}\left(\sqrt[4]{e^5} - 1\right) = \frac{4\sqrt[4]{e^5} + 16}{25} =$$

$$= \frac{4\left(\sqrt[4]{e^5} + 4\right)}{25}.$$

В задачах 9.71—9.82, применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы.

9.71. $\int_0^5 xe^x dx.$ **9.72.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx.$

9.73. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}\,dx.$ **9.74.** $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2\ln x\,dx.$

9.75. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$ **9.76.** $\int_1^{e^2} \ln^2 x\,dx.$ **9.77.** $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x\,dx.$

9.78. $\int_{-1}^0 \arccos x\,dx.$ **9.79.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6x}{\sin^2 x}\,dx.$

9.80. $\int_0^2 \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)dx.$ **9.81.** $\int_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x\,dx.$

9.82. $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx.$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

В задачах 9.83—9.100 вычислить интегралы.

9.83. $\int\limits_{9}^{16} \frac{3^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}\,dx$. 9.84. $\int\limits_{0}^{\pi} (\pi-x)\sin x\,dx$.

9.85. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^4 x\,dx$. 9.86. $\int\limits_{-5}^{-1} \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

9.87. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. 9.88. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x-1}{x^2-4x+5}\,dx$.

9.89. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$. 9.90. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x\,dx$.

9.91. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 7x\cos 3x\,dx$. 9.92. $\int\limits_{2}^{3} (3-x)e^x\,dx$.

9.93. $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{17x+8}}$. 9.94. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

9.95. $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$. 9.96. $\int\limits_{1}^{9} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+3}$. 9.97. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

9.98. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$. 9.99. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Указание. Применить подстановку $e^x-1=t^2$.

9.100. $\int\limits_{-2}^{2} (1-x)\sin \pi x\,dx$.

ГЛАВА 10

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Площадь S *криволинейной трапеции*, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a < x < b$, вычисляется по одной из следующих формул:

$$S=\int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$;

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (2)$$

если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a, b]$;

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad (3)$$

если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a, b]$.

Площадь S *фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми* $y=f_1(x)$ *и* $y=f_2(x)$ *и двумя прямыми* $x=a$ *и* $x=b$, где $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \qquad (4)$$

10.1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=3x^2$, прямыми $x=2$, $x=4$ и осью абсцисс.

Решение. Воспользовавшись формулой (1), имеем:

$$S=\int_2^4 3x^2\,dx=3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=64-8=56.$$

10.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x+2y-8=0$, $y=1$, $y=3$ и осью ординат (рис. 35).

Решение. Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой (1), учитывая, что здесь изменены роли осей координат:

$$S=\int_1^3 f(y)dy=\int_1^3 (8-2y)\,dy=\left[8y-y^2\right]_1^3=15-7=8.$$

10.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $y=\frac{1}{x}$, прямыми $x=-3$, $x=-1$ и осью абсцисс.

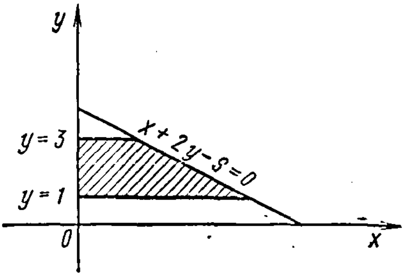


Рис. 35

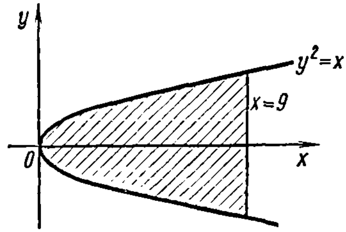


Рис. 36

Решение. На отрезке $[-3, -1]$ функция $f(x)=\frac{1}{x}$ отрицательна. Поэтому для вычисления площади рассматриваемой фигуры воспользуемся формулой (2):

$$S=-\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}\,dx=-\ln|x|\,\Big|_{-3}^{-1}=-(\ln 1-\ln 3)=\ln 3.$$

10.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=x$ и прямой $x=9$ (рис. 36).

Решение. Данная фигура состоит из двух симметричных относительно оси абсцисс криволинейных трапеций, поэтому площадь можно вычислить по формуле (1):

$$S=2\int_0^9\sqrt{x}\,dx=2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\Big|_0^9=\frac{4}{3}\cdot 27=36.$$

10.5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2-2x+3$ и прямыми $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Решение. Так как на отрезке [0, 2] функция $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ меняет знак, а именно $f(x) \geqslant 0$ на отрезке [0, 1] и $f(x) \leqslant 0$ на отрезке [1, 2], то искомую площадь следует вычислять по формуле (3):

$$S = \int_0^2 |-x^2 - 2x + 3|dx = \int_0^1 |-x^2-2x+3|\,dx +$$

$$+ \int_1^2 |-x^2-2x+3|\,dx = \int_0^1 (-x^2-2x+3)\,dx -$$

$$- \int_1^2 (-x^2-2x+3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^1 -$$

$$-\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_1^2 = \frac{5}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 4.$$

10.6. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 7x$, $x = 3$, $x = 5$ и осью абсцисс.

10.7. Найти площадь фигуры, заключенной между осями координат и прямыми $y = x + 3$ и $x = 2$.

10.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{4}x^2$, прямыми $x = -2$, $x = 6$ и осью абсцисс.

10.9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = e^{-2x}$, прямыми $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ и осью абсцисс.

10.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = \sqrt{y}$, прямыми $y = 1$, $y = 4$ и осью ординат.

10.11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$, прямыми $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{3}$ и осью ординат.

10.12. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y = \operatorname{arctg} x$, прямыми $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \sqrt{3}$ и осью абсцисс.

10.13. Найти площадь, ограниченную цепной линией $= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью абсцисс.

10.14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кружностью $x^2 + y^2 = 36$ и прямыми $x = 3$ и $x = 3\sqrt{3}$.

10.15. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностью $x^2+y^2=25$ и прямыми $2y-5=0$ и $2y-5\sqrt{2}=0$.

10.16. Найти площадь фигуры, заключенной между эллипсом $4x^2+9y^2=36$, осью ординат и прямой $2x-3\sqrt{3}=0$.

10.17. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $16x^2+25y^2=400$ и прямыми $y=2$ и $y=2\sqrt{2}$.

10.18. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y=9-x^2$ и осью абсцисс.

10.19. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y=x^2+6x$ и осью абсцисс.

10.20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=x+4$ и осью ординат.

10.21. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=e^x-1$, прямой $x=2$ и осью абсцисс.

10.22. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln(x+1)$, прямой $y=2$ и осью ординат. Объяснить совпадение ответов в этой и предыдущей задачах.

10.23. Найти площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y=16x^3$, прямой $y=2$ и осью ординат.

10.24. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$ и осью абсцисс от $x=-\frac{2\pi}{3}$ до $x=-\frac{\pi}{2}$.

10.25. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x$, прямыми $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{3\pi}{4}$ и осью абсцисс.

10.26. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y=\operatorname{ctg} x$, прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$ и осью абсцисс.

10.27. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\arcsin x$, прямыми $y=-\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{4}$ и осью ординат.

10.28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$, прямыми $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ и осью абсцисс.

10.29. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+6x$, прямыми $x=-1$, $x=3$ и осью абсцисс.

10.30. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4x+3$, осями координат и прямой $x=4$.

10.31. Найти площадь, заключенную между линиями $y = 5 - x^2$ и $y = x - 1$ (рис. 37).

Решение. Решая совместно уравнения, определяющие данные линии, получим: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Следовательно, площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5 - x^2$ и $y = x - 1$, находится по формуле (4):

$$S = \int_{-3}^{2} [(5-x^2)-(x-1)]\,dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx =$$

$$= \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6}.$$

10.32. Найти площадь фигуры, заключенной между прямыми $y = 2x$, $y = 5x$, $x = 2$ и $x = 6$.

10.33. Найти площадь фигуры, образованной прямыми $y = x + 1$, $y = 2x - 3$ и осью ординат.

10.34. Вычислить площадь фигуры, заключенной между прямыми $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$, $x = -1$ и $x = 2$.

10.35. Найти площадь части гиперболы $y = \frac{3}{x}$, отсекаемой от нее прямой $x + y - 4 = 0$.

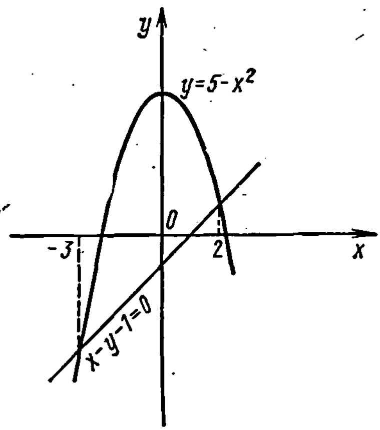


Рис. 37

10.36. Вычислить площадь фигуры, образованной прямыми $x = -3$, $y = 3$ и ветвью гиперболы $y = -\frac{1}{x}$.

10.37. Найти площадь фигуры, образованной параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой $4x - 2y + 5 = 0$.

10.38. Найти площадь фигуры, отсекаемой от параболы $y = 3x - x^2$ прямой $5x - y - 8 = 0$.

10.39. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 16x$ и прямой $y = x$.

10.40. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

10.41. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = -x^2 + 8x$ и $y = x^2 + 18x - 12$.

10.42. Вычислить площадь фигуры, образованной кривыми $y = 2^x$, $y = -x^2$ и прямыми $x = -3$, $x = 3$.

10.43. Найти площадь фигуры, отсекаемой от кубической параболы $y = -4x^3$ биссектрисой II и IV координатных углов.

10.44. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = 2x^3$ и $y = 6x^2$.

10.45. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (рис. 38).

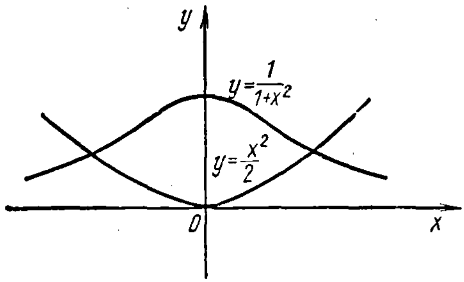


Рис. 38

10.46. Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой $x + y - 4 = 0$ от круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 16$. Результат проверить непосредственным вычислением.

10.47. Найти площадь фигуры, лежащей в I четверти и ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 36$, прямой $x\sqrt{3} - 3y = 0$ и осью абсцисс.

10.48. Найти площади каждой из двух фигур, на которые прямая $4x + 5y - 20 = 0$ делит область, ограниченную эллипсом $16x^2 + 25y^2 = 400$.

10.49. Найти площадь части плоскости, ограниченной дугами эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ и двумя прямыми $2x + 3y + 6 = 0$ и $2x + 3y - 6 = 0$.

10.50. Найти площадь фигуры, лежащей в I четверти и ограниченной эллипсом $9x^2 + 16y^2 = 144$, прямой $3\sqrt{3}x - 4y = 0$ и осью ординат.

10.51. Найти площади фигур, на которые парабола $y = x^2$ делит круг, уравнение граничной окружности которого $x^2 + y^2 = 2$.

10.52. Вычислить площади фигур, на которые парабола $y^2 = 2x$ делит круг, граничная окружность которого $x^2 + y^2 = 8$.

§ 2. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \qquad (1)$$

Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси Oy* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, находится по формуле

$$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy. \qquad (2)$$

10.53. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leqslant x \leqslant \pi$ оси абсцисс.

Решение. Применяя формулу (1), имеем

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

10.54. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной ветвью параболы $x = \sqrt{y}$ и отрезком $1 \leqslant y \leqslant 4$ оси ординат.

Решение. По формуле (2) имеем

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{\pi}{2}(16-1) = \frac{15}{2}\pi.$$

10.55. Вычислить объем тела, полученного от вращения параболы $y = 3x^2$ вокруг оси Ox в пределах от $x = 0$ до $x = 2$.

10.56. Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox трапеции, образованной прямыми $y = \frac{1}{2}x$, $x = 4$, $x = 6$ и осью абсцисс.

10.57. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy трапеции, образованной прямыми $y = 3x$, $y = 2$, $y = 4$ и осью ординат.

10.58. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$ и отрезком $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ оси абсцисс.

10.59. Криволинейная трапеция, ограниченная гиперболой $y = \frac{4}{x}$ и прямыми $x = 3$ и $x = 12$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

10.60. Найти объем тела, полученного от вращения кривой $y = \frac{1}{4}x^2$ вокруг оси Oy в пределах от $y = 1$ до $y = 5$.

10.61. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy кубической параболы $y = x^3$ в пределах от $y = 1$ до $y = 8$.

10.62. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, которая ограничена дугой окружности $x^2 + y^2 = 16$, лежащей в I четверти, и прямыми $x = 1$ и $x = 3$.

10.63. Найти объем тела, образованного вращением эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ вокруг его малой оси.

10.64. Фигура, ограниченная дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс и проходящими через фокусы эллипса, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

10.65. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и прямой $x = 3$.

10.66. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $x = y^2$.

Решение. Решая совместно уравнения $y = x^2$ и $x = y^2$, получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Искомый объем находим как разность объемов, полученных в результате вращения вокруг оси Ox криволинейных трапеций, одна из которых ограничена осью Ox, прямой $x = 1$ и параболой $y = x^2$, а другая — осью Ox, прямой $x = 1$ и параболой $y = \sqrt{x}$. Имеем

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi.$$

10.67. Фигура, образованная в результате пересечения параболы $y^2 = 4x$ и прямой $y = x$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

10.68. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 9x$ и прямой $y = -x$.

10.69. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox сегмента, отсекаемого прямой $x + y - 2 = 0$ от круга, граничная окружность которого $x^2 + y^2 = 4$.

10.70. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox общей части парабол $y = 2x^2$ и $y = x^3$.

10.71. Фигура, ограниченная кривыми $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и прямой $x = \frac{\pi}{6}$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

10.72. Найти объем тела, образованного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = 2^x$, $y = 4^x$ и прямой $x = 1$.

10.73. Фигура, лежащая в I четверти и ограниченная дугой окружности $x^2 + y^2 = 18$, параболой $y = \frac{x^2}{3}$ и осью ординат, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

10.74. Фигура, лежащая в I четверти и ограниченная кривыми $x^2 - y^2 = 3$, $xy = 2$ и прямой $x = 3$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

10.75. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной гиперболой $x^2 - y^2 = 1$, прямой $y = 2\sqrt{2}$ и осью абсцисс.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 10.65.

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Схема применения определенного интеграла для вычисления некоторой величины u такова. Сначала нужно выразить некоторую переменную часть величины u в виде функции $u(x)$ одного из ее параметров, который изменяется в известном из условия задачи интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Затем следует рассмотреть приращение Δu величины $u(x)$, отвечающее изменению x на малую величину Δx, и постараться найти для Δu приближенное выражение вида $f(x)\Delta x$ так, чтобы оно отличалось от Δu лишь на бесконечно малую высшего порядка, чем Δx:

$$\Delta u \approx f(x)\Delta x,$$

т. е. найти дифференциал функции $f(x)$:

$$du = f(x)dx.$$

При этом следует пользоваться всеми возможными допущениями, которые в итоге сводятся к отбрасыванию бесконечно малых величин высших порядков. Искомая величина u определяется интегрированием du в пределах от $x = a$ до $x = b$:

$$u = \int_a^b f(x)\,dx.$$

10.76. Материальная точка под действием силы F перемещается вдоль оси Ox. Вычислить работу, произведенную этой силой на отрезке от $x = a$ до $x = b$.

Решение. Работа A, произведенная силой F в процессе движения, находится в функциональной зависимости от пройденного пути s: $A = A(s)$. Если точка проходит бесконечно малый интервал пути ds, то сила на протяжении этого пути остается практически постоянной. Тогда работа на участке ds выразится формулой

$$dA = F(s)ds.$$

Интегрируя, получим

$$A = \int_a^b F(s)ds.$$

10.77. Скорость точки равна $v = (3t^2 - 2t)$ м/с. Найти путь s, пройденный точкой за время $t = 4$ с, протекшее от начала движения.

Решение. Найдем путь ds, пройденный точкой за бесконечно малый промежуток времени dt. Так как в течение этого времени скорость можно считать постоянной, то

$$ds = v(t)dt.$$

Интегрируя, имеем

$$s = \int_0^4 v(t)\,dt = \int_0^4 (3t^2-2t)\,dt = \left[\,t^3-t\,\right]_0^4 = 64-4=60\text{ м}.$$

10.78. Найти силу давления жидкости на вертикальную треугольную пластинку с основанием a и высотой h, погруженную в жидкость так, что ее вершина лежит на поверхности.

Р е ш е н и е. Систему координат расположим так, как показано на рис. 39. Рассмотрим горизонтальную беско-

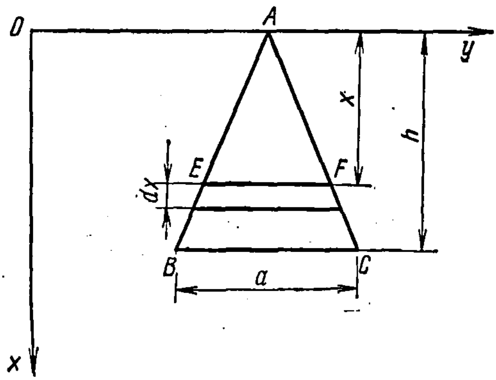


Рис. 39

нечно малую полоску толщины dx, находящуюся на произвольной глубине x. Принимая эту полоску за прямоугольник, найдем ее основание EF. Из подобия треугольников ABC и AEF получаем

$$\frac{a}{EF} = \frac{h}{x}.$$

сюда $EF = \frac{ax}{h}$. Тогда площадь полоски равна

$$dS = \frac{ax}{h}dx.$$

ак как сила P давления жидкости на площадку S, глуина погружения которой r, по закону Паскаля равна

$P=\rho grS$ (ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести), то искомая сила давления на рассматриваемую площадку dS вычисляется по формуле

$$dP=\rho gx\cdot\frac{ax}{h}\,dx=\rho g\frac{ax^2}{h}\,dx.$$

Следовательно, сила давления P жидкости на площадку ABC

$$P=\int_0^h\rho g\frac{ax^2}{h}\,dx=\rho g\frac{a}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\rho gah^2.$$

10.79. Скорость тела выражается формулой $v=\sqrt{2t+3}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые три секунды после начала движения.

10.80. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=29{,}4$ м/с, без учета сопротивления воздуха, определяется формулой $v=v_0-gt$, где $g=9{,}8$ м/с^2 — ускорение силы тяжести, t — время. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через $t=5$ с?

10.81. Автомобиль, двигающийся со скоростью 48 км/ч, начинает тормозить и останавливается через 3 с. Найти путь, пройденный автомобилем до полной остановки.

Указание. Скорость равнозамедленного движения выражается формулой $v=v_0-at$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время. Ускорение движения a находится из условия: $v=0$ при $t=3$ с.

10.82. С высоты 294 м вертикально вниз брошено тело с начальной скоростью 19,6 м/с. Через сколько секунд тело упадет на землю?

Указание. Скорость равноускоренного движения выражается формулой $v=v_0+at$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время. Здесь $a=9{,}8$ м/с^2.

10.83. Вычислить работу, производимую при растяжении пружины на 3 см, если известно, что сила, которая требуется для растяжения пружины, пропорциональна удлинению x пружины и что для удлинения пружины на 1 см требуется сила в 1 Н.

10.84. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из цилиндрического котла, радиус основания которого R, а высота H.

Указание. Работа, необходимая для выкачивания из котла бесконечно малого слоя воды, находящегося на глубине x и имеющего толщину dx, равна произведению объема этого слоя на глубину его погружения: $dA = \pi\rho g R^2 x dx$.

10.85. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из конической воронки, обращенной вершиной вниз, если ее высота равна 10 м, а радиус основания 8 м.

10.86. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара, радиус которого равен 1 м.

10.87. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полуцилиндра, радиус основания которого равен R, а высота H.

10.88. Вычислить силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых 25 м, а глубина 18 м, если их верхняя грань лежит на свободной поверхности воды.

10.89. Найти силу давления воды на вертикальный треугольный щит с основанием a и высотой h, погруженный в воду так, что его основание лежит на свободной поверхности воды.

10.90. Вычислить силу давления на плоскость полукруга, погруженного в воду вертикально, если его радиус равен 3 см, а диаметр лежит на свободной поверхности воды.

10.91. Вертикальная плотина имеет форму трапеции, верхнее и нижнее основание которой соответственно равны 80 и 50 м, а высота — 25 м. Вычислить силу давления на всю плотину.

ГЛАВА 11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется *дифференциальным уравнением*.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Например, уравнение $y'\sin x + y \operatorname{tg} x = 1$ — первого порядка; $\frac{d^2y}{dx^2} = x^3$ — второго порядка; $y''' - 5xy' + xy = 0$ — третьего порядка.

Функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется *решением* этого уравнения. График решения называется *интегральной кривой* уравнения.

Если функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, задана неявно, т. е. соотношением вида $\psi(x, y) = 0$, то говорят об *интеграле* уравнения.

Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется *общим решением* этого уравнения. Так, для уравнения первого порядка общее решение имеет вид

$$y = \varphi(x, C),$$

а для уравнения второго порядка — вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются *частными решениями* этого уравнения.

Геометрически общее решение определяет *семейство кривых*, а частное решение — некоторую кривую этого семейства.

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения задаются *начальные условия*. Для уравнения первого порядка они имеют вид $y(x_0) = y_0$; для уравнения второго порядка — вид $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. По этим начальным условиям определяются значения произвольных постоянных в общем решении уравнения, в результате чего получаются частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

11.1. Проверить, что функция $y = \cos x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$.

Решение. Имеем

$$y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x.$$

одставляя выражения для y'' и y в данное уравнение, олучаем

$$y''+y=-\cos x+\cos x=0,$$

. е., действительно, функция $y=\cos x$ является решением анного дифференциального уравнения.

11.2. Показать, что функция y, определяемая уравнением $x^2-y^2=4$, является интегралом дифференциального уравнения $y'=\frac{x}{y}$.

Решение. Продифференцировав обе части равенства о переменной x, получим

$$2x-2yy'=0,$$

ткуда $y'=\frac{x}{y}$.

11.3. Доказать, что функция $y=\frac{1}{1-x}$ является решением дифференциального уравнения $xy'+y=y^2$.

11.4. Дано уравнение

$$e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1.$$

оказать, что функция $s(t)$, определяемая уравнением $t=3(1-e^{-s})$, является интегралом данного дифференнального уравнения.

11.5. Выяснить, являются ли решениями дифференнального уравнения $x^2y''=2y$ следующие функции:

) $y=e^{x^2}$; 2) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sin 2x$; 4) $y=-\frac{3}{x}$.

11.6. Выяснить, являются ли решениями дифференнального уравнения $y''+4y'+4y=0$ следующие функии: 1) $y=x^2-1$; 2) $y=5e^{-2x}$; 3) $y=-3xe^{-2x}$; 4) $y=e^{-2x}(x+1)$.

11.7. Общее решение дифференциального уравнения $'-3y=0$ имеет вид $y=Ce^{3x}$. Найти его частное решеие, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=e^3$.

Решение. Значение произвольной постоянной C, оответствующее искомому частному решению, получает в результате подстановки в выражение общего решения аданных начальных условий:

$$e^3=C\cdot e^3,$$

откуда $C = 1$. Подставляя полученное значение $C = 1$ общее решение, найдем частное решение $y = e^{3x}$, удов летворяющее заданным начальным условиям.

11.8. Общее решение дифференциального уравнени $s\,dt + \mathrm{ctg}\,t\,ds = 0$ имеет вид $s = C\cos t$. Найти част ное решение, удовлетворяющее начальным условиям $s\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

11.9. Зная общее решение $y = x^2 + C$ дифференциаль ного уравнения $y' = 2x$, найти и построить его интеграль ные кривые, проходящие через точки $A(0;\ 0)$, $B(-1;\ 2)$ $C(2;\ 1)$.

11.10. Для уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ функция $y = \frac{C}{x}$ является общим решением. Из семейства интегральны кривых этого уравнения выделить кривые, проходящи через точки: $A\ (-1;\ 1)$, $B\ (2;\ 1)$, $(-3;\ 6)$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменным имеет вид

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0.$$

Решается оно следующим образом. Поделив все члены уравнени на $N_1(y)\,M_2(x)$, получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,d = 0,$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения н ходится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C.$$

11.11. Найти общий интеграл уравнения

$$\cos^2 y\,\mathrm{ctg}\,x\,dx + \sin^2 x\,\mathrm{tg}\,y\,dy = 0.$$

Решение. Разделим переменные в данном уравн нии, поделив обе его части на выражение $\cos^2 y\,\sin^2$

$$\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}\,dx + \frac{\mathrm{tg}\,y}{\cos^2 y}\,dy = 0.$$

Интегрируя обе части данного уравнения, получим

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}\, dx + \int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y}\, dy = C,$$

откуда

$$\frac{-\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{2} = C.$$

Воспользуемся тем, что C — произвольная постоянная и заменим C на $\frac{C}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{ctg}^2 x = C.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

В задачах **11.12—11.24** найти общий интеграл (решение) уравнения.

11.12. $\sqrt{y}\, dx + x^2 dy = 0.$

11.13. $(1 - y)\, dx + (x + 1)\, dy = 0.$

11.14. $\cos^2 y\, dx - (x^2 + 1)\, dy = 0.$

11.15. $x\sqrt{1 - y^2}\, dx + \sqrt{1 - x^2}\, dy = 0.$

11.16. $\sin u \sin v\, du + \cos u \cos v\, dv = 0.$

11.17. $e^x dx + e^y (1 - e^x)\, dy = 0.$

11.18. $(xy^2 - y^2)\, dx + (x^2 y + x^2)\, dy = 0.$

11.19. $x(y^2 + 1)\, dx - ye^{x^2} dy = 0.$

11.20. $3^{x-y} dx - 4^{x+y} dy = 0.$

11.21. $(xy + x)\, dx - (y + x^2 y)\, dy = 0.$

11.22. $xy' = \operatorname{tg} y.$

11.23. $2xyy' = y^2 - 1.$

11.24. $y' = e^{2x-4y}.$

11.25. Найти частный интеграл уравнения

$$y' \sin^2 x \ln y + y = 0,$$

удовлетворяющий начальным условиям $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Р е ш е н и е. Найдем общий интеграл данного уравнения. Для этого разделим переменные:

$$\sin^2 x \ln y\, dy + y\, dx = 0,$$

или

$$\frac{\ln y}{y}\, dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \operatorname{ctg} x + C.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения. Используя начальные условия $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, подставляем в выражение общего интеграла заданные значения переменных $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$ — тем самым определяем значение произвольной постоянной C:

$$\frac{\ln^2 1}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + C,$$

откуда $C = -1$. Итак, искомый частный интеграл

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \operatorname{ctg} x - 1.$$

В задачах 11.26—11.31 найти частный интеграл (решение) уравнения, удовлетворяющий указанным начальным условиям.

11.26. $2\sqrt{y}\, dx - dy = 0$; $y(0) = 1$.

11.27. $(1 + x^3) y' = 3x^2 y$; $y(0) = 2$.

11.28. $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

11.29. $2y'y\sqrt{1 - x^2} - e^{y^2} = 0$; $y(0) = 0$.

11.30. $y' e^x = x$; $y(0) = -1$.

11.31. $y' + y \sin 2x = 0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

§ 3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении *геометрических задач* на составление дифференциальных уравнений надо прежде всего построить чертеж, затем обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ и выразить все входящие в задачу величины через x, y и y'. При этом обычно используется геометрический смысл производной [y' есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$]. Затем, используя указанную в условии зависимость между этими величинами, получить дифференциальное уравнение $f(x, y, y') = 0$, из которого находится искомая функция $y(x)$.

При решении *физических задач*, исходя из их условия, составляется соотношение между дифференциалами переменных величин. При этом делается ряд допущений, упрощающих задачу, но не отражающихся на результатах. Например, бесконечно малые приращения величин заменяются их дифференциалами; предполагается, что всякий физический процесс, рассматриваемый в течение бесконечно малого промежутка времени dt, протекает с постоянной скоростью, и т. д.

В некоторых случаях можно составить дифференциальное уравнение более простым путем, используя физический смысл производной (скорость протекания неравномерного процесса).

11.32. Найти уравнение семейства кривых, зная, что угловой коэффициент касательной в каждой точке любой кривой этого семейства равен отношению ординаты этой точки к ее абсциссе, взятому с противоположным знаком.

Решение. Обозначим кривую искомого семейства через $y = y(x)$. Угловой коэффициент касательной к этой кривой в каждой ее точке равен $y'(x)$. С другой стороны, согласно условию задачи, он равен $-\frac{y}{x}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение искомого семейства:

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y},$$

откуда

$$\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|,$$

или $xy = C$. Таким образом, указанным свойством обладает семейство гипербол, имеющих своими асимптотами оси координат.

11.33. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

Указание. Положить $y' = \frac{k}{x}$.

11.34. Кривая проходит через точку $\left(2; \frac{1}{2}\right)$. В произвольной точке этой кривой проведена касательная, точка пересечения которой с осью Ox имеет абсциссу, вдвое большую, чем абсцисса точки касания. Найти кривую.

11.35. В резервуар, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Этот раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из резервуара с той же скоростью. Сколько соли будет содержать резервуар через 5 мин?

Решение. Пусть количество соли, находящейся в резервуаре через t мин, есть $x(t)$ кг. Определим, на сколько изменится количество соли в резервуаре за бесконечн малый промежуток времени dt от момента t до момент $t + dt$. За время dt мин в резервуар поступает $2\,dt$ л раствора, в котором содержится $0{,}3 \cdot 2\,dt = 0{,}6\,dt$ кг соли. З этот же промежуток времени из резервуара вытекает $2\,dt$ л раствора. Считая концентрацию рассола в течение этог промежутка неизменной и равной $\frac{x}{10}$ кг/л — концентрации раствора в момент времени t, получим, что в вытекши $2\,dt$ л раствора содержится $2\,dt \cdot \frac{x}{10} = 0{,}2x\,dt$ кг соли. Таким образом, изменение dx количества соли в резервуар за время dt равно разности найденных величин, т. е.

$$dx = 0{,}6\,dt - 0{,}2\,x\,dt,$$

или

$$dx = (0{,}6 - 0{,}2\,x)dt.$$

Итак, нами получено дифференциальное уравнение, связывающее x и t. Решая его, имеем

$$\frac{dx}{0{,}6 - 0{,}2\,x} = dt.$$

откуда

$$-5 \ln |0{,}6 - 0{,}2\,x| = t - 5 \ln 0{,}2\,C.$$

(Здесь для удобства дальнейших преобразований в кач стве произвольной постоянной выбрано выражени $-5 \ln 0{,}2\,C$.) Отсюда

$$x = 3 - Ce^{-0{,}2t}.$$

Произвольную постоянную C находим из начальных условий. В начальный момент времени $t = 0$ соли в резервуаре не было, т. е. $x(0) = 0$. Следовательно, получаем уравнение относительно C:

$$0 = 3 - C,$$

т. е. $C = 3$. Таким образом, закон изменения содержания соли в сосуде имеет вид

$$x(t) = 3 - 3e^{-0,2t}.$$

Через $t = 5$ мин в сосуде будет содержаться

$$x(5) = 3 - 3e^{-0,2\cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ кг соли.}$$

11.36. Скорость распада радия пропорциональна его имеющемуся количеству R. Найти закон распада радия, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количества. Какой процент радия окажется распавшимся через 100 лет?

Решение. Пусть R — количество радия в момент времени t, а R_0 — его первоначальное количество. Тогда скорость распада радия равна $\frac{dR}{dt}$ и является отрицательной величиной, так как R с возрастанием t убывает. Согласно условию задачи имеем: $\frac{dR}{dt} = -kR$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, подлежащий определению. Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dR}{R} = -k\,dt, \quad \ln R = -kt + \ln C,$$

откуда

$$R = Ce^{-kt}.$$

Осталось найти C и k. Для определения произвольной постоянной C воспользуемся начальными условиями: $R = R_0$ в начальный момент времени $t = 0$; отсюда $R_0 = C$.

Итак, закон распада радия имеет вид

$$R = R_0 e^{-kt}.$$

Для нахождения k воспользуемся следующим условием: $R = \frac{1}{2} R_0$ при $t = 1600$:

$$\frac{1}{2} R_0 = R_0 e^{-1600k},$$

откуда

$$e^{-1600k}=\frac{1}{2};\quad k=\frac{\ln\frac{1}{2}}{-1600}=\frac{\ln 2}{1600}=0{,}00043.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$R=R_0e^{-0{,}00043t}.$$

При $t=100$ имеем:

$$R(100)=R_0e^{-0{,}043};\quad \frac{R(100)}{R_0}=e^{-0{,}043}=0{,}958=95{,}8\%.$$

Следовательно, через 100 лет распадется 4,2% первоначального запаса радия.

11.37. Тело за 10 мин охлаждается от 100 до 60°. Температура окружающего воздуха равна 20°. Считая скорость остывания тела пропорциональной разности температур тела и окружающего его воздуха, определить, за какое время тело остынет до 30°.

Указание. Пусть T — температура тела в момент времени t. Тогда дифференциальный закон охлаждения тела имеет вид

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20).$$

11.38. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 1,5 м/с. Через 4 с после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 1 м/с. Считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки, найти ее скорость через 50 с после остановки мотора.

Указание. Пусть v — скорость лодки после выключения мотора в момент времени t. Тогда зависимость между v и t имеет вид $m\cdot\frac{dv}{dt}=-kv$, где m — масса лодки.

11.39. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 2 м поглощается $\frac{1}{3}$ первоначального светового потока. Определить, какой процент первоначального светового потока дойдет до глубины 4 м.

Указание. Пусть Q — световой поток, падающий на поверхность на глубине h. Тогда $dQ=-kQdh$.

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

называется *однородным* уравнением.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$, где u — новая искомая функция. Дифференцируя равенство $y = ux$, получим

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u. \tag{2}$$

Подставив выражения y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), имеем

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$

откуда

$$\frac{du}{f(u) - u} - \frac{dx}{x} = 0. \tag{3}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдя общее решение (интеграл) уравнения (3), получаем общее решение (интеграл) данного уравнения (1), заменив u на y/x.

11.40. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx}$:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим

$$y' = \frac{1 + (y/x)^2}{y/x}, \tag{*}$$

т. е. y' есть функция отношения y/x. Это означает, что данное уравнение — однородное.

Для решения этого уравнения введем новую функцию $u = y/x$. Тогда $y = ux$ и $y' = \frac{du}{dx}x + u$. Уравнение (*)

преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u^2}{u},$$

или

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}.$$

откуда

$$\frac{dx}{x}=udu.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln|x|=\frac{u^2}{2}+\ln C,$$

откуда

$$\ln\frac{x}{C}=\frac{u^2}{2}$$

т. е.

$$x=Ce^{\frac{u^2}{2}}.$$

Заменяя в последнем равенстве u отношением y/x, окончательно получим

$$x=Ce^{y^2/(2x^2)}.$$

В задачах **11.41—11.50** найти общий интеграл (решение) уравнения.

11.41. $y'=1+\frac{y}{x}$. **11.42.** $xy'=3y-x$.

11.43. $(x-y)dx+xdy=0$. **11.44.** $y^2dx-(x^2+xy)dy=0$.

11.45. $(x^2-xy+y^2)dx-x^2dy=0$.

11.46. $y-xy'=\sqrt{x^2-y^2}$. **11.47.** $xy'=y+xe^{y/x}$.

11.48. $xy'-y=y(\ln y-\ln x)$. **11.49.** $xy'-x\cos^2\frac{y}{x}=y$.

11.50. $(x+2y)dx-(2x+y)dy=0$.

В задачах **11.51—11.55** найти частный интеграл (решение) уравнения, удовлетворяющий заданным начальным условиям.

11.51. $xy'=y+x\operatorname{cosec}\frac{y}{x}$; $y(1)=\frac{\pi}{2}$.

11.52. $(y + 2\sqrt{xy})\,dx - x\,dy = 0;\ \ y(e) = e.$

11.53. $x\,dy - y\,dx = x\sin^2\frac{y}{x}\,dx;\ \ y(1) = \frac{\pi}{6}.$

11.54. $y^2 + x^2y' = 0;\ \ y(1) = 1.$

11.55. $(x + 3y)\,dx - (3x - y)\,dy = 0;\ \ y(1) = 0.$

11.56. Найти кривую, проходящую через точку (1; —1), если известно, что произведение абсциссы любой точки кривой на угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке равен утроенной сумме координат данной точки.

11.57. Составить уравнение кривой, проходящей через очку (1; 0), для которой отрезок на оси ординат отсекаеюй любой касательной, равен абсциссе точки касания.

11.58. Найти кривую, проходящую через точку (2; 1), зная, что угловой коэффициент касательной в каждой очке равен квадрату углового коэффициента радиуса-векора точки касания.

11.59. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 1), если отрезок, отсекаемый касательной к этой кривой а оси ординат, равен расстоянию точки касания до начала оординат.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = Q(x) \tag{1}$$

азывается *линейным* уравнением.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяюимися переменными заменой искомой функции y произведением вух вспомогательных функций u и v, т. е. $y = uv$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

уравнение (1) принимает вид

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + P(x)\,v\right] = Q(x). \tag{2}$$

ользуясь тем, что одно из вспомогательных переменных, наприер v, выбрано произвольно, подберем его так, чтобы выражение квадратных скобках обратилось в нуль, т. е. в качестве v возьмем одно из частных решений $v = v(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Подставив выражение $v = v(x)$ в уравнение (2), получим уравнение относительно функции u:

$$v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Это также уравнение с разделяющимися переменными. Найдя общее решение этого уравнения $u = u(x, C)$, получим общее решение уравнения (1):

$$y = u(x, C)\,v(x).$$

11.60. Найти общее решение уравнения

$$y' - y\operatorname{tg} x = \sin x.$$

Решение. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение принимает вид

$$u'v + uv' - uv\operatorname{tg} x = \sin x,$$

или

$$u'v + u(v' - v\operatorname{tg} x) = \sin x. \qquad (*)$$

Решая уравнение $v' - v\operatorname{tg} x = 0$, получим его простейшее частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = v\operatorname{tg} x; \quad \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x\,dx; \quad \ln|v| = -\ln|\cos x|,$$

откуда

$$v = \frac{1}{\cos x}.$$

Подставляя v в уравнение (*), получим уравнение

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x$$

из которого находим u:

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x; \quad du = \sin x\cos x\,dx,$$

откуда

$$u = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Итак, искомое общее решение

$$y = uv = \left(\frac{\sin^2 x}{2} + C\right)\frac{1}{\cos x}.$$

В задачах 11.61—11.71 найти общее решение уравнения.

11.61. $y' + \frac{y}{x} = 1$. 11.62. $y' - 3\frac{y}{x} = x^3$.

11.63. $y' - 2xy = e^{x^2}$. 11.64. $y' + xy + x = 0$.

11.65. $y' + 5y = e^{-2x}$. 11.66. $y'(x+1) - y = 2(x+1)^3$.

11.67. $\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} x (y-1) = 0$. 11.68. $xy' = 2x \ln x - y$.

11.69. $(y+e^x)\,dx - dy = 0$. 11.70. $y'(1+x^2) - xy = \sqrt{1+x^2}$.

11.71. $y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$.

В задачах 11.72—11.77 найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

11.72. $y' + 2py = e^{-2px}$, $y(0) = 0$.

11.73. $\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 e^{-4x}$; $y(0) = \frac{1}{3}$.

11.74. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$; $y\left(\frac{1}{2}\right) = 62$.

11.75. $y' + y \operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

11.76. $x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \cos x$; $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

11.77. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{x^2+1} = x$; $y(2\sqrt{2}) = 3$.

11.78. Найти уравнение кривой, если известно, что она проходит через точку $B(1; 1)$ и обладает следующим свойством: площадь треугольника, образованного радиусом-вектором любой точки $M(x; y)$ кривой, касательной MA в этой точке и осью ординат, равна 1 (рис. 40).

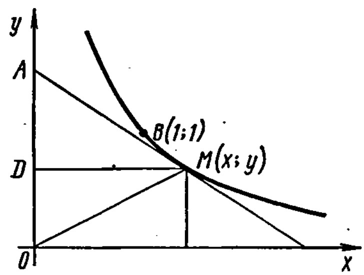


Рис. 40

Указание. Площадь треугольника OMA находится следующим образом:

$$S_{\Delta\, OMA}=\frac{1}{2}\, OA\cdot MD=\frac{1}{2}(y-xy')\,x.$$

11.79. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; —1), для которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

11.80. Напряжение в цепи с индуктивностью равномерно изменяется в течение одной минуты от 0 до 60 В. Индуктивность $L = 10$ Г, а активное сопротивление $R = 2$ Ом. Определить величину тока I в цепи в конце 15-й секунды, если в начале опыта она была 12,5 А.

Указание. Необходимо воспользоваться следующей связью между силой тока I и напряжением U в цепи, имеющей сопротивление R и самоиндукцию L:

$$U=RI+L\frac{dI}{dt}$$

§ 6. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В задачах 11.81—11.95 найти общий интеграл (решение) уравнения.

11.81. $\dfrac{x^2}{1+x^3}\,dx-\dfrac{y}{1+y^2}\,dy=0.$ **11.82.** $(1+x^2)\,y'-2xy=0.$

11.83. $xy'+y=1+x.$ **11.84.** $\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx-x\,dy=0.$

11.85. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{y}\right)dx-2x\,dy=0.$

11.86. $(1+x^2)\,y'+xy-1=0.$ **11.87.** $xy'=y\left(\ln\dfrac{y}{x}+3\right).$

11.88. $(x^2+3xy+y^2)\,dx-x^2\,dy=0.$

11.89. $y'-\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}+x+\sqrt{1+x^2}=0.$

11.90. $y'+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)y=e^{-\sqrt{x}}.$

11.91. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x^2+y^2+xy}{x^2}.$ **11.92.** $\dfrac{xy'}{y}=4+\ln x-\ln y.$

11.93. $y^2 = x(xy' - y)e^{\frac{x}{y}}$. 11.94. $y' - \frac{y}{x\ln x} = 3\ln x$.

11.95. $3^{x-y}\,dx = (3^{x+y} - 3^x + 3^y - 1)\,dy$.

В задачах 11.96—11.105 найти частный интеграл (решение) уравнения, удовлетворяющий заданным начальным условиям.

11.96. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$; $y(0) = 2\sqrt{2}$.

11.97. $\cos y \ln x\,dx + x \operatorname{tg} y\,dy = 0$; $y(e^2) = \frac{\pi}{3}$.

11.98. $(1 + e^x)yy' = e^x$; $y(0) = 0$.

11.99. $\sqrt{\ln x(1-y^2)}\,dx = x\arcsin y\,dy$; $y(1) = 0$.

11.100. $y'\sin x - y = \sin x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

11.101. $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

11.102. $e^x \cos y\,dx + (e^x - 1)\sin y\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

11.103. $y' + \frac{1-2x}{x^2-x}y = 1$; $y(2) = -2\ln 2$.

11.104. $y = x\left(y' + \sqrt[x]{e^y}\right)$; $y(1) = 0$.

11.105. $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$; $y(1) = \frac{1}{2}$.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВИДА $y'' = f(x)$

Уравнения вида $y'' = f(x)$ решаются двукратным интегрированием. Полагая $y' = z$, получим $y'' = z'$; в результате приходим к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$z' = f(x), \text{ или } \frac{dz}{dx} = f(x), \text{ или } dz = f(x)\,dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int dz = \int f(x)\,dx,$$

откуда

$$z = F(x) + C_1$$

[здесь $F(x)$ — первообразная от $f(x)$]. Заменяем в последнем уравнении z значением $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1,$$

или

$$dy = [F(x) + C_1]\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$y = \int F(x)\,dx + C_1x + C_2,$$

откуда

$$y = \Phi(x) + C_1x + C_2.$$

Это и есть общее решение уравнения $y'' = f(x)$.

11.106. Найти общее решение уравнения

$$y'' = 1 - x^2.$$

Решение. Положим $\frac{dy}{dx} = z$, тогда данное уравнение запишется в виде

$$\frac{dz}{dx} = 1 - x^2, \quad \text{или} \quad dz = (1 - x^2)\,dx.$$

В результате интегрирования найдем

$$z = x - \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{x^3}{3} + C_1,$$

или

$$dy = \left(x - \frac{x^3}{3} + C_1\right)dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2.$$

В задачах **11.107—11.112** найти общее решение уравнения.

11.107. $y'' = \cos 2x$. **11.108.** $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = 6\varphi^2 + 3\varphi - 1$.

11.109. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-3x} + 4$. **11.110.** $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$.

11.111. $xy'' = 1$. **11.112.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \ln x$.

11.113. Найти частное решение уравнения

$$y'' = \sin x - 1,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Имеем $\frac{dy}{dx} = z$, откуда

$$\frac{dz}{dx} = \sin x - 1, \quad dz = (\sin x - 1)\, dx;$$

$$z = -\cos x - x + C_1.$$

Следовательно,

$$y' = -\cos x - x + C_1.$$

Используя начальные условия $y'(0) = 1$, получаем

$$1 = -\cos 0 + C_1,$$

откуда $C_1 = 2$. Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - x + 2,$$

или

$$dy = (-\cos x - x + 2)\, dx.$$

Интегрируем это уравнение:

$$y = -\sin x - \frac{x^2}{2} + 2x + C_2.$$

Используя теперь начальные условия $y(0) = -1$, находим $C_2 = -1$. Итак, искомое частное решение имеет вид

$$y = -\sin x - \frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

В задачах **11.114—11.117** найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

11.114. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x}$; $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

11.115. $y'' = 4x^3 - 2x + 1$; $y(1) = \frac{11}{30}$, $y'(1) = 2$.

11.116. $\frac{d^2y}{dx^2} = x - \cos 2x$; $y(0) = \frac{9}{4}$, $y'(0) = -1$.

11.117. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{t}$; $s(e) = 2e$, $s'(e) = 3$.

11.118. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 2x - 3x^2$ выделить кривую, проходящую через точку (1; 0) и касающуюся в ней прямой $y - x + 1 = 0$.

Указание. Задача сводится к нахождению частного решения заданного дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

11.119. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается формулой $a(t) = 6t - 2$. Найти закон движения, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость $v = 1$ м/с, а путь $s = 0$.

Указание. Задача сводится к нахождению частного решения дифференциального уравнения $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 2$, удовлетворяющего начальным условиям $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$.

11.120. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t) = 12t^2 - 4$ м/с². Найти путь, пройденный телом за первые три секунды, если при $t = 0$ $s = 0$ и $v = 0$.

11.121. В некоторый момент времени движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью 25 м/с был включен тормоз. Найти время и расстояние, пройденное поездом после включения тормоза, если сопротивление движению равно 0,3 веса поезда.

Указание. По второму закону Ньютона дифференциальное уравнение движения поезда после включения тормоза имеет вид

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -0,3mg,$$

где s — путь, пройденный за время t; m — масса поезда; g — ускорение силы тяжести. Задача сводится к нахождению частного решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям: при $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 25$.

§ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (1)$$

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, \qquad (2)$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями r, причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнения (1) строится в зависимости от характера корней r_1 и r_2 уравнения (2). Здесь возможны три случая.

1-й случай. Корни r_1 и r_2 — *действительные и различные*. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \qquad (3)$$

2-й случай. Корни r_1 и r_2 — *действительные и равные*: $r_1 = r_2 = r$. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}. \qquad (4)$$

3-й случай. Корни r_1 и r_2 — *комплексно сопряженные*: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Тогда общее решение записывается ак:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \qquad (5)$$

11.122. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение; для этого заменим функцию y и ее производные y' и y'' соответствующими степенями r: $r^0 = 1$, r и r^2. Тогда получим

$$r^2 - 5r - 6 = 0,$$

ткуда $r_1 = -1$, $r_2 = 6$. Так как корни характеристического равнения действительные и различные, то общее решение анного дифференциального уравнения согласно формуле (3) имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}.$$

11.123. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

из которого находим $r_{1,2} = 2$. Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни, поэтому согласно формуле (4) общее решение запишется следующим образом:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

11.124. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 0.$$

Решение. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$r^2 + 9 = 0,$$

имеющее два мнимых сопряженных корня $r_{1,2} = \pm 3i$. Используя формулу (5) при $\alpha = 0$ и $\beta = 3$, получаем общее решение

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

11.125. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 25y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^2 + 6r + 25 = 0$$

имеет два комплексно сопряженных корня $r_{1,2} = -3 \pm 4i$. По формуле (5) при $\alpha = -3$ и $\beta = 4$ получаем общее решение

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

В задачах **11.126—11.135** найти общее решение уравнения.

11.126. $y'' - 9y = 0$. **11.127.** $y'' + 5y' + 6y = 0$.

11.128. $y'' - 8y' = 0$. **11.129.** $2y'' - 3y' - 2y = 0$.

11.130 $y'' + 6y' + 9y = 0$. **11.131.** $y'' - 10y' + 25y = 0$.

11.132. $y'' + 16y = 0$. **11.133.** $y'' + 49y = 0$.

11.134. $y'' + 2y' + 2y = 0$. **11.135.** $y'' - 4y' + 13y = 0$.

11.136. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$r^2 - 3r + 2 = 0;$$

его корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Далее, используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Для этого подставим в общее решение заданные значения $x = 0$, $y = 1$; в результате получим одно из уравнений, связывающее C_1 и C_2:

$$1 = C_1 + C_2.$$

Второе уравнение относительно C_1 и C_2 получим следующим образом. Продифференцируем общее решение:

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$$

и подставим в найденное выражение заданные значения $x = 0$, $y' = -1$:

$$-1 = C_1 + 2C_2.$$

Из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases}$$

находим $C_1 = 3$, $C_2 = -2$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = 3e^x - 2e^{2x}.$$

В задачах **11.137—11.141** найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

11.137. $y'' + 3y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

11.138. $y'' + 4y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

11.139. $y'' - y' - 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

11.140. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

11.141. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

§ 9. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{1}$$

Оно отличается от соответствующего линейного однородного уравнения

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

наличием в правой части некоторой функции $f(x)$.

Для нахождения общего решения уравнения (1) сначала нужно найти общее решение $\overline{y}$ уравнения (2) (используя правила § 8), а затем найти какое-либо частное решение y^* уравнения (1). Их *сумма есть общее решение данного неоднородного уравнения* (1):

$$y=\overline{y}+y^*.$$

Приведем правило отыскания частного решения y^* уравнения (1) в следующих двух случаях:

правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=e^{kx}P_n(x). \tag{3}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n;

правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x. \tag{4}$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x)=e^{kx}P_n(x),$$

причем число k не является корнем характеристического уравнения

$$r^2+pr+q=0, \tag{5}$$

соответствующего однородному уравнению (2). Тогда частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^*=e^{kx}Q_n(x), \tag{6}$$

где $Q_n(x)$ — некоторый многочлен той же степени n с неопределенными коэффициентами.

Если же число k является корнем характеристического уравнения (5), то частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^*=x^me^{kx}Q_n(x), \tag{7}$$

где m — кратность корня k (т. е. $m=1$, если k — однократный корень, и $m=2$, если k — двукратный корень).

II. Пусть теперь правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x,$$

причем числа $\pm\lambda i$ не являются корнями характеристического уравнения (5). Тогда частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^* = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \tag{8}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

Если же комплексные числа $\pm\lambda i$ являются корнями характеристического уравнения (5), то частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^* = x(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x). \tag{9}$$

11.142. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)\, e^x.$$

Решение. 1. Найдем общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Решая отвечающее ему характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 3 = 0$, получаем корни $r_1 = -3$, $r_2 = -1$. едовательно,

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

2. Перейдем к отысканию частного решения y^* данного уравнения Здесь правая часть $f(x) = (8x^2 + 84x)\, e^x$ имеет вид (3): $n = 2$, $P_2(x) = 8x^2 + 84x$, $k = 1$, причем $k = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Слеовательно, частное решение y^* нужно искать в форме

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

де A, B и C — некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания воспользуемся тем, что $*$ должно быть решением данного уравнения. Найдем $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime} = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (2Ax + B)e^x = \\ = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x,$$

$$*'' = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x = \\ = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x;$$

еперь подставим выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное равнение:

$$(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+C)e^x+4(Ax^2+2Ax+$$
$$+Bx+B+C)e^x+3(Ax^2+Bx+C)e^x=(8x^2+84x)e^x.$$

Сокращая обе части полученного равенства на e^x и группируя члены при одинаковых степенях x, в результате получим

$$Ax^2+(12A+8B)x+(2A+6B+8C)=8x^2+84x.$$

Это равенство выполняется тождественно только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства равны между собой.

Итак, имеем следующую систему уравнений для отыскания коэффициентов A, B и C:

$$\begin{cases} 8A = 8, \\ 12A+8B = 84, \\ 2A+6B+8C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A=1$, $B=9$, $C=-7$. Таким образом, получаем искомое частное решение

$$y^*=(x^2+9x-7)e^x.$$

Теперь можно записать общее решение данного уравнения

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}+(x^2+9x-7)e^x.$$

11.143. Найти общее решение уравнения

$$y''+6y'+9y=14e^{-3x}.$$

Решение. 1. Найдем $\bar{y}$. Характеристическое уравнение $r^2+6r+9=0$ имеет корни $r_1=r_2=-3$. Следовательно,

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-3x}.$$

2. Найдем теперь y^*. Здесь правая часть имеет вид (3): $n=0$, $P_0=14$, $k=-3$. Так как $k=-3$ является двукратным корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* следует искать в форме

$$y^*=Ax^2e^{-3x},$$

где A — коэффициент, подлежащий определению. Вычислим производные $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime}=(-3Ax^2+2Ax)e^{-3x},$$
$$y^{*\prime\prime}=(9Ax^2-12Ax+2A)e^{-3x}.$$

Подставляя выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, сокращая обе его части на e^{-3x} и приводя подобные члены, в итоге получим $2A = 14$, откуда $A = 7$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y^* = 7x^2e^{-3x}.$$

Итак, общее решение данного уравнения

$$y = \bar{y} + y^* = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + 7x^2e^{-3x}.$$

11.144. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x.$$

Решение. 1. Находим $\bar{y}$. Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 5 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = 2 \pm i$. Следовательно,

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

2. Будем теперь искать y^*. Здесь правая часть $f(x)$ меет вид (4): $a = 2$, $b = 6$, $\lambda = \pm i$. Числа $\pm i$ не являют- корнями характеристического уравнения, поэтому частое решение y^* следует искать в форме

$$y^* = A\cos x + B\sin x,$$

де A и B — неопределенные коэффициенты. Найдем прозводные $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime} = -A\sin x + B\cos x,$$
$$y^{*\prime\prime} = -A\cos x - B\sin x;$$

одставляя теперь выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное равнение и группируя члены при $\cos x$ и $\sin x$, в результате получим

$$(4A - 4B)\cos x + (4A + 4B)\sin x = 2\cos x + 6\sin x.$$

едовательно, для нахождения A и B имеем систему

$$\begin{cases} 4A - 4B = 2, \\ 4A + 4B = 6, \end{cases}$$

уда $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$y^* = \cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x + \frac{1}{2} \sin x$

11.145. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 12 \cos 2x.$$

Решение. 1. Найдем сначала $\bar{y}$. Характеристичес кое уравнение $r^2 + 4 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm 2i$. Следовательно,

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2. Переходим к нахождению y^*. Здесь правая част $f(x)$ имеет вид (4): $a = 12$, $b = 0$, $\lambda = \pm 2i$. Так как числ $\pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения то частное решение следует искать в форме

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x),$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Имеем

$$y^{*\prime} = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x),$$
$$y^{*\prime\prime} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x).$$

Подставив y^* и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение и приведя подо ные члены, получим

$$4B \cos 2x - 4A \sin 2x = 12 \cos 2x,$$

откуда

$$\begin{cases} 4B = 12, \\ -4A = 0, \end{cases}$$

т. е. $A = 0$, $B = 3$. Поэтому

$$y^* = 3x \sin 2x.$$

Итак, общее решение

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 3x \sin 2x.$$

11.146. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Решение. 1. Характеристическое уравнение $r^2 + 2r - 8 = 0$ имеет корни $r_1 = -4$, $r_2 = 2$. Следовательно,

$$\bar{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}.$$

2. Правая часть данного уравнения имеет вид (3): $n = 1$, $P_1(x) = 12x + 20$, $k = 2$. Так как $k = 2$ является однократным корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* ищем в форме

$$y^* = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Отсюда

$$y^{*\prime} = (2Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} = $$
$$= (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)e^{2x},$$
$$y^{*\prime\prime} = (4Ax^2 + 4Ax + 4Bx + 2B)e^{2x} + (4Ax + 2A + 2B)e^{2x} =$$
$$= (4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x}.$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, сокращая обе его части на e^{2x} и приводя подобные члены, окончательно получим

$$12Ax + (2A + 6B) = 12x + 20.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 12A = 12, \\ 2A + 6B = 20, \end{cases}$$

находим $A = 1$, $B = 3$. Отсюда

$$y^* = (x^2 + 3x)e^{2x}.$$

Итак, найдено общее решение данного уравнения

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + (x^2 + 3x)e^{2x}.$$

3. Для нахождения искомого частного решения воспользуемся заданными начальными условиями. Найдем производную общего решения

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x} + (2x^2 + 8x + 3)e^{2x};$$

подставив в выражения для общего решения и его производной значения $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$, получим систему уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 1 = -4C_1 + 2C_2 + 3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=\frac{1}{3}$, $C_2=-\frac{1}{3}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y=\frac{1}{3}e^{-4x}-\frac{1}{3}e^{2x}+(x^2+3x)e^{2x}.$$

В задачах **11.147—11.160** найти общее решение уравнения.

11.147. $y''-2y'-8y=-8x^2+4x+7$.
11.148. $y''-6y'+5y=(3x+10)e^{-x}$.
11.149. $y''-4y'+3y=10e^{3x}$.
11.150. $y''+16y=(34x+13)e^{-x}$.
11.151. $y''+2y'+2y=(x+7)e^{-2x}$.
11.152. $y''-5y'=30x-11$.
11.153. $y''-3y'-4y=(20x+11)e^{-x}$.
11.154. $y''+4y'=-2xe^{-4x}$.
11.155. $y''+4y'+4y=3xe^{-2x}$.
11.156. $y''+3y'=-72\sin 3x$.
11.157. $y''+2y'+y=3\cos x+8\sin x$.
11.158. $y''+25y=40\cos 5x$.
11.159. $y''+9y=9\cos 3x+16\sin 3x$.
11.160. $y''-8y'+20y=130\sin 4x$.

В задачах **11.161—11.165** найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

11.161. $y''-5y'+4y=(10x+43)e^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
11.162. $y''-2y'+10y=74\sin 3x$; $y(0)=6$, $y'(0)=3$.
11.163. $y''-6y'=18e^{6x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=-9$.
11.164. $y''+4y=(6x+5)e^{-2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{4}$.
11.165. $y''+y=-8\sin x-6\cos x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi$.

ГЛАВА 12

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Число вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

де x и y — любые действительные числа, а i — мнимая единица, пределяемая равенством $i^2 = -1$, называется *комплексным чисом*. Числа x и y называются соответственно *действительной* и *нимой* частями комплексного числа z и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

апись комплексного числа виде (1) называется *алебраической формой* компексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$ может быть изобраено в декартовой координатной плоскости xOy либо очкой с абсциссой x и ординатой y, либо радиусомектором этой точки (рис. 1). Длина этого вектора азывается *модулем* компексного числа z и обознаается $|z|$ или r:

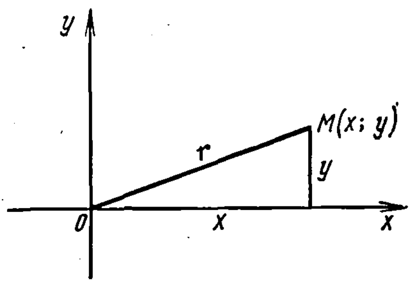


Рис. 41

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

'гол, образованный этим вектором с положительным направлением ействительной оси Ox, называется *аргументом* числа z и обознаается $\operatorname{Arg} z$:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

еличина $\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена с точностью до числа, ратного 2π. Значение $\operatorname{Arg} z$, заключенное в пределах от $-\pi$ до , называется *главным* и обозначается $\arg z$ или φ:

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаютс *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимы части:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиес только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраи ческой форме, производятся по следующим правилам:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

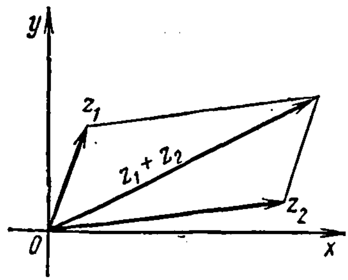


Рис. 42

Сложение (вычитание) комп лексных чисел сводится к сложе нию (вычитанию) векторов, изоб ражающих эти числа.

Радиус-вектор с у м м комплексных чисел z_1 и z_2 явля ется *диагональю параллелограм ма, построенного на радиусах векторах слагаемых* (рис. 42).

Радиус-вектор р а з н о с т комплексных чисел z_1 и z_2 н ходится следующим образом: *н жно соединить конец радиуса-ве тора вычитаемого с концом ради уса-вектора уменьшаемого а тем полученный вектор перен сти параллельно самому себе, поместив его начало в точку* (рис. 43).

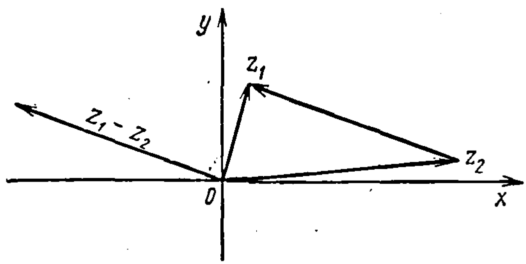


Рис. 43

12.1. Указать точки, изображающие комплексные числ $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 - 4i$, $z_3 = 2i$, $z_4 = -\sqrt{3} + i$, $z_5 = 6$, $z_6 = -8$, $z_7 = -\sqrt{2}\,i$, $z_8 = 5 + 12i$.

12.2. Построить векторы, изображающие следующие комплексные числа: 1) $2+2i$; 2) $1-i$; 3) $-1+2i$; 4) $-1-i$; 5) $3i$; 6) -5; 7) $-\sqrt{3}\,i$; 8) 3.

12.3. Определить множество точек, для которых:

$$1)\ \operatorname{Re} z < 5; \qquad 2)\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}.$$

Решение. 1) Так как $\operatorname{Re} z = x$, то точки искомого множества удовлетворяют неравенству $x < 5$ (рис. 44).

2) Искомая область есть угол с вершиной в точке $z = 0$ между лучами, составляющими с действительной осью Ox углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ (рис. 45).

12.4. Найти геометрическое место точек, для которых: 1) $\operatorname{Re} z = 2$; 2) $\operatorname{Im} z = -2$; 3) $\operatorname{Im} z < 0$; 4) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$.

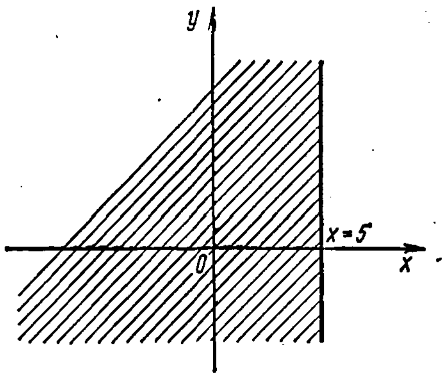


Рис. 44

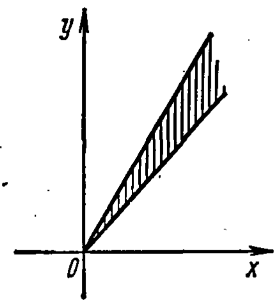


Рис. 45

12.5. Для заданных комплексных чисел написать им сопряженные: 1) $-3+5i$; 2) $4-i$; 3) $-6-6i$; 4) $8+3i$; 5) $-7i$; 6) $5i$.

12.6. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 1 - i$.

Решение. По формуле (2) находим $r = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$. Так как точка $1-i$ лежит в IV четверти, то по формуле (3) получаем $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

12.7. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: 1) $-2+2i$; 2) $4+4\sqrt{3}\,i$;

3) $-5\sqrt{3}-5i$; 4) $4+3i$; 5) $5-12i$; 6) $-\sqrt{5}\,i$; 7) -6; 8) $7i$; 9) $\sqrt{2}$.

12.8. Определить геометрическое место точек, для которых $|z| \leqslant 3$.

Решение. Так как модуль комплексного числа $z = x + iy$ равен $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, то искомое геометрическое место удовлетворяет неравенству $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3$, или $x^2+y^2 \leqslant 9$, и, следовательно, есть круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом, равным 3.

12.9. Определить геометрическое место точек, для которых:

1) $|z| > 5$; 2) $|z-4| \leqslant 2$; 3) $|z+2i| \geqslant 4$;
4) $|z-3i| = 3$; 5) $|z+1-i| < 2$;
6) $1 < |z| < 3$; 7) $|z-i| = |z-1|$.

Для каждого случая сделать соответствующий чертеж.

12.10. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-10| \leqslant 8$, найти такое, аргумент которого имеет наибольшее значение.

Указание. Задача сводится к нахождению координат точки касания прямой, проведенной из начала координат к окружности $|z-10| = 8$.

12.11. Выполнить сложение данных комплексных чисел. Построить геометрическое изображение слагаемых и суммы:

1) $(2+3i)+(4+2i)$; 2) $(-4+5i)+(3-2i)$;
3) $(-7+6i)+(-3-8i)$; 4) $(-5-2i)+(-6+8i)$;
5) $(4-7i)+(4+7i)$; 6) $(-3+2i)+(3-2i)$.

12.12. Выполнить сложение:

1) $(-3-2i)+(4-5i)+(-8+6i)$;
2) $-4+(3-6i)+(-7-4i)+3i$;
3) $(1{,}2-0{,}7i)+(-0{,}3+0{,}27i)+(-0{,}6-0{,}32i)-1{,}4i$;
4) $(4-5i)x+(-2+3i)y$.

12.13. Выполнить вычитание данных комплексных чисел:

1) $(4+3i)-(1+2i)$; 2) $(-3+5i)-(2-i)$
3) $(5-i)-(-1-3i)$; 4) $(-2+6i)-(2+9i)$;
5) $(7-2i)-(7+2i)$; 6) $(-3+5i)-(-3+5i)$.

Построить для каждого случая геометрическое изображение уменьшаемого, вычитаемого и разности.

12.14. Выполнить действия:

1) $(8-3i)-(-2+5i)+(10-4i)$;
) $(3+i)+(-6+3i)-(12-7i)$;
3) $(0{,}6-0{,}8i)-(0{,}4+1{,}7i)+(0{,}9-0{,}1i)-(1{,}3+0{,}4i)$.
4) $(3-2i)x+(-4+7i)y-(-2+5i)z$.

12.15. Убедиться в том, что сумма двух сопряженных исел равна удвоенной действительной части одного из них.

12.16. Решить уравнение

$$(-5+2i)x-(3-4i)y=2-i.$$

Решение. Раскрыв скобки в левой части уравнения ı сгруппировав действительные и мнимые части, получаем

$$-5x+2xi-3y+4yi=(-5x-3y)+i(2x+4y).$$

аким образом, имеем

$$(-5x-3y)+i(2x+4y)=2-i.$$

сюда, используя условие равенства двух комплексных исел, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -5x-3y=2, \\ 2x+4y=-1, \end{cases}$$

ешая которую, находим $x=-\frac{5}{14}$, $y=-\frac{1}{14}$.

12.17. Решить уравнения:

1) $(4x-3y)+(3x+5y)i=10-(3x-2y-30)i$;
2) $(2-7i)x+(8+6i)y=(-6+5i)x-8$;
3) $(-4-5i)x+(1+4i)y=-27i+(7-2i)y$;
4) $\frac{2+5i}{x-y}-\frac{1-3i}{x+y}=\frac{-7x+12i}{y^2-x^2}$.

12.18. Найти произведение чисел $z_1=4+3i$ и $z_2=1-i$.

Решение. Перемножая числа z_1 и z_2 по правилу множения двучленов и учитывая, что $i^2=-1$, получим

$$(4+3i)(1-i)=4+3i-4i-3i^2=$$
$$=(4+3)+i(3-4)=7-i.$$

12.19. Найти частное $\dfrac{-3+2i}{5-i}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $5+i$ — число, сопряженное знаменателю $5-i$:

$$\frac{-3+2i}{5-i}=\frac{(-3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{-15+10i-3i+2i^2}{25-i^2}=$$
$$=\frac{-17+7i}{25+1}=-\frac{17}{26}+\frac{7}{26}i.$$

В задачах 12.20—12.25 выполнить указанные действия.

12.20. 1) $(-3+5i)\cdot 2i$; 2) $(-7-9i)\cdot(-3i)$;

3) $(4-6i)\cdot\left(\frac{1}{2}i\right)$; 4) $(-r+\frac{1}{4}si)(-8ri)$.

12.21. 1) $(2-3i)(-4+7i)$; 2) $(5-6i)(-10+8i)$;
3) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; 4) $(4+i\sqrt{5})(4-i\sqrt{5})$;
5) $(\sqrt{m}+i\sqrt{n})(\sqrt{m}-i\sqrt{n})$; 6) $(a+bi)(-a+bi)$

12.22. 1) $\dfrac{2}{5i}$; 2) $\dfrac{6}{1+i}$; 3) $\dfrac{4}{1-3i}$; 4) $\dfrac{a}{a+bi}$.

12.23. 1) $\dfrac{3i}{1-i}$; 2) $\dfrac{1+2i}{2-i}$; 3) $\dfrac{5+3i}{2+i}$; 4) $\dfrac{4-5i}{-2+7i}$.

12.24. 1) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{7}-i}{\sqrt{7}-2i}$; 3) $\dfrac{\sqrt{s}}{(s-2)i}$;

4) $\dfrac{m+i\sqrt{n}}{m-i\sqrt{n}}$; 5) $\dfrac{p+qi}{q-pi}$.

12.25. 1) $\dfrac{(3+4i)(-1+3i)}{6-8i}$; 2) $\dfrac{-4+6i}{(2+i)(3-2i)}$;

3) $\dfrac{(4-i)(1+2i)}{(-2+i)(1-3i)}$; 4) $\dfrac{(m+ni)(n+mi)}{n-mi}$.

12.26. Показать, что произведение двух сопряженны чисел равно квадрату модуля одного из них.

12.27. Найти модуль комплексного числа $z = (p+qi)(q-pi)$.

12.28. Определить координаты точки, изображающе комплексное число

$$z=\frac{8i-3}{-i+2}+\frac{5i-2}{3i+1}+i.$$

12.29. Разложить на комплексные множители следующие выражения: 1) a^2+b^2; 2) m^2+16n^2; 3) $9p^2+25q^2$;) $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}$; 5) $m+n$; 6) $7+\sqrt{5}$; 7) $1+\operatorname{tg}^2\alpha$.

12.30. Показать, что справедливы следующие равенства:

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,$$

де $k=0, 1, 2, \ldots$.

12.31. Найти i^{12}; i^{18}; i^{37}; i^{55}; i^{93}; i^{104}; $(-i)^{10}$; $(-i)^{49}$.

12.32. Найти: 1) $(1+i)^2$, $(1+i)^{10}$, $(1+i)^{13}$; 2) $(1-i)^2$; $1-i)^7$, $(1-i)^{12}$.

12.33. Найти: 1) $(2+3i)^2$; 2) $(5-i)^2$; 3) $(-3-4i)^2$;) $(1+2i)^3$; 5) $(2-i)^3$; 6) $(-1+3i)^3$.

12.34. Показать, что

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=2.$$

12.35. Выполнить действия:

$$1)\ \frac{i}{(4+3i)^2};\quad 2)\ \frac{(-1+4i)^2}{5-2i};\quad 3)\ \frac{(3-i)^3}{2+4i};$$

$$4)\ (3+2i)^3-(3-2i)^3;\quad 5)\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}.$$

12.36. Найти модуль и главное значение аргумента омплексного числа

$$z=\frac{125}{(2+i)^3}+(1+i)^8-7i.$$

12.37. Найти действительную и мнимую части слеующих функций: 1) $w=z^2$; 2) $w=\frac{1}{z}$; 3) $w=z^3-z$, где $=x+iy$.

§ 2. ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. ОСНОВНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Основные трансцендентные функции комплексного переенного $z=x+iy$ определяются следующими равенствами: *показательная функция*

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y);\tag{1}$$

тригонометрические функции

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\tag{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad (3)$$

гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}. \qquad (5)$$

Равенства (1) — (3) называются *формулами Эйлера.*

12.38. Найти: 1) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$; 2) $e^{\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}}$; 3) $e^{4+i\pi}$.

Решение. По формуле (1) имеем

$$1)\ e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2)\ e^{\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{\pi\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]} = e^{-\pi i} =$$

$$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$$

$$3)\ e^{4+\pi i} = e^{4}(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^{4}.$$

12.39. Найти: 1) $e^{\frac{\pi i}{2}}$; 2) $e^{-\frac{\pi i}{3}}$; 3) e^{2+5i}; 4) e^{3-i}; 5) $e^{\pi i-6}$.

12.40. Найти $\sin(1 - i)$.

Решение. По формуле (2) имеем

$$\sin(1-i) = \frac{e^{i(1-i)} - e^{-i(1-i)}}{2i} = \frac{e^{i+1} - e^{-i-1}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e(\cos 1 + i\sin 1) - e^{-1}\left(\cos(-1) + i\sin(-1)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(e - e^{-1})\cos 1 + i(e + e^{-1})\sin 1\right] =$$

$$= -i\cdot\frac{e-e^{-1}}{2}\cdot\cos 1 + \frac{e+e^{-1}}{2}\sin 1 = \sin 1\operatorname{ch} 1 - i\cos 1\operatorname{sh} 1.$$

12.41. Найти: 1) $\sin i$; 2) $\cos(1 + i)$; 3) $\operatorname{sh} 3i$; 4) $\operatorname{ch} 5$ 5) $\operatorname{ch}(2 - i)$.

12.42. Показать, что функции e^{z}, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ — пери дические с периодом $2k\pi i$, где k — произвольное цело число.

12.43. Показать, что функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с периодом $2k\pi$, где k — произвольное целое число.

12.44. Найти действительную и мнимую части функций: 1) $w = \sin z$; 2) $w = \operatorname{sh} z$; 3) $w = ze^z$; 4) $w = \frac{e^z}{z}$, где $z = x + iy$.

12.45. Показать, что для комплексного переменного z справедливы известные формулы тригонометрии

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ \sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2},\ \cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2}.$$

12.46. Пользуясь определением функции $\sin z$, показать, что

$$\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z.$$

12.47. Убедиться в том, что если z — комплексное переменное, то модуль $\sin z$ и $\cos z$ может быть больше единицы. Вычислить для этого, например, $|\sin i|$.

12.48. Показать, что между тригонометрическими и гиперболическими функциями комплексного переменного существуют следующие соотношения:

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z,\quad \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z,\quad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

12.49. Показать, что для гиперболических функций комплексного переменного справедливы формулы

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,\ \operatorname{ch}^2 z = \frac{1 + \operatorname{ch} 2z}{2},\ \operatorname{sh}^2 z = \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{2}.$$

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Тригонометрическая и *показательная* формы комплексного числа $z = x + iy$ имеют вид

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{1}$$

$$z = re^{i\varphi}, \tag{2}$$

де r и φ — соответственно модуль и главное значение аргумента комплексного числа z.

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной форме, выполняются по следующим формулам:

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \times [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \qquad (3)$$

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (3')$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], \qquad (4)$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \qquad (4')$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi), \qquad (5)$$

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \qquad (5')$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (6)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i} \qquad (6')$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

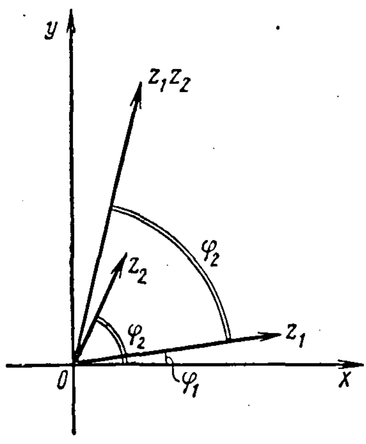


Рис. 46

Соотношение (5) называется *формулой Муавра*.

Для приведения выражений, стоящих в правых частях указанных равенств, тригонометрической или показательной форме используется тот факт, что функции $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и $e^{i\varphi}$ имеют период $2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Вектор, изображающий произведение z_1z_2 *(частное* $\frac{z_1}{z_2}$*) может быть получен из вектора, изображающего число* z_1*, поворотом против часовой стрелки (по часовой стрелке) на угол* φ_2*, образуемый вектором* z_2 *с положительным направлением действительной оси и умножением (делением) его длины на длину вектора* z_2 (рис. 46).

12.50. Представить в тригонометрической и показаельной формах комплексные числа: 1) $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i$;) $z_2 = 5i$.

Р е ш е н и е. 1) Найдем модуль и главное значение арумента комплексного числа z_1. Имеем

$$|z_1| = |3 + \sqrt{3}\,i| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

ак как вектор, изображающий число z_1, лежит в I четвери и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Отсюда, используя форıулы (1) и (2), получим тригонометрическую и показательую формы числа $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i$:

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

2) Модуль числа $z_2 = 5i$ равен $|z_2| = |5i| = \sqrt{0^2 + 5^2} =$ 5. Вектор, изображающий число $5i$, лежит на положиельной части мнимой оси; поэтому главное значение аргуıента $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

12.51. Представить в тригонометрической и показаельной формах следующие комплексные числа: 1) $1 - i$;) $-1 + i$; 3) $\sqrt{3} + i$; 4) $-2 - 2i$; 5) $-5i$; 6) 1; 7) $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

12.52. Представить в показательной и алгебраической ормах следующие комплексные числа:

1) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; 2) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

5) $\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$; 6) $7(\cos 0 + i\sin 0)$.

12.53. Записать в алгебраической и тригонометричесой формах числа: 1) $\frac{1}{2}e^{i\pi}$; 2) $e^{4+\frac{\pi i}{2}}$; 3) $6e^{\frac{\pi i}{3}}$; 4) $3e^{-\frac{\pi i}{4}}$;) $e^{1+\frac{2\pi i}{3}}$.

12.54. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполнить указанные действия:

1) $(1-i)(\sqrt{3}+i)$; 2) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$; 3) $(1-i)^3$; 4) $\sqrt[3]{1-i}$.

Решение. Запишем числа $z_1 = 1-i$ и $z_2 = \sqrt{3}+$ в тригонометрической форме:

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right];$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Используя правила действий (3) — (6) с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, получим:

1) $$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right];$$

2) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right];$$

3) $$z_1^3 = (\sqrt{2})^3\left\{\cos\left[3\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + i\sin\left[3\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} =$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right];$$

4) $$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right);$$

полагая $k = 0,\ 1,\ 2$, найдем

$$\sqrt[3]{z_1}\Big|_{k=0} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right];$$

$$\sqrt[3]{z_1}\Big|_{k=1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

$$\sqrt[3]{z_1}\Big|_{k=2} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

12.55. Выполнить умножение:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\frac{1}{2}(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)\cdot 8(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)$;

3) $6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)\cdot 2[\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ)]$;

5) $6[\cos(-135^\circ) + i\sin(-135^\circ)]\cdot$

$\cdot\sqrt{3}[\cos(-15^\circ) + i\sin(-15^\circ)]$;

6) $4(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)\cdot\frac{1}{6}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$;

7) $10\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)\cdot\frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

8) $\sqrt{6}(\cos 92^\circ + i\sin 92^\circ)\cdot\sqrt{3}(\cos 88^\circ + i\sin 88^\circ)$.

12.56. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполнить умножение:

1) $(4+4i)\cdot 3(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$; 2) $(2+2\sqrt{3}i)\cdot(1-i)$;

3) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right](-3+\sqrt{3}i)$;

4) $(-4+4\sqrt{3}i)(1+i\sqrt{3})$; 5) $(-2-2i)(6-2\sqrt{3}i)$;

6) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{i\sqrt{6}}{8}\right)$.

12.57. Выполнить деление:

1) $6\ (\cos 70° + i \sin 70°) : 3\ (\cos 25° + i \sin 25°)$;

2) $2(\cos 120° + i \sin 120°) : 4\ (\cos 90° + i \sin 90°)$;

3) $\sqrt{6}\ (\cos 160° + i \sin 160°) : \sqrt{3}\ (\cos 40° + i \sin 40°)$;

4) $10\ (\cos 105° + i \sin 105°) : 5\ (\cos 135° + i \sin 135°)$;

5) $4\ (\cos 75° + i \sin 75°) : \frac{1}{2}\ [\cos(-15°) + i \sin(-15°)]$;

6) $6\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] :$

$$: 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

12.58. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполнить деление:

1) $8i : (1 + \sqrt{3}\, i)$; 2) $-6i : (-4 + 4i)$;

3) $(6 - 6i) : 3(\cos 15° + i \sin 15°)$; 4) $(2\sqrt{3} + 6i) : (\sqrt{3} - i)$;

5) $(-2 + 2\sqrt{3}\, i) : (4 - 4i)$;

6) $8\ [\cos(-105°) + i \sin(-105°)] : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$.

12.59. Используя формулу Муавра, вычислить:

1) $(\cos 15° + i \sin 15°)^8$; 2) $[\sqrt{2}\ (\cos 10° + i \sin 10°)]^6$;

3) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)^{15}$; 4) $[3\,(\cos 36° + i \sin 36°)]^5$;

5) $\{\sqrt{2}[\cos(-50°) + i \sin(-50°)]\}^{12}$;

6) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\cos 57° + i \sin 57°)\right]^{10}$;

7) $(2 + 2i)^5$; 8) $(-1 + i\sqrt{3})^9$;

9) $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^6$; 10) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} i\right)^{10}$.

12.60. Вычислить все значения корня данной степени из комплексного числа и построить их геометрическое изображение:

1) $\sqrt[3]{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ}$; 2) $\sqrt[4]{16\,(\cos \pi + i \sin \pi)}$;

3) $\sqrt[5]{\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ}$; 4) $\sqrt[7]{\cos 0 + i \sin 0}$;

5) $\sqrt[3]{27\,[\cos(-135^\circ) + i \sin(-135^\circ)]}$;

6) $\sqrt[5]{32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)}$; 7) $\sqrt{16 - 16i}$;

8) $\sqrt[3]{6 - 6\sqrt{3}\,i}$; 9) $\sqrt[3]{125}$; 10) $\sqrt[4]{16i}$; 11) $\sqrt[6]{-64}$;

12) $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$; 13) $\sqrt[5]{-4 + 4i}$; 14) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}i}$.

12.61. Представив числа $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ и $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической форме, вычислить следующие выражения:

1) $z_1 z_2$; 2) $\frac{z_2}{z_1}$; 3) $\frac{z_1^3}{z_2}$; 4) z_2^6; 5) $\sqrt[4]{z_1}$; 6) $\sqrt[3]{z_2}$.

12.62. Даны числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$. Представив эти числа в тригонометрической форме, найти $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

12.63. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполнить следующие действия:

1) $(-\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i)^3\,(1 + i)^2$; 2) $\frac{-4 + 4i}{(\sqrt{3} - i)\,(1 - i)^2}$;

3) $(1 - i)^3\,(-2\sqrt{3} + 2i)$; 4) $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{6}}{2}\right)^3}{\left(-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

5) $\frac{(\sqrt{3} - i)^3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^3}{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i)^2}$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i\right)^6$.

12.64. Выяснить, каким операциям нужно подвергнуть вектор, изображающий комплексное число $z = 1 + i$, для того чтобы найти произведения этого числа на каждое из следующих чисел: 1) $\sqrt{2}$; 2) -3; 3) $2i$; 4) $-i$; 5) $3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$; 6) $1 - i$; 7) $1 + i$; 8) $4 + 3i$.

Построить векторы, изображающие эти произведения.

12.65. Указать, каким операциям нужно подвергнуть вектор, изображающий комплексное число $1+\sqrt{3}i$, для того чтобы найти частные от деления этого числа на каждое из следующих чисел: 1) 3; 2) i; 3) $-2i$; 4) $6(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$; 5) $2+2\sqrt{3}i$; 6) $1-\sqrt{3}i$.

12.66. Вектор $\overline{OA}$, составляющий с положительным направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{6}$ и имеющий длину, равную 2, подвергнут следующим операциям: 1) растяжению* в 3 раза; 2) повороту на угол $\frac{\pi}{3}$ в положительном направлении и растяжению в $\frac{1}{4}$ раза; 3) повороту на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении и растяжению в 5 раз; 4) повороту на угол $\frac{\pi}{4}$ в положительном направлении.

Определить произведение комплексного числа, изображаемого вектором $\overline{OA}$, на комплексные числа, соответствующие указанным операциям; найти эти комплексные числа-сомножители.

12.67. Вектор $\overline{OA}$, рассмотренный в предыдущей задаче, подвергнут следующим операциям: 1) сжатию** в 2 раза; 2) повороту в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{4}$ и сжатию в $\frac{1}{2}$ раза; 3) повороту в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$ и сжатию в 3 раза; 4) повороту в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{6}$.

Определить частные от деления комплексного числа, изображаемого вектором $\overline{OA}$, на комплексные числа, полученные в результате выполнения указанных операций; найти эти комплексные числа — делимое и делитель.

12.68. Над вектором, изображающим данное число, выполнить указанные в таблице операции и записать число, полученное в результате этих операций. Построить геометрическое изображение сомножителей и произведения или делимого, делителя и частного.

* Растяжение вектора в k раз означает умножение его длины на число k.

** Сжатие вектора в k раз означает деление его длины на число k.

№	Данное число	Операция				Полученное число
		Растяжение	Сжатие	Поворот в пол. напр.	Поворот в отр. напр.	
1.	3	$\frac{1}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		
2.	$2i$		4		π	
3.	$-i$	5		$\frac{3\pi}{4}$		
4.	-4		$\frac{1}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	
5.	$1+i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		
6.	$6-6i$		3		$\frac{3\pi}{4}$	
7.	$-1+i\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		
8.	$-6\sqrt{3}-6i$		6		$\frac{\pi}{6}$	

12.69. Используя показательную форму комплексного числа, выполнить указанные действия:

$$1)\ (1-i)(1+\sqrt{3}i);\quad 2)\ \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i};$$

$$3)\ (1-i)^4;\quad 4)\ \sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}.$$

Решение. Запишем комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ в показательной форме:

$$z_1 = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_2 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Отсюда, используя правила действий (3′) — (6′) над комплексными числами, заданными в показательной форме, получим

$$1)\ z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i} = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{12}i};$$

$$2)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\frac{7\pi}{12}i};$$

$$3)\ z_1^4 = (\sqrt{2})^4\,e^{4\left(-\frac{\pi}{4}i\right)} = 4e^{-\pi i};\quad 4)\ \sqrt[4]{z_2} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}i};$$

полагая $k = 0, 1, 2$, найдем

$$\sqrt[4]{z_2}\Big|_{k=0} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi}{12} i}$$

$$\sqrt[4]{z_2}\Big|_{k=1} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{7\pi}{12} i},$$

$$\sqrt[4]{z_2}\Big|_{k=2} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{13\pi}{12} i} = \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{11\pi}{12} i}.$$

$$\sqrt[4]{z_2}\Big|_{k=3} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{19\pi}{12} i} = \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{5\pi}{12} i}.$$

12.70. Представив числа $z_1 = 2 - 2i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$ в показательной форме, вычислить следующие выражения: 1) $z_1 z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^3; 4) $\sqrt[3]{z_1}$; 5) $\sqrt[4]{z_2}$.

12.71. Даны числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$; $z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Представив их в показательной форме, найти $\frac{z_2 z_3^2}{z_1}$.

12.72. Используя показательную форму комплексного числа, выполнить следующие действия:

$$1)\ (2-2i)^2(-1+i\sqrt{3});\quad 2)\ \frac{-5+5i}{(\sqrt{3}-i)^2};$$

$$3)\ \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)^3(2\sqrt{3}-2i)^2;\quad 4)\ (-\sqrt{3}-i)^5;$$

$$5)\ (\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^8;\quad 6)\ \sqrt[3]{-8i};$$

$$7)\ \sqrt[4]{-81};\quad 8)\ \sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i};\quad 9)\ \sqrt[3]{-27+27i}.$$

12.73. Решить уравнение $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Обозначим $t = z^2$. Тогда данное уравнение примет вид $t^2 + t + 1 = 0$. Найдем корни этого уравнения $t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Отсюда получаем $z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ и $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Чтобы найти z из двух последних уравнений, представим числа $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ и $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ в тригонометрической форме:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Отсюда находим

$$z_{1,2}=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}$$

$$(k=0,\ 1);$$

$$z_{3,4}=\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}$$

$$(k=0,\ 1).$$

Полагая теперь $k=0,\ 1$, получаем корни исходного уравнения:

$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

В задачах 12.74—12.81 решить уравнения.

12.74. $z^2-16i=0$. 12.75. $z^3-27=0$. 12.76. $z^3+8i=0$. 12.77. $z^4+4=0$. 12.78. $z^4+4\sqrt{2}z^2+16=0$. 12.79. $z^4-2\sqrt{3}z^2+4=0$. 12.80. $z^6-2z^3+4=0$. 12.81. $z^6-2z^3+2=0$.

§ 4. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

12.82. Найти множество точек, для которых:

1) $4\leqslant|z-i|\leqslant 5$; 2) $|z+2i|\geqslant 7$;

3) $|z+3|=|z-3i|$;

4) $|z+2|=|z-4|=|z+2i|$.

12.83. Составить квадратное уравнение, если его корни таковы:

1) $x_1=2i$, $x_2=-2i$; 2) $x_1=1-4i$, $x_2=-2+5i$;

3) $x_1=-3-7i$, $x_2=3-7i$;

4) $x_1=\frac{3+i}{1-i}$, $x_2=-1-2i$.

12.84. Выполнить действия:

$$1)\ (1+\sqrt{3}\,i)^4;\quad 2)\ (6-6i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3;$$

$$3)\ \frac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\,(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)};\ 4)\ \sqrt[4]{-16i};\ 5)\ \sqrt[3]{-8-8i};$$

$$6)\ \sqrt[6]{-4+4\sqrt{3}\,i}\ ;\ 7)\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^9;\ 8)\ \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{12}.$$

12.85. Вычислить:

$$1)\ \frac{(\cos 64^\circ+i\sin 64^\circ)\,(\cos 46^\circ+i\sin 46^\circ)}{\cos 20^\circ+\sin 20^\circ};$$

$$2)\ \frac{(\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ)\,(\cos 41^\circ+i\sin 41^\circ)^2}{\cos 19^\circ+i\sin 19^\circ};$$

$$3)\ \frac{\cos 42^\circ+i\sin 42^\circ}{(\cos 51^\circ+i\sin 51^\circ)^2};\quad 4)\ \frac{(\cos 38^\circ+i\sin 38^\circ)^3}{[\cos(-24^\circ)+i\sin(-24^\circ)]^4}.$$

12.86. Проверить равенства:

$$1)\ \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4=-1;$$

$$2)\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5=-\sqrt{2};$$

$$3)\ \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^5+\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^5=\sqrt{3}.$$

12.87. Найти: 1) $e^{-\frac{\pi i}{6}}$; 2) e^{-3-4i}; 3) $e^{\pi e^{\frac{\pi i}{6}}}$.

12.88. Найти действительную и мнимую части функций:

$$1)\ w=(z-i)^2;\ 2)\ w=\frac{1}{z-1};\ 3)\ w=\cos z;\ 4)\ w=\operatorname{ch} z.$$

12.89. Найти:

$$1)\ \cos i;\ 2)\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right);\ 3)\ \operatorname{ch}\frac{\pi}{2}i;\quad 4)\ \operatorname{sh}\,(2-i).$$

12.90. Решить уравнения:

$$1)\ z^2+49i=0;\ 2)\ z^3-125i=0;$$

$$3)\ z^4+256=0;\ 4)\ z^4+\sqrt{2}\,z^2+1=0;$$

$$5)\ z^4-4z^2+16=0;\ 6)\ z^6-8\sqrt{3}\,z^3+64=0.$$

ГЛАВА 13

РЯДЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1,\\ S_2 &= a_1+a_2,\\ S_3 &= a_1+a_2+a_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ S_n &= a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \end{aligned}$$

при $n\to\infty$ имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Этот предел называется *суммой* сходящегося ряда. Если конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

13.1. Написать пять первых членов последовательности, если ее n-й член a_n имеет вид:

1) $\dfrac{1}{4n-1}$; 2) $(-1)^n\cdot\dfrac{1}{4n-1}$; 3) $\dfrac{2^n+1}{2^n}$; 4) $\dfrac{2+(-1)^{n-1}}{n}$.

13.2. Написать пять первых членов ряда, n-й член a_n которого имеет вид:

1) $\dfrac{1}{n!}$; 2) $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{2n-1}$; 3) $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$;

4) $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 5) $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n^2}$.

13.3. Написать n-й член последовательности по данным первым ее членам:

1) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \ldots$; 2) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \ldots$;

3) $1, \dfrac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}, \dfrac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3}, \dfrac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ldots$;

4) $\dfrac{1}{4}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{16}, -\dfrac{4}{25}, \ldots$.

13.4. Написать n-й член ряда по данным первым его членам:

1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\ldots$;

3) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$; 4) $1-1+1-1+\ldots$.

В задачах **13.5—13.7** для данного ряда указать последовательность частичных сумм. Пользуясь непосредственно определением, показать, что ряд сходится, и найти его сумму.

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

Решение. По определению частичной суммы ряда имеем:

$$S_1=a_1=\frac{1}{2},$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},$$

$$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5},$$

. . . .

Таким образом, получаем следующую последовательность частичных сумм:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,$$

общий член которой равен* $\frac{n}{n+1}$. Ясно, что эта последова-

---

* Действительно, представив общий член в виде $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, получим

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

тельность сходится и ее предел равен единице:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Это означает, что данный ряд сходится и сумма его равна единице.

13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} + \ldots$.

13.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.

Указание. Здесь n-я частичная сумма ряда S_n есть сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой $u_1 = 1$, а знаменатель $q = \frac{1}{2}$.

§ 2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд может сходиться только при условии, что его общий член a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ — это *необходимый признак сходимости* ряда.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится — это *достаточный признак расходимости* ряда.

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

1. Признак сравнения. *Если члены знакоположительного ряда*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{2}$$

то из сходимости ряда (2) *следует сходимость ряда* (1), *а из расходимости ряда* (1) *следует расходимость ряда* (2).

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используются *геометрическая прогрессия*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \quad (a > 0),$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$, и *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

являющийся расходящимся рядом.

2. Признак Даламбера. *Если для ряда* (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ *ряд сходится, при* $l > 1$ — *расходится* (при $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным).

13.8. Пользуясь необходимым признаком сходимости, показать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots,$$

расходится.

Решение. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, предел общего члена ряда при $n \to \infty$ отличен от нуля, т. е. необходимый признак сходимости не выполняется. Это означает, что данный ряд расходится.

В задачах **13.9—13.14**, пользуясь необходимым признаком сходимости, доказать расходимость следующих рядов.

13.9. $\frac{1}{9} + \frac{4}{13} + \frac{9}{17} + \ldots + \frac{n^2}{4n+5} + \ldots$.

13.10. $\frac{1}{9} + \frac{2}{19} + \frac{3}{29} + \ldots + \frac{n}{10n-1} + \ldots$.

13.11. $\frac{4}{7} + \frac{7}{12} + \frac{10}{17} + \ldots + \frac{3n+1}{5n+2} + \ldots$.

13.12. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$.

13.13. $2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots$.

13.14. $\frac{1}{2} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{2^3} + \ldots + \frac{n!}{2^n} + \ldots$.

13.15. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{5\cdot 2^n} + \ldots .$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots . \qquad (*)$$

Ряд (*) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. При этом каждый член $a_n=\frac{1}{5\cdot 2^n}$ данного ряда меньше соответствующего члена $b_n=\frac{1}{2^n}$ ряда (*). Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

13.16. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Каждый член $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ данного ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n=\frac{1}{n}$ гармонического ряда. Так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, расходится и данный ряд.

13.17. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Решение. Каждый член ряда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \qquad (*)$$

меньше соответствующего члена ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Как было показано в задаче 13.5, последний ряд сходится. Следовательно, сходится и ряд (*). Сходимость исходного ряда, отличающегося от ряда (*) наличием первого члена 1, теперь очевидна*.

В задачах **13.18—13.24**, пользуясь признаком сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.18. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 4^n}+\ldots.$

13.19. $\frac{1}{6}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}+\ldots.$

---

* Действительно, если сумма ряда (*) есть S, то сумма исходного ряда есть $1+S$.

13.20. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$.

Указание. Сравнить с рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$.

13.21. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$.

13.22. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$.

13.23. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+1+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\ldots$.

13.24. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}+\ldots$.

13.25. С помощью признака Даламбера решить вопрос о сходимости ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots.$$

Решение. Для того чтобы воспользоваться признаком Даламбера, надо знать $(n+1)$-й член ряда. Он получается путем подстановки в выражение общего члена ряда $a_n=\frac{n}{3^n}$ вместо n числа $n+1$: $a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$. Теперь найдем предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му члену при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}.$$

Так как $l=\frac{1}{3}<1$, то данный ряд сходится.

13.26. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots.$$

Решение. Зная $a_n=\frac{n!}{10^n}$, найдем $(n+1)$-й член ряда: $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}:\frac{n!}{10^n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,10^n}{n!\,10^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

Так как $l=\infty>1$, то ряд расходится.

13.27. На основании признака Даламбера исследовать сходимость ряда

$$3+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{3^4}{4^4}+\ldots+\frac{3^n}{n^n}+\ldots.$$

Решение. Зная n-й член ряда $a_n=\frac{3^n}{n^n}$, запишем $(n+1)$-й член: $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}:\frac{3^n}{n^n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n^n}{3^n(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=3\cdot e^{-1}\cdot 0=0^*.$$

Так как $l=0<1$, то ряд сходится.

В задачах 13.28—13.35, пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.28. $1+\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1\cdot 2}+\frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots.$

13.29. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{(\sqrt{3})^2}+\frac{5}{(\sqrt{3})^3}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}+\ldots.$

13.30. $\frac{2}{5}+\frac{2^2\cdot 2^2}{5^2}+\frac{2^3\cdot 3^2}{5^3}+\ldots+\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}+\ldots.$

13.31. $10+\frac{10^2}{2^2}+\frac{10^3}{3^3}+\ldots+\frac{10^n}{n^n}+\ldots.$

13.32. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)}+\ldots.$

Указание. Здесь $a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)(3n+5)}$.

---

* Здесь используется второй замечательный предел: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

13.33. $\frac{3}{8}+\frac{27}{64}+\frac{243}{712}+\ldots+\frac{3^{2n-1}}{8^n}+\ldots$.

13.34. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$.

13.35. $\frac{2}{1}+\frac{2^2\cdot 1\cdot 2}{2^2}+\frac{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots$.

В задачах 13.36—13.42, пользуясь известными признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды.

13.36. $\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\ldots+\frac{n}{n^3+1}+\ldots$.

Указание. Сравнить с рядом

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

13.37. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}+\ldots$.

13.38. $2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$.

13.39. $\sin 1+\sin\frac{1}{2^2}+\sin\frac{1}{3^2}+\ldots+\sin\frac{1}{n^2}+\ldots$.

13.40. $2+\frac{2\cdot 2^2}{(2!)^2}+\frac{2\cdot 3^2}{(3!)^2}+\ldots+\frac{2\cdot n^2}{(n!)^2}+\ldots$.

13.41. $\frac{1!}{3\cdot 2^2}+\frac{2!}{3^2\cdot 3^2}+\frac{3!}{3^3\cdot 4^2}+\ldots+\frac{n!}{3^n(n+1)^2}+\ldots$.

13.42. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$.

§ 3. ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ЛЕЙБНИЦА

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — положительные числа.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости.

Признак Лейбница. *Ряд* (1) *сходится, если его члены монотонно убывают по абсолютной величине и общий член стремится к нулю при $n\to\infty$.*

Применение сходящихся рядов к приближенным вычислениям основано на замене суммы ряда суммой нескольких первых его членов. Допускаемая при этом погрешность очень просто оценивается для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница,— эта ***погрешность меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.***

13.43. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots .$$

Решение. Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$$

и общий член при $n\to\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,$$

то в силу признака Лейбница ряд сходится.

В задачах **13.44—13.49**, пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ряды.

13.44. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2+1}+\ldots .$

13.45. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots .$

13.46. $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{4}{9}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}+\ldots .$

13.47. $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\ldots+(-1)^n\frac{\ln n}{n}+\ldots .$

13.48. $1-\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}-\frac{4!}{4^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}+\ldots .$

13.49. $\sqrt{\frac{1}{101}}-\sqrt{\frac{2}{201}}+\sqrt{\frac{3}{301}}-\ldots+$

$$+(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{100n+1}}+\ldots .$$

13.50. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

суммой четырех первых его членов.

Решение Данный знакочередующийся ряд сходится (см. задачу 13.43). Ошибка ΔS_4, получающаяся при замене суммы S этого ряда суммой четырех первых его членов, меньше абсолютного значения пятого члена: $\Delta S_4 < 0,2$.

13.51. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0,1-\frac{0,1^2}{2}+\frac{0,1^3}{3}-\frac{0,1^4}{4}+\ldots$$

суммой трех первых его членов.

13.52. Сколько членов ряда

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО РЯДА

Ряд

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1}$$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Признак сходимости знакопеременного ряда. *Если ряд*

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots, \tag{2}$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (1), *сходится, то ряд* (1) *также сходится.*

Знакопеременный ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (2), составленный из абсолютных величин членов данного ряда (1).

Сходящийся знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

13.53. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots.$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, первоначальный ряд является абсолютно сходящимся.

13.54. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\dots+\frac{\sin n}{n^2}+\dots.$$

Решение. Рассматриваемый ряд знакопеременный, поскольку он содержит как положительные члены $\left(\frac{\sin 1}{1^2},\right.$ $\left.\frac{\sin 2}{2^2}, \frac{\sin 3}{3^2}, \frac{\sin 7}{7^2}, \dots\right)$, так и отрицательные $\left(\frac{\sin 4}{4^2},\right.$ $\left.\frac{\sin 5}{5^2}, \frac{\sin 6}{6^2}, \dots\right)$.

Ряд

$$\frac{|\sin 1|}{1^2}+\frac{|\sin 2|}{2^2}+\frac{|\sin 3|}{3^2}+\dots+\frac{|\sin n|}{n^2}+\dots$$

сходится, так как его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

13.55. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots. \qquad (*)$$

Решение. Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (см. задачу 13.16). Следовательно, ряд (*) не является абсолютно сходящимся. Остается выяснить, сходится ли он (условно) или расходится. Рассматриваемый ряд — знакочередующийся. Поэтому для решения вопроса о его сходимости можно воспользоваться признаком Лейбница. Так как члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \ldots$ и общий член стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (*) сходится. Итак, данный ряд сходится условно.

13.56. Исследовать на сходимость ряд

$$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{3} + \cdots.$$

Решение. Данный знакопеременный ряд расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3}$ — не существует.

В задачах 13.57—13.65 выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

13.57. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} + \cdots.$

13.58. $-\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{10^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2} + \cdots.$

13.59. $-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n} + \cdots.$

13.60. $\frac{3}{1} - \frac{3\cdot 5}{1\cdot 4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)} + \cdots.$

13.61. $-\frac{2}{5} + \frac{2\cdot 7}{5\cdot 9} - \frac{2\cdot 7\cdot 12}{5\cdot 9\cdot 13} + \cdots + (-1)^n \frac{2\cdot 7\cdot 12\ldots(5n-3)}{5\cdot 9\cdot 13\ldots(4n+1)} + \cdots.$

13.62. $-1 + \frac{2^2}{2!} - \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{n^n}{n!} + \cdots.$

13.63. $-\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} - \cdots + (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{3^n} + \cdots.$

13.64. $\sin 1 - \sin\frac{1}{4} + \sin\frac{1}{9} - \sin\frac{1}{16} + \cdots +$

$$+ (-1)^{n+1} \sin\frac{1}{n^2} + \cdots.$$

13.65. $\frac{\cos 1}{1^3} + \frac{\cos 2}{2^3} + \frac{\cos 3}{3^3} + \cdots + \frac{\cos n}{n^3} + \cdots.$

§ 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенным рядом называется ряд вида (1)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots ,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ — постоянные числа, называемые *коэффициентами* ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Нахождение области сходимости состоит из двух этапов.

1. Определяется *интервал сходимости* степенного ряда, т. е. интервал $(-R, R)$ числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ и обладающий тем свойством, что при всех $|x| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при всех $|x| > R$ — ряд расходится. Для этого применяется признак Даламбера к ряду

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots |a_n||x|^n + \cdots ,$$

члены которого есть абсолютные величины членов данного ряда (1).

2. Исследуется сходимость ряда (1) на концах интервала сходимости в точках $x = -R$ и $x = R$.

13.66. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{2^2}x^2 + \frac{3}{2^3}x^3 + \frac{4}{2^4}x^4 + \cdots + \frac{n}{2^n}x^n + \cdots$$

в точках $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$.

Решение. При $x = 1$ данный ряд превращается в числовой ряд —

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots .$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

При $x = 3$ имеем ряд

$$\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{2}{2^2}\cdot 3^2 + \frac{3}{2^3}\cdot 3^3 + \cdots + \frac{n}{2^n}\cdot 3^n + \cdots .$$

Применяя признак Даламбера, получим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left[(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right] : \left[n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]\right\} = \frac{3}{2} > 1.$$

Следовательно, в точке $x = 3$ данный ряд расходится.

Наконец, при $x = -2$ получаем следующий числовой ряд:

$$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n n + \dots ,$$

который расходится (так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда).

13.67. Дан ряд

$$\frac{1}{4}x+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 7}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 7\cdot 10}x^3+\dots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{4\cdot 7\cdot 10\dots(3n+1)}x^n+\dots .$$

Исследовать его сходимость в точках $x=-1$, $x=\frac{4}{3}$, $x=2$.

13.68. Найти область сходимости степенного ряда

$$1-\frac{x}{2\cdot 2}+\frac{x^2}{3\cdot 2^2}-\frac{x^3}{4\cdot 2^3}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{(n+1)2^n}+\dots .$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{|x|}{2\cdot 2}+\frac{|x|^2}{3\cdot 2^2}+\frac{|x|^3}{4\cdot 2^3}+\dots+\frac{|x|^n}{(n+1)2^n}+\dots .$$

Согласно признаку Даламбера полученный знакоположительный ряд сходится (абсолютно) при тех значениях x, для которых $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. Здесь $u_n=\frac{|x|^n}{(n+1)2^n}$, $u_{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}$. Отсюда

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}:\frac{|x|^n}{(n+1)2^n}\right]=$$
$$=\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\frac{|x|}{2}.$$

Определим, при каких значениях x этот предел l будет меньше единицы. Для этого решим неравенство $\frac{|x|}{2}<1$, или $|x|<2$, откуда $-2<x<2$.

Таким образом, первоначальный ряд сходится (абсолютно) в интервале $(-2, 2)$ — это и есть интервал сходимости данного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-2$ получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1}+\dots .$$

Это — гармонический ряд, который, как известно, расходится.

При $x = 2$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \dots,$$

который по признаку Лейбница сходится (условно).

Итак, область сходимости данного ряда $-2 < x \leqslant 2$.

13.69. Найти область сходимости степенного ряда

$$x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots.$$

Решение. Здесь $u_n = n!\,|x|^n$, $u_{n+1} = (n+1)!\,|x|^{n+1}$. Отсюда

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1),$$

т. е.

$$l = \begin{cases} \infty & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера ряд сходится только в точке $x = 0$.

13.70. Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^3}{3!}x^3 + \dots + \frac{3^n}{n!}x^n + \dots.$$

Решение. Имеем $u_n = \dfrac{3^n}{n!}|x|^n$, $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$. Отсюда

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,3^n\,|x|^n} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, при любом конечном x по признаку Даламбера данный ряд абсолютно сходится. Область сходимости рассматриваемого ряда есть вся числовая ось.

В задачах 13.71—13.81 найти области сходимости заданных степенных рядов.

13.71. $1 + 5x + 5^2x^2 + \dots + 5^nx^n + \dots.$

13.72. $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \dots.$

13.73. $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots.$

13.74. $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots.$

13.75. $\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots.$

13.76. $\frac{1}{2\cdot 3}x+\frac{2}{3\cdot 3^2}x^2+\frac{3}{4\cdot 3^3}x^3+\cdots+\frac{n}{(n+1)\,3^n}x^n+\cdots.$

13.77. $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\sqrt{2}}+\frac{x^3}{2^3\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}+\cdots.$

13.78. $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3\cdot 7}+\frac{x^3}{4\cdot 7^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n+1)\,7^{n-1}}+\cdots.$

13.79. $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$

13.80. $\frac{x}{4^2}+\frac{x^2}{4^3\sqrt[3]{2}}+\frac{x^3}{4^4\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{x^n}{4^{n+1}\sqrt[3]{n}}+\cdots.$

13.81. $\frac{x}{2^2}-\frac{x^2}{3^2e}+\frac{x^3}{4^2e^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n+1)^2\,e^{n-1}}+\cdots.$

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots. \qquad (1)$$

При представлении элементарной функции в виде суммы ряда Тейлора обычно поступают следующим образом: вычисляют последовательные производные данной функции в точке $x=0$, а затем, пользуясь формулой (1), составляют для нее ряд Тейлора и определяют интервал сходимости полученного ряда. В этом интервале ряд Тейлора сходится к породившей его функции $f(x)$, если только все значения $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... получаются непосредственной подстановкой значения $x=0$ в выражения $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...

Применяя рассмотренный способ, можно найти разложение в ряд Тейлора для следующих функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-\infty<x<\infty), \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \ (-\infty < x < \infty), \tag{3}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty), \tag{4}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1), \tag{5}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1), \tag{6}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1). \tag{7}$$

Помимо указанного способа, можно получить разложения функций в ряд Тейлора, исходя из известных разложений, например, разложений (2)—(7). При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их интервалов сходимости:

1) *два степенных ряда можно почленно складывать и умножать* (по правилу умножения многочленов);

2) *степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель*;

3) *степенной ряд можно почленно интегрировать и диффеенцировать любое число раз.*

Так как степенной ряд для своей суммы есть ряд Тейлора, то полученное в результате указанных действий разложение будет скомым.

13.82. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^{3x}$.
Решение. Вычислим значения данной функции и последовательных производных при $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{3x}, & f(0) &= 1,\\ f'(x) &= 3e^{3x}, & f'(0) &= 3,\\ f''(x) &= 3^2e^{3x}, & f''(0) &= 3^2,\\ f'''(x) &= 3^3e^{3x}, & f'''(0) &= 3^3,\\ &\dots\dots & &\dots\dots\\ f^{(n)}(x) &= 3^ne^{3x}, & f^{(n)}(0) &= 3^n,\\ &\dots\dots & &\dots\dots \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в общее выражение яда Тейлора для произвольной функции, получим

$$e^{3x} = 1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n + \cdots .$$

Это и есть разложение в ряд Тейлора для функции $f(x) = e^{3x}$. Полученный ряд сходится к породившей его функци $f(x) = e^{3x}$ при любом значении x (см. задачу 13.70).

Заметим, что то же самое разложение можно получит из ряда Тейлора для функции e^x заменой x на $3x$.

13.83. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \ln(1 - 2x)$.

Решение. Заменяя в разложении (7) x на $-2x$ получим

$$\ln(1-2x) =$$
$$=(-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n} + \cdots$$

или

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{2^2}{2}x^2 - \frac{2^3}{3}x^3 - \cdots - \frac{2^n}{n}x^n - \cdots$$

Разложение (7) справедливо в интервале $-1 < x \leqslant 1$ а искомое разложение получается в результате замены на $-2x$; следовательно, для нахождения интервала схо димости полученного ряда нужно решить неравенство

$$-1 < -2x \leqslant 1,$$

откуда

$$-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

13.84. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \cos^2$

Решение. По известной тригонометрической фор муле имеем

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $\cos 2x$, заменяя в раз ложении (4) x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!} + \cdots,$$

или

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

(

Разложение (4) справедливо при любом x, поэтому ряд Тейлора для $\cos 2x$ сходится к породившей его функции также на всей числовой оси.

Для того чтобы получить разложение в ряд Тейлора функции $\frac{1}{2}\cos 2x$, умножим все члены ряда (*) на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cos 2x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \cdots + \\ + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots .$$

Тогда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{3}{2} - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \cdots + \\ + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots .$$

Это и есть разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = \cos^2 x$. Очевидно, что оно справедливо при любом x.

В задачах 13.85—13.94 данные функции разложить в ряд Тейлора. Указать интервалы сходимости полученных рядов.

13.85. $f(x) = e^{5x}$. **13.86.** $f(x) = e^{-x}$. **13.87.** $f(x) = \sin 3x$.

13.88. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$. **13.89.** $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$.

13.90. $f(x) = \ln(1 + 4x)$. **13.91.** $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

13.92. $f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$. **13.93.** $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$.

13.94. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

В задачах **13.95—13.97**, применяя дифференцирование и интегрирование, найти разложение в ряд Тейлора для данных функций и указать интервалы, в которых эти разложения имеют место.

13.95. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Запишем выражение данной функции в виде интеграла:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Разложим подынтегральную функцию $f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$ в ряд Тейлора. Для этого в разложении (6) заменим x на $-t^2$:

$$f(t)=\frac{1}{1-(-t^2)}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots.$$

Очевидно, что этот ряд сходится в интервале (—1, 1). Интегрируя почленно полученный ряд в пределах от 0 до x(где $|x|<1$), получаем разложение функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

Этот ряд сходится в том же интервале (—1, 1), что и исходный ряд.

13.96. $f(x)=\arcsin x$.

13.97. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

В задачах **13.98—13.102** разложить в степенной ряд функцию $f(x)$ и найти $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ в виде степенного ряда.

13.98. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Указание. Разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора получается почленным делением на x ряда Тейлора для $\sin x$.

13.99. $f(x)=e^{-x^2}$. **13.100.** $f(x)=\sqrt{x}\,e^x$.

13.101. $f(x)=\sqrt{1-x^3}$. **13.102.** $f(x)=\cos x^2$.

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

13.103. Вычислить $\sin 18°$, ограничиваясь первым двумя членами ряда (3), и оценить получающуюся при этом погрешность.

Решение. Так как разложение $\sin x$ в ряд Тейлора справедливо при любом x, то, в частности, при $x=\frac{\pi}{10}$ имеем

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!}-\cdots.$$

олученный ряд — знакочередующийся. Ограничиваясь вумя членами этого ряда, т. е. считая $\sin\frac{\pi}{10}$ равным их умме, мы тем самым допускаем ошибку, не превосходящую ервого отбрасываемого члена $\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!}$ (см. § 3). Так как $\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} < 0{,}0001$, то с точностью до 0,0001 получаем

$$\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} = 0{,}3091.$$

13.104. Вычислить e^2 с точностью до 0,01.

Решение. Пользуясь разложением (2), при $x = 2$ олучим

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \dots .$$

Остается решить вопрос о том, сколько членов данного яда надо взять, чтобы получить значение e^2 с требуемой очностью*. Пусть искомое число членов равно k. Это значает, что ошибка ΔS_k, которую мы допускаем, заменяя сумму ряда его k-й частичной суммой, равна сумме енов ряда, начиная с $(k+1)$-го:

$$\Delta S_k = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2^{k+2}}{(k+2)!} + \frac{2^{k+3}}{(k+3)!} + \dots =$$

$$\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2^{k+2}}{(k+1)!\,(k+2)} + \frac{2^{k+3}}{(k+1)!\,(k+2)\,(k+3)} + \dots =$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{2}{k+2} + \frac{2^2}{(k+2)(k+3)} + \dots\right].$$

Если в этом ряде заменить каждое из чисел $k+2$, $+3$, ... числом $k+1$, то знаменатели дробей умень-

* Так как данный числовой ряд не является знакопеременным, о погрешности нельзя судить по величине первого отбрасываемого члена.

шатся, а сами дроби, следовательно, увеличатся. Отсюд

$$\Delta S_k < \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\left[1+\frac{2}{k+1}+\frac{2^2}{(k+1)^2}+\cdots\right].$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке, есть сумм членов бесконечно убывающей геометрической прогресси со знаменателем $q=\frac{2}{k+1}$, и следовательно, равно

$$\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{2}{k+1}}=\frac{k+1}{k-1}.$$

Таким образом,

$$\Delta S_k < \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k+1}{k-1}=\frac{2^{k+1}}{k!\,(k-1)}.$$

Но, с другой стороны, ошибка ΔS_k не должна превосходит 0,01: $\Delta S_k < 0{,}01$. Решая методом подбора неравенств

$$\frac{2^{k+1}}{k!\,(k-1)} < 0{,}01 \quad \text{или} \quad \frac{k!\,(k-1)}{2^{k+1}} > 100,$$

получим $k > 7$.

Итак, для достижения требуемой точности надо взят 8 членов ряда:

$$e^2 \approx 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\frac{2^7}{7!}\approx 7{,}38.$$

13.105. Вычислить $\cos 20^\circ$, ограничиваясь первым двумя членами ряда (4), и оценить получающуюся при это погрешность.

13.106. Вычислить $\ln 1{,}2$, ограничиваясь первыми тр мя членами ряда (7), и оценить погрешность.

13.107. Вычислить $\sqrt[3]{30}$, ограничиваясь первыми тр мя членами ряда (5), и оценить погрешность.

Указание. Представить $\sqrt[3]{30}$ в следующем виде:

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

13.108. Вычислить $\sqrt[3]{e}$ с точностью до 0,01.

13.109. Вычислить $\sin 12^\circ$ с точностью до 0,001.

13.110. Вычислить $\cos 1^\circ$ с точностью до 0,001.

13.111. Вычислить $\sqrt[4]{80}$ с точностью до 0,001.

13.112. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,01.

Решение. Данный определенный интеграл можно вычислить только приближенно. Для этого разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора (см. задачу 13.98):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5!}\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{1}{7!}\,\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \cdots \approx 1 - \frac{1}{3!3} = 0{,}94$$

$\left(\right.$здесь мы ограничились двумя первыми членами этого знакопеременного ряда, так как третий член $\frac{1}{5!5}$ меньше 0,01$\left.\right)$.

13.113. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

13.114. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} \cos\sqrt{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

13.115. Вычислить $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{1 + x^3}\,dx$ с точностью до 0,0001.

§ 8. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \tag{1}$$

де $z_n = x_n + iy_n$, называется *сходящимся*, если существует конечный предел его частичной суммы

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

ри $n \to \infty$. Этот предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

азывается *суммой* ряда.

Ряд (1) *сходится тогда и только тогда, когда сходится ря*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \qquad (2)$$

членами которого являются действительные части членов ряд (1), *и ряд*

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots, \qquad (3)$$

составленный из мнимых частей членов ряда (1). При этом суммой ряда (1) является комплексное число $S = a + bi$, где a и b — соответственно суммы рядов (2) и (3).

Если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Это необходимый признак сходимости ряда (1).

Если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots,$$

составленный из модулей членов ряда (1), то ряд (1) также сходится и называется *абсолютно сходящимся.*

Степенным рядом с комплексными членами называется ря вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \qquad (4$$

где $z = x + iy$ — независимая переменная; $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные действительные или комплексные числа.

Круг с центром в точке $z = 0$, обладающий тем свойством, чт во всех внутренних его точках ряд (4) сходится, а в точках, лежащих вне этого круга,— расходится, называется *кругом сходимост* ряда (4). Радиус этого круга называется *радиусом сходимости* ряд (4); он находится с помощью признака Даламбера, применяемог к ряду, составленному из модулей членов ряда (4).

13.116. Показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + i\frac{5}{2^n}\right) = (1+5i) + \left(\frac{1}{1!} + \frac{5}{2^1} i\right) + \\ + \left(\frac{1}{2!} + \frac{5}{2^2} i\right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} + i\frac{5}{2^n}\right) + \dots$$

сходится к числу $e + 10i$.

Решение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

составленный из действительных частей членов данног ряда, сходится к числу e, так как этот ряд представляе собой разложение функции e^x при $x = 1$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{5}{2^n} + \cdots,$$

составленный из мнимых частей членов данного ряда, представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой 5, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Следовательно, сумма этого ряда равна

$$\frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10.$$

Таким образом, данный ряд сходится к числу $e + 10i$.

13.117. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

сходится абсолютно.

Решение. Так как $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 1$, то ряд, составленный из модулей членов данного ряда, имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Последний ряд, как известно, сходится (см. задачу 13.17). Отсюда вытекает абсолютная сходимость заданного ряда.

В задачах 13.118—13.127 исследовать заданные ряды на сходимость. Там, где это возможно, найти сумму ряда.

13.118. $\left(1 + \frac{1}{2} i\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} i\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} i\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2^n} i\right) + \cdots.$

13.119. $(1 + 0{,}2i) + \left(\frac{1}{2} + 0{,}2^2 i\right) + \left(\frac{1}{3} + 0{,}2^3 i\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} + 0{,}2^n i\right) + \cdots.$

13.120. $(5 + i) + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3!} i\right) + \left(\frac{5}{6^2} + \frac{1}{5!} i\right) + \cdots + \left[\frac{5}{6^n} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} i\right] + \cdots.$

13.121. $(1-i)+\left(-\frac{1}{2!}-i\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!}\,i\right)+\dots+$
$$+\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{1}{n!}\,i\right]+\dots\,.$$

13.122. $i+2^2i+3^2i+\dots+n^2i+\dots\,.$

13.123. $\left(3+\frac{1}{3}\,i\right)+\frac{1}{3^2}\,i+\frac{1}{3^3}\,i+\dots+\frac{1}{3^n}\,i+\dots\,.$

13.124. $\left(\frac{1}{3\cdot 2}+i\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 2^2}-i\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 2^3}+i\right)+\dots+$
$$+\left[\frac{1}{3\cdot 2^n}+(-1)^{n+1}i\right]+\dots\,.$$

13.125. $(1+i)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{2^2}\,i\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{3^2}\,i\right)+\dots+$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^2}\,i\right)+\dots\,.$$

13.126. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i\right)+\left(\frac{2!}{2^2}+\frac{2}{3}\,i\right)+\left(\frac{3!}{2^3}-\frac{3}{4}\,i\right)+\dots+$
$$+\left[\frac{n!}{2^n}+(-1)^n\,\frac{n}{n+1}\,i\right]+\dots\,.$$

13.127. $(1+i)+\left(-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2!}\,i\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3!}\,i\right)+\dots+$
$$+\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\frac{1}{n!}\,i\right]+\dots\,.$$

13.128. Показать, что следующие ряды сходятся абсолютно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2i}{\sqrt{5}}\right)^n\frac{2^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3i)^n}{n!}$.

13.129. Найти круг и радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

Решение. Построим ряд, составленный из модулей членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n}$. Согласно признаку Даамбера, этот ряд сходится при тех и только тех значениях z, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|z|^{n+1}}{n+1}:\frac{|z|^n}{n}\right)=|z|<1.$$

едовательно, $|z|<1$ — круг сходимости данного ряда, $R=1$ — его радиус сходимости.

В задачах 13.130—13.135 найти круг и радиус сходимос-и следующих рядов.

3.130. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}z^n$. 13.131. $\sum_{n=1}^{\infty}(3-4i)^n z^n$.

3.132. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-i)^n\sqrt{n}}$. 13.133. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(2+\sqrt{5}\,i)^n}z^n$.

3.134. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{(n+1)(8-6i)^{n-1}}$. 13.135. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i\sqrt{3})^n}{ne^n}z^n$.

§ 9. РЯДЫ ФУРЬЕ

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезе $[-\pi, \pi]$ называется ряд вида

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots+$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

оэффициенты которого, называемые *коэффициентами Фурье для* $f(x)$, вычисляются по следующим формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{4}$$

Условия, которые достаточно наложить на функцию $f(x)$ для ого, чтобы ее ряд Фурье сходился именно к этой функции, опреляются теоремой Дирихле.

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$, заданная на отрезк $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет в этом промежутке условиям Дирихле, т. е*

1) *непрерывна за исключением только конечного числа точе разрыва I рода*;*

2) *имеет конечное число экстремумов,*

то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ сумма этого ряда:

равна $f(x)$ во всех точках непрерывности данной функции, ле жащих внутри промежутка; $(-\pi, \pi)$;

равна $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *во всех точках разрыва;*

равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ *на концах промежутка.*

Так как члены ряда — функции периодические с периодом 2π, то из сходимости ряда на отрезке $[-\pi, \pi]$ вытекает его сходимост на всей числовой оси, причем сумма этого ряда является периоди ческой функцией с тем же периодом 2π. Тогда для того чтобы ря Фурье функции $f(x)$ сходился именно к этой функции на всей чис ловой оси, надо и ее считать периодической с периодом 2π.

Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Если функци $f(x)$ — четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурь вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \tag{5}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{6}$$

$$b_n = 0.$$

Таким образом, *четная функция разлагается в ряд Фурь по косинусам:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx + \cdots.$$

Если функция $f(x)$ — нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, т

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{7}$$

Следовательно, *нечетная функция разлагается в ряд Фурь по синусам:*

$$f(x) \sim b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots + b_n\sin nx + \cdots.$$

* Это означает, что в точке разрыва x_0 функция имеет конечный левый предел $f(x_0-0)$ и конечный правый предел $f(x_0+0)$.

13.136. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную в интервале $[-\pi, \pi)$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } -\pi \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{при } \quad 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

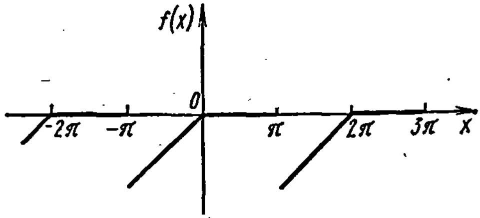


Рис. 47

Решение. График данной функции изображен на рис. 47. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье. Найдем коэффициенты Фурье для $f(x)$ в интервале $[-\pi, \pi)$ по формулам (2), (3), (4). Имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\,dx+\int_{0}^{\pi} 0\cdot dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi} 0\cdot\cos nx\,dx\right).$$

Второй из интегралов, стоящих в скобке, равен нулю; для вычисления первого интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям. Пусть $u=x$, $dv=\cos nx\,dx$; тогда $du=dx$, $v=\frac{1}{n}\sin nx$; следовательно,

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx=x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx=$$

$$= \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2} (\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Итак,

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ — четное;} \\ \dfrac{2}{n^2\pi}, \text{ если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{2}{3^2\pi}$, $a_4 = 0, \ldots$.

Остается вычислить коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 0 \cdot \sin nx\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \sin nx\, dx.$$

Аналогично предыдущему имеем:

$$u = x, \quad \sin nx\, dx = dv; \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx;$$

$$\int_{-\pi}^{0} x \sin nx\, dx = -x \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos \pi n = \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1}.$$

Отсюда $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ т. е.

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = -\frac{1}{4}, \ldots.$$

Подставляя найденные значения $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ в формулу (1), получим

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi} \cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2} \sin 2x +$$

$$+ \left(\frac{2}{3^2\pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x\right) + \cdots,$$

или

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) + $$
$$+\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к $f(x)$ при любом x из промежутка $(-\pi, \pi)$. В точках $x = \pm\pi$ ряд сходится к

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{0-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

13.137. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную в интервале $[-\pi, \pi)$ уравнением $f(x) = x$.

Решение. График данной функции изображен на рис. 48. Эта функция нечетная, следовательно, она разлагается в ряд Фурье по синусам. По формуле (7) имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos \pi n\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом,

$$b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = \frac{2}{3},\ b_4 = -\frac{1}{2},\ b_5 = \frac{2}{5}, \ldots .$$

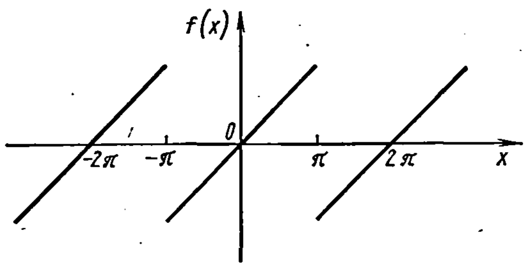


Рис. 48

Следовательно, ряд Фурье данной функции записывается в виде

$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right).$$

Этот ряд сходится к $f(x) = x$ в каждой точке x, принадлежащей промежутку $(-\pi, \pi)$. В точках $x = \pm\pi$ ряд сходится к

$$\frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0.$$

13.138. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, которая на отрезке $[-\pi, \pi]$ задается уравнением

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x \text{ при } & -\pi \leqslant x < 0 \\ x \text{ при } & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

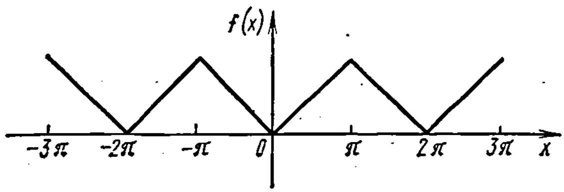


Рис. 49

Решение. Данная функция является четной (рис. 49). Таким образом, она разлагается в ряд Фурье по косинусам. По формуле (5) имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Теперь по формуле (6) найдем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos\pi n - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Итак,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда

$$a_1 = -\frac{4}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{4}{3^2\pi},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{4}{5^2\pi}, \ldots.$$

Следовательно, ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right).$$

Рассматриваемая функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому ее ряд Фурье сходится к этой функции при любом x.

В задачах 13.139—13.144 заданные функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ и определить сумму ряда в точках разрыва и на концах этого интервала.

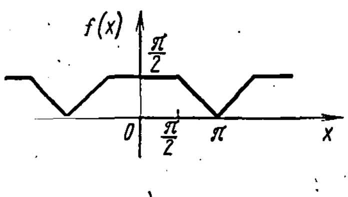
13.139. $f(x) = -\dfrac{x}{2}$. **13.140.** $f(x) = \dfrac{\pi + x}{2}$.

13.141. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi \leqslant x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

13.142. $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{при } -\pi \leqslant x < 0 \\ \pi - x & \text{при } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

13.143. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} & \text{при } -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{при } -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{\pi}{4}, \\ -\dfrac{\pi}{4} & \text{при } \dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \pi. \end{cases}$

13.144. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при } -\pi \leqslant x < 0, \\ \pi - x & \text{при } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$



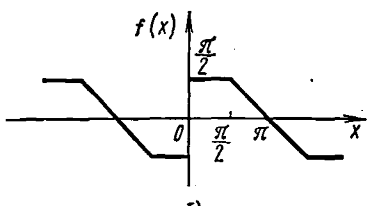


Рис. 50

13.145. Разложить в ряд Фурье функции, графики которых изображены на рис. 50.

ГЛАВА 14

КОМБИНАТОРИКА

§ 1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

В основе решения задач на комбинаторику лежат следующие два правила.

1. **Правило сложения.** *Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а другой элемент B — n способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо A, либо B) можно осуществить $m+n$ способами.*

2. **Правило умножения.** *Если элемент A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.*

Эти правила легко обобщаются на случай произвольного конечного количества элементов.

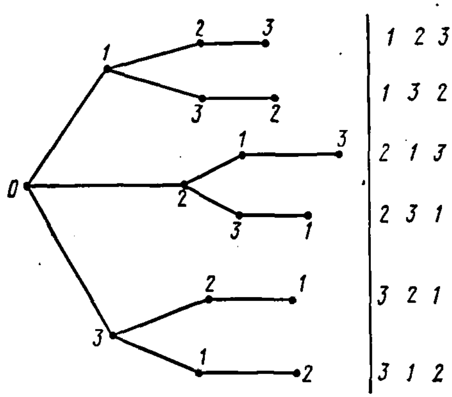


Рис. 51

14.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если никакую из этих цифр не использовать более одного раза?

Решение. Задача сводится к подсчету числа всех возможных групп, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, используя каждую из цифр не более одного раза. Прежде всего выпишем все эти группы. При этом процесс составления таких групп будем изображать в виде так называемого «дерева» (рис. 51). Для этого из некоторой точки O проведем три отрезка, соответствующие числу различных выборов, которые можно сделать на первом этапе (в качестве первого элемента группы может быть взята любая из цифр 1, 2, 3). Из конца каждого построенного отрезка проведем по два отрезка, что соответствует числу выборов, которые можно сделать на втором этапе, если в первый раз был выбран данный элемент (например, если в качестве первой цифры группы была взята цифра 2, то в качестве второй цифры можно взять любую из цифр 1, 3). Далее, из конца каждого из полученных отрезков проведем по отрезку, соответствующему выбору, который можно сделать на третьем этапе, если на первых двух этапах были выбраны данные цифры.

Двигаясь всеми возможными путями из точки O к крайней правой вершине «дерева», мы получим 6 трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3.

Это же число можно получить сразу, используя правило умножения. Так как для выбора первого элемента группы имеется три способа, для выбора второго — два способа, а третьего — один способ, то по правилу умножения выбор трех элементов, составляющих группу, можно произвести $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами.

14.2. Сколько трехзначных и четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра при составлении числа используется не более одного раза?

Решение. В задаче требуется найти количество трехзначных и четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 или, что то же самое, число способов, которыми можно составить либо трехзначное, либо четырехзначное число из этих цифр. По правилу умножения четырехзначное число можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами, трехзначное число $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами. Тогда выбор либо трехзначного, либо четырехзначного числа может быть осуществлен по правилу сложения $24 + 24 = 48$ способами. Таким образом, общее количество трехзначных и четырехзначных чисел, которые можно составить их цифр 1, 2, 3, 4, используя при составлении числа каждую цифру не более одного раза, равно 48.

14.3. Из пункта A в пункт B ведут 3 дороги, а из пункта B в пункт C — 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B?

14.4. На школьном вечере присутствуют 14 девушек и 17 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них пару для танца?

14.5. При составлении одного варианта письменной контрольной работы по математике преподаватель располагает 4 задачами по геометрии, 8 — по алгебре и 3 — по тригонометрии. Сколькими способами можно составить этот вариант, если в него должно войти по одной задаче из перечисленных разделов?

14.6. Из двух полуфинальных групп, каждая из которых содержит по 6 команд, в финал выходит по одной команде. Сколько может быть различных вариантов участников финального матча?

14.7. В забеге участвуют 5 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места в результате забега?

14.8. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 6, 7, если никакая из цифр в составлении числа не должна использоваться более одного раза?

14.9. В книге из 20 страниц на каких-либо трех страницах надо поместить по одной иллюстрации. Сколькими способами это можно сделать?

14.10. В первенстве области по баскетболу участвуют команды 11 районов. Сколько существует различных способов распределения мест в таблице розыгрыша, если на первое место могут претендовать только 4 определенные команды?

14.11. Имеется 9 белых, 12 красных и 11 синих шаров. Сколькими способами можно разложить эти шары по двум урнам так, чтобы каждая урна содержала не менее четырех шаров каждого цвета?

14.12. В урне содержится 3 синих, 5 красных и 2 белых шара. Сколькими способами можно вытащить из урны либо два белых шара, либо два цветных шара, из которых один синий, а другой — красный?

14.13. Имеется 6 различных конвертов без марок, 4 различные марки и 3 различные конверта с марками. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?

14.14. Семья новоселов хочет приобрести письменный стол, книжный шкаф и диван. В мебельном магазине имеется 6 письменных столов, 4 книжных шкафа и 12 диванов. Кроме того, есть 2 гарнитура, содержащие письменный стол и диван, и 8 гарнитуров, содержащих книжный шкаф и письменный стол. Сколькими способами может быть сделана покупка?

§ 2. РАЗМЕЩЕНИЯ

Размещениями из n различных элементов по k называются всевозможные группы, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, и отличающиеся друг от друга или составом элементов, или их порядком.

Число размещений из n различных элементов по k *без повторений* определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1)$$

Число размещений из n различных элементов по k *с повторениями* находится по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (2)$$

14.15. В местком избрано 6 человек. Из них надо выбрать председателя и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Задача сводится к нахождению числа размещений (без повторений) из шести элементов по два, так как здесь существенно и то, кто будет выбран в руководство месткома, и то, как распределятся обязанности между ними. Таким образом, искомое число равно

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

14.16. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Решение. Каждое трехзначное число, составленное из указанных цифр, можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из трех цифр, взятых из данных семи. Поэтому искомое число равно

$$\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343.$$

14.17. Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?

14.18. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9, если каждая цифра в обозначении числа встречается не более одного раза?

14.19. Сколько словарей надо иметь, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из четырех языков: русского, английского, французского, немецкого на любой другой из этих четырех языков?

14.20. Сколькими способами можно преподнести 4 различных подарка шести ученикам таким образом, что каждый ученик получил: а) не более одного подарка; б) не более четырех подарков?

14.21. Местком должен выделить из имеющихся в его распоряжении путевок на турбазы, в дома отдыха и в спортивные лагери по одной путевке четырем лицам. Сколькими способами это можно сделать?

14.22. Сколькими способами можно преподнести трем лицам по одному сувениру из имеющихся пяти различных сувениров, если один из этих сувениров должен быть обязательно преподнесен?

14.23. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит три или четыре цифры. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

14.24. На складе имеются 5 ящиков с различными фруктами и 3 ящика с различными овощами. Сколькими способами можно каждой из двух овощных палаток выдать по одному ящику с фруктами и овощами?

§ 3. ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановками из n различных элементов называются всевозможные группы из этих n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из n различных элементов *без повторений* определяется по формуле

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Число перестановок из n различных элементов *с повторениями*, которые можно сделать из k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, ..., k_n элементов n-го типа, находится по формуле

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}. \qquad (2)$$

14.25. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая цифра в изображении числа встречается один раз?

Решение. Рассматриваемое четырехзначное число может быть представлено как некоторая перестановка из цифр 0, 1, 2, 3, в которой первая цифра отлична от нуля. Так как число перестановок из четырех цифр равно $P_4 = 4!$ и из них $3!$ перестановок начинаются с нуля, то искомое количество равно

$$4! - 3! = 3 \cdot 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

14.26. Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

Решение. Речь идет об отыскании числа перестановок с повторениями, которые можно сделать из $k_1 = 4$ элементов первого типа (зеленых бус), $k_2 = 5$ элементов второго типа (синих бус) и $k_3 = 6$ элементов третьего типа (красных бус). По формуле (2) получаем

$$P(4, 5, 6) = \frac{(4+5+6)!}{4!\,5!\,6!} = \frac{15!}{4!\,5!\,6!} = 630\,630.$$

14.27. Сколько перестановок можно сделать из букв слова: а) врач; б) папа?

14.28. Сколько различных шестизначных чисел, начинающихся цифрой 2 и оканчивающихся цифрой 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра в обозначении числа встречается один раз?

14.29. Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, используя в их написании цифру 1 два раза, а цифры 2 и 3 — по три раза?

14.30. Энциклопедия состоит из восьми томов — с первого по восьмой. Сколькими способами ее можно поставить на полке в беспорядке, т. е. так, чтобы тома не следовали один за другим в порядке их номеров?

14.31. В кассе кинотеатра осталось 2 билета в партер, 3 билета в бельэтаж и 1 билет на балкон. Сколькими способами кассир может выдать по одному билету шести различным лицам?

14.32. Сколькими способами можно разбить $m + n + p$ предметов на три группы, так чтобы в первой было m, во второй n, а в третьей p предметов?

14.33. Пассажирский поезд состоит из трех багажных вагонов и восьми купированных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале?

14.34. Четыре мальчика и четыре девочки рассаживаются в ряд на восемь подряд расположенных мест, причем мальчики садятся на четные места, а девочки — на нечетные. Сколькими способами они могут это сделать?

14.35. Сколькими способами можно посадить за круглый стол трех мужчин и трех женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

§ 4. СОЧЕТАНИЯ

Сочетаниями из n различных элементов по k называются всевозможные группы, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, и отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n различных элементов по k *без повторений* определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (1)$$

Число сочетаний без повторений из n различных элементов по k равно числу сочетаний из этих же n элементов по $n-k$:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{2}$$

Число сочетаний из n различных элементов по k *с повторениями* находится по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \tag{3}$$

14.36. Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, берущихся попарно?

Решение. Различных пар из данных чисел, в которых первый элемент меньше второго, будет, очевидно, столько, сколько можно составить сочетаний из семи элементов по два. Отсюда по формуле (1) получаем искомое число

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

14.37. В кондитерском магазине продаются три сорта пирожных: наполеоны, эклеры и слоеные. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

Решение. В задаче требуется найти число всевозможных групп по 9 элементов, которые можно составить из данных трех различных элементов, причем указанные элементы в каждой группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из трех элементов по девять. Следовательно, по формуле (3) получим

$$\overline{C}_3^9 = C_{11}^9 = \frac{11!}{9!\,2!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

14.38. Сколькими способами из десяти человек можно избрать комиссию, состоящую из четырех членов?

14.39. Сколько прямых можно провести через 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

14.40. Найти число диагоналей n-угольника.

14.41. Сколькими способами можно группу в 20 человек разбить на две подгруппы по 10 человек?

14.42. Стрелок сделал n выстрелов, причем k из них попали в цель. Сколькими способами можно распределить эти k попаданий между указанными n выстрелами?

14.43. В киоске продается мороженое шести сортов. Сколькими способами можно купить 10 мороженых?

14.44. Лифт шестиэтажного дома поднимает с первого этажа 10 человек. Сколькими способами может распределиться между этажами количество человек, вышедших на каждом этаже?

14.45. Сколькими способами можно 5 одинаковых предметов распределить между тремя лицами?

14.46. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из 8 нападающих, 5 защитников и 2 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

§ 5. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

14.47. Компания из 15 человек разделяется на две группы, одна из которых состоит из 6 человек, а другая — из 9 человек. Сколькими способами это можно сделать?

14.48. Сколькими способами можно поставить на книжную полку 15 книг так, чтобы три определенные книги оказались рядом?

14.49. В пространстве даны 7 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти 7 точек?

14.50. В группе 10 детей. Сколькими способами их можно поставить в ряд парами?

14.51. Сколькими способами можно составить три двузначных числа так, чтобы в каждом из них количество десятков не превосходило пяти, а количество единиц было в пределах от шести до девяти?

14.52. Сколькими способами можно переставить буквы слова «хорошо» так, чтобы три буквы «о» не шли подряд?

14.53. Сколько точек M $(x;\ y)$ можно образовать, если абсцисса x и ордината y могут принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6?

14.54. В команду должны быть отобраны четыре спортсмена из имеющихся десяти. Сколькими способами это можно сделать, если два определенных спортсмена должны войти в команду?

14.55. В партии содержится 30 деталей, из них 8 дефектных. Сколькими способами из этой партии можно отобрать 6 деталей так, чтобы четыре из них были качественные и две дефектные?

14.56. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, если в обозначение каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза?

14.57. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Из нее одновременно вынимают два шара одного цвета. Сколькими способами это можно сделать?

14.58. Сколькими способами можно 5 шариков разбросать по восьми лункам, если каждая лунка может вместить все 5 шариков?

14.59. В лифт восьмиэтажного дома вошли 5 пассажиров. Сколькими способами может выйти по одному пассажиру на каждом этаже, начиная со второго?

14.60. В корзине 12 яблок, 10 груш и 20 слив. Сколькими способами могут разделить между собой эти фрукты двое ребят, так чтобы каждый из них получил не менее четырех фруктов каждого вида?

§ 6. БИНОМ НЬЮТОНА

Формулой *бинома Ньютона* называется следующее равенство:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}x^k + \dots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Коэффициенты C_n^k в формуле (1) называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим некоторые свойства формулы бинома Ньютона.

1. *Число всех членов разложения равно* $n+1$.

2. *Общий член разложения имеет вид* $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

3. *Коэффициенты членов, одинаково удалённых от конца разложения, равны между собой.*

4. *Сумма всех биномиальных коэффициентов равна* 2^n.

5. *Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.*

14.61. Раскрыть скобки в выражении:

1) $(4+z)^5$; 2) $(2-3z^2)^4$.

Решение. 1) По формуле бинома Ньютона, полагая $n=5$, $a=4$, $x=z$, получим

$$(4+z)^5 = C_5^0 \cdot 4^5 + C_5^1 \cdot 4^4 z + C_5^2 \cdot 4^3 z^2 + C_5^3 \cdot 4^2 z^3 + C_5^4 \cdot 4z^4 + C_5^5 \cdot z^5 = 1024 + 5 \cdot 256z + 10 \cdot 64z^2 +$$

$$+10\cdot 16z^3+5\cdot 4z^4+z^5=1024+1280z+640z^2+$$
$$+160z^3+20z^4+z^5.$$

2) Полагая в формуле бинома Ньютона $n=4$, $a=2$, $x=-3z^2$, получим

$$(2-3z^2)^4=[2+(-3z^2)]^4=C_4^0\cdot 2^4+C_4^1\cdot 2^3(-3z^2)+$$
$$+C_4^2\cdot 2^2(-3z^2)^2+C_4^3\cdot 2(-3z^2)^3+C_4^4(-3z^2)^4=$$
$$=16-4\cdot 8\cdot 3z^2+6\cdot 4\cdot 9z^4-4\cdot 2\cdot 27z^6+81z^8=$$
$$=16-96z^2+216z^4-216z^6+81z^8.$$

14.62. В разложении $\left(\sqrt{z}-\frac{2}{\sqrt[3]{z}}\right)^{15}$ вычислить член, не содержащий z.

Решение. Полагая в формуле (1) $n=15$, $a=\sqrt{z}$, $x=-\frac{2}{\sqrt[3]{z}}$, вычислим $(k+1)$-й член разложения:

$$T_{k+1}=C_{15}^k\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{15-k}\left(-2z^{-\frac{1}{3}}\right)^k=C_{15}^k(-2)^k z^{\frac{15-k}{2}-\frac{k}{3}}.$$

Приравнивая нулю показатель при z в выражении T_{k+1}, найдем k:

$$\frac{15-k}{2}-\frac{k}{3}=0;\quad 45-3k-2k=0;\quad k=9.$$

Таким образом, z не содержит 10-й член разложения; он равен

$$T_{9+1}=C_{15}^9(-2)^9=-5005\cdot 512=-2\,562\,560.$$

14.63. Раскрыть скобки в выражении:

1) $(3-x)^5$; 2) $(5+2x^3)^4$; 3) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt[4]{a}}\right)^4$;

4) $\left(2\sqrt[3]{b}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^6$.

14.64. Найти:

1) третий член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+4\sqrt{a}\right)^8$;

2) шестой » » $\left(\frac{6}{x\sqrt{x}}-\frac{x^2}{3}\right)^7$;

3) восьмой » » $\left(\frac{2}{b\sqrt[3]{b}}+\sqrt[4]{b^3}\right)^{10}$;

4) средний » » $\left(a^2\sqrt[4]{b}-\frac{\sqrt{a}}{2b}\right)^6$;

5) два средних члена » $\left(z^3-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^7$.

14.65. Найти:

1) член разложения $\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{10}$, не содержащий x;

2) » » $\left(5c\sqrt[4]{c^3}-\frac{1}{\sqrt[4]{c}}\right)^8$, » » c;

3) » » $\left(\frac{z\sqrt[3]{z}}{2a^3}+\frac{a^4}{z^2\sqrt[3]{z^2}}\right)^9$, » » z.

14.66. Найти:

1) член разложения $\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^8$, содержащий x^3;

2) » » $\left(\frac{z}{a^2}-\frac{a^3}{\sqrt[5]{z^3}}\right)^7$, » z^{-1};

3) » » $\left(\frac{a^3\sqrt[3]{a^2}}{b}-\frac{b^3}{a^4}\right)^{10}$, » a^6.

14.67. Найти показатель степени бинома $\left(\frac{2b}{\sqrt[3]{a}}-\frac{a^2}{5\sqrt{b}}\right)^n$ если его четвертый член не зависит от a.

14.68. Коэффициент третьего от конца члена разложения $\left(\frac{y^2}{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)^n$ равен 36. Найти тот член этого разложения, который содержит y^4.

14.69. Биномиальные коэффициенты 4-го и 9-го членов разложения $\left(\frac{5}{x\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x}\right)^n$ равны. Найти тот член разложения, который не содержит x.

14.70. Найти тот член разложения бинома $\left(\frac{1}{z^2}-z^3\sqrt{z}\right)^n$, который содержит z^6, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 256.

ГЛАВА 15

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Если испытание может привести к одному и только к одному из n различных равновозможных исходов (называемых элементарными исходами) и если m из этих исходов благоприятствуют появлению события A, то *вероятность* события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Это — классическое определение вероятности.

Отметим основные свойства вероятности.

1. *Вероятность любого события заключена между нулём и единицей:*

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. *Вероятность достоверного события I, т. е. такого события, которое при испытании обязательно произойдет, равна единице:*

$$P(I) = 1.$$

3. *Вероятность невозможного события O, т. е. события, которое в результате испытания не может произойти, равна нулю:*

$$P(O) = 0.$$

4. *Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\bar{A}$, т. е. таких событий, что появление одного из них исключает появление другого, равна единице:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

15.1. Из урны, в которой находится 4 белых, 9 черных и 7 красных шаров, наугад вынимают один шар. Какова вероятность появления белого шара?

Решение. Здесь элементарным исходом является извлечение из урны любого шара. Число всех таких исходов равно числу шаров в урне, т. е. $n = 20$. Число исходов, благоприятствующих появлению белого шара (событие A), очевидно, равно числу белых шаров в урне, т. е. $m = 4$. Поэтому по формуле (1) находим

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

15.2. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной восьми?

Решение. Обозначим через A_{ij} событие, состоящее в том, что при первом подбрасывании выпало i очков, а при втором — j очков. Тогда 36 событий

$$\begin{gathered} A_{11},\ A_{12},\ \ldots,\ A_{16}; \\ A_{21},\ A_{22},\ \ldots,\ A_{26}; \\ A_{61},\ A_{62},\ \ldots,\ A_{66} \end{gathered}$$

можно рассматривать как элементарные исходы опыта. Следовательно, число всех элементарных исходов $n = 36$. Появлению события A (сумма выпавших очков равна восьми) благоприятствуют исходы A_{26}, A_{35}, A_{44}, A_{53}, A_{62}. Таким образом, $m = 5$. Отсюда получаем

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

15.3. (Задача о выборке.) В партии из S изделий имеется T нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу s изделий нестандартными окажутся t изделий.

Решение. Элементарным исходом является выборка любых s изделий из их общего числа S. Число всех таких исходов равно числу сочетаний из S по s, т. е. $n = C_S^s$. Интересующее нас событие A — это извлечение s изделий, из которых t — нестандартные. Следовательно, благоприятными для A являются такие группы по s изделий, в которых $s-t$ изделий — качественные, а t — нестандартные. Число таких групп

$$m = C_{S-T}^{s-t} \cdot C_T^t,$$

ибо группу из t нестандартных изделий можно образовать C_T^t способами, а группу из $s-t$ качественных изделий — C_{S-T}^{s-t} способами, причем любая группа исправных изделий может комбинироваться с любой группой нестандартных изделий. Отсюда

$$P(A) = \frac{C_{S-T}^{s-t} \cdot C_T^t}{C_S^s}.$$

15.4. Две грани симметричного кубика окрашены в синий цвет, три — в зеленый и одна — в красный. Кубик подбрасывают один раз. Какова вероятность того, что верхняя грань окажется зеленой?

15.5. Какова вероятность того, что при однократном подбрасывании игрального кубика выпадет четное число очков?

15.6. Цифры 1, 2, 3, ..., 9, выписанные на отдельные карточки, складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) нечетное; в) составное; г) однозначное; д) двузначное.

15.7. Из урны, содержащей 6 шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 6, наугад вынимают один за другим все шары. Какова вероятность того, что шары будут вынуты в порядке возрастания их номеров?

15.8. В забеге участвуют пять спортсменов: А, Б, В, Г и Д, каждый из которых имеет одинаковые шансы на успех. Какова вероятность того, что первые три места займут соответственно бегуны А, Б и В?

15.9. Из восьми букв разрезной азбуки составлено слово «институт». Затем карточки с буквами перемешивают и вновь собирают в произвольном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «институт»?

15.10. Слово «учебник» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешивают и из них извлекают по очереди 6 карточек. Какова вероятность того, что эти шесть карточек в порядке выхода составят слово «ученик»?

15.11. Трехзначное число образовано наугад выбранными тремя неповторяющимися цифрами из числа цифр 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность того, что это число четное?

15.12. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны случайным образом вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

15.13. Из урны, содержащей 6 белых и 8 черных шаров, наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынутые шары одного цвета?

15.14. На полке лежат 12 учебников, из них 7—по математике. Студент берет наудачу 5 учебников. Какова вероятность того, что взяты учебники по математике?

15.15. Десять книг на полке расставлены наудачу. Какова вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся рядом?

15.16. Восемь шаров случайным образом размещаются по восьми ящикам. Найти вероятность того, что каждый ящик будет занят.

15.17. Автобус должен сделать 8 остановок. Найти вероятность того, что никакие два пассажира из пяти, едущих в автобусе, не выйдут на одной и той же остановке.

15.18. Из 15 билетов выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди шести билетов, взятых наудачу, будет два выигрышных?

15.19. В классе учится 15 мальчиков и 25 девочек. По жребию выбирают пять учеников этого класса. Какова вероятность того, что среди них окажется две девочки?

15.20. На книжной полке в случайном порядке стоит энциклопедический справочник, состоящий из пяти томов. Какова вероятность того, что хотя бы один из томов этого справочника стоит не на своем месте?

Решение. Обозначим через A событие, заключающееся в том, что хотя бы один из томов справочника стоит не на своем месте. Найдем вероятность противоположного события $\overline{A}$ — все пять томов стоят на своих местах:

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{5!}.$$

Отсюда по свойству 4 имеем

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{5!} = \frac{119}{120}.$$

15.21. Монета подброшена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится цифра.

15.22. В урне 30 шаров, из них 5 белых, 10 зеленых, 4 красных и 11 синих. Из урны наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной?

15.23. В партии из 100 деталей содержится пять бракованных. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу 50 изделий будет хотя бы одно бракованное?

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Если результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причем положения точек в этой области равновозможны, то вероятность события находится по формуле

$$p = \frac{S_0}{S}, \tag{1}$$

где S — геометрическая мера (длина, площадь или объем) всей области, S_0— геометрическая мера той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

15.24. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круге, окажется внутри квадрата?

Р е ш е н и е. Площадь круга $S = \pi r^2$, площадь квадрата $S_0 = 2r^2$, где r — радиус круга (рис. 52). Отсюда по формуле (1) находим искомую вероятность:

$$p = \frac{S_0}{S} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}.$$

15.25. Известно, что телефонный звонок должен последовать от 11 ч до 11 ч 30 мин. Какова вероятность того, что звонок произойдет в последние 10 минут указанного промежутка, если момент звонка случаен?

Р е ш е н и е. Воспользуемся геометрической схемой. Для этого промежуток времени от 11 ч до 11 ч 30 мин представим в виде отрезка AB длиной в 30 единиц, а промежуток времени от 11 ч 20 мин до 11 ч 30 мин — в виде отрезка CB длиной в 10 единиц (рис. 53). Случайный звонок в некоторый момент рассматриваемого получаса изображается наугад взятой точкой на отрезке AB. Тогда вероятность того, что звонок произойдет в интервале от 11 ч 20 мин до 11 ч 30 мин, в полученной схеме означает вероятность того, что точка, наугад взятая на отрезке AB, окажется принадлежащей отрезку CB. Эта вероятность, очевидно, равна

$$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

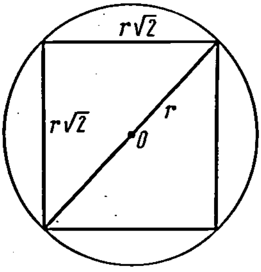


Рис. 52

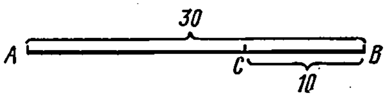


Рис. 53

15.26. В любой момент времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух сигналов. Приемник считается забитым, если разность по времени между сигналами меньше $\tau < T$. Какова вероятность того, что приемник будет забит?

Решение. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат xOy. Пусть x и y — моменты поступления в приемник соответственно первого и второго сигналов. Тогда все возможные комбинации поступления сигналов изобразятся точками квадрата $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

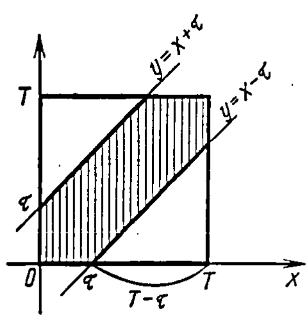


Рис. 54

Так как моменты поступления сигналов равновозможны в течение промежутка времени T, то положения точек $(x;\ y)$ в области рассматриваемого квадрата также равновозможны.

Выясним, какие точки квадрата благоприятствуют интересующему нас событию A (приемник забит). Событие A может произойти лишь в том случае, если разность по времени между сигналами будет меньше τ, т. е. если

$$|x - y| < \tau. \qquad (*)$$

Таким образом, область квадрата, благоприятствующая событию A (на рис. 54 она заштрихована), состоит из точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют неравенству (*).

Площадь квадрата $S = T^2$; площадь заштрихованной области $S_0 = T^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(T - \tau)^2 = T^2 - (T - \tau)^2$. Отсюда

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

15.27. В некоторой точке C, положение которой на телефонной линии AB длиной 1 км равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние: а) не большее чем 400 м; б) не меньшее чем 400 м.

15.28. Решить задачу 15.26 при условии, что один из сигналов поступил в приемник в середине временно́го интервала T.

15.29. В круг вписан равносторонний треугольник. акова вероятность того, что точка, наудачу поставленная круге, окажется внутри треугольника?

15.30. Внутри круга радиуса 20 см проведены две непересекающиеся окружности — одна радиусом 5 см, другая — радиусом 10 см. Найти вероятность того, что точка, зятая наудачу внутри большого круга, окажется лежащей нутри одной из малых окружностей.

15.31. Квадрат со стороной a разбит на четыре части трезками прямых, соединяющих середины противоположых сторон. В этот квадрат брошена монета радиуса $< \frac{a}{4}$. Найти вероятность того, что монета не пересечет и одной из сторон квадратов, на которые разбит основной вадрат.

15.32. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между 13 и 14 часами. Пришедший первым дет второго в течение 20 минут, после чего уходит. Опреелить вероятность встречи друзей, если моменты их прихода в указанном промежутке времени равновозможны.

15.33. На отрезке длины L наугад берутся две точки. акова вероятность того, что расстояние между ними меньше $< L$?

§ 3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состояее в совместном осуществлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей. *Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ есовместны, т. е. никакие два из них не могут осуществиться месте, то*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \qquad (1)$$

Вероятность события A, вычисленная в предположении, что роизошло событие B, называется *условной вероятностью события при условии B* и обозначается $P(A/B)$.

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность проивведения ескольких событий равна произведению вероятности одного из их на условные вероятности всех остальных, причем вероятность аждого последующего события вычисляется в предположении что е предыдущие события уже произошли:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1}). \qquad (2)$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ *независимы*, т. е. осуществлени любого числа из них не меняет вероятностей осуществления ос тальных, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \ ... \ A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ ... \ P(A_n). \quad (3$$

15.34. В партии из 50 изделий содержится пять брако ванных. Какова вероятность того, что из выбранных нау дачу 30 изделий не более одного бракованного?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том что 30 изделий выборки — качественные, B — в рас сматриваемой выборке из 30 изделий только одно брако ванное, C — не более одного бракованного. Тогда, оче видно, $C = A + B$. Так как события A и B несовместны то по формуле (1) имеем

$$P(C) = P(A) + P(B)..$$

Найдем вероятности событий A и B (см. задачу 15.3)

$$P(A) = \frac{C_{45}^{30}}{C_{50}^{30}} \approx 0{,}007, \quad P(B) = \frac{C_{45}^{29} \cdot C_5^1}{C_{50}^{30}} \approx 0{,}065.$$

Отсюда $P(C) \approx 0{,}072$.

15.35. Два станка работают независимо друг от друга Вероятность бесперебойной работы первого станка в те чение некоторого времени t равна $p_1 = 0{,}9$, второго $p_2 = 0{,}8$. Какова вероятность бесперебойной работы обои. станков в течение указанного промежутка времени?

Решение. Рассмотрим следующие события: A_1 і A_2 — бесперебойная работа соответственно первого и вто рого станков в течение времени t; A — бесперебойная ра бота обоих станков в течение указанного времени. Тогд' событие A есть совмещение событий A_1 и A_2, т. е. $A = A_1A_2$. Так как события A_1 и A_2 независимы (станкı работают независимо друг от друга), то по формуле (3 получим

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

15.36. В задаче 15.35 определить вероятность беспере бойной работы хотя бы одного из двух станков в течени времени t (событие B).

Решение. Первый способ. Рассмотрим про тивоположное событие $\overline{B}$, означающее простой обоих стан ков в течение времени t. Очевидно, что событие $\overline{B}$ есть сов мещение событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ — простоев первого и второг станков, т. е. $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Так как события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ независимы, то

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)] = \\ = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Отсюда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}98.$$

Второй способ. Событие B происходит в том случае, когда имеет место одно из следующих трех несовместных событий: либо $A_1 \cdot \overline{A}_2$ — совмещение событий A_1 и $\overline{A}_2$ (первый станок работает, второй — не работает), либо $\overline{A}_1 \cdot A_2$ — совмещение событий $\overline{A}_1$ и A_2 (первый станок не работает, второй — работает), либо A_1A_2 — совмещение событий A_1 и A_2 (оба станка работают), т. е.

$$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2.$$

По формуле (1) получим

$$P(B) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2) + P(A_1 \cdot A_2).$$

В силу того, что события A_1 и A_2, а следовательно, A_1 и $\overline{A}_2$, $\overline{A}_1$ и A_2 независимы, имеем

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= P(A_1)[1 - P(A_2)] + [1 - P(A_1)]P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}98.$$

15.37. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов; вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4. Определить вероятность того, что разрыва цепи не произойдет.

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3 означают выход из строя соответственно первого, второго и третьего элементов. Их вероятности по условию соответственно равны: $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}3$; $P(A_3) = 0{,}4$. Тогда вероятности противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ (соответственно первый, второй и третий элемент не вышел из строя) равны: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}6$.

Событие A, состоящее в том, что разрыва цепи не произошло, есть совмещение независимых событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$: $A = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Следовательно, по формуле (3) получаем

$$P(A) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336.$$

15.38. В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно вынимают три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй — красным и третий — белым.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие события: A — первый вынутый шар черный, B — второй шар красный, C — третий шар белый. Обозначим через D событие, заключающееся в том, что шары вынуты в последовательности: черный, красный, белый. Очевидно, $D = A \cdot B \cdot C$.

По формуле (2) имеем

$$P(D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB).$$

Найдем вероятности, входящие в правую часть этого равенства. Вероятность того, что первоначально вынут черный шар, $P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Вероятность извлечения из урны красного шара при условии, что первоначально был вынут черный шар, $P(B/A) = \frac{5}{14}$, так как после изъятия черного шара в урне осталось 14 шаров и из них — 5 красных. Вероятность извлечения из урны белого шара после того, как были извлечены черный и красный шары, $P(C/AB) = \frac{4}{13}$ (после изъятия черного и красного шаров в урне осталось 13 шаров и из них — 4 белых).

Таким образом,

$$P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{\cdot}{13} = \frac{4}{91} \approx 0{,}044.$$

15.39. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображенной на рис. 55. Различные элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятности безотказной работы элементов за время T следующие:

лемент	A_1	A_2	A_3	A_4
ероятность	0,6	0,8	0,7	0,9

пределить вероятность безотказной работы системы за ремя T.

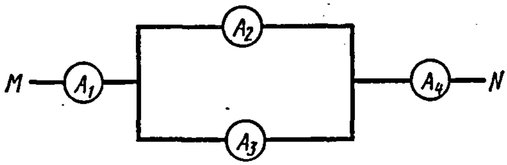


Рис. 55

Решение. Участок MN электрической цепи пропускает ток (событие A)в случае совмещения следующих трех обытий: A_1— работает элемент A_1, A_4— работает элемент $_4$ и B — работает хотя бы один из двух элементов A_2 и A_3, . е. $A = A_1 \cdot A_4 \cdot B$.

Так как события A_1, A_4 и B независимы, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_4) \cdot P(B).$$

я нахождения $P(B)$ вычислим вероятность события $\overline{B}$, аключающегося в том, что элементы A_2 и A_3 вышли из троя. Поскольку $\overline{B} = \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ и события $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ независимы, то

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = [1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] =$$

$$= 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

Отсюда $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0,94$. Таким образом,

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,94 = 0,5076.$$

15.40. В технической системе дублированы не все, а только некоторые (наименее надежные) узлы. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого из узлов дана на рис. 56. Определить надежность системы.

Решение. Безотказная работа системы (событие A) возможна только в том случае, когда работает хотя бы один из двух элементов A_1 (событие A_1), работают элементы A_2

и A_3 (события A_2 и A_3) и работает хотя бы один из трех эле ментов A_4 (событие A_4), т. е.

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

Так как события A_1, A_2, A_3, A_4 независимы, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4).$$

Найдем вероятности, входящие в правую часть этог равенства. Вычисляя $P(A_1)$ и $P(A_4)$ точно так же, как эт было сделано в задаче 15.36 (первый способ), получим

$$P(A_1) = 1 - (1 - p_1)^2, \quad P(A_4) = 1 - (1 - p_4)^3.$$

Отсюда

$$P(A) = p_2 p_3 [1 - (1 - p_1)^2][1 - (1 - p_4)^3].$$

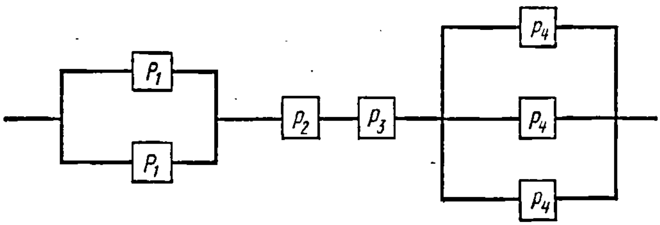


Рис. 56

15.41. Пассажир ждет автобус одного из двух маршру тов возле остановки, у которой останавливаются автобус шести маршрутов. Считая, что автобусы всех маршруто приходят в среднем одинаково часто, найти вероятност того, что первый же подошедший к остановке автобус сле дует по нужному пассажиру маршруту.

15.42. Два стрелка производят по мишени по одном выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первог стрелка равна 0,6, для второго — 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень.

15.43. Решить задачу 15.38 при условии, что посл каждого вынимания шар возвращают в урну и шары урне перемешивают.

15.44. Игральный кубик подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что при первом бросании выпаде четное число очков, при втором — 5 очков, при третьем число очков, кратное трем?

15.45. Из урны, содержащей 7 красных и 9 синих шаров, вынимают один за другим два шара. Найти вероятность двукратного извлечения синего шара.

15.46. Решить задачу 15.8, используя теорему умножения.

15.47. В кассе кинотеатра осталось 8 разрозненных билетов на места 20-го ряда и 4 разрозненных билета на места 10-го ряда. Какова вероятность того, что первые четыре человека, стоящие в очереди, каждый из которых покупает только один билет, получат оставшиеся билеты 10-го ряда?

15.48. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 3% всей продукции составляют нестандартные изделия, а 75% стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта?

15.49. По каналу связи с одинаковыми вероятностями передаются 10 сигналов. Ввиду помех четыре из переданных сигналов при приеме искажаются. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых сигналов хотя бы один удет принят неискаженным.

15.50. Электрическая цепь состоит из двух последовательно соединенных элементов, которые могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями $p_1 = 0{,}1$ и $p_2 = 0{,}2$ соответственно. Определить вероятность перерыва питания цепи.

15.51. Вероятность боя стеклянной тары при погрузке на автомашины равна 0,06, а при транспортировке на автомашинах — 0,05. Какова вероятность боя стеклянной тары?

15.52. Вероятность брака из-за нарушения режима обработки деталей равна 0,02, а вследствие неисправности танка — 0,08. Какова вероятность выпуска бракованных еталей?

15.53. В условиях задачи 15.42 найти вероятность того, что в мишень попадет только один из двух стрелков.

15.54. Для проверки собранной схемы последовательно послано три единичных импульса. Вероятности прохождения каждого из них не зависят от того, прошли остальные импульсы или нет, и соответственно равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}7$. Определить вероятность того, что пройдут не менее двух из посланных импульсов.

15.55. Для того чтобы сдать коллоквиум, студент должен ответить на два из трех вопросов, предлагаемых преподавателем. Студент не знает ответов на восемь вопросо из тех сорока, которые могут быть предложены. Каков вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

15.56. Решить задачу 15.39 для схем, изображенны на рис. 57, *а—г*.

15.57. Решить задачу 15.40 для технической схемы, изо браженной на рис. 58.

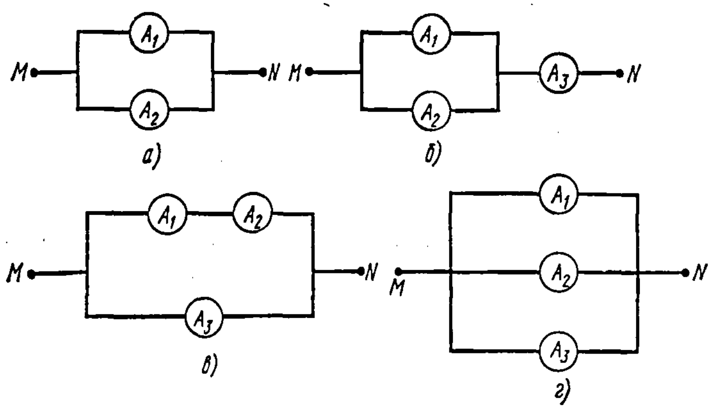


Рис. 57

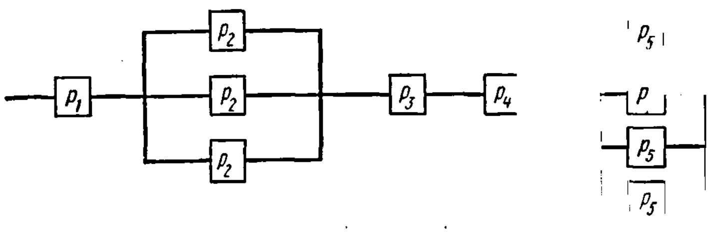


Рис. 58

15.58. В электроприборе вышел из строя некоторы элемент. Для его замены решили воспользоваться двум некомплектными приборами. Вероятность того, что нуж ный элемент есть в каждом из двух приборов, равна 0,8 а вероятность того, что этот элемент работает, равна 0, для каждого прибора. Найти вероятность того, что испор ченный элемент будет заменен.

§ 4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Если с некоторым опытом связано n исключающих друг друга событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и если событие A может осуществиться только при одной из этих гипотез, то вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности:*

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n).$$

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$, то после проведения опыта, в результате которого осуществилось событие A, вероятности гипотез можно переоценить по *формуле Байеса:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

15.59. Имеется три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй — 5 белых и 4 черных, в третьей — 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым; б) белый шар вынут из второй урны.

Р е ш е н и е. а) Пусть A — событие, означающее, что извлечен белый шар. Рассмотрим три гипотезы:

H_1— выбрана первая урна;
H_2— » вторая » ;
H_3— » третья » .

Так как урна, из которой извлекают шар, выбирается наугад, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A соответственно равны:

$P(A/H_1) = \frac{4}{9}$ (вероятность извлечения белого шара из первой урны),

$P(A/H_2) = \frac{5}{9}$ (вероятность извлечения белого шара из второй урны),

$P(A/H_3) = 1$ (вероятность извлечения белого шара из третьей урны).

Отсюда по формуле полной вероятности получим

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

б) Для определения вероятности того, что белый шар извлечен из второй урны, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{18}.$$

15.60. По линии связи передаются два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0,72 и 0,28. Из-за помех $\frac{1}{6}$ часть A-сигналов искажается и принимается как B-сигналы, а $\frac{1}{7}$ часть переданных B-сигналов принимается как A-сигналы.

а) Определить вероятность того, что на приемном пункте будет принят A-сигнал.

б) Известно, что принят A-сигнал. Какова вероятность того, что он же и был передан?

Р е ш е н и е. а) Пусть событие A — на приемном пункте появился A-сигнал. Введем гипотезы: H_A — передан сигнал A, H_B — передан сигнал B. По условию $P(H_A) = 0{,}72$; $P(H_B) = 0{,}28$.

Вероятность того, что принят A-сигнал при условии, что он же послан, равна

$$P(A/H_A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Вероятность того, что принят A-сигнал при условии, что послан B-сигнал, равна

$$P(A/H_B) = \frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = P(H_A)\cdot P(A/H_A) + P(H_B)\cdot P(A/H_B) =$$
$$= 0.72\cdot\frac{5}{6} + 0{,}28\cdot\frac{1}{7} = 0{,}64.$$

б) Вероятность приема A-сигнала при условии, что он же был передан, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_A/A) = \frac{P(H_A)\cdot P(A/H_A)}{P(A)} = \frac{0{,}72\cdot\frac{5}{6}}{0{,}64} = \frac{0{,}6}{0{,}64} \approx 0{,}94.$$

15.61. Турист выходит из пункта O и на разветвлении дорог выбирает наугад один из возможных путей. Схема дорог изображена на рис. 59. Какова вероятность того, что турист попадет в пункт M?

15.62. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 90% всех случаев работы прибора, ненормальный — в 10%. Вероятность выхода прибора из строя за время T в нормальном режиме равна 0,1, в ненормальном — 0,6. Найти вероятность выхода прибора из строя за время T.

15.63. На заводе 30% продукции производится цехом I, 45% — цехом II, а остальные 25% — цехом III. Цех I дает 0,5% брака всей производимой им продукции, цех II — 1% и цех III — 0,4%. Наугад выбранная единица продукции оказалась браком. Какова вероятность того, что она была произведена цехом II?

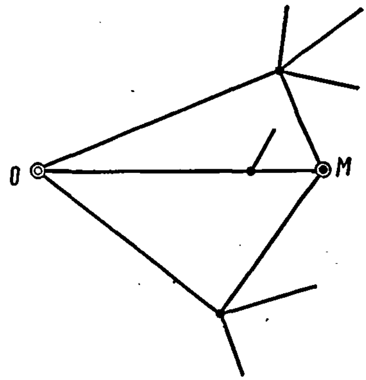


Рис. 59

15.64. Три стрелка делают по мишени по одному выстрелу с вероятностями попадания соответственно 0,8; 0,7; 0,9. а) Найти вероятность того, что наугад взятый стрелок попадет в мишень. б) Известно, что в мишень сделано одно попадание. Какова вероятность того, что это попадание сделано вторым стрелком?

15.65. Студент, явившийся на экзамен последним, берет наугад один из оставшихся шести билетов. Вероятности того, что он получит положительную оценку, отвечая на каждый из этих билетов, следующие: 0,5; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Какова вероятность того, что студент получит положительную оценку?

15.66. Число пассажирских пароходов, проплывающих по реке мимо навигационного знака, относится к числу грузовых пароходов как 2 : 5. Вероятность того, что знак будет сбит пассажирским пароходом, равна 0,01, а грузовым пароходом — 0,03. Найти вероятность того, что знак не будет сбит проходящим пароходом.

15.67. В ящике имеются три детали, из которых по крайней мере одна качественная. Из ящика вынимают наудачу одну деталь. Какова вероятность того, что вынутая деталь качественная, если все возможные предположения о количестве качественных деталей в ящике равновероятны?

15.68. Для сигнализации о том, что режим автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит индикатор?

§ 5. СХЕМА ПОВТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Если при одних и тех же условиях определенный опыт повторяется n раз и если вероятность появления некоторого события A в каждом опыте равна p, то вероятность того, что событие A в серии из n опытов произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где} \quad q = 1 - p. \tag{1}$$

Число k_0 появлений события A в серии из n опытов, вероятность которого наибольшая, называется *наивероятнейшим числом* наступления события A в n опытах. Это число находят по формуле*

$$k_0 = [np + p]. \tag{2}$$

Если число $np + p$ — целое, то наивероятнейшим будет также и число $k_0 - 1$ с той же вероятностью $P_n(k_0)$.

15.69. Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две детали будут нестандартными. Каково наивероятнейшее число нестандартных деталей в рассматриваемой выборке из 30 деталей и какова его вероятность?

Р е ш е н и е. Здесь опыт заключается в проверке каждой из 30 деталей на качество. Событие A — появление нестандартной детали; его вероятность $p = 0{,}04$, тогда $q = 0{,}96$. Отсюда по формуле Бернулли находим

$$P_{30}(2) = C_{30}^2 (0{,}04)^2 (0{,}96)^{28} \approx 0{,}202.$$

---

*Символом $[x]$ обозначают *целую часть* числа x. Для ее нахождения дробная часть числа x отбрасывается. Например, $[3{,}14] = 3$, $\left[2\frac{1}{9}\right] = 2$ и т. д.

Наивероятнейшее число нестандартных деталей в данной выборке вычисляется по формуле (2):

$$k_0 = [30 \cdot 0,04 + 0,04] = [1,24] = 1,$$

а его вероятность равна

$$P_{30}(1) = C_{30}^1 \cdot 0,04^1 \cdot (0,96)^{29} \approx 0,305.$$

15.70. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет: а) хотя бы одно попадание; б) не менее трех попаданий; в) не более одного попадания.

Решение. Здесь $n = 4$, $p = 0,8$, $q = 0,2$. а) Найдем вероятность противоположного события — в серии из четырех выстрелов нет ни одного попадания в цель:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,2^4 = 0,0016.$$

Отсюда находим вероятность хотя бы одного попадания в цель:

$$P_4(k \geqslant 1) = 1 - 0,0016 = 0,9984.$$

б) Событие B, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не менее трех попаданий в цель, означает, что было либо три попадания (событие C), либо четыре (событие D), т. е. $B = C + D$. Отсюда $P(B) = P(C) + P(D)$; следовательно,

$$P_4(k \geqslant 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 =$$

$$= 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,8192.$$

в) Аналогично вычисляется вероятность попадания в цель не более одного раза:

$$P_4(k \leqslant 1) = P_4(0) + P_4(1) = 0,0016 + C_4^1 p^1 q^3 =$$

$$= 0,0016 + 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,2576.$$

15.71. Что вероятнее: выиграть у равносильного партнера три партии из четырех или пять партий из восьми?

15.72. Монету подбрасывают 6 раз. Найти вероятность того, что цифра выпадет: а) не более двух раз; б) более двух раз.

15.73. Вероятность появления некоторого события в каждом из 5 независимых опытов равна 0,7. Найти вероятность появления этого события по крайней мере два раза.

15.74. Вероятность появления события A в каждом из 8 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие A появится: а) не менее трех и не более шести раз; б) не менее трех раз; в) не более двух раз.

15.75. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,003. Найти наивероятнейшее число обрывов нити в течение одной минуты.

15.76. Первый рабочий производит в данный промежуток времени 60 изделий с вероятностью брака 5%, а второй рабочий за то же время — 70 изделий с вероятностью брака 4%. У какого рабочего наивероятнейшее число качественных изделий больше?

15.77. В урне 4 белых и 13 черных шаров. Опыт заключается в извлечении одного шара из урны с последующим его возвращением. Каково наивероятнейшее число появлений белого шара в 50 опытах?

15.78. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в цель при четырех независимых выстрелах равна 0,9919. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Указание. Воспользовавшись тем, что $P_4(0)=1-0{,}9919=$ $=0{,}0081$, найти q из уравнения $C_4^0 p^0 q^4=0{,}0081$.

15.79. Стрелок производит три выстрела. Вероятность того, что он попадет в цель по крайней мере один раз, равна 0,992. Какова вероятность попадания в цель при одном выстреле?

§ 6. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

15.80. В ящике находятся карточки с номерами от 1 до 50. Какова вероятность того, что номер первой наудачу извлеченной карточки не содержит цифры 4?

15.81. Из мешка, содержащего 8 шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 8, наугад последовательно вынимают три шара. Найти вероятность того, что: а) шары вынимают в порядке возрастания их номеров; б) номера всех трех шаров нечетные.

15.82. Имеется 12 различных книг, из которых шесть стоят по 1 рублю каждая, четыре по 75 копеек и две — по 50 копеек. Какова вероятность того, что взятые наудачу три книги стоят 2 рубля?

15.83. Какова вероятность того, что при бросании трех игральных кубиков хотя бы на одном из них появится цифра 3?

15.84. В куб вписан шар. Какова вероятность того, что точка, взятая наудачу внутри куба, окажется внутри шара?

15.85. В партии из 20 деталей содержится 4 нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу шести деталей не более одной нестандартной.

15.86. В урне имеется 8 черных и 5 белых шаров. Найти вероятность двукратного извлечения черного шара: а) если вынутый шар возвращают обратно в урну; б) если вынутый шар в урну не возвращают.

15.87. Два стрелка производят по мишени по одному выстрелу. Вероятность промаха для одного из них равна 0,1, а для другого — 0,3. Найти вероятности следующих событий: а) ни одного попадания; б) только одно попадание; в) по крайней мере одно попадание; г) два попадания.

15.88. В урне 25 шаров, из них 10 красных, 7 синих и 8 зеленых. Какова вероятность того, что первый извлеченный шар будет красным, второй — синим и третий — зеленым? (Вынутые шары в урну не возвращают.)

15.89. Решить задачу 15.39 для схем, изображенных на рис. 60.

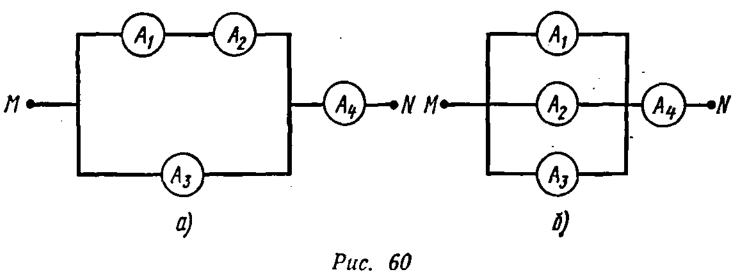


Рис. 60

15.90. В электрическую цепь включены параллельно три прибора. Вероятности того, что каждый из них проработает определенное число часов, равны 0,6; 0,4; 0,7. Найти вероятность того, что указанное количество времени проработает: а) хотя бы один прибор: б) не более одного прибора; в) не менее двух приборов; г) ровно два прибора.

15.91. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Вероятности того, что лампа проработает определенное число часов, для этих партий соответственно равны 0,7; 0,9; 0,8. Найти вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

15.92. Известно, что 20% всех приборов собирает специалист высокой квалификации, а 80%—средней квалификации. Надежность прибора, собранного специалистом высокой квалификации, равна 0,9, надежность прибора, собранного специалистом средней квалификации, равна 0,7. Взятый прибор оказался надежным. Найти вероятность того, что он собран специалистом высокой квалификации.

15.93. Для участия в отборочных спортивных соревнованиях выделено 5 студентов из I группы, 4 — из II группы и 6 — из III группы. Вероятности того, что студент I, II и III группы попадет в сборную команду, соответственно равны 0,7; 0,9 и 0,7. Выбранный наудачу студент в итоге соревнования попал в сборную. Определить, к какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент.

15.94. Вероятность появления некоторого события отдельном испытании равна 0,75. Какова вероятност того, что при восьмикратном повторении испытания эт событие появится менее пяти раз?

15.95. По мишени производится 6 независимых вы стрелов. Вероятность попадания при каждом выстрел равна 0,7. Определить вероятность того, что будет: а) хотя бы одно попадание; б) только одно попадание; в) не более трех попаданий; г) не менее четырех попаданий· д) от двух до пяти попаданий.

15.96. В результате постоянных наблюдений было ус тановлено, что вероятность выпадения дождя 1 июня в некоторой местности равна $\frac{4}{19}$. Каково наивероятнейшее число дождливых дней 1 июня для данной местности за ближайшие 100 лет?

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.4. 1) 1; 2) 10; 3) 4; 4) 2. 1.5. B (3). 1.7. 1) $M\left(\frac{5}{3}\right)$; 2) M (0); 3) $M\left(\frac{1}{2}\right)$; 4) M (—3). 1.10. 1) $-5\frac{1}{2}$; 2) 7; 3) 0. 1.11. 1) 2; 2) 6. 1.12. M (1). 1.13. 3. 1.14. $M\left(4\frac{1}{2}\right)$. 1.17. Во II; в IV; в I; в III. 1.18. 1) В III или IV; 2) в I или IV. 1.19. (0; —3). 1.20. 1) На прямой, перпендикулярной оси абсцисс; 2) на прямой, перпендикулярной оси ординат; на биссектрисе I и III координатных углов. 1.22. Для точки A: (—3; 1), (3; —1), (3; 1); для точки B: (0; 4), (0; —4), (0; 4). 1.23. 1) (0; 0), (5; 0), (5; 5), (0; 5); 2) (0; 0), (5; 0), (5; —5), (0; —5); 3) (0; 0), (—5; 0), (—5; 5), (0; 5); 4) (0; 0), (—5; 0), (—5; —5), (0; —5). 1.24. $(\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; -\sqrt{2})$. 1.25. 1) (0; 0), (4; 0), $(2; 2\sqrt{3})$; 2) (0; 0), (4; 0), $(2; -2\sqrt{3})$; 3) (0; 0), (—4; 0), $(-2; 2\sqrt{3})$; 4) (0; 0), (—4; 0), $(-2; -2\sqrt{3})$. 1.27. 1) 5; 2) 10; 3) 13; 4) $5\sqrt{5}$. 1.28. 1) 5; 2) 12; 3) 26; 4) 17; 5) 12. 1.29. 18. 1.31. 1) Прямоугольный; 2) тупоугольный; 3) остроугольный. 1.33. (0; 0), (—12; 0), (0; 16). 1.34. 12. 1.35. D (5; —1). 1.36. (10;10) или (2; 2). 1.38. 1) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right)$; 2) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{13}{5}; \frac{16}{5}\right)$; 4) $\left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$. 1.39. 1) (1; —2); 2) (1; 2); 3) $\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. 1.40. $\sqrt{26}$, $\sqrt{26}$, $4\sqrt{2}$. 1.41. $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$. 1.43. (0; 3). 1.44. $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. 1.45. $\left(-\frac{3}{4}; 5\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, $\left(\frac{15}{4}; 1\right)$. 1.47. B (—5; —2). 1.48. C (5; 7). 1.49. C (12; 7), D (4; —2). 1.50. D (4; 1). 1.51. A (3; —5), B (—6; 4). 1.53. $C\left(\frac{11}{2}; 1\right)$. 1.54. $\left(0; \frac{11}{3}\right)$ и $\left(\frac{11}{5}; 0\right)$. 1.55. $C\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$. 1.57. 1) Точки B, D и E принадлежат, точки A и C — нет. 1.62. 1) (1; 3); 2) (3; 4), (3;—4); 3) (0; 1); 4) (2; 3), (3; 2), (—2; —3), (—3; —2). 1.64. $4x+6y+13=0$. 1.65. $x+3y-5=0$. 1.66. $y^2=6x-9$. 1.67. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 1.68. $x^2+y^2=5$. 1.69. $x+2y-5=0$. 1.70. $x^2+y^2=16$. 1.72. (1; 0), (4; —3), (4; 1), $\left(\frac{1}{9}; -\frac{2}{3}\right)$, (0; —1). 1.73. (1; 0), (0; 2), (—1; 0), (—1; 0), (1; 0). 1.75. 1; —1; $\frac{1}{3}$.

1.76. 1) $t=0$; 2) $t=1$; 3) $t=2$; 4) точка D не принадлежит данной линии; 5) $t=4$; 6) $t=5$; 7) $t=3$; 8) точка P не принадлежит данной линии. 1.77. $3x-2y+2=0$. 1.78. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. 1.79. $y=\sqrt{x}-2$. 1.80. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. 1.81. $x=a\sin t\sin 2t$, $y=a\cos t\sin 2t$. 1.83. $A(1;-1)$, $B(-1;3)$, $C(-6;6)$. 1.84. 1) $(-6;\ 0)$; 2) $(-2;2)$; 3) $(-6;3)$; 4) $(-1;4)$. 1.85. $(8;-6)$ и $(-8;6)$. 1.86. $(-3;-2)$. 1.87. $A\ (0;\ 2)$, $B\left(1;\ -\sqrt{3}\right)$. 1.88. $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 1.89. 1) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $(0;\ \sqrt{2})$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $(1;\ 1)$. 1.91. $y=x^2$. 1.92. $y=\frac{3}{x}$. 1.93. $x^2-y^2=2$. 1.94. $x^2+y^2=r^2$.

Глава 2

2.1. Да; да; нет; да; да; да. 2.2. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет. 2.5. $x+1=0$, $y-2=0$. 2.6. $x-3=0$. 2.7. $x=0$, $y=0$, $x-5=0$, $y+5=0$. 2.8. $x=0$, $y=0$, $x+2=0$, $y-2=0$. 2.9. $x=0$, $y=0$, $x+2=0$, $y+3=0$. 2.10. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$. 2.11. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{5}{2}$; 4) -2. 2.12. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; 3) $180°-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; 4) 135°; 5) 0. 2.14. 1) $x-y+3=0$; 2) $\sqrt{3}x-y+3=0$; 3) $x+y-3=0$; 4) $\sqrt{3}x+y-9=0$. 2.15. 1) $x-y=0$; 2) $\sqrt{3}x-y=0$; 3) $\sqrt{3}x+y=0$. 2.16. $5x+y+3=0$. 2.17. 1) $x-y+1=0$; 2) $y+5=0$; 3) $4x+3y=0$. 2.19. $2x-5y-15=0$. 2.20. $\sqrt{3}x+y-2=0$. 2.21. $\sqrt{3}x+3y-3=0$, $\sqrt{3}x+3y+3=0$, $x=0$. 2.22. $2x-y+3=0$, $2x+y+3=0$, $2x-y-3=0$. 2.23. $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-a=0$, $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+a=0$, $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+a=0$, $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-a=0$. 2.24. $\sqrt{3}x-3y+9\sqrt{3}=0$, $\sqrt{3}x+3y-9\sqrt{3}=0$, $y=0$, $y=2\sqrt{3}$.

2.26. 1) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$; 2) $\frac{x}{6}+\frac{y}{-5}=1$; 3) $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$; 4) $\frac{x}{{}^1/_3}+\frac{y}{-{}^1/_2}=1$. 2.27. $4x-3y+12=0$. 2.28. $5x-2y-10=0$. 2.29. $5x-7y-35=0$. 2.30. 1) 60°; $\sqrt{3}$; 2) 45°; -1; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 1; 4) $180°-\operatorname{arctg}3$; -3.

2.31. 1) $a=-b$; 2) $a=b$; 3) $a=-b\sqrt{3}$; 4) $a=b\sqrt{3}$.
2.32. $3x+8y-12=0$, $3x-8y+12=0$, $3x+8y+12=0$, $3x-8y-12=0$. 2.33. 20 кв. ед. 2.35. $6x+4y-24=0$.

2.36. $3x+y+12=0$. 2.38. $\sqrt{3}x+y+3-2\sqrt{3}=0$. 2.39. $\sqrt{3}x-y+1+2\sqrt{3}=0$. 2.40. $x+y+1=0$. 2.41. $x-y+8=0$, $x+y+8=0$. 2.42. $2x+3y-4=0$, $2x-3y-4=0$. 2.43. $y-3=k(x+4)$; 1) $\sqrt{3}x-3y+9+4\sqrt{3}=0$; 2) $x-y+7=0$; 3) $\sqrt{3}x-y+3+4\sqrt{3}=0$; 4) $\sqrt{3}x+y+4\sqrt{3}-3=0$; 5) $x+y+1=0$. 2.44. $x+y-3=0$. 2.46. 1) $3x-y-11=0$; 2) $y+5=0$; 3) $x-2=0$; 4) $4x+y-3=0$. 2.48. 1) $4x-3y-19=0$; 2) $x-4y+12=0$; 3) $x+3=0$; 4) $y+2=0$. 2.49. $5x+2y-6=0$. 2.50. $x-y-2=0$ (MN), $3x-4y-20=0$ (NP), $8x+y+5=0$ (MP). 2.51. (3; 1). 2.52. $3x-4y+18=0$ (AB), $4x+3y+24=0$ (BC), $2x-y+2=0$ (AC), $7x-y+17=0$ (m_{AB}), $16x-13y+46=0$ (m_{BC}), $2x-11y+12=0$ (m_{AC}). 2.53. $x+7y+26=0$. 2.54. $\frac{21\sqrt{2}}{10}$. 2.55. 60°. 2.57. 1) Да; 2) да; 3) нет. 2.58. —10. 2.59. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. 2.60. $x+4y-14=0$.

2.61. 1) Параллельны; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) $\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$; 5) (0; 2); 6) совпадают; 7) параллельны; 8) $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$; 9) параллельны; 10) (1; 5); 11) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{7}\right)$.

2.62. $x-y-3=0$. 2.63. $20+2\sqrt{10}$. 2.64. 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да. 2.65. $m=2$; (1; —1). 2.67. 1) $2x+3y-10=0$; 2) $y-4=0$; 3) $x+1=0$; 4) $x+y-3=0$; 5) $2x-5y+22=0$. 2.68. $4x+3y+5=0$. 2.69. $2x+y+5=0$. 2.70. $x-y+1=0$. 2.71. $2x-3y-11=0$. 2.72. $5x+6y-35=0$, $7x+3y+5=0$, $2x-3y-14=0$. 2.73. $x-5y-14=0$. 2.75. $x-y-6=0$, $2x+3y-17=0$. 2.76. $3x-5y+18=0$ (AB), $11x-3y-26=0$ (BC), $3x-5y-28=0$ (CD), $11x-3y+20=0$ (AD). 2.78. $3x+y=0$ (BC), $x-4y-27=0$ (CD). 2.80. Прямые (1) и (5), (3) и (6) попарно параллельны; прямые (1) и (3), (1) и (6), (2) и (4) попарно перпендикулярны. 2.81. $4x+5y+2=0$, $5x-4y+23=0$. 2.82. $7x-2y=0$. 2.83. Да, угол A — прямой. 2.84. $x+4y-14=0$. 2.85. $x-2y+5=0$. 2.86. $x-2y+3=0$. 2.87. $4x+5y+2=0$, $5x-4y-18=0$. 2.88. $5x+3y+12=0$. 2.89. (—9; —6). 2.91. (1; —1). 2.92. 5. 2.93. 2. 2.94. $2\sqrt{10}$. 2.95. $2\sqrt{13}$. 2.96. Точка B. 2.97. К прямой $3x+5y-8=0$. 2.99. $3x-4y-8=0$ и $5x+12y-32=0$. 2.101. $5x+12y+71=0$ и $5x+12y-59=0$. 2.102. (—2; —2) и $\left(\frac{28}{25}; \frac{16}{5}\right)$.

2.103. (0; —5) и $\left(\frac{20}{7}; -\frac{15}{7}\right)$. 2.105. 1) 45°; 2) $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{11}{3}$. 2.106. 45°. 2.107. $\operatorname{arctg}\frac{7}{17}$ и

$\operatorname{arctg}\frac{7}{9}$. **2.109.** $A = 180° - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $B = \operatorname{arctg}\frac{3}{14}$, $C = \operatorname{arctg}\frac{1}{9}$. **2.110.** $2x - y + 4 = 0$ или $x + 2y - 3 = 0$. **2.112.** AC: $x + 2y - 7 = 0$; AB: $3x + y - 6 = 0$ или $x - 3y + 8 = 0$. **2.113.** $7x - 3y + 20 = 0$ (AB), $3x + 7y - 8 = 0$ (BC), $7x - 3y - 9 = 0$ (CD), $3x + 7y + 21 = 0$ (AD). **2.114.** $(2+\sqrt{3})x + y + 1 = 0$ (AB), $(2-\sqrt{3})x + y + 2\sqrt{3} - 5 = 0$ (BC), $(2+\sqrt{3})x + y - 5 - 2\sqrt{3} = 0$ (CD), $(2-\sqrt{3})x + y + 1 = 0$ (AD). **2.115.** 1) $y - 2 = 0$; 2) $x + 4 = 0$; 3) $x + y + 2 = 0$; 4) $\sqrt{3}x + y + 4\sqrt{3} - 2 = 0$ или $y - 2 = 0$; 5) $5x - 4y + 28 = 0$. **2.117.** $\frac{8\sqrt{13}}{13}$. **2.118.** m_A: $2x + 11y - 10 = 0$; $5\sqrt{5}$; h_A: $x + 2y + 2 = 0$; $\frac{24}{25}\sqrt{5}$; l_A: $x + 3y = 0$; $\frac{24\sqrt{10}}{7}$. **2.119.** $x + 6y - 28 = 0$, $5x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 4 = 0$. **2.120.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. **2.121.** $\left(\frac{11}{5};\ -\frac{38}{5}\right)$. **2.122.** $8x - y - 4 = 0$. **2.123.** $(-3; 2)$; $2\sqrt{5}$. **2.124.** $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{11}{2}\right)$; $\frac{5\sqrt{10}}{2}$. **2.125.** $(-1; 2)$; 1. **2.126.** $x + y + 6 = 0$ (AB), $x - 4y + 21 = 0$ (BC), $3x - 2y - 7 = 0$ (AC), $x + 1 = 0$ (AM_1), $x + 6y - 9 = 0$ (BM_2), $2x - 3y + 7 = 0$ (CM_3). **2.127.** $2x + 5y = 0$. **2.128.** $\left(\frac{11}{8};\ \frac{17}{8}\right)$. **2.129.** $6x - 7y + 30 = 0$, $3x + 5y - 2 = 0$, $9x - 2y + 28 = 0$; $\left(-\frac{8}{3};\ 2\right)$. **2.130.** $8x + 15y + 4 = 0$, $8x + 15y - 98 = 0$. **2.131.** 45°, 90°, 90° и 135°. **2.132.** 96 кв. ед. **2.133.** 45°; $\frac{9\sqrt{34}}{17}$. **2.134.** $4x - y - 24 = 0$ (AB), $x - 7 = 0$ (BC), $x + 8y + 27 = 0$ (AC); $\frac{33}{4}$ кв. ед. **2.135.** 2 и 4,8. **2.136.** (1; 3), (—1; 7), (3; 5), (5; 1); 12 кв. ед. **2.137.** $(0; \sqrt{3})$ или (3; 0). **2.138.** $2x - y + 5 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$; $\left(-\frac{3}{5};\ \frac{19}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{5};\ -\frac{17}{5}\right)$. **2.139.** (—8; 0) и (—2; —4). **2.140.** $5x + 12y - 39 = 0$, $5x + 12y + 39 = 0$. **2.141.** $3x - 3y + 19 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$.

3.1. 1) $(x-4)^2+(y+7)^2=25$; 2) $(x+6)^2+(y-3)^2=2$; 3) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$; 4) $x^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$; 5) $(x+1)^2+y^2=3$. 3.2. Точки A, E и F лежат на окружности, точки B и C — вне окружности, точки D и K — внутри окружности. 3.3. Проходит. 3.4. $(x-12)^2+(y+5)^2=169$. 3.5. $(x+1)^2+(y+2)^2=34$. 3.6. $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y+6)^2=\frac{169}{4}$. 3.7. $x^2+(y+5)^2=25$. 3.8. $(x-4)^2+y^2=36$. 3.9. $(x+9)^2+(y-4)^2=169$ и $(x-8)^2+(y+13)^2=169$. 3.11. $(x+10)^2+(y+10)^2=100$ и $(x+2)^2+(y+2)^2=4$. 3.12. $(x-\sqrt{5})^2+(y+\sqrt{5})^2=5$. 3.13. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ и $(x+3)^2+(y+3)^2=9$. 3.14. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. 3.15. $(x-1)^2+(y-5)^2=25$. 3.16. $(x+2)^2+(y+3)^2=100$. 3.17. $(x+13)^2+(y-2)^2=169$. 3.19. 1) $S(4;\ -6)$; $r=9$; 2) $S\ (-8;\ 10)$, $r=13$; 3) $S\left(0;\ -\frac{7}{2}\right)$, $r=\frac{11}{2}$; 4) $S(3;\ 0)$, $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 5) $S\ (-2;\ 4)$, $r=\frac{11}{2}$; 6) $S\ (4;\ -1)$, $r=\frac{19}{3}$. 3.20. 1) $(1;\ 0)$, $(3;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ -3)$; 2) $(-3;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ -10)$; 3) $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$, $\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$. 3.21. $(x+3)^2+(y-2)^2=100$. 3.22. 17. 3.23. $(-1;\ 0)$ и $(-6;\ -5)$. 3.24. $20x-16y+45=0$. 3.25. $15x-8y+44=0$. 3.26. 1) Прямая пересекает окружность; 2) прямая касается окружности; 3) у прямой и окружности нет общих точек. 3.27. $2x+y+1=0$. 3.28. $4x-2y-1=0$. 3.29. $(x-8)^2+(y-6)^2=36$. 3.30. $2x+3y+13=0$. 3.31. $4x-3y+5=0$. 3.32. $2x-3y-26=0$. 3.34. 1) $2a=10$, $2b=8$; $A_1\ (-5;\ 0)$, $A_2\ (5;\ 0)$, $B_1\ (0;\ -4)$, $B_2\ (0;\ 4)$; $F_1\ (-3;\ 0)$, $F_2\ (3;\ 0)$; $e=\frac{3}{5}$; 2) $2a=6$, $2b=4$; $A_1\ (-3;\ 0)$, $A_2\ (3;\ 0)$, $B_1\ (0;\ -2)$, $B_2\ (0;\ 2)$; $F_1\ (-\sqrt{5};\ 0)$, $F_2\ (\sqrt{5};\ 0)$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) $2a=6$, $2b=8$; $A_1\ (-3;\ 0)$, $A_2\ (3;\ 0)$, $B_1\ (0;\ -4)$, $B_2\ (0;\ 4)$; $F_1\ (0;-\sqrt{7})$, $F_2\ (0;\sqrt{7})$; $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$; 4) $2a=12$, $2b=20$; $A_1\ (-6;\ 0)$, $A_2\ (6;\ 0)$, $B_1\ (0;-10)$, $B_2\ (0;\ 10)$; $F_1\ (0;\ -8)$, $F_2\ (0;\ 8)$; $e=\frac{4}{5}$. 3.35. Точки A и D лежат на эллипсе, точки B, C и F—вне эллипса, точка E—внутри эллипса. 3.36. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$. 3.37. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; $F_1\ (-1;\ 0)$, $F_2(1;\ 0)$. 3.38. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; $4+\frac{\sqrt{7}}{2}$ и $4-\frac{\sqrt{7}}{2}$. 3.39. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. 3.40. $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{64}=1$; $e=\frac{15}{17}$. 3.41. $\frac{x^2}{100}+$

$+\dfrac{y^2}{676}=1$. 3.42. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{^9/_2}=1$; $F_1\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $F_2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$. 3.43. $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{45}=1$. 3.44. $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.45. $e=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. 3.47. 1) $O'(-1;\ 2)$; $2a=8$, $2b=6$; $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $A_1(-5;\ 2)$, $A_2(3;\ 2)$, $B_1(-1;\ -1)$, $B_2(-1;\ 5)$; $F_1(-\sqrt{7}-1;\ 2)$, $F_2(\sqrt{7}-1;\ 2)$; 2) $O'(0;\ -2)$; $2a=2\sqrt{10}$, $2b=6$; $e=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$; $A_1(-\sqrt{10};-2)$, $A_2(\sqrt{10};\ -2)$, $B_1(0;-5)$, $B_2(0;\ 1)$; $F_1(-1;\ -2)$, $F_2(1;\ -2)$. 3.48. $\dfrac{(x-2)^2}{100}+\dfrac{y^2}{91}=1$. 3.49. $\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$. 3.50. $\dfrac{(x-5)^2}{41}+\dfrac{(y+3)^2}{16}$; $F_1(0;\ -3)$, $F_2(10;-3)$.

3.51. $(3;\ \sqrt{15})$, $(3;\ -\sqrt{15})$. 3.52. $\left(\dfrac{5\sqrt{65}}{9};\ \dfrac{16}{9}\right)$ и $\left(-\dfrac{5\sqrt{65}}{9};\dfrac{16}{9}\right)$.

3.53. $\dfrac{64\sqrt{5}}{5}$ кв. ед. 3.54. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}$; 4 и 8. 3.55. 5.

3.56. $\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{4};\ \dfrac{3\sqrt{7}}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{3\sqrt{7}}{4};\ \dfrac{3\sqrt{7}}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{3\sqrt{7}}{4};-\dfrac{3\sqrt{7}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{4};\ -\dfrac{3\sqrt{7}}{4}\right)$. 3.57. $\left(2;\ \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-2;\ \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-2;-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(2;\ -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 3.58. $3y-4=0$. 3.59. $(2\sqrt{2};\ 3)$, $(-2\sqrt{2};\ 3)$, $(-2\sqrt{2};\ -3)$, $(2\sqrt{2};\ -3)$. 3.60. $\dfrac{26}{3}$. 3.62. 1) $2a=10$, $2b=4\sqrt{5}$; $A_1(-5;\ 0)$, $A_2(5;\ 0)$, $F_1(-3\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(3\sqrt{5};\ 0)$; $e=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$, $y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$; 2) $2a=8$, $2b=12$; $A_1(-4;\ 0)$, $A_2(4;\ 0)$, $F_1(-2\sqrt{13};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{13};\ 0)$; $e=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $y=\pm\dfrac{3}{2}x$; 3) $2a=6$, $2b=8$; $A_1(0;\ -4)$, $A_2(0;\ 4)$, $F_1(0;\ -5)$, $F_2(0;\ 5)$; $e=\dfrac{5}{4}$; $y=\pm\dfrac{4}{3}x$; 4) $2a=4\sqrt{7}$, $2b=12$; $A_1(0;\ -6)$, $A_2(0;\ 6)$, $F_1(0;\ -8)$, $F_2(0;\ 8)$; $e=\dfrac{4}{3}$; $y=\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{7}x$. 3.63. $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{8}=1$; $e=\dfrac{5}{3}$; $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$. 3.64. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$, $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{7}=1$. 3.65. $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$; $F_1(-13;\ 0)$,

F_2 (13; 0) или $-\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$; F_1 (0; —13), F_2 (0; 13).

3.66. $\sqrt{3}\,x-y+6=0$, $\sqrt{3}\,x-y-6=0$. 3.67. $3x-2y+19=0$, $3x+2y+11=0$. 3.68. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; $e=\frac{5}{4}$.

3.69. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$; $y=\pm\sqrt{2}\,x$. 3.70. 60°; $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3.71. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$. 3.72. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$. 3.73 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{225}=1$. 3.74. $-\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$. 3.75. $-\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$; $y=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\,x$. 3.76. $-\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$. 3.77. $x^2-y^2=9$.

3.78. $x^2-y^2=16$. 3.79. $-x^2+y^2=49$. 3.81. 1) O' (2; —3); $2a=6$, $2b=8$; A_1 (—1; —3), A_2 (5; —3), F_1 (—3; —3), F_2 (7; —3); $e=\frac{5}{3}$; $y+3=\pm\frac{4}{3}(x-2)$; 2) O' (—2; —5); $2a=4$; $2b=4$; A_1 (—4; —5), A_2 (0; —5), F_1 $(-2-2\sqrt{2};-5)$, F_2 $(2\sqrt{2}-2;-5)$; $e=\sqrt{2}$; $y+5=\pm(x+2)$; 3) O' (0; 1), $2a=4\sqrt{3}$, $2b=4$; A_1 $(-2\sqrt{3};1)$, $A_2(2\sqrt{3};1)$, F_1 (—4;1), F_2(4; 1); $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $y-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$. 3.82. $\frac{(x-3)^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$. 3.83. $\frac{(x+4)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{144}=1$; F_1 (—17; 2), F_2 (9; 2); $y-2=\pm\frac{12}{5}(x+4)$. 3.84. $(x-1)^2-(y+5)^2=8$; $y+5=\pm(x-1)$. 3.85. 1) $\left(4\sqrt{3};\ -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ и $\left(-4\sqrt{3};\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, 2) нет точек пересечения; 3) $\left(10;-\frac{8}{3}\right)$ и $\left(-\frac{15}{2};\ \frac{3}{2}\right)$. 3.86. 1,35.

3.87. (7; 4), (—7; 4), (—7; —4), (7; —4). 3.88. $2\sqrt{17}$.

3.90. 1) F (2; 0); $x+2=0$; 2) F (—3; 0); $x-3=0$; 3) $F\left(0;\frac{5}{2}\right)$; $2y+5=0$; 4) F (0; —4); $y-4=0$. 3.92. 1) $x^2=16y$; 2) $x^2=-12y$; 3) $y^2=24x$; 4) $y^2=-10x$. 3.93. $y^2=48x$ или $y^2=-48x$.

3.94. $x^2=-18y$; $F\left(0;-\frac{9}{2}\right)$. 3.95. $y^2=48x$; F (12; 0); $x+12=0$; $r=12\frac{1}{3}$. 3.96. $y^2=-6x$; $F\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$. 3.97. (25; 30) и (25; —30).

3.98. $x+y+2=0$; (—4; 2). 3.99. $4\sqrt{10}$. 3.100. 64. 3.101. 1) (1; 3) и (4; —6); 2) нет точек пересечения; 3) (4; 6). 3.102. $\left(\frac{5}{2};\ 2\sqrt{15}\right)$ и $\left(\frac{5}{2};\ -2\sqrt{15}\right)$. 3.103. $x-4=0$; 24. 3.104. $24\sqrt{2}$.

3.106. 1) O' (3; —1), F (2; —1); $y+1=0$, $x-4=0$;

2) $O'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $F\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$; $2x+1=0, y+3=0$; 3) O' (3; 7), F (3; 5); $x-3=0$, $y-9=0$; 4) O' (0; —4), $F\left(\frac{1}{4}; -4\right)$; $y+4=0$, $4x+1=0$; 5) O' (—5; 0), $F\left(-5; -\frac{3}{2}\right)$; $x+5=0$, $2y-3=0$. **3.107.** $\sqrt{53}$. **3.108.** $(y-4)^2=6(x+2)$. **3.109.** $(x-7)^2=12(y-2)$. **3.110.** $y^2=-48(x-3)$; F (—9; 0); $x-15=0$. **3.111.** $x^2=6(y+5)$; $F\left(0; -\frac{7}{2}\right)$; $2y+13=0$. **3.112.** $(y+1)^2=6(x-3)$. **3.113.** $(x+3)^2=-2(y-4)$. **3.114.** $(y+4)^2=2(x+8)$; $y+4=0$; $2x+17=0$; $F\left(-\frac{15}{2}; -4\right)$. **3.115.** 48 м. **3.116.** 60 см. **3.117.** 16 м.

3.118. $p=10\frac{2}{3}$. **3.119.** 1) Эллипс; 2) окружность; 3) парабола; 4) гипербола; 5) гипербола; 6) парабола; 7) гипербола.
3.120. $\frac{256}{9}\sqrt{3}$ кв. ед. **3.121.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. **3.122.** 9,6.
3.123. 1 и 2,6. **3.124.** $(x-2)^2+y^2=64$. **3.125.** $x^2=y+3$ или $x^2=-5(y-3)$. **3.126.** 90° и $2\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$. **3.127.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$.
3.128. $x-y+4=0$; $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **3.129.** $x^2=-4(y-2)$ или $x^2=4(y-4)$. **3.130.** 240 кв. ед. **3.131.** $y^2=-8(x-2)$; $(1; 2\sqrt{2})$ и $(1; -2\sqrt{2})$; $S=3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ кв. ед. **3.132.** $180°-\operatorname{arctg}\frac{8}{11}$.
3.133. $y^2=-4(x+5)$. **3.134.** $(x-3)^2=-32(y-2)$ или $(x-3)^2=-8(y-8)$. **3.135.** $x^2-y^2=32$, $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$.

Глава 4

4.5. а) $|x|<0{,}215$; б) $|x|<0{,}1$; в) $|x|<0{,}046$. **4.6.** а) $\delta=0{,}1$; б) $\delta=0{,}031$; в) $\delta=0{,}01$. **4.10.** 1) 0; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) $-\infty$; 5) $+\infty$. **4.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $+\infty$. **4.15.** 5. **4.16.** $\frac{1}{2}$. **4.17.** 0.
4.18. —3. **4.19.** $\sqrt{3}$. **4.20.** $+\infty$. **4.21.** $-\frac{\pi}{6}$. **4.22.** $\frac{\pi}{6}$. **4.23.** $\frac{\pi}{2}$.
4.24. 3π. **4.25.** $+\infty$. **4.26.** $+\infty$. **4.27.** $+\infty$. **4.28.** $-\infty$. **4.29.** $+\infty$. **4.30.** $+\infty$. **4.31.** $-\infty$. **4.32.** $+\infty$. **4.33.** 0. **4.34.** 0. **4.36.** $+\infty$ и $-\infty$. **4.37.** $-\infty$. **4.38.** $+\infty$ и $-\infty$. **4.39.** $+\infty$ и 1. **4.40.** $-\infty$.
4.41. $-\infty$. **4.42.** π. **4.43.** $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. **4.44.** $-\infty$. **4.46.** 2. **4.47.** —4.
4.48. $-\frac{1}{27}$. **4.49.** $\frac{3}{2}$. **4.50.** 5. **4.51.** $-\frac{4}{3}$. **4.52.** $-\frac{9}{7}$. **4.53.** 1.
4.54. $-\frac{1}{6}$. **4.55.** $\frac{12}{5}$. **4.56.** $\frac{4}{9}$. **4.57.** $\frac{3a}{2}$. **4.58.** $-\frac{1}{2a^2}$. **4.59.** 4.

4.60. $-\frac{1}{3}$. 4.61. 1. 4.62. $\frac{3}{2}$. 4.63. $\frac{8}{3}$. 4.64. $\frac{2}{3}$. 4.65. $-\frac{5}{64}$. 4.66. $\frac{2}{3}$. 4.67. -3. 4.68. -2. 4.69. ∞. 4.70. 0. 4.71. ∞. 4.72. $\frac{2}{3}$. 4.73. $-\frac{3}{5}$. 4.74. 3. 4.75. $\frac{a_p}{b_p}$. 4.76. $\frac{1}{2}$. 4.77. $-\frac{1}{6}$. 4.78. -1. 4.79. $\frac{1}{2}$. 4.80. 0. 4.81. -3. 4.82. 0. 4.83. 0. 4.84. 0. 4.85. $+\infty$. 4.86. 0. 4.87. $-\infty$. 4.88. 5 и $+\infty$. 4.89. $-\frac{7}{2}$ и $-\infty$. 4.90. $\frac{3}{4}$ и $+\infty$. 4.91. 1 и -1. 4.92. $\frac{2}{9}$ и $-\frac{3}{4}$. 4.93. $\frac{2}{3}$. 4.94. $\sqrt{2}$. 4.95. 0. 4.96. $-\sqrt{2}$. 4.97. 0. 4.98. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.99. $\frac{7}{3}$. 4.100. $\frac{3}{4}$. 4.101. 0. 4.102. ∞. 4.103. 2π. 4.104. $\frac{1}{8}$. 4.105. 100. 4.106. $-\frac{1}{2}$. 4.107. $\frac{1}{3}$. 4.108. $\frac{5}{2}$. 4.109. 2. 4.110. 0. 4.111. 2. 4.112. $\frac{1}{4}$. 4.113. e. 4.114. $\frac{1}{e}$. 4.115 e^2. 4.116 e^3. 4.117. $\frac{1}{e^3}$. 4.118. $\frac{1}{e}$. 4.119. e. 4.120. $\frac{1}{e}$. 4.121. $\frac{1}{e}$. 4.123. 1) $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — бесконечно малые одного порядка; 2) $\gamma(x)$ — бесконечно малая высшего порядка чем $\delta(x)$; 3) $\gamma(x)$ — бесконечно малая низшего порядка чем $\delta(x)$; 4) $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые. 4.124. При $x \to 1$ бесконечно малая $1-x$ имеет высший порядок малости по сравнению с $\sqrt{1-x}$. 4.127. При $x \to 0$ бесконечно малая $\sin x - \operatorname{tg} x$ имеет высший порядок малости по сравнению с $x^2\sqrt{x}$. 4.134. $\frac{3}{4}$. 4.135. $\frac{18}{25}$. 4.136. $\frac{1}{6}$. 4.137. $\frac{25}{2}$. 4.138. 32. 4.139. $+\infty$. 4.140. 12. 4.141. $\frac{5}{2}$. 4.142. $\frac{1}{4}$. 4.143. 1. 4.144. $\frac{16}{3}$. 4.145. $\frac{2}{3}$.

Глава 5

5.2. $\Delta y = 7$. 5.3. а) -3; б) $-\frac{3}{4}$; в) 15. 5.4. а) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) 0. 5.5. а) $-0{,}25$; б) -3; в) 0,36. 5.6. а) -2; б) $-3{,}125$; в) 108. 5.7. а) 0,41 см^2; б) $-0{,}76$ см^2. 5.8. $12{,}36\,\pi$ см^2 и $31{,}836\,\pi$ см^3. 5.17. $x = 2$ — точка разрыва II рода. 5.18. $x = -5$ — точка разрыва II рода. 5.19. $x = -1$ и $x = 1$ — точки разрыва II рода. 5.20. $x = 1$ и $x = 3$ — точки разрыва II рода. 5.21. $x = 0$ — точка разрыва II рода. 5.22. $x = 0$ — точка разрыва I рода. 5.23. $x = 3$ — точка разрыва II рода. 5.24. $x = 0$ — точка разрыва I рода, $x = -1$ и $x = 1$ — точки разрыва II рода. 5.25. $x = 0$ — точка разрыва II рода. 5.26. $x = 0$ — точка разрыва I рода. 5.27. $x = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва II рода. 5.28. $x = 0$ — точка разрыва I рода. 5.30. $x = 1$ — точка разрыва I рода. 5.31. Функция непрерывна на всей числовой оси. 5.32. $x = 0$ —

точка разрыва II рода. **5.33.** $x = 0$ — точка разрыва II рода; $x = \frac{\pi}{2}$ — точка разрыва I рода. **5.35.** $y > 0$, если $-\infty < x < 0$, $1 < x < +\infty$; $y < 0$, если $0 < x < 1$. **5.36.** $y > 0$, если $-\infty < x < 2$, $2 < x < +\infty$. **5.37.** $y > 0$, если $-\infty < x < -2$, $-1 < x < +\infty$; $y < 0$, если $-2 < x < -1$. **5.38.** $y > 0$, если $-1 < x < 1$; $y < 0$, если $-\infty < x < -1$, $1 < x < +\infty$. **5.39.** $y > 0$, если $-2 < x < 0$, $2 < x < 3$; $y < 0$, если $-\infty < x < -2$, $0 < x < 2$, $3 < x < +\infty$. **5.40.** $y > 0$, если $-\infty < x < 1$, $3 < x < 4$, $4 < x < +\infty$; $y < 0$, если $1 < x < 3$. **5.41.** $y > 0$, если $1 < x < 2$, $3 < x < +\infty$; $y < 0$, если $-\infty < x < 1$, $2 < x < 3$. **5.42.** $y > 0$, если $3 < x < +\infty$; $y < 0$, если $0 < x < 3$. **5.43.** $y > 0$, если $-2 < x < 1$; $y < 0$, если $-\infty < x < -2$. **5.44.** $y > 0$, если $-\infty < x < -3$, $-1 < x < 3$, $5 < x < +\infty$; $y < 0$, если $-3 < x < -1$, $3 < x < 5$. **5.45.** $y > 0$, если $0 < x < +\infty$; $y < 0$, если $-\infty < x < 0$. **5.46.** $y > 0$, если $-\infty < x < 1$; $y < 0$, если $1 < x < +\infty$. **5.47.** $y > 0$, если $-\infty < x < 0$, $2 < x < +\infty$; $y < 0$, если $0 < x < 2$. **5.48.** $y > 0$, если $0{,}1 < x < +\infty$; $y < 0$, если $0 < x < 0{,}1$. **5.49.** $y > 0$, если $0 < x < +\infty$; $y < 0$, если $-1 < x < 0$. **5.50.** $y > 0$, если $-\infty < x < 4$; $y < 0$, если $4 < x < 5$. **5.51.** $y > 0$, если $0 < x < \frac{1}{9}$; $y < 0$, если $\frac{1}{9} < x < +\infty$. **5.52.** $y > 0$, если $-3 < x < -2$; $y < 0$, если $-2 < x < +\infty$. **5.53.** $y > 0$, если $1 < x < +\infty$; $y < 0$, если $0 < x < 1$. **5.54.** $y > 0$, если $0 < x < \pi$; $y < 0$, если $\pi < x < 2\pi$. **5.55.** $y > 0$, если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $y < 0$, если $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. **5.56.** $y > 0$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $y < 0$, если $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. **5.57.** $y > 0$, если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$; $y < 0$, если $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. **5.59.** $-2 < x < 3$. **5.60.** $-\infty < x < -3$,
$1 < x < +\infty$. **5.61.** $-\infty < x < -1$, $1 < x < +\infty$.
5.62. $-1 < x < 0$. **5.63.**
$3 < x < +\infty$. **5.64.** $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 0$,
$-\infty < x < -2$, $-1 < x < 1$, $2 < x < 3$. **5.65.**
5.67. $-\infty < x < 0$, $1 < x < 1$, $2 < x < +\infty$. **5.66.** $0 < x < 3$.
$-1 < x < +\infty$. **5.70.** $-2 \leq x < 5$. **5.68.** $-\infty < x \leq 0$. **5.69.**
5.72. $2 < x < +\infty$. **5.73.** $10 \leq x \leq -1$. **5.71.** $0 < x < 0{,}01$.
$< x < +\infty$.

Глава 6

6.2. $y' = 5$. **6.3.** $y' = 2x$. **6.4.** $y' = 2x + 3$. **6.5.** $y' = 3x^2 - 4$. **6.6.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$. **6.7.** $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. **6.8.** $y' = \cos x$. **6.9.** $y' = -3 \sin 3x$. **6.10.** $y' = \frac{2}{\cos^2 2x}$ **6.11.** $f'(1) = 2$. **6.12.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. **6.13.** $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$, $f'(\pi) = -\frac{1}{2}$. **6.14.** $f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3}$, $f'(0)$ не существует. **6.15.** $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f'(1)$ не существует. **6.19.** $y' = -5$. **6.20.** $y' = 8x - 0{,}6$. **6.21.** $y' = 33x^2 + 4x$. **6.24.** $y' =$

$= 3ax^2 + 2(b-2a)x + 3a + 2b$. 6.27. $r' = -0{,}96\varphi^{-4} + 0{,}11\varphi^{-2} + 0{,}24$.

6.30. $y' = 3 - \frac{1}{2x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{9}{2x^4}$. 6.33. $y' = 14x^{5/2} - 22{,}5x^{3/2} - 3x^{-5/2}$. 6.36. $y' = -\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$. 6.39 $y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} + 24x\sqrt[3]{x^2} - \frac{24}{5}\sqrt[5]{x^3} - \frac{14}{x^3}$. 6.42. $y' = (12x^2 - 4x - 5)(x^2 - 7x) + (4x^3 - 2x^2 - 5x)(2x - 7)$. 6.45. $y' = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^3}\right)\left(7x - 3\right) + 7\left(6\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right)$. 6.48. $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$. 6.51. $y' = 5\cdot\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$ 6.54. $y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x} + 2\right)^2}$. 6.57. $y' = \frac{(-2x+2)(x^3-2) - (-x^2+2x+3)\cdot 3x^2}{(x^3-2)^2}$. 6.60. $y' = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\cos x + \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$. 6.63. $y' = -5\frac{\cos x\,(2+\sqrt{x}) - \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{(2+\sqrt{x})^2}$. 6.66. $y' = \frac{4\cos x(2 - 3\cos x) + (1 + 4\sin x)\,3\sin x}{(2 - 3\cos x)^2}$. 6.69. $y' = 2x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$. 6.72. $y' = \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(\mathrm{ctg}\,x - 1) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sin^2 x}}{(\mathrm{ctg}\,x - 1)^2}$.

6.75. $y' = \frac{x\cos x - 2\cos x}{x^3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cos x - x^{\frac{2}{3}}\sin x$. 6.78. $y' = \cos x\cdot\arccos x - \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 6.81. $y' = \frac{\arccos x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$. 6.84. $y' = \frac{\frac{x}{1+x^2} - 3\,\mathrm{arctg}\,x}{x^4}$. 6.87. $y' = \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)\left(\mathrm{arctg}\,x - 2x\right) + \left(x - \mathrm{arctg}\,x\right)\left(\frac{1}{1+x^2} - 2\right)$. 6.90. $y' = 0$.

6.93. $y' = e^x\mathrm{tg}\,x + \frac{e^x}{\cos^2 x}$. 6.96. $y' = e^x(x^2 + \sqrt{x} - 1) + e^x\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 6.99. $y' = \frac{7^x\ln 7\sin x - (7^x - 3)\cos x}{\sin^2 x}$.

6.102. $s' = -3\,\frac{\frac{e^t - 1}{\sin^2 t} + \mathrm{ctg}\,t\cdot e^t}{(e^t - 1)^2}$. 6.105. $y' = \frac{2}{x} + \frac{6}{x^3}$.

6.108. $y' = 3\frac{1-\ln x}{x^2}$ 6.111. $y' = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\ln 2} - \frac{\log_2 x + 1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

6.114. $y' = \frac{\frac{e^x - x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$ 6.117. $y' =$
$= \left(\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{x}\right)\left(e^x - 2\sqrt{x}\right) + \left(\sqrt[4]{x^3} + \ln x\right)\left(e^x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

6.120. $y' = \frac{(3\cos x + \sin x)x\operatorname{tg} x - (3\sin x - \cos x)\left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)}{x^2\operatorname{tg}^2 x}$

6.123. $y' = \frac{\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \operatorname{tg} x\cdot\ln x\cdot\ln 5}{5^x}$. 6.126. $y' =$
$= (e^x\cos x - e^x\sin x - 4)(x^2 - e^x\sin x) + (e^x\cos x - 4x)(2x - e^x\sin x -$
$- e^x\cos x)$. 6.131. $f'(1) = 2$, $f'(4) = 36$, $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -13\frac{1}{2}$.

6.132. $\frac{4}{3}$. 6.133. $\pm 2, \pm 4$ 6.134. -1. 6.138. $y' = 2\cos(2x - 1)$.

6.141. $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$. 6.144. $y' = 3\cdot\frac{\ln^2 x}{x}$. 6.147. $y' = \sin 2x$.

6.150. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\cos^2 x}$. 6.153. $y' = -\frac{2^{1/x}\ln 2}{x^2}$

6.156. $y' = \frac{-2x}{1 + (3 - x^2)^2}$ 6.159. $y' = \frac{4x - 5}{2(2x^2 - 5x + 1)\ln 3}$.

6.162. $y' = -\frac{5^{-x}\ln 5}{1 + 5^{-2x}}$. 6.165. $y' = -\frac{\cos\operatorname{arcctg} x}{1 + x^2}$

6.168. $y' = \frac{1}{(1 + \ln^2 x)x}$ 6.171. $y' = \frac{10\sin 5x}{\cos^2 5x}$

6.174. $y' = e^{2^x}\cdot 2^x\ln 2$. 6.177. $y' = -\frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}}$.

6.180. $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|}$. 6.183. $y' = \frac{2x^2\cos x^2 - \sin x^2}{x^2}$

6.186. $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}(x + 1)}$. 6.189. $y' = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{2x}{\sin x^2}$.

6.192. $y' = \frac{2}{x\ln x} - \frac{1}{x}$. 6.195. $y' = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{(x - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

6.198. $y' = e^{\sqrt{x}}$. 6.201. $y' = \frac{2x\sin 3x - 3(x^2 - 1)\cos 3x}{\sin^2 3x}$

6.204. $y' = -\frac{4\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$. 6.207. $y' = -e^{-x}\ln\operatorname{tg} x + e^{-x}\frac{2}{\sin 2x}$

6.210. $y' = \frac{8}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$. 6.213. $y' = \pi \sin(1-\pi x)\cdot \sqrt{1-e^{2x}} - \frac{\cos(1-\pi x)e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. 6.216. $y' = -e^{\cos x}\sin x \sqrt{\sin x} + e^{\cos x}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. 6.219. $y' = 8\sqrt[3]{e^{4x}} - 7^{\operatorname{tg} x}\frac{\ln 7}{\cos^2 x}$.

.222. $y' = \frac{2\operatorname{cosec} 2x + 2\ln \operatorname{tg} x}{e^{1-2x}}$ 6. 225. $y' = -\frac{2\operatorname{ctg} 3x}{\sqrt{7-4x}} - \frac{3\sqrt{7-4x}}{\sin^2 3x}$. 6.228. $y' = -\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{2}}$.

.231. $2^{x^2-x}\ln 2\,(2x-1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-3x\right) - \frac{3\cdot 2^{x^2-x}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)}$.

.234. $y' = \frac{3[\ln(3x-1)+7]}{2\sqrt{3x-1}}$. 6.237. $y' = \arcsin\frac{x}{3}$.

.240. $y' = 7\cdot\frac{\sqrt{1-7x}+\sqrt{1+7x}\arcsin 7x}{(1-7x)^2\sqrt{1+7x}}$. 6.243. $y' =$ $\sin^2 x\cos x(6\cos^2 x+7) - 4\sin^4 x\cos x$. 6.246. $y' = \frac{2x-3}{3(x^2-3x)} - \frac{2}{2x+1}$. 6.249. $y' = \frac{2}{1+x^2}$. 6.252. $y' = \frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

.255. $y' = \frac{2\ln\ln x}{x}$. 6.258. $y' = \frac{\sin(2\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$. 6.261. $y' = \frac{\operatorname{ctg} x}{\log_4 \sin x\,\ln 4}$. 6.264. $y' = -\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$. 6.267. $y' = -\frac{1}{\cos x}$. 6.270. $y' = \frac{2(x-1)\sin\ln(2x-x^2)}{2x-x^2}$.

.273. $y' = \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$. 6.276. $y' = -\frac{e^{\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{x}\right)}}{x^2\sin^2\frac{1}{x}}$.

.279. $y' = x\ln^2\left(-\frac{1}{x}\right)\left[2\ln\left(-\frac{1}{x}\right)-3\right]$.

.282. $y' = \frac{\cos x\, e^{\sqrt{\sin x}}}{2\sqrt{\sin x}}(1+\sqrt{\sin x})$. 6.285. $y' = \frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$.

.288. $y' = -7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\ln 7\sqrt{\frac{1}{(1-x)(1+x)^3}}$. 6.291. $y' =$

$= -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \cdot (\sqrt{x^2+1} \cdot \sin\sqrt{x^2+1} + \cos\sqrt{x^2+1})$. 6.294. $y' =$
$= -\cos x \cdot \mathrm{ctg}^2 x \cdot e^{\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x}$. 6.297. $y' = \frac{e^{-x^2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}\left(\cos\frac{x}{2} - 8x\sin\frac{x}{2}\right)$.

6.300. $y' = \frac{2\sin\sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln x}\cos\sqrt{\ln x}}{2x}$.

6.303. $y' = \frac{1}{4\sin\frac{x}{8}\cos^3\frac{x}{8}}$. 6.306. $y' = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{2}$.

6.309. $y' = -\frac{1}{4\cos x}$. 6.312. $y' = 3e^{\frac{1}{\cos 3x}}(\cos 3x + \mathrm{tg}^2 3x)$.

6.315. $y' = -\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{x+2}}}$.

6.318. $y' = \frac{6\,\mathrm{tg}\,3x(2\,\mathrm{tg}^2 3x + 1)}{\cos^2 3x}$. 6.322. $y'' = 36x^2 - 30x + 4$.

6.323. $y'' = 24(2x+5)$. 6.324. $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ 6.325. $y'' = -2\cos 2x$.

6.326. $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. 6.327. $y'' = \frac{5^{\sqrt{x}}\ln 5}{4x\sqrt{x}}(\sqrt{x}\ln 5 - 1)$.

6.328. $y'' = -\frac{54x}{(1+9x^2)^2}$. 6.329. $y'' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

6.330. $y'' = 4(\cos 2x - x\sin 2x)$. 6.331. $y'' = -\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$ 6.332. $y'' =$
$= -2e^x \sin x$. 6.333. $y'' = \frac{3}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$. 6.334. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9$,
$f''(0) = 0$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -\frac{9}{2}$. 6.335. $r''(-1) = 7e$, $r''(0) = 2$,
$r''(2 - \sqrt{2}) = 0$. 6.339. $f'''(-3) = 0$, $f'''(-1) = 2e^{-1}$, $f'''(0) = 3$.
6.340. $r'''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $r'''\left(-\frac{\pi}{24}\right) = -16$, $r'''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 16\sqrt{3}$.
6.342. $y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots[\alpha - (n-1)]\,x^{\alpha - n}$. 6.343. $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$.
6.344. $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$. 6.346. $y' = -\frac{3}{7}$. 6.347. $y' = -\frac{x}{y+1}$.

6.348. $y' = \frac{9x}{4y}$. 6.349. $y' = -\frac{x^2}{y^2}$.

6.350. $y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. 6.351. $y' = -\frac{y\sin^2 y}{x\sin^2 y + 1}$.

6.352. $y' = (x+y)^2$. 6.353. $y' = \dfrac{3x^2 - 2xy^2}{2x^2y + 3y^2}$. 6.354. $y' = \dfrac{y^2}{x^2+xy}$.

6.355. $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x^2}}$. 6.356. $y' = 5^{x-y}\dfrac{1-5^y}{5^x-1}$.

6.357. $y'' = -\dfrac{1+y'^2}{y}$. 6.358. $y'' = -(1+y')^2$.

6.359. $y'' = \dfrac{y^2 + x^2y'^2}{x^2y}$. 6.360. $y'' = -\dfrac{4+y'^2}{y}$.

6.361. $y'' = -\dfrac{4y'}{y^3}$. 6.362. $y'' = \dfrac{2(x+yy'^2)}{1-y^2}$. 6.364. $5(\ln 5 - 1)$.

6.365. $\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi+2}$ 6.370. $y' = x^{x+1}\left(\ln x + \dfrac{x+1}{x}\right)$. 6.371. $y' =$
$= x^{\sin 2x}\left(2\cos 2x \ln x + \dfrac{\sin 2x}{x}\right)$. 6.372. $y' = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg} 2x} \times$
$\times \left[\dfrac{\ln x}{\cos^2 2x} + \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\right]$. 6.373. $y' = (\cos x)^{\sqrt[3]{x}}\left[\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ln\cos x -\right.$
$\left. - \sqrt[3]{x}\operatorname{tg} x\right]$. 6.374. $y' = (\sin 3x)^{x^2-1}[2x\ln\sin 3x + 3(x^2-1)\operatorname{ctg} 3x]$.

6.375. $y' = (\cos 2x)^{\sin x}[\cos x \ln\cos 2x - 2\sin x \operatorname{tg} 2x]$.

6.376. $y' = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}}\left[\dfrac{x\ln\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg} x}\right]$

6.377. $y' = -\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin x}\left[\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{x}\right]$.

6.378. $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{\cos 3x}\left[-\sin 3x \ln x + \dfrac{\cos 3x}{3x}\right]$.

6.379. $y' = 8(\operatorname{tg} 4x)^{\sin 8x}[\cos 8x \ln\operatorname{tg} 4x + 1]$.

6.380. $y' = (x^2-1)^{\frac{1}{x}}\left[-\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2} + \dfrac{2}{x^2-1}\right]$.

6.381. $y' = (\sqrt{1-x^3})^{x^2}\left[x\ln(1-x^3) - \dfrac{3x^4}{2(1-x^3)}\right]$ 6.382. $y'(1) = 1 + \ln 2$.

6.383. $y' = (2x+3)^3(5x-2)(x-1)\left[\dfrac{6}{2x+3} + \dfrac{5}{5x-2} + \dfrac{1}{x-1}\right]$.

6.384. $y' = (2x-5)^4(3x+1)^5(x-2)^3\left[\dfrac{8}{2x-5} + \dfrac{15}{3x+1} + \dfrac{3}{x-2}\right]$.

6.385. $y' = \sqrt[5]{(x+2)^2}(x^2-1)^3\sqrt{x-4}\left[\dfrac{2}{5(x+2)} + \dfrac{6x}{x^2-1} + \dfrac{1}{2(x-4)}\right]$.

6.386. $y' = \dfrac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}(4x-5)^2}{(2x+7)^3}\left[\dfrac{9}{2(6x+5)} + \dfrac{8}{4x-5} - \dfrac{6}{2x+7}\right]$.

6.387. $y' = \frac{(4x-7)^3 \sqrt[5]{(5x+2)^4}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}} \left[\frac{12}{4x-7} + \frac{4}{5x+2} - \frac{4}{6x-1} \right]$.

6.388. $y' = \frac{e^x \arcsin x}{x^2-1} \left[1 + \frac{1}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{x^2-1} \right]$.

6.389. $y' = \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x-1} \sin 2x} \left[\frac{3}{x \ln x} - \frac{1}{2(x-1)} - 2 \operatorname{ctg} 2x \right]$.

6.390. $y'(0) = 0$. 6.391. $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$ 6.393. $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+1}{3}$.

6.394. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4\sqrt[12]{t}}$ 6.395. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = -\frac{e^3}{2}$

6.396. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$. 6.397. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-\frac{1}{6}} = 3$.

6.398. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = 1$. 6.399. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = 0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = -1$.

6.400. $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2} t^3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{15}{4} t$. 6.401. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3\sin^3 t}$. 6.402. $\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = 12$, $\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{1}{5}} = 12e$.

6.403. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = 2$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1} = 4$. 6.405. 1) $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$; 2) $5x + y + 3 = 0$, $x - 5y + 11 = 0$, 3) $2x + y - 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ и $2x - y - 5 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$. 6.406. $x - 1 = 0$. 6.407. 30°. 6.408. $2x + y - 6 = 0$ и $2x - y + 2 = 0$. 6.410. $\sqrt{5}x - 2y - 1 = 0$. 6.411. $(0; 0)$ и $(2; -4)$. 6.412. $(2\pi k; 0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 6.413. $3x - y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$. 6.414. $x - y - 8 = 0$ и $x - y + 8 = 0$. 6.417. $2x + y - 4\sqrt{2} = 0$, $x - 2y + 3\sqrt{2} = 0$. 6.418. $(5; 1)$ и $(4; 3)$. 6.419. $y + 1 = 0$, $x - 1 = 0$. 6.421. $v(0) = 0$, $v(2) = -4$ м/с, $v(3) = -21$ м/с; $a(0) = 2$ м/с², $a(2) = -10$ м/с², $a(3) = -25$ м/с². 6.422. Через 3 с. 6.423. 8 Дж. 6.425. $\omega = -18$ рад/с, $a = -10$ рад/с²; через 5 с. 6.427. 10π м/с. 6.428. 24 м³/с. 6.429. Если $0 < x < \frac{1}{4}$, то быстрее изменяется ордината точки; если $x > \frac{1}{4}$, то быстрее изменяется абсцисса точки; если $x = \frac{1}{4}$, то скорость изменения абсциссы и ординаты одинакова. 6.431. $dy = -\frac{2}{x^3}\Delta x$. 6.432. $dy = -\frac{3}{(x-1)^2}\Delta x$. 6.433. $dy = \frac{2\Delta x}{1+4x^2}$.

6.434. $dy = \frac{2x\,\Delta x}{1+x^2}$. 6.435. $dy = \sin 2x\,\Delta x$. 6.436. $dy =$
$= \left(5^{x^2} 2x \arccos\frac{1}{x}\ln 5 + 5^{x^2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)\Delta x$. 6.437. $dy =$
$= \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\Delta x$. 6.439. $\Delta y = 0{,}0333$, $dy = 0{,}0330$,
$|dy - \Delta y| = 0{,}0003$, $\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right| \approx 0{,}9\%$. 6.440. $\Delta y = -0{,}0099$,
$dy = -0{,}01$ $|dy - \Delta y| = 0{,}0001$, $\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right| \approx 1\%$. **6.442.** 0,0225 м.
6.447. 2,03. **6.448.** 1,0035. **6.449.** 0,849. **6.450.** 0,9954. **6.451.** 0,5005.
6.452. 2,999. 6.453. 0,88. **6.455.** 1) $\Delta y = |\cos x|\,\Delta x$; 2) $\Delta y =$
$= |\operatorname{ctg} x|\,\Delta x$; 3) $\Delta y = \left|\frac{2}{\sin 2x}\right|\Delta x$.

Глава 7

7.5. Интервал убывания $(-\infty, 2)$, интервал возрастания $(2, +\infty)$. **7.6.** Интервалы убывания $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, интервал возрастания $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ **7.7.** Интервалы возрастания $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, интервал убывания $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
7.8. Интервал убывания $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, интервал возрастания $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **7.9.** Интервалы возрастания $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.
7.10. Интервалы убывания $(-\infty, 3)$ и $(3, +\infty)$. **7.11.** Интервалы возрастания $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$, интервалы убывания $(-1, 1)$ и $(1, 3)$.
7.12. Интервал убывания $\left(0, \frac{16}{9}\right)$, интервал возрастания $\left(\frac{16}{9}, +\infty\right)$. **7.13.** Интервалы убывания $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$, интервалы возрастания $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$. **7.14.** Интервал возрастания $(-\infty, +\infty)$. **7.15.** Интервал убывания $\left(0\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, интервал возрастания $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$. **7.16.** Интервал возрастания $(-\infty, 1)$, интервал убывания $(1, +\infty)$. **7.22.** Минимум при $x = \frac{5}{2}$.
7.23. Максимум при $x = 1$, минимум при $x = 3$. **7.24.** Минимум при $x = 1$ и $x = 5$, максимум при $x = 3$. **7.25.** Минимум при

$x=-1$. **7.26.** Минимум при $x=-1$, максимум при $x=1$. **7.27.** Максимум при $x=-1$, минимум при $x=1$. **7.28.** Максимум при $x=-\frac{3}{2}$, минимум при $x=1$. **7.29.** Экстремальных точек нет. **7.30.** Минимум при $x=0$. **7.31.** Максимум при $x=0$. **7.32.** Минимум при $x=2$. **7.33.** Максимум при $x=0$. **7.34.** Максимум при $x=e$. **7.35.** Минимум при $x=-\sqrt{2}$, максимум при $x=\sqrt{2}$. **7.36.** Максимум при $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, минимум при $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **7.37.** Минимум при $x=1$. **7.38.** Минимум при $x=2k\pi$, максимум при $x=(2k+1)\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **7.40.** Наибольшее значение 1, наименьшее значение -7. **7.41.** Наибольшее значение -8, наименьшее значение $-6\sqrt{3}-8$. **7.42.** Наибольшее значение 3, наименьшее значение 0. **7.43.** *Наибольшее значение* $\frac{\pi}{6}$, *наименьшее значение* 0. **7.44.** Наибольшее значение e, наименьшее значение $-\frac{1}{e}$. **7.45.** Наибольшее значение 1, наименьшего значения нет. **7.46.** Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения. **7.47.** Наибольшее значение $\frac{\pi}{4}$, наименьшего значения нет. **7.48.** Наибольшее значение $2\pi+1$, наименьшее значение $-\frac{3\pi}{2}$. **7.51.** $\frac{m}{2}$ и $\frac{m}{2}$. **7.52.** $\frac{7}{2}$ и $-\frac{7}{2}$. **7.53.** Квадрат со стороной 5 см. **7.54.** Квадрат со стороной 5 см. **7.55.** $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. **7.56.** Стороны прямоугольника равны $\frac{\sqrt{5}}{5}R$ и $\frac{4\sqrt{5}}{5}R$. **7.58.** Стороны прямоугольника равны $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. **7.59.** 18 см и 24 см. **7.60.** В сечении должен быть квадрат со стороной $\frac{D\sqrt{2}}{2}$. **7.61.** $r=\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ м, $h=2\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ м, где r — радиус основания, а h — высота цилиндра. **7.62.** Высота бака и сторона его основания равны 3 м. **7.63.** 7 см. **7.64.** Высота цилиндра равна $R\sqrt{2}$. **7.65.** Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$. **7.66.** $r_1 : r_2 = 2 : 3$, где r_1 — радиус основания искомого цилиндра, а r_2 — радиус основания конуса **7.67.** $x=\frac{D\sqrt{3}}{3}$, $y=\frac{D\sqrt{6}}{3}$. **7.68.** При $y=\frac{2}{3}h$. **7.76.** Интервалы вогнутости $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$, интервал выпуклости $(2, 3)$. Точки перегиба $(2; -19)$ и $(3; 5)$. **7.77.** Интервал выпуклости $(-\infty, 3)$, интервал вогнутости $(3, +\infty)$. Точка перегиба $(3; -5)$. **7.78.** Интервал вогнутости

$(-\infty, -2)$, интервал выпуклости $(-2, +\infty)$. Точек перегиба нет. 7.79. Интервалы выпуклости $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$, интервалы вогнутости $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$. Точки перегиба $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0; 0)$ и $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 7.80. Интервалы вогнутости $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$, интервал выпуклости $(0, 1)$. Точка перегиба $(1; 0)$. 7.81. Интервал вогнутости $(0, +\infty)$. Точек перегиба нет. 7.82. Интервал выпуклости $(-\infty, -2)$, интервал вогнутости $(-2, +\infty)$. Точка перегиба $(-2; 4)$. 7.83. Интервал выпуклости $(0, \pi)$, интервал вогнутости $(\pi, 2\pi)$. Точка перегиба $(\pi; 0)$. 7.84. Интервалы выпуклости $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, интервал вогнутости $(-1, 1)$. Точки перегиба $(-1; \ln 2)$ и $(1; \ln 2)$. 7.85. Интервал вогнутости $(0, +\infty)$. Точек перегиба нет. 7.86. Интервал вогнутости $(-\infty, 0)$, интервал выпуклости $(0, +\infty)$. Точка перегиба $(0; 0)$. 7.87. Интервалы вогнутости $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ интервал выпуклости $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Точки перегиба $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$. 7.88. Кривая всюду вогнута. Точек перегиба нет. 7.93. Область определения $(-\infty, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, 1)$ и $(4, +\infty)$ $y > 0$; в интервале $(1, 4)$ $y < 0$. В интервале $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ функция убывает, в интервале $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ — возрастает. Точка минимума $\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$. Кривая всюду вогнута. Точек перегиба нет. 7.94. Область определения $(-\infty, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$ $y < 0$, в интервале $(1, +\infty)$ $y > 0$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ функция возрастает, в интервале $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ — убывает. Точка максимума $(0; 0)$, точка минимума $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{27}\right)$. В интервале $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ кривая выпукла, в интервале $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ — вогнута. Точка перегиба $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{27}\right)$. 7.95. Область определения $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$ $y > 0$, в интервале $(-2, 0)$ $y < 0$. В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(-2, +\infty)$ функция возрастает. Экстремальных точек нет. В интервале $(-\infty, -2)$ кривая вогнута, в интервале $(-2, +\infty)$ — выпукла. Точек перегиба нет. 7.96. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция четная. В интервале $(-\infty, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $(-\infty, 0)$ функция возрастает, в интервале $(0, +\infty)$ — убывает. Точка максимума $(0; 1)$. В интервалах $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ кривая вогнута, в интервале $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — выпукла. Точки перегиба $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

7.97. Область определения $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Функция четная. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ $y > 0$, в интервале $(-1, 1)$ $y < 0$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ функция возрастает, в интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ — убывает. Точка максимума $(0; -1)$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ кривая вогнута, в интервале $(-1, 1)$ — выпукла. Точек перегиба нет.

7.98. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная. В интервале $(-\infty, 0)$, $y < 0$, в интервале $(0, +\infty)$ $y > 0$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция убывает, в интервале $(-1, 1)$ — возрастает. Точка минимума $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, точка максимума $\left(1; \frac{1}{2}\right)$. В интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$ кривая выпукла, в интервалах $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$ — вогнута. Точки перегиба $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ и $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

7.99. Область определения $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Функция нечетная. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ $y < 0$, в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$ $y > 0$. Функция убывает во всей своей области определения. Экстремальных точек нет. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ кривая выпукла, в интервалах $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$ — вогнута. Точка перегиба $(0; 0)$.

7.100. Область определения $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. В интервале $(-\infty, 1)$ $y < 0$, в интервале $(1, +\infty)$ $y > 0$. В интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ функция убывает. Экстремальных точек нет. В интервалах $\left(-\infty, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$ и $(0, 1)$ кривая выпукла, в интервалах $\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, 0\right)$ и $(1, +\infty)$ — вогнута. Точки перегиба $\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ и $(0; -1)$.

7.101. Область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Функция четная. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ $y > 0$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ функция убывает, в интервалах $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$ — возрастает. Точки минимума $(-1; 2)$ и $(1; 2)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ кривая вогнута. Точек перегиба нет.

7.102. Область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Функция нечетная. В интервале $(-\infty, 0)$ $y < 0$, в интервале $(0, +\infty)$ $y > 0$. В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ функция возрастает, в интервалах $(-2, 0)$ и $(0, 2)$ — убывает. Точка максимума $(-2; -4)$, точка минимума $(2; 4)$. В интервале $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, в интервале $(0, +\infty)$ — вогнута. Точек перегиба нет.

7.103. Область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, 2)$ $y > 0$, в интервале $(2, +\infty)$ $y < 0$. В интервалах $\left(-\infty, -2\sqrt[3]{2}\right)$ и $(0, +\infty)$ функция убывает, в интервале $\left(-2\sqrt[3]{2}, 0\right)$ — возрастает. Точка минимума $\left(-2\sqrt[3]{2};\ 3\sqrt[3]{2}\right)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ кривая вогнута. Точек перегиба нет. **7.104.** Область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ В интервалах $\left(-\infty, -2\sqrt[3]{2}\right)$ и $(0, +\infty)$ $y > 0$, в интервале $\left(-2\sqrt[3]{2}, 0\right)$ $y < 0$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, 2)$ функция убывает, в интервале $(2, +\infty)$ — возрастает. Точка минимума $(2;\ 12)$. В интервалах $\left(-\infty, -2\sqrt[3]{2}\right)$ и $(0, +\infty)$ кривая вогнута, в интервале $\left(-2\sqrt[3]{2}, 0\right)$ — выпукла. Точка перегиба $\left(-2\sqrt[3]{2};\ 0\right)$. **7.105.** Область определения $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$. Функция четная. В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ $y > 0$, в интервале $(-2, 2)$ $y < 0$. В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(-2, 0)$ функция возрастает, в интервалах $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$ — убывает. Точка максимума $\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$. В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ кривая вогнута, в интервале $(-2, 2)$ — выпукла. Точек перегиба нет. **7.106.** Область определения $[0, +\infty)$. В интервале $(0, 1)$ $y < 0$, в интервале $(1, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ функция убывает, в интервале $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ — возрастает. Точка минимума $\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$. В интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута. Точек перегиба нет. **7.107.** Область определения $(-\infty, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ $y > 0$, в интервале $(0, 1)$ $y < 0$. В интервале $\left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$ функция убывает, в интервале $\left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$ — возрастает. Точка минимума $\left(\frac{1}{8};\ -\frac{1}{4}\right)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ кривая выпукла, в интервале $(0, 1)$ — вогнута. Точки перегиба $(0;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. **7.108.** Область определения $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Функция четная. В интервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ $y > 0$. В интервале $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ функция убывает, в интервале $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ — возрастает. Экстремальных точек нет. В интервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет. **7.109.** Область определения $[-3, 3]$. Функция четная. В интервале $(-3, 3)$ $y > 0$. В интервале $(-3, 0)$ функция возрастает, в интервале $(0, 3)$ — убывает. Точка максимума $(0;\ 3)$. В интервале $(-3, 3)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет. **7.110.** Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция четная. В интервале $(-\infty, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $(-\infty, 0)$ функция убывает, в интервале $(0, +\infty)$ — возрастает. Точка минимума $(0;\ \sqrt{5})$. Кривая всюду во-

гнута. Точек перегиба нет. **7.111.** Область определения $[4, +\infty)$. В интервале $(4, +\infty)$ функция положительна и возрастает. Экстремальных точек нет. В интервале $\left(4, \frac{16}{3}\right)$ кривая выпукла, в интервале $\left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$ — вогнута. Точка перегиба $\left(\frac{16}{3}; \frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$. **7.112.** Область определения $[-5, +\infty)$. В интервале $(-5, 0)$ $y < 0$, в интервале $(0, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $\left(-5, -\frac{10}{3}\right)$ функция убывает, в интервале $\left(-\frac{10}{3}, +\infty\right)$ —возрастает. Точка минимума $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{10\sqrt{15}}{9}\right)$. В интервале $(-5, +\infty)$ кривая вогнута. Точек перегиба нет. **7.113.** Область определения $[-2, +\infty)$. В интервале $(-2, +\infty)$ функция положительна и возрастает. Экстремальных точек нет. В интервале $(-2, 0)$ кривая выпукла, в интервале $(0, +\infty)$ — вогнута. Точка перегиба $(0; 2\sqrt{2})$. **7.114.** Область определения $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $(-\infty, 0)$ функция убывает, в интервале $(1, +\infty)$ — возрастает. Экстремальных точек нет. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет. **7.115.** Область определения $[0, 1]$. В интервале $(0, 1)$ $y > 0$. В интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция возрастает, в интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ — убывает. Точка максимума $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. В интервале $(0, 1)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет. **7.116.** Область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция положительна и убывает. Экстремальных точек нет. В интервале $\left(-\infty, -\frac{\ln 2}{2}\right)$ кривая выпукла, в интервалах $\left(-\frac{\ln 2}{2}, 0\right)$ и $(0, +\infty)$ — вогнута. Точка перегиба $\left(-\frac{\ln 2}{2}; 2^{-2/\ln 2}\right)$.
7.117. Область определения $(-\infty, +\infty)$. В интервале $(-\infty, 0)$ $y < 0$, в интервале $(0, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $(-\infty, 1)$ функция возрастает, в интервале $(1, +\infty)$ — убывает. Точка максимума $\left(1; \frac{1}{e}\right)$. В интервале $(-\infty, 2)$ кривая выпукла, в интервале $(2, +\infty)$ — вогнута. Точка перегиба $\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$. **7.118.** Область определения $(-\infty, +\infty)$. Так как $e^x > x$ при любом x, то функция положительна на всей числовой оси. В интервале $(-\infty, 0)$ функция убывает, в интервале $(0, +\infty)$ — возрастает. Точка минимума $(0; 1)$. Кривая всюду вогнута. Точек перегиба нет. **7.119.** Область определения $(0, +\infty)$. В интервале $(0, 1)$ $y < 0$, в интервале $(1, +\infty)$ $y > 0$. В интервале $(0, e)$ функция возра-

стает, в интервале $(e, +\infty)$ — убывает. Точка максимума $\left(e;\ \frac{1}{e}\right)$. В интервале $(0,\ e\sqrt{e})$ кривая выпукла, в интервале $(e\sqrt{e},\ +\infty)$ — вогнута. Точка перегиба $\left(e\sqrt{e};\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$. **7.120.** Область определения $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. Функция четная. В интервалах $(-\infty, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, +\infty)$ $y>0$, в интервалах $(-\sqrt{2}, -1)$ и $(1, \sqrt{2})$ $y<0$. В интервале $(-\infty, -1)$ функция убывает, в интервале $(1, +\infty)$ — возрастает. Экстремальных точек нет. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет. **7.121.** Область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. В интервале $(-\infty, 0)$ $y>0$, в интервале $(0, +\infty)$ $y<0$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает. Экстремальных точек нет. В интервале $(-\infty, 0)$ кривая вогнута, в интервале $(0, +\infty)$ — выпукла. Точек перегиба нет. **7.122.** Область определения $(0, +\infty)$. Так как $x>\ln x$ в интервале $(0, +\infty)$, то функция положительна во всей своей области определения. В интервале $(0, 1)$ функция убывает, в интервале $(1, +\infty)$ — возрастает. Точка минимума $(1; 1)$. В интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута. Точек перегиба нет. **7.123.** Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция периодическая с периодом 2π. В интервалах $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ $y<0$, в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ $y>0$. В интервалах $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ функция возрастает, в интервале $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ — убывает. Точка максимума $\left(\frac{3\pi}{4};\ \sqrt{2}\right)$, точка минимума $\left(\frac{7\pi}{4};\ -\sqrt{2}\right)$. В интервалах $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ кривая вогнута, в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ — выпукла. Точки перегиба $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{4};\ 0\right)$. **7.124.** Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция четная и периодическая с периодом π. В интервалах $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$ $y<0$, в интервале $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ $y>0$. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция возрастает, в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ — убывает. Точка минимума $(0; -1)$, точка максимума $\left(\frac{\pi}{2};\ 3\right)$. В интервалах $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ кривая вогнута, в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ — выпукла.

Точки перегиба $\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4};\ 1\right)$ **7.125.** Область определения $(-\infty,\ +\infty)$. Функция четная и периодическая с периодом $\frac{\pi}{2}$. В интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ $y>0$. В интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ функция убывает, в интервале $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$ — возрастает. Точка максимума $(0;\ 1)$, точка минимума $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$. В интервалах $\left(0,\ \frac{\pi}{8}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{8},\ \frac{\pi}{2}\right)$ кривая выпукла, в интервале $\left(\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}\right)$ — вогнута. Точки перегиба $\left(\frac{\pi}{8};\ \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{8};\ \frac{3}{4}\right)$. **7.126.** Область определения $(-\infty,\ +\infty)$. Функция нечетная. В интервале $(-\infty,\ 0)$ $y<0$, в интервале $(0,\ +\infty)$ $y>0$. Функция возрастает на всей числовой оси. Экстремальных точек нет. В интервале $(-\infty,\ 0)$ кривая выпукла, в интервале $(0,\ +\infty)$—вогнута. Точка перегиба $(0;\ 0)$. **7.127.** Область определения $(2\pi k,\ \pi+2\pi k)$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$. Функция периодическая с периодом 2π. В интервалах $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{\pi}{2}\ \pi\right)$ $y<0$. В интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция возрастает, в интервале $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ — убывает. Точка максимума $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ В интервале $(0,\ \pi)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет. **7.128.** Область определения $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\ 2\pi k\right)$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$. Функция четная и периодическая с периодом 2π. В интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}\ \ 0\right)$ и $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ $y<0$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ функция возрастает, в интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ — убывает. Точка максимума $(0;\ 0)$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ кривая выпукла. Точек перегиба нет.

Глава 8

8.2. $\frac{x^8}{8}+C$. **8.3.** $\frac{x^4}{8}+C$. **8.4.** $\frac{x}{2}+C$. **8.5** $-\frac{1}{3x^3}+C$. **8.6.** $\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+3x+C$. **8.7.** $-\frac{3t^4}{4}+2t^3-\frac{t^2}{2}+C$. **8.8.** x^6- $-x^5+x^3+x^2+x+C$. **8.9.** $\frac{x^4}{4}+x^3+x^2+C$. **8.10.** $\frac{u^5}{5}-$

$-\frac{3u^4}{4}+\frac{2u^3}{3}+C$. 8.11. $x-\frac{x^4}{2}+\frac{x^7}{7}+C$. 8.12. $\frac{\sqrt{x}}{2}+C$. 8.13. $\frac{2x\sqrt{2x}}{3}+$ $+C$. 8.14. $4v\sqrt{v}-\frac{5v^3}{3}+C$. 8.15. $3\sqrt[3]{x}+C$. 8.16. $8\ln|x|+C$.
8.17. $\ln|x|-3x+2x^2+C$. 8.18. $-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{4x^4}+C$.
8.19. $\frac{x^2}{2}-2x+C$. 8.20. $2x-x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$.
8.21. $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}-\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+C$. 8.22. $\frac{2\sqrt{x^5}}{5}-\frac{4\sqrt{x^3}}{3}+$ $+6\sqrt{x}+C$. 8.23. $2\sqrt{x^3}-8\sqrt[4]{x^5}+4\sqrt[4]{x^7}-4\sqrt[4]{x^3}+C$.
8.24. $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}-3x+\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}-3\sqrt[3]{x}+C$. 8.25. $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+$ $+2x+C$. 8.26. $\frac{x^2}{2}-x+C$. 8.27. $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+4x+C$.
8.28. $3x-\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+C$. 8.29. $-2\cos x+C$. 8.30. $\frac{\sin x}{3}+C$.
8.31. $-7\cos x-4\sin x+C$. 8.32. $\sqrt[3]{x^5}-6\sin x+C$.
8.33. $\frac{1}{2}\sin u+5\cos u+4\sqrt[4]{u^7}+C$. 8.34. $\frac{3^{x-1}}{\ln 3}+C$. 8.35. $\frac{(3e)^x}{1+\ln 3}+C$.
8.36. $\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln 2-1}+C$. 8.37. $\frac{16^x}{\ln 16}-\frac{4^x}{\ln 4}+C$. 8.38. $\frac{9^x}{\ln 9}+$ $+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3}+C$. 8.39. $\frac{(5e)^x}{1+\ln 5}-e^x+\frac{5^x}{\ln 5}-x+C$. 8.40. $4e^x-$ $-3\cos x+C$. 8.41. $5\sin\varphi-\frac{2\cdot 6^\varphi}{\ln 6}+C$. 8.42. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$.
8.43. $\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x+C$. 8.44. $\sin x-4\operatorname{tg} x+C$. 8.45. $-\cos x-$ $-\operatorname{ctg} x+C$. 8.46. $2\operatorname{tg} x-x+C$. 8.47. $-2\cos x+C$. 8.48. $\frac{2}{3}\sin x+C$.
8.49. $-\frac{2}{5}\cos x+C$. 8.50. $-\operatorname{ctg} x-2x+C$. 8.51. $2\cos x+C$.
8.52. $2\cos x+C$. 8.53. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x+C$. 8.54. $\frac{1}{2}\sin x+C$.
8.55. $\operatorname{tg} x-x+C$. 8.56. $-\operatorname{ctg} x-x+C$. 8.57. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$.
8.58. $\frac{x-\sin x}{2}+C$. 8.59. $\frac{3(x+\sin x)}{2}+C$. 8.60. $\frac{x+\operatorname{tg} x}{2}+C$.
8.61. $-\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 8.62. $\sin x+\cos x+C$. 8.63. $x+\arcsin x+$ $+C$. 8.64. $\arcsin x+C$. 8.65. $\arcsin x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$.
8.66. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$. 8.67. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$.

8.68. $\operatorname{arctg} x + C$. 8.69. $x + \operatorname{arctg} x + C$. 8.70. $-\frac{1}{x} + 2\operatorname{arctg} x + C$. 8.71. $\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$. 8.72. $-x - \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

8.73. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - \frac{1}{x} + C$ 8.74. $-5\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{tg} x + C$.

8.75. $\frac{6^x}{\ln 6} + \arccos x + C$. 8.77. $-3\cos\frac{x}{3} + C$. 8.78. $\frac{1}{4}\sin 4x + C$.

8.79. $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + C$. 8.80. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$. 8.81 $\frac{1}{5}\cdot\frac{4^{5x-1}}{\ln 4} + C$.

8.82. $-\frac{1}{3}e^{2-3x} + C$. 8.83. $\frac{1}{88}(8x+5)^{11} + C$. 8.84. $-\frac{1}{14}(3-2x)^7 + C$.

8.85. $\frac{1}{8(5-4x)^2} + C$. 8.86. $\frac{1}{9}\sqrt{(6x-5)^3} + C$

8.87. $-\frac{4}{21}\sqrt[4]{(2-3x)^7} + C$. 8.88. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x} + C$.

8.89. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{(9x+4)^2} + C$. 8.90. $\frac{1}{7}\ln|7x+9| + C$.

8.91. $-\frac{1}{6}\ln|11-6x| + C$. 8.92. $\ln|x-1| + C$. 8.93. $x - \ln|x+1| + C$.

8.94. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$. 8.95. $\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4} + C$. 8.96. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+4x}{1-4x}\right| + C$.

8.97. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3-2x}{3+2x}\right| + C$. 8.98. $\arcsin\frac{x}{5} + C$. 8.99. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C$.

8.100. $\frac{1}{4}\ln|4x + \sqrt{16x^2+1}| + C$. 8.101. $\frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2-25}| + C$.

8.102. $-\frac{1}{2(e^x-5)^2} + C$. 8.103. $\frac{(7^x+3)^5}{5\ln 7} + C$. 8.104. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

8.105. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. 8.106. $\frac{1}{6}\ln|x^6-3| + C$. 8.107. $\ln|x^2-x-4| + C$. 8.108. $-\ln|4+3x-x^2| + C$. 8.109. $2\sqrt{3x^2-5x+1} + C$.

8.110. $\sqrt{2x-x^2} + C$. 8.111. $\ln|x^3-5x^2| + C$. 8.112. $\ln(e^x+4) + C$.

8.113. $-\frac{1}{\ln 6}\ln|1-6^x| + C$. 8.114. $-\ln|\cos x| + C$. 8.115. $\ln|\sin x| + C$. 8.116. $-4\ln\left|\cos\frac{x}{4}\right| + C$. 8.117. $\frac{1}{3}\ln\left|\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\right| + C$.

8.118. $\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right| + C$. 8.119. $-\frac{1}{\pi}\ln|\sin(1-\pi x)| + C$.

8.120. $\frac{2}{5}(7 + \sqrt{x})^5 + C$. 8.121. $-\frac{1}{(5+\sqrt{x})^2} + C$.

8.122. $\frac{1}{6}\left(4 + \sqrt[3]{x}\right)^6 + C$. 8.123. $\ln|\ln x| + C$. 8.124. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{\ln^7 x} + C$.

8.125. $-e^{\frac{1}{x}} + C$. 8.126. $\frac{2}{\ln 6}\cdot 6^{\sqrt{x}} + C$. 8.127. $\frac{3}{2\ln 3}\cdot 3^{x^2} + C$.

8.128. $\dfrac{\sqrt[3]{(e^{3x}-9)^4}}{4}+C$. 8.129. $-\sqrt{1-e^{2x}}+C$. 8.130. $\dfrac{3}{2\ln 4}\cdot\sqrt[3]{(5+4^x)^2}+C$. 8.131. $\dfrac{1}{10}\ln\left|\dfrac{1+e^{5x}}{1-e^{5x}}\right|+C$. 8.132. $\dfrac{1}{\ln 8}\operatorname{arctg} 8^x+$ $+C$. 8.133. $\arcsin e^x+C$ 8.134. $\dfrac{1}{\ln 6}\ln(6^x+\sqrt{36^x+1})+C$. 8.135. $\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$. 8.136. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x}+C$. 8.137. $\dfrac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^9 x}+C$. 8.138. $\dfrac{1}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$. 8.139. $\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x}+C$. 8.140. $-\dfrac{2}{5}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^5 x}+C$. 8.141. $\dfrac{(\arcsin x-1)^2}{2}+C$. 8.142. $-\ln|\arccos x|+C$. 8.143. $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}+C$. 8.144. $\dfrac{1}{\operatorname{arcctg} x}+C$. 8.145. $-\dfrac{1}{3}\cos x^3+C$. 8.146. $\dfrac{1}{\ln 5}\sin 5^x+C$. 8.147. $-\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-\sin x)^3}+C$. 8.148. $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(2\cos x+1)^2}+C$. 8.149. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$. 8.150. $2x-\sin 2x+C$. 8.151. $-\ln|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}|+C$. 8.152. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x-2}{\sin x+2}\right|+C$. 8.153. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\cos x}{3}\right)+C$. 8.154. $-\ln|\operatorname{ctg} x+\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2 x}|+C$. 8.155. $\arcsin\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)+C$. 8.156. $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\ln x+3}{\ln x-3}\right|+C$. 8.157. $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{4}\right)+C$. 8.158. $\dfrac{1}{\ln 4}\ln(4^x+\sqrt{16^x+9})+$ $+C$. 8.159. $-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3}{x}+C$. 8.160. $\dfrac{1}{2}\ln|\arcsin 2x|+$ $+C$ 8.161. $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg} x^4+C$. 8.162. $-\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}+C$.

8.163. $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$. 8.164. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|+C$. 8.166. $-\cos x+$ $+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$. 8.167. $\dfrac{\sin 4x}{4}-\dfrac{\sin^3 4x}{12}+C$. 8.168. $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{\sin 2x}{4}+$ $+\dfrac{\sin 4x}{32}+C$. 8.169. $\dfrac{3}{8}x-\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{16}+C$. 8.170. $-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+$ $+C$. 8.171. $-\dfrac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|+C$. 8.172. $\dfrac{1}{10\cos^2 5x}+$ $+\dfrac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C$. 8.173. $\operatorname{ctg} x-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+x+C$. 8.174. $\dfrac{x}{8}-$ $-\dfrac{\sin 4x}{32}+C$. 8.175. $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}-\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C$. 8.176. $\dfrac{x}{16}-$

$-\frac{\sin 12x}{192}+\frac{\sin^3 6x}{288}+C$. 8.177. $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C$.

8.178. $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}+C$. 8.179. $-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C$.

8.180. $\frac{4}{3}\sin^3\frac{x}{4}-\frac{4}{5}\sin^5\frac{x}{4}+C$. 8.181. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

8.182. $-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{9}\cos^3 3x-\frac{1}{15}\cos^5 3x+C$. 8.183. $-\frac{1}{10}\cos 5x+$ $+\frac{1}{2}\cos x+C$ 8.184. $\frac{1}{20}\sin 10x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$. 8.185. $\frac{1}{8}\sin 4x-$ $-\frac{1}{12}\sin 6x+C$. 8.187. $8\arcsin\frac{x}{4}-\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}+C$.

8.188. $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+C$. 8.189. $\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}+C$.

8.190. $\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{5}-\frac{4\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}+C$ 8.191. $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x}+$ $+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+C$. 8.192. $-\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x}+C$ 8.193. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$. 8.194. $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{x}+C$.

8.195. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-4)^3}+4\sqrt{x^2-4}+C$ 8.197. $\sin x-x\cos x+C$.

8.198. $\frac{1}{4}x\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$. 8.199. $(2x-3)\sin x+2\cos x+C$.

8.200. $(2x-0{,}5)\cos 2x-\sin 2x+C$. 8.201. $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$.

8.202. $\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x+C$. 8.203. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$.

8.204. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. 8.205. $-\frac{1}{3}x\operatorname{ctg} 3x+\frac{1}{9}\ln|\sin 3x|+C$

8.206. $xe^{2x}+C$. 8.207. $\frac{e^{-3x}}{9}(3x-5)+C$. 8.208. $(x^2-2x+2)e^x+$ $+C$. 8.209. $x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg} x+C$ 8.210. $x\arcsin x+$ $+\sqrt{1-x^2}+C$. 8.211. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 8.212. $x\ln x-$ $-x+C$. 8.213. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$. 8.214. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-$ $-\sqrt{1+x^2}+C$. 8.215. $\frac{3^x}{\ln^2 3}[(x+2)\ln 3-1]+C$.

8.217. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$. 8.218. $-\frac{1}{x+4}+C$. 8.219. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right|+$ $+C$. 8.220. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$. 8.221. $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}}$ C.

8.222. $\frac{x^2}{2}+2x-6\operatorname{arctg}(x-1)+C$ 8.223. $\frac{2}{3}x^3+3x^2+11x-$ $-21\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. 8.224. $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C$. 8.225. $\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right|+C$.
8.226. $\ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|+C$. 8.227. $\arcsin\frac{x-1}{2}+C$. 8.228. $\arcsin(2x-1)+$ $+C$. 8.229. $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}|+C$. 8.230. $\ln|x+3+$ $+\sqrt{x^2+6x+8}|+C$ 8.231. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{5}+C$. 8.232. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{2}{3}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C$ 8.234. $\frac{1}{2}\ln|x^2+x-2|-$ $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$ 8.235. $\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+2)+4\operatorname{arctg}(x-1)+$ $+C$. 8.236. $\frac{1}{2}\ln(x^2-5x+7)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}}+C$.
8.237. $3\ln|x+2|+\frac{11}{x+2}+C$. 8.238. $3\ln\left|\frac{x}{2x+1}\right|-2\ln|2x^2+x|+C$.
8.239. $\frac{3}{2}\ln|x^2+3x-4|+\frac{7}{10}\ln\left|\frac{x+4}{x-1}\right|+C$. 8.240. $2\ln(x^2+5x+8)-$ $-\frac{18}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{7}}+C$. 8.241. $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+5x+8)-$ $-\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{7}}+C$. 8.242. $x+3\ln(x^2-8x+17)+8\operatorname{arctg}(x-4)+$ $+C$. 8.243. $\sqrt{x^2-2x+3}+C$ 8.244. $\sqrt{x^2+8x+7}-6\ln|x+4+$ $+\sqrt{x^2+8x+7}|+C$ 8.245. $-\sqrt{12-3x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{2}+$ $+C$. 8.246. $-2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$
8.247. $\frac{5}{2}\arcsin(2x-2)-\frac{1}{4}\sqrt{-3+8x-4x^2}+C$.
8.248. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{3}{2}\ln|2x+2+\sqrt{4x^2+8x+9}|+C$.
8.249. $\frac{3}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C$. 8.250. $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-2)}{\sqrt{7}}+C$.
8.251. $\frac{1}{4\ln 3}\cdot\ln\frac{2+3^x}{2-3^x}+C$. 8.252. $\frac{e^{8x}}{64}(8x-1)+C$. 8.253. $\frac{1}{7}e^{x^7}+C$.
8.254. $\frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6}+\frac{\operatorname{tg}^5 2x}{10}+C$. 8.255. $2\ln|9+3x-x^2|+C$.
8.256. $-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\cos 5x)+C$. 8.257. $(x+2)\sin x+\cos x+C$

8.258. $-\frac{1}{6}x\,\mathrm{ctg}\,6x+\frac{1}{36}\ln|\sin 6x|+C$. 8.259. $\ln(x^2-4x+5)+$ $+7\,\mathrm{arctg}\,(x-2)+C$. 8.260. $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

8.261. $-\frac{1+\ln x}{x}+C$. 8.262. $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}+C$. 8.263. $-\mathrm{ctg}\,e^x+C$.

8.264. $-\frac{2}{3}\sqrt{-3x^2+8x-4}-\frac{7}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-4}{2}+C$

8.265. $x\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$. 8.266. $-\frac{1}{4}\left(\sin 4x+\frac{1}{\sin 4x}\right)+$ $+C$. 8.267. $\frac{1}{9}\left(\sqrt{(3x+1)^3}-\sqrt{(3x-1)^3}\right)+C$.

8.268. $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 3-\ln 2}-2x+C$. 8.269. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

8.270. $(x+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. 8.271. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$.

8.272. $\frac{\mathrm{tg}^9 x}{9}+\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+C$. 8.273 $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}+$ $+\frac{5}{4}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right|+C$. 8.274. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

8.275. $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)\right|+\sqrt{1-x^2}+C$.

Глава 9

9.2. 19. 9.3. 144. 9.4. 3. 9.5. $190\frac{1}{2}$. 9.6. $\frac{3}{2}$. 9.7. $24\frac{2}{3}$. 9.8. 12. 9.9. -6. 9.10. -12. 9.11. $3e^3+2e^2-17$. 9.12. $-\frac{1+3e^2}{e^2}$.

9.13. $-\frac{1}{2}$. 9.14. $2(\sqrt{3}-1)$. 9.15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 9.16. $\frac{\pi}{60}$. 9.17. $\frac{\pi}{3}$.

9.18. $\frac{e^3-1}{3e^3}$. 9.19. $\frac{36}{\ln 2}$. 9.20. $\sin 3-\frac{124}{\ln 5}$. 9.21. $\frac{1}{6}(\ln 5-\ln 2)$.

9.22. $\ln(\sqrt{5}+2)$. 9.23. $\frac{\pi+2}{8}$. 9.24. $\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$.

9.25. $-\frac{1}{2}\ln 3$. 9.26. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 9.27. $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$.

9.28. $\frac{\pi}{4}-e^{-\frac{\pi}{4}}$. 9.29. $\frac{\pi}{8}$ 9.30. $\frac{1}{12}(\ln 3-\ln 5)$.

9.31. $2\left(\sqrt[4]{3}-1\right)$. 9.32. 0. 9.33. $\frac{14}{45}$. 9.34. $-\frac{8}{15}$. 9.35. $\frac{8}{9}e^9$.

9.36. 4. 9.38. 9,75. 9.39. 2. 9.40. $\frac{1}{9}$. 9.41. $\frac{1}{3}(e^2-e)$.

9.42. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. 9.43. $\frac{\pi}{180}$. 9.44. $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. 9.45. $\frac{1}{9}$. 9.46. $3-\sqrt{5}$.

9.47. $\frac{1}{12}\ln 5$. 9.48. $\frac{\pi}{6\ln 3}$. 9.49. $\ln(3+2\sqrt{2})-\ln(2+\sqrt{3})$.

9.50. $-\frac{\pi}{12\ln 4}$. 9.51. $\frac{1}{2\ln 2}(\ln 5-2\ln 3)$. 9.52. $4(\sqrt{3}-1)$.

9.53. $\frac{1}{6}$. 9.54. $\frac{1}{5}(1-\cos 1)$. 9.55. $\frac{\pi}{6}$. 9.56. $\frac{1}{8}\ln 3$.

9.57. $\frac{e-1}{\pi}$. 9.58. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 9.59. $-\frac{\sqrt{2}}{32}$. 9.60. $\frac{\pi^2}{6}$. 9.61. $2\ln 10$.

9.62. $2\sqrt{3}-2-\frac{\pi}{6}$. 9.63. $6+4\ln 2$. 9.64. $-6\ (2+\ln 7)$.

9.65. $12\ (3+\ln 3)$. 9.66. $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. 9.67. 3π.

9.68. $\frac{2-\sqrt{2}}{9}$. 9.69. $\frac{\pi}{48}$. 9.71. $4e^5+1$. 9.72. $\frac{\pi}{2}-2$. 9.73. $3e-5$.

9.74. $\frac{1}{9}$. 9.75. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$. 9.76. $2(e^2-1)$. 9.77. $-\frac{2}{9}$.

9.78. $\pi-1$. 9.79. $\pi\sqrt{3}+6\ln 2$. 9.80. $2\ln(\sqrt{5}-2)+\sqrt{5}-1$.

9.81. $\frac{4}{9}(5e^6+1)$. 9.82. $\frac{\pi-2}{4}$. 9.83. $\frac{54-\ln 3}{\ln 3}$. 9.84. π.

9.85. $\frac{2}{35}$. 9.86. $\frac{\pi}{4}$. 9.87. $\frac{\pi}{6}$. 9.88. $\ln 2+\frac{3\pi}{4}$. 9.89. $\frac{8}{15}$.

9.90. $\frac{\pi-2}{8}$. 9.91. 0. 9.92. $e^2(e-2)$. 9.93. $\frac{14}{17}$. 9.94. $\frac{8}{3}$.

9.95. $2(4+3\ln 3-3\ln 7)$. 9.96. $\frac{1}{3}(12-\pi\sqrt{3})$.

9.97. $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$. 9.98. $\frac{3}{80}$. 9.99. $\frac{1}{6}(12\sqrt{3}-12-\pi)$.

9.100. $\frac{4}{\pi}$.

Глава 10

10.6. 56 кв. ед. 10.7. 8 кв. ед. 10.8. $18\frac{2}{3}$ кв. ед.

10.9. $\frac{e^3-1}{2e^2}$ кв. ед. 10.10. $\frac{14}{3}$ кв. ед. 10.11. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ кв. ед.

10.12. $\frac{5\pi\sqrt{3}-9\ln 3}{18}$ кв. ед. 10.13. $\frac{e^2-1}{e}$ кв. ед. 10.14. 6π кв. ед.

10.15. $\frac{25}{12}(\pi+6-6\sqrt{3})$ кв. ед. 10.16. $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.

10.17. $\frac{5}{3}(\pi+6-3\sqrt{3})$ кв. ед. 10.18. 36 кв. ед. 10.19. 36 кв. ед

10.20. $10\frac{2}{3}$ кв. ед. 10.21. e^2-3 кв. ед. 10.22. e^2-3 кв. ед.

10.23. $\frac{3}{4}$ кв. ед. 10.24. $\frac{1}{2}$ кв. ед. 10.25. $\frac{4-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ кв. ед.

10.26. $2\ln 2$ кв ед. 10.27. $2-\sqrt{2}$ кв. ед. 10.28. $\frac{2(e-1)}{e}$ кв. ед.

10.29. $21\frac{1}{3}$ кв. ед. 10.30. 4 кв. ед. 10.32. 48 кв. ед. 10.33. 8 кв. ед.

10.34. $7\frac{1}{2}$ кв. ед. 10.35. $4-\ln 3$ кв. ед. 10.36. $8-2\ln 3$ кв. ед.

10.37. 18 кв. ед 10.38. 36 кв. ед. 10.39. $42\frac{2}{3}$ кв. ед.

10.40. $\frac{1}{3}$ кв. ед. 10.41. $114\frac{1}{3}$ кв. ед. 10.42. $\frac{63}{8\ln 2}+18$ кв. ед.

10.43. $\frac{1}{8}$ кв. ед. 10.44. $13\frac{1}{2}$ кв. ед. 10.45. $\frac{3\pi-2}{6}$ кв. ед.

10.46. $4\pi-8$ кв ед. 10.47. 3π кв. ед. 10.48. $5\pi-10$ и $15\pi+10$ кв. ед. 10.49. $3\pi+6$ кв. ед. 10.50. π кв ед.

10.51. $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{3}$ кв. ед. 10.52. $2\pi+\frac{4}{3}$ и $6\pi-\frac{4}{3}$ кв. ед. 10.55. $57{,}6\,\pi$ куб. ед. 10.56. $\frac{38}{3}\pi$ куб. ед.

10.57. $\frac{56}{27}\pi$ куб. ед. 10.58. $\frac{\pi(3\pi+2)}{8}$ куб. ед. 10.59. 4π куб. ед.

10.60. 48π куб. ед. 10.61. $18{,}6\,\pi$ куб. ед. 10.62. $\frac{70}{3}\pi$ куб ед

10.63. 24π куб. ед. 10.64. $\frac{2\pi b^2\sqrt{a^2-b^2}\,2a^2+b^2)}{3a^2}$ куб. ед

10.65. $\frac{20}{3}\pi$ куб. ед. 10.67. $\frac{32}{3}\pi$ куб. ед. 10.68. $97{,}2\,\pi$ куб. ед.

10.69. $\frac{8}{3}\pi$ куб. ед. 10.70. $\frac{256}{35}\pi$ куб. ед.

10.71. $2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)$ куб. ед 10.72. $\frac{9\pi}{4\ln 2}$ куб. ед.

10.73. $39{,}6\,\pi$ куб. ед. 10.74. $\frac{8}{3}\pi$ куб. ед. 10.75. $\frac{104}{3}\pi$ куб. ед.

10.79. $\approx 7{,}3$ м. 10.80. 24,5 м. 10.81. 20 м. 10.82. Через 6 с.

10.83. 0,045 Дж. 10.84. $\frac{1}{2}\pi\rho g R^2H^2$. 10.85. $\approx$ 16,41 кДж.

10.86. $\approx 7{,}7$ Дж. 10.87. $\frac{2}{3}\rho g H R^3$. 10.88. $\approx 39{,}69$ МН

10.89. $\frac{\rho g a h^2}{6}$. 10.90. $\approx 0{,}176$ Н 10.91. $\approx 183{,}75$ МН

11.5. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да. 11.6. 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да. 11.8. $s = -2\cos t$. 11.9. $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 3$.

11.10. $y = -\dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{2}{x}$, $y = -\dfrac{18}{x}$.

11.12. $2\sqrt{y} = C + \dfrac{1}{x}$. 11.13. $y = 1 + C(x+1)$.

11.14. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} y = C$. 11.15. $\arcsin y = C + \sqrt{1-x^2}$.
11.16. $\sin v = C\cos u$. 11.17. $e^y = C + \ln|1 - e^x|$.

11.18. $\ln xy + \dfrac{y-x}{xy} = C$. 11.19. $e^{-x^2} + \ln(y^2+1) = C$.

11.20. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\frac{3}{4}} - \dfrac{12^y}{\ln 12} = C$. 11.21. $C\sqrt{1+x^2} = \dfrac{e^y}{y+1}$.

11.22. $\sin y = Cx$. 11.23. $y^2 - 1 = Cx$. 11.24. $e^{4y} = 2e^{2x} + C$.
11.26. $x = \sqrt{y} - 1$. 11.27. $y = 2(1+x^3)$. 11.28. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = \operatorname{arctg} x - 1$. 11.29. $\arcsin x = 1 - e^{-y^2}$. 11.30. $y = -e^{-x}(x+1)$.

11.31. $y = e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$. 11.33. $y = k\ln|x| + C$. 11.34. $y = \dfrac{1}{x}$.

11.37. За 30 мин. 11.38. 1 см/с. 11.39. $\approx 44\%$ 11.41. $x = Ce^{\frac{y}{x}}$.

11.42. $x^3 = C(2y - x)$. 11.43. $y = x(C - \ln|x|)$ 11.44. $y = Ce^{-\frac{y}{x}}$.

11.45. $x = Ce^{\frac{x}{x-y}}$. 11.46. $x = Ce^{\arccos\frac{y}{x}}$. 11.47. $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$. 11.48. $y = xe^{Cx}$. 11.49. $x = Ce^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}$. 11.50. $(x-y)^3 = C(x+y)$. 11.51. $\ln x = -\cos\dfrac{y}{x}$. 11.52. $\ln x = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

11.53. $\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x} = \sqrt{3} - \ln x$. 11.54. $x + y = 2xy$.

11.55. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. 11.56. $y = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$.

11.57. $y = -x\ln x$. 11.58. $y = \dfrac{2x}{x+2}$. 11.59. $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

11.61. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{C}{x}$ 11.62. $y = x^4 + Cx^3$. 11.63. $y = (x + C)e^{x^2}$.

11.64. $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1$. 11.65. $y = Ce^{-5x} + \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

11.66. $y = C(x+1) + (x+1)^3$. 11.67. $y = C\cos x + 1$. 11.68. $y =$

$= \frac{C}{x} + x\ln x - \frac{x}{2}$. 11.69. $y=(C+x)e^x$. 11.70. $y = (\operatorname{arctg} x + C)\sqrt{x^2+1}$. 11.71. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(C+\arcsin x)$.
11.72. $y=xe^{-2px}$. 11.73. $y=\frac{1}{3}e^{-4x}(1+x^3)$. 11.74. $y=\frac{2}{x^5}-\frac{1}{x}$.
11.75. $y=\frac{x}{\sin x}$. 11.76. $y=\frac{\sin x+1}{x}$. 11.77. $y=x^2+1-2\sqrt{x^2+1}$.
11.78. $y=\frac{1}{x}$. 11.79. $y=-x^2$. 11.80. $\approx 6{,}2$ A. 11.81. $\sqrt{1+y^2} = C\sqrt[3]{1+x^3}$. 11.82. $y=C(1+x^2)$. 11.83. $y=\frac{C}{x}+1+\frac{x}{2}$.
11.84. $y=\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{2C}$. 11.85. $\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln x-2\sqrt{y}=C$.
11.86. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[C+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$. 11.87. $Cx=\ln\frac{y}{x}+2$.
11.88. $y=-\frac{x(1+\ln Cx)}{\ln Cx}$. 11.89. $y=(C-x)(x+\sqrt{1+x^2})$.
11.90. $y=Ce^{x-\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}$. 11.91. $Cx=e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2x}}$.
11.92. $3-\ln\frac{y}{x}=\frac{C}{x}$. 11.93. $\ln Cx=-e^{\frac{x}{y}}$. 11.94. $y = (C+3x)\ln x$. 11.95. $2\ln(3^x+1)=(3^y-1)^2+C$. 11.96. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}=4$. 11.97. $\ln^2 x=\frac{2}{\cos y}$. 11.98. $y^2=2\ln\frac{1+e^x}{2}$.
11.99. $\sqrt{\ln^3 x}=\frac{3}{4}\arcsin^2 y$. 11.100. $y=x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 11.101. $x=\sin\frac{y}{x}$.
11.102. $\cos y=\frac{e^x-1}{e-1}$. 11.103. $y=(x^2-x)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.
11.104. $e^{-\frac{y}{x}}=\ln x+1$. 11.105. $\ln x = \arcsin\frac{y}{x}-\frac{\pi}{6}$. 11.107. $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2$.
11.108. $\rho=\frac{1}{2}(\varphi^4+\varphi^3-\varphi^2)+C_1\varphi+C_2$. 11.109. $y=\frac{1}{9}e^{-3x} + 2x^2+C_1x+C_2$. 11.110. $s=C_1t+C_2$. 11.111. $y=x\ln|x|-x+C_1x+C_2$.
11.112. $y=\frac{x^2\ln|x|}{2}-\frac{3x^2}{4}+C_1x+C_2$. 11.114. $y=\frac{e^{2x}}{4}-x$.
11.115. $y=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-1$. 11.116. $y=\frac{x^3}{6} + \frac{\cos 2x}{4}-x+2$. 11.117. $s=t(\ln t+1)$. 11.118. $y=-\frac{x^4}{4}+$

$+\frac{x^3}{3}+x-\frac{13}{12}$. **11.119.** $s(t)=t^3-t^2+t$. **11.120.** 63 м. **11.121.** $t\approx 8$ с; $s\approx 104$ м. **11.126.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$. **11.127.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$. **11.128.** $y=C_1+C_2e^{8x}$. **11.129.** $y=C_1e^{-\frac{x}{2}}+C_2e^{2x}$. **11.130.** $y=e^{-3x}(C_1+C_2x)$. **11.131.** $y=e^{5x}(C_1+C_2x)$. **11.132.** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$. **11.133.** $y=C_1\cos 7x+C_2\sin 7x$. **11.134.** $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **11.135.** $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **11.137.** $y=2-e^{-3x}$. **11.138.** $y=-\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$. **11.139.** $y=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x}$. **11.140.** $y=e^{3x}(x+2)$. **11.141.** $y=e^x(\cos 2x-\sin 2x)$. **11.147.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}+x^2-x-\frac{3}{8}$. **11.148.** $y=C_1e^x+C_2e^{5x}+\left(\frac{x}{4}+1\right)e^{-x}$. **11.149.** $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+5xe^{3x}$. **11.150.** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+(2x+1)e^{-x}$. **11.151.** $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\left(\frac{x}{2}+4\right)e^{-2x}$. **11.152.** $y=C_1+C_2e^{6x}-3x^2+x$. **11.153.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-(2x^2+3x)e^{-x}$. **11.154.** $y=C_1+C_2e^{-4x}+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x\right)e^{-4x}$. **11.155.** $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}$. **11.156.** $y=C_1+C_2e^{-3x}+4\cos 3x+4\sin 3x$. **11.157.** $y=e^{-x}(C_1+C_2x)-4\cos x+\frac{3}{2}\sin x$. **11.158.** $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x+4x\sin 5x$. **11.159.** $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x\left(-\frac{8}{3}\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x\right)$. **11.160.** $y=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+4\cos 4x+\frac{1}{2}\sin 4x$. **11.161.** $y=-8e^x+3e^{4x}+(x+5)e^{-x}$. **11.162.** $y=e^x(-6\cos 3x+\sin 3x)+12\cos 3x+2\sin 3x$. **11.163.** $y=3-2e^{6x}+3xe^{6x}$. **11.164.** $y=-\cos 2x+\sin 2x+\left(\frac{3}{4}x+1\right)e^{-2x}$. **11.165.** $y=-3\cos x+\pi\sin x+x(4\cos x-3\sin x)$.

Глава 12

12.1. $(1;\ -2)$, $(-3;\ -4)$, $(0;\ 2)$, $(-\sqrt{3};\ 1)$, $(6;\ 0)$, $(-8;\ 0)$, $(0;\ -\sqrt{2})$, $(5;\ 12)$. **12.4.** 1) Прямая $x=2$, перпендикулярная действительной оси; 2) прямая $y=-2$, параллельная действительной оси, 3) полуплоскость, лежащая ниже действительной оси; 4) биссектриса II и IV координатных углов. **12.5.** 1) $-3-5i$; 2) $4+i$; 3) $-6+6i$; 4) $8-3i$; 5) $7i$; 6) $-5i$. **12.7.** 1) $r=2\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$; 2) $r=8$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 3) $r=10$, $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$; 4) $r=5$, $\varphi=$

$=36°52'$; 5) $r=13$, $\varphi=-67°23'$; 6) $r=\sqrt{5}$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$; 7) $r=6$, $\varphi=\pi$; 8) $r=7$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 9) $r=\sqrt{2}$, $\varphi=0$. **12.9.** 1) Часть плоскости, лежащая вне круга с центром в точке (0; 0) и радиусом 5; 2) часть плоскости, лежащая внутри круга (включая границу) с центром в точке (4;0) и радиусом 2; 3) часть плоскости, лежащая вне круга (включая границу) с центром в точке (0; —2) и радиусом 4; 4) окружность с центром в точке (0; 3) и радиусом 3; 5) часть плоскости, лежащая внутри круга с центром в точке (—1; 1) и радиусом 2; 6) кольцо между концентрическими окружностями, имеющими центр в точке(0; 0) и радиусы 1 и 3; 7) биссектриса I и III координатных углов. **12.10.** $z=3{,}6+4{,}8i$. **12.11.** 1) $6+5i$; 2) $-1+3i$; 3) $-10-2i$; 4) $-11+6i$; 5) 8; 6) 0. **12.12.** 1) $-7-i$; 2) $-8-7i$; 3) $0{,}3-2{,}15i$; 4) $(4x-2y)+(-5x+3y)i$. **12.13.** 1) $3+i$; 2) $-5+6i$; 3) $6+2i$; 4) $-4-3i$; 5) $-4i$; 6) 0. **12.14.** 1) $20-12i$; 2) $-15+11i$; 3) $-0{,}2-3i$; 4) $(3x-4y+2z)+(-2x+7y-5z)i$. **12.17.** 1) $x=4$, $y=2$; 2) $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$; 3) $x=3$, $y=-2$; 4) $x=-1$, $y=-2$. **12.20.** 1) $-10-6i$; 2) $-27+21i$; 3) $3+2i$; 4) $2rs+8r^2i$. **12.21.** 1) $13+26i$; 2) $-2+100i$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{6}+(\sqrt{2}-3)i$; 4) 21; 5) $m+ni$; 6) $-a^2-b^2$. **12.22.** 1) $-\frac{2}{5}i$; 2) $3-3i$; 3) $0{,}4+1{,}2i$; 4) $\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}i$.

12.23. 1) $-1{,}5+1{,}5i$; 2) i; 3) $2{,}6+0{,}2i$; 4) $-\frac{43}{53}-\frac{18}{53}i$.

12.24. 1) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{9}{11}+\frac{i\sqrt{7}}{11}$; 3) $\frac{\sqrt{s}}{2-s}i$; 4) $\frac{m^2-n}{m^2+n}+\frac{2m\sqrt{n}}{m^2+n}i$; 5) i. **12.25.** 1) $-1{,}3-0{,}9i$; 2) $-\frac{38}{65}+\frac{44}{65}i$; 3) $1{,}1-0{,}7i$; 4) $-m+ni$. **12.27.** $r=p^2+q^2$. **12.28.** $M(-1{,}5;4{,}7)$. **12.29.** 1) $(a+bi)(a-bi)$; 2) $(m+4ni)(m-4ni)$; 3) $(3p+5qi)(3p-5qi)$; 4) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}i\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}i\right)$; 5) $(\sqrt{m}+\sqrt{n}\,i)(\sqrt{m}-\sqrt{n}\,i)$; 6) $\left(\sqrt{7}+\sqrt[4]{5}\,i\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt[4]{5}\,i\right)$; 7) $(1+i\operatorname{tg}\alpha)(1-i\operatorname{tg}\alpha)$. **12.31.** 1; -1; i; $-i$; i; 1; -1; $-i$. **12.32.** 1) $2i$, $32i$; $-64-64i$; 2) $-2i$; $8+8i$, -64. **12.33.** 1) $-5+12i$; 2) $24-10i$; 3) $-7-24i$; 4) $-11-2i$; 5) $2-11i$; 6) $26-18i$. **12.35.** 1) $\frac{24}{625}+\frac{7}{625}i$; 2) $-\frac{59}{29}-\frac{70}{29}i$; 3) $-3{,}4-6{,}2i$; 4) $92i$; 5) -1. **12.36.** $r=18\sqrt{2}$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. **12.37.** 1) $\operatorname{Re}\omega=x^2-y^2$, $\operatorname{Im}\omega=2xy$; 2) $\operatorname{Re}\omega=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im}\omega=-\frac{y}{x^2+y^2}$; 3) $\operatorname{Re}\omega=x^3-3xy^2-x$, $\operatorname{Im}\omega=3x^2y-y^3-y$. **12.39.** 1) i; 2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $e^2(\cos 5+i\sin 5)$;

4) e^3 $(\cos 1 - i \sin 1)$; 5) $-e^{-6}$. 12.41. 1) $i \operatorname{sh} 1$; 2) $\cos 1 \operatorname{ch} 1 - i \sin 1 \operatorname{sh} 1$; 3) $i \sin 3$; 4) $\cos 5$; 5) $\operatorname{ch} 2 \cos 1 - i \operatorname{sh} 2 \sin 1$. 12.44. 1) $\operatorname{Re} w = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} w = \cos x \operatorname{sh} y$; 2) $\operatorname{Re} w = \operatorname{sh} x \cos y$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{ch} x \sin y$; 3) $\operatorname{Re} w = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $\operatorname{Im} w = e^x (x \sin y + y \cos y)$;
4) $\operatorname{Re} w = \dfrac{e^x}{x^2+y^2}(x \cos y + y \sin y)$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{e^x}{x^2+y^2}(x \sin y - y \cos y)$.

12.51. 1) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}$;
2) $\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \sin \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}$; 3) $2\left(\cos \dfrac{\pi}{6} + i \sin \dfrac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$; 4) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{3\pi i}{4}}$; 5) $5\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = 5e^{-\frac{\pi i}{2}}$;
6) $\cos 0 + i \sin 0 = e^{0 \cdot i}$; 7) $2\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

12.52. 1) $2e^{\pi i} = -2$; 2) $3e^{\frac{\pi i}{2}} = 3i$; 3) $4e^{\frac{\pi i}{3}} = 2 + 2\sqrt{3}\, i$;
4) $8e^{-\frac{\pi i}{6}} = 4\sqrt{3} - 4i$; 5) $e^{\frac{3\pi i}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $7e^{0 \cdot i} = 7$.

12.53. 1) $\dfrac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\dfrac{1}{2}$; 2) $e^4\left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}\right) = ie^4$; 3) $6\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \sin \dfrac{\pi}{3}\right) = 3 + 3\sqrt{3}\, i$; 4) $3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\, i$; 5) $e\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{e}{2} + \dfrac{e\sqrt{3}}{2}\, i$. 12.55. 1) $12i$; 2) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$; 3) $2\left(\cos \dfrac{5\pi}{12} + i \sin \dfrac{5\pi}{12}\right)$; 4) $3 + \sqrt{3}\, i$; 5) $-9 - 3\sqrt{3}\, i$; 6) $-\dfrac{2}{3}\, i$;
7) $\dfrac{5}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)\right]$; 8) $-3\sqrt{2}$. 12.56. 1) $-6\sqrt{2} + 6\sqrt{6}\, i$; 2) $4\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{12} + i \sin \dfrac{\pi}{12}\right)$; 3) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\, i$;
4) -16; 5) $8\sqrt{6}\left[\cos\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right)\right]$; 6) $\dfrac{1}{6}\left(\cos \dfrac{5\pi}{12} + i \sin \dfrac{5\pi}{12}\right)$. 12.57. 1) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}\, i$; 3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\, i$; 4) $\sqrt{3} - i$; 5) $8i$; 6) $-1 - \sqrt{3}\, i$. 12.58. 1) $2\sqrt{3} + 2i$;
2) $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}\, i$; 3) $\sqrt{2} - \sqrt{6}\, i$; 4) $2\sqrt{3}\, i$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \dfrac{11\pi}{12} + i \sin \dfrac{11\pi}{12}\right)$; 6) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i$. 12.59. 1) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $4 +$

$+4\sqrt{3}i$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 4) -243; 5) $-32+32\sqrt{3}i$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{64}i$; 7) $-128-128i$; 8) 512; 9) -27; 10) $\frac{32}{243}i$.

12.60. 1) $\cos\frac{120^\circ+360^\circ k}{3}+i\sin\frac{120^\circ+360^\circ k}{3}$, $k=0, 1, 2$;

2) $2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$;

3) $\cos\frac{150^\circ+360^\circ k}{5}+i\sin\frac{150^\circ+360^\circ k}{5}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$;

4) $\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

5) $3\left(\cos\frac{-135^\circ+360^\circ k}{3}+i\sin\frac{-135^\circ+360^\circ k}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$;

6) $2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$;

7) $4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0, 1$;

8) $\sqrt[3]{12}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$;

9) $5\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$; 10) $2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$; 11) $2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$; 12) $\cos\frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4}$, $k=0, 1, 2, 3$; 13) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 14) $\frac{1}{6}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$. 12.61. 1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right)\right]$; 3) $32+$

$+32i$; 4) $8i$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$,

$k=0, 1, 2, 3$; 6) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$,

$k=0, 1, 2$. **12.62.** $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **12.63.** 1) $-20\sqrt{5}+20\sqrt{5}i$;

2) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$; 3) $8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\right.$

$\left.+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}i$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) 27.

12.70. 1) $4\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$; 2) $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi i}{12}}$; 3) $16\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi i}{4}}$;

4) $\sqrt{2}e^{-\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}i}$, $k=0, 1, 2$; 5) $\sqrt[4]{2}e^{\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4}i}$, $k=0, 1, 2, 3$.

12.71. $8e^{\frac{2\pi i}{3}}$. **12.72.** 1) $16e^{\frac{\pi i}{6}}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{11\pi i}{12}}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi i}{12}}$;

4) $32e^{-\frac{\pi i}{6}}$; 5) $1296e^{0\cdot i}=1296$; 6) $2e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}$, $k=0, 1, 2$;

7) $3e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$, $k=0, 1, 2, 3$; 8) $2e^{\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}i}$, $k=0, 1, 2, 3$;

9) $3\sqrt[6]{2}e^{\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}i}$, $k=0, 1, 2$. **12.74.** $z_1=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$, $z_2=$
$=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$. **12.75.** $z_1=3$, $z_2=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=$
$-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. **12.76.** $z_1=2i$, $z_2=\sqrt{3}-i$, $z_3=-\sqrt{3}-i$.
12.77. $z_1=1+i$, $z_2=-1+i$, $z_3=-1-i$, $z_4=1-i$. **12.78.** $z_1=$
$=2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$, $z_3=$
$=2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right]$, $z_4=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)\right]$. **12.79.** $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2=$
$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$, $z_3=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$, $z_4=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right]$.
12.80. $z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, $z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+\right.$

$+i\sin\frac{5\pi}{9}\Big)$, $z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$, $z_4=$
$=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right]$, $z_5=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(-\frac{5\pi}{9}\right)\right]$, $z_6=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)\right]$.

12.81. $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\right.$
$\left.+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_4=$
$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$, $z_5=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$, $z_6=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

12.82. 1) Кольцо между концентрическими окружностями (включая границы), имеющими центр в точке (0; 1) и радиусы 4 и 5; 2) часть плоскости, лежащая вне круга (включая границу) с центром в точке (0; —2) и радиусом 7; 3) биссектриса II и IV координатных углов; 4) точка (1; 1). **12.83.** 1) $x^2+4=0$; 2) x^2+ $+(1-i)x+18+13i$; 3) $x^2+14ix-58=0$; 4) $x^2+3-4i=0$.

12.84. 1) $-8-8\sqrt{3}\,i$; 2) $9i$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

4) $2\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)$ $k=0,1,2,3$;

5) $2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$ $k=0,1,2$;

6) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$;

7) i; 8) -1. **12.85.** 1) i; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. **12.87.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; 2) $e^{-3}[\cos(-4)+$
$+i\sin(-4)]$; 3) $ie^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$. **12.88.** 1) $\operatorname{Re}w=x^2-(y-1)^2$, $\operatorname{Im}w=$
$=2x(y-1)$; 2) $\operatorname{Re}w=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$, $\operatorname{Im}w=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$;
3) $\operatorname{Re}w=\cos x\operatorname{ch}y$, $\operatorname{Im}w=-\sin x\operatorname{sh}y$; 4) $\operatorname{Re}w=\operatorname{ch}x\cos y$, $\operatorname{Im}w=$
$=\operatorname{sh}x\sin y$ **12.89.** 1) $\operatorname{ch}1$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{ch}1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}1$;
3) 0; 4) $\cos 1\operatorname{sh}2-i\sin 1\operatorname{ch}2$. **12.90.** 1) $z_1=\frac{7\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{2}}{2}i$,

$z_2=-\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}i$; 2) $z_1=-5i$; $z_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$, $z_3=-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$; 3) $z_1=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$, $z_2=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$; $z_3=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$, $z_4=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$; 4) $z_1=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$, $z_2=\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$, $z_3=\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, $z_4=\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$; 5) $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=-\sqrt{3}-i$, $z_4=\sqrt{3}-i$; 6) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right)$, $z_3=2\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$, $z_4=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right]$, $z_5=2\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{18}\right)\right]$, $z_6=2\left[\cos\left(-\frac{13\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{18}\right)\right]$.

Глава 13

13.1. 1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{19}$; 2) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{19}$; 3) $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}$; 4) $3, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$. **13.2.** 1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}$; 2) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{8}+\frac{1}{35}+\frac{1}{80}+\frac{1}{143}+\frac{1}{224}$; 4) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 5) $2+0+\frac{2}{9}+0+\frac{2}{25}$. **13.3.** 1) $\frac{1}{2n}$; 2) $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; 3) $\frac{\sqrt{n}}{n!}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$. **13.4.** 1) $\frac{1}{n^2}$; 2) $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$; 3) $\frac{n}{2^{n-1}}$; 4) $(-1)^{n-1}$. **13.6.** $S=\frac{1}{2}$. **13.7.** $S=2$. **13.18.** Сходится. **13.19.** Сходится. **13.20.** Сходится. **13.21.** Расходится. **13.22.** Сходится. **13.23.** Расходится. **13.24.** Расходится. **13.28.** Сходится. **13.29.** Сходится. **13.30.** Сходится. **13.31.** Сходится. **13.32.** Сходится. **13.33.** Расходится. **13.34.** Сходится. **13.35.** Сходится. **13.36.** Сходится. **13.37.** Расходится. **13.38.** Расходится. **13.39.** Сходится. **13.40.** Сходится. **13.41.** Расходится. **13.42.** Сходится. **13.44.** Сходится. **13.45.** Сходится. **13.46.** Расходится. **13.47.** Сходится. **13.48.** Сходится. **13.49.** Расходится. **13.51.** $\Delta S_3 < 0{,}000025$. **13.52.** 5 членов. **13.57.** Сходится абсолютно. **13.58.** Сходится абсолютно. **13.59.** Сходится условно. **13.60.** Сходится абсолютно. **13.61.** Расходится.

13.62. Расходится. 13.63. Сходится абсолютно. 13.64. Сходится абсолютно. 13.65. Сходится абсолютно. 13.67. При $x = -1$ и $x = \frac{4}{3}$ ряд сходится, при $x = 2$ — расходится. 13.71. $x = 0$. 13.72. $-1 < x \leqslant 1$. 13.73. $x = 0$. 13.74. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 13.75. $-\infty < x < \infty$. 13.76. $-3 < x < 3$. 13.77. $-2 < x \leqslant 2$. 13.78. $-7 < x \leqslant 7$. 13.79. $-\infty < x < \infty$. 13.80. $-4 \leqslant x < 4$. 13.81. $-e \leqslant x \leqslant e$.

13.85. $e^{5x} = 1 + \frac{5x}{1!} + \frac{25x^2}{2!} + \ldots + \frac{(5x)^n}{n!} + \ldots; -\infty < x < \infty$.

13.86. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots; -\infty < x < \infty$.

13.87. $\sin 3x = \frac{3x}{1!} - \frac{27x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$ $-\infty < x < \infty$. 13.88. $\cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \ldots; -\infty < x < \infty$. 13. 89. $\ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3} - \frac{x^2}{3^2 \cdot 2} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3} - \ldots - \frac{x^n}{3^n \cdot n}; -3 \leqslant x < 3$.

13.90. $\ln(1 + 4x) = 4x - \frac{16x^2}{2} + \frac{64x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(4x)^n}{n};$ $-\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{4}$. 13.91. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^n(n+1)x^n + \ldots; -1 < x < 1$. 13.92. $\frac{1}{1 - x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots; -1 < x < 1$. 13.93. $\sqrt{1 + x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3x^9}{2^3 \cdot 3!} - \ldots; -1 < x < 1$. 13.94. $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \ldots; -1 < x < 1$. 13.96. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots; -1 \leqslant x \leqslant 1$. 13.97. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots; -1 \leqslant x \leqslant 1$.

13.98. $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$; 13.99. $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots$. 13.100. $\int\limits_0^x \sqrt{x}\,e^x\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} +$

$+\frac{2}{7\cdot 2!}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{9\cdot 3!}x^{\frac{9}{2}}+\ldots$. **13.101.** $\int\limits_0^x \sqrt{1-x^3}\,dx=$ $=x-\frac{x^4}{4\cdot 2}-\frac{x^7}{7\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{3x^{10}}{10\cdot 2^3\cdot 3!}-\ldots$. **13.102.** $\int\limits_0^x \cos x^2 dx=$ $=x-\frac{x^4}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}+\ldots$. **13.105.** $\cos 20^\circ\approx 0{,}939$; $\Delta S_2<0{,}001$. **13.106.** $\ln 1{,}2\approx 0{,}183$; $\Delta S_3<0{,}001$. **13.107.** $\sqrt[3]{30}\approx$ $\approx 3{,}12$; $\Delta S_3<0{,}01$. **13.108.** $\sqrt[3]{e}\approx 1{,}39$. **13.109.** $\sin 12^\circ\approx 0{,}208$. **13.110.** $\cos 1^\circ=1{,}000$. **13.111.** $\sqrt[4]{80}\approx 2{,}991$. **13.113.** $\approx 0{,}748$. **13.114.** $\approx 0{,}440$. **13.115.** $\approx 0{,}2002$. **13.118.** Сходится; $S=\frac{3}{2}+i$. **13.119.** Расходится. **13.120.** Сходится; $S=6+i\sin 1$. **13.121.** Сходится; $S=\cos 1-ei$. **13.122.** Расходится. **13.123.** Сходится; $S=3+\frac{1}{2}i$. **13.124.** Расходится. **13.125.** Расходится. **13.126.** Расходится. **13.127.** Сходится. **13.130.** $|z|<3$, $R=3$. **13.131.** $|z|<\frac{1}{5}$, $R=\frac{1}{5}$. **13.132.** $|z|<\sqrt{2}$, $R=\sqrt{2}$. **13.133.** $|z|<3$, $R=3$. **13.134.** $|z|<10$, $R=10$. **13.135.** $|z|<$ $<\frac{e}{2}$, $R=\frac{e}{2}$. **13.139.** $f(x)\sim-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+$ $+\ldots$; $S(\pm\pi)=0$. **13.140.** $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$; $S(\pm\pi)=\frac{\pi}{2}$. **13.141.** $f(x)\sim\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\right.$ $\left.+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$; $S(\pm\pi)=0$, $S(0)=0$. **13.142.** $f(x)\sim$ $\sim\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\ldots\right)$; $S(\pm\pi)=0$.

13.143. $f(x)\sim-\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3\sqrt{2}}-\frac{\cos 5x}{5\sqrt{2}}-\right.$ $\left.-\frac{\cos 6x}{6}-\frac{\cos 7x}{7\sqrt{2}}+\ldots\right)$; $S(\pm\pi)=-\frac{\pi}{4}$, $S\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

13.144. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\ldots\right)+$ $+\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\ldots\right)$; $S(\pm\pi)=\frac{\pi}{4}$, $S(0)=\frac{3\pi}{4}$.

13.145. а) $f(x)\sim\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{2\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}-\right.$ $\left.-\frac{2\cos 6x}{6^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\ldots\right)$; б) $f(x)\sim\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi}\right)\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{25\pi}\right)\sin 5x+\ldots.$$

Глава 14

14.3. $3\cdot 4=12$. **14.4.** $14\cdot 17=238$. **14.5.** $4\cdot 8\cdot 3=96$. **14.6.** $6^2=36$. **14.7.** $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!=120$. **14.8.** $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$. **14.9.** $20\cdot 19\cdot 18=6\,840$. **14.10.** $4\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4\cdot 10!$ **14.11.** $2\cdot 5\cdot 4=40$. **14.12.** $3\cdot 5+1=16$. **14.13.** $6\cdot 4+3=27$. **14.14.** $6\cdot 4\cdot 12+2\cdot 4+8\cdot 12=392$. **14.17.** $A_{12}^5=95\,040$. **14.18.** $A_{10}^4-A_9^3=4\,536$. **14.19.** $A_4^2=12$. **14.20.** а) $A_6^4=360$; б) $\overline{A}_6^4=1\,296$. **14.21.** $\overline{A}_3^4=81$. **14.22.** $3\cdot A_4^2=36$. **14.23.** $A_5^3+A_4^3=180$. **14.24.** $A_5^2\cdot A_3^2=120$. **14.27.** а) $P_4=24$; б) $P(2,2)=6$. **14.28.** $P_4=24$. **14.29.** $P(2,3,3)=560$. **14.30.** $P_8-1=40\,319$. **14.31.** $P(2,3,1)=60$. **14.32.** $P(m,n,p)=\dfrac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$. **14.33.** $P_3\cdot P_8=241\,920$. **14.34.** $(4!)^2=576$. **14.35.** $2\cdot(3!)^2=72$. **14.38.** $C_{10}^4=210$. **14.39.** $C_8^2=28$. **14.40.** $C_n^2-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$. **14.41.** $C_{20}^{10}=184\,756$. **14.42.** C_n^k. **14.43.** $\overline{C}_6^{10}=C_{15}^{10}=3\,003$. **14.44.** $\overline{C}_{10}^5=C_{14}^5=2\,002$. **14.45.** $\overline{C}_3^5=C_7^5=21$. **14.46.** $C_8^3\cdot C_5^2\cdot 2=1120$. **14.47.** $C_{15}^6=5\,005$. **14.48.** $(15-3+1)\cdot 3!\,(15-3)!=78\cdot 12!$ **14.49.** $C_7^3=35$. **14.50.** $C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2=123\,400$. **14.51.** $C_5^3\cdot A_4^3=C_4^3A_5^3=240$. **14.52.** $P(3,1,1,1)-4!=96$. **14.53.** $\overline{A}_6^2=36$. **14.54.** $C_8^2=28$. **14.55.** $C_{22}^4\cdot C_8^2=204\,820$. **14.56.** 10. **14.57.** $C_6^2+C_8^2=43$. **14.58.** $\overline{A}_8^5=45\,568$. **14.59.** $\overline{A}_7^5=2\,520$. **14.60.** $5\cdot 3\cdot 13=195$. **14.63.** 1) $(3-x)^5=243-405x+270x^2-90x^3+15x^4-x^5$; 2) $(5+2x^3)^4=625+1000x^3+600x^6+160x^9+16x^{12}$; 3) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{a}}\right)^4=a^2+2a\sqrt[4]{a}+\dfrac{3}{2}\sqrt{a}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{16a}$; 4) $\left(2\sqrt[3]{b}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^6=64b^2-192b\sqrt[6]{b}+240\sqrt[3]{b}-\dfrac{160}{\sqrt{b}}+\dfrac{60}{b\sqrt[3]{b}}-\dfrac{12}{b^2\sqrt[6]{b}}+\dfrac{1}{b^3}$.

14.64. 1) $T_{2+1}=\dfrac{448}{a^3}$; 2) $T_{5+1}=-\dfrac{28}{9}x^7$; 3) $T_{7+1}=960b^2\sqrt[4]{b}$; 4) $T_{3+1}=-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{a^7\sqrt{a}}{b^2\sqrt[4]{b}}$; 5) $T_{3+1}=-35z^{10}\sqrt{z}$, 6) $T_{4+1}=35z^7$.

14.65. 1) $T_{6+1}=\dfrac{210}{y^2}$; 2) $T_{7+1}=-40$; 3) $T_{3+1}=\dfrac{21}{16a^6}$.

14.66. 1) $T_{6+1}=\frac{7}{4}x^3$; 2) $T_{5+1}=-21a^{11}z^{-1}$; 3) $T_{4+1}=210\ a^6b^6$.

14.67. $n=21$. 14.68. $T_{6+1}=\frac{21}{16}y^4$. 14.69. $T_{9+1}=-1375$.

14.70. $T_{4+1}=70z^8$.

Глава 15

15.4. $\frac{1}{2}$. 15.5. $\frac{1}{2}$. 15.6. а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{4}{9}$; г) 1; д) 0. 15.7. $p=\frac{1}{6!}\approx 0{,}001$. 15.8. $p=\frac{1}{60}\approx 0{,}016$. 15.9. $p=\frac{2!3!}{8!}\approx 0{,}0003$. 15.10. $p=\frac{1}{A_7^6}\approx 0{,}0002$. 15.11. $p=\frac{2A_4^2}{A_5^3}=0{,}4$. 15.12. $p=\frac{C_4^2}{C_{11}^2}\approx 0{,}11$. 15.13. $p=\frac{C_6^2+C_8^2}{C_{14}^2}\approx 0{,}47$.

15.14. $p=\frac{C_7^5}{C_{12}^5}\approx 0{,}027$. 15.15. $p=\frac{1}{15}\approx 0{,}066$. 15.16. $p=\frac{8!}{8^8}\approx 0{,}002$. 15.17. $p=\frac{A_8^5}{8^5}\approx 0{,}2$. 15.18. $p=\frac{C_4^2\cdot C_{11}^4}{C_{15}^6}\approx 0{,}39$. 15.19. $p=\frac{C_{15}^3\cdot C_{25}^2}{C_{40}^5}\approx 0{,}21$. 15.21. $\frac{3}{4}$. 15.22. $\frac{5}{6}$.

15.23. $p=1-\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}\approx 0{,}972$. 15.27. а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{5}$. 15.28. $p=\frac{2\tau}{T}$. 15.29. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. 15.30. $\frac{5}{16}$. 15.31. $p=\frac{(a-4r)^2}{a^2}$

15.32. $\frac{5}{9}$. 15.33. $p=1-\left(1-\frac{l}{L}\right)^2$. 15.41. $\frac{1}{3}$. 15.42. 0,48.

15.43. $\frac{8}{225}$. 15.44. $\frac{1}{36}$. 15.45. 0,3. 15.47. $p=\frac{1}{495}\approx 0{,}002$.

15.48. $p\approx 0{,}73$. 15.49. $p\approx 0{,}93$. 15.50. $p=0{,}28$. 15.51. $p\approx 0{,}12$. 15.52. $p\approx 0{,}099$. 15.53. $p=0{,}44$. 15.54. $p=0{,}712$. 15.55. $p\approx 0{,}89$. 15.56. а) 0,92; б) 0,644; в) 0,536; г) 0,976. 15.57. $p=p_1p_3p_4\,[1-(1-p_2)^3]\,[1-(1-p_5)^4]$. 15.58. $p\approx 0{,}54$.

15.61. $\frac{13}{36}$. 15.62. $p=0{,}15$. 15.63. $p\approx 0{,}64$. 15.64. а) 0,8; б) $\approx 0{,}29$. 15.65. $p=0{,}7$. 15.66. $p\approx 0{,}976$. 15.67. $\frac{2}{3}$. 15.68. Ко второму типу. 15.71. Вероятнее выиграть три партии из четырех. 15.72. а) $\approx 0{,}34$; б) $\approx 0{,}66$. 15.73. $\approx 0{,}97$. 15.74. а) $\approx 0{,}74$;) $\approx 0{,}95$; в) $\approx 0{,}05$. 15.75. 3. 15.76. У второго. 15.77. 11 или 12.

15.78. $p=0,7$. **15.79.** $p=0,8$. **15.80.** 0,72. **15.81.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{14}$. **15.82.** $\approx 0,32$. **15.83.** $\frac{91}{216}$. **15.84.** $\frac{\pi}{6}$. **15.85.** $\approx 0,19$. **15.86.** а) $\approx 0,38$; б) $\approx 0,36$. **15.87.** а) 0,03; б) 0,34; в) 0,97; г) 0,63. **15.88.** $\approx 0,04$. **15.89.** а) 0,4824; б) 0,8784. **15.90.** а) 0,928; б) 0,396; в) 0,604; г) 0,436. **15.91.** 0,78. **15.92.** $\approx 0,76$. **15.93.** К III группе. **15.94.** $\approx 0,32$. **15.95.** а) $\approx 0,999$; б) $\approx 0,011$; в) $\approx 0,256$; г) $\approx 0,744$; д) $\approx 0,871$. **15.96.** 21.

Подольский Владимир Алексеевич
Суходский Андрей Матвеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор Ж. И. Яковлева
Художник А. И. Демко
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Н. А. Битюкова
Корректор Г. Н. Буханова

Сдано в набор 4/IX 1973 г. Подп. к печати 17/I 1974 г. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бум. тип. № 2. Объем 11 печ. л. Усл. п. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,93. Изд. № ФМ-543. Тираж 100 000 экз. Заказ № 682. Цена 64 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1974 г. Позиция № 250

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.
Издательство «Высшая школа»

Ярославский полиграфкомбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Ярославль, ул. Свободы, 97.