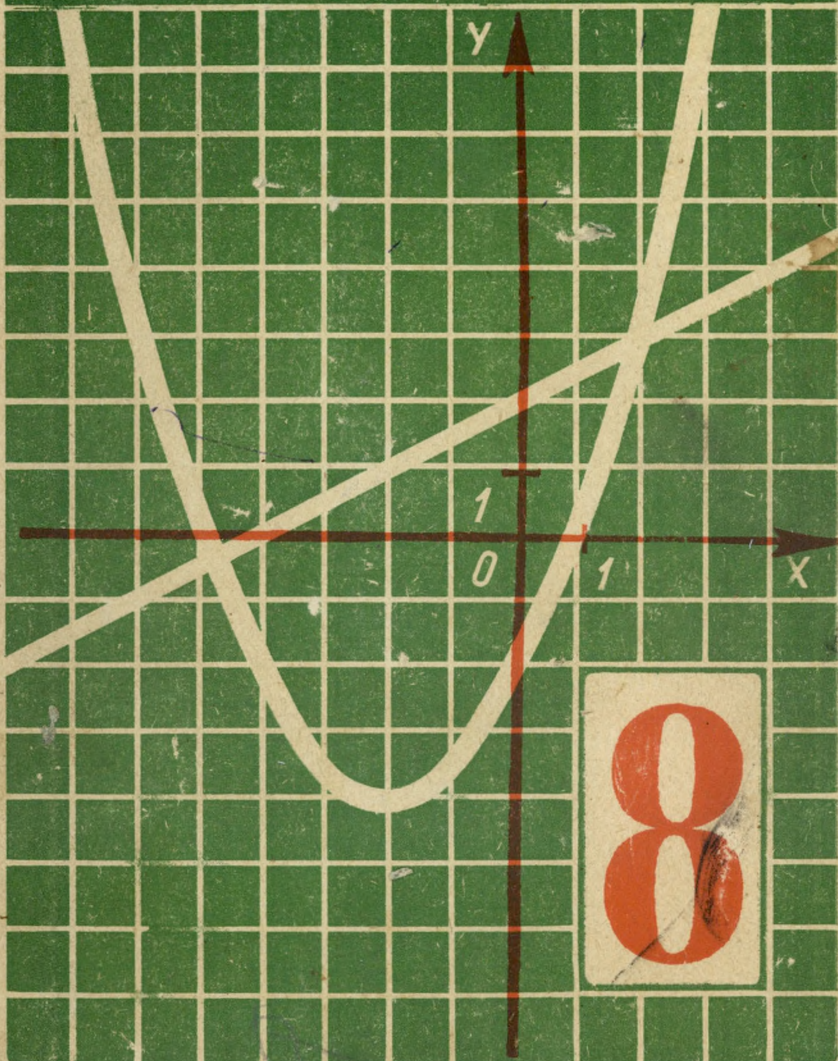
АЛГЕБРА



АЛГЕБРА

ЎРТА МАКТАБНИНГ 8-СИНФИ УЧУН ДАРСЛИК

Русча нашрини
С. А. Теляковский
таҳрир қилган

СССР Маориф министрлиги тасдиқлаган

ҚАЙТА ИШЛАНГАН ОЛТИНЧИ НАШРИГА МУВОФИҚ САККИЗИНЧИ НАШРИ

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1987

Ю. Н. МАҚАРИЧЕВ, Н. Г. МИНДЮҚ, В. М. МОНАХОВ,
Қ. С. МУРАВИН, Қ. И. НЕШҚОВ, С. Б. СУВОРОВА

Мазкур дарслик Ю. Н. Макаричев, Н. Г. Миндюк, В. М. Монахов, Қ. С. Муравин, С. Б. Суворова авторлигида ёзилган дарсликнинг қайта ишланган вариантидир.

Қайта ишлашни Ю. Н. Макаричев, Н. Г. Миндюк, В. М. Монахов, Қ. И. Нешков, С. Б. Суворова амалга оширган.

Дарсликдан фойдаланганлик ҳақида маълумот

№	Ўқувчининг исми ва фамилияси	Ўқув йили	Дарсликнинг ҳолати: йил бошида	Дарсликнинг ҳолати: йил охирида
1				
2				
3				
4				
5				

А $\frac{4306020400-51}{353(04)-87}$ Бланк-заказ-87

I БОБ

КВАДРАТИК ФУНКЦИЯ

1- §. КВАДРАТ УЧҲАД

1. КВАДРАТ УЧҲАД ВА УНИНГ ИЛДИЗЛАРИ

$3x^2-2x-5$ ифода бир ўзгарувчили иккинчи даражали кўпҳаддир. Бундай кўпҳадлар **квадрат учҳадлар** дейилади.

Таъриф. ax^2+bx+c **кўринишидаги кўпҳад квадрат учҳад дейилади, бунда x—ўзгарувчи, a, b ва c—сонлар бўлиб, $a\neq0$.**

Квадрат учҳаднинг қиймати ўзгарувчининг қийматига боғлиқ. Масалан:

агар $x=5$ бўлса, $3x^2-2x-5=60$;
агар $x=1$ бўлса, $3x^2-2x-5=-4$;
агар $x=-1$ бўлса, $3x^2-2x-5=0$;
агар $x=0$ бўлса, $3x^2-2x-5=-5$.

x ўзгарувчининг -1 га тенг қиймати $3x^2-2x-5$ квадрат учҳадни нолга айлантиришини кўрамиз. Ўзгарувчининг бундай қиймати **квадрат учҳаднинг илдизи** дейилади.

Таъриф. **Квадрат учҳаднинг илдизи деб, ўзгарувчининг квадрат учҳаднинг қийматини нолга тенг қиладиган қийматига айтилади.**

-1 сони $3x^2-2x-5$ квадрат учҳаднинг илдизи бўлади. Бу учҳаднинг бошқа илдизи борми? Бу саволга жавоб бериш учун

$$3x^2-2x-5=0$$

квадрат тенгламани ечиш кифоя.

Дискриминантни топамиз:

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot3(-5)=64.$$

$D>0$ бўлгани учун тенгламанинг иккита ҳар хил илдизи бўлади. Илдизлар формуласини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm8}{6},$$

$$x_1 = 1\frac{2}{3}, \; x_2 = -1.$$

Демак, $3x^2 - 2x - 5$ квадрат учҳаднинг иккита илдизи бор экан: $1\frac{2}{3}$ ва -1.

$ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама қандай илдизларга эга бўлса, ax^2+bx+c квадрат учҳад ҳам шу илдизларга эга.

Квадрат тенгламанинг дискриминанти мос квадрат учҳаднинг ҳам дискриминанти дейилади.

Квадрат учҳад илдизларининг сони квадрат тенглама илдизлари сони каби унинг дискриминантига боғлиқ:

$D>0$ да квадрат учҳад иккита ҳар хил илдизга эга;

$D=0$ да квадрат учҳад битта илдизга эга;

$D<0$ да квадрат учҳад илдизга эга эмас.

Агар ax^2+bx+c квадрат учҳад x_1 ва x_2 илдизларга эга бўлса, Виет теоремасига кўра

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

бўлади.

1. 1, 2, $3-\sqrt{2}$, $-7+\sqrt{2}$ сонларидан қайси бири x^2-6x+7 квадрат учҳаднинг илдизи бўлади?

2. Ўзгарувчининг қандай қийматида квадрат учҳад нолга айланади:

а) $x^2+5x-14$; в) $-6x^2-x+1$;
б) $x^2-3x-40$; г) $0{,}5x^2-x-1$?

3. Квадрат учҳаднинг илдизларини топинг:

а) $2x^2+x-6$; г) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$;
б) $9x^2-9x+2$; д) $0{,}1x^2+0{,}6x+0{,}2$;
в) $0{,}2x^2+3x-20$; е) $-0{,}3x^2+1{,}5x-0{,}9$.

4. Квадрат учҳаднинг илдизларини топинг:

а) $12x^2-7x-12$; в) $1{,}5x^2+4x+2{,}5$;
б) $-1{,}5x^2+x+8$; г) $\frac{2}{3}x^2+4x+1$.

5. Квадрат учҳаднинг илдизлари нечта:

а) $5x^2-8x+3$; в) $-7x^2+6x-2$;
б) $9x^2+6x+1$; г) $-10x^2+15x-3$?

6. Квадрат учҳаднинг илдизлари борми:

а) $-4x^2-4x+3$; в) $9x^2-12x+4$;
б) $4x^2-4x+3$; г) $9x^2-12x-4$?

7. Квадрат учҳадларнинг илдизлари бир хил эканини исботланг:

а) $\frac{1}{3}x^2+2x-1$ ва x^2+6x-3;

б) $-7x^2+3x+5$ ва $7x^2-3x-5$.

8. Квадрат учҳад илдизга эга эканини исботланг ҳамда уларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг:

а) $2x^2-10x+3$;
б) $\frac{1}{3}x^2+7x-2$;
в) $0,5x^2+6x+1$;
г) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$.

Такрорлаш учун машқлар

9. Квадрат тенгламани ечинг:

а) $2x^2-5x-3=0$;
б) $3x^2-8x+5=0$;
в) $36x^2-12x+1=0$;
г) $3x^2-3x+1=0$;
д) $x^2+9x+20,25=0$;
е) $x^2-12x+32=0$.

10. Тенгламанинг илдизларини топинг:

а) $3x^2-10x+3=0$;
б) $x^2-8x-84=0$;
в) $16x^2+8x+1=0$;
г) $x^2+14x+33=0$;
д) $0,6x^2-3,6x=0$;
е) $x^2-5=0$;
ж) $2x^2+7x=0$;
з) $0,5x^2+4=0$.

11. Тенгламани ечинг:

а) $(x-1)^2+(x+1)^2=(x+2)^2-2x+2$;

б) $(2x-3)(2x+3)-1=5x+(x-2)^2$.

2. КВАДРАТ УЧҲАДНИ КЎПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ

$3x^2-21x+30$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш талаб қилинган бўлсин. Аввал 3 сонини қавсдан ташқарига чиқарамиз. Натижада:

$$3x^2-21x+30=3(x^2-7x+10).$$

Энди $x^2-7x+10$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз. $-7x$ ни $-2x$ ва $-5x$ бирҳадларнинг йиғиндиси кўринишида ёзамиз ва группалаш усулини қўлланамиз:

$$x^2-7x+10=x^2-2x-5x+10=x(x-2)-5(x-2)=$$
$$=(x-2)(x-5).$$

Демак,

$$3x^2-21x+30=3(x-2)(x-5).$$

$x=2$ ва $x=5$ бўлганда $3(x-2)(x-5)$ кўпайтма нолга айлангани учун x нинг шу қийматларида $3x^2-21x+30$ квадрат учҳад ҳам нолга айланади, яъни 2 ва 5 сонлари унинг илдизлари бўлади.

Шундай қилиб, биз $3x^2-21x+30$ квадрат учҳадни учта кўпайтувчига ажратдик. Биринчи кўпайтувчи x^2 олдидаги коэффициентга тенг, иккинчи кўпайтувчи x ўзгарувчи билан учҳад илдизларидан бирининг айирмасига тенг, учинчи кўпайтувчи эса x ўзгарувчи билан иккинчи илдиз айирмасига тенг.

Бундай ёйилмани илдизга эга бўлган истаган квадрат учҳад учун ҳосил қилиш мумкин. Бунда, агар квадрат учҳаднинг дискриминанти нолга тенг бўлса, у ҳолда бу учҳад иккита ўзаро тенг илдизга эга бўлади деб ҳисобланади.

Теорема. ***Агар x_1 ва x_2 сонлар ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг илдизлари бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ бўлади.***

Исбот. ax^2+bx+c кўпҳадда a кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз. Бундан:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

x_1 ва x_2 сонлар ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг илдизлари бўлгани учун Виет теоремасига кўра:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Бундан:

$$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2),\quad \frac{c}{a}=x_1x_2.$$

Шунинг учун

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+$$
$$+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Шундай қилиб,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, агар квадрат учҳад илдизга эга бўлмаса, уни биринчи даражали кўпҳаддан иборат бўлган кўпайтувчиларга ажратиб бўлмайди.

Буни исботлаймиз. Фараз қилайлик, ax^2+bx+c учҳаднинг илдизи бўлмасин. Учҳадни биринчи даражали кўпҳадларнинг кўпайтмаси кўринишида ифодалаш мумкин деб, фараз қилайлик:

$$ax^2+bx+c=(kx+m)(px+q),$$

бу ерда k, m, p ва q — бирор сонлар бўлиб, $k \neq 0$ ва $p \neq 0$.

$(kx+m)(px+q)$ кўпайтма $x = -\frac{m}{k}$ ва $x = -\frac{q}{p}$ бўлганда нолга айланади. Демак, x нинг шу қийматларида ax^2+bx+c учҳад ҳам нолга айланади, яъни $-\frac{m}{k}$ ва $-\frac{q}{p}$ сонлар унинг илдизи бўлади, Биз зиддиятга учрадик, чунки шартга кўра бу учҳаднинг илдизи йўқ эди.

1-мисол. $2x^2-5x-3$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз.

Унинг илдизларини топамиз. Бунинг учун $2x^2-5x-3=0$ тенгламани ечамиз. Унинг D дискриминанти 49 га тенг.

Бундан:

$$x = \frac{5 \pm 7}{4},$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 3.$$

Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб,

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

ни ҳосил қиламиз. Олинган кўпайтмани биринчи ва иккинчи кўпайтувчини ўзаро кўпайтириш билан бошқача ёзиш мумкин:

$$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3).$$

2-мисол. $-25x^2+10x-1$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз.

Бу квадрат учҳаднинг дискриминанти нолга тенг, шунинг учун учҳаднинг иккита ўзаро тенг илдизи бор:

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{5}.$$

Демак,

$$-25x^2 + 10x - 1 = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right).$$

Ҳосил қилинган натижани бундай ёзиш мумкин:

$$-25\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = -(5x-1)(5x-1) = -(5x-1)^2.$$

Бундан:

$$-25x^2+10x-1=-(5x-1)^2.$$

3-мисол. $\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}$ касрни қисқартирамиз.

Касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$3x^2-13x-10=0,$$

$$D=169+120=289,$$

$$x = \frac{13 \pm 17}{6}, \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \ x_2 = 5.$$

Шунинг учун

$$3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5) = (3x + 2)(x - 5).$$

Демак,

$$\frac{3x + 2}{3x^2 - 13x - 10} = \frac{3x + 2}{(3x+2)\ (x-5)} = \frac{1}{x - 5}.$$

12. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $3x^2-24x+21$; г) $x^2-11x+30$; ж) $2x^2-5x+3$;
б) $5x^2+10x-15$; д) $-y^2+6y-5$; з) $5y^2+2y-3$;
в) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$; е) $-x^2-5x+6$; и) $-2x^2+5x+7$.

13. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$; в) $16a^2+24a+9$;
б) $-9x^2+12x-4$; г) $0{,}25m^2-2m+4$.

14. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $2x^2+12x-14$; в) $3x^2+5x-2$; д) $\frac{1}{4}a^2 - 2a + 4$;

б) $-3m^2+15m-18$; г) $6x^2-13x+6$; е) $-\frac{2}{3}m^2 + 4m - 6$.

15. Айниятни исботланг:

а) $10x^2+19x-2=10(x-0{,}1)(x+2)$;
б) $0{,}5(x-6)(x-5)=0{,}5x^2-5{,}5x+1{,}5$.

16. Квадрат учҳадни биринчи даражали кўпҳадлар кўпайтмаси кўринишида ифодалаш мумкинми:

а) $-3y^2+3y+11$; в) $x^2-7y+11$;
б) $4b^2-9b+7$; г) $3y^2-12y+12$?

17. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{7x^2 + x - 8}{7x - 7}$; в) $\frac{b^2 - 8b + 15}{b^2 - 25}$; д) $\frac{c^2 - c - 110}{22 + 9c - c^2}$;

б) $\frac{5a + 10}{2a^2 + 13a + 18}$; г) $\frac{y^2 - 5y - 36}{81 - y^2}$; е) $\frac{5a^2 + 8a + 3}{14 + 3a - 11a^2}$.

18. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{3x - 12}{x^2 + x - 20}$; б) $\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 + 3x}$; в) $\frac{2m^2 - 5m - 3}{2m^2 - 3m - 2}$.

19. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ функциянинг графиги $y = x + 2$ функциянинг графигидан нима билан фарқ қилади?

20. Функциянинг графигини ясанг:

а) $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; б) $y=\frac{-2x^2+7x-3}{2x-1}$.

Такрорлаш учун машқлар

21. Тенгламани ечинг:

а) $3(x+4)^2=10x+32$; в) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11$;

б) $31x+77=15(x+1)^2$; г) $\frac{x^2+x}{2}=\frac{8x-7}{3}$.

22. Тенгламанинг илдизларини топинг:

а) $\frac{x}{x+4}+\frac{4}{x-4}=\frac{20}{x^2-16}$; б) $\frac{2x}{x+5}-\frac{5}{5-x}=\frac{25}{x^2-25}$.

23. Қатер кўлда 12 км ва дарёда оқимга қарши 11 км ўтди. У ҳамма йўлга 1 соат вақт сарфлади. Агар дарё оқимининг тезлиги 2 км/соат экани маълум бўлса, катернинг кўлдаги тезлигини топинг.

24. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=\frac{5}{x^2-6x-7}$; б) $y=\frac{19}{2x^2-24x+72}$.

25. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=2x-5$; б) $y=-\frac{1}{2}x+2$.

2-§. КВАДРАТИК ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ГРАФИГИ

3. $y=ax^2$ ФУНКЦИЯНИНГ ГРАФИГИ

Куб сиртининг юзи унинг қирраси узунлигига қандай боғлиқ эканини кўриб чиқамиз.

Кубнинг қирраси x см га тенг бўлсин. Кубнинг сирти ҳар бирининг юзи x^2 см^2 га тенг бўлган олтита ўзаро тенг квадратлардан иборат. Демак, куб сиртининг юзи $6x^2$ см^2 га тенг.

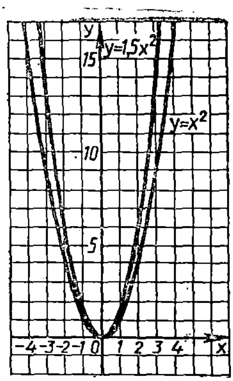
Куб сиртининг юзини (квадрат сантиметрларда) y ҳарфи билан белгилаймиз. У ҳолда

$$y=6x^2.$$

Бу мисолда биз $y=ax^2$ формула кўринишида берилган (бунда x — эркли ўзгарувчи, a — бирор сон) функция билан учрашдик.

$y=ax^2$ функцияни $a\neq0$ да қараб чиқамиз. Бу функциянинг графиги ва унинг хоссалари қандайлигини аниқлаймиз.

$a=1$ бўлганда $y=ax^2$ формула $y=x^2$ кўринишни олади. $y=x^2$ функциянинг графиги парабола (1-расм) экани маълум.



1- расм

$y=1,5x^2$ функциянинг графигини ясаймиз. Бу функция қийматларининг жадвалини тузамиз:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	13,5	6	1,5	0	1,5	6	13,5

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни ясаймиз. Уларни силлиқ чизиқ билан туташтириб, $y=1,5x^2$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (1- расмга қаранг).

Истаган $x\neq0$ да $y=1,5\,x^2$ функциянинг қиймати $y=x^2$ функциянинг мос қийматидан 1,5 марта катта. Агар $y=x^2$ функция графигининг ҳар бир нуқтасини ундан x ўқигача бўлган масофа юқорига 1,5 марта ортадиган қилиб сурсак, $y=x^2$ функциянинг графиги $y=1,5x^2$ функциянинг графигига ўтади. Бошқача айтганда, $y=1,5x^2$ функциянинг графигини $y=x^2$ параболани x ўқидан 1,5 марта **чўзиш** билан ҳосил қилиш мумкин.

Энди $y=0,5x^2$ функциянинг графигини ясаймиз. Бунинг учун унинг қийматлари жадвалини тузамиз:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Истаган $x\neq0$ да $y=0,5x^2$ функциянинг қиймати $y=x^2$ функциянинг мос қийматидан 2 марта кичик. Агар $y=x^2$ функция графигининг ҳар бир нуқтасини пастга бу нуқтадан x ўққача масофа 2 марта камаядиган қилиб силжитсак, $y=x^2$ функциянинг графиги $y=0,5x^2$ функциянинг графигига ўтади. Шундай қилиб, $y=0,5x^2$ функциянинг графигини $y=x^2$ параболани x ўқига 2 марта **сиқиш** билан ҳосил қилиш мумкин.

$y=0,5x^2$ функциянинг графиги 2- расмда тасвирланган.

$y=-0,5x^2$ функциянинг графигини ясаймиз. Бу функция қийматлари жадвалини тузамиз:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	—4,5	—2	—0,5	0	—0,5	—2	—4,5

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни белгилаймиз. Бу нуқталарни силлиқ чизиқ билан туташтириб, $y=-0,5x^2$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (3- расм).

$y=-0,5x^2$ ва $y=0,5x^2$ функцияларнинг графикларини (4- расм) қараб чиқамиз. Истаган x да бу функцияларнинг қийматлари қарама-қарши сонлар бўлади. Демак, графикларнинг тегишли нуқталари x ўқига нисбатан симметрик. Бошқача айтганда, $y=-0,5x^2$ функциянинг графиги $y=0,5x^2$ функциянинг графигидан x ўқига нисбатан симметрия ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин.

Истаган $a\neq 0$ да $y=ax^2$ функциянинг графиги $y=x^2$ функциянинг графиги сингари **парабола** дейилади.

5 ва 6- расмларда $y=ax^2$ функциянинг $a>0$ ва $a<0$ даги графиги ясалган.

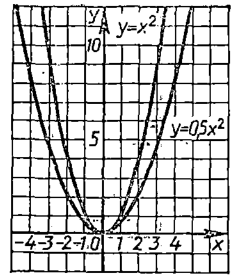
$y=ax^2$ функциянинг $a\neq 0$ даги хоссаларини ифодалаймиз:

1. ***Истаган а да, агар $x=0$ бўлса, $y=0$ бўлади.*** Демак, функциянинг графиги координаталар бошидан ўтади.

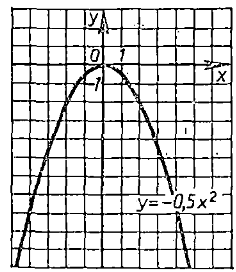
2. ***$a>0$ да, агар $x\neq 0$ бўлса, $y>0$ бўлади; $a<0$ да, агар $x\neq 0$ бўлса, $y<0$ бўлади.*** Шунинг учун $a>0$ да функциянинг графиги юқори ярим текисликда жойлашган, $a<0$ да пастки ярим текисликда жойлашган.

3. ***Аргументнинг қарама-қарши қийматларига функциянинг тенг қийматлари мос келади.*** Бундан, функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик эканлиги келиб чиқади.

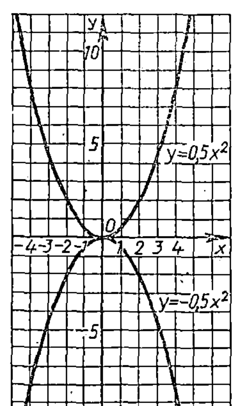
4. ***$a>0$ да функция $(-\infty; 0]$ оралиқда камаяди ва $[0; +\infty)$ оралиқда ўсади; $a<0$ да функция $(-\infty; 0]$ оралиқда ўсади ва $[0; +\infty)$ оралиқда камаяди.***



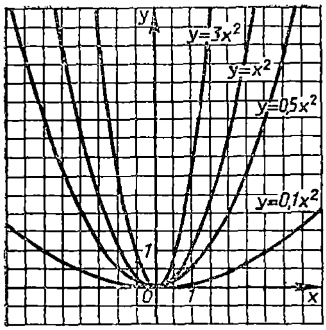
2- расм



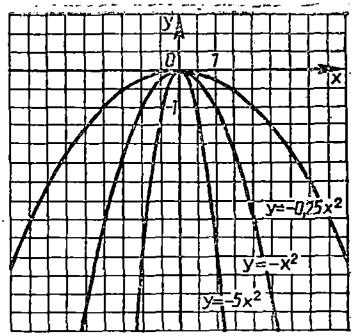
3- расм



4- расм



5- расм



6- расм

1—3- хоссалар равшан, 4- хоссани исботлаймиз. Фараз қилайлик, x_1 ва x_2 аргументнинг иккита қиймати бўлиб, бунда $x_2>x_1$, y_1 ва y_2 — функциянинг уларга мос қийматлари. y_2 ва y_1 нинг айирмасини тузамиз ва уни шакл алмаштирамиз:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

$a>0$ бўлган ҳолни кўриб чиқамиз.

$a>0$ ва $x_2-x_1>0$ бўлгани учун $a(x_2-x_1)(x_2+x_1)$ кўпайтманинг ишораси x_2+x_1 кўпайтувчининг ишораси билан бир хил бўлади.

Агар x_2 ва x_1 сонлар $(-\infty;\ 0]$ оралиққа тегишли бўлса, $x_2+x_1<0$ бўлади. Бу ҳолда $y_2-y_1<0$, яъни $y_2<y_1$. Демак, $a>0$ бўлганда $y=ax^2$ функция $(-\infty;\ 0]$ оралиқда камаяди.

Агар x_2 ва x_1 сонлар $[0;\ +\infty)$ оралиқда тегишли бўлса, $x_2+x_1>0$ бўлади. Бу ҳолда $y_2-y_1>0$, яъни $y_2>y_1$. Демак, $a>0$ бўлганда $y=ax^2$ функция $[0;\ +\infty)$ оралиқда ўсади.

$a<0$ ҳол учун бунинг исботи юқоридагига ўхшаш бўлади.

Қараб чиқилган хоссалардан $y=ax^2$ параболанинг тармоқлари $a>0$ да юқорига йўналган бўлиши, $a<0$ да эса пастга йўналган бўлиши келиб чиқади. y ўқи параболанинг симметрия ўқи бўлади. Параболанинг унинг симметрия ўқи билан кесишиш нуқтаси **параболанинг учи** дейилади. $y=ax^2$ параболанинг учи координаталар боши билан устма-уст тушади.

26. $y = \frac{1}{4}x^2$ функциянинг графигини ясанг. График бўйича:

а) y нинг $x=-2,5;\ -1,5;\ 3,5$ бўлгандаги қийматини;

б) x нинг $y=5;\ 3;\ 2$ бўладиган қийматларини топинг.

27. $y=-2x^2$ функциянинг графигини ясанг ва график бўйича:

а) y нинг $x=-1,5$; 0,6; 1,5 бўлгандаги қийматини;

б) x нинг $y=-1$; -3; $-4,5$ бўладиган қийматларини топинг.

28. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=2x^2$; б) $y=-x^2$.

29. Битта координаталар системасида $y=x^2$; $y=1,8x^2$ ва $y=\frac{1}{3}x^2$ функцияларнинг графикларини ясанг.

30. Битта координаталар системасида $y=0,4x^2$ ва $y=-0,4x^2$ функцияларнинг графикларини ясанг.

31. Қуйида берилган нуқта $y=-100x^2$ функциянинг графигига тегишли бўладими: а) $M(1,5; -225)$; б) $K(-3; -900)$; в) $P(2; 400)$; г) $Q(-0,01; -1)$?

32. $y=-0,6x^2$ функциянинг графигидан фойдаланиб (7- расм), x нинг қандай қийматларида: а) $y=0$; б) $y<0$ бўлишини аниқланг. Бу функция қайси оралиқда ўсади ва қайси оралиқда камаяди?

33. $y=1,2x^2$ функциянинг графигини ясанг. Бу функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

34. x нинг қандай қийматида $y=125x^2$ функция нолга айланишини топинг. x нинг қандай қийматларида бу функция мусбат қийматлар қабул қилади, у қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди?

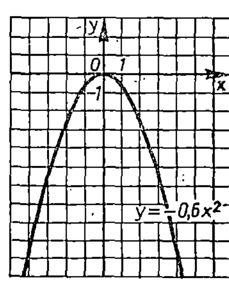
35. x нинг $y=-35x^2$ функция: а) нолга тенг; б) нолдан кичик бўладиган қийматларини топинг. Бу функция қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди?

36. Қуйидаги функциянинг графиги координата текислигида қандай жойлашган: а) $y=-15x^2$; б) $y=6,3x^2$?

37. $y=2x^2$ парабола қуйидаги тўғри чизиқ билан кесишадими: а) $y=50$; б) $y=100$; в) $y=-25$; г) $y=14x-20$? Агар кесишиш нуқталари бўлса, уларнинг координаталарини топинг.

38. $y=-x^2$ ва $y=2x-3$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг. График тасвир бажаринг.

39. Доиранинг S юзи (квадрат сантиметр билан) $S=\pi r^2$ формула бўйича ҳисобланади, бунда r — доиранинг радиуси (сантиметр билан). $S=\pi r^2$ функциянинг графигини ясанг ва график бўйича қуйидагиларни топинг: а) агар доиранинг радиуси 1,3 см; 0,8 см; 2,1 см бўлса, доиранинг юзини топинг; б) юзи 1,8 см²; 2,5 см²; 6,5 см² га тенг бўлган доиранинг радиусини топинг.



7- расм

Такрорлаш учун машқлар

40. Квадрат учҳаднинг илдизлари нечта:

а) $3m^2-8m+2$; б) $-\frac{1}{2}y^2+6y-18$; в) m^2-3m+3?

41. Қасрни қисқартиринг:

а) $\frac{2a-1}{10a^2-a-2}$; б) $\frac{a^2+5a-14}{a^2+7a-18}$; в) $\frac{6a^2-5a+1}{1-4a^2}$.

42. Тенгламани ечинг:

а) $\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$; б) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2(x+1)}=\frac{2(x^2+4)}{x^2-1}$.

43. Турист 3 км тоққа кўтарилиб борди ва 5 км текис йўлда юрди. Бунда у бутун йўлга 2 соат сарфлади. Агар туристнинг тоққа кўтарилишдаги тезлиги текис жойдаги тезлигидан 2 км/соат кам бўлса, туристнинг тоққа кўтарилишдаги тезлиги қанча?

4. $y=ax^2+bx+c$ ФУНКЦИЯНИНГ ГРАФИГИ

$y=-5x^2+2x+8$, $y=x^2-12x+7$ функцияларнинг ҳар бири ўнг томони квадрат учҳад бўлган формула билан берилган.

Бундай функциялар **квадратик функциялар** дейилади.

Таъриф. **$y=ax^2+bx+c$ кўринишдаги формула билан бериш мумкин бўлган функция квадратик функция дейилади, бунда x — эркли ўзгарувчи, a, b ва c — сонлар бўлиб, $a\neq 0$.**

Квадратик функциянинг графиги нимадан иборат бўлишини аниқлаймиз.

Мисолдан бошлаймиз. Функция $y=\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}$ формула билан берилган бўлсин. Бу функциянинг графиги $y=\frac{1}{2}x^2$ функциянинг графигидан бирор параллел кўчириш ёрдамида ҳосил қилиниши мумкинлигини кўрсатамиз.

$\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}$ ифодада $\frac{1}{2}$ кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз ва кейин учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз:

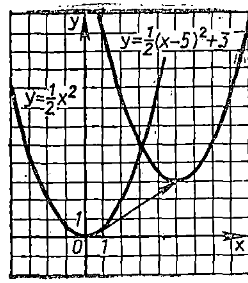
$$\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2-10x+31)=$$
$$=\frac{1}{2}((x^2-10x+25)+6)=\frac{1}{2}(x-5)^2+3.$$

Битта координаталар системасида $y=\frac{1}{2}x^2$ ва $y=\frac{1}{2}(x-5)^2+3$ функцияларнинг графигини ясаймиз.

$y = \frac{1}{2}x^2$ функциянинг графигини ясаш учун унинг қийматлари жадвалидан фойдаланамиз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

(1)



8- расм

$y = \frac{1}{2}x^2$ функциянинг графиги 8-расмда тасвирланган.

Энди $y = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 3$ функциянинг қийматлари жадвалини тузамиз. (1) жадвални тузишда биз $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ва 3 сонларини квадратга кўтардик ва ҳосил бўлган натижаларни $\frac{1}{2}$ га кўпайтирдик. $y\ \frac{1}{2}(x-5)^2 + 3$ функция учун аргументнинг (1) жадвал биринчи сатридаги тегишли сонлардан 5 та ортиқ қийматларини оламиз, яъни аргументнинг 2, 3, 4, 5, 6, 7 ва 8 га тенг қийматларини оламиз. У ҳолда $\frac{1}{2}(x-5)^2$ ифоданинг қийматларини ҳисоблаш учун ўша $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ сонлар (1) жадвални тузишдагидек квадратга кўтарилади ва ҳар бир натижа $\frac{1}{2}$ га кўпайтирилади. Шунинг учун $y = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 3$ функциянинг $x = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ва 8 га тенг бўлгандаги қийматларини топиш учун (1) жадвалнинг иккинчи сатридаги соннинг ҳар бирига 3 сонини қўшиш етарли. Бундан қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5

(2)

Координаталари (2) жадвалда кўрсатилган нуқталарни ясаймиз ва уларни силлиқ чизиқ билан туташтирамиз. Натижада $y = \frac{1}{2} \times (x-5)^2 + 3$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (8-расмга қаранг).

$y = \frac{1}{2}(x-5)^2+3$ функция графигининг (2; 7,5), (3; 5), (4; 3,5), (5; 3), ва ҳоказо нуқталаридан ҳар бири $y = \frac{1}{2}x^2$ функция графигининг мос $(-3;\ 4{,}5)$ $(-2;\ 2)$, $(-1;\ 0{,}5)$, $(0;\ 0)$ ва ҳоказо нуқталарини параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинади, бу параллел кўчиришда $(x_0;\ y_0)$ нуқта $(x_0+5; y_0+3)$ нуқтага ўтади. Умуман, $y=\frac{1}{2}(x-5)^2+3$ функция графигининг ҳар бир нуқтаси кўрсатилган параллел кўчиришда $y=\frac{1}{2}x^2$ функциянинг мос нуқтасидан ҳосил қилиниши мумкин. Бошқача айтганда, бу параллел кўчиришда $y=\frac{1}{2}x^2$ функциянинг графиги $y=\frac{1}{2}(x-5)^2+3$ функциянинг графигига ўтади.

Параллел кўчиришнинг хоссаларидан $y=\frac{1}{2}(x-5)^2+3$ функциянинг графиги, демак, $y=\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}$ функциянинг графиги ҳам $y=\frac{1}{2}x^2$ параболага тенг парабола бўлади. Унинг учи $(5;\ 3)$ нуқта бўлиб, $y=\frac{1}{2}x^2$ параболанинг учи — $(0;\ 0)$ нуқта унга ўтади, унинг симметрия ўқи y ўқига параллел бўлган $x=5$ тўғри чизиқдир. $y=\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}$ парабола тармоқларининг йўналиши $y=\frac{1}{2}x^2$ парабола тармоқларининг йўналиши билан бир хил бўлади, яъни $y=\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}$ параболанинг тармоқлари юқорига йўналган.

Биз $y=\frac{1}{2}x^2-5x+15\frac{1}{2}$ функцияни қараб чиқишда айтган мулоҳазаларни истаган $y=ax^2+bx+c$ квадратик функция учун ҳам айтиш мумкин.

ax^2+bx+c квадрат учҳадни шакл алмаштирамиз. Бундан:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{2a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Ушбу

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

формулани ҳосил қилдик. Бу формула $y=a(x-m)^2+n$ кўринишда бўлади, бунда $m=-\frac{b}{2a}$ ва $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

$y=a(x-m)^2+n$ функциянинг графиги $y=ax^2$ функциянинг графигидан $(x_0;\ y_0)$ нуқтани $(x_0+m;\ y_0+n)$ нуқтага ўтказадиган параллел кўчириш ёрдамида ҳосил бўлишини исбот қилиш мумкин. Демак, истаган квадратик функциянинг графиги $y=ax^2$ функциянинг графигидан кўрсатилган параллел кўчириш ёрдамида ҳосил қилинади.

Бундан $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги $y=ax^2$ параболага тенг бўлган парабола бўлиши келиб чиқади. Унинг учи $(m; n)$ нуқта бўлади, бунда $m=-\frac{b}{2a}$, $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Параболанинг симметрия ўқи эса y ўқига параллел бўлган $x=m$ тўғри чизиқ бўлади. Параболанинг тармоқлари $a>0$ да юқорига, $a<0$ да пастга йўналган.

Квадратик функция графигини ясаш учун тегишли параболанинг бир нечта нуқталари координаталари топилади. Бунда учнинг m абсциссасини $m=-\frac{b}{2a}$ формуладан топиш, n ординатани эса абсциссанинг топилган қийматини $y=ax^2+bx+c$ формулага қўйиб ҳисоблаш қулай. $x=m$ бўлганда $y=ax^2+bx+c=$ $=a(x-m)^2+n=n$.

Квадратик функцияларнинг графикларини ясашга доир мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $y=0{,}5x^2+3x+0{,}5$ функциянинг графигини ясаймиз.

$y=0{,}5x^2+3x+0{,}5$ функциянинг графиги тармоқлари юқорига йўналган парабола бўлади. Шу парабола учининг m ва n координаталарини топамиз:

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\cdot 0{,}5}=-3,\ n=0{,}5(-3)^2+3(-3)+0{,}5=-4.$$

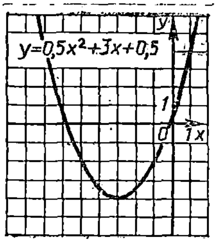
Демак, параболанинг учи $(-3; -4)$ нуқта бўлади.

Функция қийматларининг жадвалини тузамиз:

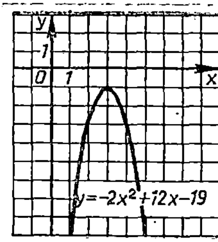
x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	4	$0{,}5$	-2	$-3{,}5$	-4	$-3{,}5$	-2	$0{,}5$	4

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни ясаб ва уларни силлиқ чизиқ билан туташтириб, $y=0{,}5x^2+3x+0{,}5$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (9-расм).

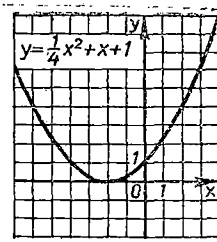
Жадвални тузишда ва графикни ясашда $x=-3$ тўғри чизиқ параболанинг симметрия ўқи эканини ҳисобга олиш мумкин эди. Бу ҳолда $x=-3$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган



9- расм



10- расм



11- расм

ган —4 ва —2, —5 ва —1; —6 ва 0 абсциссали нуқталарни (уларнинг ординаталари бир хил) олган қулай.

2- мисол. $y=-2x^2+12x-19$ функциянинг графигини ясаймиз.

Бу функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари пастга йўналган. Шу парабола учининг координаталарини топамиз:

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\cdot(-2)}=3; \qquad n=-2\cdot3^2+12\cdot3-19=-1.$$

Яна бир нечта нуқтанинг координаталарини ҳисоблаб, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

x	1	2	3	4	5
y	—9	—3	—1	—3	—9

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни силлиқ чизиқ билан туташтириб, $y=-2x^2+12x-19$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (10- расм).

3 = мисол. $y=\frac{1}{4}x^2+x+1$ функциянинг графигини ясаймиз.

$y=\frac{1}{4}x^2+x+1$ функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари юқорига йўналган. Бу парабола учининг координаталарини топамиз:

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=-2, \quad n=\frac{1}{4}(-2)^2-2+1=0.$$

Яна бир нечта нуқтанинг координаталарини ҳисоблаб, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

x	—5	—4	—3	—2	—1	0	1
y	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

$y=\frac{1}{4}x^2+x+1$ функциянинг графиги 11-расмда тасвирланган.

44. $y=x^2$ параболанинг андазаси (шаблони) ёрдамида функциянинг графигини ясанг:

а) $y=(x-2)^2+4$; в) $y=x^2+1,5$; д) $y=(x+3)^2$;
б) $y=(x+1)^2-3$; г) $y=x^2-4,5$; е) $y=(x-5,5)^2$.

45. $y=x^2$ параболанинг андазасидан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг:

а) $y=-x^2$; в) $y=-x^2+3$;
б) $y=-(x+2)^2+1$; г) $y=-(x-1,5)^2$.

46. $y=0,5x^2$ парабола андазасини тайёрланг. Бу андазадан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг:

а) $y=0,5(x-1)^2+2$; в) $y=0,5x^2-6$; д) $y=-0,5x^2$;
б) $y=0,5(x+2,5)^2-3$; г) $y=0,5(x+3)^2$; е) $y=-0,5x^2+4$.

47. Квадратик функция $y=-3x^2-6x+3$ формула билан берилган. Бу функциянинг графиги бўлган парабола учининг координаталарини топинг. Парабола тармоқлари қаёққа йўналган ва қандай тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи бўлади?

48. Квадратик функция $y=x^2-4x+7$ формула билан берилган. Бу функциянинг графиги бўлган парабола учининг координаталарини топинг. Параболанинг тармоқлари қаёққа йўналган ва қандай тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи бўлади?

49. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=x^2+2x-3$; в) $y=-2x^2-5x-2$; д) $y=x^2-4x$;
б) $y=\frac{1}{3}x^2-2x+1$; г) $y=-\frac{1}{4}x^2+x-1$; е) $y=-x^2+5$.

50. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=3x^2+6x+1$; в) $y=x^2+1$;
б) $y=-0,5x^2+2x+7$; г) $y=-x^2+2x$.

51. Функцияларнинг графикларини битта координаталар системасида ясанг:

а) $y=x^2$; $y=x^2-5$; $y=x^2+3,5$;
б) $y=-1,5x^2$; $y=-1,5x^2+2$; $y=-1,5x^2-1$;
в) $y=\frac{1}{3}x^2$; $y=\frac{1}{3}(x-4)^2$; $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$.

52. $y=-x^2+2x+8$ функциянинг графигини ясанг ва график ёрдамида:

а) функциянинг $x=2,5$; 0; $-0,5$; -3 бўлгандаги қийматини топинг;

б) аргументнинг $y=6$; 0; -2 бўладиган қийматларини топинг.

53. $y=2x^2+8x+2$ функциянинг графигини чизинг. Бу графикдан фойдаланиб:

а) y нинг $x=-2,3$; $-0,5$; $1,2$ бўлгандаги қийматини топинг;

б) x нинг $y=-4$; -1; $1,7$; 0 бўладиган қийматларини топинг.

54. Функциянинг графигини топинг:

а) $y=(x-2)(x+4)$; в) $y=(x-1)(x+1)$;

б) $y=(3-x)(x+2)$; г) $y=-x(x+5)$.

55. Функциянинг графигини ясанг: а) $y=\frac{1}{3}x^2-4x+4$; б) $y=-x^2-4x-5$; в) $y=0,2x^2-x+1,25$; г) $y=2x^2+0,3$. График бўйича x нинг қандай қийматларида y нинг қиймати нолга тенг, нолдан катта, нолдан кичик бўлишини топинг. Қандай оралиқда функция ўсади, қандай оралиқда камаяди? Функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати қандай?

56. Функциянинг графигини ясанг: а) $y=-x^2+8x-11$; б) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+3$. График буйича x нинг қандай қийматларида y нинг қиймати нолга тенг, нолдан катта, нолдан кичик бўлишини топинг. Функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати қандай?

57. Функциялар графигининг кесишиш нуқталари координаталарини топинг:

а) $y=3x^2+11x-41$ ва $y=-10x+49$;

б) $y=9x^2-20x+15$ ва $y=4x^2+10x-25$.

Такрорлаш учун машқлар

58. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $9x^2+3x-2$; б) $2x^2-2ax+x-a$.

59. Тенгсизликни ечинг:

а) $5x-0,7<3x+5,1$; в) $2x+4,2\leqslant 4x+7,8$;

б) $0,8x+4,5\geqslant 5-1,2x$; г) $3x-2,6>5,5x-3,1$.

60. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 4x-21<0, \\ x+3,5>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5-4x\leqslant 10, \\ 1-3x<-2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x-9\leqslant 0, \\ 2x+7\leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x-6>5, \\ 1-4x>8. \end{cases}$

61. Графикларнинг кесишиш нуқталари координаталарини топинг:

а) $y=3x^2$ ва $y=4x$; б) $y=2x^2$ ва $y=-5x+3$.

62. Теплоход дарё оқими бўйича 120 км ўтди ва орқасига қайтиб келди, бунда у бутун йўлга 9 соат сарфлади. Агар оқимнинг тезлиги 3 км/соат бўлса, теплоходнинг турғун сувдаги тезлиги қандай?

3-§. ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

5. КВАДРАТИК ФУНКЦИЯНИНГ ХОССАЛАРИ

Квадратик функциянинг графигидан фойдаланиб, бу функция аргументнинг қандай қийматларида нолга айланишини, қандай оралиқларда у мусбат қийматлар ва қандайларида манфий қийматлар олишини, қайси оралиқда у ўсишини ва қайсинисида камайишини, бу функциянинг энг катта ёки энг кичик қийматлари қандайлигини билиш осон.

12- расмда $y=-0{,}5x^2+2x-1$ функциянинг графиги тасвирланган. Ундан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

1) $x_1\approx 0{,}6$ ва $x_2\approx 3{,}4$ да $y=0$;

2) агар $x\in(x_1;\ x_2)$ бўлса, $y>0$; агар $x\in(-\infty;x_1)$ ёки $x\in$ $\in(x_2;\ +\infty)$ бўлса, $y<0$;

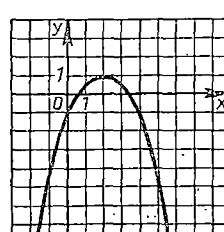
3) функция $(-\infty;\ 2]$ оралиқда ўсади ва $[(2;\ +\infty)$ оралиқда камаяди;

4) $x=2$ да функция 1 сонига тенг энг катта қиймат қабул қилади.

$y=ax^2+bx+c$ квадратик функциянинг хоссаларини кўриб чиқишда унинг графигидаги фақат айрим нуқталаргина муҳим аҳамиятга эга. Бундай нуқталарга параболанинг учи ва парабола x ўқини кесиб ўтадиган ёки x ўқига уринадиган нуқталар киради. Шунинг учун функциянинг графигини схематик тасвирлаш, яъни мазкур конкрет ҳолда муҳим бўлган нуқталарини белгилаш етарли бўлади.

Квадратик функция ишорасини сақлайдиган оралиқларни топиш учун параболани схематик чизиш етарли, бунда тармоқларнинг йўналишини ва бу параболанинг x ўқи билан кесишиш нуқталарини (агар у бўлса) белгилаш лозим.

Квадратик функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини ҳамда унинг энг катта ёки энг кичик қийматини топиш учун координата текислигида параболанинг учини белгилаш ва тармоқларнинг йўналишини ҳисобга олиб, бу параболани схематик чизиш керак.



12- расм

1- мисол. Аргументнинг қандай қийматларида $y=x^2+x-2$ функциянинг қиймати нолга тенг, нолдан катта, нолдан кичик бўлишини топамиз.

$y=x^2+x-2$ функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари юқорига йўналган. Парабола билан x ўқи умумий нуқталарга эга бўлиш-бўлмаслигини аниқлаймиз. $x^2+x-2=0$ тенгламани ечиб, унинг илдизлари -2 ва 1 сонлари эканини топамиз. Демак, $x=-2$ ва $x=1$ да $y=0$ бўлади.

Координата текислигида $(-2;\ 0)$ ва $(1;\ 0)$ нуқталарни белгилаймиз ва улардан параболани схематик ўтказамиз (13- расм). Расмдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

агар $x\in(-\infty;-2)$ ёки $x\in(1;+\infty)$ бўлса, $y>0$;

агар $x\in(-2;\ 1)$ бўлса, $y<0$.

2-мисол. $y=x^2+6x+9$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини ҳамда унинг энг кичик қийматини топамиз.

$y=x^2+6x+9$ функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари юқорига йўналган. Парабола учининг координаталарини ҳисоблаймиз:

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2}=-3;\quad n=(-3)^2+6(-3)+9=0.$$

Координата текислигида $(-3;\ 0)$ учни белгилаймиз ва у орқали параболани схематик ўтказамиз (14- расм). Расмдан фойдаланиб, $y=x^2+6x+9$ функция $[-3;\ +\infty)$ оралиқда ўсишини, $(-\infty;\ -3]$ оралиқда камайишини ҳосил қиламиз. Функциянинг энг кичик қиймати 0 га тенг.

3-мисол. x нинг қандай қийматларида $y=-3x^2+6x-4$ функциянинг қиймати нолга тенг, нолдан катта, нолдан кичик эканини, шунингдек, бу функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топамиз.

$y=-3x^2+6x-4$ функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари пастга йўналган.

Парабола билан x ўқи умумий нуқталарга эга бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш учун $-3x^2+6x-4=0$ тенгламани ечамиз. У $3x^2-6x+4=0$ тенгламага тенг кучли. Бу тенгламанинг дискриминантини топамиз:

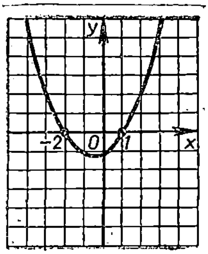
$$D=36-48=-12.$$

$D<0$ бўлгани учун тенгламанинг илдизи йўқ. Бу ҳол $y=-3x^2+6x-4$ парабола x ўқи билан умумий нуқтага эга эмаслигини англатади.

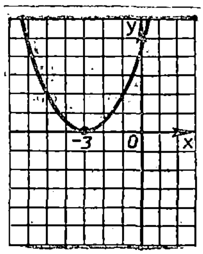
Парабола учининг координаталарини ҳисоблаймиз:

$$m=-\frac{6}{2\cdot(-3)}=1,\quad n=-3\cdot1^2+6\cdot1-4=-1.$$

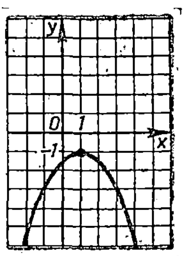
Координата текислигида $(1;\ -1)$ учни белгилаймиз ва ундан параболани схематик ўтказамиз (15- расм). Расмдан фой-



13- расм



14- расм



15- расм

даланиб, $y=-3x^2+6x-4$ функция $(-\infty;\ 1]$ оралиқда ўсишини ва $[1;\ +\infty)$ оралиқда камайишини кўрамиз.

Бу функция x нинг истаган қийматида манфий қийматлар қабул қилади.

63. x нинг қандай қийматларида квадратик функция мусбат қийматлар олади ва қандай қийматларида манфий қийматлар олади:

а) $y=4x^2+x-3$;
б) $y=-6x^2+x+1$;
в) $y=4x^2+x$;
г) $y=-x^2+10x-25$;
д) $y=-3x^2+3x-5$;
е) $y=\frac{1}{2}x^2+4x+10$?

64. x нинг $y>0$ бўладиган қийматларини ва $y<0$ бўладиган қийматларини топинг, бунда:

а) $y=2x^2+x-6$;
б) $y=16x^2-8x+1$;
в) $y=-9x^2+12x-4$;
г) $y=-0{,}5x^2+5x-12$.

65. $y=0{,}2x^2+3x+10$ ва $y=-10x^2+x+0{,}6$ функцияларнинг ҳар бири учун x нинг шундай қийматларини топингки, унда:
а) $y>0$; б) $y<0$; в) $y\geqslant 0$; г) $y\leqslant 0$ бўлсин.

66. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $y=0{,}2x^2+1{,}6x+1{,}2$;
б) $y=4x^2-20x+25$;
в) $y=-0{,}7x^2-2{,}8x+4{,}8$;
г) $y=-3{,}5x^2+2{,}3$.

67. Функция қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди:

а) $y=-0{,}2x^2-2x-2{,}5$;
б) $y=6x^2-18x+16$;
в) $y=-100x^2+1$;
г) $y=\frac{1}{2}x^2-2$?

68. $y=-0{,}4x^2+2x-1{,}6$ функция берилган. x нинг қандай қийматларида y нинг қиймати нолга тенг, нолдан катта ва нолдан кичик бўлади? Бу функция қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди? Бу функциянинг энг катта ёки энг кичик қийматини топинг.

69. x нинг қандай қийматларида $y=0{,}2x^2+1{,}2x-3{,}2$ функциянинг қиймати нолга тенг, нолдан катта ва нолдан кичик бўлади? Бу функция қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди? Бу функциянинг энг катта ёки энг кичик қийматини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

70. Қуйидаги функциянинг графиги координаталар текислигида қандай жойлашган: а) $y=-8x^2$; б) $y=1{,}6x^2$? Бу функция қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди?

71. Функциялар графигининг кесишиш нуқталари координаталарини топинг:

а) $y=5x^2-23$ ва $y=-3x^2+1$;
б) $y=-3x^2-10x+2$ ва $y=4x-3$.

72. Квадрат учҳаднинг илдизларини топинг:

а) $0{,}25x^2+2x-5$; в) $2y^2+18y+36$;
б) $-x^2+11x-24$; г) $-17x^2+34x$.

73. Қасрни қисқартиринг:

а) $\frac{4-x}{3x^2+3x-60}$; б) $\frac{4x^3+30x-16}{2x-1}$.

74. Пальтонинг нархи икки марта кетма-кет бир хил процентга туширилгандан кейин у 200 сўмдан 162 сўмга тушди. Ҳар гал пальтонинг баҳоси неча процент туширилган?

6. БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШ

$ax^2+bx+c>0$ ва $ax^2+bx+c<0$ кўринишдаги тенгсизликлар **бир ўзгарувчили иккинчи даражали тенгсизликлар** дейилади, бунда x — ўзгарувчи, a, b ва c — сонлар бўлиб, $a\neq 0$.

Бир ўзгарувчили иккинчи даражали тенгсизликларни ечиш мос квадратик функция мусбат ёки манфий қийматлар қабул қиладиган оралиқларни топишга келтирилиши мумкин.

Тенгсизликларни ечишга мисоллар келтирамиз.

1- мисол. $5x^2+9x-2<0$ тенгсизликни ечамиз.

$y=5x^2+9x-2$ функцияни қараб чиқамиз. Бу функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари юқорига йўналган.

$$5x^2+9x-2=0$$

тенгламани ечамиз. Бундан:

$$D=81+40=121,$$
$$x=\frac{-9\pm 11}{10},$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{5}.$$

Демак, парабола x ўқини абсциссалари -2 ва $\frac{1}{5}$ бўлган нуқталарда кесиб ўтади. Бу параболани схематик тасвирлаб (16- расм); агар $x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$ бўлса, $y<0$ эканини топамиз.

Жавоб: $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$.

2- мисол. $5x^2+9x-2>0$ тенгсизликни ечамиз.

$y = 5x^2 + 9x - 2$ функциянинг графиги 16-расмда схематик тасвирланган. Расмдан $(-\infty; -2)$ ва $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ оралиқларнинг ҳар бирида $y > 0$ экани кўриниб турибди.

Тенгсизликнинг ечимлари тўплами $(-\infty; -2)$ ва $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ оралиқларнинг бирлашмасидан иборат дейилади. Оралиқларнинг бирлашмасини $\cup$ белги ёрдамида қуйидагича ёзиш мумкин: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

3- мисол. $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 < 0$ тенгсизликни ечамиз.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$ функцияни қараймиз. Бу функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари пастга йўналган.

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0$$

тенгламани ечамиз.

Бундан:

$$x^2-8x+16=0,$$

$$\frac{D}{4} = 16 - 16 = 0,$$

$$x=4.$$

Демак, парабола x ўқига абсциссаси 4 бўлган нуқтада уринади. Бу параболани схематик тасвирлаб (17- расм), x нинг 4 га тенг бўлмаган ҳар қандай қийматида $y<0$ эканини топамиз.

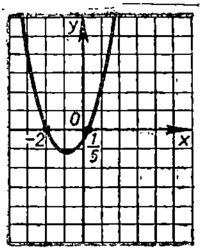
Жавобни бундай ёзамиз: $x \neq 4$ ёки бундай: $(-\infty; 4)$ ва $(4; +\infty)$. Жавобни қуйидагича ёзиш ҳам мумкин: $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

4- мисол. $x^2-3x+4>0$ тенгсизликни ечамиз.

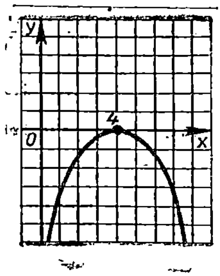
$y=x^2-3x+4$ функцияни қараб чиқамиз. Бу функциянинг графиги парабола бўлиб, унинг тармоқлари юқорига йўналган.

$$x^2-3x+4=0$$

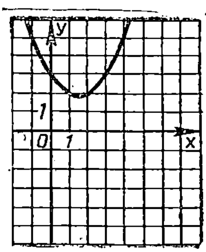
тенгламани ечамиз.



16- расм



17- расм



18- расм

Дискриминантни топамиз:

$$D=9-16=-7.$$

Тенгламанинг илдизи йўқ, чунки $D<0$. Шунинг учун парабола x ўқи билан умумий нуқтага эга эмас. Параболани схематик тасвирлаб (18- расм), x нинг истаган қийматида $y>0$ эканини топамиз.

Жавоб: $(-\infty; +\infty)$.

75. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2-x-90<0$;
б) $6x^2-7x+2>0$;
в) $-x^2-2x+48<0$;
г) $8x^2+10x-3>0$;
д) $25x^2-10x+1>0$;
е) $49x^2-28x+4<0$;
ж) $-x^2-12x-100<0$;
з) $4x^2-4x+15<0$.

76. Тенгсизликнинг ечимлари тўпламини топинг:

а) $2x^2+3x-5\geqslant 0$;
б) $-6x^2+6x+36\geqslant 0$;
в) $3x+x^2\leqslant 0$;
г) $-x^2+5\leqslant 0$.

77. Тенгсизликни ечинг:

а) $2x^2+13x-7>0$;
б) $-9x^2+12x-4<0$;
в) $6x^2-13x+5\leqslant 0$;
г) $-2x^2-5x+18\leqslant 0$;
д) $3x^2-2x>0$;
е) $8-x^2<0$.

78. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2<16$;
б) $x^2\geqslant 3$;
в) $0{,}2x^2>1{,}8$;
г) $-5x^2\leqslant x$;
д) $3x^2<-2x$;
е) $7x<x^2$.

79. Тенгсизликни ечинг:

а) $0{,}01x^2\leqslant 1$;
б) $\frac{1}{2}x^2>12$;
в) $4x\leqslant -x^2$;
г) $\frac{1}{3}x^2>\frac{1}{9}$;
д) $5x^2>2x$;
е) $-0{,}3x<0{,}6x^2$.

80. Тенгсизликнинг ечимлари тўпламини топинг:

а) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$;
б) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;

в) $2x^2+8x-111<(3x-5)(2x+6)$;
г) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$.

81. Тенгсизликни ечинг:

а) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$;
б) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

82. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=\sqrt{2x-x^2}$; б) $y=\frac{24}{\sqrt{x^2+4x+4}}$.

83. Ўзгарувчининг истаган қийматида тенгсизлик тўғри бўлишини исботланг:

а) $7x^2-10x+7>0$; в) $\frac{1}{4}x^2-8x+64\geqslant 0$;
б) $-6y^2+11y-10<0$; г) $-9y^2+6y-1\leqslant 0$.

84. x нинг истаган қийматида тенгсизлик тўғри бўлишини исботланг:

а) $4x^2+12x+9\geqslant 0$; б) $-5x^2+8x-5<0$.

85. Исботланг:

а) истаган x да $x^2+7x+1>-x^2+10x-1$ бўлади;
б) $x\neq 3$ да $-2x^2+10x<18-2x$ бўлади.

86. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони иккинчисидан 7 см катта. Агар тўғри тўртбурчакнинг юзи 60 см^2 дан кичик бўлса, унинг бу томони қандай бўлиши мумкин?

87. Тўғри тўртбурчакнинг бўйи энидан 5 см ортиқ. Тўғри тўртбурчакнинг юзи 36 см^2 дан катта бўлиши учун унинг эни қандай бўлиши керак?

Такрорлаш учун машқлар

88. $y=x^2-4x+1$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг. Бу функциянинг энг кичик қиймати қандай? Бу функциянинг графиги y ўқини қайси нуқтада кесиб ўтади?

89. Функция графигининг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари координаталарини топинг:

а) $y=-10x^2-3x+1$; в) $y=-3{,}5x^2+7x$;
б) $y=x^2-35x+66$; г) $y=0{,}2x^2-3{,}2$.

90. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{2x^2+x-6}{6x^2-11x+3}$; б) $\frac{8m^3+27}{6m^2+13m+6}$.

91. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 2(x+2)>5(x-1), \\ 3+4x<2x+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}5m+3<-1-1{,}5m, \\ 2m-2{,}5<3{,}5m+0{,}5. \end{cases}$

I БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

1- параграфга доир

92. $10-2\sqrt{5}$ сони $x^2-20x+80$ учҳаднинг илдизи, $\sqrt{2}-1$ сони x^2-6x+1 учҳаднинг илдизи бўладими?

93. Квадрат учҳаднинг илдизларини топинг:

а) $\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-2$; в) $-x^2+4x-2\frac{3}{4}$;

б) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}$; г) $0{,}4x^2-x+0{,}2$.

94. Илдизлари қуйидаги сонлар бўлган бирор квадрат учҳадни топинг: а) -7 ва 2; б) $3-\sqrt{2}$ ва $3+\sqrt{2}$.

95. p нинг қандай қийматида $2px^2-2x-2p-3$ ифода бир илдизи нолга тенг бўлган квадрат учҳад бўлади? Унинг иккинчи илдизини топинг.

96. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $\frac{1}{4}x^2+x-15$; в) $0{,}8x^2-19{,}8x-5$; д) $x^2+x\sqrt{2}-4$;

б) $-6x^2-5x+6$; г) $3{,}5-3\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x^2$; е) x^2-6x+1.

97. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2-4x+1; г) $-2y^3+3y^2+2y$;

б) $x^2-x\sqrt{3}-5{,}5$; д) mx^3-m;

в) $6x^3-x^2+x$; е) ny^3+n.

98. Қасрни қисқартиринг:

а) $\frac{2m^2-8}{m^2+6m+8}$; б) $\frac{2m^2-5m+2}{mn-2n-3m+6}$.

99. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{x+4}{x-1}-\frac{37x-12}{4x^2-3x-1}$; в) $\frac{-m^2+3m-7}{2m^2+7m+3}+\frac{m-2}{m+3}$;

б) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{1-x}{x^2+3x+2}$; г) $\frac{9x^2-4}{x^2+4x-5}\cdot\frac{x^2+6x+5}{3x+2}-\frac{2x^2+3x-3}{x-1}$.

100. Амални бажаринг:

а) $\frac{x^2+4x+3}{x-5}\cdot\frac{x^2-5x}{x+3}$; в) $\frac{x^2-46}{x^2+3x-10}+\frac{x+2}{x+5}$;

б) $\frac{x^2-16}{4x-12}:\frac{x^2+3x-4}{x-3}$; г) $\frac{4x-1}{2x-1}-\frac{4-13x}{2x^2-7x+3}$.

101. Тенгламани ечинг:

а) $\frac{35x}{4+10x-6x^2}-\frac{x+2}{3x+1}+\frac{3x-1}{x-2}=0$;

б) $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}+\frac{2x-3}{x+4}+\frac{x+4}{3-2x}=0;$

в) $\frac{13}{2y^2+y-21}+\frac{1}{2y+7}=\frac{6}{y^2-9};$

г) $\frac{x+9}{x^2-3x-10}-\frac{x+15}{x^2-25}=\frac{1}{x+2}.$

2- параграфга доир

102. a нинг қандай қийматида $y=ax^2$ функциянинг графиги қуйидаги нуқтадан ўтади: а) $(5; -7)$; б) $(-\sqrt{3}; 9)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $(100;10)$?

103. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=(3x+1)^2-10x^2-6x-1;$

б) $y=x^2+2x+4-\left(\frac{1}{2}x+2\right).$

104. $y=-0{,}25x^2$ формула билан берилган функциянинг графигини ясанг, бунда $x\in[-6; 2]$. Бу функциянинг энг катта ва энг кичик қиймати қандай?

105. a нинг қандай қийматларида $y=ax^2$ функциянинг қийматлари тўплами: а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$ оралиқ бўлади?

106. $y=ax^2$ ва $y=ax$ функцияларнинг графиги $(1; a)$ нуқтада кесишишини исботланг. Агар $a\neq 0$ бўлса, бу графиклар яна қандай нуқтада кесишади?

107. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=x^2+2x-15;$ г) $y=6x-2x^2;$

б) $y=0{,}5x^2-3x+4;$ д) $y=(2x-7)(x+1);$

в) $y=4-0{,}5x^2;$ е) $y=(2-x)(x+6).$

108. Тенгламанинг графиги парабола бўлишини исботланг:

а) $x(2y-3x+4)+y(3x-2y+1)=(x-2y)(y-2x);$

б) $(2x-3y)^2-(y-6x)^2=2(2y+1)^2-5(x+2)^2.$

109. a ва b нинг шундай қийматларини топингки, бунда $y=ax^2+bx-18$ функциянинг графиги M $(1; 2)$ ва N $(2; 10)$ нуқталардан ўтсин.

110. Функциянинг қийматлари тўпламини топинг:

а) $y=3x^2-0{,}5x+\frac{1}{16};$ в) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5{,}5;$

б) $y=2x^2+1{,}2x+2;$ г) $y=-3x^2-2x-4\frac{2}{3}.$

111. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=\frac{(2x^2-3x-2)(x-4)}{x-2};$ б) $y=\frac{(x+2)(15-2x-x^2)}{x+5}.$

112. Аргументнинг қандай қийматларида f функция мусбат қийматлар қабул қилади ва қандай қийматларида манфий қийматлар қабул қилади, бунда:

а) $f(x) = 2x^2 - 67x - 300$;
б) $f(x) = -3x^2 + 38x - 120$;
в) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 10x + 100$;
г) $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 - 2x - 9$;
д) $f(x) = 6x^2 - 10x + 11$;
е) $f(x) = -5x^2 + x - 20$?

113. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $y = 10x^2 - 8x + 13$;
б) $y = -8x^2 + 10x - 13$;
в) $y = 25x^2 + 20x + 4$;
г) $y = -4x^2 + 20x - 25$;
д) $y = (7x - 1)(2 - 5x)$;
е) $y = (6x - 5)(6x + 5)$.

114. Функция қуйидаги формула билан берилган:

а) $y = 7(x - 3)^2 + 5$;
б) $y = -0,1(x + 4)^2 + 3,2$;
в) $y = 4x^2 - (x + 3)^2$.

Бу функция квадратик бўладими? Бу функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати қандай?

115. Ердан юқорига отилган копток чиққан баландлик h (метр билан) бўлсин, коптокнинг учиш вақти t (секунд билан) бўлсин. h нинг t га боғлиқлик графиги $h = 24t - 4,9t^2$ формула билан ифодаланади. Копток қандай энг катта баландликка етган? У қандай вақт оралиғида кўтарилган ва қандай вақт оралиғида пастга тушган? Копток отилгандан кейин неча секунд ўтгач, у ерга тушади?

116. а) $(-\infty; -3]$ оралиқда камаювчи, $[-3; +\infty)$ оралиқда эса ўсувчи;

б) $(-\infty; 6]$ оралиқда ўсувчи, $[6; +\infty)$ оралиқда камаювчи бирор квадратик функцияни формула билан ифодаланг:

3- параграфга доир

117. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2 - 5x + 6 < 0$;
б) $-p^2 + 7p - 6 \geqslant 0$;
в) $3y^2 + 2y + 5 \geqslant 0$;
г) $4p^2 - 36p + 81 \geqslant 0$;
д) $3x^2 > 7 - 4x$;
е) $-2m^2 - 10m \leqslant 41$.

118. 1001 сони $x^2 - 26x + 944 > 0$ тенгсизликнинг ечими бўладими?

119. x нинг истаган қийматида тенгсизлик тўғри бўлишини исботланг:

а) $2(x + 1)(x - 3) > (x + 5)(x - 7)$;
б) $\frac{1}{4}(x + 5)(x - 7) \leqslant (x + 2)(x - 4)$.

120. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=\frac{1}{\sqrt{144-9x^2}}$;

б) $y=\frac{\sqrt{x^2-x-42}}{x-11}$;

в) $y=\frac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$;

г) $y=\frac{x-3}{\sqrt{-x^2+x+30}}$.

121. $x^2+6x-7\leqslant 0$ ва $x^2-2x-15\leqslant 0$ тенгсизликларнинг умумий ечимларини топинг.

122. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ x>0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-144>0, \\ x-3<0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+5x<0, \\ x+7>0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2-3x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ x-1{,}5>0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x^2+5x+2<0, \\ 4x-3{,}6<0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x^2-7x+128>0, \\ 5x-1{,}8<0. \end{cases}$

123. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

Амалда учинчи ва янада юқори даражали тенгламаларни ечиш учун илдизларнинг қийматини истаганча аниқликда тақрибан топишга имкон берувчи турли хил усуллардан фойдаланилади.

Шуни айтиш керакки, баъзан учинчи ёки янада юқорироқ даражали тенгламаларни бирор махсус усулни қўлланиб ечишга муваффақ бўлинади. Масалан, баъзи тенгламаларни кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш ёрдамида ечиш қийин эмас.

Мисол. $x^3-8x^2-x+8=0$ тенгламани ечамиз. Тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$(x^3-8x^2)-(x-8)=0,$$
$$x^2(x-8)-(x-8)=0,$$
$$(x-8)(x^2-1)=0,$$
$$(x-8)(x-1)(x+1)=0.$$

Кўпайтманинг нолга тенглиги шартидан

$$x-8=0 \text{ ёки } x-1=0 \text{ ёки } x+1=0$$

экани келиб чиқади. Бундан $x^3-8x^2-x+8=0$ тенглама учта илдизга эга экани келиб чиқади:

$$x_1=8,\ x_2=1,\ x_3=-1.$$

124. Тенгламанинг даражаси қандай:

а) $2x^2-6x^5+1=0$;
б) $x^6-4x^3-3=0$;
в) $\frac{1}{7}x^5=0$;
г) $(x+8)(x-7)=0$;
д) $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=5$;
е) $5x^3-5x(x^2+4)=1$?

125. Тенгламани ечинг:

а) $(8x-1)(2x-3)-(4x-1)^2=38$;
б) $\frac{(15x-1)(1+15x)}{3}-(3x+1)(25x-2)=20\frac{2}{3}$;
в) $0{,}5y^3-0{,}5y(y+1)(y-3)=7$;
г) $x^4-x^2=\frac{(1+2x^2)(2x^2-1)}{4}$.

126. Тенгламани ечинг:

а) $(6-x)(x+6)-(x-11)x=36$;
б) $\frac{1-3y}{11}-\frac{3-y}{5}=0$;
в) $9x^2-\frac{(12x-11)(3x+8)}{4}=1$;
г) $\frac{(y+1)^2}{12}-\frac{1-y^2}{24}=4$.

127. $5x^6+6x^4+x^2+4=0$ тенгламанинг илдизга эга эмаслигини исботланг.

128. $12x^5+7x^3+11x-3=121$ тенглама манфий илдизларга эга бўлиши мумкинми?

129. a нинг қандай қийматларида $ax-8=0$ тенгламанинг илдизи бутун сон бўлади?

130. p нинг қандай қийматларида $9x=p-2$ тенгламанинг илдизи манфий бўлади?

131. b нинг қандай қийматларида тенглама иккита илдизга эга бўлади:

а) $2x^2+6x+b=0$;
б) $5x^2-4x+3b=0$;
в) $3x^2+bx+3=0$;
г) $x^2-bx+5=0$?

132. v нинг қандай қийматларида тенглама битта илдизга эга бўлади:

а) $3x^2-6x+2v=0$;
б) $5x^2+2vx+5=0$;
в) $x^2-3vx+18=0$;
г) $2x^2-12x+3v=0$?

133. t нинг қандай қийматларида тенглама илдизга эга бўлмайди:

а) $6x^2+tx+6=0$;
б) $12x^2+4x-t=0$;
в) $2x^2-15x+t=0$;
г) $2x^2+tx+18=0$?

134. Тенгламани ечинг:

а) $y^3-6y=0$;
б) $6x^4+3{,}6x^2=0$;
в) $x^3+3x=3{,}5x^2$;
г) $x^3-0{,}1x=0{,}3x^2$;
д) $9x^3-18x^2-x+2=0$;
е) $y^4-y^3-16y^2+16y=0$;
ж) $p^3-p^2=p-1$;
з) $x^4-x^2=3x^3-3x$.

135. Тенгламани ечинг:

а) $0{,}7x^4-x^3=0$;
б) $0{,}5x^3-72x=0$;
в) $x^3+4x=5x^2$;
г) $3x^3-x^2+18x-6=0$;
д) $2x^4-18x^2=5x^3-45x$;
е) $3y^2-2y=2y^3-3$.

Такрорлаш учун машқлар

136. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $6ab-9b+2a-3$;
б) $12x^3-21x^2-16x+28$.

137. $y=x^2-3$ функциянинг графигини ясанг.

138. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2-10x+21<0$;
б) $x^2-8x+16>0$;
в) $3x^2-14x+16\geqslant 0$;
г) $5x^2-6x+1\leqslant 0$.

8. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР

Даражаси иккидан юқори бўлган тенгламаларни баъзан янги ўзгарувчи киритиш билан ечиш мумкин бўлади.

Тенгламаларни ана шу усул билан ечишга мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. Ушбу

$$(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0 \qquad (1)$$

тенгламани ечамиз. Агар бу тенгламанинг чап қисмини стандарт шаклдаги кўпҳадга алмаштирсак, у ҳолда

$$x^4-10x^3-5x^2+150x-216=0$$

тенглама ҳосил бўлиб, уни ечиш усулини топиш анча қийин бўлади.

Бироқ (1) тенгламанинг қуйидаги хусусиятидан фойдаланиш мумкин: унинг чап қисмида x ўзгарувчи фақат x^2-5x ифодага киради, бу ифода эса тенгламада икки марта учрайди — бир марта иккинчи даражада, бир марта биринчи даражада. Бу ҳол берилган тенгламани янги ўзгарувчини киритиш ёрдамида ечишга имкон беради. x^2-5x ни y билан белгилаймиз:

$$x^2-5x=y.$$

У ҳолда (1) тенглама y ўзгарувчили квадрат тенгламага келтирилади:

$$y^2-30y-216=0. \qquad (2)$$

(2) тенгламани ечиб, у иккита илдизга эга эканини топамиз:

$$y_1=-6,\ y_2=36.$$

Бундан:

$$x^2-5x=-6 \text{ ёки } x^2-5x=36.$$

$x^2-5x=-6$ тенгламани ечиб,

$$x_1=2,\ x_2=3$$

эканини топамиз. $x^2-5x=36$ тенгламани ечиб,

$$x_3=-4,\ x_4=9$$

эканини топамиз. Демак, (1) тенглама тўртта илдизга эга:

$$x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=-4,\ x_4=9.$$

Янги ўзгарувчини киритиш усули $ax^4+bx^2+c=0$ кўринишдаги тўртинчи даражали тенгламани осонгина ечишга имкон беради. x^2 га нисбатан квадрат тенглама бўлган $ax^4+bx^2+c=0$ кўринишдаги тенглама (бунда ($a\neq0$) **биквадрат тенглама** дейилади.

2-мисол.

$$4x^4-5x^2+1=0 \qquad (3)$$

биквадрат тенгламани ечамиз.

Бунинг учун янги ўзгарувчини киритамиз, x^2 ни y билан белгилаймиз:

$$x^2=y.$$

y ўзгарувчили квадрат тенгламани ҳосил қиламиз:

$$4y^2-5y+1=0.$$

Уни ечиб, қуйидагини топамиз:

$$y_1=\frac{1}{4},\quad y_2=1.$$

Демак,

$$x^2=\frac{1}{4}\ \text{ёки}\ x^2=1.$$

$x^2=\frac{1}{4}$ тенгламадан

$$x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1}{2}$$

эканини топамиз. $x^2=1$ тенгламадан

$$x_3=-1,\ x_4=1$$

эканини топамиз.

Шундай қилиб, (3) тенглама тўртта илдизга эга:

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-1,\ x_4=1.$$

139. Янги ўзгарувчини киритишдан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

а) $(5x^2-4)^2+6(5x^2-4)-7=0$;
б) $(x^2-9)^2-8(x^2-9)+7=0$;
в) $2(y^2+2y)^2-7(y^2+2y)=-3$;
г) $(p^2+2p+4)^2-7(p^2+2p+4)=-12$.

140. Тенгламани ечинг:

а) $(p^2-5)^2-3(p^2-5)-4=0$;
б) $(x^2+2x+3)^2-2(x^2+2x+3)=3$;
в) $(2a^2+3a)^2-7(2a^2+3a)=-10$.

141. Биквадрат тенгламани ечинг:

а) $x^4+x^2-2=0$;
б) $y^4-7y^2-144=0$;
в) $36z^4-13z^2+1=0$;
г) $16x^4-10x^2+1=0$;
д) $p^4+2p^2+3=0$;
е) $9y^4-6y^2+1=0$.

142. Биквадрат тенгламанинг илдизларини топинг:

а) $x^4-25x^2+144=0$;
б) $y^4+14y^2+48=0$;
в) $x^4-4x^2+4=0$;
г) $t^4-2t^2-3=0$;
д) $2x^4-9x^2+4=0$;
е) $5y^4-5y^2+2=0$.

143. Функция графигининг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг:

а) $y = x^4 - 10x^2 + 9$; в) $y = x^4 + 2x^2 + 6$;
б) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; г) $y = x^4 + 36x^2$.

144. Тенгламани ечинг:

а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 4(x^2 - 11) = 0$;
б) $3x^2(x - 1)(x + 1) - 10x^2 + 4 = 0$.

145. Тенгламани ечинг:

а) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$;
б) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$.

Такрорлаш учун машқлар

146. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y = \frac{4}{x}$; б) $y = -3x + 6$.

147. p нинг қандай қийматларида:

а) $3x^2 + 2px + 5 = 0$ тенглама иккита илдизга эга бўлади;
б) $6x^2 - 4x + p = 0$ тенглама илдизга эга бўлмайди?

148. Тенгсизликни ечинг:

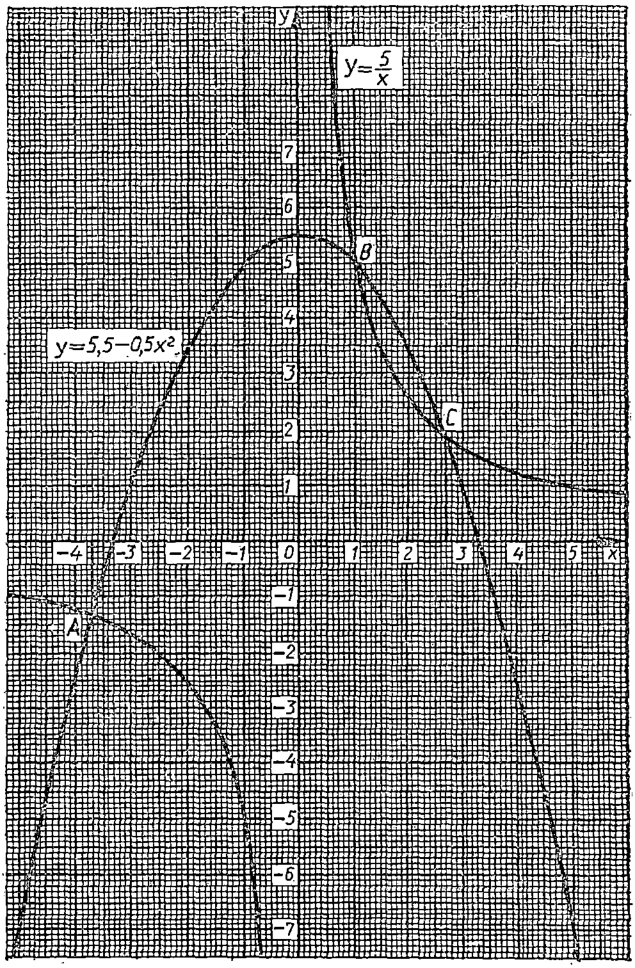
а) $25x^2 + 6x \leqslant 0$; в) $y^2 < 10y + 24$;
б) $x^2 - 169 > 0$; г) $15y^2 - 30 > 22y + 7$.

9. ТЕНГЛАМАНИ ЕЧИШНИНГ ГРАФИК УСУЛИ

$$5,5 - 0,5x^2 = \frac{5}{x}$$

тенгламани ечиш керак бўлсин. Битта координаталар системасида $y = 5,5 - 0,5x^2$ ва $y = \frac{5}{x}$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (19-расм). Кўрамизки, графиклар A, B ва C нуқталарда кесишади. Графикларда бошқа кесишиш нуқталари йўқлигини тушуниш қийин эмас.

$y = 5,5 - 0,5x^2$ ва $y = \frac{5}{x}$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталари абсциссалари x нинг шундай қийматлари бўладики, бу қийматларда $5,5 - 0,5x^2$ ва $\frac{5}{x}$ ифодалар тенг қийматлар олади, яъни $5,5 - 0,5x^2 = \frac{5}{x}$ тенгламанинг илдизлари бўлади. Расм ёр-



19- расм

дамида бу илдизларнинг тақрибий қийматларини топиш мумкин. A нуқтанинг абсциссаси тақрибан—3,7 га тенг; B нуқтанинг абсциссаси тақрибан 1,0 га тенг; C нуқтанинг абсциссаси тақрибан 2,7 га тенг. Демак, тенглама $x_1 \approx -3{,}7$, $x_2 \approx 1{,}0$, $x_3 \approx 2{,}7$ илдизларга эга. Текширишни бажариб,—3,7 ва 2,7 сонлари илдизларнинг тақрибий қийматлари эканига, 1,0 сони эса аниқ қиймати, яъни $x_2 = 1$ эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Тенгламаларни ечишнинг кўриб ўтилган усули **график усул** дейилади.

Яна бир мисол кўрамиз.

$$x^3 + x - 4 = 0$$

тенгламани ечамиз.

Илдизларнинг тақрибий қийматларини $y = x^3 + x - 4$ функциянинг графиги ёрдамида топиш мумкин. Тенгламанинг илдизлари графикнинг ординаталари нолга тенг бўлган нуқталарининг абсциссалари бўлади, яъни графикнинг x ўқи билан кесишган нуқталарининг абсциссалари бўлади.

Аммо бошқача йўл тутган қулай. Берилган тенгламани

$$x^3 = -x + 4$$

кўринишда ифодалаймиз ва битта координаталар системасида $y = x^3$ ва $y = -x + 4$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (20-расм). Графиклар битта нуқтада кесишади, унинг абсциссаси тақрибан 1,4 га тенг. Демак, $x^3 + x - 4 = 0$ тенглама ягона $x \approx 1,4$ илдизга эга.

149. $y = x^2$ функциянинг графигини ясанг ва ундан фойдаланиб, қуйидаги тенгламани ечинг:

а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 = -0,4x + 2$.

150. Тенгламани дастлаб $x^2 = ax + b$ кўринишга келтиринг, кейин уни график усулда ечинг:

а) $x^2 + 1,5x - 2,5 = 0$; б) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

151. Квадрат тенглама илдизлари формуласидан фойдаланиб, тенгламани аввал график усулда, кейин аналитик усулда ечинг:

а) $x^2 = 0,5x + 3$; б) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

152. $y = \frac{8}{x}$ функциянинг графигини ясанг ва ундан фойдаланиб, қуйидаги тенгламани ечинг:

а) $\frac{8}{x} = -x + 6$; б) $\frac{8}{x} = -x$; в) $\frac{8}{x} = 2x + 1$.

153. Тенгламани график усулда ечинг:

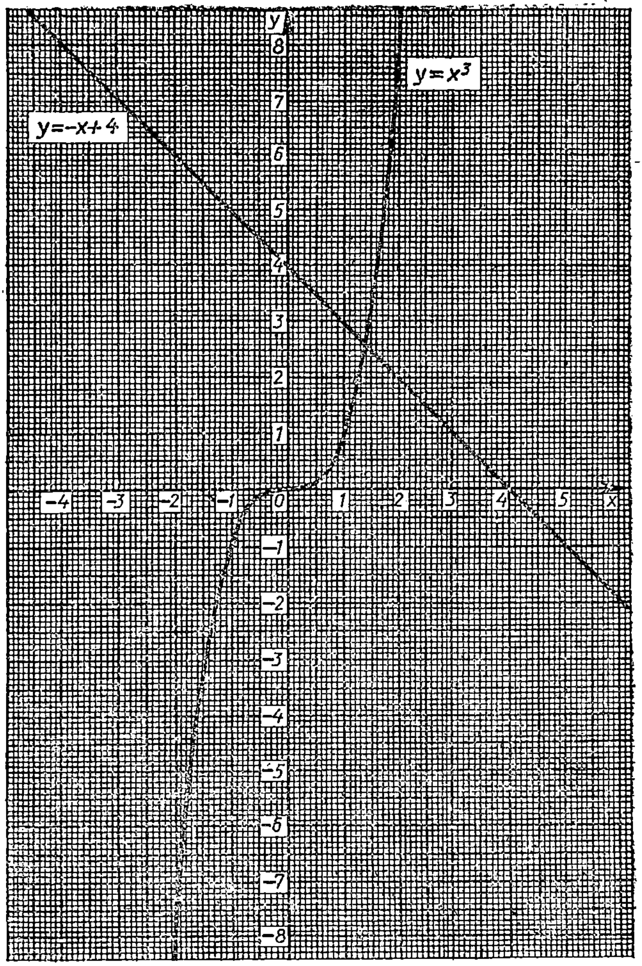
а) $\frac{6}{x} = x$; б) $\frac{6}{x} = -x + 6$.

154. $\frac{1}{x} = ax + b$ тенглама (бунда a ва b—бирор сонлар) нечта ечимга эга эканини графиклар ёрдамида аниқланг.

155. Тенгламани график усулда ечинг:

а) $\frac{12}{x} = 0,5x^2 - 10$; б) $\frac{4}{x} = 0,25x^2 - 4$.

156. $\frac{5}{x} = x^2 + 1$ тенгламани $y = \frac{5}{x}$ ва $y = x^2 + 1$ функцияларнинг графиклари ёрдамида ечинг.



20- расм

157. Тенгламани график усулда ечинг:

а) $0{,}5x^3=2x-1$; б) $0{,}5x^3=x^2-6x+9$.

158. $y=x^3$ функциянинг графигини ясанг ва ундан **фойдаланиб**, қуйидаги тенгламани ечинг:

а) $x^3-4x=0$; б) $x^3+2x-4=0$.

Такрорлаш учун машқлар

159. Тенгламани ечинг:

а) $x^4-8x^2+15=0$; в) $y^4+15y^2+56=0$;

б) $x^4+5x^2-14=0$; г) $z^4-7z^2+6=0$.

160. Тенгламанинг илдизларини топинг:

а) $2x^3-14x^2+x-7=0$; в) $x^3+4x^2-15x-60=0$;
б) $4x^3+5x^2=64x+80$; г) $x^3+21x=8x^2+168$.

161. x нинг қандай қийматларида:

а) $-x^2+6x-8$ учҳад мусбат қийматлар қабул қилади;
б) $2x^2-9x-45$ учҳад манфий қийматлар қабул қилади?

162. Ораларидаги масофа 540 км бўлган A пунктдан B пунктга қараб бир вақтда икки автомобиль йўлга чиқди. Биринчи автомобиль иккинчисидан 10 км/соат ортиқ тезлик билан юрди ва шунинг учун B пунктга иккинчисидан 45 минут илгари етиб келди. Ҳар бир автомобилнинг тезлигини топинг.

5-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

10. ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИ ЕЧИШНИНГ ГРАФИК УСУЛИ

Бу параграфда биз икки ўзгарувчили тенгламаларни ва уларнинг системаларини кўриб чиқамиз.

Аввал бир неча ўзгарувчили бутун тенгламанинг даражаси тушунчасини киритамиз. Бир неча ўзгарувчили тенгламанинг даражаси бир ўзгарувчили тенгламанинг даражасига ўхшаш аниқланади.

Агар бир неча ўзгарувчили тенгламанинг чап қисми стандарт шаклдаги кўпҳад, ўнг қисми эса ноль сонидан иборат бўлса, шу кўпҳаднинг даражаси тенгламанинг даражаси дейилади.

Масалан,

$2x-5y-3=0$ — биринчи даражали тенглама,

$16x^4y+4x^3y^3+27xy+1=0$ — олтинчи даражали тенглама.

Бир неча ўзгарувчили ихтиёрий бутун тенгламанинг даражаси деб, унга тенг кучли бўлиб, чап қисми стандарт шаклдаги кўпҳад, ўнг қисми ноль бўлган тенгламанинг даражасига айтилади. Жумладан,

$$(x^3+y)^2=x^6-1$$

тенгламанинг даражасини аниқлаш учун уни

$$2x^3y+y^2+1=0$$

кўринишда ифодалаймиз. Ҳосил қилинган тенглама, демак, дастлабки тенглама ҳам тўртинчи даражали тенглама экан.

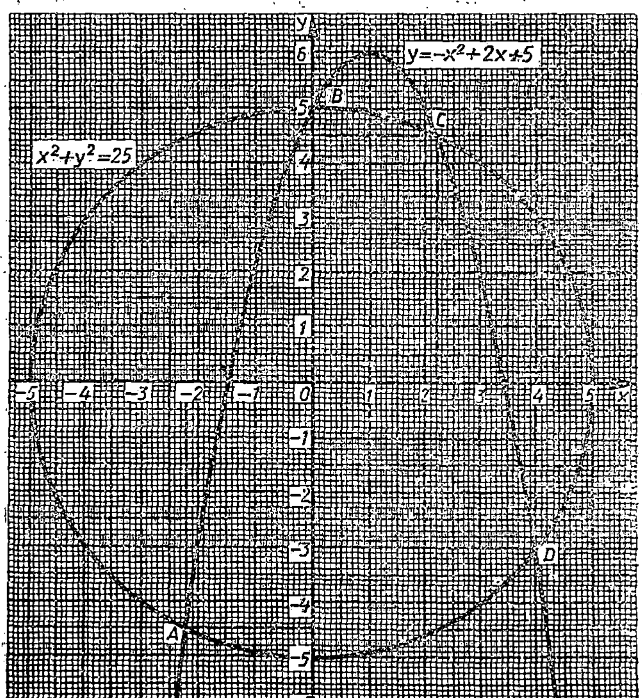
Илгари биз икки ўзгарувчили биринчи даражали тенгламалар системаларини кўриб ўтган эдик. Энди биз иккинчи даражали иккита тенгламадан ёки бири биринчи даражали тенглама, иккинчиси иккинчи даражали тенгламадан тузилган системаларни ечиш билан шуғулланамиз.

Икки ўзгарувчили тенгламалар системаларини **график усулда** ечишга мисол қараймиз.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -x^2 + 2x + 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш талаб қилинган бўлсин.

Битта координаталар системасида $x^2+y^2=25$ ва $y=-x^2+2x+5$ тенгламаларнинг графикларини ясаймиз (21- расм). Ясалган айлананинг истаган нуқтасининг координаталари $x^2+y^2=25$ тенгламанинг ечими бўлади, парабола истаган нуқтасининг координаталари эса $y=-x^2+2x+5$ тенгламанинг ечими бўлади. Демак, айлана билан парабола кесишган ҳар бир



21- расм

нуқтанинг координаталари системанинг биринчи тенгламасини ҳам, иккинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиради, яъни қаралаётган системанинг ечими бўлади. Расмдан фойдаланиб, графикларнинг кесишиш нуқталари координаталарининг тақрибий қийматларини топамиз: $A(-2{,}2;\ -4{,}5)$, $B(0;\ 5)$, $C(2{,}2;\ 4{,}5)$, $D(4;\ -3)$. Демак, тенгламалар системаси тўртта ечимга эга:

$$x_1\approx -2{,}2,\ y_1\approx -4{,}5; \qquad x_2\approx 0,\ y_2\approx 5;$$
$$x_3\approx 2{,}2,\ y_3\approx 4{,}5; \qquad x_4\approx 4,\ y_4\approx -3.$$

Бу ечимлардан иккинчиси ва тўртинчиси аниқ, биринчиси ва учинчиси эса тақрибий эканига текшириш ёрдамида ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шуни айтиб ўтиш керакки, икки ўзгарувчили тенгламалар системасининг ечими сонлар жуфти бўлгани учун системаларни график усул билан ечишда графиклар кесишадиган нуқталарнинг иккала координаталари — абсциссаси ва ординатаси топилади.

163. $(-1;\ 3)$ сонлар жуфти қуйидаги тенгламанинг ечими бўладими:

а) $x^2-y+2=0$; б) $xy+y=6$?

164. а) $(-2;\ 1)$; б) $(1;\ -2)$ сонлар жуфти

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 6x+5y=-4 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечими бўладими?

165. Тенгламанинг даражасини аниқланг:

а) $x^2+y^2+2x=0$; г) $x(1-y)=4$;
б) $x-y-1{,}2=0$; д) $(x^2-2y^2)^2=5y$;
в) $x^5-5x^4y^2+x^2y=0$; е) $7x^8-12xy+y=7x^2(x^6+1)$.

166. Тенгламалар системасини график усулда ечинг ва текширинг:

$$\begin{cases} y-x^2=0, \\ 2x-y+3=0. \end{cases}$$

167. Тенгламалар системаси тўртта ечимга эга эканини графиклар ёрдамида кўрсатинг ва бу ечимларни топинг:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=x^2-6. \end{cases}$$

<u>**168.**</u> Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ y=\frac{1}{2}x^2-10. \end{cases}$$

169. Тенгламалар системасини графиклар ёрдамида ечинг:

а) $\begin{cases} xy=6, \\ 2x-3y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2=4, \\ y-x^2=0. \end{cases}$

170. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x+y+2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=8, \\ x+y+3=0. \end{cases}$

171. Тенгламаларнинг графикларини схематик тасвирлаб, тенгламалар системасининг ечими бор-йўқлигини, агар ечими бор бўлса, у нечта эканини аниқланг:

а) $\begin{cases} y=x^3, \\ xy=-12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ y=\frac{3}{x}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=x^2+8, \\ y=-x^2+12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-10)^2+y^2=16. \end{cases}$

172. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

а) $\begin{cases} (x-4)^2+(y-5)^2=9, \\ y=x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ x+y=6. \end{cases}$

Такрорлаш учун машқлар

173. Тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} 11x-9y=37, \\ x=1+2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 16x-4y=5, \\ 3x-y=2. \end{cases}$

174. Системани тенгламаларни қўшиш усули билан ечинг:

б) $\begin{cases} 5x+2y=30, \\ 3x+4y=-3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y=85, \\ 5x-2y=127. \end{cases}$

175. Колхоздан 72 км масофадаги шаҳарга қараб велосипедчи жўнади. 15 минут ўтгач, шаҳардан унга қарши иккинчи велосипедчи жўнади, у биринчи велосипедчига қараганда соатига 2 км ортиқ юради. Агар велосипедчилар йўлнинг ўртасида учрашгани маълум бўлса, ҳар бир велосипедчи қандай тезлик билан юрганини топинг.

11. ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИ ЕЧИШ

Аввал битта иккинчи даражали тенглама ва битта биринчи даражали тенгламадан тузилган икки ўзгарувчили тенгламалар системасини кўриб чиқамиз. Бундай системани ўрнига қўйиш усулидан фойдаланиб доимо ечиш мумкин. Бунинг учун биринчи даражали тенгламадаги бир ўзгарувчи иккинчиси билан ифодаланади ва топилган ифода иккинчи даражали тенгламага қўйилади. Натижада даражаси иккидан ортиқ бўлмаган бир ўзгарувчили тенглама ҳосил қилинади. Уни ечиб, бу ўзгарувчининг қиймати топилади, сўнгра иккинчи ўзгарувчининг тегишли қиймати ҳисобланади.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 2, \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз.

Иккинчи тенгламадаги x ўзгарувчини y билан ифодалаймиз:

$$x = 1 - 2y.$$

Биринчи тенгламада x ўрнига $1-2y$ ифодани қўйиб, y ўзгарувчили тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(1-2y)^2 - 3(1-2y)\,y - 2y^2 = 2.$$

Соддалаштиришдан сўнг бу тенглама

$$8y^2 - 7y - 1 = 0$$

кўринишни олади.

Уни ечиб,

$$y_1 = -\frac{1}{8}, \quad y_2 = 1$$

эканини топамиз.

x нинг мос қийматларини y нинг топилган қийматларини системанинг тенгламаларидан бирига, масалан, иккинчи тенгламага қўйиб, топиш мумкин. Бироқ $x = 1 - 2y$ формуладан фойдаланган қулай.

$x = 1 - 2y$ формулага $y_1 = -\frac{1}{8}$ қийматни қўйиб,

$$x_1 = 1 - 2\left(-\frac{1}{8}\right) = 1\frac{1}{4}$$

ни ҳосил қиламиз.

$x = 1 - 2y$ формулага $y_2 = 1$ қийматни қўйиб,

$$x_2 = 1 - 2\cdot 1 = -1$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, система иккита ечимга эга:

$$x_1 = 1\frac{1}{4}, \ y_1 = -\frac{1}{8} \text{ ва } x_2 = -1, \ y_2 = 1.$$

Жавоб: $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $(-1;\ 1)$.

Агар система иккинчи даражали икки номаълумли иккита тенгламадан тузилган бўлса, унинг ечимини топиш одатда анча қийин бўлади. Айрим ҳолларда бундай системани ўрнига қўйиш усулидан ёки тенгламаларни қўшиш усулидан фойдаланиб ечиш мумкин. Мисоллар кўриб чиқамиз.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ xy=6 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз.

Иккинчи тенгламадаги y ўзгарувчини x билан ифодалаймиз:

$$y=\frac{6}{x}.$$

Биринчи тенгламада y ўрнига $\frac{6}{x}$ ифодани қўйиб,

$$x^2-\left(\frac{6}{x}\right)^2=5$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уни ечиб,

$$x_1=-3, \quad x_2=3$$

эканини топамиз.

$y=\frac{6}{x}$ формуладан y нинг мос қийматларини топамиз:

$$y_1=-2, \qquad y_2=2.$$

Демак, система иккита ечимга эга:

$$x_1=-3,\ y_1=-2 \text{ ва } x_2=3,\ y_2=2.$$

Жавоб: $(-3;\ -2)$, $(3,\ 2)$.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x^2+y^2=313, \\ x^2-y^2=25 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз.

Системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшиб,

$$2x^2=338$$

ни топамиз.

Бундан

$$x_1=169,$$
$$x_1=-13, \quad x_2=13.$$

Биринчи тенгламада x ўрнига -13 ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$169+y^2=313,$$

$$y^2=144,$$
$$y_1=-12,\ y_2=12.$$

Биз системанинг иккита ечимини топдик: $(-13;\ -12)$ ва $(-13;\ 12)$.

Шунга ўхшаш, биринчи тенгламада x ўрнига 13 сонини қўйиб, яна иккита ечимни топамиз:

$$(13;\ -12)\ \text{ва}\ (13;\ 12).$$

Шундай қилиб, система тўртта ечимга эга.

Жавоб: $(-13;\ -12)$, $(-13;\ 12)$, $(13;\ -12)$, $(13;\ 12)$.

4-мисол. Тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} 3x+10y-xy=4, \\ 2x+5y-xy=2. \end{cases}$$

Иккала тенгламада «минус» ишораси билан олинган xy кўпайтма бор. Иккинчи тенгламани -1 га кўпайтириб, қуйидаги ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x+10y-xy=4, \\ -2x-5y+xy=-2. \end{cases}$$

Тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$x+5y=2$$

ни ҳосил қиламиз.

Бундан:

$$x=2-5y.$$

Иккинчи тенгламада x ўрнига $2-5y$ ифодани қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2(2-5y)+5y-(2-5y)y=2,$$
$$4-10y+5y-2y+5y^2=2,$$
$$5y^2-7y+2=0.$$

Ҳосил қилинган тенгламани ечиб,

$$y_1=1,\ y_2=0{,}4$$

ни топамиз.

$x=2-5y$ формула бўйича x нинг мос қийматларини ҳисоблаймиз:

$$x_1=2-5\cdot 1=-3;$$
$$x_2=2-5\cdot 0{,}4=0.$$

Шундай қилиб, биз система иккита ечимга эга эканини топдик:

$$x_1=-3,\ y_1=1 \text{ ва } x_2=0,\ y_2=0{,}4.$$

Жавоб: $(-3;\ 1)$, $(0;\ 0{,}4)$.

176. Тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x^2-2y^2=7, \\ x=y+2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-5xy=10, \\ x-5y=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ 3x-2y=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-2xy=7, \\ x=3y+2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5xy-y^2=9, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=24, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

177. Тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усулидан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} 2xy-y=7, \\ x-5y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+4y=10, \\ x-2y=-5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y-4=0, \\ x^2+y^2=8{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+2y=18, \\ 3x=2y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2-xy=33, \\ 4x-y=17; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ 5xy+y^2=16. \end{cases}$

178. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 2x+4y=5(x-y), \\ x^2-y^2=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u-v=6(u+v), \\ u^2-v^2=6. \end{cases}$

179. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 6(y-x)-50=y, \\ y-xy=24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} p+5t=2(p+t), \\ pt-t=10. \end{cases}$

180. Тенгламалар системасини аввал график усул билан, кейин аналитик усул билан ечинг:

$$\begin{cases} y=0{,}5x^2-2, \\ y-x=2. \end{cases}$$

181. Тенгламалар системасини график ва аналитик усулда ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ x+2y=5. \end{cases}$

182. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11, \\ x-2y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy-3y=9, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$

183. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=-1, \\ x+2y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u+2v=4, \\ u^2+uv-v=-5. \end{cases}$

184. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=6, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{20}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1{,}2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - 2x = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0{,}1. \end{cases}$

185. Ясашни бажармасдан, $y = x^2 - 8x + 16$ парабола $2x - 3y = 0$ тўғри чизиқни кесиб ўтиш-ўтмаслигини аниқланг, агар кесиб ўтса, қандай нуқталарда кесиб ўтишини топинг.

186. Ясашни бажармасдан, $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 65$ айлана билан $3x - y + 6 = 0$ тўғри чизиқ қандай нуқталарда кесишишини топинг.

187. $x - y = 0$ тўғри чизиқ $y = x^2 - 5x + 5$ парабола билан битта умумий нуқтага эга эканини исботланг ва бу нуқтанинг координаталарини топинг.

188. $y = 2x^2 - 5x + 1$ парабола ва $2x + y + 3 = 0$ тўғри чизиқ кесишмаслигини исботланг.

189. Тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ xy = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ xy = 20. \end{cases}$

190. Тенгламаларни қўшиш усулидан фойдаланиб, системани ечинг:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172. \end{cases}$

191. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11, \\ xy = 30; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = 18. \end{cases}$

192. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} xy + 3x - 4y = 12, \\ xy + 2x - 2y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ x^2 - 2x + y = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3xy + 4y = 0, \\ x + 3xy - 3y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 + 3x - y = 1, \\ y^2 + 6x - 2y = 1. \end{cases}$

193. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} xy + x = 56, \\ xy + y = 54; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - xy = 10, \\ y + xy = 6. \end{cases}$

194. Ясашни бажармасдан:

а) $x^2 + y^2 = 36$ айлана билан $y = x^2 + 6$ параболанинг;

б) $x^2 + y^2 = 16$ айлана билан $(x - 2)^2 + y^2 = 36$ айлананинг

кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

195. Тенгламаларнинг графикларини схематик ясаб, тенгламалар системаси нечта ечимга эга эканини топинг:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \frac{10}{x}, \\ y = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$

196. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 13x - 14y = 20; \\ x - y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 6y = 3; \\ 15x - 7y = 19; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 6x - 7y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 6y = 8, \\ 9x - 12y = -11. \end{cases}$

197. Тенгсизликни ечинг:

а) $0{,}2x\ (x - 1) - x\ (0{,}2x + 0{,}5) < 0{,}6x - 4$;

б) $1{,}2x\ (3 - x) + 0{,}4x\ (3x - 1) < x + 1{,}1$.

198. x нинг қандай қийматларида:

а) $-x^2 - 2x + 168$ учҳад мусбат қийматлар қабул қилади;

б) $15x^2 + x - 2$ учҳад манфий қийматлар қабул қилади?

12. ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАР СИСТЕМАЛАРИ ЁРДАМИДА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Масала. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 80 дм га тенг. Агар тўғри тўртбурчакнинг асоси 8 дм, баландлиги 2 дм орттирилса, тўғри тўртбурчакнинг юзи бир ярим марта ортади. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари қандай?

Ечилиши. Тўғри тўртбурчакнинг асоси x дм га, баландлиги эса y дм га тенг бўлсин.

Масаланинг шартига кўра тўғри тўртбурчакнинг периметри 80 дм га тенг, яъни

$$2x+2y=80.$$

Тўғри тўртбурчакнинг юзи xy дм^2 га тенг. Тўғри тўртбурчак томонлари орттирилгандан сўнг унинг асоси $(x+8)$ дм га, баландлиги $(y+2)$ дм га, юзи эса $(x+8)(y+2)$ дм^2 га тенг бўлади. Масаланинг шартига кўра тўғри тўртбурчакнинг юзи бир ярим марта ортади, яъни

$$(x+8)(y+2)=1{,}5xy.$$

Шундай қилиб, ушбу тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80, \\ (x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy. \end{cases}$$

Уни ечиб,

$$x_1=28,\ y_1=12 \text{ ва } x_2=24,\ y_2=16$$

ни топамиз.

Масала иккита ечимга эга. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 28 дм ва 12 дм га ёки 24 дм ва 16 дм га тенг.

199. Икки соннинг йиғиндиси 20 га тенг, уларнинг кўпайтмаси эса 96 га тенг. Шу сонларни топинг.

200. Икки соннинг айирмаси 6 га тенг, уларнинг кўпайтмаси эса 216 га тенг. Шу сонларни топинг.

201. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 82 см га тенг, унинг диагонали эса 29 см га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

202. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони иккинчисидан 14 см узун. Агар тўғри тўртбурчакнинг диагонали 26 см га тенг бўлса, унинг томонларини топинг.

203. Юзи 24 а бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги ер майдони узунлиги 200 м га тенг бўлган девор билан ўралган. Шу майдоннинг бўйини ва энини топинг.

204. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 84 см га тенг, унинг гипотенузаси эса 37 см га тенг. Шу учбурчакнинг юзини топинг.

205. Бир пунктдан икки отряд бир вақтда йўлга чиқди. Отрядлардан бири шимолга, иккинчиси шарққа йўл олди. 4 соатдан кейин отрядлар орасидаги масофа 24 км га тенг бўлиб, бунда биринчи отряд иккинчисидан 4,8 км ортиқ юрди. Ҳар бир отряд қандай тезлик билан юрган?

206. Тўғри бурчакнинг учидан унинг томонлари бўйича икки жисм бир вақтда ўз ҳаракатини бошлади. 15 с дан кейин улар орасидаги масофа 3 м га тенг бўлди. Агар биринчи жисм 6 с да иккинчи жисм 8 с да ўтган йўлга тенг масофани ўтган бўлса, ҳар бир жисм қандай тезлик билан ҳаракатланган?

207. Тўғри тўртбурчакнинг ҳар бир томонига квадрат ясалган. Квадратлар юзларининг йиғиндиси 122 см^2 га тенг. Агар тўғри тўртбурчакнинг юзи 30 см^2 га тенглиги маълум бўлса, унинг томонларини топинг.

208. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи 24 см^2 га тенг, гипотенузаси эса 10 см га тенг. Учбурчакнинг катетлари қандай?

209. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 13 см га тенг. Агар унинг катетларидан бири 4 см орттирилса, гипотенузаси 2 см ортади. Учбурчакнинг катетларини топинг.

210. Икки экскаватор бир вақтда ишлаб, бирор ҳажмдаги ер ишларини 3 соату 45 минутда бажаради. Бир экскаватор алоҳида ўзи ишлаб, бу ҳажмдаги ишни иккинчисига қараганда 4 соат тезроқ бажаради. Шу ҳажмда ер ишларини бажариш учун ҳар бир экскаваторга алоҳида қанча вақт керак бўлади?

211. Бир комбайнчи майдондаги буғдой ҳосилини иккинчи комбайнчидан 24 соат тезроқ ўриб олиши мумкин. Иккала комбайнчи биргаликда ишлаганда эса ҳосилни 35 соатда йиғиб тугатишади. Ҳар бир комбайнчи алоҳида ишлаб, ҳосилни қанча вақтда ўриб тугатади?

212. Йўл бригадаларидан бири йўлнинг бирор қисмига иккинчи бригадага қараганда 4 соат тез асфальт ётқизиши мумкин. Агар иккала бригаданинг 24 соатлик биргаликдаги ишлашида шундай йўл қисмларидан 5 тасига асфальт ётқизилиши маълум бўлса, ҳар бир бригада йўл қисмига неча соатда асфальт ётқизиши мумкин?

213. Цех рационализаторлари деталнинг такомиллашган типини ишлаб чиқаришди ва ишлаб чиқаришга жорий қилишди. Агар янги типдаги деталь эскисидан 0,2 кг енгил бўлиб, шу билан бирга 22 кг пўлат металлдан ясалган янги типдаги деталлар сони 24 кг металлдан ясалган эски типдаги деталлар сонидан иккита ортиқ экани маълум бўлса, янги ва эски типдаги деталларнинг массасини аниқланг.

214. Ораларидаги масофа 40 км га тенг бўлган A ва B пунктлардан бир вақтда бир-бирига томон икки пиёда жўнади. 4 соатдан кейин улар учрашишларига яна 4 км қолди. Агар A пунктдан чиққан пиёда 1 соат илгари чиққанида эди, учрашув йўлнинг ўртасида содир бўлар эди. Ҳар бир пиёда қандай тезлик билан юрган?

215. Ораларидаги масофа 45 км га тенг бўлган M ва N пунктлардан бир вақтда икки поезд жўнади ва 20 минутдан сўнг учрашди. M дан чиққан поезд N станцияга иккинчиси M га етиб келишидан 9 минут аввал келади. Ҳар бир поезднинг тезлиги қандай?

216. Икки велосипедчи ораларидаги масофа 28 км га тенг бўлган A ва B пунктлардан бир вақтда жўнашди ва бир соатдан кейин учрашишди. Агар велосипедчилардан бири B пунктга иккинчиси A га етиб келганидан 35 минут кейин етиб келган бўлса, ҳар бир велосипедчи қандай тезлик билан ҳаракатланган?

Такрорлаш учун машқлар.

217. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ x^2-y^2=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+3x=2, \\ x^2-xy=3{,}36. \end{cases}$

218. Ясашни бажармасдан:

а) $y=x^2-3x+3$ парабола билан $2x-y-1=0$ тўғри чизиқнинг;

б) $y=2x^2-x+1$ парабола билан $x=1{,}5$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

219. Ясашни бажармасдан:

а) $x^2+y^2=100$ айлана билан $x+y=14$ тўғри чизиқ;

б) $x^2+y^2=64$ айлана билан $x-y=12$ тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг (агар эга бўлса, уларнинг координаталарини топинг).

220. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2-6x<0$; б) $8x+x^2\geqslant 0$; в) $x^2\leqslant 4$; г) $x^2>6$.

II БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

4-параграфга доир

221. Тенгламани ечинг:

а) $x^5-x^3=0$; б) $x^6=4x^4$; в) $0{,}5x^3=32x$; г) $0{,}2x^4=4x^2$.

222. Тенгламанинг илдизларини топинг:

а) $(a-2)(a+2)(a^2+4)=25a^2-16$;
б) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=6x^2-1$.

223. Тенгламани ечинг:

а) $x^3-x^2-4(x-1)^2=0$;
б) $2y^3+2y^2-(y+1)^2=0$;
в) $5x^3-19x^2-38x+40=0$;
г) $6x^3-31x^2-31x+6=0$.

224. Янги ўзгарувчини киритиш усулидан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

а) $(x^2+6x)^2-5(x^2+6x)=24$;
б) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-5)=3$;
в) $(x^2+3x-25)^2-2(x^2+3x-25)=-7$;
г) $(y+2)^4-(y+2)^2=12$.

225. Ўзаро тескари касрларнинг бирини t билан, иккинчисини $\frac{1}{t}$ билан белгилаб, тенгламани ечинг:

а) $\frac{x^2-1}{x+7}+\frac{x+7}{x^2-1}=2{,}5$; б) $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=2{,}5$.

226. Берилган тенгламани янги ўзгарувчига нисбатан квадрат тенгламага ўтказувчи ўрин алмаштиришни кўрсатинг ва ундан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

а) $(x^2+2x)(x^2+2x+2)=3$;
б) $(x^2-x-16)(x^2-x+2)=88$;
в) $(2x^2+7x-8)(2x^2+7x-3)-6=0$.

227. Биквадрат тенгламани ечинг ва унинг илдизлари йиғиндисини ҳамда кўпайтмасини ҳисобланг:

а) $x^4-15x^2+50=0$;
б) $x^4-x^2-12=0$;
в) $36y^4-13y^2+1=0$;
г) $16y^4+15y^2-1=0$.

228. а) $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ сони $x^4-6x^2+2=0$ биквадрат тенгламанинг илдизи эканини исботланг;

б) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ сони $x^4-3x^2+1=0$ биквадрат тенгламанинг илдизи эканини исботланг.

229. c нинг қандай қийматларида тенглама илдизга эга бўлмайди:

а) $x^4-12x^2+c=0$; б) $x^4+cx^2+100=0$?

230. k нинг қандай қийматларида $x^4-13x^2+k=0$ тенглама: а) тўртта илдизга; б) иккита илдизга эга бўлади?

231. Учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^4-20x^2+64; в) x^4-5x^2-36; д) $9x^4-10x^2+1$;
б) x^4-17x^2+16; г) x^4-3x^2-4; е) $4x^4-17x^2+4$.

232. Тенглама илдизга эга ёки эга эмаслигини, агар илдизга эга бўлса, унинг илдизи нечталигини график ёрдамида аниқланг:

а) $\frac{15}{x}=-x$; б) $x^2=\frac{-6}{x}$; в) $x^3=(x-4)^2$; г) $x^2=\frac{25}{x}$.

233. $x^3=x$ тенгламани икки усул билан: график ва аналитик усуллар билан ечинг.

234. Тенгламани график усулда ечинг:

а) $x^2+1=\frac{8}{x}$; в) $\frac{6}{x}=6{,}5-0{,}5x^2$;

б) $\frac{6}{x}=x^2+2$; г) $\frac{5}{x}=0{,}5x^3$.

235. $y=x^2$ функциянинг графигидан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

а) $x^2-3x+4=0$; б) $2x^2+4x+1=0$.

5-параграфга доир

236. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

а) $\begin{cases} y+x+x^2=0, \\ x-y=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=8, \\ (x+1)^2+y^2=81; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=2x^2-14; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=9, \\ y=x^2-4x+4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=-x^2+4, \\ y=|x|. \end{cases}$

237. Тенгламаларнинг графикларини схематик ифодалаб, тенгламалар системаси ечимга эга ёки эга эмаслигини ва ечими нечталигини аниқланг:

а) $\begin{cases} x^2-y+11=0; \\ y+x^2=4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=|x|, \\ \frac{1}{2}x^3-y=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+3)^2+(y+4)^2=1, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=4. \end{cases}$

238. Тенгламалар системасининг ечими нечта бўлиши мумкин:

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ y=-x^2+4? \end{cases}$$

239. r нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ x+y=6 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди?

240. c нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x+y=c \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимга эга бўлади?

241. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x+3y=-1, \\ x^2+2xy+y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2-3y^2-5x-2y=26, \\ x-y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ xy-y^2+3x=-1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4x^2-9y^2+x-40y=19, \\ 2x-3y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y-11=0, \\ 2x+5y-y^2-6=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x^2+y^2+8x+13y=5, \\ x-y+2=0. \end{cases}$

242. Тенгламалар системасининг ҳамма ечимини топинг:

а) $\begin{cases} x-y=4, \\ (x-1)(y+1)=2xy+3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ (x+1)(y+4)=2xy-1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-x=1, \\ (2y+1)(x-1)=xy+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=1, \\ (x-1)(y+5)=y^2-12. \end{cases}$

243. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=40, \\ xy=-12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=52, \\ xy=24. \end{cases}$

244. Тенгламалар системасиин ечинг:

а) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+xy+y=10, \\ xy-2x-2y=2. \end{cases}$

245. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ (x-7y)(x+7y)=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-3)(y-5)=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-y^2=50, \\ x(y+1)=0. \end{cases}$

246. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=14, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{20}, \\ x+2y=14; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=2, \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6} \end{cases}$

247. Тенгламалар системаси ечимга эгами:

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2+x+2y=8, \\ 2x-5y=-1, \\ 3y-x=2? \end{cases}$$

248. Қуйидаги тенгламаларнинг графиклари умумий нуқтага эгами:

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \quad x^2+xy-2y^2-x+y=5 \text{ ва } x+y=7?$$

249. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x+y)^2-2(x+y)=15, \\ x+xy+y=11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^2+xy=72, \\ x+y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$

250. x^2+bx+4 ва ax^2+x-3 квадрат учҳадларни купайтириб, стандарт шаклдаги $ax^4-9x^3+cx-12$ кўпҳад ҳосил қилинди. a, b ва c коэффициентларни топинг.

251. x^2-3x+q ва $3x^2-2x+c$ квадрат учҳадларни кўпайтириб, стандарт шаклдаги $3x^4-11x^3+nx^2-24$ кўпҳад ҳосил қилинди. n, c ва q коэффициентларни топинг.

252. Иккита мусбат соннинг йиғиндиси уларнинг айирмасидан 5 марта катта. Агар шу сонларнинг квадратлари айирмаси 180 га тенг бўлса, бу сонларни топинг.

253. Икки соннинг кўпайтмаси уларнинг йиғиндисидан 15 марта катта. Агар биринчи сонга иккинчи соннинг икки баравари қўшилса, 100 чиқади. Шу сонларни топинг.

254. Икки сон квадратларининг айирмаси 100 га тенг. Агар биринчи соннинг уч бараваридан иккинчи соннинг икки баравари айирилса, 30 чиқади. Шу сонларни топинг.

255. Шундай икки хонали сонни топингки, у ўзининг рақамлари йиғиндисидан 4 марта катта ва рақамлари кўпайтмасидан 2 марта катта бўлсин.

256. Агар оддий касрнинг суратига 2 сони, махражига эса 3 сони қўшилса, касрнинг қиймати ўзгармайди. Агар суратига 1 қўшилса, махражига эса 6 қўшилса, касрнинг қиймати $\frac{1}{6}$ қадар камаяди. Шу касрни топинг.

257. Агар оддий касрнинг суратига 1 қўшилса, махражига эса 3 қўшилса, $\frac{1}{2}$ га тенг каср ҳосил бўлади. Агар суратидан 1 айирилса, махражига эса 1 қўшилса, шундай каср ҳосил бўладики, уни дастлабки касрга кўпайтирганда $\frac{1}{5}$ ҳосил бўлади. Дастлабки касрни топинг.

258. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 13 м га тенг. Агар ҳар бир катет 3 м дан орттирилса, гипотенуза 4 м ортади. Шу учбурчакнинг юзи нимага тенг?

259. Иккита труба биргаликда ишлаганда бак 12 минутда тўлади. Агар аввал бакнинг ярмини бир труба билан, кейин унинг иккинчи ярмини иккинчи труба билан тўлатилса, у 25 минутда тўлади. Ҳар бир труба ёлғиз ишлаганда бакни неча минутда тўлдиради?

260. Икки труба баравар ишлаганда бассейнни 40 соатда тўлдиради. Агар бассейннинг учдан бир қисмини бир труба, қолган қисмини иккинчи труба тўлатса, бассейнни тўлдириш учун 78 соат вақт керак бўлар эди. Ҳар бир труба бассейнни қанча вақтда тўлдириши мумкин?

261. Турист *A* пунктдан чиққанидан бир соат ўтгач, *B* пунктдан унга қарши иккинчи турист жўнади. Учрашгунча иккинчи турист биринчисидан 2 км кам йўл юрди, лекин *A* пунктга биринчи турист *B* га келганидан 6 минут олдин етиб келди. Биринчи турист учрашувдан сўнг 2 соату 30 минут юрганини билган ҳолда ҳар бир туристнинг тезлигини ҳамда *A* ва *B* пунктлар орасидаги масофани топинг.

262. Автобус *A* пунктдан жўнаганидан ярим соат ўтгач, *B* пунктдан унга қарши мотоциклчи жўнади, у *A* пунктга автобус билан учрашганидан бир соат ўтгач ва автобус *B* пунктга етиб келганидан ярим соат олдин келди. *A* ва *B* пунктлар орасидаги масофа 90 км га тенг эканини билган ҳолда автобуснинг ва мотоциклчининг тезликларини топинг.

263. Иккита электропоезд ораларидаги масофа 112 км бўлган *A* ва *B* шаҳарлардан бир-бирига қараб бир вақтда жўнади ва 56 минутдан кейин учрашишди. *A* пунктдан чиққан поезд шу тезликда ҳаракатланиб, *B* пунктга иккинчи поезд *A* пунктга келишидан 15 минут илгари етиб келди. Ҳар бир поезднинг тезлигини топинг.

264. Ораларидаги масофа 80 км га тенг бўлган *A* ва *B* шаҳарлардан бир-бирига қараб бир вақтда икки автомобиль жўнади. Бир автомобиль учрашувдан 20 минут ўтгач *B* га етиб келади, иккинчиси эса учрашувдан кейин 45 минут ўтгач *A* га етиб келади. Ҳар бир автомобилнинг тезлигини топинг.

265. Ораларидаги масофа 270 км бўлган икки шаҳардан бир-бирига қараб бир вақтда икки поезд жўнади ва 3 соатдан сўнг учрашди. Бутун йўлга поездлардан бири иккинчисига қараганда 1 соату 21 минут ортиқ вақт сарфлайди. Ҳар бир поезднинг тезлигини топинг.

III БОБ

АРИФМЕТИК ВА ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯ

6-§. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯ

13. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР

Мусбат жуфт сонларни ўсиб бориши тартибида ёзиб чиқамиз. Бундай сонларнинг биринчиси 2 га, иккинчиси 4 га, учинчиси 6 га, тўртинчиси 8 га тенг ва ҳоказо. Ушбу **кетма-кетликни** ҳосил қиламиз:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots .$$

Бу кетма-кетликнинг бешинчи ўрнида 10 сони, ўнинчи ўрнида 20 сони, юзинчисида 200 сони туриши равшан. Умуман, истаган номер учун унга мос мусбат жуфт сонни кўрсатиш мумкин; у $2n$ га тенг.

Яна бир кетма-кетликни кўриб чиқамиз. Сурати 1 га тенг бўлган тўғри касрларни камайиб бориши тартибида ёзиб чиқамиз:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \ldots .$$

Истаган n номер учун унга мос касрни кўрсатишимиз мумкин; у $\frac{1}{n+1}$ га тенг. Масалан, олтинчи ўринда $\frac{1}{7}$ каср, ўттизинчи ўринда $\frac{1}{31}$ каср, мингинчи ўринда $\frac{1}{1001}$ каср туриши керак.

Кетма-кетликни ташкил этувчи сонлар мос равишда **кетма-кетликнинг** биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва ҳоказо **ҳадлари** дейилади. Кетма-кетликнинг ҳадлари одатда индексли ҳарфлар билан белгиланади, индекслар ҳаднинг тартиб номерини кўрсатади. Масалан, a_1, a_2, a_3, a_4 ва ҳоказо („a биринчи, a иккинчи, a учинчи, a тўртинчи“ ва ҳоказо ўқилади). Умуман, кетма-кетликнинг n номерли ҳади ёки бошқача айтганда, **кетма-кетликнинг n ҳади** a_n тарзида белгиланади. Кетма-кетликнинг ўзи эса бундай белгиланади: (a_n).

Шуни айтиб ўтиш керакки, кетма-кетликниг ҳадлари сони чекли бўлиши мумкин. Бундай ҳолда у **чекли кетма-кетлик** дейилади. Икки хонали сонлар кетма-кетлиги чекли кетма-кетликка мисол бўлади:

$$10;\ 11;\ 12;\ 13;\ ...;\ 98;\ 99.$$

Кетма-кетликни бериш учун кетма-кетликнинг истаган номердаги ҳадини топишга имкон берувчи усулни кўрсатиш керак.

Кўпинча кетма-кетлик унинг n-ҳадини n номернинг функцияси сифатида ифодаловчи формула ёрдамида берилади. Бундай формулани **кетма-кетликнинг n-ҳади формуласи** дейилади. Масалан, мусбат жуфт сонлар кетма-кетлигини $a_n = 2n$ формула билан, сурати 1 га тенг тўғри касрлар кетма-кетлигини $b_n = \frac{1}{n+1}$ формула билан бериш мумкин.

1-мисол. Кетма-кетлик $y_n = n^2 - 3n$ формула билан берилган бўлсин. Унинг дастлабки бешта ҳадини ҳисоблаймиз.

n ўрнига 1, 2, 3, 4, 5 натурал сонларни қўйиб

$$y_1 = -2, \quad y_2 = -2,\ y_3 = 0,\ y_4 = 4,\ y_5 = 10$$

ни ҳосил қиламиз.

2-мисол. Кетма-кетлик $x_n = (-1)^n \cdot 10$ формула билан берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг ҳамма тоқ номерли ҳадлари -10 га, жуфт номерли ҳадлари 10 га тенг:

$$x_1 = -10,\ x_2 = 10,\ x_3 = -10,\ x_4 = 10,\ ... .$$

3-мисол. $c_n = 5$ формула билан ҳамма ҳадлари 5 га тенг бўлган кетма-кетлик берилади:

$$c_1 = 5,\ c_2 = 5,\ c_3 = 5,\ c_4 = 5,\ ... .$$

Кетма-кетликни беришнинг яна бир усулини кўриб чиқамиз.

4-мисол. (a_n) кетма-кетликнинг биринчи ҳади 3 га тенг, кейинги ҳар бир ҳади эса аввалгисининг квадратига тенг бўлсин, яъни

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2.$$

$a_{n+1} = a_n^2$ формула ёрдамида кетма-кетликнинг маълум биринчи ҳадига кўра иккинчи ҳадини ҳисоблаш, кейин маълум иккинчи ҳадига кўра учинчисини топиш, маълум учинчи ҳади бўйича тўртинчисини топиш мумкин ва ҳоказо. Қуйидаги кетма-кетликни ҳосил қиламиз:

$$3;\ 9;\ 81;\ 6561;\ ... .$$

Кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, истаган ҳадини ундан олдинги (битта ёки бир нечта) ҳади билан ифодаловчи **формула рекуррент формула** дейилади (латинча recurro — қайтиш сўзидан олинган).

266. 3 га каррали бўлиб, ўсиш тартибида олинган натурал сонлар кетма-кетлигидан дастлабки бир нечта ҳадини ёзинг. Унинг биринчи, бешинчи, ўнинчи, юзинчи ва n- ҳадларини кўрсатинг.

267. (c_n)— ҳамма тоқ номерли ҳадлари — 1 га тенг, ҳамма жуфт номерли ҳадлари эса 0 га тенг бўлган кетма-кетлик. Шу кетма-кетликнинг дастлабки саккизта ҳадини ёзинг. c_{10}, c_{25}, c_{200}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1} ни топинг (k— ихтиёрий натурал сон).

268. (a_n) — натурал сонлар квадратларининг ўсиш тартибида олинган кетма-кетлиги бўлсин. Унинг дастлабки ўнта ҳадини ёзинг. a_{20}, a_{25}, a_{40}, a_n ни топинг.

269. c_1, c_2, c_3, ... кетма-кетликнинг:

а) c_{10}, c_{26}, c_k, c_{k+3}, c_{k-4}, c_{2k} дан кейин келган ҳадларини;

б) c_{50}, c_{99}, c_k, c_{k+7}, c_{k-1}, c_{2k} дан олдинги ҳадларини айтинг. Кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади учун ҳам ундан кейинги, ундан олдинги ҳадини кўрсатиш мумкинми?

270. (b_n) кетма-кетликнинг: а) b_{20} ва b_{25}; б) b_k ва b_{k+5}; в) b_{k-3} ва b_{k+4} орасидаги ҳадларини ёзиб чиқинг.

271. n-ҳади формуласи билан берилган кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини топинг.

а) $x_n = 3n - 7$; в) $x_n = n^2 - 6n + 8$; д) $x_n = 2^{n-1}$;

б) $x_n = n^2 + 1$; г) $x_n = \frac{n}{2n+1}$; е) $x_n = 0{,}5 \cdot 4^n$.

272. Қуйидаги формула билан берилган кетма-кетликнинг дастлабки олтита ҳадини топинг:

а) $y_n = 2 - n$; в) $y_n = \frac{n}{n+1}$;

б) $y_n = 9 - n^2$; г) $y_n = (-1)^{n+1}7$.

273. (b_n) кетма-кетлик $b_n = 3n + 2$ формула билан берилган. Топинг:

а) b_5; в) b_{2k}; д) $b_{20} + b_{30}$;

б) b_{10}; г) b_{2k+1}; е) $b_{10} - b_6$.

274. (a_n) кетма-кетлик $a_n = n^2 - 4$ формула билан берилган. Топинг:

а) a_5; б) $a_2 \cdot a_{10}$; в) $a_4 - 2$.

275. $x_n = 7 - 2n$ формула билан берилган (x_n) кетма-кетликнинг: а) -13; б) -43, в) -61 га тенг ҳадининг номерини топинг.

276. (a_n) кетма-кетлик $a_n = 4n - 1$ формула билан берилган. Шу кетма-кетликнинг: а) 91; б) 399 га тенг ҳадининг номерини топинг.

277. Қуйида берилганларга кўра (b_n) кетма-кетликнинг иккинчи, учинчи, тўртинчи ва бешинчи ҳадларини ҳисоблаб топинг:

а) биринчи ҳади 10 га тенг, кейинги ҳар бир ҳади аввалгисидан 5 та ортиқ, яъни $b_1=10$ ва $b_{n+1}=b_{n+5}$;

б) биринчи ҳади 40 га тенг, кейинги ҳар бир ҳади эса аввалгисини 2 га бўлинганига тенг, яъни $b_1=40$ ва $b_{n+1}=\frac{b_n}{2}$.

278. (a_n) кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини ёзиб чиқинг, бунда:

а) $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+1$; г) $a_1=0$, $a_{n+1}=2a_n+4$;
б) $a_1=1000$, $a_{n+1}=0{,}1a_n$; д) $a_1=6$, $a_{n+1}=-a_n$;
в) $a_1=\frac{16}{27}$, $a_{n+1}=-1{,}5a_n$; е) $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$.

279. (y_n) кетма-кетликнинг дастлабки олтита ҳадини ёзиб чиқинг, бунда:

а) $y_1=10$; $y_{n+1}=y_n+10$; в) $y_1=2$, $y_{n+1}=y_n+2$;
б) $y_1=10$, $y_{n+1}=10y_n$; г) $y_1=2$, $y_{n+1}=2y_n$.

Кетма-кетликни n- ҳадининг формуласи билан ифодаланг.

Такрорлаш учун машқлар

280. Агар

а) $P=40$, $S=84$; б) $P=40$, $S=105$.

бўлса, периметри P см га тенг, юзи S см^2 га тенг тўғри тўртбурчак бўладими?

281. Тенгламани ечинг:

а) $4x^4+4x^2-15=0$; б) $2x^4-x^2-36=0$.

282. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{1}{2}a^3b^{-6}\cdot 3a^{-2}b^5$; в) $4a^{-6}b^{10}\cdot(2a^{-2}b^4)^{-2}$;

б) $3a^{-3}b\cdot(4ab)^{-1}$; г) $\frac{10ab^{-5}}{3\frac{1}{3}a^{-2}b^3}$.

283. Ифодани 3 асосли даража кўринишида ёзинг ва унинг қийматини топинг:

а) $81\cdot3^{-6}$; б) $\frac{(-3^{-3})^3}{-9^{-2}}$; в) $9^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}$; г) $(-3^{-3})^2\cdot27^3$.

14. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯНИНГ ТАЪРИФИ. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯНИНГ n- ҲАДИ ФОРМУЛАСИ

4 га бўлганда қолдиқда 1 чиқадиган натурал сонлар кетма-кетлигини кўриб чиқамиз:

$$1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots$$

Бу кетма-кетликнинг иккинчисидан бошлаб ҳар бир ҳади аввалгисига 4 сонини қўшиш натижасида ҳосил бўлади. Бу кетма-кетлик **арифметик прогрессияга** мисол бўлади.

Таъриф. **Арифметик прогрессия деб шундай кетма-кетликка айтиладики, унда иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади аввалги ҳадига айни бир хил сонни қўшиш билан ҳосил қилинади.**

Бошқача айтганда, истаган натурал n учун

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(бунда d — бирор сон) шарт бажарилса, кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлади.

Арифметик прогрессиянинг таърифидан, унинг иккинчи ҳадидан бошлаб истаган ҳади билан ундан олдинги ҳади орасидаги айирма d га тенглиги келиб чиқади, яъни истаган натурал n да

$$a_{n+1} - a_n = d$$

тенглик тўғри бўлади. d сони **арифметик прогрессия айирмаси** дейилади.

Арифметик прогрессияни бериш учун унинг биринчи ҳадини ва айирмасини кўрсатиш етарли.

Мисоллар келтирамиз.

Агар $a_1 = 1$ ва $d = 1$ бўлса, у ҳолда ҳадлари кетма-кет натурал сонлар бўлган

$$1; 2; 3; 4; 5; \dots$$

арифметик прогрессияни ҳосил қиламиз.

Агар $a_1 = 1$ ва $d = 2$ бўлса, у ҳолда мусбат тоқ сонлар кетма-кетлигидан иборат

$$1; 3; 5; 7; 9; \dots$$

арифметик прогрессияни ҳосил қиламиз.

Агар $a_1 = -2$ ва $d = -2$ бўлса, у ҳолда берилган

$$-2; -4; -6; -8; -10; \dots$$

арифметик прогрессия манфий жуфт сонлар кетма-кетлигидир.

Агар $a_1 = 7$ ва $d = 0$ бўлса, у ҳолда ҳамма ҳадлари ўзаро тенг бўлган

$$7; 7; 7; 7; \dots$$

арифметик прогрессияга эга бўламиз.

Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини билган ҳолда унинг иккинчи, учинчи, тўртинчи ва ҳоказо ҳадларини ҳисоблаб, истаган ҳадини топиш мумкин. Бироқ прогрессиянинг жуда катта номерли ҳадини топиш учун бу усул ноқулай. Ҳисоблаш ишини камроқ бажаришни талаб қилувчи усулни топишга ҳаракат қиламиз.

Арифметик прогрессиянинг таърифидан:

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d.$$

Худди шундай $a_6=a_1+5d$, $a_7=a_1+6d$ ни топамиз ва умуман, a_n ни топиш учун a_1 га $(n-1)\ d$ ни қўшиш керак, яъни

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

Биз **арифметик прогрессиянинг n-ҳади формуласини** ҳосил қилдик.

Бу формуладан фойдаланиб ечиладиган масалаларга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. (c_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлиб, унда $c_1=2,3$ ва $d=0,45$. Шу прогрессиянинг ўнинчи ва юзинчи ҳадларини топамиз:

$$c_{10}=2,3+0,45\cdot 9=2,3+4,05=6,35;$$
$$c_{100}=2,3+0,45\cdot 99=2,3+44,55=46,85.$$

2-мисол. 71 сони (x_n) арифметик прогрессиянинг, яъни

$$-10;\ -5,5;\ -1;\ 3,5;\ \ldots$$

нинг ҳади ёки ҳади эмаслигини аниқлаймиз.

Бу арифметик прогрессияда $x_1=-10$ ва $d=x_2-x_1=-5,5-(-10)=4,5$. Прогрессиянинг n-ҳади формуласини ёзамиз:

$$x_n=-10+4,5(n-1), \text{ яъни}$$
$$x_n=4,5n-14,5.$$

Агар шундай n натурал сон мавжуд бўлсаки, унда $4,5n-14,5$ ифоданинг қиймати 71 га тенг бўлса, 71 сони (x_n) арифметик прогрессиянинг ҳади бўлади.

$$4,5n-14,5=71$$

тенгламани ечамиз:

$$4,5n=85,5,$$
$$n=19.$$

Демак, 71 сони берилган арифметик прогрессиянинг ҳади экан.

Арифметик прогрессия n-ҳадининг $a_n = a_1 + d(n-1)$ формуласини бошқача ёзиш мумкин:

$$a_n = dn - (a_1 - d).$$

Бундан, ***истаган арифметик прогрессия***

$$a_n = kn + b$$

(бунда k ва b — бирор сонлар) кўринишидаги формула билан ифодаланиши мумкин экани равшан.

Бунинг тескариси ҳам тўғри:

$$a_n = kn + b$$

(бунда k ва b — бирор сонлар) формула билан ифодаланган (a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессиядир.

Ҳақиқатан ҳам, (x_n) кетма-кетликнинг $(n+1)$-ва n-ҳадлари айирмасини топамиз:

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k.$$

Демак, истаган n да $a_{n+1} = a_n + k$ тенглик тўғри ва таърифга кўра (a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессиядир. Бу прогрессиянинг айирмаси k га тенглигини эслатиб ўтамиз.

284. (a_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки бешта ҳадини ёзиб чиқинг, бунда:

а) $a_1 = 10$, $d = 4$; б) $a_1 = 1,7$, $d = -0,2$; в) $a_1 = -3,5$, $d = 0,6$.

285. (c_n) кетма-кетлик—арифметик прогрессия. Қуйидагиларни топинг:

а) агар $c_1 = 240$, $c_2 = 190$ бўлса, прогрессия айирмасини ва учинчи ҳадини;

б) агар $c_2 = -19$, $c_3 = -11,5$ бўлса, прогрессия айирмасини ва тўртинчи ҳадини;

в) агар $c_4 = 23$, $c_5 = 26,5$ бўлса, прогрессия айирмасини ва биринчи ҳадини топинг.

286. (b_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия бўлиб, унинг биринчи ҳади b_1 га, айирмаси d га тенг. Қуйидагиларни b_1 ва d орқали ифодаланг:

а) b_7; б) b_{26}; в) b_{231}; г) b_k; д) b_{k+5}; е) b_{2k}.

287. (c_n) кетма-кетлик—арифметик прогрессия. Агар:

а) $c_1 = 20$ ва $d = 3$ бўлса, c_5 ни топинг;

б) $c_1 = 5,8$ ва $d = -1,5$ бўлса, c_{21} ни топинг;

в) $b_1 = 25,6$ ва $d = -0,4$ бўлса, $b_{41} + b_{61}$ ни топинг;

г) $b_1 = -1\frac{5}{6}$ ва $d = \frac{1}{3}$ бўлса, $b_{46} - b_{16}$ ни топинг.

288. (a_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия. Агар:

а) $a_1 = -3$ ва $d = 0,7$ бўлса, a_{11} ни топинг;

б) $a_1 = 18$ ва $d = -0,6$ бўлса, a_{26} ни топинг.

289. Агар:

а) $a_1=3$, $d=5$; в) $a_1=7$, $d=1$;

б) $a_1=-9{,}5$, $d=1{,}5$; г) $a_1=8{,}2$, $d=-1$

бўлса, (a_n) арифметик прогрессиянинг n-ҳади формуласини ёзинг.

290. Арифметик прогрессиянинг ўнинчи ва n-ҳадини топинг:

а) $\frac{1}{3}$; -1; ...; б) 2,3; 1; ... .

291. Арифметик прогрессиянинг 15; 37 ва n-ҳадини топинг:

а) 3; 7; ...; б) -5; -1; ... .

292. Жисм ўз ҳаракатининг биринчи секундида 7 м ўтди, кейинги ҳар бир секундда эса аввалгисидан 3 м ортиқ ўтди. Жисм саккизинчи секундда қанча масофани ўтган?

293. Поезд станциядан узоқлашаётиб, ўз тезлигини минутига 50 м дан орттириб борди. Йигирманчи минут охирида поезднинг тезлиги қандай бўлган?

294. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг, бунда:

а) $a\ =131$, $d=12$; б) $a_{56}=-250$, $d=-5$.

295. Агар

а) $b_1=2$, $b_{10}=92$; б) $b_1=-7$, $b_{16}=2$

бўлса, арифметик прогрессиянинг айирмасини топинг.

296. (c_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия. Агар:

а) $c_{36}=26$ ва $d=0{,}7$ бўлса, c_1 ни топинг;

б) $c_1=-10$ ва $c_{15}=1{,}2$ бўлса, d ни топинг.

297. 7 билан 35 сонлари орасига шундай олтита сонни қўйингки, улар берилган сонлар билан биргаликда арифметик прогрессия ташкил этсин.

298. 1 ва 16 сонлари орасига саккизта шундай сонни қўйингки, улар берилган сонлар билан биргаликда арифметик прогрессия ташкил этсин.

299. (c_n) арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг, бунда:

а) $c_5=27$, $c_{27}=60$; б) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$.

300. (x_n) арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг, бунда

а) $x_{47}=74$, $x_{74}=47$; б) $x_8=1$, $x_{25}=9{,}5$.

301. (x_n) арифметик прогрессияда биринчи ҳад 1,7 га тенг, айирма эса 0,3 га тенг. а) 32; б) 46,7 га тенг ҳадининг номерини топинг.

302. 3; 10; ...арифметик прогрессияда; а) 143; б) 551; в) 207; г) 269 сони қатнашадими?

303. а) 0; б) —28 сони $a_1=32$ ва $d=-1,5$ бўлган арифметик прогрессиянинг ҳади бўладими?

304. (x_n) арифметик прогрессияда биринчи ҳад 8,7 га тенг, айирма эса —0,3 га тенг. Қуйидаги шарт прогрессиянинг қайси ҳадлари учун бажарилади:

а) $x_n \geqslant 0$; б) $x_n < 0$; в) $x_n > 5$; г) $x_n < -10$?

305. а) 5,3; 5,12; ... арифметик прогрессиянинг биринчи манфий ҳадини топинг;

б) —10,4; —9,65; ... арифметик прогрессиянинг биринчи мусбат ҳадини топинг.

306. —20,3; —18,7; ... арифметик прогрессиянинг манфий ҳадларининг номерларини топинг. Бу прогрессиянинг биринчи мусбат ҳади нимага тенг?

307. Агар (a_n) кетма-кетлик қуйидаги формула билан берилган бўлса, у арифметик прогрессия бўладими:

а) $a_n = 2n - 5$; в) $a_n = n + 4$; д) $a_n = -0,5n + 1$;

б) $a_n = n^2 - 5$; г) $a_n = \frac{1}{n+4}$; е) $a_n = 6n$?

Агар кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлса, унинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг.

308. Учбурчак, қавариқ тўртбурчак, қавариқ бешбурчак ва ҳоказолар ички бурчакларининг йиғиндиси кетма-кетлиги арифметик прогрессия бўлишини исботланг. Унинг айирмаси нимага тенг?

Такрорлаш учун машқлар

309. Катетларининг йиғиндиси k (дм билан) га тенг, юзи S (дм^2 билан) га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак мавжудми? Бунда

а) $k=60$, $S=400$; б) $k=60$, $S=500$.

310. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2-2y^2=14, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3xy-2y^2=30, \\ 3x-2y=10. \end{cases}$

311. Тенгламани ечинг:

а) $x^3+4x^2-32x=0$; б) $x^3-10x^2+4x-40=0$.

312. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $125^{-1}\cdot 25^2$; в) $\frac{16^{-3}\cdot 4^5}{8}$;

б) $0,01\cdot(10^3)^2\cdot(0,1)^{-2}$; г) $9^4\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-3}\cdot 81^{-4}$.

15. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ n ТА ҲАДИНИНГ ЙИҒИНДИСИ ФОРМУЛАСИ

Дастлабки юзта натурал сонлар йиғиндисини топиш талаб қилинган бўлсин. Бу масалани сонларни бевосита қўшмасдан қандай ечиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Изланаётган йиғиндини S билан белгилаймиз ва уни икки марта ёзамиз, биринчи ҳолда қўшилувчиларни ўсиши тартибида жойлаштириб, иккинчи ҳолда камайиши тартибида жойлаштириб ёзамиз:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Бир-бирининг тагида турган ҳар бир сонлар жуфти йиғиндида 101 ни беради. Бундай жуфтлар сони 100 га тенг. Шунинг учун тенгликни ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2S = 101 \cdot 100,$$
$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Шундай қилиб,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = 5050.$$

Шунга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида истаган арифметик прогрессиянинг дастлабки ҳадлари йиғиндисини топиш мумкин.

(a_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини S_n билан белгилаймиз ва бу йиғиндини икки марта ёзамиз, биринчи ҳолда қўшилувчиларни ўсиб бориши тартибида жойлаштириб, иккинчи ҳолда камайиб бориши тартибида жойлаштириб ёзамиз:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n, \quad (1)$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1. \quad (2)$$

Прогрессиянинг бир-бирининг остида жойлашган ҳадларининг ҳар бир жуфтлари йиғиндиси $a_1 + a_n$ га тенг. Ҳақиқатан ҳам:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$
$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

ва ҳаказо. Бундай жуфтлар сони n га тенг. Шунинг учун (1) ва (2) тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

ни ҳосил қиламиз.

Охирги тенгликнинг иккала қисмини 2 га бўлиб, **арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласини** ҳосил қиламиз:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad \text{(I)}$$

Мисоллар келтирамиз.

1-мисол. 1; 3,5; ... арифметик прогрессиянинг дастлабки йигирмата ҳадининг йиғиндисини топамиз.

Берилган арифметик прогрессияда $a_1 = 1$, $d = 3{,}5 - 1 = 2{,}5$. n-ҳад формуласидан прогрессиянинг йигирманчи ҳадини топамиз:

$$a_{20} = 1 + 2{,}5 \cdot 19 = 48{,}5.$$

Энди дастлабки йигирмата ҳаднинг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$S_{20} = \frac{(1 + 48{,}5) \cdot 20}{2} = 49{,}5 \cdot 10 = 495.$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, агар арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади ва айирмаси берилган бўлса, бошқа кўринишда ифодаланган йиғинди формуласидан фойдаланган қулай. (I) формулада a_n ўрнига $a_1 + d(n-1)$ ифодани қўямиз:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n-1))n}{2},$$

яъни

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad \text{(II)}$$

Кўриб ўтилган масалани ечиш учун (II) формуладан фойдаланилса, ҳисоблашлар бундай кўринишда бўлади:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 19}{2} \cdot 20 = (2 + 47{,}5) \cdot 10 = 495.$$

2-мисол. $a_n = 5n - 4$ формула билан берилган (a_n) кетма-кетликнинг дастлабки ўттизта ҳадининг йиғиндисини топамиз.

(a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлади, чунки у $a_n = kn + b$ кўринишдаги формула билан берилган, бунда $k = 5$ ва $b = -4$.

Бу арифметик прогрессиянинг биринчи ва ўттизинчи ҳадини топамиз:

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1, \quad a_{30} = 5 \cdot 30 - 4 = 146.$$

Энди (1) формула бўйича S_{30} ни ҳисоблаймиз:

$$S_{30} = \frac{(1+146)\cdot 30}{2} = 147\cdot 15 = 2205.$$

3-мисол. Қўшилувчилари 1 дан n гача натурал сонлар бўлган $1+2+3+\ldots+n$ йиғиндини топамиз.

1; 2; 3; ... арифметик прогрессияга $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ формулани қўлланиб,

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{(1+n)n}{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

4-мисол. 250 дан катта бўлмаган олтига каррали ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топамиз.

Олтига каррали натурал сонлар $a_n = 6n$ формула билан ифодалаш мумкин бўлган арифметик прогрессияни ташкил этади. Бу прогрессиянинг нечта ҳади 250 дан катта эмаслигини аниқлаш учун $6n \leqslant 250$ тенгсизликни ечамиз. Бундан $n \leqslant 41\frac{2}{3}$ ни ҳосил қиламиз. Демак, прогрессиянинг йиғиндисини топиш керак бўлган ҳадлари сони 41 га тенг экан.

Ушбуга эга бўламиз: $a_1=6$, $a_{41}=6\cdot 41=246$,

$$S_{41} = \frac{(6+246)\cdot 41}{2} = 5166.$$

313. Арифметик прогрессиянинг дастлабки икки юзта ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $a_1=10$, $a_{200}=350$; б) $a_1=6{,}5$, $a_{200}=7{,}5$.

314. Арифметик прогрессиянинг дастлабки саккизта ҳадининг йиғиндисини топинг:

а) -23; -20; ...; в) $-2{,}6$; 0; ...;
б) 9; 5; ...; г) 14,2; 9,6; ... .

315. (b_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки тўққизта ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $b_1=-17$, $d=6$; б) $b_1=6{,}4$, $d=0{,}8$.

316. (x_n) кетма-кетликнинг дастлабки элликта, юзта, n та ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $x_n=4n+2$; б) $x_n=2n+3$.

317. Арифметик прогрессия $a_n=3n+2$ формула билан берилган. Унинг дастлабки қирқта ҳадининг йиғиндисини топинг.

318. а) Қўшилувчилари 2 дан $2n$ гача бўлган ҳамма жуфт натурал сонлардан иборат $2+4+6+\ldots+2n$ йиғиндини топинг.

б) Қўшилувчилари 1 дан $2n-1$ гача бўлган ҳамма тоқ сонлардан иборат $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ йиғиндини топинг.

319. а) 150 дан катта бўлмаган ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

б) 20 дан 120 гача (120 ҳам киради) ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

в) ҳамма икки хонали сонларнинг йиғиндисини топинг.

320. а) 25 дан 150 гача (150 ҳам киради) ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

б) Ҳамма уч хонали сонларнинг йиғиндисини топинг.

321. а) 149 дан катта бўлмаган ҳамма натурал тоқ сонлар йиғиндисини топинг.

б) 5 га каррали бўлиб, 225 дан катта бўлмаган ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

в) 4 га каррали ва 300 дан катта бўлмаган ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

г) 100 дан 500 гача (500 ҳам киради) бўлган ҳамма жуфт сонлар йиғиндисини топинг.

д) 6 га каррали ҳамма икки хонали сонлар йиғиндисини топинг.

322. а) 200 дан катта бўлмаган ҳамма жуфт натурал сонлар йиғиндисини топинг.

б) 3 га каррали ва 333 дан катта бўлмаган ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

в) 7 га каррали ва 130 дан катта бўлмаган ҳамма натурал сонлар йиғиндисини топинг.

г) 101 дан 199 гача (199 ҳам киради) ҳамма тоқ сонлар йиғиндисини топинг.

д) 4 га каррали ҳамма икки хонали сонлар йиғиндисини топинг.

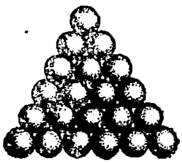
323. Агар арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади 7 га ва айирмаси 15 га тенг бўлса, унинг ўнинчидан йигирманчигача (йигирманчиси ҳам киради) ҳадлари йиғиндисини топинг.

324. Агар арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади 2 га, айирмаси 8 га тенг бўлса, унинг ўн биринчидан йигирма бешинчигача (йигирма бешинчиси ҳам киради) ҳадларининг йиғиндисини топинг.

325. Агар $c_7 = 18,5$ ва $c_{17} = -26,5$ бўлса, (c_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки йигирмата ҳадининг йиғиндисини топинг.

326. Агар $b_1 = 4,2$ ва $b_{10} = 15,9$ бўлса, (b_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки ўн бешта ҳадининг йиғиндисини топинг.

327. Жисм эркин тушаётганда биринчи секундда 4,9 м ўтади, кейинги ҳар бир секундда ундан 9,8 м ортиқ ўтади. Агар эркин тушаётган жисм шахтанинг тубига 5 с дан кейин тушган бўлса, шахтанинг чуқурлигини топинг.



22- расм

328. Эркин тушаётган жисм:

а) тушиш бошланганидан еттинчи секундда;

б) тушиш бошланганидан етти секунд давомида қандай масофани ўтган?

329. Шарлар учбурчак шаклида шундай жойлашганки, биринчи қаторда 1 та шар, иккинчи қаторда —2 та, учинчисида — 3 та ва ҳоказо шар бор (22- расм). Агар ҳамма шарлар 120 та бўлса, улар нечта қаторга жойлашган? 30 та қаторли учбурчак ясаш учун шу шарлардан нечта керак бўлади?

Такрорлаш учун машқлар

330. Арифметик прогрессияда $a_7=8$ ва $a_{11}=12{,}8$. a_1 ва d ни топинг.

331. а) —1,3; б) —3,3 сони 20,7; 18,3; ... арифметик прогрессиянинг ҳади бўладими?

332. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 9x^2+9y^2=13, \\ 3xy=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ y^2-4x^2=9. \end{cases}$

333. $96\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ифоданинг қийматини $n=5$, $n=7$, $n=1$ бўлганда топинг.

334. Ифодани 2 асосли даража шаклида ёзинг:

а) $16\cdot 2^n$; б) $8\cdot 2^{n-1}$; в) $8^5\cdot 4^n$; г) $16^3\cdot 4^{n-8}$.

7-§. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯ

16. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯНИНГ ТАЪРИФИ. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯНИНГ n-ҲАДИ ФОРМУЛАСИ

Ҳадлари 2 сонининг натурал кўрсаткичли даражаларидан иборат бўлган

$$2;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ 2^5;\ 2^6;\ \ldots$$

кетма-кетликни кўриб чиқамиз. Бу кетма-кетликнинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади аввалги ҳадини 2 га кўпайтириш билан ҳосил қилинади. Бу кетма-кетлик **геометрик прогрессияга** мисол бўлади.

Таъриф. **Геометрик прогрессия деб, нолдан фарқли сонларнинг шундай кетма-кетлигига айтиладики, унда иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади аввалги ҳадни айни бир сонга кўпайтирилганига тенг.**

Бошқача айтганда, агар истаган натурал n учун

$$b_n \neq 0 \text{ ва } b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(бунда q — бирор сон) шарт бажарилса, (b_n) кетма-кетлик **геометрик прогрессия** бўлади. Масалан, 2 сонининг натурал даражалар кетма-кетлигини (b_n) билан белгилаймиз. Бу ҳолда истаган натурал n учун $b_{n+1} = b_n \cdot 2$ тенглик тўғри, бунда $q = 2$.

Геометрик прогрессиянинг таърифидан унинг иккинчи ҳадидан бошлаб истаган ҳадининг аввалги ҳадига нисбати q га тенг экани келиб чиқади, яъни истаган натурал n да

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

тенглик тўғри.

q **сони геометрик прогрессиянинг махражи** дейилади. Геометрик прогрессиянинг махражи нолдан фарқли бўлиши равшан.

Геометрик прогрессияни бериш учун унинг биринчи ҳадини ва махражини кўрсатиш етарли.

Мисоллар келтирамиз.

Агар $b_1 = 1$ ва $q = 0{,}1$ бўлса, у ҳолда

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots$$

геометрик прогрессияни ҳосил қиламиз.

$b_1 = -2$ ва $q = 3$ шартлар билан

$$-2;\ -6;\ -18;\ -54;\ -162;\ \ldots$$

геометрик прогрессия берилади.

Агар $b_1 = 4$ ва $q = -3$ бўлса, биз

$$4;\ -12;\ 36;\ -108;\ 324;\ \ldots$$

прогрессияни ҳосил қиламиз.

Агар $b_1 = 8$ ва $q = 1$ бўлса, у ҳолда

$$8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ \ldots$$

геометрик прогрессияни ҳосил қиламиз.

Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва махражини билган ҳолда унинг кетма-кет иккинчи, учинчи ва умуман истаган ҳадини топиш мумкин:

$$\begin{aligned}
b_2 &= b_1 q, \\
b_3 &= b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2, \\
b_4 &= b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3, \\
b_5 &= b_4 q = (b_1 q^3) q = b_1 q^4.
\end{aligned}$$

Худди шундай $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1 q^6$ ва ҳоказони топамиз. Умуман, b_n ни топиш учун биз b_1 ни q^{n-1} га кўпайтиришимиз керак, яъни

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Биз геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласини ҳосил қилдик.

Бу формуладан фойдаланиб масалалар ечишга мисоллар келтирамиз.

1- мисол. Геометрик прогрессияда $b_1 = 0{,}8$ ва $q = \frac{1}{2}$. b_{10} ни топамиз.

Геометрик прогрессиянинг n- ҳади формуласи бўйича

$$b_{10} = 0{,}8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{2^3}{10} \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^6 \cdot 10} = \frac{1}{640}.$$

2- мисол. Агар $b_1 = 162$ ва $b_3 = 18$ бўлса, (b_n) геометрик прогрессиянинг саккизинчи ҳадини топамиз.

Геометрик прогрессиянинг биринчи ва учинчи ҳадларини билган ҳолда унинг махражини топиш мумкин. $b_3 = b_1q^2$ бўлгани учун

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}.$$

$$q^2 = \frac{1}{9}$$

тенгламани ечиб,

$$q = \frac{1}{3} \text{ ёки } q = -\frac{1}{3}$$

ни топамиз.

Шундай қилиб, масаланинг шартини қаноатлантирувчи иккита прогрессия мавжуд.

Агар $q = \frac{1}{3}$ бўлса, у ҳолда

$$b_8 = b_1 \cdot q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}.$$

Агар $q = -\frac{1}{3}$ бўлса, у ҳолда

$$b_8 = b_1 \cdot q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}.$$

Масала иккита ечимга эга:

$$b_8 = \frac{2}{27} \text{ ёки } b_8 = -\frac{2}{27}.$$

3- мисол. Сийракловчи насос поршенининг ҳар бир ҳаракатидан сўнг идишдаги ҳавонинг 20% и чиқарилади. Агар идишдаги дастлабки босим 750 мм сим. уст. га тенг бўлса, идиш ичидаги ҳавонинг поршеннинг олтита ҳаракатидан кейинги босимини топамиз.

Поршеннинг ҳар бир ҳаракатидан сўнг идишдаги ҳавонинг 20% и чиқиб кетгани учун 80% ҳаво қолади. Поршеннинг навбатдаги ҳаракатидан сўнг идишдаги ҳавонинг босимини билиш учун поршеннинг аввалги ҳаракатидан кейинги босимини 0,8 га кўпайтириш керак.

Биринчи ҳади 750 га, махражи эса 0,8 га тенг бўлган геометрик прогрессияга эга бўламиз. Поршеннинг олтита ҳаракатидан сўнг идишдаги ҳаво босимини (мм. сим. устуни билан) ифодаловчи сон бу прогрессиянинг еттинчи ҳади бўлади. У сон

$$750\cdot(0{,}8)^6$$

га тенг.

Ҳисоблашлар бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$750\cdot(0{,}8)^6\approx 750\cdot 0{,}26\approx 200 \text{ (мм. сим уст.)}$$

335. (b_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки бешта ҳадини топинг, бунда:

а) $b_1=6,\ q=2$; в) $b_1=-24,\ q=-1{,}5$;

б) $b_1=-16,\ q=\frac{1}{2}$; г) $b_1=0{,}4,\quad q=\sqrt{2}$.

336. (c_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия.

а) агар $c_1=8$; $c_2=-16$ бўлса, унинг махражини ва учинчи ҳадини;

б) агар $c_2=2\sqrt{2},\ c_3=4$ бўлса, унинг махражини ва тўртинчи ҳадини;

в) агар $c_3=3\sqrt{3},\ c_4=27$ бўлса, унинг махражини ва биринчи ҳадини топинг.

337. Қуйидаги шартлар билан берилган (a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессиями ёки геометрик прогрессиями:

а) $a_1=5,\ a_{n+1}=4a_n$; г) $a_1=-8,\ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}$;

б) $a_1=8,\ a_{n+1}=4+a_n$; д) $a_1=-10,\ a_{n+1}=a_n$;

в) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{4}$; е) $a_1=4,\ a_{n+1}=3a_n-2$?

Агар кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлса, унинг айирмасини кўрсатинг, агар геометрик прогрессия бўлса, унинг махражини кўрсатинг.

338. (c_n) кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлиб, унинг биринчи ҳади c_1 га тенг, махражи эса q га тенг. Қуйидагиларни c_1 ва q билан ифодаланг:

а) c_6; б) c_{20}; в) c_{125}; г) c_n; д) c_{n+3}; е) c_{2n}.

339. (x_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия. Агар:

а) $x_1 = 96$ ва $q = \frac{1}{2}$ бўлса, x_7 ни;

б) $x_1 = 0,125$ ва $q = -2$ бўлса, x_6 ни;

в) $x_1 = 4\sqrt{2}$ ва $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлса, x_9 ни;

г) $x_1 = 0,003$ ва $q = \sqrt{10}$ бўлса, x_7 ни топинг.

340. (b_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия. Агар:

а) $b_1 = 256$ ва $q = \frac{1}{2}$ бўлса, b_8 ни;

б) $b_1 = \frac{3}{4}$ ва $q = \frac{2}{3}$ бўлса, b_5 ни;

в) $b_1 = 1,8$ ва $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$ бўлса, b_4 ни;

г) $b_1 = -125$ ва $q = -0,6$ бўлса, b_6 ни топинг.

341. Геометрик прогрессиянинг еттинчи ва n-ҳадини топинг:

а) 2; —6; ...; в) —0,125; 0,25; ...;
б) —40; —20; ...; г) —10; 10; ... .

342. Геометрик прогрессиянинг олтинчи ва n-ҳадини топинг:

а) 48; 12; ...; в) —0,001; —0,01; ...;
б) $\frac{64}{9}; -\frac{32}{3}; \ldots$; г) -100; 10; ... .

343. Геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласини ёзинг, бунда:

а) $b_1 = -81$, $q = \frac{1}{3}$; в) $b_1 = 3$, $b_{n+1} = -2b_n$;
б) $b_1 = -2$, $q = 2$; г) $b_1 = 25$, $b_{n+1} = 5b_n$.

344. Геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласини ёзинг, бунда:

а) $b_1 = 4$, $q = -3$; б) $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{3}$.

345. (c_n) кетма-кетлик геометрик прогрессия эканини исботланг, бунда:

а) $c_n = 4^n$; б) $c_n = -5\cdot 3^n$; в) $c_n = 3\cdot(-2)^{n+1}$.

Бу прогрессияни рекуррент формула ёрдамида беринг.

346. $a_n = 3\cdot(-4)^n$ формула билан берилган кетма-кетлик геометрик прогрессия эканини исботланг ва q, a_1, a_7 ни топинг.

347. (b_n) геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг, бунда:

а) $b_8 = 384$, $q = 2$; б) $b_6 = \frac{32}{81}$, $q = -\frac{2}{3}$.

348. (c_n) геометрик прогрессиянинг махражини топинг, бунда:

а) $c_5 = -6$, $c_7 = -54$; б) $c_6 = 25$, $c_8 = 9$.

349. (x_n) кетма-кетлик—геометрик прогрессия. Агар:

а) $x_6=0{,}32$, $q=0{,}2$ бўлса, x_1 ни;

б) $x_3=-162$, $x_5=-18$ бўлса, q ни топинг.

350. (b_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия. Агар:

а) $b_1=125$, $b_3=5$ бўлса, b_6 ни;

б) $b_1=-\frac{2}{9}$, $b_3=-2$ бўлса, b_7 ни;

в) $b_4=-1$, $b_6=-100$ бўлса, b_1 ни;

г) $b_4=6\frac{2}{3}$, $b_6=26\frac{2}{3}$ бўлса, b_1 ни топинг.

351. 60 ва $\frac{15}{16}$ сонлари орасига бешта шундай сонни қўйингки, улар берилган сонлар билан биргаликда геометрик прогрессия ташкил этсин.

352. 1 ва 16 сонлари орасига учта шундай сонни қўйингки, улар берилган сонлар билан биргаликда геометрик прогрессия ташкил этсин.

353. Ўрмон тажриба участкасида ёғочнинг йиллик кўпайиши 10% ни ташкил этади. Агар ёғочнинг дастлабки миқдори $2{,}0\cdot10^4$м^3 бўлса, бу участкада 6 йилдан сўнг ёғоч қандай миқдорда бўлади?

254. Агар кассага қўйилган омонат йилига 2% ортса, 1000 сўм пул 4 йилдан сўнг қанча бўлади?

355. Томони 8 см дан бўлган тенг томонли учбурчак берилган. Унинг баландликларидан иккинчи учбурчак ясалган. Иккинчи учбурчакнинг баландликларидан учинчи учбурчак ясалган ва ҳоказо. Учбурчакларнинг периметрлари геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг ва олтинчи учбурчакнинг периметрини топинг.

356. Томони 16 см га тенг бўлган тенг томонли учбурчакка иккинчи бир учбурчак ички чизилган бўлиб, унинг учлари биринчи учбурчак томонларининг ўрталаридир. Иккинчи учбурчакка шундай усул билан учинчи учбурчак ички чизилган ва ҳоказо. Учбурчакларнинг периметрлари геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг. Саккизинчи учбурчакнинг периметрини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

357. Биринчи ҳади — 45,6 га тенг, ўн бешинчи ҳади эса 2 га тенг бўлган арифметик прогрессиянинг дастлабки ўттизта ҳадининг йиғиндисини топинг.

358. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{27\cdot3^{2n-1}}{9^{n+1}}$; б) $\frac{32\cdot4^{n-1}}{2^{2n+1}}$;

в) $\frac{16\cdot 8^{2n-3}}{4^{3n-2}}$; г) $\frac{25^{3n-1}}{1000\cdot 125^{3n-2}}$.

359. а) $x^2+x+y=30$ тенгламанинг графигига тегишли бўлиб, координаталари йиғиндиси 5 га тенг бўлган;

б) $x^2+4y=20$ тенгламанинг графигига тегишли бўлиб, ординаталари абсциссаларининг икки бараварига тенг бўлган нуқталарнинг координаталарини топинг.

17. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ n ТА ҲАДИНИНГ ЙИҒИНДИСИ ФОРМУЛАСИ

Қадимги ҳинд афсонасида бундай ҳикоя қилинади; шахматни ихтиро қилган киши ўз ихтироси учун шахмат тахтасининг биринчи катагига битта буғдой дони, иккинчисига ундан икки марта ортиқ дон, яъни 2 та дон, учинчисига ундан икки марта кўп, яъни 4 та дон ва ҳоказо, 64- катаккача шундай талаб қилди. Шахмат ихтирочиси неча дона буғдой олиши керак?

Гап бораётган буғдой донлари сони биринчи ҳади 1 га тенг, махражи эса 2 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг олтмиш тўртта ҳадининг йиғиндисидан иборат. Бу йиғиндини S билан белгилаймиз:

$$S=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63}.$$

Ёзилган тенгликнинг иккала қисмини прогрессия махражига кўпайтириб,

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{63}+2^{64}$$

ни ҳосил қиламиз. Иккинчи тенгликдан биринчисини айириб, соддалаштирамиз:

$$2S-S=(2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}+2^{64})-(1+2+2^2+\ldots+2^{63});$$

$$S=2^{64}-1.$$

Бундай миқдордаги буғдой доналарининг массаси триллион тоннадан ортади. Бу инсоният шу вақтгача йиғган буғдой миқдоридан анча кўпдир.

Энди ихтиёрий геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласини чиқарамиз. S йиғиндини ҳисоблашдаги усулдан фойдаланамиз.

(b_n) геометрик прогрессия берилган бўлсин. Унинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини S_n билан белгилаймиз:

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}+b_n. \quad (1)$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини q га кўпайтирамиз:

$$S_nq=b_1q+b_2q+b_3q+\ldots+b_{n-1}q+b_nq.$$

Энди

$$b_1 q = b_2,\ b_2 q = b_3,\ b_3 q = b_4,\ \ldots,\ b_{n-1} q = b_n$$

эканини ҳисобга олиб,

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q \tag{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

(2) тенгликдан (1) тенгликни ҳадма-ҳад айирамиз ва ўхшаш ҳадларини ихчамлаймиз:

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q) -$$
$$-(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n),\ S_n q - S_n = b_n q - b_1,$$
$$S_n (q-1) = b_n q - b_1.$$

$q \neq 1$ бўлсин. У ҳолда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} \tag{I}$$

Биз $q \neq 1$ бўлган **геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласини** ҳосил қилдик. Агар $q = 1$ бўлса, у ҳолда прогрессиянинг ҳамма ҳадлари биринчи ҳадига тенг бўлади ва $S_n = nb_1$.

Шуни айтиб ўтиш керакки, кўпгина масалаларни ечишда геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндисининг бошқача шаклда ёзилган формуласидан фойдаланган қулай. (I) формулада b_n ўрнига $b_1 q^{n-1}$ ни қўямиз. Натижада:

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q-1},\ \text{бунда}\ q \neq 1. \tag{II}$$

1- мисол. $b_1 = 3$ ва $q = \frac{1}{2}$ бўлган (b_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки ўнта ҳадининг йиғиндисини топамиз.

Прогрессиянинг биринчи ҳади ва махражи маълум бўлгани учун масалани ечишда (II) формуладан фойдаланган қулай:

$$S_{10} = \frac{b_1 (q^{10} - 1)}{q-1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -6\left(\frac{1}{1024} - 1\right) = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}.$$

2- мисол. Қўшилувчилари 1; x; x^2; ... геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлган $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ $(x \neq 1)$ йиғиндини топамиз.

Прогрессиянинг биринчи ҳади 1 га, махражи эса x га тенг. x^{n-1} шу прогрессиянинг n- номерли ҳади бўлгани учун масала прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топишдан иборат. (I) формуладан фойдаланамиз:

$$S_n = \frac{x^{n-1} \cdot x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Шундай қилиб,

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Охирги тенгликнинг чап ва ўнг қисмларини $x-1$ га кўпайтирамиз. Натижада

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

айниятни ҳосил қиламиз.

Жумладан $n=2$ ва $n=3$ да қуйидаги маълум тенгламаларга келамиз:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

3- мисол. Агар $b_3 = 12$ ва $b_5 = 48$ экани маълум бўлса, (b_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки олтита ҳадининг йиғиндисини топамиз.

b_3 ва b_5 ни билган ҳолда прогрессиянинг махражи q ни топиш мумкин.

$$b_5 = b_4 q = (b_3 q) q = b_3 q^2$$

бўлгани учун

$$q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4.$$

Демак,

$$q = 2 \text{ ёки } q = -2.$$

Шундай қилиб, масаланинг шартини қаноатлантирувчи иккита прогрессия мавжуд.

Агар $q = -2$ бўлса, у ҳолда $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3$ ва $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -63$.

Агар $q = 2$ бўлса, у ҳолда $b_1 = 3$ ва $S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$.

360. Геометрик прогрессиянинг дастлабки бешта ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = 500$, $q = \frac{1}{5}$.

361. Геометрик прогрессиянинг дастлабки олтита ҳадининг йиғиндисини топинг:

в) 3; -6; ... ; в) 54; 36; ... ; д) 1; $-\frac{1}{2}$; ... ;

б) -6; -2; ...; г) -32; 16; ... ; е) 8; 8; ... .

362. Геометрик прогрессиянинг дастлабки тўққизта ҳадининг йиғиндисини ҳисобланг, бунда:

а) $a_1=-4$, $q=3$; б) $a_1=1$, $q=-2$.

363. (b_n) кетма-кетлик геометрик прогрессия эканини исботланг ва унинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $b_n=1{,}5\cdot 4^n$; в) $b_n=2\cdot 3^{1+n}$.
б) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$; г) $b_n=5^{n-1}$.

364. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топинг:

а) $1;\ 3;\ 3^2;\ \ldots;$ г) $1;\ -x;\ x^2;\ \ldots$, бунда $x\neq-1$;
б) $2;\ 2^2;\ 2^3;\ \ldots;$ д) $1;\ x^3;\ x^6;\ \ldots$, бунда $x\neq1$;
в) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots;$ е) $1;\ -x^3;\ x^6;\ \ldots$, бунда $x\neq-1$.

365. Қўшилувчилари қуйидаги геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлган йиғиндини топинг:

а) $4+4^2+4^3+\ldots+4^n$;
б) $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}$, бунда $x\neq\pm1$;
в) $x^3+x^6+x^9+\ldots+x^{3n}$, бунда $x\neq1$.

366. (b_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки еттита ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $b_7=72{,}9$, $q=1{,}5$; б) $b_5=\frac{16}{9}$, $q=\frac{2}{3}$.

367. (x_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки бешта ҳадининг йиғиндисини топинг, бунда:

а) $x_5=1\frac{1}{9}$, $q=\frac{1}{3}$; б) $x_4=121{,}5$, $q=-3$.

368. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 2 га тенг, бешинчиси эса 162 га тенг. Унинг тоқ номерли ҳадлари мусбат, жуфт номерлилари эса манфийлиги маълум бўлса, шу прогрессиянинг дастлабки еттита ҳадининг йиғиндисини топинг.

369. $b_2=6$ ва $b_4=54$ бўлган (b_n) геометрик прогрессиянинг ҳамма ҳадлари мусбат экани маълум бўлса, унинг дастлабки еттита ҳадининг йиғиндисини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

370. Агар $b_7=0{,}012$ ва $q=0{,}2$ бўлса, (b_n) геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг. Бу прогрессиянинг n- ҳади формуласини ёзинг.

371. Агар $c_3=120$ ва $c_5=3\frac{1}{3}$ бўлса, (c_n) геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

372. Айирмани кўпайтувчиларга ажратинг:

а) 4^n-4^{n-2}; б) 9^n-3^{2n-1}.

373. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{9^n+7\cdot 9^{n-1}}{8}$; б) $\frac{3^{2n+1}-3^{2n-1}}{4\cdot 3^n}$.

18. $|q|<1$ ДА ЧЕКСИЗ ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯНИНГ ЙИҒИНДИСИ

Биз $\frac{1}{3}$ сони 0,3333... чексиз даврий ўнли касрга айланишини биламиз.

Агар чекли ўнли касрга ўхшаш, 0,3333 ... чексиз ўнли каср хоналар бўйича ёйилса, чексиз қўшилувчилари бўлган йиғиндини ҳосил қиламиз: $0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots$.

Бу йиғиндидаги қўшилувчилар $q=0{,}1$ бўлган 0,3, 0,03; 0,003; 0,0003; ... . геометрик прогрессиянинг ҳадлари бўлади. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади формуласига кўра:

$$S_n=\frac{0{,}3\cdot((0{,}1)^n-1)}{0{,}1-1}=\frac{0{,}3\,((0{,}1)^n-1)}{-0{,}9}=\frac{(0{,}1)^n-1}{-3}=\frac{1}{3}-\frac{(0{,}1)^n}{3}.$$

Қўшилувчилар сони n ни чексиз орттирганимизда $(0{,}1)^n$ ифода нолга истаганча яқин сон бўлади, $\frac{(0{,}1)^n}{3}$ каср эса нолга чексиз яқинлашади. Ҳақиқатан,

агар $n=2$ бўлса, у ҳолда $\frac{(0{,}1)^n}{3}=\frac{0{,}01}{3}=\frac{1}{300}$;

агар $n=3$ бўлса, у ҳолда $\frac{(0{,}1)^n}{3}=\frac{0{,}001}{3}=\frac{1}{3000}$;

агар $n=4$ бўлса, у ҳолда $\frac{(0{,}1)^n}{3}=\frac{0{,}0001}{3}=\frac{1}{30000}$;

агар $n=5$ бўлса, у ҳолда $\frac{(0{,}1)^n}{3}=\frac{0{,}00001}{3}=\frac{1}{300000}$ ва ҳоказо.

Шунинг учун n ни чексиз орттирганимизда $\frac{1}{3}-\frac{(0{,}1)^n}{3}$ айирма $\frac{1}{3}$ га истаганча яқин сон бўлади ёки $\frac{1}{3}$ сонига интилади дейилади.

Шундай қилиб, 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси n чексиз орттирилганда $\frac{1}{3}$ сонига интилади. Бу тасдиқ қуйидаги тенглик кўринишида ёзилади:

$$0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots=\frac{1}{3}.$$

$\frac{1}{3}$ сони 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... **чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси** дейилади.

Энди ихтиёрий

$$b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ b_1q^3;\ \ldots$$

геометрик прогрессияни кўриб чиқамиз, унда $|q|<1$.

Прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласини ёзамиз:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Тенгликнинг ўнг қисмидаги ифодани шакл алмаштирамиз:

$$\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_1q^n-b_1}{q-1}=\frac{b_1-b_1q^n}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Демак,

$$S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Агар $|q|<1$ бўлса, n чексиз орттирилганда q^n кўпайтувчи нолга интилишини, демак, $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ кўпайтма ҳам нолга интилишини исботлаш мумкин. Шунинг учун n чексиз орттирилганда S_n йиғинди $\frac{b_1}{1-q}$ сонига интилади.

$\frac{b_1}{1-q}$ сони $|q|<1$ **бўлган (b_n) чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндиси** дейилади. Бу қуйидагича ёзилади:

$$b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots=\frac{b_1}{1-q}.$$

(b_n) прогрессиянинг йиғиндисини S ҳарфи билан белгилаб, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

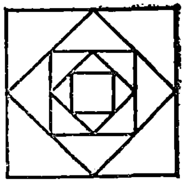
Шуни айтиб ўтиш керакки, агар $|q|\geqslant 1$ бўлса, геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси S_n n чексиз орттирилганда ҳеч бир сонга интилмайди. Чексиз геометрик прогрессия фақат $|q|<1$ бўлганда йиғиндига эга бўлади.

1- мисол. $12;\ -4;\ \frac{4}{3};\ \ldots$ чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топамиз.

Бу прогрессияда $q=-\frac{1}{3}$, демак, $|q|<1$ шарт бажарилди. $S=\frac{b_1}{1-q}$ формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S=\frac{12}{1+\frac{1}{3}}=\frac{12}{\frac{4}{3}}=9.$$

2-мисол. Томони 4 см га тенг бўлган квадрат берилган. Унинг томонлари ўрталари иккинчи квадратнинг учларидир, иккинчи квадрат томонларининг ўрталари учинчи квадратнинг учларидир ва ҳоказо (23-расм). Ҳамма квадратлар юзларининг йиғиндисини топамиз.



23-расм

Геометрик нуқтаи назардан ҳар бир кейинги квадратнинг юзи аввалги квадрат юзининг ярмига тенг. Шундай қилиб, квадратлар юзларининг кетма-кетлиги геометрик прогрессия бўлиб, унинг биринчи ҳади 16 га тенг, махражи эса $\frac{1}{2}$ га тенг. Бу геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топамиз:

$$S = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32.$$

Демак, ҳамма квадратлар юзларининг йиғиндиси 32 см^2 га тенг.

3-мисол. 0,(18) чексиз ўнли даврий касрни оддий каср кўринишда ифодалаймиз.

0,(18) сонини йиғинди шаклида ёзамиз:

$$0,(18) = 0,18 + 0,0018 + 0,000018 + \ldots .$$

Тенгликнинг ўнг қисмидаги қўшилувчилар биринчи ҳади 0,18 га тенг, махражи эса 0,01 га тенг, яъни $|q| < 1$ бўлган геометрик прогрессиянинг ҳадларидир. Бу прогрессиянинг йиғиндисини топамиз:

$$S = \frac{0,18}{1-0,01} = \frac{0,18}{0,99} = \frac{2}{11}.$$

Демак,

$$0,(18) = \frac{2}{11}.$$

Шуни айтиб ўтиш кераки, худди шунга ўхшаш истаган чексиз ўнли даврий касрни оддий каср кўринишда ифодалаш мумкин.

Бизга VII синф курсидан маълумки, ҳар бир чексиз ўнли даврий каср рационал сондир, яъни у $\frac{m}{n}$ каср кўринишида ифодаланиши мумкин, бунда m — бутун сон, n — натурал сон. Энди биз $\frac{m}{n}$ касрни топиш мумкин бўлган усулни билиб олдик.

374. Берилган геометрик прогрессиянинг q махражи $|q| < 1$

шартни қаноатлантиришини текширинг ва бу прогрессиянинг йиғиндисини топинг:

а) $9;\ 3;\ 1;\ \ldots;$ г) $\sqrt{3};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \ldots;$

б) $2;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots;$ д) $2\sqrt{2};\ 2;\ \sqrt{2};\ \ldots;$

в) $\frac{4}{5};\ \frac{4}{25};\ \frac{4}{125};\ \ldots;$ е) $3\sqrt{5};\ 3;\ \frac{3\sqrt{5}}{5};\ \ldots.$

375. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топинг:

а) $1;\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{100};\ \ldots;$ в) $6;\ -1\frac{1}{2};\ \frac{3}{8};\ \ldots;$

б) $-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \ldots;$ г) $\frac{2}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{8}{27};\ \ldots.$

376. Қўшилувчилари чексиз геометрик прогрессиянинг ҳадлари бўлган йиғиндини топинг ($|a|<1$):

а) $1+a+a^2+a^3+\ldots;$ в) $1+a^2+a^4+a^6+\ldots;$

б) $1-a+a^2-a^3+\ldots;$ г) $a-a^4+a^7-a^{10}+\ldots.$

377. Радиуси 5 см га тенг бўлган айланага мунтазам учбурчак ички чизилган; учбурчакка айлана ички чизилган; айланага яна мунтазам учбурчак ички чизилган ва ҳоказо. Айланалар узунликларининг ва доиралар юзларининг йиғиндиларини топинг.

378. Квадратга доира ички чизилган; бу доирага иккинчи квадрат ички чизилган; иккинчи квадратга яна доира ички чизилган ва ҳоказо. Агар биринчи квадратнинг томони 8 см га тенг бўлса, ҳамма доиралар юзларининг йиғиндисини топинг.

379. Сонларни оддий каср шаклида ёзинг:

а) $0,(6)$; б) $0,(1)$; в) $0,(36)$; г) $1,(81)$; д) $0,2(3)$; е) $0,32(45)$.

380. Сонни оддий каср шаклида ёзинг:

а) $0,(5)$; б) $1,(72)$; в) $0,4(6)$; г) $0,01(12)$.

Такрорлаш учун машқлар

381. Агар $x_1=0,375$ ва $x_2=0,75$ бўлса, (x_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки олтита ҳадининг йиғиндисини топинг.

382. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\frac{0,04^{-2}\cdot 125^4\cdot 0,2^{-1}}{4\cdot 25^8}$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\cdot\frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}}{49}:\left(\frac{1}{21}\right)^8$.

383. x нинг $y=4x^2-5x+7$ функция: а) 3 га; б) 6 га тенг қийматлар оладиган қийматлари мавжудми?

384. Тенгламани ечинг:

а) $x^4-10x^2+9=0$; б) $x^3-0,16x=0$.

III БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

6- параграфга доир

385. Қуйидаги формула билан берилган (c_n) кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини ҳисоблаб топинг:

а) $c_n = -4 \cdot 3^n$; в) $c_n = \frac{3^n - 1}{3n - 1}$; д) $c_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$;

б) $c_n = \frac{5}{2^n + 1}$; г) $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$; е) $c_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$.

386. Ҳар бир ҳади унинг номерининг учлангани билан бир орасидаги айирмага тенг бўлган кетма-кетликнинг бешинчи, саккизинчи, эллигинчи ҳадларини топинг. 20, 179, 1501 сонлари шу кетма-кетликнинг ҳадлари бўладими?

387. $x_n = 3n + 2$ формула билан берилган (x_n) кетма-кетликнинг қуйидаги тенгсизликни тўғри тенгсизликка айлантирадиган ҳадлари номерларини кўрсатинг:

а) $x_n \geqslant 29$; б) $x_n \leqslant 47$; в) $x_n > 100$; г) $80 \leqslant x_n \leqslant 180$.

388. Қуйида берилганларга кўра кетма-кетликнинг n- ҳади формуласини ёзинг:

а) шу кетма-кетликнинг ҳамма тоқ номерли ҳадлари -8 га тенг, жуфт номерлилари 8 га тенг;

б) ҳамма тоқ номерли ҳадлари 5 га тенг, жуфт номерли ҳадлари -5 га тенг.

389. (a_n) кетма-кетликнинг дастлабки бир нечта ҳадини ёзиб олинг ва унинг n- ҳади формуласини танланг, бунда:

а) (a_n) — 5 га каррали натурал сонлар кетма-кетлиги;

б) (a_n) — 5 га бўлганда қолдиқда 1 қоладиган натурал сонлар кетма-кетлиги.

390. (a_n) кетма-кетликнинг дастлабки бир нечта ҳадини ҳисоблаб топинг, бунда:

а) $a_1 = 2,\ a_{n+1} \cdot a_n = 1$; в) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 6$;

б) $a_1 = 5,\ a_{n+1} \cdot a_n = -5$; г) $a_1 = 1,\ a_{n+1} \cdot a_n = n$.

391. (a_n) арифметик прогрессиянинг ҳарф билан белгиланган ҳадларини топинг:

а) a_1; a_2; -19; $-11{,}5$; a_5; ...;

б) a_1; $-7{,}5$; a_3; $-2{,}5$; a_5; a_6; 5; ... .

392. Истаган a ва b сонлар учун $(a+b)^2$, a^2+b^2 ва $(a-b)^2$ ифодаларнинг қийматлари арифметик прогрессия ташкил этишини исботланг.

393. Агар $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{a+c}$ ва $\frac{1}{a+b}$ сонлар арифметик прогрессия ташкил этса, a^2, b^2 ва c^2 сонлар ҳам арифметик прогрессия ташкил этишини исботланг.

394. Учбурчакнинг периметри 24 см га тенг бўлиб, унинг томонлари узунликлари арифметик прогрессия ташкил этади. Томонларидан камида биттасининг узунлигини аниқлаш мумкинми? Учбурчак томонларининг сантиметр билан ифодаланган узунликлари қандай бутун қийматлар қабул қилиши мумкин?

395. Бирор учбурчакнинг бурчаклари арифметик прогрессия ташкил этади. Бу бурчаклардан бири 60° га тенг бўлишини исботланг.

396. Арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб истаган ҳади ўзидан олдинги ва кейинги ҳадларининг ўрта арифметиги эканини, яъни $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ бўлишини исботланг.

397. (a_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия. Қуйидаги кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими:

а) $a_1;\ a_3;\ \ldots;\ a_{2n-1};\ \ldots;$ в) $\frac{1}{a_1};\ \frac{1}{a_2};\ \ldots;\ \frac{1}{a_n};\ \ldots;$

б) $a_1+1;\ a_2+1;\ \ldots;\ a_{n+1};\ \ldots;$ г) $a_1^2;\ a_2^2;\ \ldots;\ a_n^2;\ \ldots$?

398. (a_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия. Агар:

а) $a_1 = 9\sqrt{3} - 2$ ва $d = 2 - \sqrt{3}$ бўлса a_{12} ни топинг;

б) $a_1 = \frac{5\sqrt{3}-7}{3}$ ва $d = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$ бўлса, a_8 ни топинг.

399. (a_n) арифметик прогрессияда:

а) $a_1 = 1{,}26$ ва $d = -0{,}3$ бўлса, унинг $-2{,}94$ га тенг ҳадининг номерини топинг;

б) $a_5 = -3{,}7$ ва $d = -0{,}6$ бўлса, унинг $-9{,}7$ га тенг ҳадининг номерини топинг.

400. а) $14\frac{3}{4}$; б) 8,35 сони $b_1 = 2\frac{3}{4}$ ва $d = \frac{2}{5}$ бўлган (b_n) арифметик прогрессиянинг ҳади бўладими?

401. а) $\frac{7}{12}$; 0,55; ... арифметик прогрессиянинг биринчи манфий ҳадини топинг;

б) $-3\frac{1}{2}$; $-3\frac{2}{9}$; ... арифметик прогрессиянинг биринчи мусбат ҳадини топинг.

402. Агар (b_n) арифметик прогрессия бўлса, қуйидагиларни исботланг:

а) $b_3 + b_{11} = b_5 + b_9$; б) $b_n + b_2 = b_{n-2} + b_4$.

403. $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ формулани келтириб чиқаринг, бунда d — арифметик прогрессиянинг айирмаси, a_m ва a_n — унинг ҳадлари $(m \neq n)$.

404. (a_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия. Агар:

а) $a_{20}=1,7$ ва $a_{37}=0$ бўлса, d ни топинг;
б) $a_{10}=270$ ва $d=-3$ бўлса, a_{100} ни топинг.

405. Арифметик прогрессиянинг дастлабки ўнта ҳадининг йиғиндисини топинг:

а) $\frac{6}{7}; \frac{5}{6}; \ldots;$ б) $-\sqrt{8}; -\sqrt{2}; \ldots$.

406. Қўшилувчилари қуйидаги арифметик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлган йиғиндини топинг:

а) $2+6+10+\ldots+198$;
б) $95+85+75+\ldots+(-155)$.

407. Бурчакнинг бир томонида учидан бошлаб ўнта тенг кесма қўйилди ва уларнинг охирларидан (бурчакнинг учидан ташқари) параллел тўғри чизиқлар ўтказилди. Бурчак томонлари орасидаги ўтказилган параллел кесмалардан энг кичигининг узунлиги 2 см га тенг бўлса, ҳамма параллел кесмалар узунликларининг йиғиндисини топинг.

408. Трапециянинг асослари 11 см ва 26 см га тенг. Трапециянинг ён томони ўнта тенг кесмага ажратилган ва бўлиниш нуқталаридан асосига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Трапециянинг ён томонлари орасидаги ҳамма параллел кесмалар узунликларининг йиғиндисини топинг.

409. Арифметик прогрессияда:

а) $a_1=-19$, $d=2$, $S_n=384$; n ва a_n ни топинг;
б) $d=\frac{1}{3}$, $n=37$, $S_n=209\frac{2}{3}$; a_1 ва a_n ни топинг;
в) $d=2,5$, $a_n=27$, $S_n=157,5$; a_1 ва n ни топинг.

410. Агар $a_5=5,5$ ва $S_{20}=130$ бўлса, (a_n) арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг.

411. а) 5 га каррали бўлмаган ва 200 дан кичик бўлган натурал сонлар йиғиндисини топинг.

б) 15 га каррали бўлмаган ва 120 дан кичик бўлган натурал сонлар йиғиндисини топинг.

412. а) Ўзидан олдинги ҳамма натурал сонлар йиғиндисининг $\frac{1}{10}$ қисмига тенг бўлган натурал сонни топинг;

а) ўзидан олдинги ҳамма натурал тоқ сонлар йиғиндисининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг бўлган натурал сонни топинг.

413. Йиғиндини топинг:

а) $1+2+\ldots+19+20+19+\ldots+2+1$;
б) $1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+2+1$;

в) $1-3+5-7+...+97-99$;
г) $1-2+3-4+5-...-198+199-200$.

414. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{x\cdot x^2\cdot x^3\cdot\ ...\ \cdot x^{n-1}\cdot x^n}{x\cdot x^3\cdot x^5\cdot\ ...\ \cdot x^{2n-3}\cdot x^{2n-1}}$; б) $\frac{x^3\cdot x^8\cdot x^{13}\cdot x^{18}\cdot\ ...\ \cdot x^{98}}{x\cdot x^{11}\cdot x^{21}\cdot x^{31}\cdot\ ...\ \cdot x^{151}}$.

415. Арифметик прогрессиянинг ҳамма мусбат ҳадлари йиғиндисини топинг:

а) 47; 39; ...; б) 23,2; 21,7 ...; в) $5\frac{2}{3}$; $5\frac{1}{2}$; ... .

416. Қуйидаги формула билан берилган кетма-кетликнинг ҳамма манфий ҳадлари йиғиндисини топинг:

а) $a_n = 1{,}5n - 48$; б) $a_n = 2{,}8n - 125$.

417. (a_n) кетма-кетликнинг ҳадлари бўлган ҳамма икки хонали мусбат сонлар йиғиндисини топинг:

а) $a_n = 7 + 3n$; б) $a_n = 217 - 4n$.

418. Арифметик прогрессияда:

а) $S_{10}=100$; $S_{30}=900$; S_{40} ни топинг;
б) $S_{15}=S_{25}=150$; S_{30} ни топинг.

419. (a_n) кетма-кетликнинг дастлабки n та ҳади йиғиндисининг формуласини ёзинг, бунда:

а) $a_n = 2n + 1$; б) $a_n = 3 - n$.

420. (b_n) кетма-кетликнинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси $S_n = n^2 - 2n + 5$ формула билан топилиши мумкин. Шу кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини топинг. (b_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими?

421. Дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси қуйидаги формула бўйича топилиши мумкин бўлган (a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими:

а) $S_n = n^2 - 2n$; б) $S_n = -4n^2 + 11$; в) $S_n = 7n - 1$?

422. (a_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласи S_n маълум. Агар:

а) $S_n = \frac{n^2}{4} - n$ бўлса, прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳадини топинг;

б) $S_n = 2n^2 + 3n$ бўлса, прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг.

7- параграфга доир

423. (b_n) геометрик прогрессиянинг ҳарфлар билан белгиланган ҳадларини топинг:

а) b_1; b_2; 225; —135; 81; b_6; ... ;
б) b_1; b_2; b_3; 36; 54; ... ;
в) $\frac{1}{8}$; b_2; $\frac{1}{2}$; b_4; b_5; -4; ... ;
г) $\sqrt{3}$; b_2; b_3; $18\sqrt{2}$; b_5; $108\sqrt{2}$; ... .

424. Истаган a ва b сонлар учун $(|a| \neq |b|)$ $(a+b)^2$, a^2-b^2 ва $(a-b)^2$ ифодаларнинг қийматлари геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг.

425. Агар a, b, c ва d сонлари геометрик прогрессия ташкил этса,

$$(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$$

тенглик тўғри бўлишини исботланг.

426. (b_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия. Қуйидаги кетма-кетлик геометрик прогрессия бўладими:

а) $2b_1$; $2b_2$; ... ; $2b_n$; ... ;
б) b_1; b_3; ... ; b_{2n-1}; ... ;
в) b_1-1; b_2-1; ... ; b_n-1; ... ;
г) $\frac{1}{b_1}$; $\frac{1}{b_2}$; ... ; $\frac{1}{b_n}$; ... ;
д) b_1^3; b_2^3; ...; b_n^3; ... ?

427. Геометрик прогрессиянинг кетма-кет учта ҳади арифметик прогрессия ташкил этиши мумкинми?

428. Геометрик прогрессиянинг иккинчисидан бошлаб истаган ҳади ўзидан олдинги ва кейинги ҳадларнинг ўрта пропорционали эканини, яъни $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_n}{b_{n-1}}$ бўлишини исботланг.

429. (x_n) кетма-кетлик геометрик прогрессия эканини исботланг; бунда:

а) $x_n=-3^n$; б) $x_n=0{,}1\cdot 10^n$; в) $x_n=2b^n$, $b\neq 0$.

430. (b_n) геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади ва махражи маълум. b_n ни топинг, бунда:

а) $b_1=\frac{243}{256}$, $q=\frac{2}{3}$, $n=8$; б) $b_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $q=-\sqrt{6}$, $n=5$.

431. $\frac{15}{8}$ ва 240 сонлари орасига яна олтита шундай сонларни қўйингки, улар берилган сонлар билан биргаликда геометрик прогрессия ташкил этсин.

432. (b_n) геометрик прогрессия ҳадининг n номерини топинг, бунда

а) $b_1 = 2$, $q = 3$, $b_n = 162$; б) $b_1 = 2$, $q = 0{,}1$, $b_n = 0{,}002$.

433. (b_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия.

а) Агар $b_1 > 0$ ва $q > 1$ бўлса, прогрессиянинг кейинги ҳар бир ҳади олдингисидан катта бўлишини исботланг.

б) Агар $b_1 > 0$ ва $0 < q < 1$ бўлса, прогрессиянинг кейинги ҳар бир ҳади аввалгисидан кичик бўлишини исботланг.

в) Агар $b_1 < 0$ ва $q > 1$ бўлса, прогрессиянинг кейинги ҳар бир ҳади олдингисидан кичик бўлишини исботланг.

г) Агар $b_1 < 0$ ва $0 < q < 1$ бўлса, прогрессиянинг кейинги ҳар бир ҳади олдингисидан катта бўлишини исботланг.

Кўриб ўтилган ҳолларнинг ҳар бири учун мисол келтиринг.

434. Агар (a_n) геометрик прогрессияда $p + r = m + n$ бўлса, $a_p a_r = a_m a_n$ бўлишини исботланг.

435. Агар n, p ва r натурал сонлар учун $n = \frac{p+r}{2}$ тенглик тўғри бўлса, (b_n) геометрик прогрессияда $b^2_n = b_p \cdot b_r$ бўлади. Шуни исботланг.

436. Агар q сони (c_n) геометрик прогрессиянинг махражи бўлса, $\frac{c_n}{c_m} = q^{n-m}$ бўлишини исботланг.

437. (b_n) геометрик прогрессияда:

а) $q = 0{,}5$, $b_n = 2$, $S_n = 254$; b_1 ва n ни топинг;
б) $q = 3$, $b_n = 567$, $S_n = 847$; b_1 ва n ни топинг;
в) $q = 2$, $n = 8$, $S_n = 765$; b_1 ва b_n ни топинг;
г) $b_1 = 2$, $b_n = \frac{1}{8}$, $S_n = 3\frac{7}{8}$; q ва n ни топинг.

438. Агар (a_n) кетма-кетликнинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини $S_n = 3^n - 1$ формула бўйича топиш мумкин бўлса, у ҳолда (a_n) геометрик прогрессия бўлишини исботланг. S_4, a_1, a_4 ни топинг.

439. Дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси қуйидаги формула бўйича топилиши мумкин бўлган кетма-кетлик геометрик прогрессия бўладими:

а) $S_n = n^2 - 1$; б) $S_n = 2^n - 1$; в) $S_n = 3^n + 1$?

440. Геометрик прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳадининг йиғиндиси 30 га тенг, кейинги тўртта ҳадининг йиғиндиси эса 480 га тенг. Унинг дастлабки ўн иккита ҳадининг йиғиндисини топинг.

441. Геометрик прогрессияда $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. S_9 ни топинг.

442. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласидан фойдаланиб, ифодани соддалаштиринг:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, бунда $x \neq 1$ ва $x \neq 0$;
б) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$, бунда $x \neq -1$ ва $x \neq 0$.

443. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топинг:

а) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}$; . . . ; б) 1; $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$; . . . .

444. Чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топинг:

а) $1+\sin 30°+\sin^2 30°+\sin^3 30°+...$;
б) $1-\cos 30°+\cos^2 30°-\cos^3 30°+ ...$.

445. (b_n) кетма-кетлик чексиз геометрик прогрессия бўлиб, бунда $|q|<1$. Агар:

а) $q=\frac{2}{3}$ ва $S=4{,}5$ бўлса, b_1 ни топинг;

б) $b_3=1\frac{2}{3}$ ва $q=\frac{2}{3}$ бўлса, S ни топинг.

446. Чексиз геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳади 18 га тенг, унинг йиғиндиси эса 81 га тенг. Унинг учинчи ҳадини топинг.

447. Чексиз ўнли даврий касрни оддий каср кўринишида ифодаланг:

а) 2,01(06); б) 5,25(21), в) 0,00(1); г) 0,28(30).

448. Радиуси R га тенг бўлган айланага квадрат ички чизилган; бу квадратга айлана ички чизилган; айланага яна квадрат ички чизилган ва ҳоказо. а) Айланалар узунликларининг; б) доиралар юзларининг; в) квадратлар периметрларининг; г) квадратлар юзларининг йиғиндисини топинг.

449. Томони a га тенг бўлган мунтазам учбурчакка айлана ички чизилган; айланага мунтазам учбурчак ички чизилган; бу учбурчакка яна айлана ички чизилган ва ҳоказо. а) Учбурчаклар периметрларининг; б) учбурчаклар юзларининг; в) айланалар узунликларининг; г) доиралар юзларининг йиғиндисини топинг.

VI БОБ

РАЦИОНАЛ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖА

8-§. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

19. ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАР

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^2$ функциянинг қийматларини аргументнинг икки қарама-қарши қийматларида, масалан, $x=3$ ва $x=-3$ да таққослаймиз:

$$f(3)=\frac{1}{8}\cdot 3^4-3^2=\frac{1}{8}\cdot 81-9=1\frac{1}{8},$$

$$f(-3)=\frac{1}{8}\cdot(-3)^4-(-3)^2=\frac{1}{8}\cdot 3^4-3^2=1\frac{1}{8}.$$

$f(-3)=f(3)$ эканини кўрамиз. Бу функциянинг қийматлари аргументнинг бошқа истаган қарама-қарши қийматларида тенг. Ҳақиқатан,

$$f(-x)=\frac{1}{8}(-x)^4-(-x)^2=\frac{1}{8}x^4-x^2, \text{ яъни } f(-x)=f(x).$$

Бунда қаралаётган функция шундайки, x аргументнинг ҳар бир қиймати учун унга тескари бўлган $-x$ сон ҳам унинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади.

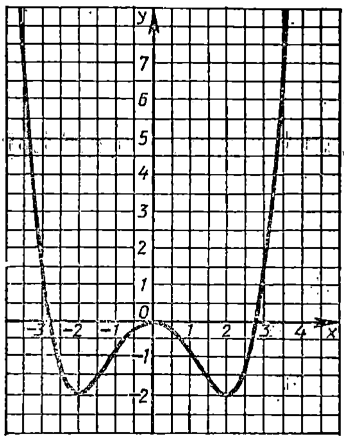
Бундай хоссаларга эга бўлган функциялар **жуфт функциялар** дейилади,

Таъриф. **Агар $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига ҳар бир x сон билан бирга унга тескари $-x$ сон ҳам тегишли бўлиб, бунда**

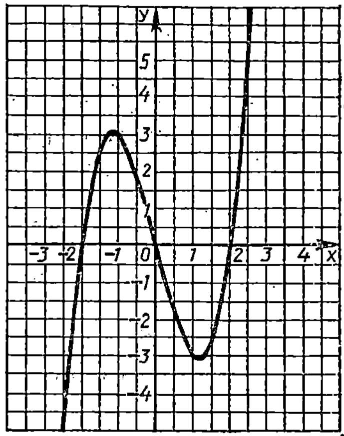
$$f(-x)=f(x)$$

тенглик тўғри бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция жуфт функция дейилади.

24- расмда $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^2$ функциянинг графиги ясалган. Бу функциянинг графиги y ўқига нисбатан симметрик.



24- расм



25- расм

Умуман, ***истаган жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрикдир.*** Бу шундан келиб чиқадики, агар $y=f(x)$ жуфт функция бўлса, аргументнинг истаган қарама-қарши x ва $-x$ қийматларига функциянинг айни бир қиймати мос келади, $(x;\ y)$ ва $(-x;\ y)$ нуқталар эса ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлади.

Энди $g(x)=x^3-4x$ функцияни кўриб чиқамиз ва унинг қийматини аргументнинг икки қарама-қарши қийматларида, масалан, $x=5$ ва $x=-5$ қийматларда таққослаймиз:

$$g(5)=5^3-4\cdot5=125-20=105;$$
$$g(-5)=(-5)^3-4\cdot(-5)=-125+20=-105.$$

$g(-5)=-g(5)$ эканини кўрамиз. Бу функция аргументнинг истаган бошқа қарама-қарши қийматларида ҳам қарама-қарши қийматлар қабул қилади. Ҳақиқатан,

$$g(-x)=(-x)^3-4\cdot(-x)=-x^3+4x=-(x^3-4x),\ \text{яъни}$$
$$g(-x)=-g(x).$$

Бунда x аргументнинг ҳар бир қиймати учун унга қарама-қарши $-x$ сон ҳам функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади.

Бундай хоссаларга эга бўлган функциялар **тоқ функциялар** дейилади.

Таъриф. **Агар $y=g(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига x сон билан бирга унга қарама-қарши бўлган $-x$ сон ҳам тегишли бўлиб, бунда**

$$g(-x)=-g(x)$$

тенглик тўғри бўлса, $y=g(x)$ функция тоқ функция дейилади.

25- расмда $g(x)=x^3-4x$ функциянинг графиги ясалган. Унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик.

Истаган тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрикдир. Бу ҳол, агар $y=g(x)$ тоқ функция бўлса, аргументнинг истаган қарама-қарши x ва $-x$ қийматларига функциянинг y ва $-y$ қарама-қарши қийматлари мос келишидан, $(x; y)$ ва $(-x; -y)$ нуқталар эса координаталар бошига нисбатан симметрик бўлишидан келиб чиқади.

Жуфт ва тоқ функцияларга доир мисоллар билан биз танишган эдик. Масалан, $y=ax^2$ формула билан ифодаланган функция жуфт. $y=x^3$, $y=kx$, $y=\frac{k}{x}$ функция тоқ функция.

Шуни айтиб ўтиш керакки, ҳар қандай функция ҳам жуфт ёки тоқ бўлавермайди. Масалан, $y=3x+1$, $y=x^4+x$, $y=(x-1)^2$ функцияларнинг ҳар бири на жуфт ва на тоқ функциядир.

450. Функция жуфт эканини исботланг:

а) $p(x)=x^4$;
б) $p(x)=-3x^6$;
в) $p(x)=|x|$;
г) $p(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

451. Функция тоқ эканини исботланг:

а) $g(x)=x^5$;
б) $g(x)=-4x^3$;
в) $g(x)=\frac{12}{x^3}$;
г) $g(x)=x|x|$.

452. Функция жуфтми ёки тоқми:

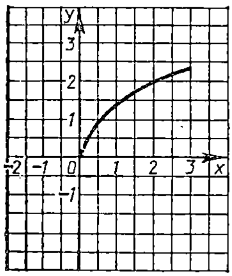
а) $f(x)=3x^4-x^2+5$;
б) $f(x)=x^7+2x^3$;
в) $f(x)=(x-3)^2+(x+3)^2$;
г) $f(x)=2x^3-1$;
д) $f(x)=x^2+x+1$;
е) $f(x)=\frac{1}{x^5-x}$?

453. Функция жуфтми ёки тоқми:

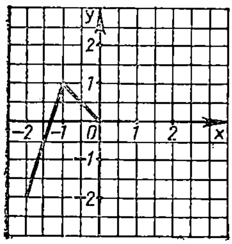
а) $g(x)=5x^3$;
б) $g(x)=\frac{8}{x^4-1}$;
в) $g(x)=(x-2)^2$;
г) $g(x)=x+\frac{1}{x}$?

454. Графиги $ABCD$ синиқ чизиқдан иборат бўлган функция жуфтми ёки тоқми? Синиқ чизиқ учларининг координаталари қуйидагича:

а) $A(-4; 4)$, $B(-1; -2)$, $C(1; -2)$, $D(4; 4)$;
б) $A(-5; -3)$, $B(-2; -3)$, $C(2; 3)$, $D(5; 3)$;
в) $A(-5; 5)$, $B(0; 0)$, $C(4; 4)$, $D(5; 4)$.



26- расм



27- расм

455. 26- расмда аниқланиш соҳаси [—3; 3] оралиқдан иборат бўлган f функция графигининг бир қисми тасвирланган.

а) f — жуфт функция; б) f — тоқ функция эканини билган ҳолда шу функциянинг графигини ясанг.

456. g функция $(0; +\infty)$ оралиқда манфий қийматлар қабул қилиши маълум. Агар: а) g — жуфт функция; б) g — тоқ функция бўлса, функция $(-\infty; 0)$ оралиқда қандай қийматлар қабул қилади?

457. Бирор функция $(0; +\infty)$ оралиқда ўсувчи экани маълум. Агар бу функция: а) жуфт функция; б) тоқ функция бўлса, у $(-\infty; 0)$ оралиқда қандай ўзгаради (ўсадими ёки камаядими)?

458. 27- расмда аниқланиш соҳаси [—2; 2] оралиқ бўлган бирор функциянинг бир қисми тасвирланган. Бу функция: а) жуфт; б) тоқ эканини билган ҳолда унинг графигини ясанг.

Бу функция [—2; 2] оралиқда қандай қийматлар қабул қилишини; унинг қайси оралиқда ўсишини ва қайси оралиқда камайишини аниқланг.

Такрорлаш учун машқлар

459. $b_1 = -10$, $b_9 = 1{,}4$ эканини билган ҳолда (b_n) арифметик прогрессиянинг дастлабки 20 та ҳадининг йиғиндисини топинг.

460. Қаср шаклида ифодаланг:

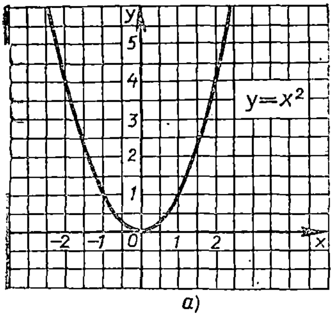
а) $\frac{-2x+10}{x^2-10x+25}+\frac{16}{3x-15}+1$; б) $\frac{3y+18}{y^2+12y+36}+\frac{15y+57}{7y+42}-2$.

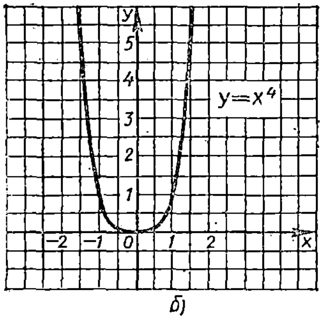
20. $y = x^n$ ФУНКЦИЯ

$y = x^n$ формула билан берилган функцияни кўриб чиқамиз; бунда x — эркли ўзгарувчи, n эса натурал сон. Бундай функция **натурал кўрсаткичли даражали функция** дейилади.

$n = 1$, 2 ва 3 бўлгандаги, яъни $y = x$, $y = x^2$ ва $y = x^3$ даражали функцияларни биз кўриб чиққан эдик. Уларнинг хоссалари ва графиклари бизга маълум. Энди даражали функциянинг хоссаларини ва истаган натурал n да унинг графиги хусусиятларини аниқлаймиз.

x^n ифода (бунда n — натурал сон) истаган x да маънога эга. Шунинг учун натурал кўрсаткичли даражали функциянинг аниқланиш соҳаси ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами бўлади.





28- расм

Аввал n кўрсаткич жуфт сон бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. n жуфт бўлганда $y = x^n$ функциянинг хоссалари $y = x^2$ функциянинг хоссаларига ўхшаш.

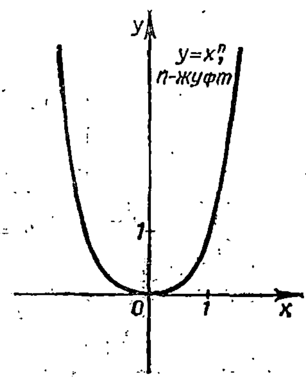
1. Агар $x=0$ *бўлса,* $y=0$ *бўлади.* Функциянинг графиги координаталар бошидан ўтади.

2. Агар $x \neq 0$ *бўлса,* $y > 0$ *бўлади.* Бу мусбат соннинг ҳам, манфий соннинг ҳам жуфт даражаси мусбат бўлишидан келиб чиқади. Функциянинг графиги биринчи ва иккинчи координата чоракларида жойлашган.

3. ***Функция жуфт бўлади.*** Бу n жуфт бўлганда $(-x)^n = x^n$ тенглик истаган x учун тўғри бўлишидан келиб чиқади. Функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик.

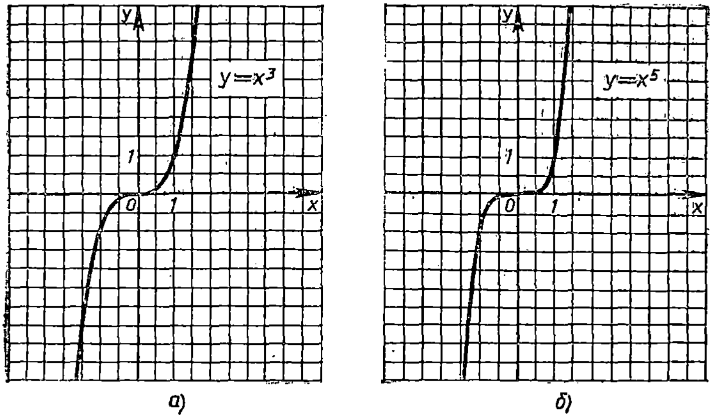
4. ***Функция*** $[0; +\infty)$ ***оралиқда ўсади ва*** $(-\infty; 0]$ ***оралиқда камаяди.***

Ҳақиқатан ҳам, $x_2 > x_1 \geqslant 0$ бўлсин. Агар $x_1=0$ бўлса, $x_2^n > x_1^n$ экани аниқ. Агар $x_1 > 0$ бўлса, у ҳолда n та бир хил $x_2 > x_1$ тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб, $x_2^n > x_1^n$ тўғри тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак, $[0;+\infty)$ оралиқда функция ўсади. $[0; +\infty)$ оралиқда функция ўсишидан ва графиги ординаталар ўқига нисбатан симметриклигидан унинг $(-\infty; 0]$ оралиқда камайиши келиб чиқади.



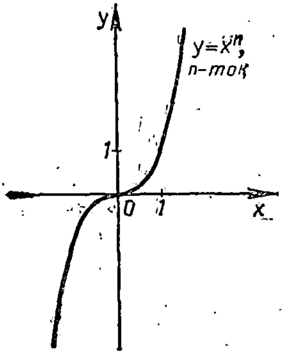
29- расм

28- расмда $y = x^2$ ва $y = x^4$ функцияларнинг графиклари тасвирланган. 29- расмда жуфт даражали $y=x^n$ функциянинг графиги қандай кўринишда бўлиши кўрсатилган.



30- расм

Энди n тоқ бўлгандаги натурал кўрсаткичли даражали функциянинг хоссаларини кўриб чиқамиз. Бу хоссалар $y=x^3$ функциянинг хоссаларига ўхшаш.



31- расм

1. ***Агар $x=0$ бўлса, $y=0$ бўлади.*** Функциянинг графиги координаталар бошидан ўтади.

2. ***Агар $x>0$ бўлса, $y>0$ бўлади; агар $x<0$ бўлса, $y<0$ бўлади.*** Функциянинг графиги биринчи ва учинчи координата чоракларида жойлашган.

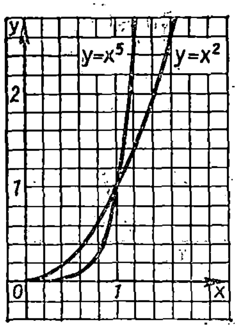
3. ***Функция тоқ бўлади.*** Функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрик.

4. ***Функция бутун аниқланиш соҳасида ўсади.***

Бу хоссаларнинг исботи жуфт кўрсаткичли даражали функциянинг хоссасига ўхшаш.

30- расмда $y=x^3$ ва $y=x^5$ функцияларнинг графиклари тасвирланган. 31- расмда n тоқ кўрсаткичи 1 дан катта бўлган $y=x^n$ функциянинг графиги қандай кўринишда бўлиши кўрсатилган.

Даражали функцияларни $(0; +\infty)$ оралиқда кўриб чиқиб, бу функция графигининг бир хусусиятини айтиб ўтамиз. Ҳар бир график (32- расм) (1; 1) нуқта-



32- расм

дан ўтади. $(0;\ 1)$ оралиқда n қанчалик катта бўлса, график x ўқига шунчалик яқин жойлашади. $(1;\ +\infty)$ оралиқда n қанчалик катта бўлса, график x ўқидан шунчалик узоқроқда жойлашади.

Энди даражали функция қандай қийматлар қабул қилиши мумкинлигини кўриб чиқамиз.

Биз $x \geqslant 0$ да ва истаган натурал n да $y = x^n$ функциянинг қийматлари номанфий эканини аниқладик. Истаган номанфий сон $y = x^n$ функциянинг бирор $x \geqslant 0$ даги қиймати эканини исботлаш мумкин. Бундан жуфт кўрсаткичли даражали функциянинг қийматлари ҳамма номанфий сонлар ва фақат улар бўлиши, тоқ кўрсаткичли даражали функциянинг қийматлари эса ҳамма ҳақиқий сонлар бўлиши келиб чиқади.

Функция қабул қила оладиган ҳамма қийматлар **функциянинг қийматлари соҳасини** ҳосил қилади.

Шундай қилиб, ***жуфт кўрсаткичли даражали функциянинг қийматлари соҳаси номанфий сонлар тўплами бўлади; тоқ кўрсаткичли даражали функциянинг қийматлари соҳаси ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами бўлади.***

461. Функция $y = x^{36}$ формула билан берилган. $x=3;\ 0;\ 5$ бўлганда шу функциянинг қийматларини ноль билан таққосланг.

462. $y = x^{49}$ функциянинг қийматини $x = -9;\ 0;\ 7$ бўлганда ноль билан таққосланг.

463. Функция $f(x) = x^{20}$ формула билан берилган. Қуйидагиларни таққосланг:

а) $f(3,7)$ ва $f(4,2)$; в) $f(-7)$ ва $f(6)$;
б) $f(-5,2)$ ва $f(-6,5)$; г) $f(31)$ ва $f(-28)$.

464. Функция $g(x) = x^{35}$ формула билан берилган. Таққосланг:

а) $g(8,9)$ ва $g(7,6)$; в) $g(-10)$ ва $g(7)$;
б) $g(-4,6)$ ва $g(-5,7)$; г) $g(-63)$ ва $g(63)$.

465. Даражаларнинг қийматларини таққосланг:

а) 5^6 ва 7^6; в) $0,8^6$ ва 1; д) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ ва $\left(-\frac{1}{3}\right)^6$;
б) $0,3^6$ ва $0,2^6$; г) $(-8)^6$ ва $(-9)^6$; е) $(-1,2)^6$ ва $(-1)^6$.

466. Таққосланг:

а) 2^7 ва 3^7; в) $0,83^7$ ва 1; д) $\left(-\frac{1}{5}\right)^7$ ва $\left(-\frac{1}{6}\right)^7$;
б) $0,8^7$ ва $0,9^7$; г) $(-5)^7$ ва $(-6)^7$; е) $(-0,9)^7$ ва $(-1)^7$.

467. $A(2;\ 1024)$, $B(-2;\ 1024)$, $C(-3;\ -79401)$ нуқталар $y=x^{10}$ функциянинг графигига тегишлими?

468. $A(2;\ 128)$, $B(-2;\ -128)$, $C(-3;\ 2187)$ нуқта $y=x^7$ функциянинг графигига тегишлими?

469. Микрокалькулятордан фойдаланиб, аргументнинг қуйидаги қийматларида $y=x^5$ функциянинг қийматини 0,01 гача аниқлик билан топинг:

а) $x=0{,}72$; б) $x=2{,}6$; в) $x=-3{,}4$.

470. 29- расмдан ёки 31- расмдан фойдаланиб, қуйидаги тенглама нечта ечимга эга бўлишини аниқланг:

а) $x^{16}=2$; в) $x^8=-3$;
б) $x^{34}=0$; г) $x^{21}=-7$.

471. 33- расмда $y=x^4$ функциянинг графиги тасвирланган. График бўйича x нинг шундай қийматини топингки, унда а) $y=5$; б) $y=3{,}5$; в) $y=8$ бўлсин.

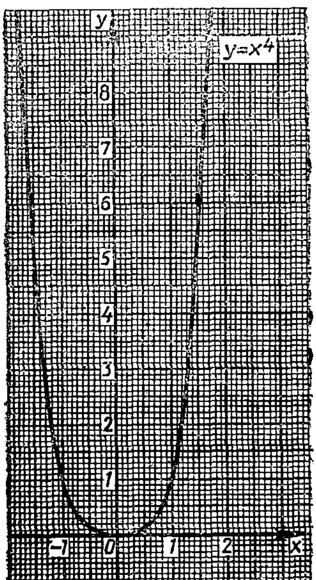
472. Графикдан фойдаланиб (33- расмга қаранг), тенгламани ечинг:

а) $x^4=6$; б) $x^4=8{,}5$.

473. Тенгламани график усулда ечинг:

а) $x^3=2$; б) $x^3=4$; в) $x^3=-5$.

474. Аргументнинг шундай қийматини кўрсатингки, унда $y=x^6$ функциянинг қиймати 2^6; 10^6; 10^{12}; 10^{18} дан катта бўлсин.



33- расм

475. Аргументнинг шундай қийматини кўрсатингки, унда $y=x^5$ функциянинг қиймати -3^5; -10^5; -10^{21} дан кичик бўлсин.

476. Қуйидаги функцияларнинг графиклари қайси координата чоракларида жойлашган: а) $y=x^{40}$; б) $y=x^{123}$?

477. Қирраси 10 см га тенг бўлган ёғоч кубнинг массаси 700 г. Шу куб m массасининг (г билан) унинг қирраси x нинг узунлигига (см билан) боғлиқлигини формула билан ифодаланг. Бу боғлиқликнинг графигини ясанг. Графикдан фойдаланиб:

а) қирраси 2 см, 5 см га тенг бўлган кубнинг массасини топинг;

б) массаси 30 г, 100 г бўлган кубнинг қиррасини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

478. $y=x^3$ функциянинг графигидан ва чизиқли функциянинг графигидан фойдаланиб, тенгламаларни ечинг:

а) $x^3=x+1$; б) $x^3=2x$; в) $x^3=2x+1$.

479. $c_9=81$, $q=\sqrt{3}$ эканини билган ҳолда (c_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки ўн учта ҳадининг йиғиндисини топинг.

480. Ушбу $y=x^{12}-x^6$, $y=x^9-x^5$, $y=x^{10}-x^5$, $y=\frac{x}{x^4+x^2+1}$ функциялар орасидан: а) жуфтларини; б) тоқларини кўрсатинг.

481. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{1-y}{1+y}+\frac{y^2+6y}{y^2-1}:\frac{6+y}{1+y}$; б) $\frac{4x^2-49}{2x+5}\cdot\frac{1}{4x^2+14x}-\frac{2x+7}{4x^2-10x}$.

9-§. n-ДАРАЖАЛИ ИЛДИЗ

21. n-ДАРАЖАЛИ ИЛДИЗНИНГ ТАЪРИФИ

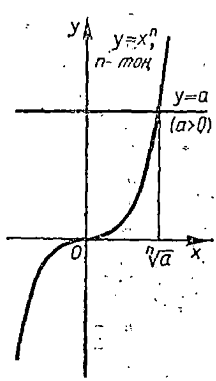
Маълумки, a сонининг квадрат илдизи деб квадрати a га тенг сонга айтилади. Истаган натурал n-даражали илдиз шунга ўхшаш таърифланади.

***a* сонининг *n*-даражали илдизи деб шундай сонга айтиладики, у соннинг *n*-даражаси *a* га тенг бўлади.**

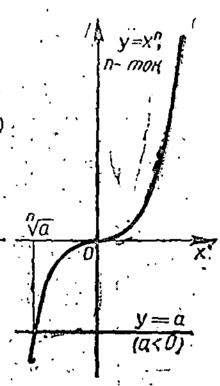
Масалан, 32 сонининг бешинчи даражали илдизи 2 сонидир, чунки $2^5=32$; 81 нинг тўртинчи даражали илдизи 3 ва -3, чунки $3^4=81$ ва $(-3)^4=81$. Соннинг иккинчи даражали илдизини квадрат илдиз, учинчи даражали илдизини куб илдиз деб аташ қабул қилинган.

a сонининг n-даражали илдизи ҳар доим ҳам мавжуд бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаймиз.

Тоқ кўрсаткичли даражали функциянинг хоссаларидан n тоқ бўлганда истаган a сони учун n- даражаси a га тенг бўладиган ягона сон мавжуд экани келиб чиқади (34- ва 35- расм). Бошқача айтганда, агар a тоқ натурал сон бўлса, у ҳолда истаган соннинг n-даражали илдизи мавжуд бўлиб, у ягонадир. a сонининг n тоқ даражали илдизини ёзиш учун $\sqrt[n]{a}$ белгилашдан фойда-



34- расм



35- расм

ланилади (бундай ўқилади: „a нинг n-даражали илдизи“). n сони **илдизнинг кўрсаткичи** дейилади, илдиз ишораси остидаги ифода эса — **илдиз остидаги ифода** дейилади.

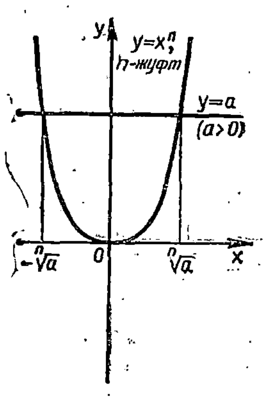
Мисоллар келтирамиз.

$\sqrt[3]{-125}$ ёзув — 125 нинг куб илдизини билдиради. Илдизнинг таърифидан $\sqrt[3]{-125}=-5$ экани келиб чиқади, чунки $(-5)^3=-125$. $\sqrt[7]{80}$ ёзув 80 нинг еттинчи даражали илдизини билдиради. $\sqrt[7]{80}$ сони иррационал сон. Унинг 0,01 гача аниқликдаги қиймати 1,87 га тенг.

Жуфт кўрсаткичли даражали функциянинг хоссаларидан, агар n жуфт сон бўлса, $a>0$ да n-даражаси a га тенг бўлган иккита қарама-қарши сон мавжуд бўлиши келиб чиқади (36-расм). $a=0$ бўлганда бундай сон битта бўлади (0 сони), $a<0$ да бундай сонлар бўлмайди. Бошқача айтганда, агар n жуфт сон бўлса, a мусбат соннинг n-даражали иккита илдизи мавжуд бўлади. Бу илдизлар қарама-қарши сонлар бўлади. Агар $a=0$ бўлса, a нинг n-даражали илдизи нолга тенг. Агар $a<0$ ва n жуфт сон бўлса, у ҳолда a нинг n-даражали илдизи мавжуд бўлмайди.

n жуфт сон бўлганда $\sqrt[n]{a}$ белги билан a нинг n-даражали номанфий илдизи белгиланади: a нинг (бунда $a>0$) n-даражали манфий илдизи $-\sqrt[n]{a}$ кўринишда ёзилади. $\sqrt[n]{a}$ ифода $a<0$ ва n жуфт бўлганда маънога эга эмас.

Масалан, $\sqrt[6]{64}$ ёзув 64 нинг олтинчи даражали номанфий илдизини билдиради. Бундан $\sqrt[6]{64}=2$, чунки 2 номанфий сон ва $2^6=64$.

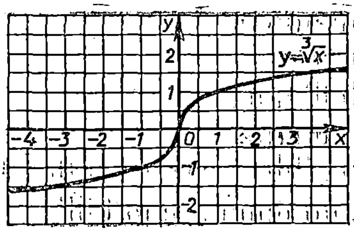


36-расм

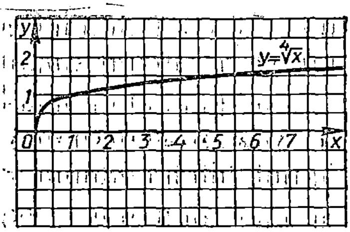
Агар $n=2$ бўлса, илдиз кўрсаткичи ёзилмайди.

Шундай қилиб, **агар n тоқ сон бўлса, $\sqrt[n]{a}$ ифода истаган a да маънога эга; агар n жуфт сон бўлса, $\sqrt[n]{a}$ ифода фақат $a\geqslant 0$ да маънога эга.**

n-даражали илдиз таърифидан a нинг $\sqrt[n]{a}$ ифода маънога эга бўладиган ҳамма қийматларида $(\sqrt[n]{a})^n=a$ тенглик тўғри экани келиб чиқади.



37-расм



38-расм

37- ва 38- расмларда $y=\sqrt[3]{x}$ ва $y=\sqrt[4]{x}$ функцияларнинг графиклари ясалган. $y=\sqrt[3]{x}$ функция ҳамма x лар учун аниқланган, $y=\sqrt[4]{x}$ функция $x \geqslant 0$ учун аниқланган. Бу функцияларнинг ҳар бири ўсувчидир.

Умуман, $y=\sqrt[n]{x}$ формула билан ифодаланган функция n тоқ бўлганда ҳамма ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган, n жуфт бўлганда номанфий сонлар тўпламида аниқланган. Исталган натурал n учун бу функция ўсувчидир.

$a \geqslant 0$ да $\sqrt[n]{a}$ ифода n жуфт бўлганда ҳам, тоқ бўлганда ҳам маънога эга бўлади ва бу ифоданинг қиймати номанфий сон бўлади. Уни **a сонининг n- даражали арифметик илдизи** дейилади.

Таъриф. **Номанфий a сонининг n- даражали арифметик илдизи деб n- даражаси a га тенг бўлган номанфий сонга айтилади.**

Манфий сонинг тоқ даражали илдизини шу даражадаги арифметик илдиз билан ифодалаш мумкин. Масалан, $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[5]{-29}=-\sqrt[5]{29}$.

Умуман, агар $a<0$ ва n тоқ сон бўлса, $\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$ бўлади. Ҳақиқатан, n тоқ бўлганда

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \text{ ва } \left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n=-(-a)=a.$$

n- даражали илдиз белгиси ёрдамида $x^n=a$ тенгламанинг ечими ёзилади. Мисоллар келтирамиз.

1- мисол. $x^6=7$ тенгламани ечамиз.

Бу тенгламанинг иккита илдизи бўлиб, улар қарама-қарши сонлардир (36- расмга қаранг). Мусбат илдиз олтинчи даражаси 7 га тенг бўлган мусбат сон бўлади, яъни $\sqrt[6]{7}$. Манфий илдиз $-\sqrt[6]{7}$ га тенг.

2- мисол. $x^4=81$ тенгламани ечамиз.

Тенгламанинг иккита илдизи бор:

$$x_1=-\sqrt[4]{81}=-3 \text{ ва } x_2=\sqrt[4]{81}=3.$$

3- мисол. $x^3=5$ тенгламани ечамиз.

Тенглама биргина илдизга эга (34- расмга қаранг). Бу илдиз учинчи даражаси 5 га тенг бўлган сондир, яъни $\sqrt[3]{5}$.

4- мисол. $x^5=-50$ тенгламани ечамиз.

Тенгламанинг биргина илдизи бор (35- расмга қаранг). Бу илдиз бешинчи даражаси -50 га тенг бўлган сондир, яъни $x=\sqrt[5]{-50}$. $\sqrt[5]{-50}$ ни арифметик илдиз орқали ифодалаб, $x=-\sqrt[5]{50}$ ни ҳосил қиламиз.

482. а) $\frac{1}{2}$ сони $\frac{1}{16}$ нинг тўртинчи даражали арифметик илдизи эканини исботланг.

б) 3 сони 27 нинг арифметик куб илдизи эканини исботланг.

в) -2 сони 16 нинг тўртинчи даражали арифметик илдизи эмаслигини исботланг.

г) 0,1 сони 0,0001 нинг бешинчи даражали арифметик илдизи эмаслигини исботланг.

483. Тенгликнинг тўғрилигини исботланг:

а) $\sqrt{361}=19$; д) $\sqrt[10]{1}=1$;

б) $\sqrt[3]{343}=7$; е) $\sqrt[7]{0}=0$;

в) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$; ж) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$;

г) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$; з) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

484. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[12]{1}$; д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; ж) $\sqrt[3]{-0,027}$;

б) $\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; е) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; з) $\sqrt[4]{0,0625}$.

485. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[9]{512}$; в) $\sqrt[8]{0}$; д) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; ж) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$;

б) $\sqrt[3]{1331}$; г) $\sqrt[7]{-128}$; е) $\sqrt[5]{0,00001}$; з) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

486. 39- расмда $y=x^3$ функциянинг графиги тасвирланган. Шу график ёрдамида қуйидагиларни топинг:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[3]{-4}$; г) $\sqrt[3]{2}$.

487. $y=x^4$ функциянинг графиги бўйича (33- расмга қаранг) топинг:

а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt[4]{8}$.

488. $y=\sqrt[3]{x}$ функциянинг графигидан фойдаланиб (37- расмга қаранг), қуйидагиларни таққосланг:

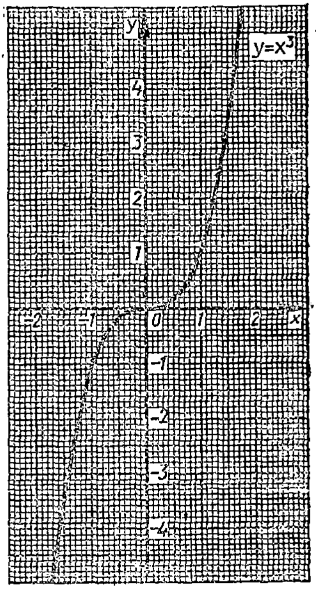
а) $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{-4}$ ва $\sqrt[3]{-2}$; в) $\sqrt[3]{-0{,}3}$ ва $\sqrt[3]{0{,}6}$.

489. $y=\sqrt[4]{x}$ функциянинг графигидан фойдаланиб (38- расмга қаранг), қуйидагиларни таққосланг:

а) $\sqrt[4]{5}$ ва $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[4]{0{,}5}$ ва $\sqrt[4]{0{,}8}$; в) 0 ва $\sqrt[4]{0{,}02}$.

490. Қуйидаги сонлар қандай иккита кетма-кет бутун сонлар орасида ётади:

а) $\sqrt[3]{3{,}5}$; б) $\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\sqrt[4]{52}$?



39- расм

491. E (81; 3), F (81; -3), K (-16; -2), L (0,0001; 0,1) нуқта $y=\sqrt[4]{x}$ функциянинг графигига тегишли бўладими?

492. A (8; 2), B (216; 6), C (27; -3), D (-125; -5) нуқта $y=\sqrt[3]{x}$ функциянинг графигига тегишли бўладими?

493. $\sqrt[3]{x}$ ифоданинг қийматини баҳоланг, бунда:

а) $1 \leqslant x \leqslant 8$; б) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; в) $-27 \leqslant x \leqslant 0$.

494. $\sqrt[4]{x}$ ифоданинг қийматини баҳоланг, бунда:

а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $1 < x < 81$; в) $256 \leqslant x \leqslant 625$.

495. Ифода маънога эгами:

а) $\sqrt[3]{-19}$; в) $\sqrt[4]{-5}$; д) $\sqrt[8]{(-2)^3}$;
б) $\sqrt[7]{-0{,}28}$; г) $\sqrt[5]{(-3)^3}$; е) $\sqrt[10]{(-7)^2}$?

496. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[5]{-32}$; д) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-8}$;
б) $\sqrt[7]{-1}$; г) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}$;
в) $-2\sqrt[4]{81}$; ж) $12-6\sqrt[3]{0{,}125}$;
г) $-4\sqrt[3]{27}$; з) $1+10\sqrt[4]{0{,}0081}$.

497. Манфий соннинг n-даражали илдизини шу даражали арифметик илдиз билан ифодаланг:

а) $\sqrt[3]{-31}$; б) $\sqrt[5]{-17}$; в) $\sqrt[11]{-2}$; г) $\sqrt[17]{-6}$.

498. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{-125}$; в) $-5\sqrt[4]{16}$; д) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}+\sqrt{2,25}$;

б) $\sqrt[8]{0}$; г) $-3\sqrt[3]{-64}$; е) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}$.

499. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $(\sqrt{10})^2$; в) $(-\sqrt[4]{12})^4$; д) $\sqrt[6]{2^6}$; ж) $-\sqrt[6]{25^3}$;

б) $(\sqrt[3]{5})^3$; г) $(2\sqrt[5]{-2})^5$; е) $2\sqrt[4]{(-3)^4}$; з) $\sqrt[6]{64^2}$.

500. Ҳисобланг:

а) $(\sqrt[4]{7})^4$; в) $(2\sqrt[4]{3})^4$; д) $\sqrt[5]{7^5}$; ж) $\sqrt[10]{32^2}$;

б) $(\sqrt[7]{-3})^7$; г) $(-3\sqrt[3]{2})^3$; е) $5\sqrt[3]{(-2)^3}$; з) $-\sqrt[6]{27^2}$.

501. a нинг қандай қийматларида тенглик тўғри бўлади:

а) $\sqrt{a^2}=a$; б) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; в) $\sqrt[3]{a^3}=a$?

502. Тенгламани ечинг:

а) $x^3=4$; г) $x^4=-10$; ж) $x^6=64$; к) $x^5+1=0$;

б) $x^3=-4$; д) $x^3=8$; з) $x^8=-1$; л) $x^{10}+1=0$;

в) $x^4=10$; е) $x^5=-32$; и) $x^3-27=0$; м) $x^{10}-1=0$.

503. Тенгламанинг илдизларини топинг:

а) $16x^4-1=0$; г) $0,02x^6-1,28=0$;

б) $\frac{1}{8}x^5+4=0$; д) $0,3x^9-2,4=0$;

в) $-0,01x^3+10=0$; е) $-\frac{3}{4}x^8+12\frac{3}{4}=0$.

504. Тенгламани ечинг:

а) $x^5=8$; г) $x^{10}+6=0$;

б) $x^7=-5$; д) $0,03x^3+0,81=0$;

в) $x^4-19=0$; е) $16x^4-625=0$.

Такрорлаш учун машқлар

505. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=(x-2)^2$; б) $y=-\frac{1}{2}x^2+5$; в) $y=2x^2+5x$.

506. Тенгламани ечинг:

а) $\frac{x}{x-2}-\frac{8}{x+5}=\frac{14}{x^2+3x-10}$;

б) $\frac{y}{2y-3}+\frac{1}{y+7}+\frac{17}{2y^2+11y-21}=0.$

507. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{a-5}{a^2-5a+25}-\frac{12a-61}{a^3+125}\right):\frac{3a-18}{2a^2-10a+50}.$$

22. *n*- ДАРАЖАЛИ АРИФМЕТИК ИЛДИЗНИНГ ХОССАЛАРИ

Бизга арифметик квадрат илдизнинг қуйидаги хоссалари маълум:

агар $a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

агар $a\geqslant 0$ ва $b>0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ бўлади.

n- даражали арифметик илдиз $n>2$ бўлганда ҳам худди шунга ўхшаш хоссаларга эга бўлади.

1- теорема. ***Агар $a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ бўлади.***

Ўзгарувчиларнинг кўрсатилган қийматларида қуйидаги икки шарт бажарилишини исботлаймиз: 1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geqslant 0$ ва 2) $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$.

$a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$ да $\sqrt[n]{ab}$ ва $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ ифодаларнинг ҳар бири маънога эга. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ ифоданинг қиймати номанфий, чунки арифметик илдизнинг таърифига кўра $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$ ва $\sqrt[n]{b}\geqslant 0$. Бундан ташқари, кўпайтма даражасининг хоссасига кўра

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab.$$

Демак, n-даражали арифметик илдизнинг таърифига кўра $a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$ да $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ тенглик тўғри бўлади.

Исботланган теорема илдиз остидаги кўпайтувчилар сони иккитадан ортиқ бўлган ҳоллар учун ҳам тааллуқли. Масалан, агар $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ ва $c\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{(ab)c}=\sqrt[n]{ab}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Шундай қилиб, n- даражали арифметик илдиз қуйидаги хоссага эга: ***истаган натурал n да номанфий кўпайтувчилардан олинган илдиз бу кўпайтувчилар илдизларининг кўпайтмасига тенг.***

2- теорема. ***Агар $a\geqslant 0$ ва $b>0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ бўлади.***

Бунинг исботи 1- теореманинг исботига ўхшаш ўтказилади.

Шундай қилиб, n- даражали арифметик илдизнинг яна битта хоссаси ўринли: ***истаган натурал n да сурати номанфий, махражи эса мусбат бўлган касрнинг илдизи суратининг илдизини махражининг илдизига бўлинганига тенг.***

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ва $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ тенгликнинг ҳар бирида уларнинг чап ва ўнг қисмларининг ўринларини алмаштириб, n- даражали арифметик илдизларни кўпайтириш ва бўлиш қоидаларини ифодаловчи тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ бунда } a \geqslant 0 \text{ ва } b \geqslant 0;$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ бунда } a \geqslant 0 \text{ ва } b > 0.$$

Исботланган хоссаларнинг қўлланилишига мисоллар келтирамиз.

1- мисол. $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Кўпайтманинг илдизи ҳақидаги теоремага кўра:

$$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6.$$

2- мисол. $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[3]{4}$ илдизларни бир-бирига кўпайтирамиз.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

3- мисол. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Касрнинг илдизи ҳақидаги теоремага кўра:

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

n- даражали илдизнинг бошқа хоссаларини кўриб чиқамиз. Мисолдан бошлаймиз. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ ва $\sqrt[6]{64}$ ифодаларнинг қийматларини таққослаймиз:

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

Бу ифодаларнинг қийматлари тенг эканини кўрамиз, яъни

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}.$$

3- теорема. ***Агар n ва k — натурал сонлар бўлиб, $a \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ бўлади.***

$a \geqslant 0$ бўлгани учун $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ ва $\sqrt[nk]{a}$ ифодалар маънога эга ва номанфийдир. Бундан ташқари

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k} = a.$$

Демак, арифметик илдизнинг таърифига кўра $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ тенглик тўғри экан.

4- теорема. ***Агар n, k ва m — натурал сонлар бўлиб, $a \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ бўлади.***

3- теоремага кўра:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Биз n- даражали арифметик илдиз қуйидаги хоссага эга эканини исботладик: *агар илдиз кўрсаткичи ва илдиз остидаги ифоданинг даража кўрсаткичи айни бир натурал сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, илдизнинг қиймати ўзгармайди.*

Илдизнинг бу хоссаси баъзан илдизнинг асосий хоссаси дейилади.

3- ва 4- теоремаларнинг қўлланилишига мисоллар келтирамиз.

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ифодани соддалаштирамиз.

2 кўпайтувчини квадрат илдиз ишораси остига киритамиз:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}}.$$

Илдизнинг илдизи ҳақидаги теоремага кўра:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3}.$$

Илдизнинг асосий хоссасини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

508. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{625 \cdot 16}$; д) $\sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}}$; ж) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$,

б) $\sqrt[4]{16 \cdot 0{,}0001}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 81}$; е) $\sqrt[6]{64 + \frac{1}{729}}$; д) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

509. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[4]{7^4 \cdot 2^4}$; в) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 0{,}5^{15}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{2^6}{3^{12}}}$;

б) $\sqrt[6]{2^6 \cdot 3^{12}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{2^4}{7^4}}$; е) $\sqrt[3]{\frac{6^9}{11^6}}$.

510. Илдизнинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{10\,000 \cdot \frac{1}{81}}$;

б) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 125}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

511. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$; в) $\sqrt[4]{\frac{125}{0{,}2}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}0625}}$.

512. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$; б) $\sqrt[4]{54 \cdot 24}$; в) $\sqrt[3]{\frac{54}{0{,}25}}$.

513. Ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10}$; в) $\sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2}$; д) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$;

б) $\sqrt[4]{50} \cdot \sqrt[4]{200}$; г) $\sqrt[7]{2^4 \cdot 7^3} \cdot \sqrt[7]{2^3 \cdot 49^2}$; е) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$.

514. Касрнинг қийматини топинг:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$; в) $\frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{2500}}{\sqrt[4]{4}}$.

515. Ҳисобланг:

а) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; б) $\sqrt[4]{8 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 27}$; в) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$.

516. Ифодани бирҳад кўринишида тасвирланг (ҳарфлар билан номанфий сонлар белгиланган):

а) $\sqrt{25a^2}$; б) $\sqrt[3]{8b^3}$; в) $\sqrt[4]{81c^4}$; г) $\sqrt[5]{32x^{10}}$.

517. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг (ҳарфлар билан номанфий сонлар белгиланган):

а) $\sqrt{4a}$; б) $\sqrt{18b}$; в) $\sqrt[3]{24c}$; г) $\sqrt[5]{7a^6}$; д) $\sqrt[4]{81b^6}$; е) $\sqrt[6]{10c^8}$.

518. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

а) $3\sqrt{2}$; в) $2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; д) $b\sqrt[6]{2}$, бунда $b<0$;

б) $5\sqrt[3]{3}$; г) $a\sqrt[4]{5}$, бунда $a>0$; е) $c\sqrt[10]{3c^2}$, бунда $c \geqslant 0$.

519. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг:

а) $\sqrt[4]{16c}$; в) $\sqrt{50x^3}$, бунда $x>0$;

б) $\sqrt[3]{27y}$; г) $\sqrt[4]{5a^6}$, бунда $a<0$.

520. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt[3]{5}$; в) $3\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$; г) $a\sqrt[3]{2}$, бунда $a>0$;

521. Ифодани каср шаклида тасвирланг:

а) $\sqrt{\frac{2}{25}}$; г) $\sqrt[4]{5\frac{1}{3}}$; ж) $\sqrt[3]{\frac{a^9}{6}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$; д) $\sqrt{\frac{a^2}{3}}$, бунда $a\geqslant 0$; з) $\sqrt[4]{\frac{7}{b^{12}}}$, бунда $b>0$.

в) $\sqrt[3]{1\frac{3}{5}}$; е) $\sqrt[4]{\frac{5}{b^4}}$, бунда $b<0$;

522. Ифодани $a\sqrt[n]{b}$ кўринишга келтиринг, бунда a — рационал сон, b — натурал сон:

а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[4]{3}}$; г) $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$; д) $\frac{18}{\sqrt[4]{216}}$.

523. Ифодани $a\sqrt[n]{b}$ кўринишга келтиринг, бунда a — рационал сон, b — натурал сон:

а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$; г) $\frac{3}{\sqrt[4]{6}}$; д) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}}$.

524. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$; ж) $\sqrt[9]{7^6}$;

б) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; з) $\sqrt[12]{5^4}$;

в) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$; и) $\sqrt[18]{36^3}$;

г) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}$, бунда $b\geqslant 0$; к) $\sqrt{4\sqrt[3]{4}}$;

д) $\sqrt{c\sqrt[3]{c^2}}$, бунда, $c\geqslant 0$; л) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$, бунда $a\geqslant 0$;

е) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$, бунда, $x\geqslant 0$; м) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^3}}$, бунда $b\geqslant 0$.

525. Соддалаштиринг:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{a\sqrt{a}}$, бунда $a\geqslant 0$; д) $\sqrt[12]{25^3}$;

б) $\sqrt[8]{\sqrt[4]{12}}$; г) $\sqrt[4]{5^2}$; е) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

526. Квадрат илдизлар жадваллари ёрдамида ҳисобланг:

а) $\sqrt[4]{18}$; б) $\sqrt[4]{1,62}$; в) $\sqrt[4]{3,124}$; г) $\sqrt[4]{6,25}$.

527. Сонларни таққосланг:

а) $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[6]{5}$; в) $\sqrt[6]{8}$ ва $\sqrt{3}$; д) $\sqrt[5]{5}$ ва $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$;

б) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[6]{7}$; г) $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[12]{45}$; е) $\sqrt[3]{7}$ ва $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$.

528. Айирманинг ишорасини аниқланг:

а) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt[4]{4}-\sqrt[5]{5}$; г) $\sqrt[5]{5}-\sqrt[6]{6}$.

529. Ифоданинг қиймати рационал сон бўлишини исботланг:

а) $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$; б) $\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$.

530. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(3+2\sqrt{6})^2+(3-2\sqrt{6})^2$; б) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2$.

531. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$;

б) $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Такрорлаш учун машқлар

532. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{a-b}{a^2-ab}-\frac{1}{a^2-b^2}:\frac{a+b}{(b-a)^2}\right)\cdot\frac{(a+b)^2}{b^2}$;

б) $\left(\frac{1}{2y+1}-\frac{3}{8y^3+1}+\frac{3}{4y^2-2y+1}\right):\left(2y-\frac{4y-1}{2y+1}\right)$.

533. (c_n) геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг, бунда:

а) $c_1=3\sqrt{3},\ q=\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $c_1=2\sqrt{3};\ q=\sqrt[4]{3}$;

б) $c_1=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ q=\sqrt{3}-\sqrt{2}$; г) $c_1=\sqrt{2},\ q=\sqrt[6]{6}$.

534. Тенгламани ечинг:

а) $x^4=36$; б) $x^5=1024$; в) $x^3=\sqrt{2}$.

535. Тенгсизлик a нинг истаган қийматида тўғри бўлишини исботланг:

а) $a^4+1\geqslant a^3+a$; б) $a^4-2a^3-8a+16\geqslant 0$.

10-§. РАЦИОНАЛ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖА ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

23. КАСР КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖАНИНГ ТАЪРИФИ

a^n ифода n бутун сон бўлганда ва $a\neq 0$ да маънога эга эканини биламиз. Масалан, $(-3)^5$ ифода ҳар бири -3 га тенг бўлган бешта кўпайтувчининг кўпайтмасини англатади. 2^{-6} сони 2^6 даражага тескари сонни англатади. Энди кўрсаткичи бутун сон бўлмай, каср сон бўлган даража тушунчасини киритамиз.

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ тенглик (бунда $a>0$, m—бутун сон ва n—натурал сон), агар m сони n га бўлинса (яъни $\frac{m}{n}$—бутун сон бўлса), тўғри бўлади. Бу арифметик илдизнинг таърифидан келиб чиқади. Масалан, $\sqrt[7]{5^{21}}=5^{\frac{21}{7}}=5^3$, чунки $(5^3)^7=5^{21}$. Агар бу тенглик $\frac{m}{n}$ каср сон бўлган ҳолда ҳам ўринли деб қабул қилинса, у ҳолда даражанинг бутун кўрсаткичи учун тўғри бўлган ҳамма хоссалар мусбат асосли даражанинг каср кўрсаткичи учун ҳам бажарилади. Бу кейинги пунктда исботланади.

Таъриф. **Агар a — мусбат сон, $\frac{m}{n}$ — каср сон (m — бутун, n — натурал) бўлса, у ҳолда**

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

бўлади.

Таърифга кўра:

$$0{,}7^{\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{0{,}7^3};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{13}{10}}=\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}};\ 5^{-\frac{1}{6}}=5^{\frac{-1}{6}}=\sqrt[6]{5^{-1}}.$$

Асоси нолга тенг бўлган даража фақат мусбат каср кўрсаткич учун аниқланади: **агар $\frac{m}{n}$ — мусбат каср сон бўлса (m ва n — натурал сон), у ҳолда $0^{\frac{m}{n}}=0$ бўлади.**

Манфий асослар учун каср кўрсаткичли даража қаралмайди. $(-2)^{\frac{3}{4}}$, $(-8)^{\frac{1}{3}}$; $0^{-\frac{1}{2}}$ каби ифодалар маънога эга эмас.

Айни бир каср сонни сурати бутун ва махражи натурал сон бўлган каср кўринишида турли усуллар билан ифодалаш мумкинлигини биламиз. Масалан, 0,75 каср сонни каср кўринишида бундай ифодалаш мумкин:

$$\frac{3}{4},\ \frac{6}{8},\ \frac{9}{12},\ \frac{12}{16}\ \text{ва ҳоказо.}$$

r каср кўрсаткичли даражанинг қиймати r сонини каср кўринишида ёзиш усулига боғлиқ бўлмайди; r ни бутун соннинг натурал сонга нисбати кўринишида турли усуллар билан ифодалаб, доим бир хил натижани ҳосил қиламиз. Масалан,

$$2^{\frac{6}{8}}=\sqrt[8]{2^6}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}.$$

Буни умумий ҳолда кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, $a>0$, m — бутун, n ва k — натурал сон бўлсин. Каср кўрсаткичли даражанинг таърифидан ва илдизнинг асосий хоссасидан фойдаланиб,

$$a^{\frac{mk}{nk}}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу хосса нима учун каср кўрсаткичли даражалар манфий асос учун қаралмаслигини тушунишга имкон беради.

Каср кўрсаткичли даражанинг манфий асосга ҳам тааллуқли бўлиши сонни касрли даражага кўтариш амали каср кўрсаткич қандай кўринишда ифодаланганига боғлиқ бўлишига олиб келар эди. Жумладан, биз $(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$, $(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1$ деб қабул қилишимиз керак бўлар эди.

536. Каср кўрсаткичли даражаларни илдизлар билан алмаштиринг:

а) $7^{\frac{3}{5}}$; $5^{\frac{1}{7}}$; $6^{-\frac{1}{3}}$; $10^{-0,5}$;

б) $2,5^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $0,5^{0,5}$;

в) $a^{0,5}$; $b^{1,2}$; $c^{0,6}$;

г) $3x^{\frac{1}{2}}$; $(3x)^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}}$; $-y^{-\frac{2}{3}}$;

д) $(ab)^{\frac{2}{3}}$; $ab^{\frac{2}{3}}$; $(a+b)^{\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$;

е) $xy^{-1,5}$; $4(x-y)^{-1,5}$; $2x(x+y)^{-\frac{1}{8}}$.

537. Квадрат илдизлар жадвалидан фойдаланиб, ифоданинг қийматини вергулдан кейин иккита рақами бўлган ўнли каср кўринишида топинг:

а) $172^{\frac{1}{2}}$; б) $2,7^{\frac{1}{2}}$; в) $0,83^{0,5}$; г) $3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}$; д) $29^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}$.

538. Каср кўрсаткичли даражаларни илдизлар билан алмаштиринг:

а) $3^{\frac{1}{2}}$, $12^{\frac{3}{4}}$, $29^{\frac{1}{3}}$, $37^{-\frac{1}{4}}$;   б) $3,8^{0,6}$, $8,5^{-0,5}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

в) $5a^{\frac{1}{3}}$, $(2b)^{\frac{1}{4}}$, $-c^{\frac{3}{4}}$; г) $xy^{\frac{1}{2}}$, $(x+y)^{\frac{3}{5}}$, $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$.

539. Арифметик илдизни каср кўрсаткичли даража билан алмаштиринг:

а) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt[3]{143^2}$; д) $\sqrt[6]{\frac{1}{15}}$; ж) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^{-2}}}$; и) $\sqrt[4]{7+a}$;

б) $\sqrt{0,2}$; г) $\sqrt[5]{73^3}$; е) $\sqrt[8]{2^{-5}}$; з) $\sqrt[3]{2b}$; к) $\sqrt[6]{x^2+y^2}$.

540. Арифметик илдизларни каср кўрсаткичли даражалар билан алмаштиринг:

а) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{17^2}$, $\sqrt[5]{3^6}$, $\sqrt[8]{7^{-5}}$, $\sqrt[9]{0,125^2}$;

б) $\sqrt[7]{a^4}$, $\sqrt[8]{a^9}$, $\sqrt[12]{b^{-5}}$, $\sqrt[11]{5c^2}$, $\sqrt[3]{a-b}$.

541. Ҳисобланг:

а) $100^{\frac{1}{2}}$; в) $9^{-\frac{1}{2}}$; д) $0^{\frac{5}{6}}$; ж) $8^{1\frac{1}{3}}$; и) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $8^{\frac{1}{3}}$; г) $27^{-\frac{1}{3}}$; е) $81^{\frac{3}{4}}$; з) $0,25^{-\frac{3}{2}}$; к) $0,01^{-2,5}$.

542. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $25^{-\frac{1}{2}}$; д) $0,16^{\frac{3}{2}}$; ж) $0,001^{-\frac{2}{3}}$;

б) $25^{\frac{1}{2}}$; г) $32^{-\frac{1}{5}}$; е) $0,64^{-1,5}$; з) $0,008^{1\frac{1}{3}}$.

543. Ифода маънога эгами: $7^{-\frac{1}{3}}$; $(-7)^{\frac{1}{3}}$; $0^{-\frac{2}{3}}$; $0^{\frac{4}{9}}$?

544. Ифодадаги ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматларини кўрсатинг:

а) $x^{\frac{1}{2}}$; б) $(y-1)^{\frac{1}{3}}$; в) $(a+2)^{\frac{3}{5}}$; г) $b^{-\frac{4}{7}}$; д) $(c-5)^{-\frac{1}{3}}$.

545. $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$ ва $x^{\frac{1}{6}}$ ифодаларнинг қийматини баҳоланг, бунда:

а) $0<x<1$; б) $1<x<64$; в) $64<x<1\,000\,000$.

546. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=x^{\frac{1}{2}}$; б) $y=x^{\frac{1}{3}}$.

547. Таққосланг:

а) $2^{\frac{1}{2}}$ ва $3^{\frac{1}{2}}$; в) $5^{\frac{1}{2}}$ ва $5^{\frac{1}{3}}$;

б) $0,3^{\frac{1}{2}}$ ва $0,5^{\frac{1}{2}}$; г) $7^{\frac{1}{3}}$ ва $7^{\frac{2}{6}}$.

Такрорлаш учун машқлар

548. Тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирининг узунлиги иккинчисининг узунлигидан 4 см ортиқ. Агар бу тўғри тўртбурчакнинг юзи 21 $см^2$ га тенг бўлса, унинг диагонали узунлигини топинг. (Жавобни 0,1 см гача аниқликда беринг.)

549. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларидан бири иккинчисидан 2 см узун. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи 84 $см^2$ га тенг эканлиги маълум бўлса, шу учбурчак гипотенузасининг узунлигини топинг. (Жавобни 0,1 см гача аниқликда беринг.)

24. РАЦИОНАЛ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖАНИНГ ХОССАЛАРИ

Бутун кўрсаткичли даражанинг бизга маълум хоссалари истаган рационал кўрсаткичли даража учун ҳам ўринли. Уларни айтиб ўтамиз.

Истаган $a>0$ ва истаган p ва q рационал сонлар учун:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \tag{1}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}, \tag{2}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}; \tag{3}$$

истаган $a>0$ ва $b>0$ ҳамда истаган p рационал сон учун:

$$(ab)^p = a^p b^p, \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \tag{5}$$

Бу хоссаларни каср кўрсаткичли даражанинг таърифига, n-даражали илдизнинг хоссаларига ва бутун кўрсаткичли даражанинг хоссаларига таяниб исботлаш мумкин.

(1) хоссани исботлаймиз. Бу хоссани исботлаш усулини аввал хусусий мисолда кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, масалан, $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{5}$ бўлсин. $a>0$ да

$$a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$$

эканини исботлаймиз. $\frac{2}{3}$ ва $\frac{1}{5}$ касрларни умумий махражга келтирамиз. У ҳолда:

$$a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{10}{15}} a^{\frac{3}{15}}.$$

$a^{\frac{10}{15}} = \sqrt[15]{a^{10}}$ ва $a^{\frac{3}{15}} = \sqrt[15]{a^3}$ бўлгани учун арифметик илдизнинг таърифидан:

$$\sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^3} = \sqrt[15]{a^{10}a^3} = \sqrt[15]{a^{13}}.$$

Қаср кўрсаткичли даражага ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt[15]{a^{13}} = a^{\frac{13}{15}}.$$

Демак, $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{13}{15}}$ экан. Аммо $\frac{13}{15} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$, шунинг учун

$$a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}.$$

Энди (1) хоссани умумий кўринишда исботлаймиз.

p ва q рационал сонларни бир хил махражли касрлар кўринишида ифодалаймиз: $p = \frac{k}{n}$ ва $q = \frac{m}{n}$, бунда k ва m — бутун сонлар, n эса натурал сон. У ҳолда $a > 0$ да:

$$a^pa^q = a^{\frac{k}{n}}a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^k \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^{k+m}} =$$
$$= a^{\frac{k+m}{n}} = a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{n}} = a^{p+q}.$$

Демак, $a^pa^q = a^{p+p}$.

(1) хоссадан *истаган мусбат a ва истаган рационал p учун*

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

экани келиб чиқади. Ҳақиқатан, $a^p \cdot a^{-p} = a^0 = 1$.

(2) хосса (1) хоссадан ва бўлинманинг таърифидан келиб чиқади.

(3) хоссани исботлаймиз, яъни $a > 0$ ҳамда истаган рационал p ва q да

$$(a^p)^q = a^{pq}.$$

Фараз қилайлик. $p = \frac{l}{k}$ ва $q = \frac{m}{n}$ бўлсин, бунда l ва m — бутун, k ва n эса натурал сонлар. У ҳолда $a > 0$ да

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{l}{k}}\right)^{\frac{m}{k}} = \left(\sqrt[k]{a^l}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a^l}\right)^m} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{lm}}} = \sqrt[nk]{a^{lm}} =$$
$$= a^{\frac{lm}{nk}} = a^{\frac{l}{k}\cdot\frac{m}{n}} = a^{pq}.$$

Демак, $(a^p)^q = a^{pq}$.

(3) хоссадан, ***истаган рационал p ва истаган натурал n да***

$$\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}} \quad (a>0)$$

экани келиб чиқади.

Ҳақиқатан, каср кўрсаткичли даражанинг таърифига ва (3) хоссага кўра:

$$\sqrt[n]{a^p}=(a^p)^{\frac{1}{n}}=a^{p\cdot\frac{1}{n}}=a^{\frac{p}{n}}.$$

(4) хоссани исботлаймиз, яъни $a>0$ ва $b>0$ ҳамда истаган рационал p да

$$(ab)^p=a^pb^p$$

эканини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $p=\frac{l}{k}$ бўлсин, бунда l — бутун сон ва k — натурал сон. У ҳолда

$$(ab)^p=(ab)^{\frac{l}{k}}=\sqrt[k]{(ab)^l}=\sqrt[k]{a^lb^l}=\sqrt[k]{a^l}\cdot\sqrt[k]{b^l}=$$
$$=a^{\frac{l}{k}}\cdot b^{\frac{l}{k}}=a^pb^p.$$

Демак, $(ab)^p=a^pb^p$.

(5) хоссани $\frac{a}{b}$ касрни ab^{-1} кўпайтма кўринишида ифодалаб ва (4) хоссани қўлланиб исботлаш мумкин.

550. Рационал кўрсаткичли даража шаклида ифодаланг:

а) $c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$; г) $x^2:x^{\frac{3}{2}}$; ж) $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$;

б) $b^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$; д) $y^{\frac{5}{6}}:y^{\frac{1}{3}}$; з) $(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{9}}$;

в) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{6}}$; е) $z^{\frac{1}{5}}:z^{-\frac{1}{2}}$; и) $(c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$.

551. Ифодани соддалаштиринг:

а) $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{5}}$; в) $a^{\frac{3}{5}}:a^{\frac{1}{10}}$; д) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{8}}$;

б) $y^{-0,6}y^{1,2}$; г) $b^{-0,2}:b^{-0,7}$; г) $(n^{0,4})^{-2,5}$.

552. Даража шаклида ифодаланг:

а) $x^{0,2}x^{-1}x^{0,6}$; б) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{5}{3}}$; в) $y^{0,8}y^{-5}y^{7,2}$; г) $b^{\frac{3}{8}}b^{-\frac{5}{24}}b^{\frac{1}{3}}$.

553. Соддалаштиринг:

а) $(x^{\frac{2}{3}})^{0,6}\cdot x^{-\frac{2}{5}}$; в) $(a^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}}$;

б) $(y^{-\frac{5}{8}})^{0,4}\cdot y^{0,25}$; г) $(c^{\frac{5}{12}})^{1,2}\cdot(c^{-\frac{1}{3}})^{-1,5}$.

554. Даража шаклида ифодаланг:

а) $c^2c^{-1,5}c^{0,3}$; в) $y^{1,7}y^{2,8}y^{-1,5}$; д) $(b^{-\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}}\cdot b^{\frac{5}{12}}$;

б) $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{14}}x^{\frac{2}{7}}$; г) $(a^{0,8})^{0,5}\cdot a^{0,6}$; е) $(m^{0,3})^{1,2}\cdot(m^{-0,4})^{0,4}$.

555. Ҳисобланг:

а) $5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{-0,25}\cdot 5^{\frac{4}{5}}\cdot 5^{-0,75}$; б) $9^{-\frac{4}{3}}\cdot 27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$.

556. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $2^{1,3}\,2^{-0,7}\,2^{1,4}$; в) $4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}$;

б) $7^{-\frac{4}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{12}}\cdot 7^{-\frac{3}{4}}$; г) $25^{0,3}\cdot 5^{1,4}$.

557. Ҳисобланг:

а) $(81\cdot 16)^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(0,01\cdot\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$; д) $(10^5)^{0,2}\cdot(0,001)^{\frac{1}{3}}$;

б) $(81\cdot 16)^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{1}{27}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; е) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{1}{9}}$.

558. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $(27\cdot 8)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{125}\cdot\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; в) $\left(\frac{49}{144}\right)^{\frac{1}{2}}$; г) $\left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

559. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(125x^6)^{-\frac{2}{3}}$; в) $(x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$; д) $(a^{\frac{1}{4}})^{-\frac{1}{2}}$;

б) $(27x^3)^{-\frac{1}{3}}$; г) $(64c^{12})^{-\frac{2}{3}}$; е) $(b^{-6})^{-\frac{1}{3}}$.

560. Ифодани соддалаштиринг:

а) $a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}\cdot(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}})^4$; в) $(a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{2}{3}})^{1\frac{1}{5}}\cdot a^{0,7}x^{0,8}$;

б) $(c^{-\frac{3}{7}}y^{-0,4})^3\cdot c^{\frac{2}{7}}y^{0,2}$; г) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}(p^{-\frac{2}{7}}q^{\frac{1}{14}})^{-3,5}$.

561. Квадрат шаклида ифодаланг $(x>0)$:

x^6, x^{40}, x^{23}, x^{-14}, x^5, x^{-3}, x, $x^{\frac{1}{4}}$, x^{-1}, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{-0,9}$.

562. Куб шаклида ифодаланг ($y>0$);

$y^6, y^{-21}, y^7, y, y^{\frac{1}{2}}, y^{-1,5}, y^{-\frac{1}{3}}, y^{0,2}, y^{-\frac{2}{9}}$.

563. a мусбат сон экани маълум. a сонни: а) квадрат шаклида; б) куб шаклида; в) еттинчи даражада ифодаланг.

564. $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,73$ эканини билган ҳолда қуйидагиларни топинг:

а) $3^{\frac{3}{2}}$; б) $3^{\frac{5}{2}}$; в) $3^{-\frac{1}{2}}$; г) $3^{-\frac{5}{2}}$.

565. $4,31^{\frac{1}{2}} = a$ эканини билган ҳолда қуйидагиларни топинг:

а) $431^{\frac{1}{2}}$; б) $43100^{\frac{1}{2}}$; в) $0,0431^{\frac{1}{2}}$; г) $0,000431^{\frac{1}{2}}$.

566. Кубнинг ҳажми V га тенг. Даражанинг каср кўрсаткичларидан фойдаланиб:

а) кубнинг a қиррасини унинг V ҳажми билан ифодаланг;

б) куб ёғининг S юзини унинг V ҳажми билан ифодаланг;

в) куб сиртининг P юзини унинг V ҳажми билан ифодаланг.

567. $x>0$ ва $y>0$ эканини билган ҳолда x ни y билан ифодаланг:

а) $y = x^{\frac{2}{3}}$; в) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; д) $y = 5x^{\frac{4}{5}}$;

б) $y = x^{\frac{4}{7}}$; г) $y = x^{-0,75}$; е) $y = \left(\frac{x}{6}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

568. Ифодани каср кўрсаткичли даража кўринишида ифодаланг:

а) $\sqrt[10]{x} \cdot \sqrt[15]{x}$; в) $\sqrt[7]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}}$; д) $\sqrt[10]{y\sqrt[3]{y^2}}$;

б) $\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a}$; г) $\sqrt[3]{b^2\sqrt{b}}$; е) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}}$.

569. Истаган $a>0$ да тенглик тўғри бўлишини исботланг:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}} = 1$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5\sqrt{a}}} = 1$.

570. x нинг қуйидаги тенглик тўғри бўладиган қийматларини кўрсатинг:

а) $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$; в) $x^{\frac{2}{7}} \cdot x^{-\frac{9}{7}} = x$; д) $(x^4)^{\frac{1}{4}} = -x$;

б) $(x^{-\frac{1}{5}})^5 = x^{-1}$; г) $(x^2)^{\frac{1}{4}} = (-x)^{\frac{1}{2}}$; е) $(x^2)^{\frac{1}{6}} = (-x)^{\frac{1}{3}}$.

571. Тенгламани ечинг:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 5$; в) $x^{1,5} = 27$; д) $x^{0,2} \cdot x^{1,8} = 1$;

б) $x^{\frac{2}{3}} = 4$; г) $x^{-0,8} = 16$; е) $x^{\frac{5}{8}} \cdot x^{\frac{3}{8}} = -25$.

Такрорлаш учун машқлар

572. Тенгсизликни ечинг:

а) $(2{,}5x+1)(4x-3)-5x(2x+7)<4$;
б) $(3-4x)^2-(8x-1)(2x+9)-11>0$.

573. (a_n) арифметик прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг, бунда:

а) $\begin{cases} a_4+a_{11}=0{,}2, \\ a_9-a_5=2{,}4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_2+a_4=18, \\ a_3\cdot a_5=144. \end{cases}$

574. Қурилишда икки бригада ишлаётган эди. 5 кун бирга ишлагандан кейин иккинчи бригадани бошқа ишга ўтказишди. Шундан сўнг ишнинг қолган қисмини биринчи бригада 9 кунда тамомлади. Агар бутун ишни бажариш учун иккинчи бригадага биринчига қараганда 12 кун кам керак бўлиши маълум бўлса, ҳар бир бригада алоҳида ишлаб бутун ишни неча кунда тамомлаши мумкин?

25. КАСР КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖА ҚАТНАШГАН ИФОДАЛАРНИ ШАКЛ АЛМАШТИРИШ

Каср кўрсаткичли даражалар қатнашган ифодаларни айнан шакл алмаштириш бажариладиган мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. Қуйидаги ифоданинг қийматини $x=12{,}25$ бўлганда топамиз:

$$(x^{\frac{1}{4}}-6)^2-12x^{\frac{1}{4}}(x^{-\frac{1}{4}}-1).$$

Дастлаб бу ифодани соддалаштирамиз:

$$(x^{\frac{1}{4}}-6)^2-12x^{\frac{1}{4}}(x^{-\frac{1}{4}}-1)=x^{\frac{1}{2}}-12x^{\frac{1}{4}}+36-12x^0+12x^{\frac{1}{4}}=$$
$$=x^{\frac{1}{2}}+24.$$

$x^{\frac{1}{2}}+24$ ифодага x нинг берилган қийматини қўямиз ва ҳисоблашларни бажарамиз:

$$x^{\frac{1}{2}}+24=(12{,}25)^{\frac{1}{2}}+24=(3{,}5^2)^{\frac{1}{2}}+24=3{,}5+24=27{,}5.$$

2-мисол. Ифодани соддалаштирамиз:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}.$$

$a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ суратни квадратларнинг айирмаси кўринишида ифодалаймиз ва уни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}.$$

3- м и с о л. Қасрни қисқартирамиз:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}}.$$

Касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}} - 25)}{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}} + 5)} = \frac{(x^{\frac{1}{4}} - 5)(x^{\frac{1}{4}} + 5)}{x^{\frac{1}{4}} + 5} = x^{\frac{1}{4}} - 5.$$

575. Ифодани йиғинди шаклида ифодаланг:

а) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})$;

б) $c^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(c^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})$;

в) $(a^{\frac{2}{3}} - 1)(a^{\frac{1}{3}} + 2)$;

г) $(x^{-\frac{3}{4}} + 2)(x^{-\frac{1}{4}} - 3)$;

д) $(1 + b^{\frac{1}{2}})(1 - b^{\frac{1}{2}})$;

е) $(a^{\frac{1}{2}} - 3)(a^{\frac{1}{2}} + 3)$;

ж) $(1 + x^{\frac{1}{2}})^2$;

з) $(p^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})^2$;

и) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$;

к) $(x^{\frac{1}{2}} + 1)(x - x^{\frac{1}{2}} + 1)$.

576. Амалларни бажаринг:

а) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{4}})$;

б) $x^{0,5}y^{0,5}(x^{-0,5} - y^{1,5})$;

в) $(2 - y^{1,5})(2 + y^{1,5})$;

г) $(3p^{0,5} + q^{-1})(3p^{0,5} - q^{-1})$;

д) $(1 - b^{\frac{1}{2}})^2$;

е) $(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}})^2$;

ж) $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$;

з) $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)$.

577. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(1 + c^{\frac{1}{2}})^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$;

б) $\sqrt{b} + \sqrt{c} - (b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{2}})^2$;

в) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2-(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2$; д) $(y^{\frac{2}{3}}+3y^{\frac{1}{5}})^2-6y^{\frac{13}{15}}$;

г) $(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}})^2+2x^{\frac{7}{12}}$; е) $(x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{4}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)$.

578. Соддалаштиринг:

а) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; в) $(a^{\frac{3}{2}}+5a^{\frac{1}{2}})^2-10a^2$;

б) $\sqrt{m}+\sqrt{n}-(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}})^2$; г) $(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}})$.

579. Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқаринг:

а) $x-2x^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{1}{2}}-5a^{\frac{1}{4}}$; д) $b^{\frac{3}{4}}-2b^{\frac{1}{4}}$; ж) $(ab)^{\frac{1}{3}}-(ac)^{\frac{1}{3}}$;

б) $y+3y^{\frac{1}{3}}$; г) $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}$; е) $c^{\frac{5}{3}}+6c^{\frac{2}{3}}$; з) $6^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}$.

580. Кўпайтувчига ажратинг:

а) $2+2^{\frac{1}{2}}$; в) $a+a^{\frac{1}{2}}$; д) $15^{\frac{1}{3}}+20^{\frac{1}{3}}$;

б) $3-3^{\frac{1}{2}}$; г) $b^{\frac{1}{3}}-b$; е) $(2a)^{\frac{1}{2}}-(5a)^{\frac{1}{2}}$.

581. $a-b$ айирмани:

а) квадратлар айирмаси кўринишида ифодалаб; б) кубларнинг айирмаси кўринишида ифодалаб, кўпайтувчиларга ажратинг, бунда $a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$.

582. $a+b$ йиғиндини кубларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаб, кўпайтувчиларга ажратинг, бунда $a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$.

583. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ айниятдан фойдаланиб, қуйидаги ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2-3; в) $y^{\frac{2}{5}}-9$; д) $x-2$, бунда $x\geqslant 0$;

б) $5-y^4$; г) $a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}$; е) $10-y$, бунда $y\geqslant 0$.

584. Ифодани квадратлар айирмаси кўринишида ифодаланг ва уни кўпайтувчиларга ажратинг:

б) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}}$;

б) $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$; г) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$.

585. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ айниятдан фойдаланиб, ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $(x^{\frac{1}{2}})^3-8$; б) $(y^{\frac{1}{2}})^3+27$; в) $n^{\frac{3}{2}}+1$;

г) $m^{\frac{6}{5}}-125$; д) $125-b$, бунда $b\geqslant 0$; е) $y+2$, бунда $y\geqslant 0$.

586. Квадратлар айирмаси ёки кублар айирмаси формулаларидан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $a^{\frac{4}{3}}-1$; в) $x-4$, бунда $x\geqslant 0$;

б) $b^{\frac{3}{2}}-1$; г) $5-y$, бунда $y\geqslant 0$.

587. Ифодани кубларнинг йиғиндиси кўринишида ёзинг ва уни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$; б) $c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}$; в) $a^{-1}+b^{-1}$.

588. Ифодани кубларнинг айирмаси кўринишида ёзинг ва уни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$; в) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$.

589. Қасрни қисқартиринг:

а) $\dfrac{5+5^{\frac{1}{2}}}{3\cdot 5^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{n}{n-n^{\frac{1}{2}}}$; д) $\dfrac{b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}}$; ж) $\dfrac{c^{\frac{1}{3}}-3}{c-9}$;

б) $\dfrac{2-2^{\frac{1}{2}}}{5\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$; г) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; е) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; з) $\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{b-a}$.

590. Қасрни қисқартиринг:

а) $\dfrac{3+3^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; д) $\dfrac{c+2c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c-d}$;

б) $\dfrac{10}{10-10^{\frac{1}{2}}}$; г) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-5}{b-25}$; е) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

591. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{a-4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}$, бунда $a=81$;

б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{6}}}$, бунда $x=64$;

в) $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\dfrac{2x+16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$, бунда $x=27$;

г) $\dfrac{8}{y^{\frac{1}{4}}+2}+\dfrac{y-8y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}-4}$, бунда $y=25$.

592. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+\dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}$; в) $\left(\dfrac{1-y^{1,5}}{1-y^{0,5}}+y^{0,5}\right)\left(\dfrac{1+y^{1,5}}{1+y^{0,5}}-y^{0,5}\right)$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}-6}-\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}+6}+\dfrac{x}{36-x}$; г) $\dfrac{2}{p^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{p-p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}+q}{p^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}$.

593. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{b}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2}}}{p-p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{p^{\frac{1}{2}}}{q-p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{pq^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{2}}q}{p-q}$.

Такрорлаш учун машқлар

594. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 4(x-1)-2(x+1)>0, \\ 3x-1-4(x-10)<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+8-(2x-5)<0, \\ 2(6x-4)-3(x+1)>0. \end{cases}$

595. а) 7 га каррали бўлган ҳамма икки хонали сонларнинг йиғиндисини топинг;

б) 3 га каррали бўлмаган ҳамма икки хонали сонларнинг йиғиндисини топинг.

596. Турист шаҳардан турбазага қараб пиёда жўнади. Агар у соатига бир километр ортиқ тезлик билан юрганида эди, у зарур бўлган вақтнинг $\frac{5}{6}$ қисмини сарф қиларди; агар у соатига бир километр кам тезлик билан юрганида эди, у ҳолда зарур бўлганидан $\frac{5}{6}$ соат кўпроқ йўлда бўларди. Шаҳардан турбазагача бўлган масофани топинг.

597. Пиёда AB йўлни босиб ўтгандан кейин бундай ҳисоблади: агар у соатига 0,8 км ортиқ юрса, B га 1 соат олдин келар экан, агар соатига 0,8 км кам юрса, бир ярим соат кеч етиб келар экан. AB масофани топинг.

IV БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

8- параграфга доир

598. Тоқ функциянинг графиги y ўқини координаталар бошидан фарқли нуқтада кесиб ўтиши мумкинми?

599. Тоқ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтмаслиги мумкинми?

600. Функция жуфтми, ёки тоқми:

а) $f(x)=\frac{1}{x^3+2x}$; г) $f(x)=|x+3|+|x-3|$;

б) $f(x)=\frac{1}{x^2+7}$; д) $f(x)=|x+5|-|x-5|$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^4+3x}$; е) $f(x)=|x+1|+|x-2|$?

601. Агар f функциянинг аниқланиш соҳаси:

а) $[-10; 10]$; в) $[-5; -2]\cup[2; 5]$;

б) $(-8; 12)$; г) $(-\infty; 5)$

бўлса, шу функция жуфт ёки тоқ бўлиши мумкинми?

602. Жуфт ёки тоқ функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг (аввал аргументнинг мусбат қийматлари учун, кейин манфий қийматлари учун графикнинг бир қисмини ясанг):

а) $y=\frac{12}{|x|}$; б) $y=x|x|$; в) $y=\sqrt{x^2-4}$; г) $y=\sqrt{9-x^2}$.

603. $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ жуфт функция экани маълум. Қуйидагилар жуфт функция бўладими:

а) $y=f(x)+g(x)$; в) $y=f(x)\cdot g(x)$;

б) $y=f(x)-g(x)$; г) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$?

604. $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ тоқ функция экани маълум. Қуйидагилар тоқ функция бўладими:

а) $y=f(x)+g(x)$; в) $g=f(x)\cdot g(x)$;

б) $y=f(x)-g(x)$; г) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$?

605. f функциянинг қийматлари $x\geqslant 0$ бўлганда $f(x)=x-2$ формула бўйича, $x<0$ бўлганда $f(x)=-x-2$ формула бўйича ҳисобланади. Унинг графигини ясанг.

606. Қуйидаги функциянинг графигини ясанг:

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{бунда } x>0, \\ -x^2-1, & \text{бунда } x<0. \end{cases}$$

607. f функция жуфт эканини ва $x \geqslant 0$ бўлганда унинг қиймати:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$; б) $f(x)=x^2-2x$; в) $f(x)=\sqrt{x}$

формула бўйича топилиши мумкинлигини билган ҳолда унинг графигини ясанг.

608. g функциянинг тоқ эканини ва $x \geqslant 0$ бўлганда унинг қиймати:

а) $g(x)=x^2$; б) $g(x)=x^2-4x$; в) $g(x)=\sqrt{x}$

формула билан топилиши мумкинлигини билган ҳолда унинг графигини ясанг.

609. Исботланг:

а) агар бирор функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлса, бу функция жуфт бўлади;

б) агар бирор функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлса, бу функция тоқ бўлади.

610. k ва b коэффициентларнинг $y=kx+b$ чизиқли функцияни: а) жуфт функцияга; б) тоқ функцияга айлантирадиган қийматлари мавжудми?

611. a, b ва c коэффициентларнинг $y=ax^2+bx+c$ квадрат функцияни жуфт функцияга айлантирадиган қийматлари мавжудми?

612. Тенгсизлик нима учун тўғри эканини тушунтиринг:

а) $5^{100}>4^{100}$; в) $1{,}5^{261}<1{,}6^{261}$;

б) $0{,}87^{100}<0{,}89^{100}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{261}>\left(\frac{3}{5}\right)^{261}$.

613. Даражаларнинг қийматларини таққосланг:

а) 2^{10} ва 3^{10}; г) $\left(\frac{4}{9}\right)^{10}$ ва $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$;

б) $0{,}3^5$ ва $0{,}2^5$; д) 3^{21} ва 8^7;

в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{17}$ ва $\left(\frac{8}{9}\right)^{17}$; е) 1250^3 ва 36^6.

614. $f(x)=x^7$ ва $g(x)=x^{10}$ функциялар берилган. Қуйидагиларни ноль билан таққосланг:

а) $f(25)-f(12)$; в) $f(0)\cdot f(60)$; д) $g(-9)\cdot g(-17)$;
б) $f(-30)-f(-20)$; г) $g(17)-g(5)$; е) $g(38)-g(0)$.

615. n натурал сон бўлганда:

а) агар $x\in[0;\ 1]$ бўлса, у ҳолда $x^{n+1}\leqslant x^n$ бўлишини исботланг;

б) агар $x\in(1;+\infty)$ бўлса, у ҳолда $x^{n+1}>x^n$ бўлишини исботланг.

616. Агар $y = x^n$ функция графиги:

а) $A(2; 8)$; б) $B(3,5; 12,25)$; в) $C(-3; 81)$; г) $D(-2; -32)$ нуқтадан ўтиши маълум бўлса, n ни топинг.

617. n нинг $y = x^n$ функция графиги:

а) $A(2; 5)$; б) $B(\sqrt{3}; 81)$; в) $C(-5; 415)$; г) $D(-7; -343)$ нуқтадан ўтадиган натурал қиймати топиладими?

618. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=(x-3)^4$; б) $y=(x-3)^4+2$; в) $y=-x^4$; г) $y=-x^4+5$.

619. Тенгламанинг илдизи нечта:

а) $x^{10}=2$; б) $x^{10}=0$; в) $x^{10}=-3$; г) $x^7=5$; д) $x^7=0$; е) $x^7=-1$?

9- параграфга доир

620. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $-0,5\sqrt[10]{1024}$; б) $-\frac{2}{3}\sqrt[7]{-2187}$; в) $1,5\sqrt[9]{512}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}\cdot\sqrt{5\frac{4}{9}}$; д) $\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[7]{0,1^7}$; е) $\sqrt[4]{16^{-2}}\cdot\sqrt[3]{0,125^3}$.

621. Тенгламани ечинг:

а) $\sqrt{x}=0,2$; б) $\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}$; в) $\sqrt[4]{a}=-1$; г) $\sqrt[4]{b}=2$; д) $\sqrt[8]{x}=1$; е) $\sqrt[3]{y}=-2$.

622. Ўзгарувчининг қандай қийматларида ифода маънога эга бўлади:

а) $\sqrt[8]{x-2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{9-x}{5}}$; в) $\sqrt[3]{x+5}$; г) $\sqrt[8]{(a-5)(a-2)}$; д) $\sqrt[4]{y^2-5x+6}$; е) $\sqrt[12]{-b^2+6b-8}$?

623. Тенгламани ечинг:

а) $x^6=12$; б) $x^9=5$; в) $x^7=-3$; г) $x^{11}=2$; д) $\sqrt[4]{x+1}=2$; е) $\sqrt[5]{x-2}=1$.

624. (b_n) геометрик прогрессиянинг махражини топинг, бунда:

а) $b_1=3$, $b_6=96$; б) $b_1=0,2$, $b_{11}=204,8$; в) $b_1=-\frac{1}{3}$, $b_8=729$; г) $b_1=1$, $b_{10}=3$.

625. Тенгламани ечинг:

а) $x^8+6x^4-7=0$; б) $x^{12}-9x^6+14=0$; в) $x^6+11x^3+24=0$; г) $x^{14}-5x^7+6=0$.

626. Тенглама ва тенгсизликларни ечинг:

а) $\sqrt[3]{x}=5$, $\sqrt[3]{x}>5$, $\sqrt[3]{x}<5$; б) $\sqrt[4]{x}=2$, $\sqrt[4]{x}>2$, $\sqrt[4]{x}<2$.

627. $y=\sqrt[5]{x}$ функциянинг графигини схематик тасвирлаб, қуйидаги илдизларнинг қийматларини таққосланг:

а) $\sqrt[5]{23}$ ва $\sqrt[5]{27}$; б) $\sqrt[5]{-5}$ ва $\sqrt[5]{-4}$; в) $\sqrt[5]{-0,1}$ ва $\sqrt[5]{0,01}$.

628. Айирманинг ишорасини топинг:

а) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{7}$; в) $1-\sqrt[4]{0,99}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; г) $\sqrt[6]{0,28}-\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$.

629. f функция жуфт эканини исботланг ва унинг графигини ясанг, бунда:

а) $f(x)=\sqrt{|x|}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$.

630. Қуйидагиларни билган ҳолда $\sqrt[10]{x}$ ифоданинг қийматини баҳоланг:

а) $0<x<1$; б) $1<x<1000$; в) $1000<x<10^{10}$.

631. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\sqrt[4]{5-2x}$; в) $y=\sqrt[3]{8x+1}$.

632. $y=x$, $y=\sqrt{x}$ ва $y=\sqrt[3]{x}$ функцияларнинг графикларидан фойдаланиб, тенглама ва тенгсизликларни ечинг:

а) $\sqrt{x}=x$, $\sqrt{x}<x$, $\sqrt{x}>x$; б) $\sqrt[3]{x}=x$, $\sqrt[3]{x}<x$, $\sqrt[3]{x}>x$.

633. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=-\sqrt{x}$; б) $y=-\sqrt[3]{x}$; в) $y=\sqrt{-x}$; г) $y=\sqrt[3]{-x}$.

$y=-\sqrt{x}$ ва $y=\sqrt{-x}$; $y=-\sqrt[3]{x}$ ва $y=\sqrt[3]{-x}$ функцияларнинг графиклари бир-биридан нима билан фарқ қилади?

634. Тенглама нечта илдизга эга:

а) $\sqrt[6]{x}=1000$; б) $\sqrt[8]{x}=-10$; в) $\sqrt[7]{x}=-100$?

635. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sqrt[3]{\frac{64\cdot27}{125}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16\cdot625}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot5^5}{7^{10}}}$; г) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12}\cdot5^6}}$.

636. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг:

а) $\sqrt{16x^3y}$; б) $\sqrt[4]{81ab^7}$; в) $\sqrt[3]{125a^5x^3}$; г) $\sqrt[3]{64b^{12}y^7}$.

637. Ифодани соддалаштиринг:

а) $a\sqrt{\frac{5}{a}}$; б) $x\sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}$; в) $b\sqrt[4]{\frac{3}{b^3}}$; г) $2c\sqrt[5]{\frac{1}{16c^4}}$.

638. Айирманинг ишорасини аниқланг:

а) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{2}$; б) $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt[k]{3}-\sqrt[2k]{3}$; г) $\sqrt[k]{\frac{1}{2}}-\sqrt[2k]{\frac{1}{2}}$.

639. Сонларни ўсиб бориши тартибида жойлаштиринг:

а) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt[3]{0{,}3}$; $\sqrt[5]{0{,}2}$.

640. Тенгликнинг тўғрилигини исботланг:

а) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}=1$; б) $\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}:\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=1$.

641. Ифодани натурал махражли каср шаклида тасвирланг:

а) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{25}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$; д) $\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$.

642. $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ ифоданинг қийматини баҳоланг, бунда:

а) $0<x<1$ ва $1<y<8$; б) $1<x\leq 25$ ва $\frac{1}{8}<y<64$.

643. Тенгламани ечинг:

а) $\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x}=0$; в) $\sqrt[10]{x}+5=0$; д) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0$;

б) $\sqrt[6]{x}-0{,}1=0$; г) $\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}-1=0$; е) $\sqrt[4]{x}-2\sqrt[8]{x}-3=0$.

10- параграфга доир

644. Илдизни каср кўрсаткичли даража билан алмаштириб, ифодани соддалаштиринг:

а) $2{,}5\sqrt{40}$; в) $a\sqrt{a}$; д) $(x+1)^2\sqrt[4]{x+1}$;

а) $-8\sqrt[3]{2}$; г) $-b\sqrt[3]{b}$, бунда $b\geqslant 0$; е) $(y-5)^3\sqrt{y-5}$.

645. Сонларни таққосланг:

а) $8^{\frac{1}{2}}$ ва $8^{\frac{1}{3}}$; б) $5^{\frac{1}{6}}$ ва $8^{\frac{1}{8}}$; в) $3^{\frac{1}{3}}$ ва $5^{\frac{1}{4}}$; г) $3^{\frac{1}{12}}$ ва $4^{\frac{1}{16}}$.

646. Тенгламани ечинг:

а) $(x-2)^{\frac{1}{2}}=4$; в) $(y+3)^{\frac{1}{4}}=-1$; д) $(a-5)^{\frac{1}{3}}=0$;

б) $(x-2)^2=4^{\frac{1}{2}}$; г) $(y+3)^{-1}=\frac{1}{4}$; е) $(a-5)^0=\frac{1}{3}$.

647. Қуйидагиларни билган ҳолда $x^{\frac{1}{5}}$ ва $x^{\frac{2}{5}}$ ифоданинг қийматини баҳоланг:

а) $\frac{1}{32}<x<1$; б) $1<x<32$; в) $32<x<1000$.

648. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $16^{\frac{1}{4}}$; д) $343^{\frac{1}{3}}$; ж) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$;

б) $0,81^{\frac{1}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$; е) $0,001^{\frac{2}{3}}$; з) $0,000001^{-\frac{1}{3}}$.

649. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{x^{\frac{3}{7}} x^{\frac{5}{21}}}{x^{\frac{1}{6}}}$; в) $(b^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{4}})^{1,2}$; д) $\left(\frac{4c^4}{9y^8}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\frac{a^{5,2}\, a^{-0,3}}{a\cdot a^{0,9}}$; г) $(x^{-1,5}x^{0,9})^{-\frac{3}{5}}$; е) $\left(\frac{64b^{-3}}{125a^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

650. Каср кўрсаткичли даражалардан фойдаланиб, ифодани соддалаштиринг (ўзгарувчиларнинг қийматлари мусбат):

а) $\frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}$; в) $\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}}$.

651. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\left(\frac{a^{\frac{5}{12}}a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$, бунда $a=125$;

б) $\left(\frac{b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$, бунда $b=0,001$, $c=25$.

652. Тенгламанинг бирор иккита ечимини топинг:

а) $x^{\frac{1}{3}}y^2=32$; б) $x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}=9$.

653. x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланишни топинг:

а) $x=t^{\frac{1}{2}}$, $y=t^{-\frac{1}{2}}$; б) $x=t^{\frac{1}{3}}$, $y=t^{\frac{1}{6}}$; в) $x=3t^{\frac{1}{2}}$, $y=2t^{-\frac{1}{3}}$.

654. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(x^{0,5}-y^{0,5})\cdot x^{0,5}y+(xy^3)^{0,5}$; в) $(1-y^{\frac{1}{4}})(1+y^{\frac{1}{4}})+(y^8)^{\frac{1}{16}}$;

б) $ab^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})-(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}})^3$; г) $(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})^2-(4pq)^{\frac{1}{2}}$.

655. Ифодани бири $y^{-0,6}$ га тенг бўлган иккита кўпайтувчининг кўпайтмаси шаклида тасвирланг:

а) $y^2+y^{-0,6}$; б) $y^{-1}-y^{-0,4}$; в) $3y-1$; г) $y^{-\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$.

656. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ айниятдан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $y^{\frac{2}{9}}-9$; г) $2x^{\frac{1}{3}}-49$; ж) $z^{\frac{1}{2}}-0{,}25$;

б) $a^{\frac{1}{16}}-16$; д) $b^{\frac{1}{5}}-1$; з) $u^{1,2}-12$;

в) $9c^{0,3}-4$; е) $y^{1,5}-y^2$; и) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}-49$.

657. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ айниятдан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x+1000$, бунда $x\geqslant 0$; в) $27y^{\frac{1}{3}}-1$;

б) $a^{0,9}-8b$, бунда $b\geqslant 0$; г) $a^{2,4}+b^{0,5}$.

658. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x-y+\sqrt{x}+\sqrt{y}$; г) $2b^2+b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+2$;

б) $u-\sqrt{u}+\sqrt{v}-v$; д) $x-5x^{\frac{1}{2}}+4$;

в) $a+2a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+1$; е) $y^{\frac{1}{2}}-13y^{\frac{1}{4}}+36$.

659. Ўрнига қўйишни бажариб, ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{xy}{x^2+y^2},\ \text{бунда}\ x=\frac{\sqrt{ab}}{a+b},\ y=\frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

660. Ифоданинг қиймати n га боғлиқ эмаслигини исботланг:

а) $\dfrac{(9^n-9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1}-19\cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{(8^{n-2}+7\cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(16^{n-1}-16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}$.

661. Тенгламани ечинг:

а) $x-6x^{\frac{1}{2}}-55=0$; в) $3x^{\frac{1}{2}}+7x^{\frac{1}{4}}+1=0$;

б) $y^{\frac{2}{3}}-10y^{\frac{1}{3}}+24=0$; г) $7y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{8}}-8=0$.

662. x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғлиқликни топинг:

а) $x=t^{\frac{1}{2}}-1$, $y=t^{-\frac{1}{2}}+1$;

б) $x=(a+1)^{\frac{1}{2}}$, $y=(a-1)^{\frac{1}{2}}$, бунда $a>1$.

663. Ифодани соддалаштиринг:

а) $$\frac{\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}\cdot b^{0,5}}{a-b}+\frac{2b^{0,5}}{a^{0.5}+b^{0,5}};$$

б) $$\left(\frac{49}{c+27}-\frac{c^{\frac{1}{3}}+3}{c^{\frac{2}{3}}-3c^{\frac{1}{3}}+9}\right)\cdot\frac{c^{\frac{4}{3}}+27c^{\frac{1}{3}}}{16-c^{\frac{2}{3}}}+\frac{40-c^{\frac{2}{3}}}{4+c^{\frac{1}{3}}};$$

в) $$\left(\frac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\frac{a^{0,5}-2}{a-1}\right)\cdot\frac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}};$$

г) $$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

664. а) $a=3,75$ бўлганда; б) $a=56,25$ бўлганда

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+5}+\frac{25-15a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}+5\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+5}$$

ифоданинг қийматини топинг.

V БОБ

ТРИГОНОМЕТРИК ИФОДАЛАР ВА УЛАРНИ ШАКЛ АЛМАШТИРИШ

11-§. ИСТАГАН АРГУМЕНТНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

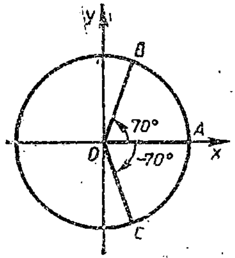
26. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСНИНГ ТАЪРИФИ

x ўқида координаталар бошидан ўнгда A нуқтани белгилаймиз (40- расм) ва бу нуқта орқали маркази O нуқтада бўлган айлана ўтказамиз. OA радиусни бошланғич радиус деб атаймиз.

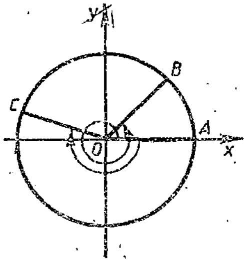
Бошланғич радиусни O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига қарши $70°$ бурамиз. Бунда у OB радиусга ўтади. Бу ҳолда буриш бурчаги $70°$ га тенг дейилади. Агар бошланғич радиус O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракати бўйича $70°$ бурилса, у OC радиусга ўтади. Бу ҳолда буриш бурчаги $-70°$ га тенг дейилади. $70°$ ва $-70°$ га буриш бурчаклари 40- расмда стрелкалар билан кўрсатилган.

Умуман, соат стрелкаси ҳаракатига қарши буришда буриш бурчаги мусбат, соат стрелкаси ҳаракати бўйича буришда эса манфий ҳисобланади.

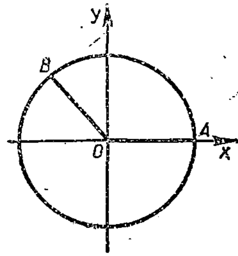
Градус ҳисобидаги бурчак ўлчови 0 дан 180 гача сонлар билан ифодаланиши геометрия курсидан маълум. Буриш бурчагига келганда, у $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлган истаган сонлар билан градусларда ифодаланиши мумкин. Масалан, агар бошланғич радиус соат стрелкаси ҳаракатига қарши $180°$ га бу-



40- расм



41- расм



42- расм

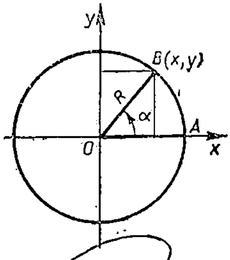
рилса, кейин яна 30° га бурилса, буриш бурчаги 210° га тенг бўлади. Агар бошланғич радиус соат стрелкаси ҳаракатига қарши тўлиқ бир марта айланса (бурилса), буриш бурчаги 360° га тенг бўлади; агар у шу йўналишда бир ярим марта айланса, у ҳолда буриш бурчаги 540° га тенг бўлади ва ҳоказо. 41- расмда 405° га ва —200° га буриш бурчаклари стрелкалар билан кўрсатилган.

OA ва OB радиусларни қараймиз (42- расм). OA бошланғич радиус OB радиусга ўтадиган истаганча буриш бурчаклари бор, масалан, агар $\angle AOB \equiv 130°$ бўлса, у ҳолда мос буриш бурчаклари $130° + 360°n$ га тенг бўлади, бу ерда n — истаган бутун сон. Масалан, $n = 0, 1, -1, 2, -2$ бўлганда 130°, 490°, —230°, 850°, —590° буриш бурчакларини ҳосил қиламиз.

α бурчакка бурилганда OA бошланғич радиус OB радиусга ўтсин. OB радиус қайси координата чорагида бўлишига боғлиқ ҳолда α бурчакни шу чоракнинг бурчаги дейилади. Масалан, агар $0° < \alpha < 90°$ бўлса, у ҳолда α — I чорак бурчаги бўлади; агар $90° < \alpha < 180°$ бўлса, у ҳолда α — II чорак бурчаги; агар $180° < \alpha < 270°$ бўлса, у ҳолда α — III чорак бурчаги; агар $270° < \alpha < 360°$ бўлса, у ҳолда α — IV чорак бурчаги бўлади. Равшанки, бурчакка бутун сондаги айланишлар сони қўшилса, яна ўша чорак бурчаги ҳосил бўлади. Масалан, 430° бурчак I чорак бурчагидир, чунки $430° = 360° + 70°$ ва $0° < 70° < 90°$; 920° бурчак III чорак бурчагидир, чунки $920° = 360° \cdot 2 + 200°$ ва $180° < 200° < 270°$.

$0°, \pm 90°, \pm 180°, \pm 270°, \pm 360°, \dots$ бурчаклар ҳеч бир чоракка тегишли эмас.

Геометрия курсида α бурчакнинг $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ бўлгандаги синуси, косинуси ва тангенси таърифланган эди. Энди биз бу таърифларни α ихтиёрий бурчак бўлган ҳол учун татбиқ этамиз. Бундан ташқари, α бурчакнинг котангенсига таъриф берамиз, у $\operatorname{ctg}\alpha$ тарзида белгиланади.



43- расм

O нуқта атрофида α бурчакка буришда OA бошланғич радиус OB радиусга ўтсин (43- расм).

B нуқта ординатасининг радиусга нисбати α бурчакнинг синуси дейилади.

B нуқта абсциссасининг радиусга нисбати α бурчакнинг косинуси дейилади.

B нуқта ординатасининг шу нуқта абсциссасига нисбати α бурчакнинг тангенси дейилади.

B нуқта абсциссасининг шу нуқта ординатасига нисбати α бурчакнинг котангенси дейилади.

Агар B нуқтанинг координаталари x ва y га тенг бўлса, бошланғич радиуснинг узунлиги R га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sin\alpha=\frac{y}{R},\ \cos\alpha=\frac{x}{R},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

Геометрия курсида α бурчакнинг ($0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$) синуси, косинуси ва тангенсининг қийматлари фақат α га боғлиқлиги кўрсатилган эди. Умумий ҳолда ҳам $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, шунингдек, $\operatorname{ctg}\alpha$ ҳам фақат α бурчакка боғлиқ бўлади.

Масалан, $\sin\alpha$ фақат α нинг қийматларига боғлиқ эканини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, OA_1 нурни O нуқта атрофида α бурчакка буришда (44- расм) $OA_1=R_1$ ва $OA_2=R_2$ радиуслар OB_1 ва OB_2 ҳолатларни олади. B_1 нуқтанинг координаталарини x_1 ва y_1 билан, B_2 нуқтанинг координаталарини эса x_2 ва y_2 билан белгилаймиз.

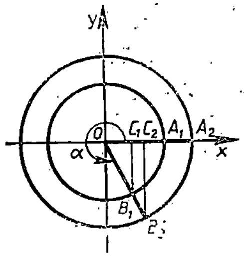
B_1 ва B_2 нуқталардан x ўқига перпендикулярлар туширамиз. Тўғри бурчакли OB_1C_1 ва OB_2C_2 учбурчаклар ўхшаш. Бундан

$$\frac{B_1C_1}{OB_1}=\frac{B_2C_2}{OB_2},\ \text{яъни}\ \frac{|y_1|}{R_1}=\frac{|y_2|}{R_2}.$$

B_1 ва B_2 нуқталар битта координата чорагига тегишли бўлгани учун уларнинг y_1 ва y_2 ординаталари ҳам бир хил ишорага эга бўлади. Шунинг учун

$$\frac{y_1}{R_1}=\frac{y_2}{R_2}.$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, бу тенглик B_1 ва B_2 нуқталар координата ўқларидан бирига тушганда ҳам тўғри бўлади. Шундай қилиб, истаган α бурчак учун $\frac{y}{R}$ нисбат R радиуснинг узунлигига боғлиқ бўлмайди. Демак, $\sin\alpha$ ҳам R радиусга боғлиқ бўлмай, фақат α бурчакка боғлиқ бўлади.



44- расм

$\frac{y}{R}$ ва $\frac{x}{R}$ касрлар α нинг истаган қийматида маънога эга бўлгани учун $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ифодалар α нинг истаган қийматида маънога эга бўлади. Тангенс учун $\frac{y}{x}$ каср маънога эга бўлмайдиган бурчаклар мустаснодир. Булар $\pm 90°$, $\pm 270°$, $\pm 450°$, ... га тенг бурчаклардир. Котангенс учун $\frac{x}{y}$ каср маънога эга бўлмайдиган бурчаклар мустаснодир, яъни 0°, $\pm 180°$, $\pm 360°$, ... га тенг бурчаклар.

Таърифдан синус ва косинус —1 дан 1 гача истаган қийматни, тангенс ва котангенс эса $-\infty$ дан $+\infty$ гача истаган қийматни олиши келиб чиқади.

1-мисол. Чизма ёрдамида $\sin 110°$, $\cos 110°$, $\operatorname{tg} 110°$ ва $\operatorname{ctg} 110°$ ифодаларнинг тақрибий қийматларини топамиз.

Маркази координаталар бошида ва радиуси $OA=R=3$ бўлган айлана чизамиз (45-расм). OA радиусни 110° га бурамиз. OB радиусни ҳосил қиламиз. Расм бўйича B нуқтанинг x ва y координаталарини топамиз: $x\approx-1{,}05$, $y\approx2{,}80$. Бундан

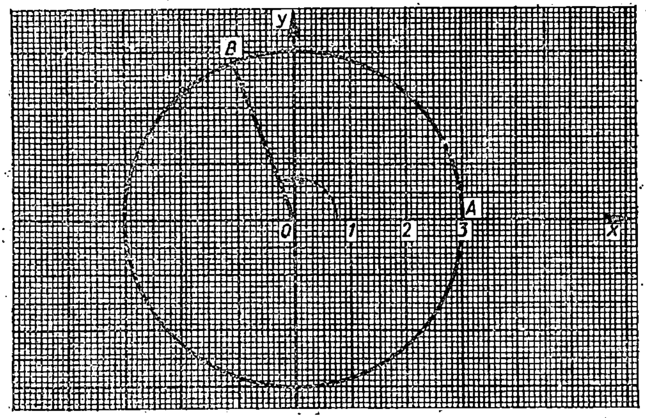
$$\sin 110° = \frac{y}{R} \approx \frac{2{,}80}{3} \approx 0{,}93;$$

$$\cos 110° = \frac{x}{R} \approx -\frac{1{,}05}{3} = -0{,}35;$$

$$\operatorname{tg} 110° = \frac{y}{x} \approx -\frac{2{,}80}{1{,}05} \approx -2{,}7;$$

$$\operatorname{ctg} 110° = \frac{x}{y} \approx -\frac{1{,}05}{2{,}80} \approx -0{,}38.$$

Жадвалда синус, косинус ва тангенснинг 0°, 30°, 45°, 60° ва 90° бурчаклар учун сизга геометрия курсидан маълум бўлган қийматлари келтирилган. Ифоданинг қиймати мавжуд бўлмаган ҳолда чизиқча чизилган.



45-расм

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Котангенснинг қийматлари шу бурчак тангенсининг қийматларидан ҳосил қилиниши мумкин, чунки котангенснинг қиймати тангенснинг қийматига тескари сон ҳисобланади. Шунинг учун, масалан,

$$\mathrm{ctg}30° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

2-мисол. 180° ва 270° бурчакларнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенсини топамиз.

$OA=R=1$ радиус O нуқта атрофида 180° га буришда (46-расм) OB радиусга ўтади, 270° га буришда эса OC радиусга ўтади.

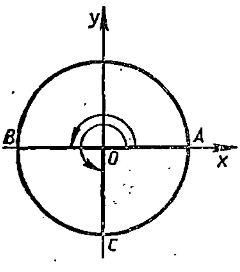
B нуқтанинг координаталари $x=-1$, $y=0$ бўлгани учун

$$\sin 180° = \frac{0}{1} = 0,\ \cos 180° = \frac{-1}{1} = -1,\ \mathrm{tg}\ 180° = \frac{0}{-1} = 0.$$

C нуқтанинг координаталари $x=0$, $y=-1$ бўлгани учун

$$\sin 270° = \frac{-1}{1} = -1,\ \cos 270° = \frac{0}{1} = 0,\ \mathrm{ctg}\ 270° = \frac{0}{-1} = 0.$$

$\mathrm{ctg}\ 180°$ ва $\mathrm{tg}\ 270°$ ифодалар маънога эга эмаслигини эслатиб ўтамиз.



46-расм

665. Маркази координаталар бошида бўлган айлана чизинг ва 150°, 210°, 540°, —45°, —135°, —720° га тенг бўлган бурчак бурчакларини тасвирланг.

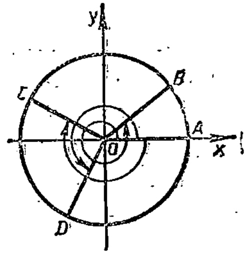
666. 47-расмда стрелкалар билан кўрсатилган буриш бурчаклари нимага тенг?

667. α бурчак қайси чорак бурчаги бўлади:

а) $\alpha=283°$; в) $\alpha=100°$; д) $\alpha=-110°$;
б) $\alpha=190°$; г) $\alpha=-20°$; е) $\alpha=4200°$?

668. α бурчак қайси чорак бурчаги эканини аниқланг:

а) $\alpha=179°$; в) $\alpha=-150°$; д) $\alpha=800°$;
б) $\alpha=325°$; г) $\alpha=-10°$; е) $\alpha=10\,000°$.



47- расм

669. 48- расмда 35°, 160°, 230° ва —70° га буриш бурчаклари стрелкалар билан кўрсатилган. Шу бурчаклардан ҳар бирининг синуси, косинуси, тангенси ва котангенсининг тақрибий қийматларини топинг.

670. Маркази координаталар бошида ва радиуси $R=5$ см бўлган айлана чизинг. Бошланғич радиусни α бурчакка буринг ва $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ нинг тақрибий қийматларини топинг, бунда $\alpha=50°$, 175°, —100°.

671. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $2\cos 60°+\sqrt{3}\cos 30°$; г) $3\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}60°$;
б) $5\sin 30°-\operatorname{ctg}45°$; д) $4\operatorname{tg}60°\cdot\sin 60°$;
в) $2\sin 30°+6\cos 60°-4\operatorname{tg}45°$; е) $12\sin 60°\cdot\cos 60°$.

672. Ҳисобланг:

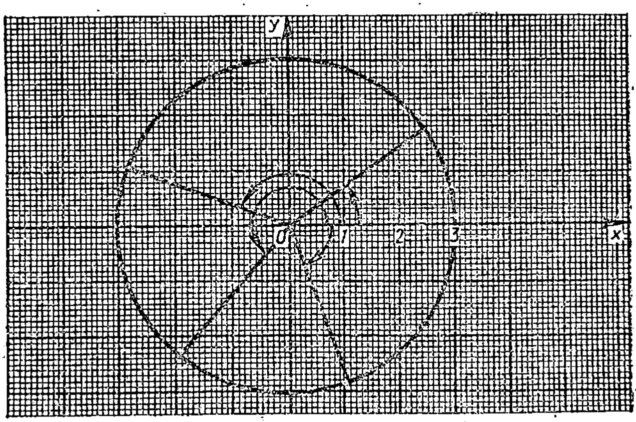
а) $2\sin 60°\cdot\operatorname{ctg}60°$; в) $7\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}30°$;
б) $2\sin 45°-4\cos 30°$; г) $6\operatorname{ctg}60°-2\sin 60°$.

673. α нинг:

а) $\sin\alpha=1$; б) $\cos\alpha=-1$; в) $\sin\alpha=0$; г) $\operatorname{tg}\alpha=0$ бўладиган бир нечта қийматини кўрсатинг.

674. β нинг:

а) $\sin\beta=-1$; б) $\cos\beta=1$; в) $\cos\beta=0$; г) $\operatorname{ctg}\beta=0$ бўладиган бир нечта қийматини кўрсатинг.



48- расм

675. Қуйидаги ифоданинг энг катта ва энг кичик қийматлари қандай:

а) $1+\sin\alpha$;   б) $2-\cos\alpha$?

676. Ифоданинг энг катта ва энг кичик қийматларини кўрсатинг:

а) $1-\sin\alpha$;   б) $2+\cos\alpha$.

677. а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$ ифода маънога эга бўлмайдиган бир нечта α бурчакни кўрсатинг.

678. $\sin\alpha$ қуйидаги қийматларни қабул қилиши мумкинми:

а) $\sqrt{2}$;   б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;   в) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;   г) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$?

679. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $2\cos 0^\circ - 4\sin 90^\circ + 5\operatorname{tg} 180^\circ$;
б) $2\operatorname{ctg} 90^\circ - 3\cos 270^\circ + 5\sin 0^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 360^\circ - \frac{3}{4}\sin 270^\circ - \frac{1}{4}\cos 180^\circ$.

680. Ҳисобланг:

а) $\sin 0^\circ + 2\cos 60^\circ$;   в) $4\sin 90^\circ - 3\cos 180^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$;   г) $3\operatorname{ctg} 90^\circ - 3\sin 270^\circ$.

681. α нинг қуйидаги қийматларида $\sin\alpha+\cos\alpha$ ифоданинг қийматини топинг:

а) $\alpha=0^\circ$;   б) $\alpha=45^\circ$;   в) $\alpha=90^\circ$;   г) $\alpha=180^\circ$.

682. α нинг қуйидаги қийматларида $\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$ ифоданинг қийматини топинг:

а) $\alpha=15^\circ$;   б) $\alpha=30^\circ$;   в) $\alpha=90^\circ$.

683. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$, бунда $\alpha=30^\circ$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$, бунда $\alpha=90^\circ$.

Такрорлаш учун машқлар

684. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(2x^{0,75}+3x^{0,25})^2-4x^{0,5}(x+2,25)$;

б) $\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a^{0,5}} : \left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}}-\frac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right)$.

685. а) $2x-3y=2$ тўғри чизиқ $x^2+y^2=20$ айланани кесиб ўтишини исботланг.

б) $x+7y=50$ тўғри чизиқ $x^2+y^2=50$ айланага уринишини исботланг.

686. 10 асосли даража кўринишида ифодаланг:

а) $\sqrt{10}$; в) $10\sqrt{10}$; д) $0,1\sqrt[3]{10}$;

б) $\sqrt[3]{100}$; г) $0,1\sqrt{0,1}$; е) $100\sqrt[4]{0,001}$.

27. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСНИНГ ХОССАЛАРИ

Чоракларнинг ҳар бирида синус, косинус, тангенс ва котангенс қандай ишораларга эга бўлишини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, R га тенг бўлган OA радиусни α бурчакка буришда A нуқта координаталари x ва y бўлган B нуқтага ўтган бўлсин (43- расмга қаранг).

$\sin\alpha$ нинг ишораси y нинг ишорасига боғлиқ, чунки $\sin\alpha=\frac{y}{R}$. I ва II чоракларда $y>0$, шунинг учун бу чоракларда $\sin\alpha>0$. III ва IV чоракларда $y<0$, шунинг учун бу чоракларда $\sin\alpha<0$.

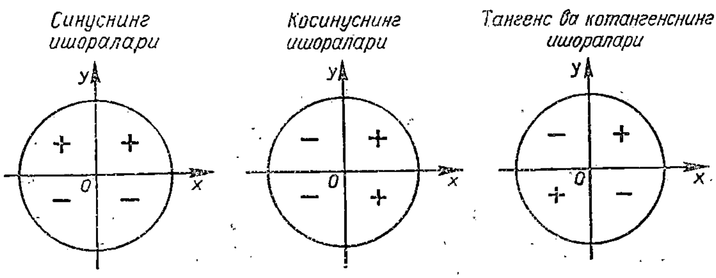
$\cos\alpha$ нинг ишораси x нинг ишорасига боғлиқ, чунки $\cos\alpha=\frac{x}{R}$. I ва IV чоракларда $x>0$, шунинг учун бу чоракларда $\cos\alpha>0$. II ва III чоракларда $x<0$, шунинг учун бу чоракларда $\cos\alpha<0$.

$\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ нинг ишоралари x ва y нинг ишорасига боғлиқ, чунки $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ ва $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$. I ва III чоракларда x ва y нинг ишоралари бир хил. Шунинг учун бу чоракларда $\operatorname{tg}\alpha>0$ ва $\operatorname{ctg}\alpha>0$. II ва IV чоракларда x ва y нинг ишоралари ҳар хил. Шунинг учун бу чоракларда $\operatorname{tg}\alpha<0$ ва $\operatorname{ctg}\alpha<0$.

Синус, косинус, тангенс ва котангенснинг ҳар бир чоракдаги ишоралари 49- расмда кўрсатилган.

Бурчакка бутун сондаги айланишлар қўшилганда синус, косинус, тангенс ва котангенснинг қиймати ўзгармайди.

Ҳақиқатан ҳам, OA радиусни α бурчакка бурганда OB ра-



49- расм

диус ҳосил қилинган бўлса (43-расмга қаранг), OA ни α дан бутун айланишлар сонига фарқ қилувчи бурчакка бурганда ҳам худди шу радиус ҳосил бўлади. Бу истаган бурчакнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси қийматларини топишни уларнинг 360° дан кичик номанфий бурчаклар учун қийматларини топишга келтиришга имкон беради. Масалан,

$$\sin 785° = \sin (2 \cdot 360° + 65°) = \sin 65°.$$

Энди қарама-қарши бурчакларнинг синуси, косинуси, тангенси ва котангенслари орасидаги боғланишни ифодаловчи формулаларни келтириб чиқарамиз.

Фараз қилайлик, OA радиус α бурчакка бурилганда OB радиусга ўтсин, $-\alpha$ бурчакка бурилганда эса OC радиусга ўтсин (50-расм). B ва C нуқталарни кесма билан туташтириб, тенг ёнли BOC учбурчакни ҳосил қиламиз. OK нур BOC бурчакнинг биссектрисаси бўлади. Демак, OK кесма BOC учбурчакнинг медианаси ва баландлиги бўлади. Бундан B ва C нуқталар абсциссалар ўқига нисбатан симметрик экани келиб чиқади.

B нуқтанинг координаталари x ва y га тенг бўлсин, у ҳолда C нуқтанинг координаталари x ва $-y$ га тенг бўлади. Бундан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\frac{y}{R} = -\sin\alpha;$$

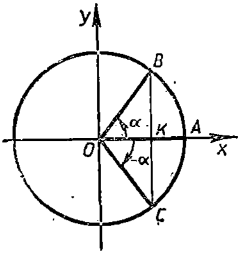
$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$



50-расм

Мисол. $\cos(-45°)$ ва $\operatorname{tg}(-60°)$ ифоданинг қийматини топамиз.

$$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}.$$

687. α нинг қуйидаги қийматларида $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ нинг ишораси қандай:

а) $\alpha = 48°$; в) $\alpha = 200°$;
б) $\alpha = 137°$; г) $\alpha = 306°$?

688. Ишораси қандай:

а) $\sin 179°$; в) $\operatorname{tg} 175°$; д) $\cos 410°$; ж) $\sin (-75°)$;
б) $\cos 280°$; г) $\operatorname{ctg} 359°$; е) $\operatorname{tg} 500°$; з) $\cos (-116°)$?

689. Ишорасини аниқланг:

а) $\cos 305°$; в) $\operatorname{tg} 145°$; д) $\cos (-25°)$;
б) $\sin 109°$; г) $\operatorname{ctg} 288°$; е) $\operatorname{tg} (-10°)$.

690. Агар:

а) $\sin \alpha > 0$ ва $\cos \alpha > 0$; г) $\sin \alpha > 0$ ва $\operatorname{tg} \alpha > 0$;
б) $\sin \alpha < 0$ ва $\cos \alpha > 0$; д) $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ва $\cos \alpha > 0$;
в) $\sin \alpha < 0$ ва $\cos \alpha < 0$; е) $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ ва $\sin \alpha < 0$

бўлса, α қайси чорак бурчаги бўлади?

691. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

а) $\sin 100° \cdot \cos 300°$; в) $\cos 320° \cdot \operatorname{ctg} 17°$;
б) $\sin 190° \cdot \operatorname{tg} 200°$; г) $\operatorname{tg} 170° \cdot \cos 400°$.

692. Қайси чоракларда қуйидагиларнинг ишоралари бир хил бўлади:

а) $\sin \alpha$ ва $\cos \alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$; в) $\cos \alpha$ ва $\operatorname{tg} \alpha$?

693. α бурчак синуси, косинуси, тангенси ва котангенсининг қийматларини топинг:

а) $\alpha = 750°$; б) $\alpha = 810°$; в) $\alpha = 1260°$.

694. Топинг:

а) $\sin 390°$; б) $\cos 420°$; в) $\operatorname{tg} 540°$; г) $\operatorname{ctg} 450°$.

695. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin 405°$; б) $\cos 720°$; в) $\operatorname{tg} 390°$; г) $\operatorname{ctg} 630°$.

696. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin (-30°)$; в) $\operatorname{tg} (-45°)$; д) $\cos (-90°)$;
б) $\cos (-60°)$; г) $\operatorname{ctg} (-30°)$; е) $\sin (-45°)$.

697. Ҳисобланг:

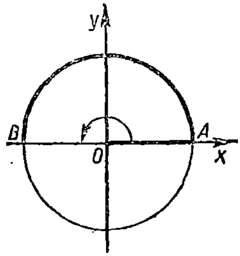
а) $\sin (-720°)$; в) $\cos (-780°)$;
б) $\cos (-405°)$; г) $\operatorname{ctg} (-1110°)$.

698. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin (-60°)$; в) $\sin (-90°)$;
б) $\cos (-180°)$; г) $\operatorname{tg} (-900°)$.

Такрорлаш учун машқлар

699. (b_n) кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлиб, унда $b_1 = 10^{-2,2}$ ва $q = 10^{0,3}$. b_{10}, b_7, b_{13} ларни топинг.



51- расм

700. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{b^2-a^2} : \left(1 - \frac{1+b}{b}\right)$;

б) $\frac{ab^2-a^2b}{a+b} \cdot \frac{a+\frac{ab}{a-b}}{a-\frac{ab}{a+b}}$.

28. БУРЧАКНИНГ РАДИАН ЎЛЧОВИ

Буриш бурчаги градус билан, минут билан, секунд билан ўлчаниши мумкин. Бу бирликлар қатори **радиан** деб аталувчи яна бир бирлик қўлланилади. Бир радиан тахминан 57° га тенг. Радианнинг градус билан ифодаланган аниқ қиймати $\frac{180}{\pi}$ каср билан ифодаланади:

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ.$$

R га тенг бошланғич OA радиусни 180° га бурамиз (51-расм). Бунда A нуқта ярим айлана чизади, унинг узунлиги πR га тенг. 1° га тенг буриш бурчагига узунлиги $\frac{\pi R}{180}$ га тенг ёй мос келади. 1 рад га тенг буриш бурчагига узунлиги R га тенг ёй мос келади. Ҳақиқатан, 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$, 1° бурчакка эса узунлиги $\frac{\pi R}{180}$ га тенг ёй мос келади. Шунинг учун

$$\frac{\pi R}{180} \cdot \frac{180}{\pi} = R.$$

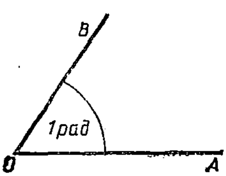
Шундай қилиб, бир радиан бурчак — бошланғич радиуснинг охири узунлиги радиусга тенг бўлган ёй чизадиган буриш бурчагидир.

52- расмда 1 радианга тенг бурчак тасвирланган.

1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$ тенгликдан

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}017 \text{ рад}$$

ҳосил бўлади.



52- расм

Радиан ўлчовидан градус ўлчовига ва градус ўлчовидан радиан ўлчовига ўтишга мисоллар қараб чиқамиз.

1- мисол. 4,5 рад ни градусларда ифодалаймиз.

1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$ бўлгани учун

$$4{,}5 \text{ рад} = 4{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{810^\circ}{\pi} \approx 258^\circ.$$

2-мисол. 72° ли бурчакнинг радиан ўлчовини топамиз.

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад бўлгани учун

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{2\pi}{5} \text{ рад} \approx 1{,}3 \text{ рад}.$$

Бурчакнинг радиан ўлчовини ёзишда „рад“ белги одатда ташлаб кетилади. Масалан, $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ рад тенглик ўрнига

$$72^\circ = \frac{2\pi}{5}$$

ёзилади.

30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° ва 360° бурчакларни радиан ўлчовида ифодалаймиз:

$$30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}; \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2};$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}; \qquad 180^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 180 = \pi;$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}; \qquad 270^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 270 = \frac{3}{2}\pi;$$

$$360^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 360 = 2\pi.$$

Бурчакнинг радиан ўлчови кўпинча тригонометрик ифодаларда фойдаланилади. Масалан, $\sin 1$ ёзуви 1 радианга тенг бурчакнинг синусини англатади, $\sin(-2{,}5)$ ёзуви $-2{,}5$ радианга тенг бурчакнинг синусини англатади, $\sin \frac{\pi}{4}$ ёзуви $\frac{\pi}{4}$ радианга тенг бурчакнинг синусини англатади. Умуман $\sin x$ ёзув (бунда x—ихтиёрий ҳақиқий сон) x радианга тенг бурчакнинг синусини англатади.

Ҳар бир x сонига синуснинг маълум бир қиймати мос келади. Шундай қилиб, синус аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлган функциядир. Худди шундай косинус аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлган функциядир. Синуснинг ҳам, косинуснинг ҳам қийматлар соҳаси $[-1; 1]$ оралиқ бўлади.

$\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, $\pm\frac{7}{2}\pi$, ... лардан бошқа ҳар бир сонга тангенснинг маълум қиймати мос келади. Тангенс аниқланиш соҳаси $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, $\pm\frac{7}{2}\pi$, ... лардан бошқа ҳамма сонлардан иборат бўлган функциядир. Бу функциянинг қийматлар соҳаси ҳақиқий сонлар тўплами бўлади.

Котангенс аниқланиш соҳаси 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... дан бошқа ҳамма сонлардан иборат бўлган функциядир. Котангенснинг қийматлар соҳаси ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

Синус, косинус, тангенс ва котангенс **тригонометрик функциялар** деб аталади.

Шуни айтиш керакки, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ бўлгани учун косинус жуфт функция бўлади. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$ бўлгани учун синус, тангенс ва котангенс тоқ функция бўлади.

701. Бурчакнинг қуйидаги радиан ўлчовига кўра градус ўлчовини топинг:

а) 0,5; в) $\frac{\pi}{5}$; д) $\frac{3}{4}\pi$; ж) $-\frac{9}{2}\pi$;

б) 10; г) $\frac{\pi}{9}$; е) $-\frac{5}{6}\pi$; з) 12π.

702. Бурчакнинг радиан ўлчовини градус билан ифодаланг:

а) 0,2; б) 3,1; в) $\frac{5}{2}\pi$; г) $-\frac{3}{2}\pi$; д) $-\frac{1}{3}\pi$; е) $\frac{5}{4}\pi$.

703. Бурчакнинг радиан ўлчовини топинг:

а) 135°; в) 36°; д) 240°; ж) —120°;
б) 210°; г) 150°; е) 300°; з) —225°.

704. α бурчакни радиан билан ифодаланг:

а) $\alpha = 54°$; в) $\alpha = 225°$; д) $\alpha = -45°$;
б) $\alpha = 200°$; г) $\alpha = 390°$; е) $\alpha = -60°$.

705. α бурчакка қўшни бурчакни радиан билан ифодаланг, бунда:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{11\pi}{12}$; в) $\alpha = 0{,}3\pi$.

706. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг бурчакларини радиан билан ифодаланг.

707. α бурчак қайси чорак бурчаги:

а) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; б) $\alpha = 1{,}8\pi$; в) $\alpha = 0{,}6\pi$; г) $\alpha = 1$?

708. Жадвални тўлдиринг:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\mathrm{tg}\,\alpha$								
$\mathrm{ctg}\,\alpha$								

709. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; в) $\sin 1$; д) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; ж) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}$;

б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos 0{,}9$; е) $\mathrm{tg}\,3$; з) $\mathrm{ctg}\,0{,}2$.

710. Қуйидаги оралиқда тригонометрик функциялардан ҳар бири қандай ишорага эга бўлади:

а) $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; в) $\left(\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right)$; г) $\left(\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right)$?

711. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $2\sin\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{4} - 3\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\pi$;

г) $3\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\frac{\pi}{4} - 3\,\mathrm{tg}0 - 2\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

712. Ҳисобланг:

а) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3}$; в) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{4}$; г) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$.

713. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $5\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 - 3\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi$;

б) $\sin(-\pi) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sin 2\pi - \mathrm{tg}\pi$;

в) $3 - \sin^2\frac{\pi}{3} + 2\cos^2\frac{\pi}{2} - 5\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

г) $3\sin^2\frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4} - 3\cos^2\frac{\pi}{6} + 3\,\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{2}$.

714. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin 2{,}5\pi$; б) $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; в) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{6}$; г) $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$.

715. Топинг:

а) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{3}$; б) $\cos\frac{17\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$.

Такрорлаш учун машқлар

716. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{a-3}{a^2-3a+9} - \frac{6a-18}{a^3+27}\right) : \frac{5a-15}{4a^3+108}$;

б) $\left(\frac{x-3}{x^3-64}+\frac{x-3}{x^2+4x+16}\right)\cdot\frac{2x^3-128}{3-x}$.

717. Тенгсизликни ечинг:

а) $6x-10x^2<0$; б) $7x^2\leqslant-2x$.

12-§. АСОСИЙ ТРИГОНОМЕТРИК ФОРМУЛАЛАР

29. АЙНИ БИР АРГУМЕНТНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

Фараз қилайлик, R га тенг бўлган OA радиусни α бурчакка буришда OB радиус ҳосил қилинган бўлсин (53- расм). У ҳолда таърифга кўра

$$\sin\alpha=\frac{y}{R};\ \cos\alpha=\frac{x}{R},$$

бунда x — B нуқтанинг абсциссаси, y — унинг ординатаси.

Бундан

$$x=R\cos\alpha,\ \ y=R\sin\alpha$$

келиб чиқади.

B нуқта айланага тегишли бўлгани учун унинг координаталари $x^2+y^2=R^2$ тенгламани қаноатлантиради.

$x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha$ эканидан фойдаланиб,

$$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2=R^2$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан:

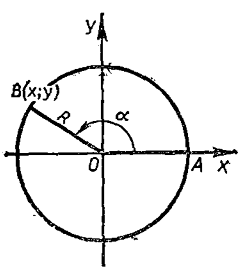
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1)$$

(1) формула бир аргументнинг синуси ва косинуси орасидаги муносабатни ифодалайди.

Энди айни бир аргументнинг тангенси, синуси ва косинуси ўзаро қандай боғланганини кўрайлик.

Таърифга кўра $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$. $y=R\sin\alpha$, $x=R\cos\alpha$ бўлгани учун

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$



53- расм

Шундай қилиб,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Шунга ўхшаш

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

яъни

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

(1) тенглик α нинг истаган қийматларида тўғри. (2) тенглик α нинг $\cos\alpha\neq 0$ бўладиган ҳамма қийматларида тўғри, (3) тенглик эса α нинг $\sin\alpha\neq 0$ бўладиган ҳамма қийматларида тўғри.

(1)—(3) формулалар ёрдамида айни бир аргументнинг тригонометрик функциялари орасидаги муносабатларни ифодаловчи бошқа формулаларни ҳосил қилиш мумкин.

(2) ва (3) тенгликлардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1,$$

яъни

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \qquad (4)$$

(4) тенглик бир аргументнинг тангенси ва котангенси қандай боғланганини кўрсатади. У α нинг $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ маънога эга бўладиган ҳамма қийматларида тўғри.

Шуни айтиб ўтиш керакки, (4) формулани тангенс ва котангенснинг таърифидан бевосита ҳосил қилиш ҳам мумкин.

Энди айни бир аргументнинг тангенси билан косинуси орасидаги, шунингдек, котангенси билан синуси орасидаги муносабатни ифодаловчи формулаларни келтириб чиқарамиз.

(1) тенгликнинг иккала қисмини $\cos^2\alpha$ га бўлсак:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

яъни

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (5)$$

ҳосил бўлади.

Агар (1) тенгликнинг иккала қисми $\sin^2\alpha$ га бўлинса, у ҳолда

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

яъни

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (6)$$

ҳосил бўлади.

(5) тенглик $\cos\alpha\neq 0$ да тўғри, (6) тенглик эса $\sin\alpha\neq 0$ да тўғри.

(1)—(6) тенгликлар айниятдир. Улар асосий **тригонометрик айниятлар** дейилади. Тригонометрик функциялардан бирининг маълум қийматига кўра бошқаларининг қийматини топиш учун бу айниятлардан фойдаланишга мисоллар қараймиз.

1-мисол. Агар $\sin=\frac{5}{13}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бўлса, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топамиз.

Аввал $\cos\alpha$ ни топамиз. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ формуладан

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

ни ҳосил қиламиз.

α II чорак бурчаги бўлгани учун унинг косинуси манфий. Демак,

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}.$$

α бурчакнинг синуси ва косинусини билган ҳолда унинг тангенсини топиш мумкин:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

α бурчакнинг котангенсини топиш учун $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ формуладан фойдаланган қулай. Натижада:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5}.$$

Шундай қилиб

$$\cos\alpha=-\frac{12}{13},\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12},\ \operatorname{ctg}\alpha=-2\frac{2}{5}.$$

2-мисол. $\operatorname{tg}\alpha=2$ ва $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ экани маълум. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топамиз.

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ формуладан фойдаланиб, $\cos\alpha$ ни топамиз. Натижада:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}.$$

Шартга кўра α бурчак I чорак бурчагидир, шунинг учун унинг косинуси мусбат бўлади. Демак,

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ ни билган ҳолда $\sin\alpha$ ни топиш мумкин. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ формуладан

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ни ҳосил қиламиз.

Маълум $\operatorname{tg}\alpha$ га кўра $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топиш осон:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

718. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ экани маълум. Агар:

а) $\cos\alpha=-0{,}6$ бўлса, $\sin\alpha$ ни топинг;

б) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ бўлса, $\cos\alpha$ ни топинг;

в) $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$ бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$ ни топинг;

г) $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ бўлса, $\sin\alpha$ ни топинг.

719. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ экани маълум. Агар:

а) $\sin\alpha=0{,}6$ бўлса, $\cos\alpha$ ни топинг;

б) $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ бўлса, $\sin\alpha$ ни топинг;

в) $\operatorname{tg}\alpha=3$ бўлса, $\cos\alpha$ ни топинг;

г) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ бўлса, $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг.

720. Бирор β бурчак учун қуйидаги шарт бажарилиши мумкинми:

а) $\sin\beta=\frac{9}{41},\ \cos\beta=\frac{40}{41};$ в) $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{9},\ \operatorname{ctg}\beta=1{,}8;$

б) $\sin\beta=\frac{3}{4},\ \cos\beta=\frac{1}{4};$ г) $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{2}-1,\ \operatorname{ctg}\beta=\sqrt{2}+1?$

721. Ўқувчи бирор α бурчакнинг синуси ва косинуси қийматларини жадвалдан қидириб, $\sin\alpha\approx0{,}33$, $\cos\alpha\approx0{,}63$ эканини топди. Ўқувчи хато қилганини исботланг.

722. а) Агар $\sin\alpha=\frac{9}{41}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$ ни топинг;

б) агар $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ бўлса, $\cos\alpha$ ни топинг.

723. α бурчак II чорак бурчаги экани маълум. Агар:

а) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ бўлса, $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг;

б) $\operatorname{tg}\alpha=-1$ бўлса, $\sin\alpha$ ни топинг.

724. Қуйида берилганларга кўра α бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини топинг:

а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ва $0<\alpha<\frac{\pi}{2};$

б) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ ва α — I чорак бурчаги;

в) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$

г) $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}5$ ва α — IV чорак бурчаги.

725. Қуйида берилганларни билган ҳолда β бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини ҳисобланг:

а) $\sin\beta = \frac{40}{41}$ ва $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

б) $\cos\beta = \frac{4}{5}$ ва $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

в) $\operatorname{tg}\beta = 1$ ва $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\beta = 3$ ва $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

726. а) $\sin\alpha = 0{,}62$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}1$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\cos\alpha = -0{,}23$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}2$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

эканини билган ҳолда α бурчакнинг қолган тригонометрик функцияларининг қийматларини ҳисобланг (жавобни унда иккита қийматли рақам қолдириб яхлитланг). Ҳисоблашларда микрокалькулятордан фойдаланиш мумкин.

727. Қуйида берилганларга кўра α бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини топинг:

а) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

728. α бурчакнинг тригонометрик функцияларини:

а) $\sin\alpha$ орқали; б) $\cos\alpha$ орқали ифодаланг.

Такрорлаш учун машқлар

729. $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} - y^{-1}} \cdot \frac{x^2 y^2}{x+y}$ ифоданинг қийматини $x = -0{,}12$; $y = 0{,}5$ да топинг.

730. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2 - x - 56 < 0$;

б) $3x^2 - 29x - 10 > 0$;

в) $4x^2 \leqslant -1$;

г) $\frac{1}{4} - x + x^2 > 0$.

731. Тенгламани ечинг:

а) $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$;

б) $\frac{3x - 30}{x^3 - 8} - \frac{10}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x - 2} = 0$.

30. АСОСИЙ ТРИГОНОМЕТРИК ФОРМУЛАЛАРНИНГ ИФОДАЛАРНИ АЛМАШТИРИШДА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Айни бир аргументнинг тригонометрик функциялари орасидаги ўрнатилган муносабатлар тригонометрик ифодаларни соддалаштиришга ва тригонометрик айниятларни исботлашга имкон беради.

1-мисол. $\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)$ ифодани соддалаштирамиз.

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ва $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ формулалардан фойдаланииб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}(-\sin^2\alpha) = -\cos^2\alpha.$$

2 мисол. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ифодани соддалаштирамиз.

Бундан:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$

3-мисол. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$ айниятни исботлаймиз.

Берилган тенгликнинг чап қисмини алмаштирамиз:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) =$$

$$= \sin^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha - 1) = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha.$$

Биз тенгликнинг ўнг томонида турган ифодани ҳосил қилдик. Шундай қилиб, айният исботланди.

732. Ифодани соддалаштиринг;

а) $1 - \cos^2\alpha$;
б) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
в) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;
г) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;
д) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$;
е) $1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

733. Ифодани алмаштиринг:

а) $1 - \sin^2\alpha$;
б) $\cos^2\alpha - 1$;
в) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$;
г) $(1 - \cos\alpha)(\cos\alpha + 1)$;
д) $\sin^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;
е) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

734. Ифодани соддалаштиринг:

а) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
б) $\sin\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{tg}\beta$;
в) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$;
г) $\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) + 1$;
д) $(\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$;
е) $\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$.

735. Ифодани алмаштиринг:

а) $\sin^2\beta+\cos^2\beta+\mathrm{tg}^2\beta$; в) $\cos^2\gamma-(\mathrm{ctg}^2\gamma+1)\sin^2\gamma$;

б) $\dfrac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x-1}+\mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}x$; г) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\beta-1}$.

736. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha}$; в) $1+\mathrm{tg}^2\beta(\sin^2\beta-1)$;

б) $\dfrac{2-\sin^2\beta-\cos^2\beta}{2+\sin^2\beta+\cos^2\beta}$; г) $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha+\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$.

737. β нинг ҳамма қабул қиладиган қийматларида ифоданинг қиймати β га боғлиқ бўлмаслигини исботланг:

а) $\dfrac{1+2\sin\beta\cos\beta}{(\sin\beta+\cos\beta)^2}$; в) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\beta}$;

б) $\dfrac{\sin^2\beta-\cos^2\beta+1}{\sin^2\beta}$; г) $\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$.

738. α нинг ҳамма қабул қиладиган қийматларида ифода айни бир қиймат олишини исботланг:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\dfrac{7-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$;

в) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

г) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

739. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; в) $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2(-\alpha)-1$;

б) $\dfrac{\mathrm{ctg}(-\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha}$; г) $\dfrac{1-\mathrm{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha+\cos(-\alpha)}$.

740. Ифодани алмаштиринг:

а) $\mathrm{ctg}\,\alpha\sin(-\alpha)-\cos(-\alpha)$; в) $\mathrm{tg}(-\beta)\,\mathrm{ctg}\,\beta+\sin^2\beta$;

б) $\dfrac{1-\sin^2(-x)}{\cos x}$; г) $\dfrac{\mathrm{tg}(-x)+1}{1-\mathrm{ctg}\,x}$.

741. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; в) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\varphi-1}{\mathrm{tg}^2\varphi+1}+\cos^2\varphi$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\mathrm{tg}\alpha$; г) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha$.

742. Ифоданинг энг катта қийматини топинг:

а) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$; в) $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha+5\cos^2\alpha-1$;

б) $1-\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$.

743. $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}8$ эканини билган ҳолда $\sin\alpha\cos\alpha$ ни топинг.

744. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}3$ эканини билган ҳолда $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$ ни топинг.

745. Айниятни исботланг:

а) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=4$;

б) $(2+\sin\beta)(2-\sin\beta)+(2+\cos\beta)(2-\cos\beta)=7$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$;

г) $\frac{1-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\sin x-\cos x$.

746. α нинг қабул қиладиган ҳамма қийматларида тенглик тўғри бўлишини исботланг:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

б) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$.

747. Айниятни исботланг:

а) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

б) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

в) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}=2\operatorname{tg}\beta$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

748. Айниятни исботланг:

а) $(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha=1$;

г) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

749. Ифодани соддалаштиринг ва унинг қийматини топинг:

а) $1-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$, бунда $\sin\alpha=0{,}7$;

б) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, бунда $\operatorname{tg}\alpha=2$.

750. Ифодани соддалаштириб, кейин унинг қийматини топинг:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \text{ бунда } \sin\alpha=-\frac{1}{8}.$$

Такрорлаш учун машқлар

751. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\cos 8{,}5\pi$; б) $\operatorname{tg} 9\pi$; в) $\sin(-3{,}5\pi)$; г) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}$;

д) $\cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$.

752. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг айирмаси 5 дм га тенг. Агар катта катет 4 дм орттирилиб, иккинчи катет 8 дм камайтирилса, у ҳолда ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчак дастлабки учбурчак гипотенузаси узунлигига тенг гипотенузага эга бўлади. Берилган учбурчакнинг катетлари узунликларини топинг.

753. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг йиғиндиси 79 см га тенг. Агар катетлардан бири 23 см орттирилса, иккинчиси эса 11 см камайтирилса, ҳосил бўлган янги тўғри бурчакли учбурчак берилган учбурчак гипотенузасининг узунлигига тенг гипотенузага эга бўлади. Берилган учбурчак катетларининг узунликларини топинг.

754. Сонни стандарт шаклда ёзинг ва унинг тартибини кўрсатинг:

а) 650; б) 13750; в) 0,81; г) 0,00895.

31. КЕЛТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

$\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ кўринишдаги (бундан k — ихтиёрий бутун сон) бурчакларнинг тригонометрик функциялари **келтириш формулалари** деб аталувчи формулалар ёрдамида α бурчакнинг функциялари орқали ифодаланиши мумкин. k миқдор 1, 2, 3 ва 4 га тенг бўлганда ҳосил бўладиган $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ ва $2\pi \pm \alpha$ бурчаклар учун келтириш формулаларини кўриб чиқамиз. k нинг бошқа бутун қийматларига мос келувчи бурчаклар берилган бурчакларга бутун сондаги айланишлар сонини қўшиш билан ҳосил қилиниши мумкин.

Аввал синус ва косинус учун келтириш формулаларини чиқарамиз.

Истаган α учун

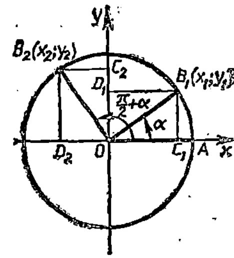
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \text{ ва } \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad (1)$$

эканини исботлаймиз.

$OA = R$ радиусини α бурчакка ва $\frac{\pi}{2}+\alpha$ бурчакка бурамиз, бунда OA радиус мос равишда OB_1 ва OB_2 радиусларга ўтади (54-расм).

B_1 нуқтадан координата ўқларига B_1C_1 ва B_1D_1 перпендикулярларни туширамиз. $OD_1B_1C_1$ тўғри тўртбурчакни ҳосил қиламиз.

$OD_1B_1C_1$ тўғри тўртбурчакни O нуқта атрофида $\frac{\pi}{2}$ бурчакка бурамиз. Бунда B_1 нуқта B_2 нуқтага, C_1 нуқта y ўқининг C_2 нуқтасига, D_1 нуқта x ўқининг D_2 нуқтасига ўтади. $OD_1B_1C_1$ тўғри тўртбурчак эса ўзига тенг бўлган $OD_2B_2C_2$ тўғри тўртбурчакка ўтади.



54- расм

Бундан B_2 нуқтанинг ординатаси B_1 нуқтанинг абсциссасига тенг, B_2 нуқтанинг абсциссаси эса B_1 нуқтанинг ординатасига тескари бўлган сонга тенг. B_1 нуқтанинг координаталарини x_1 ва y_1 билан, B_2 нуқтанинг координаталарини эса x_2 ва y_2 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$y_2 = x_1 \text{ ва } x_2 = -y_1.$$

Шунинг учун

$$\frac{y_2}{R} = \frac{x_1}{R} \text{ ва } \frac{x_2}{R} = -\frac{y_1}{R}.$$

Демак,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \text{ ва } \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha.$$

(1) формуладан

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \text{ ва } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

экани келиб чиқади.

Ҳақиқатан, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ айирмани $\frac{\pi}{2}+(-\alpha)$ йиғинди кўринишида ифодалаймиз. У ҳолда

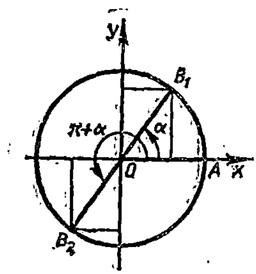
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

Энди $\pi+\alpha$ бурчакнинг синуси ва косинуси учун келтириш формулаларини исботлаймиз:

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \text{ ва } \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha. \quad (2)$$

$\pi+\alpha$ ни $\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ кўринишда ифодалаймиз ва икки марта (1) формулалардан фойдаланамиз.



55- расм

Натижада:

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

(2) формулаларга геометрик нуқтаи назардан келиш осонлигини айтиб ўтиш керак (55- расм). OA радиусни α бурчакка ва $\pi+\alpha$ бурчакка бурганда A нуқта мос ҳолда B_1 ва B_2 нуқталарга ўтади, бу нуқталар координаталар бошига нисбатан симметрик. Координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқталарнинг абсциссалари, шунингдек, ординаталари модуллари бўйича тенг ва ишораси бўйича қарама-қаршидир. Бундан $\sin(\pi+\alpha)$ ва $\sin\alpha$, шунингдек, $\cos(\pi+\alpha)$ ва $\cos\alpha$ — қарама-қарши сонлар экани келиб чиқади.

Энди

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \text{ ва } \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

эканини исботлаш мумкин.

Бунинг учун $\pi-\alpha$ ни $\pi+(-\alpha)$ йиғинди кўринишида ифодалаш ва (2) формулани қўлланиш етарли.

$\frac{3}{2}\pi+\alpha$ бурчакнинг синуси ва косинуси учун келтириш формулалари бундай кўринишда бўлади:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha \text{ ва } \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha. \quad (3)$$

(3) формулани исботлаш учун $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ ифодани $\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)$ кўринишда ифодалаш ҳамда (1) ва (2) формулаларни кетма-кет қўлланиш етарли.

(3) формуладан

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha \text{ ва } \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

эканини ҳосил қилиш қийин эмас.

Ниҳоят, $2\pi+\alpha$ бурчакнинг синуси ва косинуси учун келтириш формулаларини қараб чиқамиз. α бурчакни бутун айланишлар сонига ўзгартирганда синус ва косинуснинг қиймати ўзгармаслигини биламиз. Шунинг учун

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha \quad \text{ва} \quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha. \quad (4)$$

Қуйидаги формулалар ҳам ўринли:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \text{ ва } \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$

Тангенс ва котангенс учун келтириш формулалари синус ва косинус учун келтириш формулалари ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин. Масалан:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ҳамма келтириш формулаларини иккита жадвалга жойлаштирамиз, уларнинг биринчисига $\pi\pm\alpha$ ва $2\pi\pm\alpha$ бурчаклар учун формулаларни, иккинчисига $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ва $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ бурчаклар учун формулаларни жойлаштирамиз:

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Жадваллардан келтириш формулалари учун ўринли бўлган қонуниятлар кўриниб турибди:

агар α бурчак I чорак бурчаги бўлса, дастлабки функция қандай ишорага эга бўлса, тенгликнинг ўнг томонидаги функция ҳам шундай ишора билан олинади;

$\pi\pm\alpha$ ва $2\pi\pm\alpha$ бурчаклар учун дастлабки функция номи сақланади; $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ва $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ бурчаклар учун дастлабки функция номи ўзгаради (синус косинусга, косинус синусга, тангенс котангенсга, котангенс тангенсга).

Айтиб ўтилган қонуният истаган келтириш формуласини жадвалдан фойдаланмасдан ёзишга имкон беради. Масалан.

$tg\,(\pi-\alpha)$ ни α бурчакнинг функцияси орқали ифодалаймиз. Агар α ни I чорак бурчаги деб ҳисобланса, у ҳолда $\pi-\alpha$ II чорак бурчаги бўлади. Иккинчи чоракда тангенс манфий, демак тенгликнинг ўнг қисмига «минус» ишорасини қўйиш керак. α бурчак π дан айирилгани учун «тангенс» номи сақланади. Шунинг учун $tg\,(\pi-\alpha)=-tg\,\alpha$.

Келтириш формулалари ёрдамида истаган бурчак тригонометрик функциялари қийматларини топишни 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини топишга келтириш мумкин. Мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $\cos\frac{8\pi}{3}$ ифоданинг қийматини топамиз.

$$\cos\frac{8\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

2-мисол. $\sin(-560°)$ ифоданинг қийматини топамиз.

$$\sin(-560°)=-\sin 560°=-\sin(360°+200°)=$$
$$=-\sin 200°=-\sin(180°+20°)=-(-\sin 20°)=\sin 20°.$$

Синуслар жадвалидан топамиз: $\sin 20°\approx 0{,}3420$. Демак, $\sin(-560°)\approx 0{,}3420$.

755. α бурчакнинг тригонометрик функцияларига алмаштиринг:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; д) $\cos(2\pi-\alpha)$; и) $ctg\,(360°-\alpha)$;
б) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$; е) $\sin(2\pi+\alpha)$; к) $\cos(90°-\alpha)$;
в) $tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; ж) $tg\,(180°-\alpha)$; л) $\sin(270°-\alpha)$;
г) $ctg(\pi+\alpha)$; з) $\sin(180°+\alpha)$; м) $tg\,(270°+\alpha)$.

756. α бурчакнинг тригонометрик функциясига келтиринг:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\cos(2\pi+\alpha)$; ж) $\sin(360°+\alpha)$;
б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; д) $ctg\,(\pi-\alpha)$; з) $\cos(90°+\alpha)$;
в) $tg\,(\pi+\alpha)$; е) $\sin(\pi+\alpha)$; и) $tg\,(90°-\alpha)$.

757. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$ ва $ctg\,\alpha$ ни 0° дан 90° гача оралиқдаги бурчакнинг тригонометрик функцияси орқали ифодаланг, бунда:

а) $\alpha=130°$; б) $\alpha=190°$; в) $\alpha=-320°$; г) $\alpha=-590°$.

758. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ораликдаги бурчакнинг тригонометрик функциясиға келтиринг:

а) $\cos 0{,}7\pi$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{5}\pi\right)$; в) $\sin 1{,}6\pi$; г) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

759. $0°$ дан $90°$ гача ораликдаги бурчакнинг тригонометрик функциясига келтиринг:

а) $\operatorname{tg} 137°$; б) $\sin(-178°)$; в) $\sin 680°$; г) $\cos(-1000°)$.

760. Жадваллар ёрдамида топинг:

а) $\sin 218°$; б) $\cos(-429°)$; в) $\operatorname{tg}(-735°)$.

761. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг, бунда:

а) $\alpha = \frac{2}{7}\pi$; б) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; в) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.

762. Ифоданинг кийматини топинг:

а) $\sin 240°$; в) $\operatorname{tg} 300°$; д) $\operatorname{ctg}(-225°)$;
б) $\cos(-210°)$; г) $\sin 330°$; е) $\sin 315°$.

763. Топинг:

а) $\cos 120°$; в) $\operatorname{tg}(-225°)$; д) $\cos\frac{7}{6}\pi$;

б) $\sin(-150°)$; г) $\cos(-225°)$; е) $\sin\frac{4\pi}{3}$.

764. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{ctg}(\alpha - 360°)$;
б) $\cos(\alpha - \pi)$; г) $\operatorname{tg}(-\alpha + 270°)$.

765. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$.

766. Ифодани алмаштиринг:

а) $\sin^2(\pi + \alpha)$; в) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\operatorname{ctg}^2(2\pi - \alpha)$.

767. Агар A, B, C — учбурчакнинг бурчаклари бўлса, у ҳолда

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$$

эканини исботланг.

768. Агар $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

эканини исботланг.

769. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sin(90°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)+\operatorname{tg}(270°+\alpha)+\operatorname{ctg}(360°+\alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

770. Ифодани алмаштиринг:

а) $\frac{\cos(-\alpha)\cdot\cos(180°+\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)}$;

в) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\alpha-\pi)}$;

б) $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°+\alpha)}$;

г) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos(1{,}5\pi+\alpha)}$.

771. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sin^2(180-x)+\sin^2(270-x)$;

б) $\sin(\pi-x)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi-x)$.

772. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

б) $\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos(2\pi+x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

773. Исботланг:

а) $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$.

774. Исботланг:

а) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\operatorname{ctg}^2(2\pi-\alpha)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Такрорлаш учун машқлар

775. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ экани маълум. Агар:

а) $\cos\alpha=-0{,}8$ бўлса, $\sin\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг;

б) $\operatorname{tg}\alpha=5$ бўлса, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ни топинг.

776. Орасидаги масофа 75 км бўлган A ва B станциялардан бир вақтда юк ва скорий поезди йўлга чиқиб, ярим соатдан сўнг учрашди. Юк поезди B га скорий поезд A га етганидан 25 минут кейин етиб келди. Ҳар бир поезднинг тезлиги қандай?

777. Охирги станцияга 70 км қолганда поезд 10 минут кечикаётган эди. Мўлжалдаги жойга вақтида етиб бориш учун поезд тезлигини 10 км/соат орттирди. Поезд охирги 70 км йўлни қандай тезлик билан ўтди?

778. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{27^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{3}{4}}}{81^{-\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}-32^{\frac{1}{5}}}{125^{-\frac{1}{3}}}$.

13-§. ҚЎШИШ ФОРМУЛАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ НАТИЖАЛАРИ

32. ҚЎШИШ ФОРМУЛАЛАРИ

Икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг тригонометрик функцияларини шу бурчакларнинг тригонометрик функциялари орқали ифодалашга имкон берувчи формулаларни келтириб чиқарамиз.

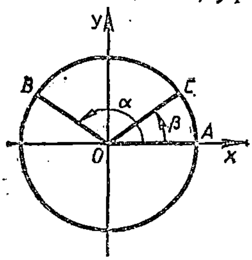
R га тенг бўлган OA радиусни O нуқта атрофида α бурчакка ва β бурчакка бурамиз (56-расм). OB ва OC радиусларни ҳосил қиламиз.

$\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топамиз. B нуқтанинг координаталари x_1 ва y_1 га, C нуқтанинг координаталари эса x_2 ва y_2 га тенг бўлсин. $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ векторлар ҳам мос ҳолда шу координаталарга эга. Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг таърифига кўра:

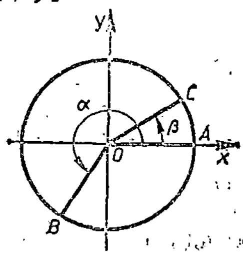
$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=x_1x_2+y_1y_2 .$$

$\overline{OB}\cdot\overline{OC}$ скаляр кўпайтмани α ва β бурчакларнинг тригонометрик функциялари орқали ифодалаймиз. Косинус ва синуснинг таърифидан қуйидаги келиб чиқади:

$$x_1=R\cos\alpha,\ y_1=R\sin\alpha,\ x_2=R\cos\beta,\ y_2=R\sin\beta.$$



56-расм



57-расм

x_1, x_2, y_1, y_2 нинг қийматларини $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=x_1x_2+y_1y_2$ тенгликнинг ўнг томонига қўйиб, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos\alpha\cos\beta+R^2\sin\alpha\sin\beta=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ҳақидаги теоремага кўра:

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=|\overline{OB}|\cdot|\overline{OC}|\cdot\cos\angle BOC.$$

OB ва OC векторлар орасидаги BOC бурчак $\alpha-\beta$ га (56-расмга қаранг), $2\pi-(\alpha-\beta)$ га (57-расм) тенг бўлиши мумкин ёки улардан бутун айланишлар сонига фарқ қилиши мумкин Бу ҳолларнинг истаганида $\cos\angle BOC=\cos(\alpha-\beta)$ бўлади. Шунинг учун

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=|\overline{OB}|\cdot|\overline{OC}|\cdot\cos(\alpha-\beta)=R^2\cos(\alpha-\beta).$$

Демак,

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos(\alpha-\beta).$$

$\overline{OB}\cdot\overline{OC}$ шунингдек $R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$ га ҳам тенг бўлгани учун

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

бўлади.

Икки бурчак айирмасининг косинуси шу бурчаклар косинуслари кўпайтмаси плюс шу бурчаклар синусларининг кўпайтмасига тенг.

(1) формула айирманинг косинуси дейилади.

(1) формула ёрдамида йиғиндининг косинуси формуласини ҳосил қилиш осон:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Демак,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Икки бурчак йиғиндисининг косинуси шу бурчаклар косинуслари кўпайтмаси минус шу бурчаклар синуслари кўпайтмасига тенг.

Энди йиғиндининг синуси ва айирманинг синуси формулаларини келтириб чиқарамиз.

(1) формуладан ва келтириш формулаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Демак,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (3)$$

Икки бурчак йиғиндисининг синуси биринчи бурчак синуси билан иккинчи бурчак косинуси кўпайтмаси плюс биринчи бурчак косинуси билан иккинчи бурчак синуси кўпайтмасига тенг.

Айирманинг синуси учун:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Демак,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (4)$$

Икки бурчак айирмасининг синуси биринчи бурчак синуси билан иккинчи бурчак косинуси кўпайтмаси минус биринчи бурчак косинуси билан иккинчи бурчак синуси кўпайтмасига тенг.

(1)—(4) формулалар **қўшиш формулалари** дейилади.

Қўшиш формулаларидан фойдаланишга мисоллар келтирамиз:

1-мисол. $\cos 15°$ ва $\sin 15°$ ни ҳисоблаймиз.

$15°$ ни $45°-30°$ айирма кўринишида ифодалаймиз. У ҳолда

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°-\sin 45\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$
$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2-мисол. $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ ифодани соддалаштирамиз.

Йиғиндининг косинуси ва айирманинг косинуси формулаларидан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+$$
$$+\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta.$$

(1)—(4) формулалардан фойдаланиб, тангенс ва котангенс учун қўшиш формулаларини чиқариш мумкин. Масалан, йиғиндининг тангенси формуласини келтириб чиқарамиз:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Ҳосил қилинган касрнинг сурат ва махражини $\cos\alpha\neq0$ ва $\cos\beta\neq0$ деб фараз қилиб, $\cos\alpha\cos\beta$ кўпайтмага бўламиз. Натижада:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ни ҳосил қиламиз.

Демак,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (5)$$

Шунга ўхшаш

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (6)$$

эканини исботлаш мумкин.

779. Қўшиш формулалари ёрдамида ифодани алмаштиринг:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$; в) $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$; г) $\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$.

780. Қўшиш формулаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни текширинг:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; в) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$;

б) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

881. 105° ни 60° +45° йиғинди кўринишида ифодалаб, ҳисобланг:

а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

782. 75° ни 30° +45° йиғинди сифатида ифодалаб, ҳисобланг:

а) $\sin 75°$; б) $\cos 75°$.

783. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$;

в) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$; г) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

784. $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α ва β — I чорак бурчаклари эканини билган ҳолда ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\cos(\alpha+\beta)$; в) $\cos(\alpha-\beta)$.

785. Агар $\sin\alpha=\frac{9}{41}$, $\sin\beta=-\frac{40}{41}$, α — II чорак бурчаги, β эса IV чорак бурчаги бўлса, $\sin(\alpha+\beta)$ ни топинг.

786. α ва β — II чорак бурчаклари ва $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$ экани маълум. Қуйидагиларни топинг:

а) $\sin(\alpha+\beta)$; в) $\cos(\alpha-\beta)$;
б) $\sin(\alpha-\beta)$; г) $\cos(\alpha+\beta)$.

787. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\cos 24^\circ\cos 31^\circ-\sin 24^\circ\sin 31^\circ$;
б) $\sin 38^\circ\cos 12^\circ+\cos 38^\circ\sin 12^\circ$;
в) $\sin 137^\circ\cos 52^\circ-\cos 137^\circ\sin 52^\circ$.

788. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\cos 107^\circ\cos 17^\circ+\sin 107^\circ\sin 17^\circ$;
б) $\cos 36^\circ\cos 24^\circ-\sin 36^\circ\sin 24^\circ$;
в) $\sin 63^\circ\cos 27^\circ+\cos 63^\circ\sin 27^\circ$;
г) $\sin 51^\circ\cos 21^\circ-\cos 51^\circ\sin 21^\circ$.

789. Ҳисобланг:

а) $\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 21^\circ\sin 9^\circ$;
б) $\cos 18^\circ\cos 63^\circ+\sin 18^\circ\sin 63^\circ$;
в) $\sin 278^\circ\cos 68^\circ-\cos 278^\circ\sin 68^\circ$;
г) $\cos 32^\circ\cos 58^\circ-\sin 32^\circ\sin 58^\circ$.

790. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\cos 2\varphi\cos\varphi+\sin 2\varphi\sin\varphi$;
б) $\sin 3\gamma\cos\gamma-\cos 3\gamma\sin\gamma$;
в) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;
г) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$.

791. Соддалаштиринг:

а) $\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)$; б) $\sin(30^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ+\alpha)$.

792. Соддалаштиринг:

а) $\sin(\alpha+60^\circ)-\sin(\alpha-60^\circ)$; б) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$.

793. Айниятни исботланг:

а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;
б) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$;
в) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

794. Айниятни исботланг:

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$;
б) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

795. Соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

796. Соддалаштиринг:

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}$.

797. Учбурчакнинг икки ўткир бурчаги синуслари $\frac{4}{5}$ ва $\frac{5}{13}$ га тенг. Учбурчакнинг учинчи бурчаги косинусини топинг.

798. Учбурчакнинг икки бурчаги косинуслари $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ га тенг. Учбурчакнинг учинчи бурчаги синусини топинг.

799. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ ва $\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{4}$ эканини билган ҳолда $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ ни топинг.

800. Ҳисобланг: а) $\mathrm{tg}\,15°$; б) $\mathrm{tg}\,75°$.

801. $\mathrm{tg}(-\beta)=-\mathrm{tg}\,\beta$ формуладан фойдаланиб, $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$ ни $\mathrm{tg}\,\alpha$ ва $\mathrm{tg}\,\beta$ орқали ифодаланг.

802. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{3}$ экани маълум. Қуйидагини топинг:

а) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$; б) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$.

803. Агар α, β ва γ учбурчакнинг бурчаклари бўлса, $\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ эканини исботланг.

Такрорлаш учун машқлар

804. Қийматини топинг:

а) $\sin 480°$; б) $\cos(-570°)$; в) $\mathrm{tg}(-750°)$; г) $\mathrm{ctg}\,495°$.

805. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

806. Тенгсизликни ечинг:

а) $(x+4)(x+5)-5\leqslant 7$; б) $6-(2x+1{,}5)(4-x)\geqslant 0$.

807. Иккита автоюклагич ишни 20 соатда бажарди. Агар ҳар бир автоюклагич алоҳида ишлаб, бу ишни иккинчиси биринчисидан 9 соат олдин бажариши маълум бўлса, ҳар бир автоюклагич ёлғиз ишлаб, ишни қанча вақтда бажаради?

33. ИККИЛАНГАН БУРЧАК ФОРМУЛАЛАРИ

Қўшиш формулалари $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ва $\operatorname{tg} 2\alpha$ ларни α бурчакнинг тригонометрик функциялари орқали ифодалашга имкон беради.

Ушбу

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

формулаларда β ни α га тенг деб оламиз. Бунда қуйидаги айниятларни ҳосил қиламиз:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \qquad (2)$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Бу айниятлар **иккиланган бурчак формулалари** дейилади.

Иккиланган бурчак формулаларини тригонометрик функциялар қийматларини топиш ва тригонометрик ифодаларни алмаштириш учун қўлланилишига мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $\cos\alpha=-0,8$ ва α—II чорак бурчаги эканини билган ҳолда $\sin 2\alpha$ нинг қийматини топамиз.

Аввал $\sin\alpha$ ни ҳисоблаймиз. α—II чорак бурчаги бўлгани учун $\sin\alpha>0$ бўлади. Шунинг учун

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0,64}=\sqrt{0,36}=0,6.$$

Иккиланган бурчак синуси формуласига кўра:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot 0,6\cdot(-0,8)=-0,96.$$

2-мисол. Ифодани соддалаштирамиз:

$$\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

Бунинг учун $\sin\alpha\cos\alpha$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз ва иккиланган бурчак формулаларидан фойдаланамиз:

$$\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

(2) формуладан

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha \tag{4}$$

келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $\cos 2\alpha$ ни $\sin\alpha$ билан ифодалаб,

$$\cos 2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

Шунга ўхшаш, $\cos 2\alpha$ ни $\cos\alpha$ билан ифодалаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha. \tag{5}$$

(4) ва (5) формулалар ҳисоблашларда ва шакл алмаштиришларда кўпинча фойдаланилади.

3-мисол. $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ ифодани соддалаштирамиз.

$1-\cos\alpha$ ва $1+\cos\alpha$ ифодаларга (4) ва (5) формулаларни қўлланамиз, бунда α ни $2\cdot\frac{\alpha}{2}$ кўпайтма шаклида ифодалаймиз. Натижада:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

808. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; в) $\cos 2\beta+\sin^2\beta$;

б) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$; г) $\frac{\sin\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

809. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; в) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}$;

б) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$; г) $\frac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

810. Соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin 4\varphi}{2\cos 2\varphi}$; б) $\cos^2\varphi-\cos 2\varphi$; в) $\frac{\sin\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$; г) $\frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}$.

811. Фараз қилайлик, $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ва α—II чорак бурчаги бўлсин. Қуйидагиларни топинг:

а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

812. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ ва $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ экани маълум. Қуйидагиларни топинг:

а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

813. Фараз қилайлик, $\cos\alpha = -0{,}6$ ва α—III чорак бурчаги бўлсин. Қуйидагиларни топинг:

а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

814. Иккиланган бурчак формулаларидан фойдаланиб, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ ни $\frac{\alpha}{2}$ бурчакнинг тригонометрик функциялари орқали ифодаланг.

815. Агар $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{41}$ ва $0 < \alpha < \pi$ экани маълум бўлса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ нинг қийматини топинг.

816. Тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчагининг косинуси 0,8 га тенг. Шу учбурчак учидаги бурчагининг синуси ва косинусини топинг.

817. Ифодани соддалаштиринг:

а) $2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$; г) $\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\pi-\alpha}{2}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{\pi}{10}$; д) $2\cos^2\frac{\pi+\alpha}{4} - 2\sin^2\frac{\pi+\alpha}{4}$;

в) $\frac{2\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ}$; е) $\frac{4\operatorname{tg}\frac{3\pi-\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi-\alpha}{2}}$.

818. Ҳисобланг:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; г) $2\sin 105^\circ \cos 105^\circ$;

б) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$; д) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$;

в) $\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; е) $\frac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

819. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $2\sin 165^\circ \cos 165^\circ$; в) $\frac{2\operatorname{tg}240^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 240^\circ}$.

б) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;

820. Айниятни исботланг:

а) $1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\cos 2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha$.

821. Айниятни исботланг:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$; в) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

б) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$; г) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha = 2$.

822. Ифодани соддалаштиринг:

а) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin 2\alpha}$;

б) $\frac{(\sin\beta+\cos\beta)^2}{1+\sin 2\beta}$; г) $\left(\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right)\sin 2\beta$.

823. Соддалаштиринг:

а) $4\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{2}$; в) $\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}-\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$;

б) $\frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; г) $\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha$.

824. Ифодани соддалаштиринг:

а) $1+\cos 4\alpha$; г) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; ж) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

б) $1-\cos 4\alpha$; д) $\mathrm{tg}\,\alpha(1+\cos 2\alpha)$; з) $\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}$.

в) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; е) $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$;

825. Соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}$; в) $\mathrm{ctg}\,\beta(1-\cos 2\beta)$; д) $\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)}{2\sin\beta}$;

б) $\frac{1-\cos 2\beta}{2\sin\beta}$; г) $\frac{1+\cos 4\beta}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}$; е) $\frac{1+\cos(\pi+\beta)}{\sin(\pi-\beta)}$.

826. Айниятни исботланг:

а) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; б) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

827. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{1+\cos 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}$; в) $\cos\alpha-2\sin^2\frac{\pi-\alpha}{2}$;

б) $\frac{1-\sin 2\varphi}{1+\sin 2\varphi}$; г) $2\cos^2\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\alpha$.

828. Қуйидаги тенгликни қаноатлантирадиган x бурчак мавжудми:

а) $\sin x\cos x=\frac{3}{7}$; б) $\sin x\cos x=\frac{3}{5}$?

Такрорлаш учун машқлар

829. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\cos(3\pi-\alpha)$; в) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\mathrm{ctg}(5\pi+\alpha)$; г) $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

830. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

831. Тенгсизликни ечинг:

а) $x(x+5)\leqslant 2x^2+4$; б) $10-(2x-1)(3-x)\geqslant 1-7x$.

832. Икки пайвандчи бирга ишлаб, топшириқни 30 соатда бажаришлари мумкин. Биринчи пайвандчига бутун ишни бажариши учун иккинчисига қараганда 11 соат ортиқ вақт керак бўлиши маълум бўлса, бу топшириқни ҳар бир пайвандчи неча соатда бажаради?

34. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЙИҒИНДИСИ ВА АЙИРМАСИ ФОРМУЛАЛАРИ

Синуслар ёки косинусларнинг йиғиндисини ва айирмасини кўпайтма шаклида ифодалаш мумкин. Бундай шакл алмаштиришларга асосланган формулалар қўшиш формулаларидан келтирилиб чиқарилиши мумкин.

$\sin\alpha+\sin\beta$ йиғиндини кўпайтма шаклига келтириш учун $\alpha=x+y$ ва $\beta=x-y$ деб фараз қиламиз ва синусларнинг йиғиндиси ҳамда синусларнинг айирмаси формулаларидан фойдаланамиз. Бундан:

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$
$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=2\sin x\cos y.$$

$\alpha=x+y$ ва $\beta=x-y$ тенгликлардан $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ва $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$ эканини топамиз. Шунинг учун

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Биз икки бурчак синусларининг йиғиндиси формуласини ҳосил қилдик.

Икки бурчак синусларининг йиғиндиси шу бурчаклар йиғиндиси ярмининг синуси билан улар айирмаси ярмининг косинуси кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Синуслар айирмасининг, косинуслар йиғиндиси ва айирмасининг формулаларини ҳам худди шунга ўхшаш келтириб чиқариш мумкин.

Синуслар айирмасининг формуласи:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Икки бурчак синусларининг айирмаси шу бурчаклар айирмаси ярмининг синуси билан уларнинг йиғиндиси ярмининг косинусига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Косинуслар йиғиндисининг формуласи:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Икки бурчак косинусларининг йиғиндиси шу бурчаклар йиғиндиси ярмининг косинуси билан уларнинг айирмаси ярмининг косинусига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Косинуслар айирмасининг формуласи:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Икки бурчак косинусларининг айирмаси шу бурчаклар йиғиндиси ярмининг синуси билан улар айирмалари ярмининг синусининг «минус» ишора билан олинган кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

$-\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ эканини ҳисобга олиб, косинуслар айирмасининг формуласини бошқа кўринишда ёзиш мумкин:

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Кўрилган формулаларнинг қўлланилишига мисоллар қараб чиқамиз.

1-мисол. $\sin 10° + \sin 50°$ йиғиндини соддалаштирамиз.

Синусларнинг йиғиндиси формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin 10° + \sin 50° = 2\sin\frac{10°+50°}{2}\cdot\cos\frac{10°-50°}{2} =$$
$$= 2\sin 30°\cdot\cos(-20°) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20° = \cos 20°.$$

2-мисол. $\cos 0{,}3\pi - \sin 0{,}6\pi$ айирмани кўпайтма кўринишида ифодалаймиз.

Келтириш формуласидан фойдаланиб, берилган ифодани косинуслар айирмаси шаклида ифодалаймиз. У ҳолда

$$\cos 0{,}3\pi - \sin 0{,}6\pi = \cos 0{,}3\pi - \sin(0{,}5\pi + 0{,}1\pi) =$$

$$= \cos 0{,}3\pi - \cos 0{,}1\pi = -2\sin\frac{0{,}3\pi + 0{,}1\pi}{2}\sin\frac{0{,}3\pi - 0{,}1\pi}{2} =$$
$$= -2\sin 0{,}2\pi \sin 0{,}1\pi.$$

3-мисол. $1-\sin\alpha$ ифодани кўпайтма кўринишида ифодалаймиз.

$1=\sin\frac{\pi}{2}$ бўлгани учун берилган ифодани синусларнинг айирмаси кўринишида тасвирлаш мумкин. Шунинг учун

$$1-\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\alpha = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2} =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Бу масалани бошқача ечиш ҳам мумкин:

$$1-\sin\alpha = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 1-\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$
$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Келтириш формулалари ёрдамида ҳосил қилинган ифодаларнинг биринчисини иккинчисига алмаштириш ва аксинча қилиш мумкин.

833. Тригонометрик функциялар йиғиндисини кўпайтма кўринишида алмаштириш формулалари ёрдамида қуйидаги ифодаларни кўпайтувчиларга ёйинг:

а) $\sin 3\alpha + \sin\alpha$;
б) $\sin\beta - \sin 5\beta$;
в) $\cos 2x + \cos 3x$;
г) $\cos y - \cos 3y$.

834. Кўпайтма шаклига келтиринг:

а) $\sin 40° + \sin 16°$;
б) $\sin 20° - \sin 40°$;
в) $\cos 46° - \cos 74°$;
г) $\cos 15° + \cos 45°$;
д) $\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}$;
е) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$;
ж) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) + \cos\alpha$;
з) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

835. Кўпайтма шаклига келтиринг:

а) $\sin 12° + \sin 20°$;
б) $\sin 52° - \sin 32°$;
в) $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{20}$;
г) $\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{9}$;
д) $\sin\alpha - \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;
е) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

836. Ифодани кўпайтма кўринишига келтиринг:

а) $\sin 15°+\cos 65°$; в) $\cos 50°+\sin 80°$;
б) $\cos 40°-\sin 16°$; г) $\sin 40°-\cos 40°$.

837. Кўпайтма кўринишида ифодаланг:

а) $\cos 18°-\sin 22°$; б) $\cos 36°+\sin 36°$.

838. Исботланг:

а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; б) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

839. Аввалги машқда исботланган формулалар ёрдамида йиғиндини ёки айирмани алмаштиринг:

а) $\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

б) $\operatorname{tg} 3\beta-\operatorname{tg}\beta$; д) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$;

в) $\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{tg} 4x$; е) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$.

840. Кўпайтма шаклига келтиринг:

а) $\sin^2 x-\sin^2 y$; б) $\cos^2 x-\cos^2 y$.

841. Кўпайтма кўринишига келтиринг:

а) $\sin x+\cos y$; б) $\cos x-\sin y$.

842. Исботланг:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

б) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

843. Кўпайтма шаклига келтиринг:

а) $\frac{1}{2}+\cos\alpha$; в) $1+\sin\alpha$; д) $2\sin\alpha+1$; ж) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$;

б) $\frac{1}{2}-\sin\alpha$; г) $\sin\alpha-1$; е) $1-2\cos\alpha$; з) $2\sin\alpha-\sqrt{3}$.

844. Кўпайтма шаклида ёзинг:

а) $\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $1+2\cos\alpha$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha$; г) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$.

845. Исботланг:

а) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 6\alpha}=\operatorname{tg} 4\alpha$; б) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

846. Исботланг:

а) $\frac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha+\sin\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

847. Ифодани олдин соддалаштириб, кейин қийматини ҳисобланг:

а) $\frac{\cos 68^\circ-\cos 22^\circ}{\sin 68^\circ-\sin 22^\circ}$; б) $\frac{\sin 130^\circ+\sin 110^\circ}{\cos 130^\circ+\cos 110^\circ}$.

848. Кўпайтувчиларга ёйинг:

а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$;

б) $\cos 2y-\cos 4y-\cos 6y+\cos 8y$.

849. Ифодани кўпайтма кўринишида ёзинг:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x.$$

850. Текширинг:

а) $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ=\sin 1^\circ$;

б) $\cos 115^\circ-\cos 35^\circ+\cos 65^\circ+\cos 25^\circ=\sin 5^\circ$.

851. Тенгликнинг тўғрилигини исботланг:

а) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\cos 20^\circ=0$;

б) $\cos 85^\circ+\cos 35^\circ-\cos 25^\circ=0$.

Такрорлаш учун машқлар

852. Исботланг:

а) $\cos 2\alpha-\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(4\pi+\alpha)=\cos^2\alpha$;

б) $4\sin\alpha\cos\alpha+\sin(2\alpha-\pi)=\sin 2\alpha$.

853. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin(\pi+2\alpha)}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$.

854. а) Координаталар бошидан ва A (0,6; —2,7) нуқтадан ўтувчи; б) координата ўқларини B (0; 4) ва C (—2,5; 0) нуқталарда кесувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

855. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{b-a}$;

б) $\frac{y}{x-y}-\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$.

V БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

11- параграфга доир

856. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$, бунда $\alpha = 30°$;
б) $\sin 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha$, бунда $\alpha = 45°$;
в) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) + \sin(45° + \alpha) + \cos(180° - 2\alpha)$, бунда $\alpha = 45°$.

857. Тенгсизликнинг тўғрилигини текширинг:

а) $\cos 60° + \cos 45° > 1$; б) $\sin 60° + \cos 60° > 1$.

858. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(15° + \alpha) - \sin\alpha}$, бунда $\alpha = 30°$;

б) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$, бунда $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

859. Ҳисобланг:

а) $\operatorname{tg}^2 45° \cdot \cos 30° \cdot \operatorname{ctg}^2 30°$;
б) $\operatorname{tg}^2 30° + 2\sin 60° - \operatorname{tg} 45° + \cos^2 30°$;
в) $\operatorname{ctg}^2 45° + \cos 60° - \sin^2 60° + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60°$.

860. Исботланг:

$$\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 60° - 1 = \operatorname{ctg}^2 60° (1 + \sin^2 45°).$$

861. Ифоданинг қиймати қайси чоракларда мусбат бўлади:

а) $\operatorname{tg}x \cdot \sin x$; б) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}x}$; в) $\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg}x$?

862. Ифода маънога эгами?

а) $\sqrt{\sin\varphi}$, бунда $\varphi = 170°$; в) $\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$, бунда $\varphi = 230°$;
б) $\sqrt{\cos\varphi}$, бунда $\varphi = 160°$; г) $\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}$, бунда $\varphi = 340°$?

863. α қайси чоракда жойлашган:

а) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; в) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$;
б) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$; г) $|\operatorname{ctg}\alpha| = -\operatorname{ctg}\alpha$?

864. Қуйидаги шарт бажариладиган ҳамма α бурчакларнинг умумий формуласини ёзинг:

а) $\sin\alpha = 1$; в) $\sin\alpha = -1$; д) $\cos\alpha = 1$;
б) $\sin\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = 0$; е) $\cos\alpha = -1$.

865. Ифоданинг энг катта ва энг кичик қийматларини кўрсатинг:

а) $1 + 2\sin\alpha$; в) $|\sin\alpha|$; д) $3 + 4\sin\alpha$;
б) $1 - 3\cos\alpha$; г) $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; е) $2\cos^2\alpha$.

866. Ҳисобланг:

а) $3\sin(-90°)+2\cos 0°-3\sin(-270°)$;

б) $2\cos(-270°)-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 180°-\sin(-90°)$.

867. $\sin\alpha+\cos\alpha$ ифоданинг қийматини топинг, бунда:

а) $\alpha=-45°$; в) $\alpha=-360°$; д) $\alpha=-420°$;
б) $\alpha=-90°$; г) $\alpha=-180°$; е) $\alpha=-1710°$.

868. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{4}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

869. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги $\frac{\pi}{9}$ га тенг. Асосидаги бурчакларини топинг.

870. Учбурчакнинг бурчаклари 1, 2 ва 3 сонларига пропорционал. Уларнинг радиан ўлчовини топинг.

871. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{2}}$; в) $\dfrac{5\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{3\pi}{2}}$;

б) $\dfrac{3\sin\frac{\pi}{6}+2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{5\operatorname{tg}0+6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$; г) $\dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

872. Қуйидагилар тўғрими:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}<1$?

12- параграфга доир

873. Бирор α бурчак учун қуйидаги шарт бажарилиши мумкинми:

а) $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$; г) $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{7}$;

б) $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-2\sqrt{6}$; д) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

в) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=3$; е) $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{5}$?

874. Бирор бурчакнинг синуси ва косинуси мос равишда $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ва $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ га тенг бўлиши мумкинми, бунда a ва b бирор сонлар бўлиб, $a \neq 0$ ёки $b \neq 0$?

875. Бирор бурчакнинг тангенси ва котангенси мос равишда $a + \frac{1}{a}$ ва $\frac{a}{a^2+1}$ га тенг бўлиши мумкинми, бунда a— нолга тенг бўлмаган сон?

876. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}$;

б) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$;

в) $\frac{1 + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma}{1 + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}^2\gamma}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\gamma}$.

877. β нинг ҳамма қабул қиладиган қийматларида ифоданинг қиймати β га боғлиқ бўлмаслигини исботланг:

а) $\sin^4\beta - \cos^4\beta + 2\cos^2\beta$;

б) $\frac{\sin^2\beta}{1 - \cos\beta} - \cos\beta$;

в) $\frac{\sin\beta + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta} - \cos\beta$;

г) $\frac{2}{(1 + \operatorname{ctg}\beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg}\beta)^2} + \cos^2\beta$.

878. α нинг ҳамма қабул қиладиган қийматларида ифода айни бир хил қиймат қабул қилишини исботланг:

а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\frac{\cos^2\alpha}{1 + \sin\alpha} + \sin\alpha$;

в) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha$;

г) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

879. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$;

б) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$;

в) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

г) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

880. Тенглик айният эканини исботланг:

а) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta} = \sin^2\beta$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta - 1}$;

г) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

881. Айниятни исботланг:

а) $\cos^4\gamma - \sin^4\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma$;

б) $\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \cos\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}^2\gamma + 1}{\operatorname{tg}^2\gamma - 1} = \frac{1}{\sin^2\gamma - \cos^2\gamma}$.

882. $(a\sin\alpha+b)(a\sin\alpha-b)+(a\cos\alpha+b)(a\cos\alpha-b)$ ифоданинг қийматини α га боғлиқ эмаслигини исботланг.

883. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$;

б) $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$.

884. а) $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ ни $\cos\alpha$ орқали ифодаланг;
б) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ ни $\sin\alpha$ орқали ифодаланг.

885. Агар $\operatorname{tg}\alpha=3$ бўлса, $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ касрнинг қийматини ҳисобланг.

886. Агар $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ бўлса, $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$ ифоданинг қийматини топинг.

887. $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ эканини билган ҳолда қуйидагини топинг:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

888. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$ эканини билган ҳолда қуйидагиларни топинг:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

889. Агар $\sin x\cdot\cos x=0{,}4$ экани маълум бўлса, $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ касрнинг қийматини топинг.

890. $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ касрнинг қиймати манфий сон бўлмаслигини исботланг.

891. а) 930°; б) —510°; в) $\frac{27\pi}{4}$ га тенг бурчакнинг синуси, косинуси, тенгенси ва котангенсини топинг.

892. Агар: а) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; б) $\alpha=-120°$ бўлса, $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha$ ифоданинг қийматини топинг.

893. Синуслар жадвалидан фойдаланиб, $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$ ифоданинг қийматини топинг, бунда:

а) $\alpha=55°$; б) $\alpha=-114°$; в) $\alpha=-239°$; г) $\alpha=0{,}6\pi$.

894. Исботланг:

а) $\cos(60°-\alpha)=\sin(30°+\alpha)$;
б) $\operatorname{ctg}\left(80°-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(10°+\frac{\pi}{2}\right)$;
в) $\sin(30°-2\alpha)=\cos(60°+2\alpha)$;
г) $\cos(\alpha+60°)=\sin(30°-\alpha)$.

895. Параллелограмм ўткир бурчагининг тангенси 0,7 га тенг. Шу параллелограмм ўтмас бурчагининг тангенсини топинг.

896. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги билан қўшни бўлмаган ташқи бурчагининг тангенси k га тенг. Учбурчакнинг ўткир бурчакларининг тангенсларини топинг.

897. Қўшни бурчаклардан бирининг косинуси $-\frac{3}{5}$ га тенг. Иккинчи бурчакнинг синусини топинг.

898. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлса, қуйидагини исботланг:

а) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$; в) $\sin 2(\alpha+\beta)=-\sin 2\gamma$;
б) $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$; г) $\cos 2(\alpha+\beta)=\cos 2\gamma$.

899. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\operatorname{tg} 15°\cdot\operatorname{tg} 30°\cdot\operatorname{tg} 45°\cdot\operatorname{tg} 60°\cdot\operatorname{tg} 75°$;
б) $\operatorname{ctg} 18°\cdot\operatorname{ctg} 36°\cdot\operatorname{ctg} 54°\cdot\operatorname{ctg} 72°$.

900. Агар:

а) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$ бўлса, $\operatorname{tg}(270°-\alpha)$ ни топинг;
б) $\cos\alpha=0{,}8$ ва $0°<\alpha<90°$ бўлса, $\sin(180°+\alpha)$ ни топинг;
в) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ ва $90°<\alpha<180°$ бўлса, $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$ ни топинг.
г) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ ва $180°<\alpha<270°$ бўлса, $\sin(270°+\alpha)$ ни топинг.

901. α бурчакни топинг, бунда:

а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ ва $90°<\alpha<180°$;
б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $180°<\alpha<270°$;
в) $\operatorname{tg}\alpha=-1$ ва $90°<\alpha<180°$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$ ва $270°<\alpha<360°$.

902. Жадваллар ёрдамида α бурчакни топинг, бунда:
а) $\sin\alpha=0{,}6428$ ва $90°<\alpha<180°$;
б) $\sin\alpha=-0{,}7547$ ва $180°<\alpha<270°$;
в) $\cos\alpha=0{,}5150$ ва $270°<\alpha<360°$;
г) $\operatorname{tg}\alpha=-1{,}3764$ ва $90°<\alpha<180°$.

903. $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}3°\cdot\ \ldots\ \cdot\operatorname{tg}88°\cdot\operatorname{tg}89°=1$ эканини исботланг.

904. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sin(720°-\alpha)+\cos(-\alpha+3600°)$;
б) $\operatorname{tg}(1800°-\alpha)-\operatorname{ctg}(-\alpha-2520°)$.

905. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

б) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$.

906. Исботланг:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos(2\pi-\alpha)}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)+$$
$$+\cos(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

907. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sin 160^\circ\cdot\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cdot\cos 340^\circ+\operatorname{tg}110^\circ\cdot\operatorname{tg}340^\circ$;
б) $\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{tg}288^\circ+\sin 32^\circ\cdot\sin 148^\circ-\sin 302^\circ\cdot\sin 122^\circ$.

908. Исботланг:

а) $$\frac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\cos^2\alpha;$$

б) $$\frac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}=\cos\alpha.$$

13- параграфга доир

909. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ ва α — III чорак бурчаги эканини билган ҳолда $\sin(\alpha+30^\circ)$ ифоданинг қийматини топинг.

910. $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ ва α—IV чорак бурчаги эканини билган ҳолда қуйидагини топинг:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

911. Ҳисобланг:

а) $\cos 34^\circ\cdot\cos 56^\circ-\sin 34^\circ\sin 124^\circ$;
б) $\sin 153^\circ\cos 63^\circ+\cos 27^\circ\sin 117^\circ$;
в) $\cos 311^\circ\cos 19^\circ+\sin 131^\circ\sin 19^\circ$;
г) $\sin 14^\circ\cos 346^\circ-\cos 14^\circ\sin 166^\circ$.

912. Соддалаштиринг:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\alpha$;
б) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;
в) $\cos(36^\circ+\alpha)\cos(54^\circ+\alpha)-\sin(36^\circ+\alpha)\sin(54^\circ+\alpha)$;
г) $\sin\beta\cos(\alpha+\beta)-\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$.

913. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ва α—I чорак бурчаги экани маълум. Ҳисобланг:

а) $\cos^2(45^\circ-\alpha)$;
б) $\cos^2(60^\circ+\alpha)$;
в) $\sin^2 60^\circ+\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$.

914. Соддалаштиринг:

а) $\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2(120^\circ+\alpha)+\sin^2(120^\circ-\alpha)$;

г) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha-\sin\beta}$.

915. Агар $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=0{,}28$ бўлса, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ва $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ ни топинг.

916. Агар $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{7}{25}$ бўлиб, α ва β — I чорак бурчаклари экани маълум бўлса, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ни топинг.

917. Агар $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ ва α—III чорак бурчаги бўлса, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ ни топинг.

918. Айниятни исботланг:

а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

919. $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=a$ экани маълум. Топинг:

а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$.

920. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=4$ ва $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=6$ эканини билган ҳолда $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ ни топинг.

921. Ҳисобланг:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}99^\circ+\operatorname{tg}36^\circ}{1-\operatorname{tg}99^\circ\cdot\operatorname{tg}36^\circ}$; в) $\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}224^\circ}{1+\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}136^\circ}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}248^\circ-\operatorname{tg}188^\circ}{1+\operatorname{tg}248^\circ\cdot\operatorname{tg}188^\circ}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg}260^\circ-\operatorname{tg}35^\circ}{1-\operatorname{tg}80^\circ\cdot\operatorname{tg}145^\circ}$.

922. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{1+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}$; б) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-1}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

923. Айниятни исботланг:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

924. Йиғиндининг котангенси ва айирманинг котангенси формулаларини келтириб чиқаринг:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

925. $\operatorname{ctg}\alpha=3$ ва $\operatorname{ctg}\beta=2$ эканини билган ҳолда топинг:

а) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

926. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=a$, $\operatorname{tg}\beta=b$ экани маълум. $\operatorname{tg}\alpha$ ни топинг.

927. α ва β ўткир бурчаклар бўлиб, $\sin\alpha=0{,}1\sqrt{2}$ ва $\sin\beta=0{,}6$ эканини билган ҳолда $\alpha+\beta=45^\circ$ эканини исботланг.

928. Агар $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{11}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{8}$, α ва β—ўткир бурчаклар бўлса, $\alpha+\beta=45^\circ$ эканини исботланг.

929. Агар $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=7$, α ва β — $\frac{\pi}{2}$ дан кичик мусбат бурчаклар бўлса, $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ эканини исботланг.

930. α, β ва γ — $\frac{\pi}{2}$ дан кичик мусбат бурчаклар экани маълум бўлиб, бунда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{8}$. $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$ эканини исботланг.

931. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3$ экани маълум. Ҳисобланг:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$.

932. Агар $\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $\cos 4\alpha$ нинг қийматини топинг.

933. Айниятни исботланг:

а) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; в) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$;

б) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; г) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

934. а) $\sin 4\alpha$ ни $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ билан ифодаланг;
б) $\cos 4\alpha$ ни $\cos\alpha$ билан ифодаланг.

935. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $4\sin 15^\circ\cos 15^\circ(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ)$;
б) $4\sin^2 75^\circ\cos^2 75^\circ-(\sin^2 75^\circ-\cos^2 75^\circ)^2$;
в) $1-6\sin^2\frac{\pi}{12}\cdot\cos^2\frac{\pi}{12}$;
г) $\sin\frac{\pi}{16}\cos^3\frac{\pi}{16}-\sin^3\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}$.

936. Агар $a=\sin\alpha+\cos\alpha$; $b=\cos\alpha-\sin\alpha$ бўлса, a ва b орасидаги муносабат қандай?

937. Агар $\cos x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ бўлса, у ҳолда $\cos 2x=2\cos x$ тенглик тўғри бўлади. Шуни исботланг.

938. Агар $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ бўлса, $\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}$ ифоданинг қийматини топинг.

939. Айниятни исботланг:

а) $\cos 2\alpha - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}2\alpha\right)\cdot\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) = \cos^2\alpha$;

в) $\sin^4\beta + \cos^4\beta = \frac{3+\cos 4\beta}{4}$.

940. Соддалаштиринг:

а) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha} - \frac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$;

б) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}$;

г) $(\operatorname{tg}2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$;

д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

е) $\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{ctg}4\alpha$.

941. Тригонометрик функцияларнинг йиғиндисини кўпайтмага алмаштириш формулаларидан фойдаланиб, ифодани алмаштиринг:

а) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; б) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$; в) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

942. Кўпайтмага алмаштиринг:

а) $\cos 2\alpha+\cos 5\alpha+\cos\alpha$; б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

943. Кўпайтма кўринишида ифодаланг:

а) $\sin 19^\circ+\sin 25^\circ+\sin 31^\circ$; б) $\sin 16^\circ+\sin 24^\circ+\sin 40^\circ$.

944. Тенгликнинг тўғри эканини кўрсатинг:

а) $\frac{\sin 22^\circ+\sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 12^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}$;

б) $\frac{\cos 20^\circ-\cos 50^\circ}{\cos 31^\circ+\sin 11^\circ} = \frac{\sin 80^\circ-\sin 70^\circ}{\sin 29^\circ-\sin 19^\circ}$.

945. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; б) $\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$.

946. Исботланг:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{6}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=$
$=(\sqrt{3}-1)\sin\alpha$.

947. Истаган α ва β да

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

бўлишини исботланг.

948. Кўпайтмага алмаштиринг:

а) $\sqrt{1+\cos 2\alpha} - \sqrt{1-\cos 2\alpha}$, бунда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

б) $\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}$, бунда $0 < \alpha < \pi$.

949. Айниятни исботланг:

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1} = 2\cos\alpha.$$

950. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}$; б) $\frac{\sin 4\alpha+2\cos 3\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 2\alpha}$.

951. Айниятни исботланг:

а) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

б) $\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

952. Агар A, B, C — учбурчакнинг бурчаклари бўлса,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

бўлишини исботланг.

VI БОБ

ҲИСОБЛАШЛАРНИ ТАШКИЛ ЭТИШ

14-§. ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАР

35. ТАҚРИБИЙ ҚИЙМАТЛАРНИ ҚЎШИШ ВА АЙИРИШ

x нинг тақрибий қиймати 0,01 гача аниқлик билан 12,73 га ва y нинг тақрибий қиймати 0,0001 гача аниқлик билан 3,6381 га тенг бўлсин, яъни

$$x=12{,}73\pm0{,}01;$$
$$y=3{,}6381\pm0{,}0001.$$

Бу қуйидагини англатади:

$$12{,}73-0{,}01\leqslant x\leqslant 12{,}73+0{,}01;$$
$$3{,}6381-0{,}0001\leqslant y\leqslant 3{,}6381+0{,}0001.$$

Тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$(12{,}73+3{,}6381)-(0{,}01+0{,}0001)\leqslant x+y\leqslant (12{,}73+3{,}6381)+$$
$$+(0{,}01+0{,}0001);$$
$$16{,}3681-0{,}0101\leqslant x+y\leqslant 16{,}3681+0{,}0101.$$

Демак,

$$x+y=16{,}3681\pm0{,}0101.$$

Биз йиғиндининг тақрибий қийматини $x+y=a\pm h$ кўринишда ёздик, бунда $a=16{,}3681$ ва $h=0{,}0101$. h нинг қийматини, камроқ аниқлик билан маълум бўлган x қўшилувчи учун олинганидек, битта қийматли рақам билан оламиз. 0,02 сони ҳосил бўлади, чунки яхлитлашда хатолик ортиғи билан олинади. Энди h нинг энг кичик хонаси юздан бирлар хонаси бўлади. Шунинг учун $x+y$ нинг тақрибий қийматини, яъни 16,3681 сонини юздан биргача яхлитлаш лозим;

$$x+y\approx16{,}37.$$

x ва y сонлари йиғиндисининг тақрибий қийматини топишда биз уларнинг тақрибий қийматларини қўшдик ва ҳосил қилинган натижани шундай яхлитладики, унда иккита ўнли ишора сақланиб қолди, яъни кам сонли ўнли ишоралари бўлган қўшилувчининг тақрибий қийматида қанча рақам бўлса, шунча рақам сақланиб қолди.

Айирманинг тақрибий қийматини топишда ҳам худди шундай қилинади. Камаювчининг тақрибий қийматидан айрилувчининг тақрибий қиймати айрилади ва натижа берилган маълумотлардаги ўнли ишораларнинг кичик сони бўйича яхлитланади.

Тақрибий қийматларнинг йиғиндиси ва айирмасида ўнли ишораси кам бўлган тақрибий сонда ўнли ишора нечта бўлса, шунча ўнли ишора қолдирилади.

1-мисол. Агар $a \approx 8{,}1956$ ва $b \approx 2{,}3$ бўлса, a ва b нинг айирмасининг тақрибий қийматини топамиз.

a ва b нинг тақрибий қийматларининг айирмасини топамиз:

$$8{,}1956 - 2{,}3 = 5{,}8956.$$

Бу айирмани ўндан биргача яхлитлаймиз, чунки b нинг тақрибий қийматида ўнли ишора битта, a нинг тақрибий қийматида эса ўнли ишоралар кўпроқ:

$$5{,}8956 \approx 5{,}9.$$

Демак,

$$a - b \approx 5{,}9.$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, ҳисоблашларни соддалаштириш учун аввал 8,1956 тақрибий қийматни ўндан биргача яхлитлаш, кейин эса айиришни бажариш мумкин:

$$8{,}1956 \approx 8{,}2; \qquad 8{,}2 - 2{,}3 \approx 5{,}9;$$

$$a - b \approx 5{,}9.$$

2-мисол. Агар $p \approx 3{,}1416$, $q \approx 1{,}7$ ва $s \approx 7{,}45$ бўлса, p, q ва s сонлари йиғиндисининг тақрибий қийматини топамиз.

q нинг тақрибий қийматида ўнли ишоралар сони энг кам, яъни битта, шунинг учун йиғиндида битта ўнли ишорани сақлаш лозим. Ҳисоблашларни соддалаштириш учун 3,1416 ва 7,45 ни ўндан биргача яхлитлаймиз, сўнгра қўшишни бажарамиз:

$$3{,}1416 \approx 3{,}1; \quad 7{,}45 \approx 7{,}5;$$

$$3{,}1 + 1{,}7 + 7{,}5 = 12{,}3.$$

Демак,

$$p + q + s \approx 12{,}3.$$

953. x ва y сонлари йиғиндисининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $x \approx 12{,}4$ ва $y \approx 3{,}1678$; в) $x \approx 3{,}67$ ва $y \approx 2{,}134$;
б) $x \approx 45{,}116$ ва $y \approx 22{,}3$; г) $x \approx 15{,}6$ ва $y \approx 19$.

954. a ва b сонлари айирмасининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $a \approx 5{,}64$ ва $b \approx 1{,}2316$; в) $a \approx 16{,}20$ ва $b \approx 8{,}563$;
б) $a \approx 31{,}6423$ ва $b \approx 12{,}6$; г) $a \approx 6{,}385$ ва $b \approx 0{,}29$.

955. $x+y$ ва $x-y$ нинг тақрибий қийматларини топинг, бунда:

а) $x \approx 34{,}12$ ва $y \approx 19{,}6$; в) $x \approx 4{,}1608$ ва $y \approx 1{,}09$;
б) $x \approx 60{,}1$ ва $y \approx 25{,}384$; г) $x \approx 6$ ва $y \approx 2{,}777$.

956. $a \approx 26{,}1042$, $b \approx 8{,}98$ ва $c \approx 3{,}65$ экани маълум. Қуйидаги ифоданинг тақрибий қийматини топинг:

а) $a+b+c$; б) $a+b-c$; в) $a-b+c$; г) $a-b-c$.

957. $x+y-z$ ифоданинг тақрибий қийматини топинг, бунда:
а) $x \approx 7{,}612$, $y \approx 3{,}42$ ва $z \approx 5{,}368$;
б) $x \approx 9{,}1$, $y \approx 8{,}89$ ва $z \approx 0{,}8517$.

958. Шишанинг ичидаги ёғи билан биргаликдаги массаси 1,63 кг, бўш шишанинг массаси 0,706 кг. Шишада қанча ёғ бор?

959. Томонлари тақрибан 3,26; 6,12; 7,50 ва 4,32 дм га тенг бўлган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

960. Енгил автомобилнинг массаси 0,95 т, автомобиль ҳайдовчисининг массаси 75 кг, пассажирнинг массаси эса 68 кг. Автомобилнинг одамлар билан бирга массаси қанча?

691. Электр занжири қаршиликлари $R_1 \approx 5{,}26$ Ом, $R_2 \approx 3{,}815$ Ом ва $R_3 \approx 4{,}70$ Ом бўлган учта кетма-кет уланган ўтказгичдан иборат. Бутун занжирнинг R қаршилигини (Ом билан) $R=R_1+R_2+R_3$ формула билан ҳисобланг.

962. 600 м^2 ер майдонида 56,5 м^2 жойни эгалловчи уй ва **16,3 м^2** ни эгаллайдиган сарой қурилди. Қурилишлардан бўш қолган майдоннинг юзини топинг.

963. Ернинг массаси $5{,}976 \cdot 10^{21}$ т, Венеранинг массаси $4{,}88 \times 10^{21}$ т. Ернинг массаси Венераникидан неча тонна ортиқ?

964. x ва y сонлари айирмасининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $x \approx 3{,}462 \cdot 10^5$ ва $y \approx 1{,}8 \cdot 10^5$; б) $x \approx 8{,}6 \cdot 10^3$ ва $y \approx 1{,}27 \cdot 10^3$.

965. a ва b сонлари йиғиндисининг тақрибий қийматини ҳисобланг, бунда:

а) $a \approx 9{,}24 \cdot 10^4$ ва $b \approx 8{,}4 \cdot 10^4$; б) $a \approx 1{,}51 \cdot 10^3$ ва $b \approx 2{,}075 \cdot 10^3$.

Такрорлаш учун машқлар

966. $y=-x^4$ функция қандай оралиқда ўсади ва қандай оралиқда камаяди?

967. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(2x^{0,75}+3x^{0,25})^2-4x^{0,5}(x+2,25)$;

б) $\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a^{0,5}}:\left(\frac{a^{0,5}+a^{0,5}}{a^{0,5}}-\frac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right)$.

36. ТАҚРИБИЙ ҚИЙМАТЛАРНИ КЎПАЙТИРИШ ВА БЎЛИШ

Фараз қилайлик, $x=9,54\pm0,01$ ва $y=7,6\pm0,1$ бўлсин. Бу қуйидагини билдиради:

$$9,54-0,01\geqslant x\geqslant 9,54+0,01;$$
$$7,6-0,1\leqslant y\leqslant 7,6+0,1.$$

Шунинг учун xy кўпайтма учун қуйидаги қўш тенгсизлик ўринли:

$$(9,54-0,01)(7,6-0,1)\leqslant xy\leqslant(9,54+0,01)(7,6\pm0,1).$$

Кўпайтманинг тақрибий қийматини $xy=a\pm h$ кўринишда ёзиб, a учун $9,54\cdot7,6$ кўпайтмани оламиз. Бунинг учун қавсларни очамиз ва тегишли амалларни бажарамиз:

$$9,54\cdot7,6-1,029\leqslant xy\leqslant 9,54\cdot7,6+1,031.$$

Чап қисмдаги 1,029 айрилувчини ундан катта 1,031 сони билан алмаштирамиз:

$$9,54\cdot7,6-1,031\leqslant xy\leqslant 9,54\cdot7,6+1,031.$$

Демак,

$$xy=9,54\cdot7,6\pm1,031,$$
$$xy=70,596\pm1,031.$$

Агар h нинг қиймати битта қийматли рақам билан олинса, у ҳолда бу рақам бирлар хонасида бўлади. Шунинг учун xy нинг қийматини, яъни 70,596 ни бирликларгача яхлитлаш лозим: $xy\approx71$.

x ва y сонлари кўпайтмасининг тақрибий қийматини топишда биз уларнинг тақрибий қийматларини кўпайтирдик ва олинган натижани унда иккита қийматли рақамни сақлаган ҳолда яхлитладик, яъни қийматли рақами энг кам бўлган кўпайтувчининг тақрибий қийматида нечта қийматли рақам бўлса, шунча рақамни сақлаган ҳолда яхлитладик.

Бўлинманинг тақрибий қийматини топишда ҳам худди шундай қилинади. Бўлинувчининг тақрибий қиймати бўлувчининг тақрибий қийматига бўлинади ва тақрибий маълумотлардаги (берилган сонлардаги) энг кичик қийматли рақам бўйича натижа яхлитланади.

Тақрибий қийматларнинг кўпайтмасида ва бўлинмасида берилган тақрибий сонлардан қийматли рақами энг кам бўлганида нечта қийматли рақам бўлса, шунча қийматли рақам қолдирилади.

1-мисол. Агар $a \approx 4,17$ ва $b \approx 1,6$ бўлса, a ва b сонлари бўлинмасининг тақрибий қийматини топамиз.

a ва b тақрибий қийматларнинг бўлинмасини топамиз:

$$4,17 : 1,6 = 2,60625.$$

Бу бўлинмада иккита қийматли рақам қолдириб, уни яхлитлаймиз, чунки b нинг тақрибий қийматида иккита қийматли рақам бўлиб, a нинг тақрибий қийматида қийматли рақамлар кўп:

$$2,60625 \approx 2,6.$$

Демак,

$$a : b \approx 2,6.$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, ҳисоблашларни соддалаштириш учун аввал 4,17 тақрибий қийматни унда иккита қийматли рақамни сақлаган ҳолда яхлитлаш, сўнгра бўлинмаларнинг учта қийматли рақамини топиш ва натижани яхлитлаш мумкин:

$$4,17 \approx 4,2; \qquad 4,2 : 1,6 \approx 2,62 \ldots \approx 2,6;$$

$$a : b \approx 2,6.$$

2-мисол. a ва b сонлари кўпайтмасининг тақрибий қийматини топамиз, бунда $a \approx 0,73$ ва $b \approx 5,267$.

0,73 сонида иккита қийматли рақам бор. Шунинг учун кўпайтмада иккита қийматли рақамни қолдириш керак. Ҳисоблашларни соддалаштириш учун 5,267 сонини яхлитлаймиз, кўпайтирамиз ва натижани яхлитлаймиз:

$$5,267 \approx 5,3; \qquad 0,73 \cdot 5,3 = 3,869 \approx 3,9.$$

Демак,

$$ab \approx 3,9.$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, бу параграфда ифодаланган қоидалар тақрибий сонлар устида амаллар бажариш ишини анча камайтиришга имкон беради. Улар тақрибий қийматни топишда хатолик ҳақида аниқ маълумотларга эга бўлиш шарт бўлмаган ҳолларда қўлланилади.

Бир неча амалли ифодаларнинг тақрибий қийматини топишда амалларни бажара борган сари пайдо бўладиган хатолик орта бориши мумкин, шунинг учун баъзан оралиқ натижаларда тақрибий ҳисоблашлар қоидасида тавсия қилинганидан битта рақам ортиқ қолдирилади.

968. p ва q сонлари кўпайтмасининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $p \approx 46,5$ ва $q \approx 0,72$; в) $p \approx 15,94$ ва $q \approx 0,85$;
б) $p \approx 0,0638$ ва $q \approx 18,4$; г) $p \approx 0,43$ ва $q \approx 72,845$.

969. x ва y сонлари бўлинмасининг тақрибий қийматини ҳисобланг, бунда:

а) $x \approx 18,28$ ва $y \approx 0,54$; в) $x \approx 731,8$ ва $y \approx 12,5$;
б) $x \approx 0,36$ ва $y \approx 0,0238$; г) $x \approx 0,816$ ва $y \approx 0,5$.

970. xy ва $\frac{x}{y}$ ифодаларнинг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $x \approx 2,05$ ва $y \approx 1,2$; б) $x \approx 0,6$ ва $y \approx 7,5$.

971. a ва b сонлари кўпайтмасининг тақрибий қийматини ҳисобланг, бунда:

а) $a \approx 2,2 \cdot 10^3$ ва $b \approx 3,41 \cdot 10^4$;
б) $a \approx 1,154 \cdot 10^8$ ва $b \approx 6,9 \cdot 10^{-5}$;
в) $a \approx 8,42 \cdot 10^{-4}$ ва $b \approx 9,81 \cdot 10^5$;
г) $a \approx 7,605 \cdot 10^{-2}$ ва $b \approx 1,8 \cdot 10^{-3}$.

972. x ва y сонлари бўлинмасининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $x \approx 8,75 \cdot 10^6$ ва $y \approx 5,4 \cdot 10^4$; б) $x \approx 4,3 \cdot 10^5$ ва $y \approx 6,95 \cdot 10^2$.

973. ab ва $\frac{a}{b}$ ифодаларнинг тақрибий қийматларини ҳисобланг, бунда:

а) $a \approx 9,3 \cdot 10^4$ ва $b \approx 3,12 \cdot 10^6$; б) $a \approx 2,15 \cdot 10^5$ ва $b \approx 7,11 \cdot 10^3$.

974. Бўйи 5,85 м ва эни 3,75 м бўлган хонанинг юзини топинг.

975. Тўғри тўртбурчак шаклидаги майдоннинг бўйи 254 м ва эни 194 м. Майдоннинг юзи қанча?

976. Кузатувчи яшин чақнаганини кўрганидан 4,7 с ўтгач, момақалдироқ овозини эшитди. Разряд (чақнаш) кузатувчидан қанча масофада содир бўлган (товушнинг ҳаводаги тезлиги тақрибан 332 м/с га тенг)?

977. Томони c га тенг квадратнинг периметрини топинг, бунда:

а) $c \approx 6,29$ м; б) $c \approx 0,85$ м.

978. Тўғри тўртбурчакли майдончанинг юзи 150 м^2, унинг бўйи эса 16,3 м га тенг. Майдончанинг энини топинг.

979. Мис пластинканинг массаси 325 г. Миснинг зичлиги 8,9 г/см^3. Пластинканинг ҳажмини топинг.

980. Томонлари a ва b га тенг тўғри тўртбурчакнинг периметрини ва юзини топинг, бунда $a \approx 15,4$ см ва $b \approx 8,7$ см.

981. Ифоданинг тақрибий қийматини ҳисобланг:

а) $xy-5y$, бунда $x\approx 46,24$ ва $y\approx 25,2$;

б) $\frac{x+y}{x-y}$, бунда $x\approx 10,20$ ва $y\approx 2,08$.

982. Ифоданинг тақрибий қийматини топинг:

а) x^2-2x, бунда $x\approx 3,7$; б) $\frac{ab}{a-b}$, бунда $a\approx 2,54$ ва $b\approx 1,34$.

983. Радиуси r га тенг доиранинг юзи қандай бўлади? Бунда:

а) $r\approx 8,3$ см; б) $r\approx 25,1$ м.

984. Учбурчакнинг асоси a см га, баландлиги h см га тенг. Агар $a\approx 2,3$ ва $h\approx 6,7$ бўлса, учбурчакнинг юзини топинг.

985. Тўғри тўртбурчак шаклидаги майдоннинг ўлчови $112\times\times 348$ м. Ҳар гектардан 18 т картошка олиш мўлжалланди. Шу майдондан қанча картошка ҳосили олиш планлаштирилган?

Такрорлаш учун машқлар

986. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=3x^{-1}$; б) $y=-5x^{-1}$.

987. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ функциянинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

988. $\dfrac{a+b+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$ касрни қисқартиринг.

15-§. АЛГОРИТМЛАР

37. МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРДА ҲИСОБЛАШЛАР

Сиз ҳисоблашларни бажариш учун микрокалькулятордан фойдалангансиз. Саноатимиз турли хил микрокалькуляторлар ишлаб чиқармоқда. Уларнинг кўпчилиги фақат арифметик амалларнигина бажариб қолмай, балки баъзи функцияларнинг қийматларини ҳам топишга имкон беради.

Масалан, МКШ-2 микрокалькуляторида ҳисоблашлар қандай бажарилишини кўриб чиқамиз.

Микрокалькуляторнинг устки (юз) томонида (58- расм) клавиатура жойлаштирилган бўлиб, унинг ёрдамида сонлар киритилади ва амаллар бажарилади. Клавишлар икки хил белгиланган. Клавиш устидаги белгиланган амални бажаришга ўтиш $\boxed{F}$ клавишни босиш билан амалга оширилади.

58- расм

Агар амалларни бажариш тартиби уларни ёзиш тартиби билан бир хил бўлса, микрокалькулятор ёрдамида сонли ифоданинг қийматини топиш осон.

1- мисол. 4,24·5,17—8,36 ифоданинг қийматини топамиз.

Берилган ифоданинг қийматини топиш учун 4,24 сонини киритиш, $\boxed{\times}$ клавишни босиш, 5,17 сонини киритиш, $\boxed{-}$ клавишни босиш, 8,36 сонини киритиш ва $\boxed{=}$ клавишни босиш керак. Амаллар бажаришнинг тавсифланган бу кетма-кетлигини схема кўринишида ёзиш қулай:

$$4{,}24\ \boxed{\times}\ 5{,}17\ \boxed{-}\ 8{,}36\ \boxed{=}\,.$$

Кўрсатилган амалларни бажариб, берилган ифоданинг қиймати 13,5608 га тенглигини ҳосил қиламиз.

Агар амалларни бажариш тартиби уларнинг ёзилиш тартибига мос келмаса, у ҳолда баъзи оралиқ натижаларни хотирага киритиш ёки қоғозга ёзиб қўйишга тўғри келади. Калькулятор экранида ёришиб кўриниб турган сонни хотирага киритиш учун $\boxed{П}$ клавишни босиш керак.

Натижани хотирадан чиқариш учун $\boxed{ИП}$ клавиш босилади.

2- мисол. (0,86+1,54) (18,33—7,18) ифоданинг қийматини топамиз.

Бунинг учун 0,86 ва 1,54 сонларининг йиғиндисини ҳисоблаш ҳамда уни хотирага киритиш керак, сўнгра 18,33 ва 7,18 сонларининг айирмасини топиш ҳамда уни 0,86 ва1,54 сонларининг хотирадан чақирилган йиғиндиси қийматига кўпайтириш керак. Ҳисоблашлар программаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$0{,}86\ \boxed{+}\ 1{,}54\ \boxed{=}\ \boxed{П}\ 18{,}33\ \boxed{-}\ 7{,}18\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{ИП}\ \boxed{=}\,.$$

Кўрсатилган амалларни бажариб, 26,76 сонини ҳосил қиламиз.

Микрокалькуляторлар моделларининг кўпчилиги компонентларидан (қисмларидан) бири такрорланадиган бир хил типдаги арифметик амалларни бажаришда бу қисмларини қайта киритмаслик имконини беради. Масалан, натурал кўрсаткичли a^n даражани ҳисоблаш учун a сонини киритиш, $\boxed{\times}$ клавишни босиш, кейин эса $\boxed{=}$ клавишни $n-1$ марта босиш етарли.

3-мисол. $2{,}7^5$ даражанинг қийматини ҳисоблаймиз.

Ҳисоблашлар программасини тузамиз:

$$2{,}7 \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=}.$$

Ҳисоблашлар натижасида $2{,}7^5=143{,}48907$ эканини топамиз.

Баъзи ифодаларнинг қийматларини микрокалькулятор ёрдамида топишда ҳисоблашлар схемасини соддалаштириш учун ифодаларни дастлаб шакл алмаштириш қулай.

4-мисол. $a-b^3$ ифодаининг қийматини $a=580{,}1$, $b=8{,}3$ бўлганда топамиз.

$a-b^3$ ифоданинг қийматини топиш учун уни $-b^3+a$ кўринишда ифодалаган қулай. Бу ҳолда ҳисоблашларни қуйидаги кетма-кетликда бажариш мумкин: b^3 даражанинг қийматини топиш, соннинг ишорасини ўзгартириш учун хизмат қилувчи $\boxed{/-/}$ клавишдан фойдаланиш ва натижага a сонини қўшиш. Ҳисоблашлар схемаси бундай ёзилади.

$$b \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{/-/} \boxed{+} a \boxed{=}.$$

Ҳисоблашларни a ва b нинг берилган қийматлари учун бажариб, 8,313 сонини ҳосил қиламиз.

5-мисол. Шар ҳажмининг $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ формуласидан фойдаланиб, $r\approx1{,}7$ см радиусли пўлат шарнинг m массасини топамиз (пўлатнинг зичлиги $\rho\approx7{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$).

$m=\rho V$ бўлгани учун шарнинг массаси

$$m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

формула бўйича ҳисобланади.

Даражага кўтариш амалини биринчи навбатда бажариш қулайлигини ҳисобга олиб, бу формулани бошқа кўринишда қайта ёзамиз:

$$m=\frac{r^3\cdot4\pi\rho}{3}.$$

Ҳисоблашларни ушбу программа бўйича бажарамиз:

$$1{,}7 \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{\times} 4 \boxed{\times} \boxed{F} \boxed{\pi} \boxed{\times} 7{,}8 \boxed{\div} 3 \boxed{=}.$$

r ва ρ нинг тақрибий қийматлари иккита қийматли рақамлари билан берилган, шунинг учун жавобда иккита қийматли рақам олиш керак. Натижада $m \approx 1{,}6 \cdot 10^2$ г ни ҳосил қиламиз.

6-мисол. $5x^3+2x^2-7x+4$ кўпҳаднинг қийматини $x=1{,}2$ бўлганда топамиз.

Берилган кўпҳадни қуйидагича шакл алмаштириш қулай:

$$5x^3+2x^2-7x+4=(5x^2+2x-7)x+4=((5x+2)x-7)x+4.$$

Натижада ҳисоблашларнинг бундай схемасини ҳосил қиламиз:

$$5 \boxed{\times}\ x \boxed{+}\ 2 \boxed{\times}\ x \boxed{-}\ 7 \boxed{\times}\ x \boxed{+}\ 4 \boxed{=}.$$

Ҳисоблашларни $x=1{,}2$ учун бажариб, кўпҳаднинг қиймати 7,12 га тенг эканини топамиз.

Микрокалькулятор баъзи функцияларнинг қийматини топишга имкон беради. Бунинг учун $\boxed{F}$ *клавишдан ва тегишли функция белгиси қўйилган клавишдан фойдаланилади.*

Тригонометрик функцияларнинг қийматларини ҳисоблашда аргумент қандай бирликларда ифодаланганига боғлиқ ҳолда «ГРАД — РАД» переключателини керакли ҳолатга қўйиш керак.

7-мисол. $\sin 82°$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ҳисоблашларни 82 $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$ программа бўйича бажарамиз.

Амалларни бажариш натижасида жавобни стандарт шаклда ҳосил қиламиз. Экранда у қуйидаги кўринишда бўлади:

	9	9	0	2	7	—	0	1

Бу ёзув $\sin 82° \approx 9{,}9027 \cdot 10^{-1}$ эканини, яъни $\sin 82° \approx 0{,}99027$ ни билдиради.

989. Ҳисобланг:

а) $23{,}7 \cdot 0{,}26+9{,}85$; в) $(68{,}27-1{,}76) \cdot 0{,}985$;

б) $\frac{112{,}3-49{,}8}{1{,}67}$; г) $\frac{8{,}17+62{,}38}{9{,}65}$.

990. Ифоданинг тақрибий қийматини топинг:

а) $(a+b)c$, бунда $a \approx 25{,}6$, $b \approx 8{,}32$, $c \approx 9{,}7$;

б) $\frac{a}{b}-c$, бунда $a \approx 49{,}7$, $b \approx 6{,}8$, $c \approx 0{,}342$.

991. Тажриба майдони тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, унинг бўйи 365 м, эни эса 175 м. Майдоннинг бир қисмига буғдой, қолган қисмига сули экилди. Агар 2,7 гектарга сули экилган бўлса, буғдой экилган ер қанча?

992. Икки металлдан иборат қотишманинг ҳажми 0,056 м^3. Агар қотишмада бир металлдан 185 кг ва иккинчи металлдан 275 кг бўлса, қотишманинг зичлигини топинг.

993. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $(2364-1989)(7,8+25,3)$; в) $63,8\cdot3,12-14,1\cdot7,88$;

б) $\frac{18,35+7,96}{32,6-29,7}$; г) $\frac{6,344\cdot2,912}{9,932\cdot7,48}$.

994. Ифоданинг тақрибий қийматини топинг:

а) $\frac{ab}{cd}$, бунда $a\approx5,73$, $b\approx7,49$, $c\approx6,45$, $d\approx9,21$;

б) $\frac{a+b}{a-c}$, бунда $a\approx31,47$, $b\approx12,06$, $c\approx8,59$.

995. Амалларни бажаринг ва жавобни юздан биргача яхлитланг:

а) $(6,44+0,78)(9,3-4,78)-6,23$;

б) $\frac{77,9\cdot0,83-52,4}{84,7-12,3}$;

в) $(37,42\cdot4,19-13,6)\cdot0,087$.

996. Ифоданинг қийматини топинг ва жавобни ўндан биргача яхлитланг:

а) $48,9\cdot27,6-748,7$; в) $(64,77+121,9)(4,45-3,96)$;

б) $\frac{0,617-0,128}{0,39}$; г) $\frac{29,7+38,8}{79,5\cdot20,3-605,1}$.

997. $(3,82+x)(y-0,67)$ ифоданинг қийматини топинг, бунда:

а) $x=2,19$, $y=8,74$; в) $x=-4,706$, $y=2,312$;

б) $x=5,48$, $y=-7,16$; г) $x=-8,622$, $y=0,477$.

998. $(716,2-x)(1,429+x)$ ифоданинг қийматини $x=62,45$; 11,7; 0,916; —32,8 бўлганда топинг.

999. Ҳисобланг:

а) $4,15^3$; б) $0,98^5$; в) $1,42^6$; г) $8,3\cdot1,67^4$; д) $23,1:2,08^3$.

1000. Амалларни бажаринг:

а) $8,49^4$; б) $1,062^3$; в) $27,4\cdot1,73^5$; г) $(1,39+7,083)^3$.

1001. Кўпҳаднинг қийматини топинг:

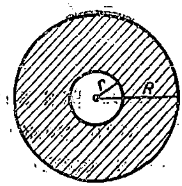
а) $3,5x^3-2,1x^2+1,9x-16,7$, бунда $x=-6,9$; $-2,4$; $3,7$;

б) $0,82x^4-3,4x^2+7,4x$, бунда $x=-0,53$; 0,62; 1,7.

1002. $y=2,15x^3-3,64x^2+0,69x+0,38$ функциянинг 0,2 қадам билан қийматлари жадвалини тузиб, $[-0,6; 1,8]$ оралиқда унинг графигини ясанг.

1003. Ҳисобланг:

а) $\sqrt{12,5}$; б) $3,7\sqrt{66,7}$; в) $\sqrt{219,3}\cdot\sqrt{45,8}$;
г) $\sqrt{0,248}-\sqrt{3,947}$.



59-расм

1004. $ax+b=0$ тенгламанинг илдизини топинг, бунда:

а) $a=13,9$, $b=145,95$; б) $a=6,48$, $b=3,564$.

1005. $ax^2=b$ тенгламани ечинг ва топилган илдизларни мингдан биргача яхлитланг, бунда:

а) $a=4,75$, $b=42,6$; б) $a=0,86$, $b=0,51$.

1006. Металл пластина ҳалқа шаклида бўлиб (59-расм), унинг ички айланасининг радиуси r га тенг, ташқи айланасининг радиуси эса R га тенг. Агар $r\approx 8,6$ см ва $R\approx 32,4$ см бўлса, пластинанинг юзини топинг.

1007. Функциянинг қийматини топинг:

а) $y=\sin x$, бунда $x=17°, 26°, 48°, 73°$;
б) $y\approx\cos x$, бунда $x=14°, 31°, 52°, 87°$;
в) $y=\operatorname{tg} x$, бунда $x=5°, 27°, 63°, 88°$.

1008. Функциянинг қийматини топинг:

а) $y=\sin x$, бунда $x=29°, 56°$;
б) $y=\cos x$, бунда $x=42°, 76°$;
в) $y=\operatorname{tg} x$, бунда $x=14°, 68°$.

1009. $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ формула бўйича учбурчакнинг юзини топинг, бунда:

а) $a\approx 3,5$ см, $b\approx 6,8$ см, $\alpha\approx 49°$;
б) $a\approx 62,4$ м, $b\approx 52,7$м, $\alpha\approx 135°$.

Такрорлаш учун машқлар

1010. Қасрни қисқартиринг:

а) $\frac{27a^3-b^3}{27a^3+9a^2b+3ab^2}$; б) $\frac{2a-2b+3ax-3bx}{2a-2b+ax-bx}$; в) $\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$.

1011. $\operatorname{tg}\beta=3$ эканини билган ҳолда ифоданинг қийматини топинг:

а) $\frac{3\sin\beta+5\cos\beta}{4\cos\beta-\sin\beta}$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\beta\cos\beta+\sin\beta}{\sin\beta}$.

1012. (a_n) арифметик прогрессияда еттинчи ва ўнинчи ҳадларнинг йиғиндиси -9 га тенг, тўртинчи ва олтинчи ҳадларнинг йиғиндиси 2 га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки тўққизта ҳадининг йиғиндисини топинг.

Ҳозирги замон шароитида турли-туман энг мураккаб ҳисоблашлар бажариладиган ва бошқа масалалар ечиладиган қувватли восита электрон ҳисоблаш машиналаридир. Энг содда электрон-ҳисоблаш қурилмаси микрокалькулятордир.

ЭҲМ да масала ечиш учун программа тузилади, бу программа асосида натижани ҳосил қилиш учун зарур бўлган амаллар кетма-кетлиги ҳақидаги аниқ кўрсатма ётади. Бундай кўрсатма **алгоритм** деб аталади.

Алгоритм — бу бирор масалани ечиш учун йўналтирилган амаллар кетма-кетлигини бажариш учун аниқ кўрсатма, инструкциядир.

1-мисол. Фараз қилайлик, y нинг қийматини

$$y=(3x-2)(8x+5) \qquad (1)$$

формуладан топиш талаб қилинган бўлсин.

Қўйилган масалани ҳал қилиш учун қандай амалларни бажариш зарурлиги (1) формуладан кўриниб турибди. Бироқ бу амалларни бажариш кетма-кетлиги маълум даражада ихтиёрий, масалан, аввал айирмани, кейин йиғиндини ҳисоблаш ёки аввал йиғиндини, кейин эса айирмани ҳисоблаш мумкин. Формула масалани ечиш жараёнида танлашга бирор эркинлик беради. Шунинг учун қўйилган масаланинг ечилиш алгоритми шу формула билан аниқланади деб ҳисоблаш керак эмас. Алгоритм тушунчаси фақат амалларнинг ўзигина эмас, балки уларни бажариш кетма-кетлиги ҳам аниқ таърифланиши (белгиланиши) кераклигини талаб қилади, бу эса агар алгоритмни бажарувчи машина бўлганда жуда муҳимдир.

Ҳисоблаш алгоритмини (1) формула бўйича тузамиз. Бажарувчи бажариши керак бўлган амаллар кетма-кетлигини кўриб чиқамиз:

1) 3 ни x га кўпайтирилсин;
2) бу кўпайтмадан 2 айирилсин;
3) 8 ни x га кўпайтирилсин;
4) бу кўпайтмага 5 қўшилсин;
5) ҳосил қилинган айирма йиғиндига кўпайтирилсин.

Амалларнинг бундай тавсифи кўп жой эгаллабгина қолмасдан, балки оралиқ амаллар натижаларини белгилаш билан боғлиқ қийинчиликларга ҳам олиб келади. Масалан, иккинчи амалдаёқ биз $3 \cdot x$ ифодани «кўпайтма» сўзи билан белгилашимизга тўғри келди. Агар оралиқ натижалар учун махсус a, b, c, ... белгилашлар киритсак, бу қийинчиликлардан қутилиш мумкин.

У ҳолда қаралаётган алгоритмни бундай ёзиш мумкин:

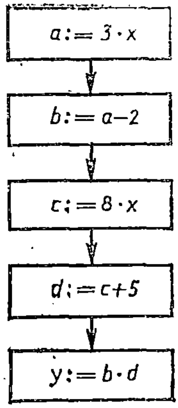
а) 3 ни x га кўпайтирилсин, натижа a билан белгилансин;

2) a дан 2 сони айирилсин, натижа b билан белгилансин;

3) 8 ни x га кўпайтирилсин, натижа c билан белгилансин;

4) c ва 5 қўшилсин, натижа d билан белгилансин;

5) b ни d га кўпайтирилсин, натижа y нинг қиймати деб ҳисоблансин.

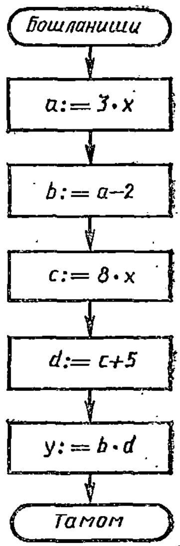


60- расм

Амалларнинг бу тартибини схема ёрдамида (60- расм) яққол тасвирлаш мумкин.

Бу схемада стрелкалар билан айрим командаларни бажариш кетма-кетлиги кўрсатилган. $a:=3\cdot x$ кўринишдаги ёзув бундай ўқилади: a ўзгарувчига $3\cdot x$ ифоданинг қийматини берамиз».

Агар алгоритм бажарувчиси машина бўлса, у ҳолда схема ишнинг бошланиши ва тамом бўлиши ҳақидаги командалар билан тўлдирилиши керак (61- расм).



61- расм

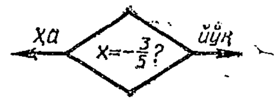
2- м и с о л. y нинг қийматини

$$y=\frac{7x-4}{5x+3}$$

формула бўйича топиш талаб қилинган бўлсин.

$\frac{7x-4}{5x+3}$ ифода $x\neq-\frac{3}{5}$ да маънога эга. $x=-\frac{3}{5}$ учун масаланинг ечими йўқ. Бажарувчи-автомат ҳар қандай ҳолда ҳам жавоб бера олиши учун алгоритмда натижани ҳосил қилиш мақсадида иккита тармоқни кўзда тутиш керак: битта тармоқ x нинг $-\frac{3}{5}$ га тенг қиймати учун, бошқа тармоқ x нинг $-\frac{3}{5}$ га тенг бўлмаган ҳар қандай қиймати учун. Бажарувчига қайси тармоқдан фойдаланиши кераклигини билдирувчи кўрсатма 62- расмда кўрсатилган махсус тармоқлаш командаси билан берилади.

62- расм



63- расм

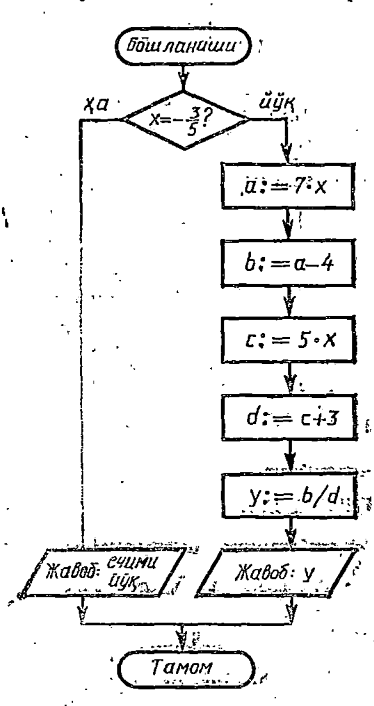
Қаралаётган мисол учун тармоқлаш командасининг кўриниши 63- расмда тасвирланган.

Бу командани бажариб, бажарувчи-автомат $x=-\frac{3}{5}$ ҳолида ҳисоблашлар жараёнини „ҳа" тармоқ бўйича давом эттиради, $x \neq -\frac{3}{5}$ бўлган ҳолда эса „йўқ" тармоқ бўйича давом эттиради.

Бажарувчи x нинг истаган қиймати учун фойдаланиши мумкин бўлган бутун алгоритм 64- расмда кўрсатилган.

1- мисолда чизиқли алгоритм, 2- мисолда эса тармоқланувчи алгоритм кўриб чиқилди.

Кўпинча циклик алгоритмлар ҳам учрайди. Булар шундай алгоритмларки, уларда айни бир команда бир неча марта кетма-кет такрорланади.



64- расм

1013. Ҳисоблаш алгоритмини қуйидаги формула бўйича тузинг:

а) $y=3x(x-8)$;
б) $y=2(x+3)+1$;
в) $y=(x+9)(4x-1)$;
г) $y=(x-1)(x+5)-2$.

1014. $y=\frac{6x+1}{2x-4}$ формула бўйича y нинг қийматини ҳисоблаш алгоритмини тузишда қандай ҳолларни назарда тутиш керак? Шу алгоритмни тузинг.

1015. Ҳисоблаш алгоритмини қуйидаги формула бўйича тузинг:

а) $y=\frac{2x+5}{3x+9}$; б) $y=\frac{2}{x+8}-1$.

1016. Ҳисоблаш алгоритмини қуйидаги формула бўйича тузинг:

а) $y=2(x-3)+1$; б) $y=\frac{6x-1}{2x+8}$.

1017. $5x^2-8x+23$ ифоданинг қийматини

$$y=5x^2-8x+23 \text{ ва } y=x(5x-8)+23$$

формулалар бўйича топиш мумкин.

Бу формулалардан ҳар бири учун ҳисоблаш алгоритмини тузинг ва алгоритмлардан қайсинисида командалар сони камлигини аниқланг.

1018. Тенгламани ечиш алгоритмини тузинг:

а) $ax=25$; б) $ax=b$.

1019. $y=2|x|+5$ формула бўйича ҳисоблаш алгоритмини тузинг.

1020. y нинг қийматини ҳисоблаш алгоритмини

$$y=3|x|-7$$

формула бўйича тузинг.

Такрорлаш учун машқлар

1021. $-7{,}5x+y=12$ тўғри чизиқ $(-20; -138)$ нуқтадан ўтадими?

1022. $0{,}5x-y=5$ тўғри чизиқ $y-2x=-8$ ва $3y+7x=2$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтадими?

1023. $x-y=1$ ва $3x-2y=6$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг. Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан а) x ўқигача; б) y ўқигача; в) координаталар бошигача бўлган масофа қанчага тенг?

1024. Завод маълум муддатда 800 та деталь тайёрлаши керак. Завод график бўйича аниқ ишлаб, буюртманинг 25% ини бажарди, кейин кунига нормадагидан 10 та ортиқ деталь тайёрлаб, топшириқни муддатидан 2 кун олдин бажарди. Завод буюртмани неча кунда бажарган?

1025. Ишчилар бригадаси маълум муддатда план бўйича 250 та деталь тайёрлаши керак эди. Бригада ҳар куни нормадан 5 та ортиқ деталь тайёрлаб, муддатдан бир кун олдин планни 8% ошириб бажарди. Бригада неча кун ишлаган?

VI БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

14- параграфга доир

1026. x ва y сонлари йиғиндисининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $x\approx 9{,}26\cdot 10^4$ ва $y\approx 7{,}1\cdot 10^3$;
б) $x\approx 6{,}4\cdot 10^5$ ва $y\approx 4{,}25\cdot 10^6$;
в) $x\approx 3{,}705\cdot 10^{-2}$ ва $y\approx 4{,}6\cdot 10^{-4}$;
г) $x\approx 9{,}38\cdot 10^{-3}$ ва $y\approx 8{,}673\cdot 10^{-1}$.

1027. x ва y сонлари айирмасининг тақрибий қийматини топинг, бунда:

а) $x \approx 7{,}58 \cdot 10^5$ ва $y \approx 2{,}4 \cdot 10^3$;
б) $x \approx 2{,}4 \cdot 10^4$ ва $y \approx 1{,}06 \cdot 10^2$;
в) $x \approx 6{,}8 \cdot 10^{-2}$ ва $y \approx 3{,}5 \cdot 10^{-3}$;
г) $x \approx 5{,}381 \cdot 10^{-1}$ ва $y \approx 1{,}2 \cdot 10^{-2}$.

1028. Агар $x \approx 8{,}35 \cdot 10^2$; $y \approx 4{,}1 \cdot 10^3$; $z \approx 6{,}3 \cdot 10^2$ бўлса, $x-y+z$ ифоданинг тақрибий қийматини топинг.

1029. Ернинг массаси $5{,}976 \cdot 10^{21}$ т, Ойнинг массаси эса $7{,}35 \times 10^{19}$ т. Ер ва Ойнинг биргаликдаги массаси қандай? Ернинг массаси Ойнинг массасидан неча тонна кўп?

1030. «Ленин» атом музёрари 1960 йилдаги арктик навигация вақтида бир рейсда $8{,}16 \cdot 10^3$ денгиз милясига тенг йўл ўтди. 1 денгиз миляси тахминан 1,852 км га тенглигини билган ҳолда ўтилган йўлни километр ҳисобида ифодаланг.

1931. $R \approx 32{,}5$ мм, $r \approx 20{,}2$ мм бўлган доиравий ҳалқанинг (59- расмга қаранг) юзини ҳисобланг.

15- параграфга доир

1032. Ифоданинг тақрибий қийматини топинг:

а) $\dfrac{35{,}48 - x}{18{,}4 + y}$, бунда $x \approx 5{,}962$, $y \approx 1{,}68$;
б) $ab+cd$, бунда $a \approx 48{,}07$, $b \approx 1{,}96$, $c \approx 32{,}6$, $d \approx 0{,}87$.

1033. Ифоданинг қийматини топинг ва жавобни юздан биргача яхлитланг:

а) $\dfrac{4{,}919 \cdot 5{,}718 - 12{,}67}{3{,}561 + 0{,}4289}$; б) $\dfrac{85{,}85 + 43{,}666}{26{,}32 - 3{,}123 \cdot 4{,}609}$.

1034. $7{,}61x^4 - 8{,}06x^3 + 3{,}73x^2 + x - 10{,}82$ ифоданинг $x = -1{,}2$; 0,8; 1,4; 1,6 бўлгандаги қийматларини топинг.

1035. Арифметик прогрессиянинг n- ҳадини топиш алгоритмини тузинг.

1036. $(4x+1)(2-3x)-(3-6x)(2x+5)$ ифоданинг қийматини ҳисоблаш алгоритмини ва уни соддалаштириш натижасида ҳосил бўладиган ифоданинг қийматини ҳисоблаш алгоритмини тузинг.

VI—VIII СИНФЛАР КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

Ҳисоблашлар

1037. Ҳисобланг:

а) $5\frac{1}{3}-3\frac{1}{3}\cdot 6$;
г) $0{,}4\cdot\left(5{,}25-7\frac{1}{3}\right)$;
б) $49:\left(1\frac{2}{7}+1\frac{1}{21}\right)$;
д) $\left(6\frac{1}{3}-7{,}5\right):1{,}4$;
в) $16{,}92:\left(3\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)$;
е) $2\frac{3}{7}-3\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}\cdot 2$.

1038. Касрнинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$; б) $\dfrac{203{,}4:9-(5{,}39-7{,}39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$.

1039. Ҳисобланг:

а) $\left(1{,}6^2-2{,}2\cdot\frac{3}{11}\right):1{,}4$;

б) $\left(1\frac{1}{9}\cdot 0{,}27-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}15\right)-1590\cdot(-0{,}1)^3$;

в) $\left(\frac{3}{64}\cdot 5\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^3+(-1)^5$;

г) $\left(12\frac{3}{4}\cdot 2-27\right):\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

1040. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\frac{x^4}{16-5x^2}$, бунда $x=-4$;
в) $\frac{3x-2y}{x+y}$, бунда $x=14{,}4$, $y=3{,}6$;
б) $\frac{3a^3+2a^2}{1-a}$, бунда $a=-\frac{1}{3}$;
г) $\frac{(a-b)^2}{2ab}$, бунда $a=4{,}5$, $b=3{,}6$.

1041. а) $\frac{5}{11}$ касрни вергулидан кейин икки ўнли рақами бўлган ўнли каср билан алмаштиринг. Ҳосил қилинган тақрибий қийматнинг абсолют ва нисбий хатосини топинг.

б) 0,17 сони $\frac{3}{17}$ касрнинг 0,01 гача аниқлик билан олинган тақрибий қиймати эканини исботланг.

1042. Занжирдаги кучланишни вольтметр билан ўлчашда $U=120\pm0{,}5$ В натижа олинди. Тақрибий қийматнинг нисбий хатоси 0,5% дан ортмаслигини исботланг.

1043. $x\approx16{,}5$ ва $y\approx7{,}2$ эканини билган ҳолда қуйидаги ифоданинг қийматини топинг:

а) $x+y$; в) xy; д) $x(x-y)$;
б) $x-y$; г) $\frac{x}{y}$; е) $\frac{xy}{x+y}$.

1044. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(\sqrt{14}-2\sqrt{35})\cdot\frac{1}{7}\sqrt{7}+\sqrt{20}$; в) $\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}+\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{39}-\frac{1}{2}\sqrt{26}\right):\frac{1}{6}\sqrt{13}+\sqrt{18}$; г) $\frac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}-3}+\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+3}$.

1045. а) $3x^2-6x-5$ кўпҳаднинг қийматини $x=1+\sqrt{2}$ бўлганда топинг.

б) $\frac{x^2-x-5}{x-1}$ касрнинг қийматини $x=\sqrt{5}+1$ бўлганда топинг.

1046. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $0{,}3^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0{,}5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^{-8}\cdot6$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\frac{6}{17}\right)^{0}\cdot\frac{1}{8}-0{,}25^{-2}\cdot16$.

1047. Ҳисобланг:

а) $\frac{27^{\frac{1}{3}}-81^{\frac{1}{4}}\cdot5}{36^{-\frac{1}{2}}}$; б) $\frac{\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}{64^{\frac{2}{3}}}$.

1048. Агар $c_1=0{,}5$ ва $d=1{,}8$ бўлса, (c_n) арифметик прогрессиянинг ўн бешинчи ҳадини ва дастлабки ўн бешта ҳадининг йиғиндисини топинг.

1049. Агар $b_1=\frac{1}{64}$ ва $q=2$ бўлса, (b_n) геометрик прогрессиянинг ўнинчи ҳадини ва дастлабки ўнта ҳадининг йиғиндисини топинг.

1050. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ва $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ эканини билган ҳолда $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг.

1051. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ ва α — II чорак бурчаги экани маълум. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг.

Айнан шакл алмаштиришлар

1052. Кўпҳадга алмаштиринг:

а) $(x-2y)(x+2y)+4y^2$;
б) $(2a-3b)(2a+3b)-3a^2$;
в) $(5x-1)^2+10x$;
г) $(3y+4z)^2-8z(3y-2z)$;
д) $(m-2n)(m^2+2mn+4n^2)+6n^3$;
е) $(c^2+4d)(c^4-4c^2d+16d^2)-c^2(c^4-1)$;
ж) $(3x-4y)^2-(2x-7y)(4x+2y)$;
з) $2x(2x+3)^2-(2x-3)(4x^2+6x+9)$.

1053. Ифодани соддалаштиринг ва унинг қийматини топинг:

а) $a=-\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{9}$ да:
$$ab^2+(2a-3b)(a^2-3ab+4b^2)-6b^2(3a-2b);$$
б) $a=-\frac{1}{3}$; $c=-\frac{1}{6}$ да:
$$ac^2+(a+2c)(2a^2-5ac-3c^2)-2c^3+ac(a+12c);$$
в) $x=2{,}4$ да: $x(2x-3)^2-(x^2-5x)(4x-1)$;
г) $y=0{,}85$ да: $(y^2+3)(y+12)-y(y\pm 6)^2$.

1054. Айниятни исботланг:

а) $(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2)=a^4-16b^4$;
б) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=x^8-1$;
в) $(y+1)(y-1)(y^2-y+1)(y^2+y+1)=y^6-1$;
г) $(c^2-c-2)(c^2+c-2)=c^4-5c^2+4$.

1055. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $12x^3-3x^2y-18xy^2$;
б) $42a^5-6a^4-30a^3$;
в) $8ab-14a-12b+21$;
г) $x^2-5x-9xy+45y$.

1056. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^4-25y^2;
б) $4b^2-0{,}01x^6$;
в) $8a^3+c^3$;
г) x^9-27;
д) $9ab^2-16ac^2$;
е) $-20xy^3-45x^3y$.

1057. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

а) x^2-x-42;
б) $y^2+9y+18$;
в) $81x^2+18x+1$;
г) $16b^2-24b+9$;
д) $6x^2-x-1$;
е) $3a^2-13a-10$.

1058. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{15a^2-10ab}{8b^2-12ab}$; б) $\frac{25x^2-20xy}{16y^2-20xy}$; в) $\frac{ax+2x-3a-6}{ax-8a+2x-16}$;

г) $\frac{a^3-9ab^2}{a^2-3ab}$; д) $\frac{4c^2+10cd^2}{8c^3-25ad^4}$; е) $\frac{24x^4+3xy^3}{12x^2+6xy}$;

ж) $\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$; з) $\frac{y^2-5y-24}{7y-56}$; и) $\frac{a^2-10a+9}{a^2-6a-27}$.

1059. Соддалаштиринг:

а) $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{1}{x^2+3x}-\frac{x+1}{x^2-9}$; б) $\frac{2y+1}{y^2+3y}+\frac{y+2}{3y-y^2}-\frac{1}{y}$;

в) $\frac{a^2+16a+12}{a^3-8}-\frac{2-3a}{a^2+2a+4}-\frac{3}{a-2}$; г) $\frac{2}{4b^2-6b+9}+\frac{4b^2+18}{8b^3+27}-\frac{1}{2b+3}$.

1060. Каср кўринишида ифодаланг:

а) $\frac{ab^2-16a}{5b^3}\cdot\frac{20b^5}{a^2b+4a^2}$; б) $\frac{7xy}{x^2-4xy+4y^2}\cdot\frac{3x-6y}{14y^2}$;

в) $\frac{p^3-125}{8p^2}\cdot\frac{4p}{p^2+5p+25}$; г) $\frac{9m^2-12mn+4n^2}{3m^3+24n^3}\cdot\frac{3m+6n}{2n-3m}$.

1061. Соддалаштиринг:

а) $\frac{x^2-4x}{x^2+7x}:\frac{24-6x}{49-x^2}$; б) $\frac{y^3-16y}{2y+18}:\frac{4-y}{y^2+9y}$;

в) $\frac{(a+b)^2-2ab}{4a^2}:\frac{a^2+b^2}{ab}$; г) $\frac{5c^3-5}{c+2}:\frac{(c+1)^2-c}{13c+26}$.

1062. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\left(\frac{x-3}{x^2-3x+9}-\frac{6x-18}{x^3+27}\right):\frac{5x-15}{4x^3+108}$;

б) $\frac{5x}{x+y}\cdot\left(\frac{xy+y^2}{5x^2-5xy}+xy+y^2\right)-\frac{y}{x-y}$;

в) $\left(\frac{a+1}{2a}+\frac{4}{a+3}-2\right):\frac{a+1}{a+3}-\frac{a^2-5a+3}{2a}$;

г) $\left(\frac{4x+12}{x^2-3x}+\frac{x}{9-x^2}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}$;

д) $\frac{a-5}{6-3a}+\frac{4(a+1)}{a^2+4a}:\left(\frac{9a}{a^2-16}-\frac{a+4}{a^2-4a}\right)$;

е) $\frac{4b}{2b-1}-\frac{12}{2b+1}\cdot\left(\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}+\frac{2b-1}{4b+2}\right)$;

ж) $\left(\frac{3x}{x^3-27}+\frac{1}{x-3}\right)\cdot\frac{x^3-3x^2}{(x+3)^2}+\frac{3x+9}{x^2+3x+9}$;

з) $\left(\frac{49}{a^3+27}-\frac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\frac{a^4+27a}{16-a^2}+\frac{4a-a^2}{a+4}$.

1063. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(4x^{-2}y^{3})^{2}\cdot(0{,}5x^{2}y^{-1})^{3}$;

б) $(0{,}25a^{-3}b^{4})^{-2}\cdot(2a^{5}b^{-6})^{-1}$;

в) $\left(\frac{c^{4}}{6x^{2}y^{-5}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}c^{2}x^{3}y^{-1}\right)^{4}$;

г) $\left(\frac{0{,}1a^{-2}}{b^{-1}c^{3}}\right)^{5}\cdot\left(\frac{b^{5}}{10a^{4}c^{6}}\right)^{-3}$.

1064. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг:

а) $\sqrt{12x^{2}}$, бунда $x\geqslant 0$;

б) $\sqrt{18y^{2}}$, бунда $y<0$;

в) $\sqrt[3]{5a^{4}}$;

г) $\sqrt[4]{32b^{5}}$;

д) $\sqrt[4]{162c^{6}}$, бунда $c<0$;

е) $\sqrt[5]{x^{6}y^{5}}$;

ж) $\sqrt[8]{3a^{16}}$;

з) $\sqrt[9]{2b^{10}c}$;

и) $\sqrt[7]{128x^{9}}$.

1065. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

а) $x\sqrt{3}$, бунда $x\geqslant 0$;

б) $y\sqrt{5}$, бунда $y<0$;

в) $a\sqrt[3]{2a}$;

г) $b\sqrt[5]{3b^{2}}$;

д) $2c\sqrt[4]{3c}$;

е) $m\sqrt[6]{7m^{2}}$, бунда $m<0$.

1066. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\sqrt{50x}+\sqrt{32x}-\sqrt{98x}$;

б) $(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})-\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})$;

в) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{2}-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{2}$;

г) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)$.

1067. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{5+\sqrt{y}}{5\sqrt{y}+y}$;

б) $\frac{3x-6}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$;

в) $\frac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+1}$;

г) $\frac{b-\sqrt{b}+1}{b\sqrt{b}+1}$;

д) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}+y}$;

е) $\frac{c-\sqrt{cd}}{c\sqrt{c}-d\sqrt{d}}$.

1068. Ифодани бутун махражли каср билан алмаштиринг:

а) $\frac{3x}{7\sqrt{x}}$;

б) $\frac{5}{\sqrt{ab}}$

в) $\frac{4}{\sqrt{c}-1}$;

г) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$.

1069. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{1}{3}}-15}$;

б) $\frac{p^{\frac{2}{3}}-4q^{\frac{2}{3}}}{5p^{\frac{1}{3}}+10q^{\frac{1}{3}}}$;

в) $\frac{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{1}{2}}}$

г) $\frac{a^{1{,}5}+b^{1{,}5}}{a-b}$.

1070. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}$, бунда $x=12{,}8$, $y=5$;

б) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b}+\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}$, бунда $a=0{,}05$, $b=0{,}4$.

1071. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}$;

в) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-2}{m+2m^{\frac{1}{2}}+4}+\dfrac{6m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-8}+\dfrac{1}{m^{\frac{1}{2}}-2}$;

б) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}$;

г) $\dfrac{p^{\frac{2}{3}}+p^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{3}}}{p-1}-\dfrac{p^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}-1}+1$.

1072. Соддалаштиринг:

а) $\left(\dfrac{c^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{3c^{\frac{1}{3}}-1}{c+1}\right)\cdot\dfrac{c+1}{c^{\frac{2}{3}}-1}$;

б) $\dfrac{y-1}{y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}\cdot\left(\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{y-1}+\dfrac{1}{y^{\frac{1}{3}}-1}\right)$.

1073. Айниятни исботланг:

а) $(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\mathrm{ctg}^2\alpha$;

б) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)=\mathrm{tg}^2\alpha$.

в) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}=2\,\mathrm{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}=\cos 2\alpha$.

1074. Ифодани соддалаштиринг.

а) $1+\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $1-\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2(\alpha-\pi)}{\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+1}$.

1075. Агар $\cos\alpha=0{,}8$ ва $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ бўлса, $\sin(60^\circ-\alpha)$ ни топинг.

1076. Агар $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$ ва $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бўлса, $\cos(30^\circ-\alpha)$ ни топинг.

1077. Агар $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{2}$ бўлса, $\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha)$ ни топинг.

1078. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; в) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha$;

б) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

1079. Ифоданинг қиймати α га боғлиқ эмаслигини исботланг:

а) $\cos(38^\circ+\alpha)\cos(52^\circ-\alpha)-\sin(38^\circ+\alpha)\sin(52^\circ-\alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}+\alpha\right)$.

1080. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ эканини билган ҳолда: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg}2\alpha$ ифоданинг қийматини топинг:

1081. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\sin\alpha}$; в) $\cos\alpha-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

б) $\frac{1+\sin 4\alpha}{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

1082. Кўпайтма кўринишига келтиринг:

а) $\sin 3\alpha+\sin 5\alpha$; г) $\cos 10\alpha+\cos 4\alpha$;

б) $\cos 5\alpha-\cos 7\alpha$; д) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$;

в) $\sin 6\alpha-\sin 8\alpha$; е) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.

Тенгламалар ва тенгламалар системалари

1083. Тенгламани ечинг.

а) $3x(x-1)-17=x(1+3x)+1$;

б) $2x-(x+2)(x-2)=5-(x-1)^2$;

в) $\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-3}{5}$;

г) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$.

1084. Квадрат тенгламани ечинг:

а) $2{,}5x^2+4x=0$; в) $0{,}2t^2-1-4{,}8=0$;

б) $6y^2-0{,}24=0$; г) $3\frac{1}{3}u^2+3u-3=0$.

1085. t ўзгарувчининг t^2-2t+2 квадрат учҳаднинг қийматини а) 10; б) 0; в) 1; г) 3 га тенг қиладиган қиймати борми? Бор бўлган ҳолда t нинг қийматини кўрсатинг.

1086. Тенглама t нинг қандай қийматларида илдизга эга бўлмайди:

а) $5x^2-4x-t=0$; в) $x^2-tx+1=0$;

б) $tx^2-2x+6=0$; г) $4x^2+tx+1=0$?

1087. a нинг қандай қийматларида тенглама камида битта илдизга эга бўлади:

а) $ax^2-12x+9=0$; в) $18x^2+ax+8=0$;
б) $5x^2-x+a=0$; г) $(a-1)x^2-6x-3=0$?

1088. Тенгламани ечинг:

а) $0{,}3x(x+13)-2x(0{,}9-0{,}2x)=0$;
б) $1{,}5x(x+4)-x(7-0{,}5x)=0{,}5(10-2x)$;
в) $\frac{(2x+1)^2}{25}-\frac{x-1}{3}=x$;
г) $\frac{(3x+2)^2}{11}-\frac{x+5}{4}=x^2$;
д) $\frac{(2-x)^2}{3}-2x=\frac{(7+2x)^2}{5}$;
е) $\frac{(6-x)^2}{8}+x=7-\frac{(2x-1)^2}{3}$.

1089. Тўғри тўртбурчак шаклидаги боғ майдонини девор билан ўраб чиқиш керак. Агар майдоннинг бўйи энидан 15 м узун экани, юзи эса 700 м^2 га тенг экани маълум бўлса, ўраладиган деворнинг узунлигини аниқланг.

1090. Агар икки натурал сондан бири иккинчисининг иккиланганидан 6 та кам, уларнинг кўпайтмаси эса 20 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

1091. Бир синфдаги ҳамма ўқувчилар бир-бирларига фотосуратларини беришди. Агар ҳаммаси бўлиб 600 та фотосурат берилган бўлса, синфда нечта ўқувчи бўлган?

1092. Икки хонали соннинг ўнлик рақами бирлик рақамидан 3 та кам, бу икки хонали соннинг шу соннинг рақамлари йиғиндисига кўпайтмаси эса 70 га тенг. Шу сонни топинг.

1093. Тенгламани ечинг:

а) $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$; д) $\frac{3}{(2-x)^2}-\frac{5}{(x+2)^2}=\frac{14}{x^2-4}$;
б) $\frac{70}{x^2-16}-\frac{17}{x-4}=\frac{3x}{x+4}$; е) $\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}+\frac{4}{(x+1)^2}=0$;
в) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$; ж) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$;
г) $\frac{2}{4-x^2}-\frac{1}{2x-4}-\frac{1}{2x^2+4x}=0$; з) $\frac{5}{2x+6}-\frac{1}{6x^2-18x}+\frac{29}{3x^2-27}=0$.

1094. Колхоз боғининг юзи 29, 25 га. Агар боғ тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, унинг бир томони иккинчисидан 200 м узун экани маълум бўлса, боғнинг периметрини топинг.

1095. Икки бригада биргаликда ишлаб, ишни 6 соатда тугатади. Биринчи бригаданинг ёлғиз ўзи шу ишни иккинчисидан 5 соат кўп вақтда бажаради. Ҳар бир бригада алоҳида ишлаб, ҳамма ишни қанча вақтда бажаради?

1096. Икки мотоциклчи ораларидаги масофа 160 км бўлган икки пунктнинг биридан иккинчисига қараб бир вақтда йўлга чиқди. Улардан бирининг тезлиги иккинчисиникидан 8 км/соат ортиқ, шу сабабли у белгиланган жойга 40 минут олдин келди. Мотоциклчиларнинг тезликларини топинг.

1097. Моторли қайиқ дарё оқими бўйича 28 км ва дарё оқимига қарши 25 км юрди. Бунда у бутун йўлга турғун сувда 54 км га қанча вақт сарфласа, шунча вақт сарфлади. Агар оқим тезлиги 2 км/соат экани маълум бўлса, қайиқнинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

1098. Катер дарё оқими бўйича 160 км ва оқимга қарши шунча юрди, бутун йўлга 26 соат вақт сарфлади. Агар дарё оқимининг тезлиги 3 км/соат экани маълум бўлса, катернинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

1099. Скорий поезд 300 км га тенг MN масофани жадвалда белгиланганича бирор ўртача тезлик билан ўтиши керак эди. Аммо олдинига унинг тезлиги белгиланган тезликдан 8 км/соат кам бўлди, шу сабабли N га жадвалда кўрсатилган вақтда етиб бориш учун у M дан 180 км узоқдаги K станциядан бошлаб белгиланганидан 16 км/соат ортиқ тезлик билан юрди. M дан N га етгунча поезд қанча вақт сарфлади?

1100. Станция билан совхоз орасидаги масофа 12 км, станциядан совхозга қараб трактор жўнади, ярим соатдан кейин эса ўша йўналишда юк машинаси жўнади. Юк машинаси совхозга етиб келганда, трактор совхозга етишига яна 3 км йўл қолган эди. Агар юк машинасининг тезлиги трактор тезлигидан 20 км/соат ортиқ экани маълум бўлса, юк машинасининг ва тракторнинг тезлигини топинг.

1101. M ва N пунктлари орасидаги масофа 42 км. M пунктдан N пунктга қараб велосипедчи йўлга чиқди, бир соатдан кейин эса N дан M га қараб мотоциклчи йўлга чиқди. Мотоциклчининг тезлиги велосипедчининг тезлигидан 48 км/соат ортиқ. Велосипедчи билан мотоциклчи M дан 17 км нарида учрашишган бўлса, уларнинг тезликларини топинг.

1102. Биквадрат тенгламани ечинг:

а) $9x^4-13x^2+4=0$; в) $x^4-21x^2-100=0$;
б) $4x^4+17x^2+4=0$; г) $3x^4+2x^2-1=0$.

1103. Тенгламани янги ўзгарувчи киритиш йўли билан ечинг:

а) $(3x+2)^2+5(3x+2)=0$; б) $4(5-x^2)^2-9(5-x^2)+2=0$.

1104. Тенгламани ечинг:

а) $x^4-16x^2=0$; д) $x^3+6x^2-16x=0$;
б) $x=x^3$; е) $x^4+x^3-6x^2=0$;
в) $1,2x^3+x=0$; ж) $x^3+x^2=9x+9$;
г) $0,4x^4=x^3$; з) $2x^3+8x=x^2+4$.

1105. Тенгламани $x^n=a$ кўринишга келтиринг ва уни ечинг;

а) $\frac{1}{8}x^3=1$; б) $1000x^3+1=0$;

в) $\frac{1}{27}x^3 = 0,001$; д) $1+x^5=0$;

г) $\frac{1}{9}x^4 - 16 = 0$; е) $x^8 - 16 = 0$.

1106. Графикларни схематик тасвирлаб, тенглама илдизга эга ёки эга эмаслигини аниқланг:

а) $x^3 = -2x+1$; б) $\sqrt{x}=5x-1$; в) $\frac{4}{x} = 7x$; г) $4-x^2=\frac{1}{x}$.

1107. Тенгламани график усулда ечинг:

а) $x^3=3-2x$; в) $x^2 - 2x - 8 = \frac{5}{x}$;

б) $x^3=x+2$; г) $x^3 = \sqrt{x}$.

1108. Иккита чизиқли тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 4x-y=17, \\ y+6x=23; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x=y+50, \\ -3,4x+2,6y=14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x-10y=11, \\ 5y+7x=19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8x-4y=6, \\ 13x+6y=-1. \end{cases}$

1109. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 1, \\ \frac{x-y}{3} + \frac{x+y}{4} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+y+4}{5} + \frac{x-y-4}{7} = y; \\ \frac{x+y+4}{11} - \frac{x-y-4}{7} = 1. \end{cases}$

1110. а) $(-6; -6)$ сонлар жуфти $ax-5y=6$ тенгламанинг ечимларидан бири бўлиши маълум.

$$\begin{cases} ax-5y=6, \\ x-3,5y=6 \end{cases}$$

системанинг ечимлари тўпламини топинг.

б) $(15; 10)$ сонлар жуфти

$$x-by=5$$

тенгламанинг ечими бўлишини билган ҳолда

$$\begin{cases} 4x+9y=8, \\ x-by=5 \end{cases}$$

система ечимларининг тўпламини топинг.

1111. $3x-y=5$ ва $2x+y=10$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан а) абсциссалар ўқигача; б) ординаталар ўқигача; в) координаталар бошигача бўлган масофани топинг.

1112. k ва b нинг қийматларини шундай танлангки,

$$\begin{cases} y=kx+b, \\ y=2,5x-3 \end{cases}$$

система а) ечимга эга бўлмасин;

б) чексиз кўп ечимга эга бўлсин;

в) ягона ечими сонлар жуфти бўлиб, унда $x=4$ бўлсин.

1113. $3x-y=3$ ва $5x-3y=1$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан:

а) $7x-3y=5$ тўғри чизиқ; б) $12x-7y=3$ тўғри чизиқ ўтадими?

1114. а) a ва b нинг қандай қийматларида $y=ax^2+bx+4$ парабола E $(-1;\ 2)$ ва D $(2,5)$ нуқтадан ўтади?

б) a ва c нинг қандай қийматларида $y=ax^2+4x+c$ парабола координаталар ўқини A $(1;\ 0)$ ва B $(0;\ 4)$ нуқталарда кесиб ўтади?

1115. 3 та футбол тўпи ва 15 та хоккей клюшкаси учун болалар спорт мактаби 48 сўм тўлади. Баҳолар тўплар учун 20%, клюшкалар учун 10% камайтирилгандан кейин 2 та футбол тўпи ва 10 та хоккей клюшкаси учун 27 сўм 20 тийин тўланди. Дастлаб битта футбол тўпи неча пул ва битта хоккей клюшкаси неча пул турган?

1116. Иккита бригада бир ойда 140 та деталь тайёрлади. Кейинги ойда биринчи бригаданинг меҳнат унуми 15%, иккинчи бригаданинг меҳнат унуми эса 20% ортди, шу сабабли улар олдинги ойга қараганда 24 та деталь ортиқ тайёрлашди. Ҳар қайси бригада икки ойда қанча деталь тайёрлаган?

1117. Икки пиёда ораларидаги масофа 38 км бўлган M ва N пунктдан бир вақтда бир-бирига қараб йўлга чиқди. 4 соатдан кейин улар орасидаги масофа 2 км қисқарди, яна 3 соатдан кейин биринчи пиёданинг N пунктга етиб боришига иккинчиси M га боришидагига қараганда 7 км кам масофа қолди. Ҳар бир пиёданинг тезлиги қандай?

1118. Агар касрнинг сурат ва махражига 1 тадан қўшилса, $\frac{1}{3}$ га тенг каср ҳосил бўлади, агар касрнинг сурат ва махражидан 3 тадан айирилса, $\frac{1}{5}$ га тенг каср ҳосил бўлади. Дастлабки касрни топинг.

1119. Ораларидаги масофа 200 км бўлган A ва B шаҳарлардан бир вақтда автомобиль ва автобус йўлга чиқди ва 2 соатдан кейин учрашишди. Автомобиль B га автобус A га борганидан 1 соат 40 минут олдин борди. Автомобилнинг ва автобуснинг тезлигини топинг.

1120. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

а) $\begin{cases} y=x^2-3x, \\ 2y-x=4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy=1, \\ x^2+y^2=9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=2x^2-8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy=-2, \\ y+8=\frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

1121. Тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+y+8=xy, \\ y-2x=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x+y=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=13; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x^2+5x-3y=-12; \\ 2y-7x=8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=1, \\ 3y+x=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2-6x+y=0, \\ 2x-\frac{1}{2}y=1. \end{cases}$

1122. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-y-xy=14, \\ x+2y+xy=-7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-y^2=12, \\ xy=8. \end{cases}$

1123. Ясашни бажармасдан

а) $y=x^2-6x+8$ парабола билан $x+y=4$ тўғри чизиқнинг,

б) $x+y=4$ тўғри чизиқ билан $y=\frac{3}{x}$ гиперболанинг;

в) $x^2+y^2=4$ айлана билан $(x-3)^2+y^2=1$ айлананинг кесишиш-кесишмаслигини аниқланг. Агар кесишса, уларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини кўрсатинг. Ечимни графиклар ёрдамида ифодаланг.

1124. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 41 см га тенг, юзи эса 180 см^2 га тенг. Шу учбурчакнинг катетларини топинг.

1125. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи 44 см^2 га тенг. Агар унинг катетларидан бири 1 см камайтирилса, иккинчиси эса 2 см узайтирилса, унинг юзи 50 см^2 га тенг бўлади. Шу учбурчакнинг катетларини топинг.

1126. Икки ишчи маълум бир ишни биргаликда 10 кунда бажаришлари мумкин. 7 кун биргаликда ишлагандан сўнг улардан бири бошқа участкага ўтказилди ва иккинчи ишчи яна 9 кун ишлаб ишни тугатди. Шу ишни ҳар бир ишчи алоҳида ишлаганда неча кунда тугатар эди?

1127. Икки ишчи биргаликда ишлаб, ишни 2 кунда бажаришди. Агар биринчи ишчи 2 кун, иккинчиси 1 кун ишлаганда ҳамма ишнинг $\frac{5}{6}$ қисми бажарилиши маълум бўлса, ҳамма ишни бажариш учун ҳар бир ишчига неча кун керак бўлади?

1128. Агар (b_n) арифметик прогрессияда $b_1=48{,}5$ ва $d=-1{,}3$ бўлса, унинг 3 га тенг бўлган ҳадининг номерини топинг. — 3,5; 15 сони шу прогрессиянинг ҳади бўладими?

1129. Арифметик прогрессиянинг ўн тўртинчи ҳади 140 га тенг, дастлабки ўн тўртта ҳадининг йиғиндиси эса 1050 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг.

1130. (a_n) кетма-кетлик — арифметик прогрессия. $a_6=-6$ ва $a_{16}=17{,}5$ экани маълум. Шу прогрессиянинг дастлабки ўн олтита ҳадининг йиғиндисини топинг.

1131. Арифметик прогрессияда биринчи ҳад 28 га тенг, дастлабки йигирма бешта ҳадининг йиғиндиси эса 925 га тенг. Шу прогрессиянинг айирмасини ва ўттизинчи ҳадини топинг.

1132. (a_n) арифметик прогрессия олтинчи ва ўнинчи ҳадларининг йиғиндиси 5,9 га тенг, ўн иккинчи ва тўртинчи ҳадларининг айирмаси эса 2 га тенг. Шу прогрессиянинг йигирма бешинчи ҳадини топинг.

1133. (x_n) кетма-кетлик — геометрик прогрессия.

а) агар $x_8=-128$ ва $q=-4$ бўлса, x_1 ни топинг;
б) агар $x_1=162$ ва $x_9=2$ бўлса, q ни топинг;
в) агар $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ва $x_6=\frac{1}{4}$ бўлса, x_1 ни топинг.

1134. (b_n) геометрик прогрессияда $b_1=6$ ва $b_3=\frac{2}{3}$ экани маълум бўлса, унинг бешинчи ҳадини топинг.

1135. $b_6=\frac{1}{2}$ ва $q=\frac{1}{2}$ бўлган (b_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки олтита ҳадининг йиғиндисини топинг.

1136. Агар кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари мусбат ва $b_3=20$, $b_5=80$ экани маълум бўлса, (b_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки еттита ҳадининг йиғиндисини топинг.

Тенгсизликлар

1137. Ўзгарувчининг ҳар қандай қийматида тенгсизлик тўғри бўлишини исботланг:

а) $(a+3)^2+(a-5)^2>2(a^2-2a)$;
б) $a(a+1)+3a>4(a-0,5)$;
в) $(6b+1)^2-(9b+3)(4b-1)>9b$;
г) $30b<(5b+3)^2-(4b-1)(4b+1)$.

1138. x нинг истаган қийматида:

а) $x^2-3x+200$ учҳад мусбат қийматлар қабул қилишини исботланг;

б) $-x^2+22x-125$ учҳад манфий қийматлар қабул қилишини исботланг.

1139. a ва b — тўғри тўртбурчак томонларининг узунликлари (см билан) бўлиб, бунда $2,4 \leqslant a \leqslant 2,5$ ва $4,6 \leqslant b \leqslant 4,7$ бўлсин. Шу тўғри тўртбурчакнинг периметрини ва юзини баҳоланг.

1140. $2,6<\sqrt{7}<2,7$, $2,2<\sqrt{5}<2,3$ эканини билган ҳолда қуйидаги ифодаларнинг қийматини баҳоланг:

а) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{35}$.

1141. Тенгсизликни ечинг:

а) $0,4(y-1)+y>0,2y+5$;
б) $0,2x-0,6>3(x+1)$;

в) $x-(1,6x-3)>3(0,2x+2)$;
г) $x-4(1,7-x)<0,6+1,3x$;
д) $0,2(3y+1)<0,7y-1-(0,1y+4)$;
е) $7(x-0,4)<2(2x+3)-(1,5-3x)$;
ж) $(0,6y-1)(0,4y+4)-(1,2y+1)(0,2y-1)<4$;
з) $(0,2x+3)(0,2x-3)-(0,4x+1)(0,2x+1)>1$.

1142. Тенгсизликнинг ечимлари тўпламини топинг:

а) $0,8x<\frac{1}{3}x-\frac{7}{15}$;
б) $\frac{5x-3}{4}<1,25x+1$;
в) $1,6y+2>\frac{3-0,1y}{4}$;
г) $1-1,5x>\frac{17-3x}{2}$;
д) $\frac{4x+1}{3}-\frac{19-x}{2}-x>0$;
е) $\frac{5y-1}{5}-\frac{y+1}{5}<2y$.

1143. b нинг қандай қийматларида:

а) $\frac{12-1,5b}{5}$ касрнинг қийматлари $\frac{11-0,5b}{2}$ касрнинг мос қийматларидан кичик бўлади;

б) $\frac{1,4+b}{4}$ касрнинг қийматлари $\frac{2,6+3b}{2}$ касрнинг мос қийматларидан катта бўлади?

1144. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 5x-2>2x+1, \\ 2x+3<18-3x; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 4y+5>y+17; \\ y-1>2y-3; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 12y-1<3-2y, \\ 5y<2-11y; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 8x+1>5x-1, \\ 9x+9<8x+8. \end{cases}$

1145. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} 2x-3(x+1)<x+8; \\ 6x(x-1)-(2x+2)(3x-3)>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10(x-1)-5(x+1)>4x-11, \\ x^2-(x+2)(x-2)<3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-\frac{4x-1}{3}<10, \\ 4x-1-\frac{x}{3}<10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3y-\frac{2y+1}{2}>4-\frac{2-y}{3}-y, \\ \frac{5y-1}{3}-(y-1)>3y. \end{cases}$

1146. Тенгсизликлар системасининг бутун ечимларини топинг:

а) $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(6x+1)>x, \\ (5x-1)(5x+1)-25x^2>x-6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (6x+1)^2-(2x+1)(18x-1)<8, \\ 1-0,5x\geqslant x-4. \end{cases}$

1147. Қўш тенгсизликни ечинг:

а) $-6 \leqslant 3x - 2 \leqslant 18$; в) $0 < 2 - 5y < 3$;

б) $-3 < \frac{4y-1}{3} < 7$; г) $-3 \leqslant \frac{7-2x}{4} < 0$.

1148. а) a нинг қандай қийматларида $17-5a$ иккиҳаднинг қийматлари $[0; 1]$ сонли оралиққа тегишли бўлади?

б) b нинг қандай қийматларида $\frac{2b-1}{3}$ касрнинг қийматлари $(-1; 1)$ сонли оралиққа тегишли бўлади?

1149. Тенгсизликни ечинг:

а) $x^2-2x-48>0$; д) $x^2-0,64x<0$;
б) $3x^2-4x-15>0$; е) $x^2-3,6x>0$;
в) $2x^2+6x+17>0$; ж) $0,2x^2<1,8$;
г) $4x^2-x+5<0$; з) $0,5x^2<1,6x$.

1150. Тенгсизликни ечинг:

а) $(2x+1)(x+4)-3x(x+2)<0$;
б) $(3x-2)^2-4x(2x-3)>0$;
в) $(1-6x)(1+6x)+7x(5x-2)>14$;
г) $(5x+2)(x-1)-(2x+1)(2x-1)<27$.

1151. Ифода x нинг қандай қийматларида маънога эга бўлади:

а) $\sqrt{12x-4}$; в) $\sqrt{x^2+3x+2}$; д) $\sqrt{12-5x}+\sqrt{2x-1}$;
б) $\sqrt{3-0,6x}$; г) $\sqrt{4x^2+12x+9}$; е) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{3x-17}$?

Функциялар

1152. Қуйидаги формула билан берилган функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

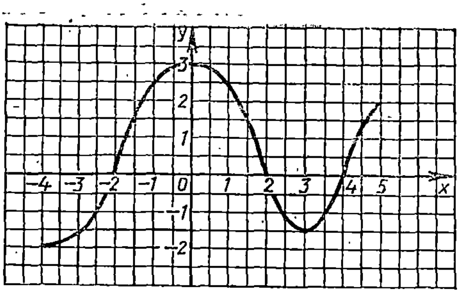
а) $y=\frac{1}{2x-5}$; г) $y=\frac{3}{4x^2-4x+1}$;

б) $y=\frac{x}{x^2-5x+6}$; д) $y=\sqrt{3x-9}$;

в) $y=\frac{x}{x^2-x+5}$; е) $y=\frac{1}{\sqrt{-4x+2}}$.

1153. Функция $y=-x^2+3$ формула билан берилган. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси қандай? Аргументнинг функциянинг қийматини -1; 1; 5 га тенг қиладиган қиймати топиладими?

1154. Аниқланиш соҳаси $[-4; 5]$ оралиқ бўлган f функция график билан ифодаланган (65-расм). Функция қандай қийматлар қабул қилади? $f(-3)$, $f(-1,5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3,5)$ ни топинг. Функциянинг графиги координаталар ўқини кесиб ўтадиган нуқталарнинг координаталарини топинг.



65- расм

1155. f функция $y=\frac{6-2x}{7}$ формула билан берилган. x аргументнинг қандай қийматларида: а) $f(x)>0$; б) $f(x)<0$ бўлади?

1156. f функциянинг графигига кўра (65- расмга қаранг) аргументнинг: а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$ бўладиган қийматларини топинг. Аргументнинг қандай қийматларида $f(x)\geqslant 0$ бўлади?

1157. $ABCDE$ синиқ чизиқ f функциянинг графигидир (66- расм). f функция қайси оралиқларда ўсади ва қайси оралиқларда камаяди? Бу функция қандай оралиқларда мусбат қийматлар ва қандай оралиқларда манфий қийматлар қабул қилади?

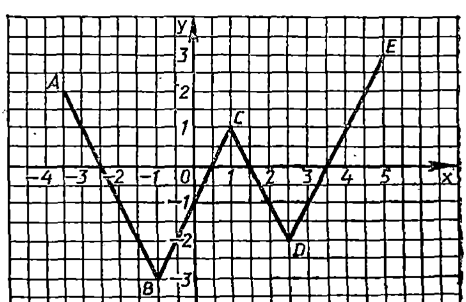
1158. Функциялар $y=-3x+4$, $y=2x^2+3x$, $y=5x$, $y=-x^2$, $y=\frac{5}{x}$, $y=-\frac{7}{x}$, $y=\frac{1}{5}x$, $y=\sqrt{x}$ формулалар билан берилган. Бу функциялардан қайси бири: а) чизиқли; б) квадратик; в) тўғри пропорционаллик; г) тескари пропорционаллик бўлади?

1159. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=-2{,}1x$; б) $y=2x-3$; в) $y=-5$; г) $y=-x+4$.

1160. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=2x^2-2$; в) $y=x^2-4x$;
б) $y=-x^2+1{,}5$; г) $y=1{,}5x^2+6x$;



66- расм

д) $y=x^2+x-6$;   ж) $y=3x^2-6x+5$;
е) $y=-0{,}5x^2+1{,}5x+2$;   з) $y=-2x^2+6x-6$.

1161. $y=-0{,}5x^2+x+1{,}5$ функциянинг графигини ясанг. График бўйича, x нинг қандай қийматларида y нинг қиймати нолга тенг; нолдан катта, нолдан кичик бўлишини графикдан топинг. Қандай оралиқда бу функция ўсади ва қандай оралиқда камаяди? Бу функциянинг энг катта қиймати ва энг кичик қиймати қандай?

1162. Қуйидаги формула билан берилган функциянинг графигини схематик тасвирланг:

а) $y=kx-2$, бунда $k>0$;   д) $y=ax^2+1$, бунда $a>0$;
б) $y=kx+3$; бунда $k<0$;   е) $y=ax^2+4$, бунда $a<0$;
в) $y=\frac{k}{x}$, бунда $k>0$;   ж) $y=ax^2-4$, бунда $a>0$;
г) $y=-\frac{k}{x}$, бунда $k<0$;   з) $y=ax^2-x$, бунда $a<0$.

1163. Чизиқли функциялар графиклари ўзаро қандай жойлашган:

а) $y=7x+16$ ва $y=7x-25$;
б) $y=3{,}5x-4$ ва $y=-5x-4$;
в) $y=-2{,}8x$ ва $y=-2{,}8x+11$;
г) $y=0{,}6x+8$ ва $y=-0{,}6x$?

1165. Қуйидаги функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг:

а) $y=2x-11$ ва $y=-5x+3$;
б) $y=-3x-10$ ва $y=x^2-13x+6$;
в) $y=\frac{2{,}5}{x}$ ва $y=-2x+4$;
г) $y=-\frac{3}{x}$ ва $y=-x$;
д) $y=-3x^2+x-3$ ва $y=-x^2+x-5$;
е) $y=4x^2+3x+6$ ва $y=3x^2-3x-3$.

1165. $y=-3x+9$, $y=5x$, $y=-7$, $y=9x-1$, $y=-x-100$, $y=1+5x$ чизиқли функциялардан қайси бири: а) ўсувчи; б камаювчи?

1166. Квадратик функция қайси оралиқда ўсади ва қайси оралиқда камаяди:

а) $y=2x^2+10x-7$;   в) $y=4x^2+2x$;
б) $y=-3x^2+x+5$;   г) $y=8x-5x^2$?

1167. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $y=-1{,}2x+17$;   г) $y=-7x^2+21x-5$;
б) $y=-\frac{3}{x}$;   д) $y=(x-5)(x+4)$;
в) $y=\frac{5}{x}$;   е) $y=-(2x+1)^2$.

1168. x аргументнинг қандай қийматларида $f(x)$ нинг қиймати нолдан катта бўлади, бунда:

а) $f(x)=3{,}2x+16$;
б) $f(x)=-1{,}5x-30$;
в) $f(x)=\frac{9}{x}$;
г) $f(x)=-\frac{15}{x}$;
д) $f(x)=2x^2+x-6$;
е) $f(x)=1{,}44x^2-2{,}4x+1$;
ж) $f(x)=3x^2-x+2$;
з) $f(x)=-5x^2+5x-3$.

Ҳамма темаларга доир машқлар

1169. а) Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{9x^2+8}{27x^3-1}-\frac{1}{3x-1}+\frac{4}{9x^2+3x+1}\right)\times\frac{3x-1}{3x+1}.$$

б) $y=x^2-4x-5$ функциянинг графигини ясанг ва x нинг қандай қийматларида функция манфий қийматлар қабул қилишини топинг.

в) $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$ ва $270°<\alpha<360°$ эканини билган ҳолда $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг.

г) A шаҳардан B шаҳаргача масофани поезд жадвал бўйича 4 соату 30 минутда ўтиши керак. Техник сабабларга кўра унинг A шаҳардан жўнаши 30 минут кечикди. Поезд тезлигини 10 км/соат орттириб, B шаҳарга ўз вақтида етиб келди. A ва B шаҳарлар орасидаги масофани топинг.

1170. а) Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{4x}{9-x^2}-\frac{x-3}{9+3x}\right)\cdot\frac{18}{x+3}-\frac{2x}{3-x}.$$

б) Тенгсизликни ечинг:

$$(1-x)(3-4x)-(2x+1)(2x-1)<11.$$

в) $y=-\frac{1}{3}x+31$ ва $y=-2x+111$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

г) Моторли қайиқ дарё оқими бўйича 36 км ўтиб, яна орқасига қайтиб келди. Бунда у бутун йўлга 5 соат сарфлади. Дарё оқимининг тезлиги 3 км/соат эканини билган ҳолда моторли қайиқнинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

1171. а) $\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a^4}}{(a^{\frac{1}{4}})^2}$ ифодани соддалаштиринг ва $a=121$ да унинг қийматини топинг.

б) Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=11,\\ 2x+y=3.\end{cases}$$

в) $y=x^2+4x$ функциянинг графигини ясанг: x нинг қандай қийматларида функция ўсади?

г) Токарь маълум муддатда 240 та деталга ишлов бериши керак. Кескични такомиллаштириб, ў бир соатда планда мўлжалланганидан 2 та ортиқ деталга ишлов бера бошлади ва шунинг учун топшириқни муддатидан 4 соат илгари бажарди. Токарь бир соатда нечта деталга ишлов бериши керак эди?

1172. а) Ҳисобланг:

$$8^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\frac{1}{40}+(-1)^{10}\cdot 7.$$

б) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

$$y=\sqrt{27-12x-4x^2}.$$

в) Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{3}-\frac{x-y}{2}=5, \\ 7x+3y=38. \end{cases}$$

г) Устоз билан шогирд биринчи кун 100 та деталь тайёрлашди. Иккинчи кун биринчи кундагидан устоз 20% ортиқ, шогирд 10% ортиқ деталь тайёрлади. Иккинчи кун устоз билан шогирд ҳаммаси бўлиб 116 та деталь тайёрлашди. Биринчи куни устоз нечта ва шогирд нечта деталь тайёрлаган?

1173. а) Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\sin(\pi-\alpha)}-\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos(\pi+\alpha)}{2}.$$

б) Соддалаштиринг:

$$(5-2\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}+8\sqrt{3}).$$

в) Тенгламани график усулда ечинг:

$$\frac{12}{x}=x^2-4x.$$

г) (a_n) арифметик прогрессияда бешинчи ва ўнинчи ҳадларининг йиғиндиси -9 га тенг, тўртинчи ва олтинчи ҳадларининг йиғиндиси эса -4 га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки ўнта ҳадининг йиғиндисини топинг.

1174. а) $\dfrac{2\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos^2\alpha-1}$ ифодани соддалаштиринг.

б) Тенгсизликни ечинг:

$$(3x-1)^2-(x-6)(x+2)>4.$$

в) Тенгламани ечинг:

$$\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{12}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}.$$

г) (b_n) геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳади $1\frac{1}{2}$ га тенг, прогрессиянинг махражи эса $-\frac{1}{2}$ га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки бешта ҳадининг йиғиндисини топинг.

ҚИЙИН МАСАЛАЛАР

1175. $\frac{4}{7}$ ва $\frac{5}{7}$ сонлар орасидан рационал сонниңг квадрати бўладиган бирор сон топинг. Бу масаланинг нечта ечими бор?

1176. Қасрлардан қайсиниси бирга яқин: тўғри касрми ёки унга тескари нотўғри касрми?

1177. Агар жуфт сон нолдан фарқли рақам билан тугаса, у ҳолда бу сонниңг тўртинчи даражаси 6 рақами билан тугайди. Шуни исботланг.

1178. Сон қандай рақам билан тугайди:

а) 2^{1000}; б) 3^{1000}; в) 7^{1000}?

1179. Натурал n нинг бирорта қийматида ҳам $n^2+5n+16$ ифоданинг қиймати 169 га бўлинмаслигини исботланг.

1180. $\overline{abc\ \ldots\ kxyz}$ кўп хонали сон берилган. Шу сонниңг охирги учта рақамидан ҳосил бўлган уч хонали сонни ажратиб, иккита сон ҳосил қиламиз: $\overline{abc\ \ldots\ k}$ ва $\overline{xyz}$. Агар ҳосил бўлган сонларнинг айирмаси 7 га (ёки 11 га, ёки 13 га) бўлинса, берилган сон ҳам 7 га (ёки 11 га, ёки 13 га) бўлинишини исботланг.

1181. Учта кетма-кет натурал сон кубларининг йиғиндиси 9 га бўлинишини исботланг.

1182. n нинг ҳар қандай натурал қийматида ҳам n^5-5n^3+4n ифоданинг қиймати 120 га бўлинишини исботланг.

1183. Агар тўғри бурчакли учбурчак томонларининг узунликлари бутун сонлар бўлса, унинг юзи ҳам бутун сон билан ифодаланишини исботланг.

1184. а) $x^2-y^2=105$; б) $2x^2+5xy-12y^2=28$ тенгламани қаноатлантирувчи барча натурал сонлар жуфтини топинг.

1185. $(a^2+b^2)^3$ ифодани икки бутун ифода квадратларининг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлигини исботланг.

1186. Тенгламанинг ҳамма ечимлари тўпламини топинг:

$$x^2+5y^2+4xy+2y+1=0.$$

1187. $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$ тенгламанинг ечимидан иборат бўлган бутун сонларнинг барча (x; y) жуфтларини топинг.

1188. Тенгликларнинг тўғри эканлигини текширинг:

а) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. б) $\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Пайқалган қонуният бажариладиган шартни кўрсатинг. Мисоллар келтиринг.

1189. Ифоданинг қийматини топинг:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

1190. Дастлабки юзта натурал сондан ихтиёрий 51 та сон олинган. Олинган сонлар орасида бири иккинчисига каррали бўлган албатта иккита сон борлигини исботланг.

Кўрсатма. Ҳар қандай натурал сонни $2^n \cdot p$ кўринишда тасвирлаш мумкин, бунда n — бутун номанфий сон, p — тоқ сон.

1191. Қиймати бир хил бўлган 13 та танга бор, шу тангалардан биттаси қалбаки бўлиб, бошқаларидан массаси билан фарқ қилади. Ричагли тарозида тошларсиз уч марта тортиш билан қалбаки тангани аниқлаш мумкинми?

1192. A ва B пунктлари орасидаги масофа 60 км. A дан B га қараб автомобиль йўлга чиқади, B дан ўша йўналишда биринчи автомобиль билан бир вақтда иккинчи автомобиль йўлга чиқади. Агар биринчи автомобиль тезлигини 10 км/соат, иккинчи автомобиль тезлигини 8 км/соат оширса, биринчи автомобиль иккинчисига ўша жойда, аммо бир соат олдин етиб олади. Ҳар қайси автомобилнинг тезлиги қандай?

1193. Тенгламанинг графигини ясанг:

а) $|x|+|y|=4$; б) $|x|-|y|=4$.

1194. а) $2x^2-5x+1=0$ тенглама илдизларининг кублари йиғиндисини топинг.

б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ ифода қийматини топинг, бунда x_1 ва x_2 лар $2x^2-11x+13=0$ тенглама илдизлари.

1195. ABC учбурчакнинг томонлари узунликлари a см, b см ва c см га тенг. $a^3=b^3+c^3$ экани маълум. A бурчак ўткир бурчак бўладими, тўғри бурчак бўладими, ўтмас бурчак бўладими?

1196. a, b ва c нинг барча мусбат қийматларида $8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a)$ тенгсизлик тўғри тенгсизлик бўлишини исботланг.

1197. Агар $x+y+z=7$ ва $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $z\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}<5$ бўлишини исботланг.

1198. Агар $a+b\geqslant 1$ бўлса, $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$ тенгсизлик тўғри эканини исботланг.

1199. x ва y нинг ихтиёрий қийматида тенгсизлик тўғри эканини исботланг:

а) $(x-3y)^2+10(x-3y)+26>0$;
б) $4xy+24x-10y-5x^2-y^2-30<0$.

1200. Агар a, b ва c бирор учбурчак томонлари узунликлари бўлса, ҳар қандай x да $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$ тенгсизлик тўғри бўлишини исботланг.

1201. Энг кичик шундай бутун сон топингки, бу сонни $(a+2)(a+5)(a+8)(a+11)$ ифодага қўшилганда ҳосил бўладиган йиғинди a нинг ҳар қандай қийматида мусбат бўлсин.

1202. $a>0$ ва $b>0$ бўлганда

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

бўлишини исботланг.

1203. Қуйидаги формула билан берилган функция графигини ясанг:

а) $y=|x^2-4x|$;
б) $y=x^2-4|x|$;
в) $y=|x^2-5x+6|$;
г) $y=x^2-5|x|+6$.

1204. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2+xy+x=14, \\ y^2+xy+y=28; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

1205. $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$ тенгламани ечинг.

1206. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y=\frac{(x^2-5x+6)(1-x)}{x-3}$;
б) $y=\frac{x^4-13x^2+36}{4-x^2}$.

1207. Учлари координаталар текислигида бутун координатали нуқталарда ётувчи тенг томонли учбурчак мавжудми?

1208. 2; 5; 8; ... арифметик прогрессияда натурал сон квадратига тенг бўладиган ҳад мавжудми?

1209. Бир хил рақам билан ёзиладиган уч хонали сон ҳосил қилиш учун 1 дан бошлаб нечта кетма-кет натурал сонни қўшиш керак?

1210. $\frac{n}{5}$ кўринишидаги барча қисқармас касрлар йиғиндисини топинг, бунда n натурал сон, $n\leqslant 50$.

1211. Иккита арифметик прогрессия берилган:

(a_n): 1; 5; 9; 13; 17; ... ва (b_n): 2; 5; 8; 11; 14; ...

Иккала прогрессиянинг барча бир хил ҳадлари кетма-кет ёзилса, ҳосил бўлган кетма-кетлик ҳам арифметик прогрессия бўлишини исбот қилинг. Бу прогрессиянинг айирмаси нимага тенг?

1212. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари узунликлари арифметик прогрессия ташкил қилса, у ҳолда бу прогрессиянинг айирмаси шу учбурчакка ички чизилган доиранинг радиусига тенг бўлишини исботланг.

1213. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари узунликлари геометрик прогрессия ташкил қиладими? Агар ташкил қилса, шу учбурчак бурчаклари катталикларини топинг.

1214. Арифметик прогрессияда $S_m=S_n$, шу билан бирга $m\neq n$. $S_{m+n}=0$ эканини исботланг.

1215. Учбурчакли жадвалда тоқ сонлар кетма-кетлиги шундай жойлаштирилганки, биринчи сатрда битта сон, иккинчи сатрда иккита сон, учинчи сатрда учта сон бор ва ҳоказо.

1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
21	23	25	27	29
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Жадвалнинг n-сатридаги сонларнинг йиғиндиси n^3 га тенг эканини исботланг.

1216. Агар f — чизиқли функция ва $x_1, x_2, x_3 \ldots$ — арифметик прогрессия бўлса, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ кетма-кетлик ҳам арифметик прогрессия бўлишини исботланг.

1217. $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{6\pi}{5}=-\frac{1}{4}$ эканини исботланг.

1218. (a_n) кетма-кетлик берилган, унда n тоқ бўлганда $a_n=-4$, ва n жуфт бўлганда $a_n=7$. n- ҳад формуласини ёзинг.

1219. Айниятни исботланг:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ \ldots\ +\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

1220. Агар $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\sin\alpha+\cos\alpha>1$ бўлишини исботланг.

1221. $\sin x+\sqrt{2}\cos x$ ифоданинг энг катта қиймати $\sqrt{3}$ га тенг бўлишини исботланг.

1222. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=5$ эканини билган ҳолда

$$\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}+\mathrm{ctg}^2\alpha$$

ифоданинг қийматини топинг.

1223. $8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=1$ эканини исботланг.

1224. Берилган диагоналли ҳамма тўғри тўртбурчаклар ичида квадрат энг катта юзга эга бўлишини исботланг.

VI—VII СИНФЛАР АЛГЕБРА КУРСИДАН МАЪЛУМОТЛАР

Ифодалар ва уларни шакл алмаштириш

1. Сонлар ва ўзгарувчилардан қўшиш, айириш ва кўпайтириш амаллари ёрдамида тузилган ифодалар бутун ифодалар дейилади. Бунда бир хил кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси даража кўринишида ёзилиши мумкин. Қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларидан ташқари нолдан фарқли сонга бўлишдан фойдаланиладиган ифодалар ҳам бутун ифодаларга тегишли бўлади. Масалан $a^2+3ab-2b^2$, $(x-y)(2x+y^2)$, $m-\frac{n}{3}$, $a^2:7$—бутун ифодалар.

Сонлар ва ўзгарувчилардан тузилган бўлиб, қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларидан ташқари ўзгарувчили ифодаларга бўлишдан ҳам фойдаланиладиган ифодалар каср ифодалар дейилади. Масалан, $x+\frac{1}{x-1}$, $\frac{a+2}{b}$, $5m:n$ — каср ифодалар.

Бутун ва каср ифодалар рационал ифодалар дейилади.

Бутун ифода ўзидаги ўзгарувчиларнинг истаган қийматида маънога эга бўлади. Каср ифода ўзгарувчиларнинг баъзи қийматларида маънога эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, $a+\frac{1}{a-2}$ ифода $a=2$ да маънога эга эмас, $\frac{3}{x-y}$ ифода $x=y$ да маънога эга бўлмайди.

Ўзгарувчиларнинг ифодани маънога эга қиладиган қийматлари ўзгарувчиларнинг қабул қиладиган қийматлари дейилади.

2. Тенглик унга кирган ҳамма ўзгарувчиларнинг қабул қиладиган қийматларида тўғри бўлса, у айният дейилади.

Ўзгарувчиларнинг ҳамма қабул қиладиган қийматларида тенг қийматлар қабул қиладиган икки ифода айнан тенг ифодалар дейилади, бир ифодани унга айнан тенг иккинчиси билан алмаштиришни эса ифодани айнан шакл алмаштириш дейилади.

3. Сонларнинг, ўзгарувчиларнинг ва улар даражаларининг кўпайтмаси, шунингдек, шу сонларнинг ўзи, ўзгарувчилар ва уларнинг даражалари бирҳадлар дейилади. Масалан, $8a^3b$, $-1{,}5\ xy^2z^8$, 12, c, m^{10} — бирҳадлар.

Бирҳаднинг даражаси деб, унга кирган ҳамма ўзгарувчилар даража кўрсаткичларининг йиғиндисига айтилади. Масалан, $9\ a^7b$ бирҳаднинг даражаси 8 га тенг.

4. Бирҳадларнинг йиғиндиси кўпҳад дейилади. Масалан, y^4-8y^3+2y-3, $4a^4b+11a^2b^2-ab+3b-1$ — кўпҳадлар. Бирҳадлар битта ҳаддан тузилган кўпҳад ҳисобланади.

Стандарт шаклдаги кўпҳаднинг даражаси деб, унга кирувчи бирҳадларнинг даражаларидан энг каттасига айтилади. Масалан, $18a^6-7a^4b^3+1$ кўпҳаднинг даражаси — $7a^4b^3$ бирҳаднинг даражасига, яъни 7 га тенг.

Стандарт шаклда ёзилмаган кўпҳаднинг даражаси деб, унга тенг кучли бўлган стандарт шаклдаги кўпҳаднинг даражасига айтилади.

5. Кўпҳадларни қўшишда қавсларни очиш қоидасидан фойдаланилади: агар қавс олдида «плюс» ишора турган бўлса, қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчининг ишорасини сақлаган ҳолда қавсларни ташлаб юбориш ҳам мумкин. Масалан, $(5x^2-3xy)+(4xy-2x^2+1)=5x^2-3xy+4xy-2x^2+1=3x^2+xy+1$.

Кўпҳадларни айиришда қавсларни очиш қоидасидан фойдаланилади: агар қавс олдида «минус» ишораси турган бўлса, қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчининг ишорасини ўзгартириб, қавсларни ташлаб юбориш мумкин. Масалан, $(8a^2-3ab)-(7a^2-4ab+5)=8a^2-3ab-7a^2+4ab-5=a^2+ab-5$.

Бирҳадни кўпҳадга кўпайтириш учун бу бирҳадни кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириш ва олинган кўпайтмаларни қўшиш керак. Масалан, $2x^2(3x^3-xy+5y^2)=6x^5-2x^3y+10x^2y^2$.

Кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш учун бир кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини иккинчи кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириш ва ҳосил қилинган кўпайтмаларни қўшиш керак. Масалан, $(2a-3)\times(3a^2+a-4)=6a^3+2a^2-8a-9a^2-3a+12=6a^3-7a^2-11a+12$.

6. Қисқа кўпайтириш формулалари:

а) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Икки ифода айирмаси билан улар йиғиндисининг кўпайтмаси бу ифодалар квадратлари айирмасига тенг.

б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Икки ифода йиғиндисининг квадрати биринчи ифода квадрати плюс биринчи ва иккинчи ифодалар кўпайтмасининг иккилангани плюс иккинчи ифоданинг квадратига тенг.

в) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Икки ифода айирмасининг квадрати биринчи ифода квадрати минус биринчи ва иккинчи ифодалар кўпайтмасининг иккилангани плюс иккинчи ифода квадратига тенг.

г) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Икки ифода йиғиндиси билан улар айирмасининг тўлиқсиз (чала) квадрати кўпайтмаси бу ифодалар кубларининг йиғиндисига тенг.

д) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Икки ифода айирмаси билан улар йиғиндисининг тўлиқсиз квадрати кўпайтмаси шу ифодалар кубларининг айирмасига тенг.

7. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш деб, кўпҳадни кўпҳадлар кўпайтмаси шаклида тасвирлашга айтилади.

Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиш учун қуйидаги усуллар қўлланилади: кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш, группалаш, қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиш. Масалан, $8a^3-6ab$ кўпҳадда $2a$ ни қавсдан ташқарига чиқариб, кўпайтувчиларга ажратиш мумкин: $8a^3-6ab=2a(4a^2-3b)$; $2ab+10b-3a-15$ кўпҳадни группалашдан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратиш мумкин: $2ab+10b-3a-15=(2ab+10b)-(3a+15)=2b(a+5)-3(a+5)=(a+5)(2b-3)$; $9a^2-25b^4$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратишда икки ифода квадратларининг айирмаси формуласидан фойдаланиш мумкин: $9a^2-25b^4=(3a)^2-(5b^2)^2=(3a-5b^2)(3a+5b^2)$.

8. $\frac{a}{b}$ шаклдаги рационал ифода рационал каср дейилади. a, b ва c нинг истаган қийматида (бунда $b\neq 0$ ва $c\neq 0$) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ бўлади. $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ айният билан ифодаланган касрнинг хоссаси касрнинг асосий хоссаси дейилади. Касрнинг асосий хоссаси касрларни қисқартиришда фойдаланилади. Масалан,

$$\frac{x^2+2xy}{4y^2+2xy}=\frac{x(x+2y)}{2y(x+2y)}=\frac{x}{2y};$$

$$\frac{a^3-8}{3a^2+6a+12}=\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{3(a^2+2a+4)}=\frac{a-2}{3}.$$

Агар касрнинг сурати (ёки махражи) нинг ишораси ўзгартирилса, шу касрнинг ишораси ҳам ўзгаради: $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$. Агар касрда суратнинг ёки махражнинг ишораси ўзгартирилган бўлса, берилган касрга айнан тенг бўлган ифодани ҳосил қилиш учун каср олдидаги ишорани ҳам ўзгартириш керак:

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b};\ \frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}.$$

9. Рационал касрлар билан амаллар.

а) Агар $c \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ ва } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Бир хил махражли қасрларни қўшиш учун уларнинг суратларини қўшиш, махражини эса ўзгаришсиз қолдириш керак. Масалан,

$$\frac{3x-8y}{5xy} + \frac{2x-7y}{5xy} = \frac{3x-8y+2x-7y}{5xy} = \frac{5x-15y}{5xy} = \frac{5(x-3y)}{5xy} = \frac{x-3y}{xy}.$$

Бир хил махражли касрларни айириш учун биринчи касрнинг суратидан иккинчи касрнинг суратини айириш, махражни эса ўзгаришсиз қолдириш керак. Масалан,

$$\frac{x^2}{3x-6} - \frac{4}{3x-6} = \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}.$$

б) Ҳар хил махражли касрларни қўшиш ва айириш учун уларни олдин умумий махражга келтириш ва ундан кейин бир хил махражли касрларни қўшиш ёки айириш қоидасини қўлланиш керак. Масалан,

$$\frac{a^2}{ab-b^2} + \frac{b^2}{ab-a^2} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b(a-b)} + \frac{b^2}{a(b-a)} - \frac{b}{a} = \frac{a^3-b^3-ab^2+b^3}{ab(a-b)} =$$

$$= \frac{a(a^2-b^2)}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)} = \frac{a+b}{b}.$$

в) Агар $b \neq 0$ ва $d \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

бўлади.

Қасрни касрга кўпайтириш учун уларнинг суратларини ўзаро кўпайтириш ва махражларини ўзаро кўпайтириш ҳамда биринчи кўпайтмани касрнинг суратига, иккинчи кўпайтмани касрнинг махражига ёзиш керак. Масалан,

$$\frac{c^2-4}{c^2} \cdot \frac{c}{3c-6} = \frac{(c^2-4)c}{c^2(3c-6)} = \frac{c(c-2)(c+2)}{3c^2(c-2)} = \frac{c+2}{3c}.$$

бу тенглама бутун тенглама дейилади. Чап ёки ўнг қисми каср ифода бўлган рационал тенглама каср тенглама дейилади.

15. Айни бир хил илдизга эга бўлган бир ўзгарувчили тенгламалар тенг кучли тенгламалар дейилади, Масалан, $x^2=25$ ва $(x-5)(x+5)=0$ тенгламалар тенг кучли тенгламалардир. Бу тенгламаларнинг ҳар бири иккита илдизга эга: -5 ва 5. Илдизи бўлмаган тенгламалар ҳам тенг кучли ҳисобланади.

Тенгламалар қуйидаги хоссаларга эга:

агар тенгламанинг иккала қисмига айни бир сон қўшилса, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади;

агар тенгламанинг иккала қисми нолдан фарқли айни бир сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

Тенгламада қўшилувчиларни унинг бир қисмидан иккинчисига ишораларини ўзгартириб ўтказиш мумкин. Бунда дастлабки тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

16. $ax=b$ кўринишдаги тенглама бир ўзгарувчили чизиқли тенглама дейилади, бунда x — ўзгарувчи, a ва b — сонлар. a сони ўзгарувчи олдидаги коэффициент, b сони эса озод ҳад дейилади.

Агар $a \neq 0$ бўлса, $ax = b$ тенглама биттагина $\frac{b}{a}$ илдизга эга бўлади. Масалан, $5x = 3$ тенглама 0,6 илдизга эга. Агар $a = 0$ ва $b \neq 0$ бўлса, $ax = b$ тенглама илдизга эга бўлмайди. Масалан, $0 \cdot x = 9$ тенгламанинг илдизи йўқ. Агар $a = 0$ ва $b = 0$ бўлса, $ax = b$ тенгламанинг илдизи истаган сон бўлади.

17. $ax^2+bx+c=0$ кўринишдаги тенглама квадрат тенглама дейилади, бунда x — ўзгарувчи, a, b ва c — бирор сонлар бўлиб, $a \neq 0$. a сони биринчи коэффициент, b — иккинчи коэффициент ва c — озод ҳад дейилади.

Биринчи коэффициенти 1 га тенг бўлган квадрат тенглама келтирилган квадрат тенглама дейилади.

18. Агар $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенгламада b ёки c коэффициентларнинг камида биттаси нолга тенг бўлса, бундай тенглама тўлиқсиз квадрат тенглама дейилади.

$ax^2+bx=0$ кўринишдаги тўлиқсиз квадрат тенглама иккита илдизга эга: 0 ва $-\frac{b}{a}$. Бундай тенгламалар одатда унинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратиш билан ечилади. Масалан, $3x^2-15x=0$, $3x(x-5)=0$, $x_1=0$ ва $x_2=5$.

$ax^2+c=0$ кўринишдаги тўлиқсиз квадрат тенглама, агар, $-\frac{c}{a}>0$ бўлса, иккита илдизга эга: $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ва $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, агар $-\frac{c}{a}<0$ бўлса, илдизга эга бўлмайди. Бундай тенгламалар $x^2=m$ кўринишга келтирилиб ечилади. Масалан, $0{,}5x^2-18=0$, $0{,}5x^2=18$, $x^2=36$, $x_1=-6$, $x_2=6$.

19. $D=b^2-4ac$ ифода $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенгламанинг дискриминанти дейилади.

Агар $D>0$ бўлса, квадрат тенглама иккита илдизга эга; агар $D=0$ бўлса, битта илдизга эга; агар $D<0$ бўлса, квадрат тенглама илдизга эга эмас.

$ax^2+bx+c=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари $D\geqslant 0$ да

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

формула билан топилади.

$ax^2+2kx+c=0$ квадрат тенгламанинг илдизларини $D\geqslant 0$ да

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

формула бўйича топиш мумкин.

20. Виет теоремаси: келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси *қарама-қарши ишора билан олинган иккинчи коэффициентга, илдизларнинг кўпайтмаси эса озод ҳадга тенг.* Бошқача айтганда, агар x_1 ва x_2 сонлар $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда $x_1+x_2=-p$ ва $x_1x_2=q$ бўлади.

Виет теоремасига тескари теорема: агар m ва n сонларнинг йиғиндиси $-p$ га, кўпайтмаси эса q га тенг бўлса, бу сонлар $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

21. Каср-рационал тенгламаларни ечишда қуйидагича иш тутилади:

1) тенгламага кирувчи касрларнинг умумий махражи топилади; 2) берилган тенгламанинг иккала қисми умумий махражга кўпайтирилиб, бутун тенгламага алмаштирилади; 3) ҳосил бўлган бутун тенглама ечилади; 4) унинг илдизларидан умумий махражни нолга айлантирадиганлари ташлаб юборилади.

Масалан, ушбу

$$\frac{2x}{x-2}=\frac{2}{x^2-2x}-\frac{x+1}{2-x}$$

тенгламани ечамиз. Тенгламанинг иккала қисмини касрларнинг умумий махражига, яъни $x(x-2)$ га кўпайтириб, $2x^2=2+x(x+1)$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама $x^2-x-2=0$ квадрат тенгламага келтирилади, унинг илдизлари 2 ва -1 сонлари. $x=2$ да дастлаб берилган тенглама касрларининг умумий махражи нолга айланади. Бу илдизни ташлаб юбориш керак. $x=-1$ да $x(x-2)$ умумий махраж нолга айланмайди, демак, -1 сони дастлабки тенгламанинг илдизи бўлади.

22. Икки ўзгарувчини тенгламанинг ечими деб ўзгарувчиларнинг шу тенгламани тўғри тенгламага айлантирувчи қийматлари жуфтига айтилади. Масалан, $x=-5$, $y=3$ сонлар жуфти $x^2-4y=13$ тенгламанинг ечимидир. Бу ечимни $(-5; 3)$ тарзида ёзиш мумкин.

$ax+by=c$ кўринишдаги тенглама икки ўзгарувчили чизиқли тенглама дейилади, бунда x ва y — ўзгарувчилар, a, b ва c — сонлар.

Айни бир хил ечимга эга бўлган икки ўзгарувчили тенгламалар тенг кучли тенгламалар дейилади. Ечимлари бўлмаган тенгламалар ҳам тенг кучли ҳисобланади.

23. Икки ўзгарувчили тенгламанинг ҳар бир (x, y) ечимини координаталар текислигида x ва y координатали нуқта билан тасвирлаш мумкин. Шундай нуқталарнинг ҳаммаси тенгламанинг графигини ташкил этади.

Ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан камида биттаси нолга тенг бўлмаган икки ўзгарувчили чизиқли тенгламанинг графиги тўғри чизиқ бўлади.

24. Икки ўзгарувчили тенгламалар системасининг ечими деб, системанинг ҳар бир тенгламасини тўғри тенгликка айлантирувчи ўзгарувчининг қийматлари жуфтига айтилади. Масалан, $x=3$, $y=8$ сонлар жуфти

$$\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+2y=19 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимидир.

Айни бир хил ечимга эга бўлган икки ўзгарувчили тенгламалар системалари тенг кучли системалар дейилади. Ечимга эга бўлмаган тенгламалар системалари ҳам тенг кучли ҳисобланади.

Тенгламалар системасини ечиш — унинг ҳамма ечимларини топиш ёки унинг ечимлари йўқлигини исботлаш демакдир.

Икки ўзгарувчили тенгламалар системаларини ечиш учун ўрнига қўйиш усули, қўшиш усули, график усулидан фойдаланилади.

Тенгсизликлар

25. Агар $a-b$ айирма мусбат сон бўлса, a сони b сонидан катта бўлади; бундай ёзилади, $a>b$. Агар $a-b$ айирма манфий сон бўлса, a сони b сонидан кичик бўлади; бундай ёзилади: $a<b$.

Агар $a>b$ бўлса, $b<a$ бўлади; агар $a<b$ бўлса, $b>a$ бўлади.

Агар a сони b дан катта ёки a сони b га тенг бўлса, $a\geqslant b$ ёзилади. Агар a сони b дан кичик ёки a сони b га тенг бўлса, $a\leqslant b$ ёзилади. $>$ ёки $<$ белгилар (ишоралар) ёрдамида тузилган тенгсизликлар қатъий тенгсизликлар дейилади; $\geqslant$ ёки $\leqslant$ белгилар ёрдамида тузилган тенгсизликлар ноқатъий тенгсизликлар дейилади.

26. Сонли тенгсизликларнинг хоссалари:

а) Агар $a<b$ ва $b<c$ бўлса, у ҳолда $a<c$ бўлади.

б) Агар $a<b$ ва c — истаган сон бўлса, у ҳолда

$$a+c<b+c$$

бўлади.

Агар тўғри тенгсизликнинг иккала қисмига айни бир сон қўшилса, тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади.

в) Агар $a<b$ ва c — мусбат сон бўлса,

$$ac<bc$$

бўлади; агар $a<b$ ва c — манфий сон бўлса,

$$ac>bc$$

бўлади.

Агар тўғри тенгсизликнинг иккала қисми айни бир мусбат сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади;

агар тўғри тенгсизликнинг иккала қисми айни бир манфий сонга кўпайтирилса ёки бўлинса ҳамда тенгсизликнинг ишораси қарама-қаршисига ўзгартирилса, тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади.

27. Сонли тенгсизликларни қўшиш ва кўпайтириш:

а) Агар $a<b$ ва $c<d$ бўлса,

$$a+c<b+d$$

бўлади.

Агар бир хил ишорали тўғри тенгсизликлар ҳадма-ҳад қўшилса, тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади.

б) Агар $a<b$ ва $c<d$ бўлса (бунда a, b, c ва d — мусбат сонлар), у ҳолда

$$ac<bd$$

бўлади.

Агар чап ва ўнг томонлари мусбат сонлардан иборат бир хил ишорали тўғри тенгсизликлар ҳадма-ҳад кўпайтирилса, у ҳолда тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади.

Агар a ва b — мусбат сон, $a<b$ ва n — натурал сон бўлса, $a^n<b^n$ бўлади.

28. Бир ўзгарувчили тенгсизликнинг ечими деб, ўзгарувчининг тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирувчи қийматига айтилади. Масалан, 1,8 сони $5x<10$ тенгсизликнинг ечими бўлади. 2 дан кичик ҳар қандай бошқа сон ҳам бу тенгсизликни қаноатлантиради.

Бир ўзгарувчили тенгсизликни ечиш — унинг ҳамма ечимларини топиш ёки улар йўқлигини исботлаш демакдир.

29. Айни бир хил ечимга эга бўлган тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлар дейилади.

Ечимлари бўлмаган тенгсизликлар ҳам тенг кучли ҳисобланади.

Бир ўзгарувчили тенгсизликлар қуйидаги хоссаларга эга:

агар қўшилувчи тенгсизликнинг бир қисмидан иккинчи қисмига қарама-қарши ишора билан ўтказилса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади;

агар тенгсизликнинг иккала қисми айни бир мусбат сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

агар тенгсизликнинг иккала қисми айни бир манфий сонга кўпайтирилса ёки бўлинса ва шу билан бирга тенгсизлик ишораси қарама-қаршисига алмаштирилса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

30. $[a; b]$ сонлар оралиғи $a\leqslant x\leqslant b$ қўш тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма сонлар тўпламидир.

$(a; b)$ сонлар оралиғи $a<x<b$ қўш тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма сонлар тўпламидир.

$[a; b)$ сонлар оралиғи $a \leqslant x < b$ қўш тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма сонлар тўпламидир.

$(a; b]$ сонлар оралиғи $a < x \leqslant b$ қўш тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма сонлар тўпламидир.

$[a; +\infty)$ ёки $(a; +\infty)$ сонлар оралиғи мос ҳолда $x \geqslant a$ ва $x > a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма сонлар тўпламидир.

$(-\infty; b]$ ёки $(-\infty; b)$ сонлар оралиғи мос ҳолда $x \leqslant b$ ва $x < b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма сонлар тўпламидир.

$(-\infty; +\infty)$ сонлар оралиғи ҳамма ҳақиқий сонлар тўпламидир.

31. $ax > b$ ва $ax < b$ кўринишдаги тенгсизликлар чизиқли тенгсизликлар дейилади, бунда a ва b — бирор сонлар, x эса ўзгарувчи.

32. Агар бир нечта тенгсизликнинг умумий ечимларини топиш масаласи қўйилса, тенгсизликлар системасини ечиш керак дейилади.

Бир ўзгарувчили тенгсизликлар системасининг ечими деб ўзгарувчининг системанинг ҳар бир тенгсизлиги тўғри бўладиган қийматига айтилади.

Тенгсизликлар системасини ечиш унинг ҳамма ечимларини топиш ёки ечими йўқлигини исботлаш демакдир.

Функциялар

33. Агар x нинг ҳар бир қийматига y нинг биргина қиймати мос келса, y ўзгарувчининг x ўзгарувчига боғлиқлиги функция дейилади. x ўзгарувчи эркли ўзгарувчи ёки аргумент дейилади, y ўзгарувчи эса эрксиз ўзгарувчи дейилади. Шунингдек, y ўзгарувчи x нинг функцияси дейилади. Буни $y = f(x)$ формула кўринишида ёзиш мумкин.

Эркли ўзгарувчи қабул қиладиган ҳамма қийматлар функциянинг аниқланиш соҳасини ташкил қилади.

Текисликнинг абсциссалари аргументнинг қийматларига тенг, ординаталари эса функциянинг унга мос қийматларига тенг бўлган нуқталар тўплами функциянинг графиги дейилади.

34. Аргументнинг қандай қийматларида $y = f(x)$ функция нолга айланади, қандай оралиқларда у мусбат қийматлар қабул қилади ва қандай оралиқларда манфий қийматлар қабул қилади деган саволга жавоб бериш учун $f(x) = 0$ тенгламани ва унга мос $f(x) > 0$ ва $f(x) < 0$ тенгсизликларни ечиш керак.

Агар аргументнинг бирор оралиқдан олинган катта қийматига функциянинг катта қиймати мос келса, функция шу оралиқда ўсувчи дейилади. Агар функция бутун аниқланиш соҳасида ўсса, у ҳолда уни ўсувчи функция дейилади.

Агар аргументнинг бирор оралиқдан олинган катта қийматига функциянинг кичик қиймати мос келса, функция шу оралиқда камаювчи дейилади. Агар функция бутун аниқланиш соҳасида камайса, уни камаювчи функция дейилади.

35. Агар x ўзгарувчининг қийматлари бир неча марта ортганда y ўзгарувчининг унга мос қийматлари ҳам шунча марта ортса, y ўзгарувчи x га пропорционал бўлади.

Агар y ўзгарувчи x ўзгарувчига пропорционал бўлса, x ва y мос қийматларининг ҳамма жуфтлари учун $\frac{x}{y}$ нисбат айни бир сонга тенг. Бу сонни пропорционаллик коэффициенти дейилади.

Агар x ўзгарувчининг қийматлари бир неча марта ортганда y ўзгарувчининг мос қийматлари шунча марта камайса, y ўзгарувчи x га тескари пропорционал дейилади.

Агар y ўзгарувчи x ўзгарувчига тескари пропорционал бўлса, x ва y мос қийматларининг ҳамма жуфтлари учун xy кўпайтма айни бир сонга тенг.

36. $y=kx$ кўринишдаги формула билан ифодалаш мумкин бўлган функция тўғри пропорционаллик дейилади, бунда x — эркли ўзгарувчи ва k — нолга тенг бўлмаган сон. Функциянинг аниқланиш соҳаси ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами бўлади.

$k>0$ да $y=kx$ функция ўсувчи, $k<0$ да камаювчи бўлади.

Тўғри пропорционалликнинг графиги координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқдир. $k>0$ да график биринчи ва учинчи координата чоракларида, $k<0$ да иккинчи ва тўртинчи координата чоракларида жойлашади.

37. $y=\frac{k}{x}$ кўринишдаги формула билан ифодалаш мумкин бўлган функция тескари пропорционаллик дейилади, бунда x — эркли ўзгарувчи, k — нолга тенг бўлмаган сон. Нолдан фарқли ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади.

$k>0$ да $y=\frac{k}{x}$ функция $x<0$ бўлса, манфий қийматлар, $x>0$ бўлса, мусбат қийматлар қабул қилади. Функция $(-\infty;\ 0)$ ва $(0;\ +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида камаяди.

$k<0$ да $y=\frac{k}{x}$ функция $x<0$ бўлса, мусбат қийматлар, $x>0$ бўлса, манфий қийматлар қабул қилади. Функция $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида ўсади.

Тескари пропорционалликнинг графиги гипербола бўлади. $k>0$ да график биринчи ва учинчи координата чорагида, $k<0$ да иккинчи ва тўртинчи координата чорагида жойлашади.

38. $y=kx+b$ кўринишдаги формула билан ифодалаш мумкин бўлган функция чизиқли функция дейилади, бунда x — эркли ўзгарувчи, k ва b — сонлар. Функциянинг аниқланиш соҳаси ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами бўлади.

$k>0$ ва $y=kx+b$ функция ўсувчи, $k<0$ да камаювчи бўлади.

Чизиқли функциянинг графиги тўғри чизиқдир.

Агар $y=kx+b$ кўринишдаги формулалар билан ифодаланган икки чизиқли функциянинг графиклари k коэффициентлар турлича бўлса, кесишади, k коэффициентлар бир хил бўлса, параллел бўлади.

39. $y=x^2$ функциянинг аниқланиш соҳаси ҳамма ҳақиқий сонлар тўпламидир. Функция $x=0$ да нолга айланади, $x\neq0$ да эса мусбат қийматлар қабул қилади. Функция $(-\infty; 0]$ оралиқда камаяди ва $[0; +\infty)$ оралиқда ўсади. $y=x^2$ функциянинг графиги парабола. Бу график координаталар бошидан ўтади ва биринчи ҳам иккинчи координата чоракларида жойлашади.

40. $y=x^3$ функциянинг аниқланиш соҳаси ҳамма ҳақиқий сонлар тўпламидир. $x=0$ да функция нолга айланади. $x<0$ да манфий қийматлар қабул қилади, $x>0$ да мусбат қийматлар қабул қилади. Функция ўсувчидир. $y=x^3$ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтади ва биринчи ҳамда учинчи координата чоракларида жойлашади.

41. $y=\sqrt{x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси — номанфий сонлар тўплами. Функция $x=0$ да нолга айланади, $x>0$ да функция мусбат қийматлар қабул қилади. Функция ўсувчидир. $y=\sqrt{x}$ функциянинг графиги биринчи координата чорагида жойлашган.

Ҳақиқий сонлар. Тақрибий ҳисоблашлар

42. $\frac{m}{n}$ каср кўринишида ифодалаш мумкин бўлган сон рационал сон дейилади, бунда m—бутун сон, n—натурал сон.

Ҳар бир рационал сон чексиз ўнли даврий каср кўринишида ифодаланиши мумкин. Масалан, $2\frac{7}{12}=2{,}58(3)$; $\frac{8}{3}=0{,}375\,(0)$; $-5=-5,(0)$.

Ҳар бир чексиз ўнли даврий каср бирор рационал сонни ифодалайди. Масалан, $0,(6)=\frac{2}{3}$, $1,(18)=1\frac{2}{11}$.

43. $\frac{m}{n}$ каср кўринишида ифодалаб бўлмайдиган сонлар иррационал сонлар дейилади, бунда m — бутун сон ва n — натурал сон. Масалан, $\sqrt{3}$, π, $-\sqrt{8,7}$ сонлар иррационал сонлар.

Ҳар бир иррационал сон чексиз ўнли даврий бўлмаган каср кўринишида ифодаланиши мумкин.

Рационал ва иррационал сонлар ҳақиқий сонлар тўпламини ташкил этади.

Ҳар бир ҳақиқий сонга координата тўғри чизиғида бир нуқта мос келади ва координата тўғри чизиғидаги ҳар бир нуқтага бирор ҳақиқий сон мос келади.

44. a сонининг стандарт шакли деб, унинг $\alpha\cdot 10^n$ кўринишдаги ёзувига айтилади, бунда $1\leqslant a<10$ ва n — бутун сон. n сони соннинг тартиби дейилади. Масалан, $73\,000=7{,}3\cdot 10^4$; $0{,}0026=2{,}6\cdot 10^{-3}$.

45. Соннинг қийматли рақамлари деб, унинг олдинда турганноллардан бошқа ҳамма рақамларига айтилади. Масалан, 0,023 сонда иккита қийматли рақам бор: 2 ва 3; 0,807 сонида учта қийматли рақам: 8, 0 ва 7; 130 сонида учта қийматли рақам бор: 1, 3 ва 0.

46. Соннинг тақрибий қийматининг абсолют хатоси деб, сон билан унинг тақрибий қиймати айирмасининг модулига айтилади. Масалан, $\frac{1}{3}$ сони 0,3 тақрибий қийматининг абсолют хатоси $\left|\frac{1}{3}-0{,}3\right|=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$ га тенг.

Агар тақрибий қийматнинг абсолют хатоси бирор h сондан катта бўлмаса, у ҳолда унинг бу қиймати h гача аниқлик билан тақрибий қиймати дейилади. Масалан, 1,41 сони $\sqrt{2}$ нинг 0,01 гача аниқлик билан тақрибий қиймати бўлади.

Агар x сони a сонига h гача аниқлик билан тақрибан тенг бўлса, у ҳолда бундай ёзилади: $x=a\pm h$. Бунда h сони одатда битта ёки иккита қийматли рақам билан олинади. Масалан, $\sqrt{3}=1{,}73\pm 0{,}01$.

47. Тақрибий қийматнинг нисбий хатоси деб, абсолют хатонинг тақрибий қийматнинг модулига нисбатига айтилади.

ПРЕДМЕТ КЎРСАТКИЧИ

3. а) -2; 1,5; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; в) -20; 5; г) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$; д) $-3\pm\sqrt{7}$; е) $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. 4. а) $-\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{3}$; б) -2; $2\frac{2}{3}$; в) -1; $-1\frac{2}{3}$; г) $\frac{-6\pm\sqrt{30}}{2}$. 9. а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) илдизи йўқ; д) $-4{,}5$; е) 4; 8. 10. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) -6; 14; в) $-\frac{1}{4}$; г) -3; -11; д) 0; 6; е) $\pm\sqrt{5}$; ж) $-3{,}5$; 0; з) илдизи йўқ. 11. а) $1\pm\sqrt{5}$; б) -2; $2\frac{1}{3}$.
12. д) $-(y-1)(y-5)=(1-y)(y-5)$; е) $-(x-1)(x+6)=(1-x)(x+6)$; ж) $2(x-1)\left(x-1\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-3)$; з) $5(y+1)\left(y-\frac{3}{5}\right)=(y+1)(5y-3)$; и) $-2(x+1)\left(x-3\frac{1}{2}\right)=(x+1)(7-2x)$. 13. а) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $-9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=-(3x-2)^2$; в) $(4a+3)^2$; г) $(0{,}5m-2)^2$. 14. а) $2(x+7)(x-1)$; б) $-3(m-2)\times(m-3)=(6-3m)(m-3)$; в) $(x+2)(3x-1)$; г) $6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(3x-2)\times(2x-3)$; д) $\frac{1}{4}(a-4)^2=\left(\frac{1}{2}a-2\right)^2$; е) $-\frac{2}{3}(m-3)^2$. 17. а) $x+1\frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{2a+9}$; в) $\frac{b-3}{b-5}$; г) $-\frac{y+4}{y+9}$; д) $-\frac{c+10}{c+2}$; е) $\frac{5a+3}{14-11a}$. 18. а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{2x+1}{x}$; в) $\frac{m-3}{m-2}$. 21. а) $-2\frac{2}{3}$; -2; б) -2; $2\frac{1}{15}$; в) -1; 23; г) 2; $2\frac{1}{3}$.
22. а) -2; 2; б) 0; 2,5. 23. 24 км/соат. 24. а) -1 ва 7 дан бошқа ҳамма сонлар; б) 6 дан бошқа ҳамма сонлар. 31. а) Ҳа; б) ҳа; в) йўқ; г) йўқ. 37. а) $(-5;\ 50)$, $(5;\ 50)$; б) $(-5\sqrt{2};\ 100)$, $(5\sqrt{2};\ 100)$; в) йўқ; г) $(2;\ 8)$, $(5;\ 50)$. 38. $(-3;\ -9)$; $(1;\ -1)$. 41. а) $\frac{1}{5a+2}$; б) $\frac{a+7}{a+9}$; в) $\frac{1-3a}{2a+1}$. 42. а) -10; б) 3. 43. 3 км/соат.
47. $(-1;\ 6)$, $x=-1$. 48. $(2;\ 3)$, $x=2$. 57. а) $(-10;\ 149)$, $(3;\ 19)$; б) $(2,\ 11)$, $(4;\ 79)$. 58. а) $(3x+2)(3x-1)$. 59. а) $(-\infty;\ 2{,}9)$; б) $[0{,}25;\ +\infty)$; в) $[-1{,}8;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0{,}2)$. 60. а) $\left(-3\frac{1}{2};\ 5\frac{1}{4}\right)$; б) $x\leqslant-3{,}5$; в) $x>1$; г) ечими

йўқ. **61.** а) (0; 0), $\left(1\frac{1}{3};\ 5\frac{1}{3}\right)$; б) (—3; 18), $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. **62.** 27 км/соат. **66.** а) $[-4; +\infty)$ ва $(-\infty; -4]$; б) $[2,5; +\infty)$ ва $(-\infty; 2,5]$; в) $(-\infty; -2]$ ва $[-2; +\infty)$; г) $(-\infty; 0]$ ва $[0; +\infty)$. **67.** а) $(-\infty; -5]$ ва $[-5; +\infty)$; б) $[1,5; +\infty)$ ва $(-\infty; 1,5]$; в) $(-\infty; 0]$ ва $[0; +\infty)$; г] $[0; +\infty)$ ва $(-\infty; 0]$. **71.** а) $(-\sqrt{3}; -8)$, $(\sqrt{3}; -8)$; б) $(-5; -23)$, $\left(\frac{1}{3};\ -1\frac{2}{3}\right)$. **72.** а) -10; 2; б) 3; 8; в) -6; -3; г) 0; 2. **73.** а) $-\frac{1}{3(x+5)}$; б) $2x+16$. **74.** 10%. **75.** а) $(-9; 10)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -8)$ ва $(6; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -1\frac{1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; д) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$ ва $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$; е) ечими йўқ; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) ечими йўқ. **76.** а) $(-\infty; -2,5]$ ва $[1; +\infty)$; б) $[-2; 3]$; в) $[-3; 0]$; г) $(-\infty; -\sqrt{5}]$ ва $[\sqrt{5}; +\infty)$. **77.** а) $(-\infty; -7)$ ва $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $x \neq \frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right]$; г) $\left(-\infty; -4\frac{1}{2}\right]$ ва $[2; +\infty)$; д) $(-\infty; 0)$ ва $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $(-\infty; -2\sqrt{2})$ ва $(2\sqrt{2}; +\infty)$. **78.** а) $(-4; 4)$; б) $(-\infty; -\sqrt{3}]$ ва $[\sqrt{3}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3)$ ва $(3; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$ ва $[0; +\infty)$; д) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; е) $(-\infty; 0)$ ва $(7; +\infty)$. **79.** а) $[-10; 10]$; б) $(-\infty; -2\sqrt{6})$ ва $(2\sqrt{6}; +\infty)$; в) $[-4; 0]$; г) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ва $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; д) $(-\infty; 0)$ ва $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$; е) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ва $(0; +\infty)$. **80.** а) $\left(-7; -\frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right]$ ва $\left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right)$ ва $\left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$. **81.** а) $(-\infty; -1)$ ва $\left(4\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ ва $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **82.** а) $[0; 2]$; б) $x \neq -2$. **86.** 7 см дан ортиқ, лекин 12 см дан кам. **87.** 4 см дан ортиқ. **90.** а) $\frac{x+2}{3x-1}$; б) $\frac{4m^2-6m+9}{3m+2}$. **91.** а) $(-\infty; 1)$; б) ечими йўқ. **93.** а) -6; 2; б) $\frac{2\pm\sqrt{22}}{6}$; в) $\frac{4\pm\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$. **95.** $p=-1\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$ да. **98.** а) $\frac{2(m-2)}{m+4}$; б) $\frac{2m-1}{n-3}$. **99.** а) $\frac{4(x-4)}{4x+1}$; б) $\frac{x-1}{x+1}$; в) $\frac{m-3}{2m+1}$; г) $x-1$. **100.** а) x^2+x; б) $\frac{x-4}{4(x-1)}$; в) $\frac{2(x-5)}{x-2}$; г) $\frac{2x+1}{x-3}$. **101.** а) $\frac{3}{16}$; б) $2\frac{1}{3}$; в) -4; г) -8. **109.** $a=-6$, $b=26$. **110.** а) $\left[\frac{1}{24}; +\infty\right)$; б) $[1,82; +\infty)$; в) $(-\infty; 2,5]$; г) $\left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right]$. **113.** а) $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$, $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$; б) $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right]$, $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right)$; в) $\left[-\frac{2}{5}; +\infty\right)$, $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right]$;

г) $\left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right]$, $\left[2\frac{1}{2}; +\infty\right)$; д) $\left(-\infty; \frac{19}{70}\right]$, $\left[\frac{19}{70}; +\infty\right)$; е) $[0; +\infty)$, $(-\infty; 0]$. **114.** а) Энг кичиги 5; б) энг каттаси 3,2; в) энг кичиги -12. **117.** а) $(2; 3)$; б) $[1; 6]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right)$ ва $(1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. **118.** Ҳа. **120.** а) $(-4; 4)$; б) $(-\infty; -6]$, $[7; 11)$ ва $(11; +\infty)$; в) $x \neq -2$; г) $(-5; 6)$. **121.** $[-3; 1]$. **122.** а) $(-2; 0)$; б) $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -12)$; г) $(-5; 0)$; д) ечими йўқ; е) ечими йўқ; ж) $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$; з) $(-\infty; 0{,}36)$. **123.** а) $(-1; 2)$; б) $(1; 4)$.

II боб

125. а) -2; б) -1; в) $-3{,}5$; 2; г) $-0{,}5$; 0,5. **126.** а) 0; 5,5; б) -7; в) $1\frac{1}{3}$; г) $-6\frac{1}{3}$; 5. **130.** $p < 2$ да. **131.** а) $b < 4{,}5$ да; б) $b < \frac{4}{15}$ да; в) $b < -6$ да ва $b > 6$ да, г) $b < -2\sqrt{5}$ да ва $b > 2\sqrt{5}$ да. **132.** а) $v = 1{,}5$ да; б) $v = -5$ да ва $v = 5$ да; в) $v = -2\sqrt{2}$ да ва $v = 2\sqrt{2}$ да; г) $v = 6$ да. **133.** а) $-12 < t < 12$ да; б) $t < -\frac{1}{3}$ да; в) $t > 28\frac{1}{8}$ да; г) $-12 < t < 12$ да. **134.** а) 0; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; б) 0; в) 0; 1,5; 2; г) 0; $-0{,}2$; 0,5; д) 2; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; е) 0; 1; -4; 4; ж) 1; -1; з) 0; -1; 1; 3. **135.** а) 0; $1\frac{3}{7}$; б) 0; -12; 12. в) 0; 1; 4; г) $\frac{1}{3}$; д) 0; -3; 3; 2,5; е) 1,5. **138.** а) $(3; 7)$; б) x—4 дан бошқа истаган сон; в) $(-\infty; 2]$ ва $\left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. **139.** а) -1; 1; б) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; -4; 4; в) $\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$; $\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$; -3; 1; г) -1; 0; -2. **140.** а) -2; 2; -3; 3; б) -2; 0; в) -2 0,5; 1; $-2{,}5$. **141.** а) -1; 1; б) -4; 4; в) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) илдизи йўқ; е) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **142.** а) -3; 3; -4; 4; б) илдизи йўқ; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; -2; 2; е) илдизи йўқ. **143.** а) $(-3; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(3; 0)$; б) $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$; в) кесишиш нуқталари йўқ; г) $(0; 0)$. **144.** а) Илдизи йўқ; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; -2; 2. **145.** а) -1; 1; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) 1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **147.** а) $p < -\sqrt{15}$ да ва $p > \sqrt{15}$ да; б) $p > \frac{2}{3}$ да. **148.** а) $[-0{,}24; 0]$; б) $(-\infty; -13)$ ва $(13; +\infty)$; в) $(-2; 12)$; г) $(-\infty; -1)$ ва $\left(2\frac{7}{15}; +\infty\right)$. **159.** а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) $-\sqrt{2}$;

$\sqrt{2}$; в) илдизи йўқ; г) -1; 1; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. **160.** а) 7; б) $-1\frac{1}{4}$; -4; 4; в) -4; $-\sqrt{15}$; $\sqrt{15}$; г) 8. **161.** а) $x \in (2; 4)$ да; б) $x \in (-3; 7,5)$ да. **162.** 90 км/соат, 80 км/соат. **173.** а) (5; 2); б) $\left(-\frac{3}{4}; -4\frac{1}{4}\right)$. **174.** а) (9; $-7,5$); б) (-43; -171). **175.** 16 км/соат, 18 км/соат. **176.** а) (3; 1), (5; 3); б) (-7; -3), $\left(3; \frac{1}{3}\right)$; в) (10; 1,8); г) ($-1,5$; -6), (2; 1); д) (6; 8), $\left(-5\frac{1}{13}; -8\frac{8}{13}\right)$; е) (6; 4), ($-6$; -4). **177.** а) (-3; -1), (5,5; 0,7); б) (-6; -9), (3; 4,5); в) (0; 2,5), (-2; 1,5); г) (3; -5), (5,5; 5); д) (1,5; $-2,5$), (2,5; $-1,5$); е) (-3; -1), $\left(1\frac{10}{11}; 1\frac{5}{11}\right)$. **178.** а) $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $u_1 = -3,5$, $v_1 = 2,5$; $u_2 = 3,5$, $v_2 = -2,5$. **179.** а) $x_1 = -5$, $y_1 = 4$; $x_2 = -2\frac{1}{3}$, $y_2 = 7\frac{1}{5}$; б) $p_1 = 6$, $t_1 = 2$; $p_2 = -5$, $t_2 = -1\frac{2}{3}$. **180.** (-2; 0), (4; 6). **181.** а) (5; 0), (0; -5); б) (1; 2), $\left(-1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}\right)$. **182.** а) ($-3$; -2), (3, 1); б) (3; -5), (5; -8). **183.** а) $x_1 = -2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = -1$; б) $u_1 = -2$, $v_1 = 3$; $u_2 = -3$, $v_2 = 3,5$. **184.** а) (6; 4), (4; 6); б) (10; 4), (-4; -10); в) $\left(1\frac{1}{4}; 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$; г) $\left(-2\frac{1}{2}; -2\right)$, (6; 15). **185.** $\left(2\frac{2}{3}; 1\frac{7}{9}\right)$, (6; 4). **186.** ($-2$, 0), (1, 8; 11,4). **187.** (3; -1). **189.** а) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$; $(\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; б) (-5; -4); (5; 4). **190.** а) (-4; -3), (-4; 3), (4; -3), (4; 3); б) (-10; -8), (-10; 8), (10; -8); (10; 8). **191.** а) (-3; -3), (3; 3); б) (-6; -5), (6; 5); в) (-6; -5), (-6; 5), (6; -5), (6; 5); г) (-4; -1), (-4; 1), (4; -1), (4; 1). **192.** а) (-3; -3), (4; 0,5); б) $\left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{3}\right)$, (1; -2); в) (0; -5), (1; -4); г) $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **193.** а) ($-7$; -9), (8; 6); б) $\left(-\frac{2}{3}; 18\right)$, (5; 1). **194.** а) (0; 6); б) (-4, 0). **196.** а) (-2; -4); б) (0,3; $-0,6$); в) $\left(1\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; г) $\left(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{6}\right)$. **197.** а) $\left(3\frac{1}{13}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **198.** а) $x \in (-14; 12)$ да; б) $x \in \left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{3}\right)$ да. **199.** 8 ва 12. **200.** 18 ва 12 ёки -12 ва -18. **201.** 21 см, 20 см. **202.** 24 см, 10 см. **203.** 60 м, 40 м. **204.** 210 см^2. **205.** 4,8 км/соат, 3,6 км/соат. **206.** 0,16 м/с, 0,12 м/с. **207.** 6 см, 5 см. **208.** 8 см, 6 см. **209.** 5 см, 12 см. **210.** 10 соат, 6 соат. **211.** 60 соат, 84 соат, **212.** 8 соат, 12 соат. **213.** 1 кг, 1,2 кг. **214.** 4 км/соат, 5 км/соат. **215.** 75 км/соат. 60 км/соат. **216.** 12 км/соат, 16 км/соат. **217.** а) ($-1,5$; 0,5); б) (1,2; $-1,6$), ($-0,7$; 4,1). **218.** а) (1; 1). (4; 7); б) (1,5; 4). **219.** а) (6; 8), (8; 6); б) умумий нуқталари йўқ. **220.** а) (0; 6); б) $(-\infty; -8]$ ва $[0; +\infty)$; в) $[-2; 2]$; г) $(-\infty, -\sqrt{6})$ ва $(\sqrt{6}; +\infty)$. **221.** а) 0; -1; 1; б) 0; -2; 2; в) 0; -8; 8; г) 0; $-2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$. **222.** а) 0; -5; 5; б) 0; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. **123.** а) 1; 2; б) -1; $-\frac{1}{2}$; 1; в) -2; 0,8; 5; г) -1; $\frac{1}{6}$; 6. **224.** а) $-3 \pm \sqrt{6}$;

$-3\pm\sqrt{17}$; б) -2; 4; $1+\sqrt{5}$; $1-\sqrt{5}$; в) илдизи йўқ; г) -4; 0. **225.** а) -3; 5; $\frac{1+\sqrt{73}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{73}}{4}$; б) 1; 4; $\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$. **226.** а) $-1-\sqrt{2}$; $-1+\sqrt{2}$; б) -4; 5; в) -4, 5; 1, $\frac{-7+\sqrt{65}}{4}$; $\frac{-7-\sqrt{65}}{4}$. **227.** а) $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; б) 2; -2; в) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$. **229.** а) $c>36$ да; б) $c>-20$ да. **230.** а) $0<k<42.25$ да; б) $k=42.25$ да ва $k<0$ да. **239.** $|r|<3\sqrt{2}$ да. **240.** $|c|\leqslant 10\sqrt{2}$ да. **241.** а) $(5;-2)$, $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$; б) $(0;-1)$, $(3;5)$; в) $(6;-1)$, $(3;5)$; г) $(6;2)$, $(11;7)$; д) $(4;1)$; е) $\left(-1\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$, $(-5;-3)$. **242.** а) $(4;0)$, $(0;-4)$; б) $(2;3)$, $(-2;-1)$; в) $(0;-5)$, $(5{,}5, 6)$; г) $(5;-4)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. 243. а) $(-6;2)$, $(6;-2)$, $(-2;6)$, $(2;-6)$; б) $(-4;-6)$, $(4;6)$, $(6,4)$, $(-6;-4)$. 244. а) $(-3;-4)$; б) ечими йўқ. **245.** а) $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $(1;1)$; б) $(3;4)$, $(3;-4)$, $(0;5)$; в) $(7\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(7\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2};-\sqrt{2})$; г) $(\sqrt{51};-1)$, $(-\sqrt{51};-1)$. **246.** а) $(1{,}5;-2)$, $(10;15)$; б) $(70;-28)$, $(4;5)$; в) $(6;8)$, $(8,6)$; г) $\left(\frac{4}{5};-1\frac{1}{5}\right)$, $(6;4)$. **248.** Эга эмас. **249.** а) $(-4, -3)$, $(-4, 2)$; $(3;-3)$; $(3;2)$; б) $(3-3\sqrt{2};3+3\sqrt{2})$, $(3+3\sqrt{2};3-3\sqrt{2})$, $(2;4)$, $(4;2)$; в) $(2;3)$, $(3;2)$; г) $(-3;-2)$, $(-1;-4)$, $(4;5)$, $(6;3)$. **250.** $a=2$, $b=-5$, $c=19$ ёки $a=-\frac{5}{4}$, $b=8$, $c=-20$. **251.** $c=4$, $q=-6$, $n=-8$ ёки $c=-4$, $q=6$, $n=20$. **252.** 18 ва 12. **253.** 60 ва 20 ёки 25 ва 37,5. **254.** 10 ва 0 ёки 26 ва 24. **255.** 36. **256.** $\frac{8}{12}$. **257.** $\frac{3}{5}$. **258.** 30 м². **259.** 20 мин, 30 мин. **260.** 90 соат ва 72 соат ёки 104 соат ва 65 соат. **261.** 4 км/соат, 5 км/ соат, 22 км. **262.** 30 км/соат, 45 км/соат. **263.** 64 км/соат, 56 км/соат. **264.** 96 км/соат, 64 км/соат. **265.** 40 км/соат, 50 км/соат.

III боб

273. д) 154; е) 12. **274.** б) 0; в) 10. **275.** а) 10; б) 25; в) 34. **276.** а) 23; б) 100. **278.** в) $\frac{16}{27}$; $-\frac{8}{9}$; $\frac{4}{3}$; -2; 3; г) 0; 4; 12; 28; 60; е) 3; $\frac{1}{3}$; 3; $\frac{1}{3}$; 3. **279.** а) 10; 20; 30; 40; 50; 60; $y_n=10\,n$; б) 10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; 10^6; $y_n=10^n$. **280.** а) Мавжуд; б) мавжуд эмас. **281.** а) $0{,}5\sqrt{6}$; $-0{,}5\sqrt{6}$; б) $1.5\sqrt{2}$; $-1{,}5\sqrt{2}$. **282.** б) $\frac{3}{4}a^{-4}$; в) $a^{-2}b^2$; г) $3a^3b^{-8}$. **283.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{243}$; в) $\frac{1}{81}$; г) 27. **285.** б) $d=7{,}5$, $c_4=-4$; в) $d=3{,}5$, $c_1=12{,}5$. **287.** в) 11,2; г) 10. **288.** а) 4; б) 3. **292.** 28 м. **293.** 60 км/соат. **294.** а) 23; б) 25. **295.** а) 10; б) 0,6. **296.** а) 1,5; б) 0,8. **299.** а) $c_1=21$, $d=1{,}5$; б) $c_1=38$, $d=-2$. **300.** а) $x_1=120$, $d=-1$; б) $x_1=-2{,}5$, $d=0{,}5$. **302.** а) Ҳа, б) Йўқ; в) Йўқ; г) Ҳа. **303.** а) Йўқ; б) ҳа. **304.** а) Дастлабки ўттизта ҳади учун; б) 31- ҳадидан бошлаб ҳамма ҳадлари учун;

в) дастлабки ўн учта хади учун; г) 64- хадидан бошлаб ҳамма хадлари учун. **305.** а) $-0,1$; б) 0,1. **309.** а) Мавжуд; б) мавжуд эмас. **310.** а) (8; 5), (-16; -11); б) $\left(5\frac{1}{3}; 3\right)$. **311.** а) 0; -8; 4; б) 10. **312.** а) 5; б) 1 000 000; в) $\frac{1}{32}$; г) 3. **315.** а) 63; б) 86,4, **316.** б) $S_{50} = 2700$, $S_{100} = 10\,400$; $S_n = (n+4)\,n$. **317.** 2540. **318.** а) $n\,(n+1)$; б) n^2. **319.** а) 11 325; б) 7070; в) 4905. **320.** а) 11 025; б) 494. 550. **321.** а) 5625; в) 11 400; г) 60 300; д) 810. **322.** а) 10 100; б) 18648; в) 1197; г) 7500; д) 1188. **323.** 2387. **324.** 2070. **325.** 55 **326.** 199,5. **327.** 122 5 м. **328.** а) 63,7 м; б) 240,1 м. **330.** $a_1 = 0,8$, $d=1,2$. **331.** а) Йўқ; б) ҳа. **332.** а) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$, $\left(1; \frac{2}{3}\right)$, $\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$; б) (2; 5), (2; -5), (-2; 5), (-2; -5). **336**. а) $q = \sqrt{2}$, $c_4 = 4\sqrt{2}$; а) $q = 3\sqrt{3}$, $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$. **339.** б) -4; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; г) 3. **340.** в) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; г) $\frac{243}{25}$. **343.** а) $b_n = -3^{5-n}$; б) $b_n = -2^n$; в) $b_n = 3\cdot(-2)^{n-1}$; г) $b_n = 5^{n+1}$. **344.** а) $b_n = 4\cdot(-3)^{n-1}$; б) $b_n = 2\cdot 3^{3-n}$. **347.** б) -3. **348.** а) 3 ёки -3; б) 0,6 ёки $-0{,}6$. **349.** а) 1000; б) $\frac{1}{3}$ ёки $-\frac{1}{3}$. **350.** а) $\frac{1}{25}$ ёки $-\frac{1}{25}$; б) -162; в) $-0{,}001$ ёки 0,001; г) $\frac{5}{6}$ ёки $-\frac{5}{6}$. **353.** $3{,}5\cdot 10^1$ м^3. **355.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см. **356.** 0,375 см. **357.** 111. **359.** а) (5; 0), (-5; 10); б) (-10; -20), (2; 4). **361.** в) $147\frac{7}{9}$; г) -21. **362.** а) $-39\,364$; б) 171. **363.** а) $S_n = 2\,(4^n - 1)$; г) $S_n = \frac{5^n - 1}{4}$. **366.** а) 205, 9; б) $25\frac{34}{81}$. **367.** а) $134\frac{4}{9}$; б) $-274{,}5$. **368.** 1094. **369** 2186. **371.** 4320. **374.** б) 1,6; в) 1; г) $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$; д) $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$; е) $\frac{15}{\sqrt{5}-1}$. **375.** а) $1\frac{1}{9}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $4\frac{4}{5}$; г) 2. **377.** $20\,\pi$ см ва $\frac{100\,\pi}{3}$ см^2. **378.** $32\,\pi$ см^2. **379.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{4}{11}$; г) $\frac{9}{11}$; д) $\frac{7}{30}$; е) $\frac{357}{1100}$. **380.** а) $\frac{5}{9}$; б) $1\frac{8}{11}$; в) $\frac{7}{15}$; г) $\frac{37}{3300}$. **382.** а) 1,25; б) 63. **391.** а) $a_1 = -34$, $a_2 = -26{,}5$, $a_5 = -4$; б) $a_1 = -10$, $a_3 = -5$, $a_5 = 0$, $a_6 = 2{,}5$. **398.** а) $20 - 2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3} - 7$. **399.** а) 15; б) 15. **400.** а) Бўлади; б) бўлади. **401.** а) $-\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{9}$. **404.** а) $-0{,}1$; б) 0. **405.** а) 7.5; б) $25\sqrt{2}$. **406.** а) 5000; б) -780. **407.** 110 см. **408.** 203, 5 см. **409.** а) $n = 32$, $a_{32} = 43$; б) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_{37} = 11\frac{2}{3}$; в) $a_1 = 4{,}5$, $n = 10$. **410.** $a_1 = 4\frac{17}{22}$, $d = \frac{2}{11}$. **411.** а) 16 000; а) 6720. **412.** а) 21; б) 24. **413.** в) -50; г) -100. **414.** а) $x^{\frac{n-n^2}{2}}$; б) x^{-206}. **415.** а) 162. **416.** а) -744. **417.** а) 1605; б) 1210. **418.** а) 1600. **423.** в) $b_2 = -\frac{1}{4}$, $b_4 = -1$; $b_5 = 2$; г) $b_2 = 3\sqrt{2}$, $b_3 = 6\sqrt{3}$, $b_5 = 36\sqrt{3}$. **430.** а) $\frac{1}{18}$; б) $12\sqrt{6}$. **432.** а) 5; б) 4. **437.** а) $b_1 = 128$, $n = 7$; б) $b_1 = 7$, $n=5$;

в) $b_1 = 3$, $b_8 = 384$; г) $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$. **441.** 70. **443.** а) $1+\sqrt{2}$; б) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **444.** а) 2; б) $2(2-\sqrt{3})$. **445.** а) 1,5; б) $11\frac{1}{4}$. **446.** 6 ёки 12. **447.** а) $2\frac{7}{660}$; в) $\frac{1}{900}$. **448.** а) $2\pi R(2+\sqrt{2})$; б) $2\pi R^2$; в) $8R(1+\sqrt{2})$; г) $4R^2$. **449.** а) $6a$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a$; г) $\frac{\pi a^2}{9}$.

IV боб

459. 370. **460.** а) $\frac{3x-5}{3x-15}$; б) $\frac{y-6}{7y+42}$. **469.** а) 0,19; б) 118,81; в) $-454,35$. **479.** $1093+364\sqrt{3}$. **481.** а) $\frac{3y-1}{y^2-1}$; б) $\frac{24}{25-4x^2}$. **484.** д) 1,5; е) 1,5; ж) $-0,3$; з) 0,5. **485.** б) 11; ж) $1\frac{2}{3}$; з) 1,5. **496.** д) 0; е) 10; ж) 9; з) 4. **498.** д) 0; е) -6. **499.** в) 12; г) -64; ж) -5; з) 4. **500.** в) 48; г) -54; ж) 2; з) -3. **503.** г) -2; 2; д) $\sqrt[3]{2}$; е) $-\sqrt[8]{17}$; $\sqrt[8]{17}$. **504.** д) -3; е) $-2,5$; 2,5. **506.** а) 1; б) -2. **507.** $\frac{2a-12}{3a+15}$. **508.** д) 1,5; е) $\frac{2}{3}$; ж) 0,4; з) $-1,5$. **509.** д) $\frac{2}{9}$; е) $1\frac{95}{121}$. **510.** а) 15; б) 0,5; г) 0,6. **511.** а) 6; б) 6; в) 5; г) 4. **512.** а) 15; б) 6; в) 6. **513.** в) 15; г) 14; д) 4; е) 3. **514.** а) 3; б) 0,5; в) 2; г) 5. **517.** в) $2\sqrt[3]{3c}$; г) $a\sqrt[5]{7a}$; д) $3b\sqrt{b}$; е) $c\sqrt[6]{10c^2}$. **518.** б) $\sqrt[3]{375}$; в) $\sqrt[5]{4}$; г) $\sqrt[4]{5a^4}$; д) $-\sqrt[6]{2b^6}$; е) $\sqrt[10]{3c^{12}}$. **519.** а) $2\sqrt[4]{c}$; б) $3\sqrt[3]{y}$; в) $5x\sqrt{2x}$; г) $-a\sqrt[4]{5a^2}$. **520.** б) $\sqrt[3]{40}$; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\sqrt[3]{2a^3}$. **521.** а) $\frac{\sqrt{2}}{5}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$; в) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$; г) $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$; д) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; е) $-\frac{\sqrt[4]{5}}{b}$; ж) $\frac{a^3}{\sqrt[3]{6}}$; з) $\frac{\sqrt[4]{7}}{b^3}$. **522.** б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[4]{27}$; г) $\sqrt[3]{7}$; д) $3\sqrt[4]{6}$. **523.** в) $3\sqrt[3]{25}$; г) $0,5\sqrt[4]{216}$; д) $5\sqrt[4]{2}$. **524.** в) $\sqrt[10]{2}$; г) $\sqrt[9]{b^4}$; д) $\sqrt[6]{c^5}$; е) $\sqrt[3]{x}$; ж) $\sqrt[3]{49}$; з) $\sqrt[3]{5}$; и) $\sqrt[3]{6}$; к) $\sqrt[3]{16}$; л) $\sqrt[4]{a}$; м) $\sqrt[5]{b^2}$. **525.** в) $\sqrt[4]{a^3}$; г) $\sqrt{5}$; д) $\sqrt{5}$; е) $\sqrt{5}$. **530.** а) 66; б) 20. **531.** а) 3; б) 1. **532.** а) $\frac{3a+b}{ab}$; б) 1. **533.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$; в) $6\sqrt{3}$; г) $2\sqrt[6]{162}$. **534.** а) $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; б) 4; в) $\sqrt[6]{2}$. **536.** г) $3\sqrt{x}$; $\sqrt{3x}$; $\frac{1}{5}\sqrt[5]{y}$; $-\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}$; д) $\sqrt[3]{(ab)^2}$; е) $\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[3]{(a+b)^2}$; $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$. **538.** в) $5\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{2b}$; $-\sqrt[4]{c^3}$; г) $x\sqrt{y}$; $\sqrt[5]{(x+y)^3}$; $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. **539.** ж) $3^{\frac{1}{2}}$; и) $(7+a)^{\frac{1}{4}}$; к) $(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$. **541.** ж) 16; з) 8; и) $\frac{4}{9}$; к) 100 000. **542.** д) 0,064; е) $1\frac{61}{64}$; ж) 100; з) 0,0016. **544.** б) $y \geqslant 1$; д) $c > 5$. **545.** а) $0 < x^{\frac{1}{2}} < 1$; $0 < x^{\frac{1}{3}} < 1$; $0 < x^{\frac{1}{6}} < 1$; б) $1 < x^{\frac{1}{2}} < 8$; $1 < x^{\frac{1}{3}} < 4$; $1 < x^{\frac{1}{6}} < 2$. **547.** в) $5^{\frac{1}{2}} > 5^{\frac{1}{3}}$; г) $7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{6}}$. **548.** 7,6 см. **549.** 18,4 см. **553.** в) 1;

г) c. 554. г) a; д) 1; е) $m^{0,2}$. 555. а) 1; б) 9. 556. а) 4; б) $\frac{1}{49}$; в) 2, г) 25 557. а) 6; б) $\frac{1}{6}$; в) 70; г) 15; д) 1; е) 0,12. 558. а) 6; б) 20; в) $\frac{7}{12}$; г) 1,2. 560. б) $\frac{1}{cy}$; в) a; г) q. 565. а) 10 a; б) 100a; в) 0,1 a; г) 0,01 a. 566. а) $a = V^{\frac{1}{3}}$; б) $S = V^{\frac{2}{3}}$; в) $P = 6V^{\frac{2}{3}}$. 567. а) $x = y^{\frac{3}{2}}$; б) $x = y^{\frac{7}{4}}$; в) $x = y^{-\frac{2}{3}}$; г) $x = y^{-\frac{4}{3}}$; д) $x = \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{5}{4}}$; е) $(6y)^{-\frac{3}{2}}$. 558. а) $x^{\frac{1}{6}}$; б) $a^{\frac{11}{24}}$; в) $y^{-\frac{1}{21}}$; г) $b^{\frac{5}{6}}$; д) $y^{\frac{1}{6}}$; е) $x^{\frac{1}{4}}$. 571. в) 9; г) $\frac{1}{32}$; д) 1; е) илдизи йўқ. 572. а) $\left(-\frac{2}{11}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{4}{97}\right)$. 573. а) $a_1 = -3{,}8$, $d = 0{,}6$; б) $a_1 = 2$, $d = 3{,}5$. 574. 24 кун ва 12 кун. 577. а) $1+c$; б) $-2\sqrt[4]{bc}$; в) $4\sqrt[3]{ab}$; г) $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}$; д) $y^{\frac{4}{3}}+9y^{\frac{2}{5}}$; е) $x-1$. 578. а) $x+y$; б) $2\sqrt[4]{mn}$; в) a^3+25a; г) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$. 579. а) $x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-2)$; б) $y^{\frac{1}{3}}\times$ $\times(y^{\frac{2}{3}}+3)$; в) $a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-5)$; г) $a^{\frac{1}{6}}(a^{\frac{1}{6}}+1)$; д) $b^{\frac{1}{4}}(b^{\frac{1}{2}}-2)$; е) $c^{\frac{2}{3}}(c+6)$; ж) $a^{\frac{1}{3}}\times$ $\times(b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}})$; з) $2^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{1}{2}}-1)$. 583. в) $(y^{\frac{1}{5}}-3)(y^{\frac{1}{5}}+3)$; г) $(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+$ $+b^{\frac{2}{3}})$; д) $(x^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}})$; е) $(10^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(10^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$. 584. в) $(a^{\frac{1}{16}}-b^{\frac{1}{16}})\times$ $\times(a^{\frac{1}{16}}+b^{\frac{1}{16}})$; г) $(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})$. 587. а) $(x^{\frac{1}{6}})^3+(y^{\frac{1}{6}})^3 = (x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})\times$ $\times(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}})$. 588. в) $(a^{\frac{1}{9}})^3-(b^{\frac{1}{9}})^3 = (a^{\frac{1}{9}}-b^{\frac{1}{9}})(a^{\frac{2}{9}}+a^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{9}}+b^{\frac{2}{9}})$. 589. д) $b^{\frac{1}{6}}$; з) $\frac{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}$. 590. е) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. 591. а) 1; б) 5; в) 13; г) 9. 592. а) $\frac{b+a}{b-a}$; б) $\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}-6}$; в) $(1-y)^2$; г) $\frac{2q^{\frac{1}{2}}}{p-q}$. 593. а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) 0; в) $\frac{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}-p^{\frac{1}{2}}}$.

594. а) $x > 39$; б) ечими йўқ. 595. а) 728; б) 3240. 597. 24 км. 600. г) Жуфт; д) тоқ. 601. а) Мумкин; б) йўқ; в) мумкин; г) йўқ. 610. а) Мавжуд; $k = 0$; б) мавжуд; $b = 0$. 611. $b = 0$ да. 620. в) 3; г) 3,5; д) $-0{,}5$; е) $\frac{1}{32}$. 624. а) 2; б) 2 ёки -2; в) -3; г) $\sqrt[9]{3}$. 625. а) -1; 1; б) $-\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[6]{2}$; $-\sqrt[6]{7}$; $\sqrt[6]{7}$; в) $-\sqrt[3]{3}$; -2; г) $\sqrt[7]{2}$; $\sqrt[7]{3}$. 626. а) 125; $(125; +\infty)$; $(-\infty; 125)$; б) 16; $(16; +\infty)$; $[0; 16)$. 635. в) $\frac{45}{49}$; г) 1,35. 637. а) $\sqrt{5a}$; б) $2\sqrt[3]{x}$; в) $\sqrt[4]{3b}$; г) $\sqrt[5]{2c}$. 638. в) $\sqrt[k]{3}-$

$-\sqrt[2k]{3} > 0$; г) $\sqrt[k]{\frac{1}{2}} - \sqrt[2k]{\frac{1}{2}} < 0$. **641.** г) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$; д) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$. **643.** а) 0; 64; б) 0,000001; в) илдизи йўқ; г) $\frac{1}{64}$; д) 16 ва 81; е) 6561. **646.** а) 18; б) $2-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; в) илдизи йўқ; г) 1; д) 5; е) илдизи йўқ. **649.** а) $x^{\frac{1}{2}}$; в) $b^{\frac{1}{2}}$; д) $\frac{3y^4}{2c^2}$. **651.** а) 5; б) 2. **653.** а) $xy=1$; б) $x=y^2$; в) $x^2y^3=72$. **654.** а) xy; б) ab; в) 1; г) $p+q$. **658.** а) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\ (x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+1)$; б) $(u^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}})\ (u^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}-1)$; в) $(a^{\frac{1}{3}}+1)\ (a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)$; г) $(b^{\frac{2}{3}}+1)\ (2b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}+2)$. **662.** а) $xy-x+y=2$; б) $x^2-y^2=2$. **663.** а) 1; б) 10; в) $\frac{2}{a-1}$; а) $\frac{x+3y}{x-y}$. **664.** а) 1; б) 1,4.

V боб

671. а) 2,5; б) 1,5; в) 0; г) $3\sqrt{3}$; д) 6; е) $3\sqrt{3}$. **672.** а) 1; б) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; в) 7; г) $\sqrt{3}$. **679.** а) -2; б) 0; в) 1. **681.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) -1. **682.** а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1. **683.** а) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$. **684.** а) $12x$; б) $a-b$. **695.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 0. **699.** $10^{0,5}$, $10^{0,4}$, $10^{1,4}$. **700.** а) b; б) $-ab$. **711.** а) 3; б) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; г) $-5+\sqrt{2}$. **712.** а) $1\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$ в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3}{8}$. **713.** а) 11; б) 0; в) $-2\frac{3}{4}$; г) $-3\frac{1}{4}$. **715.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$. **716.** а) $\frac{4}{5}(a-3)$; б) $2(3-x)$. **717.** а) $(-\infty; 0)$ ва $(0,6+\infty)$; б) $\left[-\frac{2}{7}; 0\right]$. **718.** а) 0,8; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $-\frac{8}{15}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **719.** а) 0,8; б) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; г) $\frac{5}{12}$. **722.** а) $-\frac{9}{40}$; б) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **723.** а) $-1\frac{1}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **724.** а) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=1\frac{1}{3}$; б) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{7}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$; в) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$; г) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{5}$. **725.** а) $\cos\beta=-\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\beta=-4\frac{4}{9}$, $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{9}{40}$; б) $\sin\beta=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta=-1\frac{1}{3}$; в) $\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\beta=1$; г) $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$. **726.** а) $\cos\alpha\approx-0,78$, $\operatorname{tg}\alpha\approx-0,79$; $\operatorname{ctg}\alpha\approx-1,3$;

б) $\sin\alpha \approx -0{,}90$, $\cos\alpha \approx 0{,}43$, $\operatorname{ctg}\alpha \approx -0{,}48$; в) $\sin\alpha \approx -0{,}97$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 4{,}2$, $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}24$; г) $\sin\alpha \approx 0{,}41$, $\cos\alpha \approx 0{,}91$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}45$. **727.** а) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{7}{8}$ ёки $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{7}{8}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ ёки $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$. **729.** $-0{,}06$. **731.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$. **732.** а) $\sin^2\alpha$; б) 1; в) $\cos^2\alpha$; г) $\cos\alpha$; д) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; е) $-\operatorname{tg}^2\alpha$. **733.** а) $\cos^2\alpha$; б) $-\sin^2\alpha$; в) $\sin\alpha$; г) $\sin^2\alpha$; д) $-\cos^2\alpha$; е) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **734.** а) 0; б) $2\sin\beta$; в) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $\sin^2\alpha$; д) 2; е) $\frac{2}{\sin^2\alpha}$. **735.** а) $\frac{1}{\cos^2\beta}$; б) $\frac{1}{\sin^2 x}$; в) $-\sin^2\gamma$; г) $\operatorname{ctg}\beta$. **736.** а) $-\sin\alpha$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\cos^2\beta$; г) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **739.** а) 0; б) -1; в) $-\cos^2\alpha$; г) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **740.** а) $-2\cos\alpha$; б) $\cos x$; в) $-\cos^2\beta$; г) $-\operatorname{tg} x$. **741.** а) $\frac{2}{\cos x}$; б) $\frac{1}{\cos\alpha}$; в) $\sin^2\varphi$; г) 1. **742.** а) 2; б) 1; в) 4; г) 4. **743.** $-0{,}18$. **744.** 3,29. **749.** а) 0,51; б) 0,2. **750.** -16. **752.** 15 дм ва 20 дм. **753.** 16 см ва 63 см. **758.** а) $-\sin 0{,}2\pi$; б) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$; в) $-\cos 0{,}1\pi$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$. **759.** а) $-\operatorname{tg} 43°$; б) $-\sin 2°$; в) $-\sin 40°$; г) $\sin 10°$. **760.** а) $-0{,}6157$; б) 0,3584; в) $-0{,}2679$. **762.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) -1; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **763.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) -1; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **764.** а) $-\cos\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$. **765.** а) $\cos\alpha$; б) $-\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$. **769.** а) 0; б) $2\cos\alpha$. **770.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $-\cos\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **771.** а) 1; б) 1. **772.** а) 1; б) 1. **776.** 60 км/соат ва 90 км/соат. **777.** 70 км/соат. **778.** а) 3; б) 10. **781.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **782.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **783.** а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $\cos\alpha$; г) $-\sin\alpha$. **784.** а) $\frac{77}{85}$; б) $\frac{36}{85}$; в) $\frac{84}{85}$. **785.** 1. **786.** а) $-\frac{84}{85}$; б) $-\frac{36}{85}$; в) $\frac{77}{85}$; г) $\frac{13}{85}$. **787.** а) $\cos 55°$; в) $\sin 85°$. **788.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{2}$. **789.** а) 0,5; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-0{,}5$; г) 0. **790.** а) $\cos\varphi$; б) $\sin 2\gamma$; в) $\sin 2\alpha$; г) 0. **791.** а) $\cos\alpha$; б) $\cos\alpha$. **792.** а) $\sqrt{3}\cos\alpha$; б) $-\sin\alpha$. **795.** а) 1; б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. **796.** а) 1; б) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$. **797.** $-\frac{16}{65}$. **798.** $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$. **799.** $2\frac{3}{8}$. **800.** а) $2-\sqrt{3}$; б) $2+\sqrt{3}$. **802.** а) 1; б) $\frac{1}{7}$. **805.** $4xy$. **806.** а) $[-8; -1]$; б) $(-\infty; 0]$ ва $\left[3\frac{1}{4}; +\infty\right]$. **807.** 45 соатда ва 36 соатда. **808.** в) $\cos^2\beta$;

г) $\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$. **809.** б) $2\sin 50°$; г) $\cos\ 18°$. **810.** а) $\sin 2\varphi$; б) $\sin^2\varphi$; в) $\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$; г) $\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}$. **811.** а) $-\frac{120}{169}$; б) $\frac{119}{169}$; в) $-1\ \frac{1}{119}$. **812.** а) 0,96; б) 0,28; в) $3\frac{3}{7}$. **813.** а) 0,96; б) $-0{,}28$; в) $-3\ \frac{3}{7}$. **815.** $\sin\alpha=\frac{720}{1681}$, $\cos\alpha=\frac{1519}{1681}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{720}{1519}$. **816.** 0,96 ва $-0{,}28$. **817.** г) $\frac{1}{2}\sin\alpha$; д) $-2\sin\frac{\alpha}{2}$; е) $-2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **818.** г) $-0{,}5$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **819.** а) $-0{,}5$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$. **822.** а) $-\sin 2\alpha$; б) 1; в) 0,5; г) $4\sin\beta$. **823.** а) $\sin\alpha$; б) $\mathrm{tg}\,2\alpha$; в) $\mathrm{tg}\,2\alpha$; г) $4\cos\alpha$. **824.** в) $\cos\alpha$; г) $\mathrm{tg}\,\alpha$; д) $\sin 2\alpha$; е) $\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; ж) $\mathrm{tg}\,\alpha$; з) $\cos^2\alpha$. **825.** а) $\mathrm{tg}\,\beta$; б) $\sin\beta$; в) $\sin 2\beta$; г) $2\cos 2\beta$; д) $\sin\beta$; е) $\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$. **827.** а) $\mathrm{ctg}^2\varphi$; б) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$; в) -1; г) 1. **828.** а) Мавжуд; б) мавжуд эмас. **830.** а) $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; б) $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. **831.** а) $(-\infty;\ 1]$ ва $[4;\ +\infty)$. **832.** 66 соатда ва 55 соатда. **834.** з) $\sqrt{3}\ \sin\alpha$. **835.** г) $2\sin\frac{\pi}{36}\cdot\cos\frac{5\pi}{36}$; д) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; е) $-\sqrt{2}\ \sin\alpha$. **836.** в) $\sqrt{3}\cos 20°$; г) $-\sqrt{2}\ \sin 5°$. **837.** а) $2\sin 25°\cdot\cos 47°$; б) $\sqrt{2}\cos 9°$. **839.** г) $\dfrac{2\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}$; д) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{2\pi}{5}}$; е) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos^2\frac{3\pi}{8}}$. **840.** а) $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$; б) $-\sin(x+y)\times$ $\times\sin(x-y)$. **841.** а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)$. **843.** а) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **844.** а) $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; в) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $-4\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **847.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **848.** а) $4\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}$; б) $-4\cos 5y\cdot\sin 2y\cdot\sin y$. **849.** $4\cos\frac{5x}{2}\times$ $\times\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}$. **853.** а) 1; б) -1. **854.** а) $y=-4{,}5x$; б) $y=1{,}6x+4$. **855.** а) 1; б) -1. **856.** а) 0; б) 0; в) 2. **858.** а) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$. **859.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{12\sqrt{3}+1}{13}$; в) 1. **866.** а) -4; б) 1. **867.** а) 0; б) -1; в) 1; г) -1; д) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; е) 1. **869.** $\frac{4\pi}{9}$ ва $\frac{4\pi}{9}$. **870.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **871.** а) 1; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{5\sqrt{3}-2}{2}$; г) 1. **873.**

а) Ҳа; б) ҳа; в) йўқ; г) ҳа; д) ҳа; е) йўқ. 874. Ҳа. 875. Ҳа. 876. а) $-\operatorname{ctg}^6\alpha$ б) $\cos^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^2\gamma$; г) 1. 879. а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; в) 1; г) 1. 883. а) $\frac{2}{\cos\alpha}$ ёки $-\frac{2}{\cos\alpha}$; б) 4 ёки -4. 884. а) $\cos^4\alpha$; б) $\sin^4\alpha$. 885. 2. 886. $1\frac{2}{7}$. 887. а) $\frac{a^2-1}{2}$; б) $\frac{a(3-a^2)}{2}$. 888. а) m^2-2; б) $m(m^2-3)$. 889. 3 ёки -3. 892. а) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; б) 0. 895. $-0{,}7$. 896. $-k$; $-\frac{1}{k}$. 897. $\frac{4}{5}$. 900. а) $1\frac{2}{3}$; б) $-0{,}6$; в) $\sqrt{3}$; г) $\frac{3}{5}$. 901. а) 150°; б) 210°; в) 135°; г) 330°. 904. а) $\cos\alpha-\sin\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$. 905. а) 4; б) 4. 907. а) 0; б) 0. 909. $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. 910. а) $\frac{7\sqrt{2}}{34}$; б) $\frac{23\sqrt{2}}{34}$. 911. а) 0; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 0. 912. а) $\frac{1}{2}$; б) $\cos\beta$; в) $-\sin 2\alpha$; г) $-\sin\alpha$. 913. а) 0,98; б) $0{,}43-0{,}24\sqrt{3}$; в) 0,64. 914. а) 1,5; б) $\sin\alpha-\sin\beta$; в) 1,5; г) $\cos\alpha+$ $+\sin\beta$. 915. $\frac{39}{43}$, $\frac{11}{57}$. 916. $-1\frac{1}{3}$. 917. $\frac{7}{23}$. 919. а) $\frac{a-1}{a+1}$; б) $\frac{a+1}{a-1}$. 920. $\frac{1}{3}$. 921. а) -1; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) 1. 922. а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $1+\cos\alpha$; г) $1+\cos\alpha$. 925. а) 1; б) -7. 926. $\frac{a-b}{ab+1}$. 931. а) $-0{,}6$; б) $-0{,}8$; в) 0,75; г) $1\frac{1}{3}$. 932. $7-4\sqrt{3}$. 934. а) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$; б) $8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$. 935. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-0{,}5$; в) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 936. $a^2+b^2=2$. 938. $\frac{7}{8}$. 940. а) $\operatorname{tg}2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\sin 2\alpha$; г) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; д) $\cos 2\alpha$; е) $\operatorname{ctg}\alpha$. 941. а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$; б) $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$; в) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. 942. а) $4\cos 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\alpha}{2}\right)$; б) $4\sin 2\alpha\times$ $\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 943. а) $4\sin 25°\cdot\cos 33°\cdot\cos 27°$; б) $4\sin 20°\times$ $\times\cos 12°\cdot\cos 8°$. 945. а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$. 948. а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. 950. а) $\operatorname{ctg}2\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}3\alpha$.

VI боб

956. а) 38,73; б) 31,43; в) 20,77; г) 13,47. 957. а) 5,66; б) 17,1. 958. 0,92 кг 959. 21,20 дм. 960. 1,09 т. 961. 13,78 Ом. 962. 527 м². 963. $1{,}10\cdot10^{21}$ т. 964. а) $1{,}7\cdot10^5$; б) $7{,}3\cdot10^3$. 965. а) $1{,}76\cdot10^5$; б) $3{,}59\cdot10^3$. 966. $[0;+\infty)$, $(-\infty;0]$. 967. а) $12x$; б) $a-b$. 971. а) $7{,}5\cdot10^7$; б) $8{,}0\cdot10^3$; в) $8{,}26\cdot10^2$; г) $1{,}4\cdot10^{-4}$. 972. а) $1{,}6\cdot10^2$; б) $6{,}2\cdot10^2$. 973. а) $ab\approx2{,}9\cdot10^{11}$, $\frac{a}{b}\approx3{,}0\cdot10^{-2}$; б) $ab\approx1{,}53\cdot10^3$, $\frac{a}{b}\approx3{,}0\cdot10$. 974. 21,9 м². 975. 4,93 га. 976. 1,6 км. 977. а) 25,2 м; б) 3,4 м. 978. 9,2 м. 979. 37 см³. 980. 48,2 см. $1{,}3\cdot10^2$ см². 981. а) $1{,}04\cdot10^3$. 982. а) 6,3; б) 2,84. 983. а) 220 см²; б) 1980 м². 984. 7,7 см². 985. 70 т. 987. $(-1;0)$, $(1;0)$,

0; — 1). 988. $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$. 989. а) 16,012; б) 37,42515; в) 65.51235; г) 7,3108808.

990. а) $3{,}3\cdot10^2$; б) 7,0. **991.** 3,7 га. **992.** 8,2 г/см^3. **993.** а) 12412,5; 5) 9,0724138; в) 87,948; г) 0,2486659; **994.** а) 0,722; б) 1,90. **995.** а) 26,40; б) 0,17; в) 12,46. **996.** а) 600,9; б) 1,3; в) 91,5; г) 0,1. **1003.** а) 3,5355339; б) 30,217925; в) 100,21946; г) — 1,4887098. **1004.** а) — 10,5; б) — 0,55. **1005.** а) $\pm$ 2,995; б) $\pm$ 0,770. **1006.** $3{,}1\cdot10^3$ см^2. **1009.** а) 9,0 см^2; б) $1{,}16\cdot10^3$ м^2. **1010.** а) $\dfrac{3a-b}{3a}$; б) $\dfrac{3x+2}{x+2}$; в) $\dfrac{x}{x-2}$. **1011.** а) 14; б) $1\dfrac{1}{9}$. **1012.** 9. **1026.** а) $9{,}97\cdot10^4$; б) $4{,}89\cdot10^6$; в) $3{,}751\cdot10^{-2}$; г) $8{,}767\cdot10^{-1}$. **1027.** а) $7{,}56\cdot10^5$; б) $2{,}4\cdot10^4$; в) $6{,}5\cdot10^{-2}$; г) $5{,}26\cdot10^{-4}$. **1029.** $6{,}050\cdot10^{21}$ т; $5{,}903\cdot10^{21}$ т. **1030.** $1{,}51\cdot10^4$ км. **1031.** $2{,}04\cdot10^3$мм^2. **1032.** а) 1,47; б) 123. **1033.** а) 3,87; б) 10,86.

VI—VIII синфлар курсларини такрорлаш учун машқлар

1037. а) $-14\dfrac{2}{3}$; б) 21; в) 7,05; г) $-\dfrac{5}{6}$; д) $-\dfrac{5}{6}$; е) $-3\dfrac{4}{7}$. **1038.** а) 16,2; б) — 147,6. **1039.** а) 1,4; б) 1,3; в) $1\dfrac{1}{4}$; г) $3\dfrac{5}{9}$. **1040.** а) — 4; б) $\dfrac{1}{12}$; в) 2; г) 0,025. **1043.** д) $1{,}5\cdot10^2$; е) 5,0. **1044.** а) $\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 98; г) 20. **1045.** а) — 2; б) 1. **1046.** а) $48\dfrac{10}{27}$; б) $-262\dfrac{5}{8}$. **1047.** а) — 72; б) $\dfrac{5}{16}$. **1048.** 25,7; 196,5. **1049.** 8; $15\dfrac{63}{64}$. **1051.** $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1\dfrac{1}{3}$. **1053.** а) 0; б) $-\dfrac{1}{27}$; в) 61,44; г) 7,95. **1057.** а) $(x-7)\ (x+6)$; б) $(y+3)\ (y+6)$; в) $(9x+1)^2$; г) $(4b-3)^2$; д) $(3x+1)\ (2x-1)$; е) $(3a+2)\ (a-5)$. **1058.** ж) $\dfrac{x}{x-2}$; з) $\dfrac{y+3}{7}$; и) $\dfrac{a-1}{a+3}$. **1059.** а) $-\dfrac{1}{x}$; б) $\dfrac{10}{9-y^2}$; в) $\dfrac{1}{a-2}$; г) $\dfrac{5}{4b^2-6b+9}$. **1060.** а) $\dfrac{4b^3-16b^2}{a}$; б) $\dfrac{3x}{2xy-4y^3}$; в) $\dfrac{p-5}{2p}$; г) $\dfrac{2n-3m}{m^2-2mn+4n^2}$. **1061.** а) $\dfrac{x-7}{6}$; б) $-\dfrac{y^3+4y^2}{2}$; в) $\dfrac{b}{4a}$; г) $65c-65$. **1062.** а) $\dfrac{4x-12}{5}$; б) $5xy$; в) $\dfrac{2-a}{2}$; г) $-\dfrac{2}{x}$; д) $\dfrac{1}{6}$; е) 2; ж) 1; з) $\dfrac{14a}{x+4}$. **1063.** а) $2x^2y^3$; б) $\dfrac{8a}{b^2}$; в) $\dfrac{4x^{16}}{9y^{18}}$; г) $\dfrac{a^2c^3}{100b^{10}}$. **1064.** б) $-3y\sqrt{2}$; в) $a\sqrt[3]{5a}$; д) $-3c\sqrt[4]{2c^2}$; ж) $a^2\sqrt[8]{3}$. **1065.** б) $-\sqrt{5y^2}$; в) $\sqrt[3]{2a^4}$; е) $-\sqrt[6]{7m^8}$. **1066.** а) $2\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{2a}-2$; в) $4\sqrt{xy}$; г) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$. **1067.** в) $\sqrt{a}-1$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{b}+1}$; д) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{y}}$; е) $\dfrac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{cd}+d}$. **1068.** а) $\dfrac{3\sqrt{x}}{7}$; б) $\dfrac{5\sqrt{ab}}{ab}$; в) $\dfrac{4\sqrt{c}+4}{c-1}$; г) $\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$. **1069.** а) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{5}$; б) $\dfrac{p^{\frac{1}{3}}-2q^{\frac{1}{3}}}{5}$; в) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}}$; г) $\dfrac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$. **1070.**

а) 1; б) 10. **1071.** в) $\frac{2}{m^{\frac{1}{2}}-2}$; г) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+1}$. **1072.** а) $\frac{c^{\frac{1}{3}}-1}{c^{\frac{1}{3}}+1}$; б) $\frac{y^{\frac{1}{3}}+1}{y^{\frac{1}{3}}}$. **1074.** а) $\cos^2\alpha$; б) 2; в) $\cos^2\alpha$. **1075.** $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$. **1076.** $\frac{1-6\sqrt{2}}{10}$. **1077.** $2\sqrt{2}-3$. **1078.** а) $\cos\alpha\cos\beta$; б) $\sin\beta\cdot\cos\alpha$; в) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; г) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$. **1080.** а) $-0{,}96$; б) 0,28; в) $-3\frac{3}{7}$. **1081.** а) 1; б) 1; в) $2\cos\alpha-1$; г) $-2\operatorname{ctg}\alpha$. **1082.** а) $2\sin 4\alpha\cos\alpha$; б) $2\sin 6\alpha\sin\alpha$; в) $-2\sin\alpha\cos 7\alpha$; г) $2\cos 3\alpha\cos 7\alpha$; д) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; е) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$. **1083.** а) $-4{,}5$; б) ихтиёрий сон; в) -1; г) илдизи йўқ. **1086.** б) $t<-0{,}8$ да; б) $t>\frac{1}{6}$ да; в) $t\in(-2;\ 2)$ да; г) $t\in(-4;\ 4)$ да. **1087.** а) $a\leqslant 4$ да; б) $a\leqslant\frac{1}{20}$ да; в) $a\leqslant-24$ да ва $a\geqslant 24$ да; г) $a\geqslant-2$ да. **1088.** а) 0; -3; б) $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; 7; г) $1\frac{5}{8}$; 3; д) $-18\frac{1}{7}$; -1; е) $-\frac{26}{35}$; 2. **1089.** 110 м. **1090.** 4 ва 5. **1091.** 25. **1092.** 14. **1093.** а) -1; в) 1; 2; г) -14; 1; д) -1; 3; е) -5; ж) $-1\frac{1}{3}$; з) -1; $\frac{1}{5}$. **1094.** 2,2 км. **1095.** 15 соат ва 10 соат. **1096.** 48 км/соат ва 40 км/соат. **1097.** 12 км/соат. **1098.** 13 км/соат. **1099.** $3\frac{3}{4}$ соат. **1100.** 10 км/соат ва 30 км/соат. **1101.** 12 км/соат ва 60 км/соат. **1102.** а) $\pm\frac{2}{3}$, ± 1; б) илдизи йўқ; в) ± 5; г) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1103.** а) $-2\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$; б) $\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$; $\pm\sqrt{3}$. **1104.** а) 0; ± 4; б) 0; ± 1; в) 0; г) 0; $2\frac{1}{2}$; д) -8; 0; 2; е) -3; 0; 2; ж) -1; ± 3; з) $\frac{1}{2}$. **1105.** а) 2; б) $-0{,}1$; в) 0,3; г) $\pm 2\sqrt{3}$; д) -1; е) $\pm\sqrt{2}$. **1108.** а) (4; -1); б) (2,45; 0,37); в) (15; 25); г) (0,32; $-0{,}86$). **1109.** а) (3; 9); б) $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)$. **1111.** а) 4; б) 3; в) 5. **1115.** 8 сўм, 1,6 сўм. **1116.** 172 ва 132. **1117.** 5 км/соат ва 4 км/соат. **1118.** $\frac{7}{23}$. **1119.** 60 км/соат ва 40 км/соат. **1121.** а) (-2; -4), (4; 8); б) (5; 3); в) (1; 4), (4; 1); г) (3; -1), (-3; 1); д) (0; 4), $\left(2\frac{3}{4};\ 13\frac{5}{8}\right)$; е) (1; 2), $\left(\frac{1}{8};\ -1\frac{1}{2}\right)$. **1122.** а) (1; 5), (5; 1); б) (3; -2), $\left(-2\frac{1}{3};\ 14\right)$; в) ($-3$; -5), (-5; -3), (3; 5), (5; 3); г) (-4; -2), (4; 2). **1124.** 9 см ва 40 см. **1125.** 11 см ва 8 см. **1126.** 15 кун, 30 кун. **1127.** 3 кун, 6 кун. **1128.** $n=36$. **1129.** $a_1=10$, $d=10$. **1130.** -2. **1132.** 7,2. **1133.**

в) 2^{-7}; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ёки $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\sqrt{2}$. **1134.** $\frac{2}{27}$. **1135.** $31\frac{1}{2}$. **1136.** 635. **1141.** а) $y > 4{,}5$; б) $x < -1\frac{2}{7}$; в) $x < -2{,}5$; г) $x < 2$; д) ечими йўқ; е) x — истаган сон; ж) $y < 2\frac{1}{3}$; з) $x < -22$. **1142.** а) $(-\infty; -1)$; б) x — истаган сон; в) $(-\frac{10}{13}; +\infty)$; г) ечими йўқ; д) $(11; +\infty)$; е) $(-0{,}4; +\infty)$. **1143.** а) $b > -62$ да, б) $b < -0{,}76$ да. **1144.** а) $(1; 3)$; б) ечими йўқ; в) $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$; г) ечими йўқ. **1145.** а) $(-5{,}5; 1)$; б) $(4; +\infty)$; в) $(-29; 3)$; г) ечими йўқ. **1146.** а) 0, 1, 2, 3, 4; б) -1, 0, 1, 2, 3. **1147.** а) $\left[-1\frac{1}{3}; 6\frac{2}{3}\right]$; б) $(-2; 5{,}5)$; в) $(-0{,}2; 0{,}4)$; г) $(3{,}5; 9{,}5]$. **1148.** а) $3{,}2 \leqslant a \leqslant 3{,}4$ да; б) $-1 < b < 2$ да. **1149.** а) $(-\infty; -6)$ ва $(8; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right)$ ва $(3; +\infty)$; в) x — истаган сон; г) ечими йўқ; д) $(-0{,}8; 0{,}8)$; е) $(-\infty; 0)$ ва $(3{,}6; +\infty)$; ж) $(-3; 3)$; з) $(0; 3{,}2)$. **1150.** а) $(-\infty; -1)$ ва $(4; +\infty)$; б) x — истаган сон; в) $(-13; -1)$; г) $(-4; 7)$. **1151.** а) $x \geqslant \frac{1}{3}$ да; б) $x \leqslant 5$ да; в) $x \leqslant -2$ да ва $x \geqslant -1$ да; г) x нинг истаган қийматида; д) $0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$ да; е) $x \geqslant 5\frac{2}{3}$ да. **1152.** а) 2,5 дан бошқа ҳамма сонлар; б) 2 ва 3 дан бошқа ҳамма сонлар; в) ҳамма сонлар; г) $\frac{1}{2}$ дан бошқа ҳамма сонлар; д) $x \geqslant 3$; е) $x < 0{,}5$. **1155.** а) $x < 3$ да; б) $x > 3$ да. **1164.** а) $(2; -7)$; б) $(2; -16)$, $(8; -34)$; в) кесишиш нуқталари йўқ; г) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; д) $(-1; -7)$, $(1; -5)$; е) $(-3; 33)$. **1166.** а) $(-\infty; -2{,}5]$ оралиқда камаяди; $[-2{,}5; +\infty)$ оралиқда ўсади; б) $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$ оралиқда ўсади; $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$ оралиқда камаяди; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ оралиқда камаяди; $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ оралиқда ўсади; г) $(-\infty; 0{,}8]$ оралиқда ўсади; $[0{,}8; +\infty)$ оралиқда камаяди. **1167.** а) $(-\infty; +\infty)$ аниқланиш соҳасининг ҳамма ерида камаяди; б) $(-\infty; 0)$ оралиқда ва $(0; +\infty)$ оралиқда ўсади; в) $(-\infty; 0)$ оралиқда ва $(0; +\infty)$ оралиқда камаяди; г) $(-\infty; 1{,}5)$ оралиқда ўсади, $(1{,}5; +\infty)$ оралиқда камаяди; д) $(-\infty; 0{,}5)$ оралиқда камаяди; $(0{,}5; +\infty)$ оралиқда ўсади; е) $(-\infty; -0{,}5)$ оралиқда ўсади ва $(-0{,}5; +\infty)$ оралиқда камаяди. **1168.** а) $x > -5$ да $f(x) > 0$; б) $x < -20$ да $f(x) > 0$; в) $x > 0$ да $f(x) > 0$; г) $x < 0$ да $f(x) > 0$; д) $x < -2$ да ва $x > 1{,}5$ да $f(x) > 0$; е) $\frac{5}{6}$ дан бошқа истаган x да $f(x) > 0$; ж) истаган x да $f(x) > 0$; з) $f(x) > 0$ бўладиган x мавжуд эмас. **1169.** а) $\frac{3}{9x^2 + 3x + 1}$; в) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{7}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$; г) 360 км. **1170.** а) 2; б) $(-1; +\infty)$; в) $(48; 15)$; г) 15 км/соат. **1171.** а) 11; б) $(-1; 5)$, $(-2; 7)$; г) 10 деталь. **1172.** а) 9;

б) $[-4{,}5; 1{,}5]$; в) $(8; -6)$; г) 60 деталь, 40 деталь. **1173.** а) $\sin\alpha$; б) $73-36\sqrt{6}$; г) -25. **1174.** а) $\operatorname{tg} 2\alpha$; б) x — истаган сон; в) $2\frac{1}{3}$; г) 16,5.

Қийин масалалар

1176. Тўғри каср. **1178.** а) 6 рақами; б) 1 рақами; в) 1 рақами. **1184.** а) (53; 52); (19; 16), (13; 8), (11; 4); б) (8; 5). **1186.** (2; — 1). **1187.** (1; 2), (2; 1). **1188.** $x=\frac{n}{n^2-1}$ бўлганда $\sqrt{n+x}=n\sqrt{x}$ тенглик тўғри, бунда n — натурал сон. **1189.** 9. **1191.** Мумкин. **1192.** 50 км/соат ва 40 км/соат. **1194.** а) $11\frac{7}{8}$; б) $2\frac{17}{26}$. **1201.** 82. **1204.** а) $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$, (2; 4); б) (1; 2), (2; 1). **1205.** — 1; 2. **1207.** Йўқ. **1208.** Йўқ. **1209.** 36. **1210.** 200. **1222.** 28.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

Юрий Николаевич Макарычев
Нора Григорьевна Миндюк
Вадим Макариевич Монахов и др.

АЛГЕБРА

Учебник для 8 класса средней школы

Перевод соответствует изданию изд-ва «Просвещение», 1986 г.

Ташкент «Ўқитувчи» 1987

Таржимонлар *М. Саъдуллаев, Ж. Икромов*
Редакторлар: *Н. Ғоипов, С. Бекбоева*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Т. Золотилова*
Корректорлар *М. Тоирова, М. Абдураҳмонов*

ИБ № 4093

Теришга берилди 03.09.86. Босишга рухсат этилди 26.11.86. Формати $60\times90/_{16}$. Тип. қоғози № 1. Литературная гарн. Кегли 10 шпонли, шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 16,5+0,25 форзац. Шартли кр-отт. 17,19. Нашр л. 14,0+0,46 форзац. Тиражи 410000. Зак № 2048. Баҳоси 25 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. 700129. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 18—218—86.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1-босмахонаси. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1986.

Типография № 1 ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Хамзы, 21.

А 45

Алгебра: Ўрта мактабнинг 8-синфи учун дарслик / Авт.: Ю. Н. Макаричев ва бошқ.; Русча нашр. С. А. Теляковский таҳрир қилган; 6-қайта ишланган нашридан тарж..— Т.: Ўқитувчи, 1987.—264 б.

1. Ю. Н. Макаричев ва бошқ.

Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы.

22 . 141 я72