Техникумлар
учун
математика

АЛГЕБРА
ВА АНАЛИЗ
АСОСЛАРИ

2-қисм

ТЕХНИКУМЛАР УЧУН
МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

II қисм

Г. Н. Яковлев
таҳрири остида

СССР Олий ва махсус ўрта таълим
министрлиги ўрта махсус ўқув
юртлари учун дарслик сифатида
тасдиқлаган

ТОШКЕНТ — „ЎҚИТУВЧИ“ — 19[illegible]

Авторлар коллективи:
М. И. КАЧЕНОВСКИЙ, Ю. М. КОЛЯГИН,
А. Д. КУТАСОВ, Г. Л. ЛУКАНКИН,
В. А. ОГАНЕСЯН, Г. Н. ЯКОВЛЕВ

А $\frac{60602-143}{353(04)-82}$ 205—82 4308000000

МУНДАРИЖА

СЎЗ БОШИ

I боб. Детерминантлар ва чизиқли тенгламалар системалари 8

1-§. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системалари 8
2-§. Иккинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари 15
3-§. Учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари 20
4-§. Уч номаълумли учта чизиқли тенглама системалари . . 27
5-§. *n* номаълумли чизиқли тенгламалар системалари . . . 36
6-§. Чизиқли программалаштириш масалалари ҳақида тушунча 38

II боб. Комплекс сонлар 50

7-§. Комплекс сонларнинг таърифи 50
1. Дастлабки мулоҳазалар (50). 2. Комплекс соннинг таърифи. Комплекс сонлар устида амалларнинг хоссалари. (53)
8-§. Комплекс сонларнинг геометрик талқини. Комплекс соннинг модули ва аргументлари 60
1. Комплекс текислик (60). 2. Комплекс соннинг модули (62). 3. Комплекс соннинг аргументлари (65).
9-§. Комплекс сонларни ёзилишининг турли шакллари. Комплекс сонлар устида амаллар 67
1. Комплекс сонни ёзилишининг алгебраик ва тригонометрик шакллари. 2. Тригонометрик шаклда ёзилган комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлиш (70) 3. Даражага кўтариш ва илдиз чиқариш (72). 4. Квадрат тенгламалар (76). 5. *e* сонининг комплекс даражаси (78). 6. Комплекс соннинг кўрсаткичли шаклда ёзилиши. (80).

III боб. Аниқмас интеграл 84

10-§. Функциянинг дифференциали 84

1. Функция дифференциалининг таърифи (84).
2. Дифференциалнинг геометрик маъноси (85). 3. Дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқи.
11- §. Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари 89
1. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл (89).
2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари (91).
3. Аниқмас интеграллар жадвали (92).
12- §. Интеграллаш усуллари 93
1. Бевосита интеграллашга мисоллар (93). 2. „Ўзгарувчини“ алмаштириш (ўрнига қўйиш) усули билан интеграллаш. 3. Бўлаклаб интеграллаш (100). 4. Баъзи рационал функцияларни интеграллаш (104). 5. „Олинмайдиган“ интегралларга мисоллар (108).

IV боб. **Аниқ интеграл** 112

13- §. Эгри чизиқли трапециянинг юзи 112
14- §. Аниқ интеграл 116
15- §. Аниқ интегралларнинг асосий хоссалари ва улардан келиб чиқадиган натижалар 119
16- §. Баъзи умумлаштиришлар 122
17- §. Ўртача қиймат ҳақидаги теорема 123
18- §. Юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграл . . . 125
19- §. Ньютон-Лейбниц формуласи 126
20- §. Аниқ интегралларни ўрнига қўйиш усули ёрдамида ҳисоблаш 130
21- §. Аниқ интегралларни бўлаклаб интеграллаш усули билан ҳисоблаш 135
22- §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш усуллари . . 138
1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи (138). 2. Трапециялар формуласи (140).

V боб. **Аниқ интегралнинг татбиқлари** 145

23- §. Ясси фигураларнинг юзини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш 145
24- §. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги 150
25- §. Физика ва техника масалаларини ечишда аниқ интегрални татбиқ қилиш 154
1. Йўлни ҳисоблаш ҳақидаги масала (154). 2. Суюқликнинг босим кучи ҳақидаги масала (157). 3. Ўзгарувчан куч бажарган иш (160). 4. Статик моментлар ва массалар маркази координаталари (162).

VI боб. **Комбинаторика ва бином даражаси учун Ньютон формуласи** 170

26- §. Ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, группалашлар 170
1. Комбинаторикага оид содда масалалар (170).
2. Ўринлаштиришлар ва ўрин алмаштиришлар (172).
3. Группалашлар
27- §. Ньютон формуласи 181

VII боб. **Эҳтимоллар назарияси элементлари** 189

28- § Тасодифий ҳодисалар. Ҳодисанинг эҳтимоли 189
1. Тасодифий ҳодисалар ва улар устида амаллар (189).

2. Натижалари тенг эҳтимолли тажриба. Ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи (194).
29- §. Эҳтимоллар назариясининг асосий теоремалари ва уларнинг натижалари 198
1. Қўшиш теоремаси (198). 2. Шартли эҳтимол. Кўпайтириш теоремаси. Ҳодисаларнинг эрклилиги (201).
3. Тўла эҳтимол формуласи (212). 4. Байес формулалари (214)
30- § Эркли тажрибалар сериялари. Я. Бернулли формуласи . 218
31- §. Тасодифий миқдорлар 224
1. Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни (224)
2. Тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (228).
3. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси (230). 4. Чебишев тенгсизлиги (236). 5. Катта сонлар қонуни (238).

VIII боб. **Дифференциал тенгламалар** 241

32- §. Дифференциал тенгламаларга мисоллар 241
1. Бактерияларнинг кўпайиши (241). 2. Радиоактив емирилиш (243). 3. Модданинг ҳосил бўлиш ва емирилиш тенгламалари тўғрисида умумий изоҳлар. (244). 4. Ўзининг ҳар бир нуқтасида берилган уринмага эга бўлган эгри чизиқнинг дифференциал тенгламаси (245)
33- §. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар назариясининг асосий тушунчалари ва таърифлари 247
34- §. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар 250
1. Таърифлар ва мисоллар (250). 2. Умумий ечимни топиш қоидаси (253).
35- §. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар 257
1 Биринчи тартибли чизиқли тенгламанинг умумий ечими (257). 2. Ўзгармасни вариациялаш методи (260).
36- §. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга мисоллар 262
1. Нуқтанинг ҳаракат тенгламаси (262). 2. Нуқтанинг ўзгармас куч таъсири остидаги ҳаракати (264).
3. Нуқтанинг даврий куч таъсири остидаги ҳаракати (265). 4. Нуқтанинг тезликка пропорционал бўлган куч таъсири остида ҳаракати (266).
37- §. Гармоник тебранишлар 269
1. Гармоник тебранишлар тенгламаси (269). 2. Нуқтанинг эластик куч таъсири остидаги тебранишлари (271).
3. Математик маятникнинг тебранишлари (273).
38- §. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар 275
1. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар (275). 2. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар (275). 3. Характеристик тенглама (277). 4. Характеристик тенглама комплекс ечимларга эга бўлган ҳол (278). 5. Характеристик тенглама битта ечимга эга бўлган ҳол (280). 6. Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар (281).

IX боб. **Сонли ва даражали қаторлар** 283

39- §. Сонли қаторлар 283
1. Қатор ва унинг йиғиндисининг таърифи (283).

2. Ҳадлари манфий бўлмаган қаторлар (288). 3. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар (293). 4. Комплекс ҳадли кетма-кетликлар ва қаторлар (297).
40-§. Даражали қаторлар 302
1. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш доираси (302). 2. Ҳадлари ҳақиқий бўлган даражали қаторлар (307).
41-§. Тейлор қаторлари 311
1. Тейлор формуласи (311). 2. Баъзи элементар функциялар учун Тейлор формуласи (316). 3. Тейлор қаторлари (319). 4. e^z, $\sin z$ ва $\cos z$ функциялари (323).
Жавоблар 326
Грек алфавити 341

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб ўрта махсус ўқув юртлари учун математикадан янги программага мувофиқ ёзилган „Алгебра ва анализ асослари“ дарслигининг иккинчи қисмидир.

Бу китобда чизиқли тенгламалар системалари назарияси ҳамда иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар назарияси, комплекс сонлар назарияси, интеграллашнинг энг содда усуллари, шунингдек, комбинаторика ва эҳтимоллар назарияси элементлари баён қилинган. Интегралнинг конкрет физик масалаларни ечишда татбиқ этилишига катта эътибор берилган.

„Дифференциал тенгламалар“ бобида биринчи ва иккинчи тартибли энг содда дифференциал тенгламалар ўрганилади; бактерияларнинг кўпайиши, радиоактив емирилиш ва гармоник тебранишлар ҳақидаги масалалар муфассал қаралади. Сўнгги боб ҳақиқий ва комплекс ҳадли сонли ва даражали қаторлар назариясига бағишланган.

Назарий материалнинг баён этилиши жуда кўп конкрет мисоллар ва масалаларни таҳлил қилиш билан қўшиб олиб борилади. Ҳар бир бобда ўқувчиларнинг мустақил ишлашлари учун машқлар келтирилган.

Авторлар қўлёзмани диққат билан ўқиб чиқиб, бир қатор муҳим фикрлар билдирган СССР ПФА нинг мухбир аъзоси проф. И. С. Бровиковга, доцент П.Т. Апанасовга ва СССР Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги методисти П. И. Самойленкога миннатдорлик изҳор қиладилар.

Авторлар

I БОБ

ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

1-§. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системалари

1. *Чизиқли тенглама* деб

$$ax + by = c$$

кўринишидаги тенгламага айтилишини эслатиб ўтамиз, бу ерда a, b, c — берилган сонлар, x, y эса изланаётган номаълумлар. a, b сонлар *тенгламанинг коэффициентлари, c* сон эса *тенгламанинг ўнг томони* ёки *озод ҳади* дейилади.

Ушбу икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини қараймиз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Равшанки, агар (1) система тенгламаларининг барча коэффициентлари ва ўнг томонлари нолга тенг бўлса, сонларнинг исталган $(x; y)$ жуфти системанинг ечими бўлади. Агар система тенгламаларининг барча коэффициентлари нолга тенг бўлиб, тенгламаларнинг ўнг томонларининг ҳаммаси ҳам нолга тенг бўлмаса, (1) система ечимга эга бўлмайди.

Келгусида тенгламаларидан бирининг ҳеч бўлмаганда битта коэффициенти нолдан фарқли бўлган системалар билан иш кўрамиз.

Айтайлик, масалан, $b_2 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ \frac{a_2}{b_2}x + y = \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \tag{2}$$

системага эквивалент (тенг кучли) бўлади, яъни агар сонларнинг $(x_0; y_0)$ жуфти (1) системанинг ечими бўлса, у ҳолда у (2) системанинг ҳам ечими бўлади ва аксинча. (2) системанинг иккинчи тенгламасини b_1 га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламани биринчи тенгламадан ҳадма-ҳад айирамиз:

$$\left(a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1\right)x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1. \tag{3}$$

Энди (2) системанинг биринчи тенгламасини (3) тенглама билан алмаштириб, (2) системага эквивалент эканлиги равшан бўлган ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \left(a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1\right)x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1, \\ \frac{a_2}{b_2}x + y = \frac{c_2}{b_2}. \end{cases} \tag{4}$$

Агар $a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1 \neq 0$, яъни $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлса, биринчи тенгламадан x ни топамиз:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{5}$$

x нинг бу қийматини (4) системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, y ни топамиз:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \tag{6}$$

Ёзувни соддалаштириш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta,$$
$$c_1b_2 - c_2b_1 = \Delta_x,$$
$$a_1c_2 - a_2c_1 = \Delta_y;$$

у ҳолда (5) ва (6) формулаларни қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

(5) ва (6) формулалар *Крамер формулалари* дейилади.

Шундай қилиб, агар $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлса, (4) система ягона ечимга эга бўлади ва бу ечим (5), (6) формулалар бўйича топилади. (4) система (1) системага эквивалент бўлганлиги сабабли (4) системанинг ечими (1) системанинг ҳам ечими бўлади.

Энди

$$a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1 = 0 \tag{7}$$

бўлсин. У ҳолда (4) система қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} 0 \cdot x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1, \\ \frac{a_2}{b_2}x + y = \frac{c_2}{b_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Агар $c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1 \neq 0$ бўлса, бу система ечимга эга бўлмаслиги равшан. Агар $c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1 = 0$ бўлса, у ҳолда сонларнинг исталган $(x; y)$ жуфти (бу ерда $y = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2}x$, $x \in R$) (8) системанинг ечими бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги даъволар исбот қилинди.

Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (1) система ягона ечимга эга бўлади ва бу ечим (5), (6) Крамер формулалари бўйича топилади.

Агар $\Delta = 0$ бўлса, у ҳолда (1) система ё ечимга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

$\Delta = 0$ ҳолни батафсилроқ қараб чиқамиз. Юқоридагига ўхшаш $b_2 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $k = \frac{b_1}{b_2}$ деб белгилаб, $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ ни топамиз ((7) формулага қаранг). Шундай қилиб, бу ҳолда (1) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Бу система

$$c_1 = kc_2$$

бўлганда ва фақат шунда ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлиши равшандир.

Шундай қилиб, агар $\Delta = 0$ ва $b_2 \neq 0$ бўлса, (1) системанинг биринчи тенгламаси бу системанинг иккинчи тенгламасини $k = \frac{b_1}{b_2}$ сонга ҳадма-ҳад кўпайтириш орқали ҳосил қилинганда ва фақат шундагина (1) система ечимга эга бўлади.

Биз ўз муҳокамамизда $b_2 \neq 0$ деб фараз қилдик. Бу умумийликка зиён етказмайди, чунки масалан $b_1 \neq 0$ бўлса, тенгламаларнинг ўринларини алмаштириб, яна ўша хулосаларга келамиз. Агарда $a_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда тенгламалар ва номаълумларнинг ўринларини алмаштириб, яна кўриб чиқилган ҳолга келамиз.

(1) кўринишдаги системаларнинг хусусий, лекин муҳим ҳоли икки номаълумли иккита чизиқли бир жинсли тенглама системаси бўлиб, у қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Бу система ҳар доим ушбу ечимга эга:

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Юқорида айтилганга кўра $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда (9) система $x = 0$, $y = 0$ дан иборат ягона ечимга эга бўлади ва бу ечим Крамер формулалари бўйича топилади.

Агарда $\Delta = 0$ ва масалан, $b_1 \neq 0$ бўлса, системанинг ечими $a_1x + b_1y = 0$ тенгламанинг исталган ечими бўлади, яъни сонларнинг исталган $(x; y)$ жуфтидан иборат бўлади, бу ерда

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x, \quad x \in R$$

1-мисол. Ушбу икки номаълумли иккита тенглама системасини ечинг:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 16, \\ x + 2y = 11. \end{cases}$$

Ечилиши. Δ, Δ_x ва Δ_y ни тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\Delta = 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 13,$$
$$\Delta_x = 16 \cdot 2 - 11 \cdot (-3) = 65,$$
$$\Delta_y = 5 \cdot 11 - 16 \cdot 1 = 39;$$

у ҳолда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{65}{13} = 5, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3.$$

Жавоби: $x = 5$, $y = 3$.

2-мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 4x + 6y = 20. \end{cases}$$

Ечилиши. Иккинчи тенгламани 2 га бўлиб, берилган системага эквивалент бўлган системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 2x + 3y = 10, \end{cases}$$

бу система зиддиятлидир, демак, берилган система ечимга эга эмас.

3-мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ 20x - 15y = 35. \end{cases}$$

Ечилиши. Системанинг иккинчи тенгламасини 5 га бўлиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ 4x - 3y = 7. \end{cases}$$

Система икки номаълумли битта тенгламага эквивалент ва чексиз кўп ечимга эга $\left(x; \frac{4x-7}{3}\right)$, бу ерда $x \in R$.

4-мисол. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = x', \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = y'. \end{cases}$$

Ечилиши. Δ, Δ_x ва Δ_y ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\Delta_x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$

$$\Delta_y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha.$$

$\Delta = 1$ бўлгани учун

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \qquad y = y'\cos\alpha - x'\sin\alpha.$$

5-мисол. Қуйидаги икки номаълумли иккита бир жинсли тенглама системасини ечинг:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 2x - 4y = 0, \end{cases}$$

Ечилиши. Δ ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = 5 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -26.$$

$\Delta \neq 0$ бўлгани учун система ягона ноль ечимга эга бўлади:

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

6-мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 0, \\ 9x + 15y = 0. \end{cases}$$

Ечилиши. Δ ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = 3\ 15 - 9 \cdot 5 = 0.$$

$\Delta = 0$ бўлгани учун система чексиз кўп ечимга эга бўлади:

$$\left(x; -\frac{3}{5}x\right) \text{ бу ерда } x \in R.$$

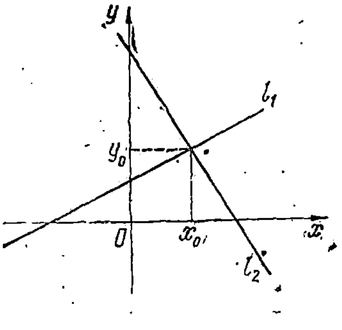
2. Юқорида кўрсатилгандек, икки номаълумли иккита тенглама системасини ечишда турли уч ҳол бўлиши мумкин:

1) система ягона ечимга эга;
2) система ечимга эга эмас;
3) система чексиз кўп ечимга эга.

Санаб ўтилган бу ҳолларни геометрик нуқтаи назардан талқин этиш осон. Номаълумларининг олдидаги коэффициентларидан ҳеч бўлмаганда бири нолдан фарқли бўлган икки номаълумли ҳар қандай чизиқли тенглама текисликда тўғри чизиқни аниқлашини эслатиб ўтамиз.

1) Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар кесишса, яъни улар координаталари $(x_0; y_0)$ бўлган битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларидан иборат чизиқли тенгламалар системаси ягона $(x_0; y_0)$ ечимга эга бўлади. Аксинча, агар икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси ягона $(x_0; y_0)$ ечимга эга бўлса, у ҳолда система тенгламалари орқали аниқланадиган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар $(x_0; y_0)$ нуқтада кесишади (1-расм).

2) Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлиб, умумий нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларидан иборат бўлган чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди. Аксинча, агар икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси ечимларга эга бўлмаса, у ҳолда бу система



1-расм.

тенгламалари билан аниқланадиган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар умумий нуқтага эга бўлмайди, яъни улар ўзаро параллел бўлиб, устма-уст тушмайди (2-расм).

3) Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушса, яъни биринчи тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси бир вақтнинг ўзида иккинчи тўғри чизиқнинг ҳам нуқтаси бўлса, у ҳолда мос тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлади. Аксинча, агар иккита чизиқли тенглама системаси чексиз кўп ечимга эга бўлса, у ҳолда бу системанинг тенгламалари билан аниқланадиган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушади (3-расм).

7-мисол. Қуйидаги

$$\begin{cases} 3x + 2y - 13 = 0, \\ 4x - 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси координаталарини топиш деган сўз,

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13, \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

системанинг ечимини топиш, демакдир. Δ, Δ_x ва Δ_y ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 = -17,$$

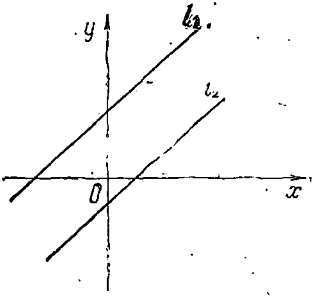
$$\Delta_x = 13 \cdot (-3) - 6 \cdot 2 = -51,$$

$$\Delta_y = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 13 = -34;$$

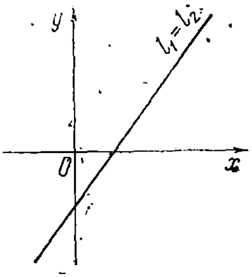
демак,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-34}{-17} = 2.$$

Жавоби: $x = 3$, $y = 2$.



2-расм.



3-расм.

2-§. Иккинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари

Ушбу

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

кўринишдаги квадрат жадвални қарайлик, бу ерда a_1, b_1, a_2, b_2 — бирор сонлар. Ана шундай исталган жадвал *иккинчи тартибли квадрат матрица* дейилади. a_1, b_1, a_2, b_2 сонлар *матрицанинг элементлари* дейилади.

Таъриф. $a_1b_2-a_2b_1$ сон (1) *матрицанинг детерминанти (аниқловчиси)* дейилади ва

$$\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right| \qquad (2)$$

каби белгиланади.

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right| = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Иккинчи тартибли квадрат матрицанинг детерминанти *иккинчи тартибли детерминант* дейилади.

a_1, b_1, a_2, b_2 сонлар *детерминантнинг элементлари* дейилади. Детерминантнинг белгиланишидан унинг элементлари квадрат шаклида жойлашганлиги кўриниб турибди. a_1 ва b_2 элементлар жойлашган диагональ *бош диагональ*, a_2 ва b_1 элементлар жойлашган диагональ эса *ёрдамчи диагональ* дейилади.

Энди иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблашнинг қуйидаги қоидасини баён қилиш мумкин:

Иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш учун бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасидан ёрдамчи диагоналда турган элементлар кўпайтмасини айириш керак.

1-мисол. Қуйидаги иккинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\left| \begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{matrix} \right|$$

Ечилиши. Бош диагоналда 2 ва 7 элементлар турибди, уларнинг кўпайтмаси: $2 \cdot 7 = 14$; ёрдамчи диагоналда 3 ва 4 элементлар турибди, уларнинг кўпайтмаси: $3 \cdot 4 = 12$.

Таърифга кўра

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2.$$

Демак,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2.$$

2-мисол. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Таърифга кўра

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = -14.$$

3-мисол. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Таърифга кўра

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 5 \cdot 0 = -12.$$

2. Энди олдинги параграфдаги (5) ва (6) формулаларни (Крамер формулаларини) қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (3)$$

Келгусида (3) формулаларга кирувчи детерминантларни қуйидагича белгилаймиз (1-§ га қаранг):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 = \Delta_x,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 = \Delta_y.$$

Бундай белгилашларда (3) формулалар ушбу кўринишни олади:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

(3) формулаларга диққат қилсак, суратдаги детерминантларни махражда турган детерминантлардан осонгина ҳосил қилиш мумкинлигини кўрамиз: суратдаги ҳар қайси детерминант махраждаги детерминантдан ундаги изланаётган номаълумлар олдидаги коэффициентлардан иборат устунни системанинг ўнг томонларидан иборат устун билан алмаштириш орқали ҳосил қилинади. Дарҳақиқат, Δ_x детерминант Δ дан унда a_1 ва a_2 ни c_1 ва c_2 билан алмаштириш орқали, Δ_y эса b_1 ва b_2 ни c_1 ва c_2 билан алмаштириш орқали ҳосил қилинади.

4-мисол. Қуйидаги икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини ечинг:

$$\begin{cases} 5x+2y=29, \\ 3x+4y=23. \end{cases}$$

Ечилиши. Δ, Δ_x ва Δ_y детерминантларни тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot4-2\cdot3=14,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 29 & 2 \\ 23 & 4 \end{vmatrix}=29\cdot4-2\cdot23=70,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 29 \\ 3 & 23 \end{vmatrix}=5\cdot23-3\cdot29=28.$$

Шундай қилиб,

$$x=\frac{70}{14}=5, \qquad y=\frac{28}{14}=2.$$

Жавоби: $x=5$, $y=2$.

5-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 4x+3y-28=0, \\ 3x-5y-21=0. \end{cases}$$

Ечилиши. Системани стандарт кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} 4x+3y=28, \\ 3x-5y=21. \end{cases}$$

Δ, Δ_x ва Δ_y детерминантларни тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 3 = -29,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 28 & 3 \\ 21 & -5 \end{vmatrix} = 28 \cdot (-5) - 3 \cdot 21 = -203,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 28 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = 4 \cdot 21 - 28 \cdot 3 = 0.$$

Шундай қилиб,

$$x = \frac{-203}{-29} = 7, \qquad y = \frac{0}{-29} = 0.$$

Жавоби: $x = 7$, $y = 0$.

3. Иккинчи тартибли детерминантларнинг асосий хоссаларини баён қиламиз.

1-хосса.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

яъни детерминантнинг устунларини сатрларига, сатрларини эса устунларига алмаштирсак, унинг қиймати ўзгармайди.

Бу хосса сатрлар ва устунларнинг тенг ҳуқуқлилигини билдиради. Шунинг учун бундан буён детерминантнинг барча хоссаларини унинг фақат сатрлари учун баён қиламиз.

2-хосса.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

яъни агар детерминантда сатрларнинг ўрнини алмаштирсак, детерминантнинг ишораси ўзгаради.

3-хосса.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

яъни агар детерминантнинг бирор сатридаги ҳамма элементлар умумий кўпайтувчига эга бўлса, у ҳолда уни детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин. Бошқача айтганда, детерминантнинг бирор сатридаги ҳамма элементларни бирор сонга кўпайтирилса, у ҳолда детерминант ҳам шу сонга кўпайтирилади.

4-хосса.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

яъни агар бирорта сатри (устуни) нинг барча элементлари иккита қўшилувчининг йиғиндиси сифатида ёзилган детерминант берилган бўлса, у ҳолда бу детерминант шундай иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўладики, улардан биринчисида йиғиндилар уларнинг биринчи қўшилувчилари билан, иккинчисида эса иккинчи қўшилувчилари билан алмаштирилган бўлади. Бошқача айтганда, бирорта сатри (устуни) нинг барча элементларини иккита (бир нечта) қўшилувчининг йиғиндиси кўринишида тасвирлаб, ҳар қандай детерминантни иккита (бир нечта) детерминантнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин.

1-натижа. *Бирорта сатри (устуни) нинг элементлари мос равишда бошқа сатри (устуни) нинг элементларига тенг бўлган детерминант нолга тенг.*

2-натижа. *Агар детерминантда бир сатр (устун) нинг элементлари бошқа сатр (устун) нинг элементларига мос равишда пропорционал бўлса, у ҳолда бундай детерминант нолга тенг бўлади.*

3-натижа. *Агар детерминантнинг бирорта сатри (устуни) элементларига бошқа сатр (устун) нинг элементларини ёки уларга пропорционал сонларни мос равишда қўшилса, детерминант ўзгармайди.*

Детерминантларни ҳисоблашда бу хоссалардан қандай фойдаланиш кераклигини мисолларда кўрсатамиз.

6-мисол. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 325 & -132 \\ 175 & -60 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Дастлаб биринчи устундан умумий кўпайтувчи 25 ни детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta = 25 \begin{vmatrix} 13 & -132 \\ 7 & -60 \end{vmatrix},$$

иккинчи устундан эса умумий кўпайтувчи—12 ни детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta = 25 \cdot (-12) \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Сўнгра ҳосил бўлган бу детерминантнинг биринчи сатридан унинг иккинчи сатрини айирамиз:

$$\Delta=25\cdot(-12)\begin{vmatrix}6 & 6\\ 7 & 5\end{vmatrix}.$$

Энди биринчи сатрдан умумий кўпайтувчи 6 ни чиқарамиз:

$$\Delta=25\cdot(-12)\cdot 6\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 5\end{vmatrix}=-1800\cdot(5-7)=3600.$$

7-мисол. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta=\begin{vmatrix}105 & 55\\ 245 & 154\end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Биринчи сатрдан умумий кўпайтувчи 5 ни, иккинчи сатрдан эса 7 ни детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta=5\cdot 7\begin{vmatrix}21 & 11\\ 35 & 22\end{vmatrix}.$$

Энди биринчи устун элементларининг умумий кўпайтувчиси 7 ни, иккинчи устундан эса 11 ни чиқарамиз:

$$\Delta=35\cdot 7\cdot 11\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=2695.$$

3-§. Учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари

1. Ушбу кўринишдаги квадрат жадвални қарайлик:

$$\begin{Vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

бу ерда a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3—бирор сонлар. Бундай кўринишдаги исталган жадвал *учинчи тартибли квадрат матрица дейилади.* a_1, b_1, c_1, ..., c_3 сонлар (1) *матрицанинг элементлари* дейилади.

Таъриф. Ушбу

$$a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

сон (1) *матрицанинг детерминанти* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Учинчи тартибли квадрат матрицанинг детерминанти *учинчи тартибли детерминант* дейилади.

Таърифдан кўринадики, учинчи тартибли детерминант иккинчи тартибли детерминантлар орқали ифода қилинар экан.

(3) формула *учинчи тартибли детерминантни унинг биринчи сатри элементлари бўйича ёйилмаси* дейилади.

1-мисол. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. (3) формулага кўра

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун

$$\Delta = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4.$$

2-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Детерминантни унинг биринчи сатри элементлари бўйича ёямиз:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Демак,

$$\Delta = 2\cdot(-2-18) - 3\cdot(-10+6) - 4\cdot(15+1) =$$
$$= 2\cdot(-20) - 3\cdot(-4) - 4\cdot 16 = -92.$$

3-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. (3) формулага кўра

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун

$$\Delta = 1\cdot(-14) + 2\cdot(-21) + 3\cdot(-7) = -77.$$

4-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. (3) формулага кўра

$$\Delta = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

шунинг учун

$$\Delta = 5 \cdot 6 = 30.$$

2. Маълумки, координаталари билан берилган икки векторнинг вектор кўпайтмаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланар эди (қ. Геометрия, I қ. , 66-бет):

$$[\mathbf{a}; \mathbf{b}] = \mathbf{i}(y_1z_2 - y_2z_1) + \mathbf{j}(z_1x_2 - z_2x_1) + \mathbf{k}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Бу формула узундан-узоқ бўлиб, уни эслаб қолиш ҳам қийин. Унинг ўнг томонини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$[\mathbf{a}; \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ва вектор кўпайтма учинчи тартибли детерминантни унинг биринчи сатри элементлари бўйича ёйиш формуласидан ҳосил бўлади деб ҳисоблаш мумкин.

Юқоридаги формулани (4) кўринишда эслаб қолиш осондир. Хусусан, агар $z_1 = z_2 = 0$, яъни $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторлар xOy координаталар текислигида ётса, у ҳолда

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

5-мисол. $a=(2; 3; -4)$ ва $b=(5; 1; 2)$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг.

Ечилиши. a ва b векторларнинг координаталарини бевосита (4) формулага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

ёки

$$[a; b] = 10i - 24j - 13k.$$

6-мисол. Учларининг координаталари $A(1; 2)$, $B(4; -5)$, $C(5; 3)$ бўлган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Ечилиши. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларга қурилган параллелограммнинг юзи $S = |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|$ га тенг бўлгани учун ABC учбурчакнинг юзи;

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|$$

формула бўйича ҳисобланади. У ҳолда

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|k\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|31\ k| = \frac{31}{2}.$$

3. Учинчи тартибли детерминантлар иккинчи тартибли детерминантлар каби хоссаларга эга; бунга бевосита ҳисоблашни бажариб, ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Учинчи тартибли детерминантларнинг асосий хоссаларини баён қиламиз.

1-хосса.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

яъни детерминантнинг сатрларини устунларига, устунларини эса сатрларига алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди.

Бу хосса сатрлар ва устунларнинг тенг ҳуқуқли эканлигини билдиради. Шунинг учун келгусида барча хоссаларни сатрлар учунгина баён қиламиз.

2-хосса.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

яъни детерминантда исталган икки сатрнинг (устуннинг) ўринларини алмаштирсак, детерминантнинг ишораси ўзгаради.

3-хосса.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

яъни бирор сатр (устун) нинг барча элементлари умумий кўпайтувчига эга бўлса, у ҳолда бу кўпайтувчини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

Бошқача айтганда, детерминантнинг бирор сатри (устуни) нинг барча элементларини бирор сонга кўпайтирилса, детерминант ҳам ана шу сонга кўпайтирилади.

4-хосса.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

яъни детерминантнинг бирор сатри (устуни) нинг барча элементлари иккита қўшилувчининг йиғиндиси сифатида берилган бўлса, у ҳолда бу детерминант шундай иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўладики, уларнинг биринчисида йиғиндилар биринчи қўшилувчилар билан, иккинчисида эса йиғиндилар иккинчи қўшилувчилар билан алмаштирилган бўлади.

Бошқача айтганда, детерминантда унинг бирор сатри (устуни) нинг барча элементларини иккита қўшилувчининг йиғиндилари сифатида тасвирланса, у ҳолда детерминант бирида йиғиндилар уларнинг биринчи қўшилувчилари билан, иккинчисида йиғиндилар уларнинг иккинчи қўшилувчилари билан алмаштирилган иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўлади.

Детерминантнинг бу хоссаси детерминантнинг бирорта сатри (устуни) нинг барча элементлари иккитадан кўп қўшилувчиларнинг йиғиндисига тенг бўлган ҳол учун ҳам ўринлидир.

1-натижа. *Қандайдир иккита сатри (устуни) бир хил бўлган детерминант нолга тенг.*

2-натижа. *Агар детерминантнинг бирор сатри (устуни) нинг элементлари унинг бошқа бирор сатри (устуни) нинг элементларига пропорционал бўлса, у ҳолда бундай детерминант нолга тенг бўлади.*

3-натижа. *Агар детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементларига мос равишда бошқа исталган сатр (устун) элементларини ёки уларга пропорционал сонларни қўшилса, унинг қиймати ўзгармайди.*

Детерминантларни ҳисоблашда бу хоссалардан қандай фойдаланишни мисолларда кўрсатамиз.

7-мисол. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & 21 & 28 \\ 6 & -9 & 12 \\ 10 & 15 & -20 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Ҳар бир сатрдаги умумий кўпайтувчиларни детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta = 7 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix},$$

сўнгра ҳар бир устундан умумий кўпайтувчиларни чиқарамиз:

$$\Delta = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ниҳоят

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

эканлигини топиб, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 10080.$$

8-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 36 & -24 & 60 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Иккинчи сатр элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta = 12\begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 3 & -2 & 5 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Учинчи сатр элементларидан мос равишда биринчи сатр элементларини айирамиз:

$$\Delta = 12\begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Иккита бир хил сатрга эга бўлган детерминант нолга тенг бўлгани учун

$$\Delta = 0.$$

9-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 49 & 37 & 41 \\ 23 & 37 & 41 \\ 95 & 74 & 82 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Биринчи сатр элементларидан мос равишда иккинчи сатр элементларини айирамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 23 & 37 & 41 \\ 95 & 74 & 82 \end{vmatrix}.$$

Детерминантни унинг биринчи сатри элементлари бўйича ёямиз:

$$\Delta = 26\begin{vmatrix} 37 & 41 \\ 74 & 82 \end{vmatrix}.$$

Иккита сатри пропорционал бўлган детерминант нолга тенг бўлгани учун

$$\Delta = 0.$$

10-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 36 & 48 & 30 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Иккинчи сатр элементларининг умумий кўпайтувчиси 6 ва учинчи сатр элементларининг умуий кўпайтувчи.2 ни детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta = 6 \cdot 2 \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Энди биринчи устун элементларининг умумий кўпайтувчиси 3 ва иккинчи устун элементларининг умумий кўпайтувчиси 4 ни детерминант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$\Delta = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган детерминантни ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 + 0 = 2.$$

Демак,

$$\Delta = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 288.$$

11-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 19 & 12 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 24 & 27 & 12 \end{vmatrix}.$$

Ечилиши. Детерминантнинг учинчи сатридан унинг биринчи сатрини айирамиз. У ҳолда иккита сатри пропорционал бўлган детерминант ҳосил қилганимиз учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 19 & 12 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

4-§. Уч номаълумли учта чизиқли тенглама системалари

Уч номаълумли учта чизиқли тенглама системасини қараймиз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) системани қисқача қуйидагича ёзилади:

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Бу ерда a_i, b_i, c_i, d_i—берилган бирор сонлар, x, y, z эса изланаётган номаълумлар.

Маълумки, агар сонларнинг $(x_0; y_0; z_0)$ учлигини (1) система тенгламаларидаги x, y ва z номаълумларнинг ўрнига қўйилганда тўғри сонли тенгликлар ҳосил бўлса, $(x_0; y_0; z_0)$ учлик (1) *системанинг ечими* дейилади.

Дастлаб (1) система тенгламаларининг барча коэффициентлари нолга тенг бўлган ҳолни қараймиз:

$$a_i = b_i = c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Бу ҳолда агар система тенгламаларининг барча озод ҳадлари нолга тенг, яъни

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

бўлса, у ҳолда, равшанки, сонларнинг исталган $(x; y; z)$ учлиги бу системанинг ечими бўлади. Агар озод ҳадларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг бўлмаса, у ҳолда система ечимга эга бўлмайди.

Энди (1) система тенгламалари коэффициентларининг ҳаммаси ҳам нолга тенг бўлмаган ҳолини кўриб чиқайлик. Айтайлик, $c_3 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда берилган система қуйидаги системага эквивалент бўлади:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ \frac{a_3}{c_3} x + \frac{b_3}{c_3} y + z = \frac{d_3}{c_3}. \end{cases}$$

Бу системанинг охирги тенгламасини c_1 га кўпайтириб, биринчи тенгламадан ҳадма-ҳад айирамиз ва натижада қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(a_1 - \frac{a_3}{c_3} c_1\right) x + \left(b_1 - \frac{b_3}{c_3} c_1\right) y = d_1 - \frac{d_3}{c_3} c_1. \quad (2)$$

Шунга ўхшаш, охирги тенгламани c_2 га кўпайтириб ва уни иккинчи тенгламадан ҳадма-ҳад айириб,

$$\left(a_2 - \frac{a_3}{c_3} c_2\right) x + \left(b_2 - \frac{b_3}{c_3} c_2\right) y = d_2 - \frac{d_3}{c_3} c_2 \quad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Равшанки, биринчи тенгламаси (2) дан, иккинчи тенгламаси эса (3) ни c_3 га кўпайтиришдан ҳосил бўлган ушбу

$$\begin{cases}(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1,\\(a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3-b_3c_2)y=d_2c_3-d_3c_2,\\ \dfrac{a_3}{c_3}x+\dfrac{b_3}{c_3}y+z=\dfrac{d_3}{c_3}\end{cases}\qquad(4)$$

система (1) системага эквивалентдир.

Шундай қилиб, агар $c_3\neq 0$ бўлса, (1) системани текшириш икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси

$$\begin{cases}(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1\\(a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3-b_3c_2)y=d_2c_3-d_3c_2\end{cases}\qquad(5)$$

ни текширишга келтирилади.

Дастлаб (5) системанинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлган ҳолни қараймиз. У ҳолда агар (5) система тенгламаларининг озод ҳадлари нолга тенг бўлса, сонларнинг исталган $(x;\ y)$ жуфти (5) системанинг ечими бўлади, ва демак, сонларнинг исталган $(x;\ y;\ z)$ учлиги (бу ерда $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$, $z=\frac{d_3}{c_3}-\frac{a_3}{c_3}x-\frac{b_3}{c_3}y$) (1) системанинг ечими бўлади. Агар (5) система тенгламаларидан ҳеч бўлмаганда биттасининг озод ҳади нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (5) система, бинобарин, (1) система ҳам ечимга эга бўлмайди.

(5) системанинг ҳамма коэффициентлари ҳам нолга тенг бўлмаган ҳолни қарайлик. Масалан,

$$b_2c_3-b_3c_2\neq 0$$

бўлсин. (5) системанинг биринчи тенгламасини $b_2c_3-b_3c_2$ га, иккинчи тенгламасини эса $-(b_1c_3-b_3c_1)$ га кўпайтирамиз ва қўшамиз; оддий шакл алмаштиришлардан сўнг қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\Delta\cdot x=\Delta_x,$$

бу ерда

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Шундай қилиб, агар $b_2c_3-b_3c_2\neq 0$ бўлса, (5) система

$$\begin{cases}\Delta\cdot x=\Delta_x,\\ \dfrac{a_2c_3-a_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}x+y=\dfrac{d_2c_3-d_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}\end{cases}$$

системага эквивалент бўлади.

Агар $\Delta=\Delta_x=0$ бўлса, равшанки, сонларнинг исталган $(x;\ y)$ жуфти, (5) системанинг ечими бўлади, бу ерда $x\in R$,

$$y=\frac{d_2c_3-d_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}-\frac{a_2c_3-a_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}x. \tag{6}$$

(6) дан ва (4) системанинг охирги тенгламасидан z ни топамиз:

$$z=\frac{b_2d_3-b_3d_2}{b_2c_3-b_3c_2}+\frac{a_2b_3-a_3b_2}{b_2c_3-b_3c_2}x. \tag{7}$$

Демак, агар $\Delta=\Delta_x=0$ ва $b_2c_3-b_3c_2\neq 0$ бўлса, у ҳолда сонларнинг исталган $(x;\ y;\ z)$ учлиги (бу ерда $x\in R$ бўлиб, y ва z эса (6), (7) формулалар бўйича топилади) (1) системанинг ечими бўлади.

Агар $\Delta=0$ бўлиб, $\Delta_x\neq 0$ бўлса, у ҳолда (5) система, бинобарин, (1) система ҳам ечимга эга бўлмайди.

Энди $\Delta\neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

x нинг бу қийматини (5) системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, y ни топамиз:

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

бу ерда

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Ниҳоят, x ва y нинг топилган қийматларини (4) системанинг учинчи тенгламасига қўйиб, z ни топамиз:

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

бу ерда

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}.$$

Демак, агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (1) система ягона ечимга эга бўлиб, бу ечим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{8}$$

формулалар бўйича топилади. Бу формулалар *Крамер формулалари* дейилади.

Δ детерминант (1) *системанинг детерминанти* дейилади.

Шундай қилиб, қуйидаги даъволар исбот қилинди. Агар чизиқли системанинг детерминанти нолга тенг бўлмаса, система ягона ечимга эга бўлади. Агар системанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у ҳолда система ё ечимга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Крамер формулаларидаги Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминантлар Δ детерминантдан номаълумларнинг олдидаги коэффициентлардан иборат мос устунни озод ҳадлардан иборат устун билан алмаштиришдан ҳосил бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

(1) системани текширишнинг ва ечишнинг қараб чиқилган бу усули *номаълумларни йўқотиш усули* ёки *Гаусс усули* дейилади.

$c_3 \neq 0$ деган шартда (1) системанинг учинчи тенгламасидан z номаълум x ва y орқали ифодаланади ва z нинг бу қиймати биринчи ва иккинчи тенгламаларга қўйилади. Натижада икки номаълумли иккита тенглама системаси ҳосил бўлади. Бундай ҳолда уч номаълумли учта тенглама системаси z номаълумни йўқотиш усули ёрдамида икки номаълумли иккита тенглама системасига келтирилди дейилади. z нинг ўрнига бошқа исталган номаълумни йўқотиш мумкинлигини ва йўқотилаётган номаълумни у кирадиган исталган тенгламадан топиш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз.

1-мисол. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x = 3, \\ 2x + y = 8, \\ 4x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

Ечилиши. $x = 3$ ни системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, y ни топамиз: $y = 8 - 2x = 8 - 2 \cdot 3 = 2$.

Системанинг учинчи тенгламасига $x = 3$ ва $y = 2$ ни қўйиб, z ни топамиз:

$$z = 4x - 2y - 3 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 3 = 5.$$

Жавоби: $x=3,\ y=2,\ z=5$.

2-мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ x-2y=-4, \\ 3x+y-z=3. \end{cases}$$

Ечилиши. Системанинг биринчи иккита тенгламасидан $x=2,\ y=3$ ни топамиз.

Системанинг учинчи тенгламасига $x=2$ ва $y=3$ ни қўйиб, z ни топамиз: $z=3\cdot 2+3-3=6$.

Жавоби: (2; 3; 6).

3-мисол. Қуйидаги уч номаълумли учта тенглама системасини детерминантлар ёрдамида ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=14, \\ 3x-y+2z=5, \\ x+2y-z=7. \end{cases}$$

Ечилиши. Системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot(-5)+1\cdot 7=16.$$

$\Delta\neq 0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга. Энди Δ_x, Δ_y ва Δ_z ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}=14\cdot(-3)-3\cdot(-19)+1\cdot 17=32,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-19)-14\cdot(-5)+1\cdot 16=48,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot(-17)-3\cdot 16+14\cdot 7=16.$$

7-мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ 4x+6y-3z=0. \end{cases}$$

Ечилиши. Бу системани y ва z га нисбатан ечамиз. Биринчи тенгламадан

$$z=2x+3y$$

ни топамиз. Буни иккинчи тенгламага қўйиб,

$$4x+6y-3(2x+3y)=0$$

ни топамиз, яъни $2x+3y=0$. Демак,

$$y=-\frac{2}{3}x, \quad z=2x-2x=0.$$

Жавоби: $\left(x;\ -\frac{2}{3}x;\ 0\right),\ x\in R.$

8-мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} 3x+4y=25, \\ 5x-2y=7, \\ x+3y=15. \end{cases}$$

Ечилиши. Берилган система (1) кўринишдаги системанинг $c_1=c_2=c_3=0$ бўлгандаги хусусий ҳолидир. Бу системанинг учала тенгламасида z номаълум иштирок этмайди, демак, берилган система икки номаълумли учта тенглама системасидан иборатдир. Бу система ҳам номаълумларни йўқотиш усули билан ечилади.

Системанинг кейинги икки тенгламасини қарайлик:

$$\begin{cases} 5x-2y=7, \\ x+3y=15. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $x=3$, $y=4$ ни топамиз. x ва y нинг бу қийматлари берилган системанинг биринчи тенгламасини ҳам қаноатлантиргани учун:

$$3\cdot3+4\cdot4=25,$$

система $x=3$, $y=4$ ечимга эга ва бошқа ечимлар йўқ.

Агар берилган системани x, y, z уч номаълумли система деб қараладиган бўлса, у ҳолда у чексиз кўп ечимга эга бўлишини қайд қилиб ўтамиз: унинг ечимисонларнинг исталган $(3;\ 4;\ z)$, $z\in R$ учлиги бўлади.

9-мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x+y=9, \\ 5x-4y=1. \end{cases}$$

Ечилиши. Биринчи икки тенгламадан $x=2$ ва $y=3$ ни топамиз. Буларни учинчи тенгламага қўйиб, улар тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрамиз. Демак, берилган система ечимга эга эмас-экан.

5-§. *n* номаълумли чизиқли тенгламалар системалари

n номаълумли m та чизиқли тенглама системасини қараймиз. Номаълумлар ва тенгламалар сони кўп бўлганда номаълумларни турли индексли биргина ҳарф билан, масалан,

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

каби белгилаш, тенгламанинг коэффициентларини эса икки индексли ҳарф билан, масалан,

$$a_{ij}, \text{ бу ерда } i=1, 2, \dots, m; \; j=1, 2, \dots, n.$$

каби белгилаш қулайдир. Бу ерда биринчи индекс тенглама номерини, иккинчи индекс эса олдида бу коэффициент турган номаълумнинг номерини билдиради.

Бундай белгилашларда уч номаълумли учта тенглама системаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

n номаълумли m та чизиқли тенглама системаси қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) системанинг i-тенгламаси $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i$ ни қисқача $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$ кўринишда ёзиш мумкин, у ҳолда (1) система қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Бу ердаги $\sum$ белгиси (грек ҳарфи „сигма“) жамлаш белгиси дейилади, у j индексга $\sum$ белгиси остида кўрсатилган қийматдан то унинг юқорисида турган қийматгача бўлган барча бутун қийматларни бериб, берилган кўринишдаги ифодаларни жамлаш кераклигини билдиради.

Шуни қайд қиламизки, номаълумлар сони n ва тенгламалар сони m умумий ҳолда ўзаро боғланмаган. Бу ерда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

$$m = n, \quad m < n, \quad m > n.$$

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли *тенгламанинг ечими* деб шундай n та исталган сондан иборат чекли (c_1; c_2; $\ldots$; c_n) кетма-кетликка айтиладики, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\ldots$, $x_n = c_n$ бўлганда тенглама тўғри сонли тенгликка айланади.

(1) *системанинг ечими* деб системага кирувчи ҳар бир тенгламанинг ечими бўлган n та сондан иборат исталган чекли (c_1; c_2; $\ldots$; c_n) кетма-кетликка айтилади.

Икки ва уч номаълумли системалар каби n номаълумли m та тенглама системалари ҳам номаълумларни йўқотиш усули билан ечилади.

Мисол. Қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Ечилиши. Дастлаб системанинг биринчи, учинчи ва тўртинчи тенгламаларида x_1 номаълумни йўқотамиз. Бунинг учун иккинчи тенгламани 3 га кўпайтириб, учинчи тенгламадан ҳадма-ҳад айирамиз, сўнгра яна иккинчи тенгламани 2 га кўпайтирамиз ҳамда биринчи ва тўртинчи тенгламалардан ҳадма-ҳад айирамиз. Натижада берилган системага эквивалент бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ 14x_2 - 11x_3 + 7x_4 = 6, \\ 12x_2 - 8x_3 + x_4 = 8, \\ 9x_2 - 10x_3 + 7x_4 = -2. \end{cases}$$

Бу системани ечиш ундаги охирги уч номаълумли учта тенглама системаси

$$\begin{cases} 14x_2 - 11x_3 + 7x_4 = 6, \\ 12x_2 - 8x_3 + x_4 = 8, \\ 9x_2 - 10x_3 + 7x_4 = -2 \end{cases}$$

ни ечишга келтирилади. Бундай системалар олдинги параграфда ечилган эди. Бу системани маълум усуллардан бири, масалан, номаълумларни йўқотиш усули билан ечиб, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$ ни, сўнгра

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1$$

тенгламадан x_1 ни топамиз:

$$x_1 = -1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Шундай қилиб, тўртта сондан иборат (1; 2; 2; 0) кетма-кетлик берилган системанинг ечими бўлади. Система бошқа ечимга эга эмас.

Жавоби: (1; 2; 2; 0).

Бошқа мисол кўрмаймиз. Фақат шуни қайд қилиб ўтамизки, n номаълумли m та тенглама системасини ечиш номаълумлардан бирини йўқотиш орқали ҳар доим $n-1$ номаълумли $m-1$ та тенглама системасини ечишга келтирилади

6-§. Чизиқли программалаштириш масалалари ҳақида тушунча

Нон ташиш ҳақидаги содда масалани қараб чиқишдан бошлаймиз.

Мисол. Шаҳарнинг уч районини нон билан таъминлаш учун икки нон заводи мавжуд. Биринчи район ҳар куни 26 т, иккинчи район 14 т, учинчи район эса 10 т нон сарф қилади. 1-нон заводи ҳар куни 30 т, 2-нон заводи эса 20 т нон етказиб беради. Ҳар бир нон заводидан ҳар бир районга бир тонна нонни етказиб бериш жами пули сўм ҳисобида 1-жадвалда келтирилган.

I-жадвал

Район / Нон заводи	1	2	3
№ 1	3	4	6
№ 2	3	5	2

Нон ташишнинг энг тежамли планини (программасини) тузиш талаб қилинади.

Ечилиши. 1-нон заводидан биринчи районга ташиладиган нон миқдорини (тонна ҳисобида) x орқали белгилаймиз, шу заводдан иккинчи районга ташиладиган нонни эса y орқали белгилаймиз. У ҳолда 1-нон заводидан учинчи районга $30-x-y$ тонна нон ташилади. Биринчи район ҳар куни 26 тонна нон истеъмол қилгани учун $26-x$ тонна нонни 2-нон заводидан ташиб келиш керак бўлади. Шунга ўхшаш, 2-нон заводидан иккинчи районга $14-v$ тонна, учинчи районга эса $x+y-20$ тонна нон келтириш керак.

Демак, кунлик нон ташиш планини қуйидаги жадвал тарзида тасвирлаш мумкин.

II жадвал

Район Нон заводи	1	2	3
№1	x	y	$30-x-y$
№2	$26-x$	$14-y$	$x+y-20$

Ташиладиган ҳамма нonнинг жами пули S I жадвалдаги сонларнинг II жадвалдаги мос сонларга кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг эканлигини кўриш осон:

$$S=3x+4y+6(30-x-y)+3(26-x)+5(14-y)+$$
$$+2(x+y-20),$$

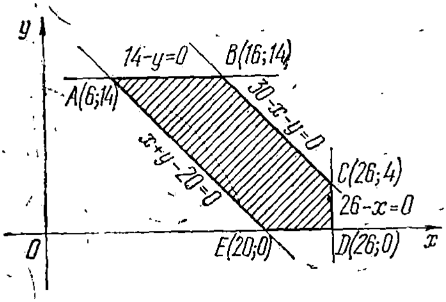
яъни

$$S=288-4x-5y. \qquad (1)$$

Шаҳарнинг маълум бир районига келтириладиган нон миқдори манфий бўла олмаслиги сабабли II жадвалдаги барча сонлар манфий бўлмаслиги лозим:

$$\left\{\begin{aligned} x&\geqslant 0,\\ y&\geqslant 0,\\ 30-x-y&\geqslant 0,\\ 26-x&\geqslant 0,\\ 14-y&\geqslant 0,\\ x+y-20&\geqslant 0.\end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Жами пули S ни координаталари (2) тенгсизликларни қаноатлантирадиган M нуқтанинг функцияси сифа-



4-расм.

тида қараш мумкин. Бундай барча нуқталар тўплами *ABCDE* кўпбурчак бўлади (4-расм).

S функция ўзининг энг кичик қийматини *ABCDE* кўпбурчакнинг учларидан бирида қабул қилишини кўрсатамиз.

Айтайлик, *S* функция *c* қийматни *ABCDE* кўпбурчакнинг бирор *M* нуқтасида қабул қилсин. Равшанки, бу қийматни у

$$288-4x-5y=c \qquad (3)$$

тенглама билан берилган *l* тўғри чизиқнинг барча нуқталарида қабул қилади.

Хусусан, *S* жами пул *l* тўғри чизиқнинг *ABCDE* кўпбурчакнинг чегараси билан кесишиш нуқталарида *c* га тенг.

Равшанки, агар *c* нинг бирор қийматида (3) тўғри чизиқ *ABCDE* кўпбурчакнинг ички нуқталари орқали ўтса, у ҳолда

$$288-4x-5y=c-\delta$$

тенглама билан берилган исталган тўғри чизиқ ҳам етарлича кичик $\delta>0$ да *ABCDE* кўпбурчакнинг ички нуқталари орқали ўтади. Шунинг учун *S* функциянинг бундай қиймати минимал бўла олмайди, бинобарин, у ўзининг энг кичик қийматини *ABCDE* кўпбурчакнинг фақат чегараси билангина кесишадиган (3) кўринишдаги тенглама билан берилган тўғри чизиқларда қабул қилади.

Кўриш осонки, кўпбурчакнинг фақат чегараси билан кесишадиган исталган тўғри чизиқ албатта унинг учидан ўтади. Бу ердан *S* функция ўзининг энг кичик қийматини *ABCDE* кўпбурчакнинг учларидан бирида қабул қилиши келиб чиқади.

Энди *S* нинг *ABCDE* кўпбурчакнинг ҳар бир учидаги қийматини топамиз:

$$\begin{cases} S(A)=288-4\cdot6-5\cdot14=194, \\ S(B)=288-4\cdot16-5\cdot14=154, \\ S(C)=288-4\cdot26-5\cdot4=164, \\ S(D)=288-4\cdot26=184, \\ S(E)=288-4\cdot20=208. \end{cases}$$

Бу ердан кўринадики, S нинг энг кичик қиймати 154 га тенг бўлиб, унга S функция B нуқтада, яъни $x=16$, $y=14$ да эришади.

Шундай қилиб, нон ташишнинг энг тежамли планини (энг тежамли программасини) қуйидаги жадвал тарзида келтириш мумкин.

III жадвал

Район / Нон заводи	1	2	3
№1	16	14	0
№2	10	0	10

S жами пулнинг энг катта қиймати 208 га тенг эканлигини ва S уни E (20; 0) нуқтада қабул қилишини қайд қиламиз. Шунга мос ташиш плани энг қиммат пландир. Унга нисбатан энг тежамли ташиш усули кунига 54 сўм, бир йилда эса 20 минг сўмга яқин фойда беради.

Биз энг содда транспорт масаласини қараб чиқдик. Иқтисод ва планлаштиришнинг кўпгина проблемалари ана шундай кўринишдаги масалаларга олиб келади; уларнинг ҳаммаси *чизиқли программалаштириш масалалари* дейилади.

Ана шундай масалалардан бирини умумий кўринишда таърифлаймиз. n та цемент заводи ва m та қурилиш мавжуд бўлсин. Заводларни 1 дан n гача, қурилишларни эса 1 дан m гача бўлган номерлар билан номерлаб чиқайлик.

i-завод a_i тонна цемент ишлаб чиқарсин, j-қурилиш эса b_j тонна цемент сарф қилсин. Ниҳоят i-заводдан j-қурилишга бир тонна цементни ташиш жами пули c_{ij} бўлсин.

Шундай ташиш планини (программасини) тузиш талаб қилинадики, бунда ташишга сарф бўладиган жами пул энг кам бўлсин.

Бу ерда шуни қайд қилиб ўтиш керакки, барча заводларда ишлаб чиқиладиган цемент миқдори қурилишларга зарур бўлган цемент миқдоричадир, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Бирор план асосида i-заводдан j-қурилишга келтириладиган цемент миқдорини x_{ij} орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Агар барча ташишларнинг жами пулини S орқали белгиласак, у ҳолда

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \tag{6}$$

Ташиш плани (программаси) $\{x_{ij},\ i = 1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m\}$ ни шундай танлаш керакки, ташишнинг жами пули энг кам (кичик) бўлсин Бу (4), (5) тенгламалар системасининг манфий бўлмаган барча ечимлари орасидан шундайини танлаш керак деган сўзки, унинг учун S функция ўзининг энг кичик қийматига эришсин

(6) функция *мақсад функцияси*, (4), (5) тенгликлар ва

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$$

тенгсизликлар эса *чеклашлар* дейилади.

Қўйилган масалани барча чеклашлар тенгсизликлар кўринишида бўладиган масалага келтириш мумкинлигини кўрсатамиз.

(4) тенгламаларнинг биринчи $m-1$ тенгламаси

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, m-1$$

дан x_{nj} ни топамиз:

$$x_{nj} = b_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ij},\ j = 1, \ldots, m-1. \tag{7}$$

Шунга ўхшаш, (5) тенгламаларнинг биринчи $n-1$ та тенгламасидан x_{im} ни топамиз:

$$x_{im} = a_i - \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij},\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Ниҳоят,

$$x_{nm} = a_n - \sum_{j=1}^{m-1} x_{nj} = a_n - \sum_{j=1}^{m-1} b_j + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}.$$

Ишлаб чиқиладиган (ва сарф қилинадиган) ҳамма цемент миқдорини B орқали белгилаймиз:

$$B = \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

У ҳолда

$$x_{nm} = -B + a_n + b_m + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}$$

ёки

$$x_{nm} = -\beta + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}, \tag{9}$$

бу ерда $\beta = B - a_n - b_m$.

Топилган (7), (8) ва (9) қийматларни жами пул S учун формулага қўйиб, ўхшаш ҳадларни ихчамласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} x_{ij} + A,$$

бу ерда

$$a_{ij} = c_{ij} - c_{nj} - c_{im} + c_{nm},$$

$$A = -\beta c_{nm} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{nj} b_j + \sum_{i=1}^{n-1} c_{im} a_i.$$

Шундай қилиб, юк ташишнинг энг тежамли планини танлаш қуйидаги масалага келтирилади: ушбу

$$b_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ij} \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m-1, \tag{10}$$

$$a_i - \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij} - \beta \geqslant 0 \tag{12}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи манфий бўлмаган

$$x_{ij} \ (i=1, \ldots, n-1; \ j=1, \ldots, m-1)$$

сонлар орасидан

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} x_{ij} + A$$

функция энг кичик қийматни қабул қиладиганларини топилсин.

Биз бу масаланинг ечимларини умумий кўринишда топиш усулларини келтирмасдан, балки айрим хусусий ҳолларнигина қараб ўтамиз.

Агар $n=m=2$ бўлса, у ҳолда

$$S=\alpha_{11}x_{11}+A \tag{13}$$

бўлиб, (10), (11), (12) тенгсизликлар эса қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} b_1-x_{11}\geqslant 0, \\ a_1-x_{11}\geqslant 0, \\ x_{11}-\beta\geqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

Бу ҳолда масаланинг ечимини топиш қийинчилик туғдирмайди, чунки (14) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x_{11}\geqslant 0$ лар тўплами кесмадан иборат бўлиб, (13) чизиқли функция эса ўзининг бу кесмадаги энг кичик қийматини кесманинг учларидан бирида қабул қилади.

Агар, масалан, $n=2$ ва $m=3$ бўлса, у ҳолда

$$S=\alpha_{11}x_{11}+\alpha_{12}x_{12}+A$$

бўлиб, (10), (11), (12) тенгсизликлар эса қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} b_1-x_{11}\geqslant 0, \\ b_2-x_{12}\geqslant 0, \\ a_1-x_{11}-x_{12}\geqslant 0, \\ x_{11}+x_{12}-\beta\geqslant 0. \end{cases}$$

Бу ҳол юқорида нон ташиш ҳақидаги масалада конкрет сон маълумотлар билан кўрилган эди. Сон маълумотлар бошқача бўлганда ҳам ечим шунга ўхшаш топилади.

Кўриб чиқилган масалаларда мақсад функцияси ўз ўзгарувчиларининг чизиқли функцияси эканлигини ва чеклашлар чизиқли тенгсизликлар ёки тенгликлар билан берилишини қайд қилиб ўтайлик. Шунинг учун бундай масалалар чизиқли программалаштириш масалалари дейилади. Шундай қилиб, чизиқли программалаштириш масалалари — бу мақсад функцияси ва чеклашлар чизиқли бўлган ҳолда ишлаб чиқариш оптимал программаларини топиш масалаларидир.

Машқлар

1. Қуйидаги иккинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 4^{\frac{1}{2}} & 81^{-\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{3}^{-4} & \sqrt{2^6} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 8^{-\frac{1}{3}} & \sin 30^\circ \\ \log_{\sqrt{2}} 8 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \sin 45^\circ & \mathrm{tg}\, 45^\circ \\ \mathrm{ctg}\, 45^\circ & \sin 45^\circ \end{vmatrix}$.

3. Исбот қилинг:

$$\begin{vmatrix} \log_4 2 & -\log^{8}{}_{1}\frac{1}{3} \\ 2\log_2 \frac{1}{64} & \log_{\frac{1}{3}} 81 \end{vmatrix} = 1.$$

4. Қуйидаги тригонометрик тенгламаларни ечинг:

а) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\, x & \sin x \\ \mathrm{ctg}\, x & \cos x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \mathrm{tg}\, x & \mathrm{ctg}\, x \end{vmatrix} = 0$.

5. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини детерминантлар ёрдамида топинг:

$$\begin{cases} 3x+2y-13=0, \\ 4x-3y-6=0. \end{cases}$$

6. k нинг қандай қийматида қуйидаги икки номаълумли иккита

$$\begin{cases} 3x+4y = 17, \\ 4x + ky = 4 \end{cases}$$

чизиқли тенглама системаси $x=3$, $y=2$ ечимга эга бўлади?

7. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

8. Агар

$$y = \begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x-3 & x-4 \end{vmatrix}$$

бўлса, $y'=0$ эканлигини исбот қилинг.

9. y функциянинг ҳосиласини топинг:

$$y=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix}.$$

10. Қуйидаги икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаларини детерминантлар ёрдамида ечинг:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 4x+y=14; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 4x+y=17, \\ 3x-5y=7; \end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases} 5x-3y=16, \\ 2x+4y=22; \end{cases} \quad \text{г)}\begin{cases} 5x-2y-6=0, \\ 7x-5y-4=0; \end{cases}$$

$$\text{д)}\begin{cases} 3x+4y=9, \\ 2x-5y=6; \end{cases} \quad \text{е)}\begin{cases} 4x-3y-7=0, \\ 8x-6y-14=0. \end{cases}$$

11. Қуйидаги икки номаълумли иккита бир жинсли чизиқли тенглама системаларининг ечимларини топинг:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x+2y=0, \\ 5x-3y=0; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 3x-2y=0, \\ 6x-4y=0; \end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases} 4x-5y=0, \\ 7x+2y=0; \end{cases} \quad \text{г)}\begin{cases} x+7y=0, \\ 2x+15y=0; \end{cases}$$

$$\text{д)}\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 4x-6y=0; \end{cases} \quad \text{е)}\begin{cases} 3x+5y=0, \\ 5x+3y=0. \end{cases}$$

12. Тенгламалари билан берилган қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси координаталарини детерминантлар ёрдамида топинг:

$$\text{а)}\begin{cases} 4x-3y-7=0, \\ 3x+2y-18=0; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 5x-4y-9=0, \\ 2x+3y-22=0. \end{cases}$$

13. α нинг мумкин бўлган барча қийматларида қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cdot x+3\cos\alpha\cdot y=6\sqrt{2}, \\ 4\sin\alpha\cdot x-5\cos\alpha\cdot y=\sqrt{2}. \end{cases}$$

14. Учинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

15. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}.$$

16. Детерминантларни ҳисобламасдан, уларнинг тенглигини исботланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Кўрсатма. Детерминантларнинг хоссаларидан фойдаланинг.

17. Тенгламаларни ечинг:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)}\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix} = 9; \quad \text{в)}\begin{vmatrix} x & -4 & 6 \\ 2 & -2x & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Тенгламаларни ечинг:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 8 = 0;$$

$$\text{б)}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

19. Исбот қилинг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy.$$

20. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 3x-y+z-4=0, \\ x+2y-z-4=0, \\ 2x+y+2z-16=0. \end{cases}$$

21. Исбот қилинг:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

22. Учлари A (2; 5), B (−4; 3), C (3; 0) нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

23. Исбот қилинг:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2).$$

24. Ушбу системанинг ечими мавжуд-мавжудмаслигини аниқланг:

$$\begin{cases} 3x+4y+1=0, \\ 2x-5y-30=0, \\ 4x+2y-12=0. \end{cases}$$

25. Тўғри чизиқ

$$4x-5y-1=0$$

тенглама билан берилган. Бу тўғри чизиқ

$$2x+3y-17=0,$$
$$x+2y-10=0$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтиш-ўтмаслигини текширинг.

26. Тенгламани ечинг:

$$\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix}=0.$$

27. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$\text{а) } y=\begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{б) } y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

28. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}.$$

29. Қуйидаги бир жинсли системани ечинг:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

30. Қуйидаги системани ечинг:

$$\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+2y+2z-16=0, \\ 4x-2y-5z+5=0. \end{cases}$$

31. Тўрт номаълумли тўртта тенглама системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x+4y-z-u=3, \\ 2x-y-2z+2u=9, \\ x+3y+5z-4u=2, \\ 4x-8y-3z+3u=10. \end{cases}$$

32. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x-(a-1)y=1, \\ ax-2y=4-a, \quad a\in R. \end{cases}$$

33. Қуйидаги системаларни ечинг:

а) $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=6, \\ 2x_1-\ \ x_2+3x_3=11, \\ 4x_1+\ \ x_2-5x_3=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2-4x_3=9. \\ 6x_1-5x_2+2x_3=17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=9, \\ 2x_1-\ \ x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-3x_3=-1, \\ x_1-3x_2+2x_3=10, \\ 3x_1-4x_2-\ \ x_3=5. \end{cases}$

34. a нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} (a-1)x-4y=11+a, \\ -x+(x+2)y=2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси: ягона ечимга, роса иккита ечимга эга бўлади, ечимга эга бўлмайди?

35. Икки нон заводи аҳоли яшайдиган уч пункт учун нон ёпади: 1-нон заводи ҳар куни 40 т, 2-нон заводи эса 20 т нон ёпади. Биринчи аҳоли яшайдиган пункт ҳар куни 30 т, иккинчи пункт 20 т, учинчи пункт эса 10 т нон сарф қилади. Ҳар қайси нон заводидан ҳар бир пунктга бир тонна нонни ташиш жами пули (сўм ҳисобида) қуйидаги жадвал кўринишида берилган.

Аҳоли яшайдиган пункт Нон заводи	№1	№2	№3
№ 1	3	4	5
№ 2	3	5	2

Нон ташишнинг энг тежамли планини тузиш талаб қилинади.

II БОБ

КОМПЛЕКС СОНЛАР

7-§. Комплекс сонларнинг таърифи

1. **Дастлабки мулоҳазалар.** Математиканинг кўпгина бўлимларида ва унинг татбиқларида фақат ҳақиқий сонларни қараш билан чекланиш мумкин эмас. Бу бўлимларнинг эҳтиёжлари сон тушунчасини умумлаштириш ва муҳокамамизга ҳақиқий сонлар тўпламига нисбатан анча кенг бўлган комплекс сонлар тўпламини киритишни тақозо этади.

Сонлар тўпламини кенгайтириш ғоясининг ўзи бирданига пайдо бўлгани йўқ: математикани ўрганишда унга ҳали кўп дуч келамиз. Бизнинг сон ҳақидаги тасаввуримиз ҳал этишимиз зарур бўлган масалалар доираси кенгайиб борган сари ўзгариб боради. Агар айрим масалаларни санаш учун натурал сонлар етарли бўлган бўлса, энди, масалан, $px+q=0$ (бу ерда $p \in N$, $q \in N$) тенгламаларни ечиш учун натурал сонларнинг ўзи камлик қилади—рационал сонлар керак бўлади. Ўз навбатида рационал сонлар кесмаларнинг узунликларини ўлчаш учун етарли бўлмайди. Исталган кесмани ўлчаш мумкин бўлиши учун рационал сонларга иррационал сонларни қўшиш керак, яъни сон дейилганда ҳақиқий сонни тушуниш керак. Фақат рационал сонлар билан чекланиб, $x^2-2=0$ тенгламани ечиш мумкин бўлмас эди, чунки рационал сонлар тўпламида бу тенглама ечимларга эга эмас.

Бироқ алгебраик тенгламаларни ечиш учун ҳақиқий сонлар ҳам етарли бўлмай қолди. Чунки ҳақиқий сонлар тўпламида манфий дискриминантли квадрат тенгламалар, шу жумладан, натурал коэффициентли энг содда квадрат тенгламалар, масалан, $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ тенгламалар ечимга эга бўлмайди.

Агар борган сари мураккаблашиб бораётган тенгламаларни ечиш учун ҳар гал янги, янада мураккаб сонларни киритиб бораверадиган бўлсак, аянчли аҳволга тушиб қолган бўлар эдик. Яхшики, бундай қилиш керак эмас экан. Алгебраик тенгламалар назарияси учун сон тушунчасини янада кенгайтириш, комплекс сонлардан ҳам умумийроқ сонларни* киритиш талаб қилинмайди.

Маълум бўлишича, комплекс сонлар тўпламида фақат ҳар қандай квадрат тенгламанинг барча ечимларигина эмас, балки ҳақиқий ёки комплекс коэффициентли ҳар қандай даражали алгебраик тенгламаларнинг барча ечимлари ҳам мавжуд бўлар экан

Комплекс сонларни кўпинча мавҳум сонлар дейилади. Бу ном унчалик қулай эмас, чунки бу ном комплекс сонлар тўғрисида улар қандайдир нореал нарса деган тасаввур пайдо қилиши мумкин. Бу ном бундай тушунтирилади: комплекс сонлар XVI асрдаёқ татбиқ қилинган бўлса-да, улар ҳатто буюк математикларга ҳам реал мавжуд бўлмаган, мавҳум (шу сўзнинг том маъносида) нарса бўлиб туюлган. Масалан, қуйидаги мулоҳаза дифференциал ва интеграл ҳисобнинг яратувчиларидан бири, немис математиги Г. Лейбницга (1646—1716) мансубдир: „Комплекс сон – бу илоҳий руҳнинг нозик ва ажойиб воситасидир, борлиқ ва йўқлик орасидаги деярлик амфибиядир“. Ҳозирда бу барча мистикадан „мавҳум сонлар“ деган номдан ташқари асар ҳам қолмади. К. Гаусс (1777—1855) давридаёқ комплекс сонларга текисликнинг нуқталари сифатида геометрик талқин берилган эди. XIX асрнинг буюк математиклари О. Коши, Г. Риман ва К. Вейерштрасс фаолияти туфайли комплекс сонлар базасида энг гўзал математик фанлардан бири – комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси яратилди.

Комплекс сонларга таъриф беришдан аввал қуйидаги саволларни ҳал қилайлик: янги сонлар қандай хоссаларга эга бўлиши керак, улар устида қандай амалларни киритиш мақсадга мувофиқ, киригилган амаллар қандай хоссаларга бўйсуниши керак?

Аввало, шуни эслайликки, натурал сонлардан бутун сонларга, бутун сонлардан рационал сонларга, рационал сонлардан ҳақиқий сонларга ўтишда ҳар гал қуйидаги шарт бажарилар эди: сонларнинг янги кенгайтирилган тўплами дастлабки тўпламни ўз ичига олар эди. Бутун сонлар натурал сонларни ўз ичига олар эди,

---

[*] Бундай сонлар мавжуд—улар гиперкомплекс сонлар деб аталади ва улар геометриянинг (айниқса ноевклид геометриянинг) ва механиканинг айрим бўлимларида татбиқ қилинади.

рационал сонлар тўпламига бутун сонлар кирар эди, ҳақиқий сонлар тўплами барча рационал сонларни ўз ичига олар эди. Комплекс сонларни киритишда ҳам бу шарт бажарилиши керак. Комплекс сонлар тўплами ҳар бир ҳақиқий сонни ўз ичига олиши керак.

Янги сонлар учун тенглик тушунчасини киритиш лозим. Янги сонлар учун қўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланиши лозим, бунда бу амаллар учун коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик қонунлари ўринли бўлиши керак. Комплекс сонлар ҳақиқий сонлар билан устма-уст тушиб қолганда янги қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳақиқий сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига айланиши лозим.

Комплекс сонлар тўпламида $x^2+1=0$ тенглама ечимга эга бўлсин деб талаб қилаётганимиз сабабли бирор янги сон киритишимиз ва уни бу тенгламанинг ечими деб қабул қилишимиз керак. Бу янги сонни i символи (ҳарфи) билан белгилаймиз. Шундай қилиб, i сон учун $i^2+1=0$ тенглик ўринли ёки янги сонлар учун тенгликларни ўзгартириш қоидалари аввалгисича қолишини талаб қилаётганимиз учун, юқоридан

$$i^2=-1$$

деб ёза оламиз.

Энди ҳақиқий сонлар тўпламини янги bi сонлар билан тўлдириш керак, бу сонларни мавҳум сонлар ёки соф мавҳум сонлар дейилади ва b ҳақиқий сонларнинг i сонга кўпайтмалари деб қаралади. Ниҳоят, a ҳақиқий сон билан bi мавҳум соннинг йиғиндисини $a+bi$ кўринишда ёзамиз.

Қўшиш амалини белгилаш учун „+“ белгиси ишлатилади, кўпайтмаларни ёзишда кўпайтириш белгиси — нуқтани тушириб қолдириб, кўпайтувчиларни ёнма-ён ёзилади. Тенг комплекс сонларни одатда тенглик белгиси „=“ билан бирлаштирилади.

a_1+b_1i' ва a_2+b_2i сонларнинг йиғиндисини бундай аниқлаш табиийдир:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i.$$

a_1+b_1i ва a_2+b_2i иккита комплекс соннинг кўпайтмасини шундай аниқлаш мақсадга мувофиқки, уни икки ҳадларни кўпайтиришнинг маълум (одатдаги) қоидаси бўйича бажариш мумкин бўлсин.

Бу қоидани татбиқ қилиб, кўпайтмани топамиз:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2,$$

ёки $i^2 = -1$ тенгликка асосан

$$(a_1 + b_1i)\ (a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Шундай қилиб, сонларнинг янги тўплами ҳақиқий сонлар тўпламини ўз ичига олиши керак; бу тўпламда одатдаги алгебраик қонунларга бўйсунувчи қўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган бўлиши керак; киритилган амаллар ҳақиқий сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига зид бўлиши керак эмас. Кейинги пунктда бу ҳамма талабларни қондириш мумкинлиги кўрсатилади.

2. Комплекс соннинг таърифи. Комплекс сонлар устида амалларнинг хоссалари. *Комплекс сонлар* деб $a + bi$ (a ва b—ҳақиқий сонлар, i—бирор символ) кўринишдаги ифодага айтилади ва бу сонлар учун тенглик тушунчаси ҳамда қўшиш-айириш амаллари қуйидагича киритилади:

а) иккита $a_1 + b_1i$ ва $a_2 + b_2i$ комплекс сон $a_1 = a_2$ ва $b_1 = b_2$ бўлганда ва фақат шундагина ўзаро тенг бўлади;

б) $a_1 + b_1i$ ва $a_2 + b_2i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси деб

$$a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

нга айтилади;

в) $a_1 + b_1i$ ва $a_2 + b_2i$ сонларнинг кўпайтмаси деб

$$a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

сонга айтилади.

Шундай қилиб, комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтириш қуйидаги формулалар асосида бажарилади:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \quad (1)$$

$$(a_1 + b_1i)\ (a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \quad (2)$$

Комплекс сонларни кўпинча битта ҳарф билан белгиланади, бунинг учун одатда z ёки w ҳарфларидан, баъзан индексли z_1, z_2, w_0 ҳарфлардан фойдаланилади. Масалан, ушбу $z = a + bi$ тенглик $a + bi$ комплекс сон z ҳарфи билан белгиланганлигини билдиради.

Юқорида киритилган қўшиш амали (1) ва кўпайтириш амали (2) қуйидаги хоссаларга эгалигига ишонч ҳосил қилиш осон.

1. Қўшишнинг коммутативлиги:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

2. Қўшишнинг ассоциативлиги:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

3. Исталган z_1 ва z_2 комплекс сонлар учун шундай z комплекс сон мавжудки, унинг учун $z_1 + z = z_2$. Бу сон z_2 ва z_1 сонларнинг *айирмаси* дейилади ва

$$z_2 - z_1$$

билан белгиланади.

4. Кўпайтиришнинг коммутативлиги:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

5. Кўпайтиришнинг ассоциативлиги:

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

6. Исталган $z_1 \neq 0 + 0i$ ва z_2 комплекс сонлар учун шундай z сон мавжудки, унинг учун $z_1 z = z_2$ Бу сон z_2 ва z_1 комплекс сонларнинг *бўлинмаси* дейилади ва $\frac{z_2}{z_1}$ каби белгиланади. *Ноль* деб аталувчи $0+0i$ комплекс сонга бўлиш мумкин эмас.

7. Дистрибутивлик:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Қўшиш ва кўпайтириш амалларининг санаб ўтилган барча хоссалари бу амалларнинг таърифларини берадиган (1) ва (2) формулалардан ҳамда комплекс сонларнинг тенглиги таърифидан келиб чиқади. 3,6,7-хоссаларни исбот қилайлик; қолган хоссаларнинг исботини ўқувчиларнинг ўзлари мустақил келтириб чиқаришларини тавсия қиламиз.

3-хоссанинг исботи. Айтайлик, $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ва $z = x + yi$ бўлсин. У ҳолда $z_1 + z = z_2$ тенглик қуйидагича ёзилади:

$$(a_1 + b_1 i) + (x + yi) = a_2 + b_2 i.$$

(1) формулага кўра

$$a_1 + x + (b_1 + y)\, i = a_2 + b_2 i,$$

бу ердан x ва y лар қуйидаги икки тенглама системасини қаноатлантириши кераклиги келиб чиқади:

$$\begin{cases} a_1 + x = a_2, \\ b_1 + y = b_2. \end{cases}$$

Бу система битта ва фақат битта $x = a_2 - a_1$, $y = b_2 - b_1$ ечимга эга.

Шундай қилиб, z_2 ва z_1 комплекс сонларнинг айирмаси ҳар доим мавжуд, шу билан бирга

$$z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i. \qquad (3)$$

(3) формула комплекс сонларни айириш қоидасини беради.

6-хоссанинг исботи. Айтайлик, $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ва $z = x + yi$ бўлсин. У ҳолда $z_1 z = z_2$ тенглик қуйидагича ёзилади:

$$(a_1 + b_1 i)\ (x + yi) = a_2 + b_2 i.$$

(2) формулага кўра

$$a_1 x - b_1 y + (a_1 y + b_1 x)i = a_2 + b_2 i,$$

бу ердан x ва y лар қуйидаги икки тенглама системасини қаноатлантириши кераклиги келиб чиқади:

$$\begin{cases} a_1 x - b_1 y = a_2, \\ b_1 x + a_1 y = b_2. \end{cases}$$

Бу системанинг детерминанти нолга тенг эмас:

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + b_1^2 \neq 0,$$

чунки шартга кўра $a_1 + b_1 i \neq 0 + 0i$. Шунинг учун система битта ва фақат битта ечимга эга бўлиб, уни топиш осон:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \qquad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Шундай қилиб, иккита комплекс соннинг бўлинмаси бўлувчи нолдан фарқли деган шартда ҳар доим мавжуд бўлиб, қуйидагича аниқланади:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}\, i. \qquad (4)$$

(4) формула комплекс сонларни бўлиш қоидасини беради.

7-хоссанинг исботи. Айтайлик, $z_1 = a_1 + b_1 i$,

$z_2 = a_2 + b_2 i$ ва $z_3 = a_3 + b_3 i$ бўлсин. 7-хоссадаги тенгликнинг чап томонини ҳисоблаймиз:

$$z_1(z_2 + z_3)=(a_1 + b_1 i)(a_2 + a_3 +(b_2 + b_3)i) =$$
$$= a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2-b_3)+(b_1(a_2 + a_3)+a_1(b_2+$$
$$+ b_3))i = a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (b_1a_2 +$$
$$+ b_1a_3 + a_1b_2 + a_1b_3)i.$$

7-хоссадаги тенгликнинг ўнг томонини ҳисоблаймиз:

$$z_1z_2 + z_1z_3 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)(a_3 +$$
$$+ b_3 i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + a_1a_3 - b_1b_3 +$$
$$+ (a_1b_3 + b_1a_3)i = a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 +$$
$$+(b_1a_2 + b_1a_3 + a_1b_2 + a_1b_3)i.$$

Шундай қилиб, $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ тенглик исботланди.

1—7-хоссаларнинг ўринли эканлиги комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳақиқий сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари қонунларига бўйсунишини билдиради.

Бундан ташқари, киритилган қўшиш ва кўпайтириш амаллари комплекс сонларни ҳақиқий сонларнинг умумлашмаси каби қараш, ҳақиқий сонларни эса комплекс сонларнинг хусусий ҳоли сифатида қарашга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, ҳамма комплекс сонларни қараб ўтирмасдан, балки фақат $a + 0i$ кўринишдаги комплекс сонларни қарайлик.

(1)—(4) формулалардан кўриш осонки, бундай сонларни қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш $(a \neq 0)$ натижасида ҳар доим яна шу кўринишдаги сонлар ҳосил бўлади. Бундан ташқари, равшанки, $a + 0i$ кўринишдаги комплекс сонлар устида амаллар бажариш қоидалари ҳақиқий сонлар устида тегишли амалларни бажариш қоидалари билан мутлақо бир хилдир. Бу икки ҳол $a + 0i$ комплекс сонни ҳақиқий сон a билан айнанлаштириб, $a + 0i = a$ деб хулоса қилишга имкон беради. Масалан,

$$0 + 0i = 0, \quad 1 + 0i = 1, \quad -1 + 0i = -1.$$

Шундай қилиб, ҳақиқий сонлар тўплами комплекс сонлар тўпламининг қисм тўпламидир.

$0 + bi$ комплекс сонни *соф мавҳум* сон деб аталишини ва оддийгина bi каби белгиланишини айтиб ўтамиз. Масалан,

$$0 - 2i = -2i, \quad 0 + 1i = i.$$

a ҳақиқий сон $a+bi$ комплекс соннинг *ҳақиқий қисми* дейилади. b ҳақиқий сон $a+bi$ комплекс соннинг *мавҳум қисми* дейилади. i комплекс сонни *мавҳум бирлик* деб аташ қабул қилинган.

Комплекс сонларнинг таърифига кўра иккита $z_1=a_1+b_1i$ ва $z_2=a_2+b_2i$ комплекс сон $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ бўлганда, яъни бу сонларнинг ҳақиқий қисмлари ҳам ва мавҳум қисмлари ҳам тенг бўлганда ва фақат шунда ўзаро тенг бўлади. Шуни қайд қиламизки, комплекс сонларнинг битта тенглиги $z_1=z_2$ ҳақиқий сонларнинг иккита тенглиги $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ га тенг кучлидир. Яна шуни ҳам қайд қиламизки, комплекс сонлар учун „катта“, „кичик“ тушунчалари аниқланмайди. $z>0$, $1+i<2$ ва буларга ўхшаш ёзувлар ҳеч қандай маънога эга эмас.

Комплекс сонларни кўпайтиришни аниқловчи (2) формулага қайтамиз. Унда $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$ деб, муҳим $ii=-1$ муносабатни ёки ii кўпайтма учун қисқача $ii=i^2$ ёзувни қўллансак,

$$i^2=-1 \tag{5}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (2) формула бўйича аниқланадиган кўпайтириш $x^2+1=0$ тенглама ечимининг мавжудлигини таъминлайди.

Яна шуни ҳам қайд қиламизки, (2) формулани ёдда сақлашга ҳожат йўқ, чунки агар a_1+b_1i ва a_2+b_2i иккиҳадларни кўпайтиришнинг одатдаги қоидаси бўйича формал кўпайтириб, сўнгра (5) формулага кўра i^2 ни -1 билан алмаштирилса, бу формула автоматик ҳосил бўлади.

1-мисол. $z_1=2+5i$ ва $z_2=-1+7i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг.

Йиғиндини (1) формулага кўра топамиз:

$$z_1+z_2=(2+5i)+(-1+7i)=1+12i.$$

Кўпайтмани $2+5i$ ва $-1+7i$ иккиҳадларни формал кўпайтириш орқали топамиз ва (5) формулани ҳисобга оламиз:

$$z_1z_2=(2+5i)(-1+7i)=$$
$$=-2+14i-5i+35i^2=-37+9i.$$

2-мисол. $z_1 = x + yi$ ва $z_2 = x - yi$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг. Йиғиндини (1) формула бўйича топамиз:

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

Кўпайтмани иккиҳадларни кўпайтириш қоидаси бўйича топамиз:

$$z_1 z_2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + \\ + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

$x + yi$ ва $x - yi$ сонлар, яъни мавҳум қисмининг ишораси билангина фарқланувчи комплекс сонлар *қўшма комплекс сонлар* дейилади. z сонга қўшма бўлган сон $\bar{z}$ орқали белгиланади. 2-мисол қўшма комплекс сонларнинг йиғиндиси $z + \bar{z}$ ҳар доим ҳақиқий сон бўлишини, кўпайтмаси $z\bar{z}$ эса манфий бўлмаган ҳақиқий сон бўлишини кўрсатади.

3-мисол. $z_1 = -1 + 6i$ ва $z_2 = 2 + 5i$ комплекс сонлар берилган, $z_2 - z_1$ айирма ва $\frac{z_2}{z_1}$ бўлинмани топинг.

(3) формула бўйича айирмани топамиз:

$$z_2 - z_1 = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 3 - i.$$

Бўлинмани (4) формула бўйича топамиз:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 + 5i}{-1 + 6i} = \frac{(-1)\cdot 2 + 6\cdot 5}{(-1)^2 + 6^2} + \\ + \frac{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 6}{(-1)^2 + 6^2} i = \frac{28}{37} - \frac{17}{37} i.$$

Кейинги пунктда комплекс сонларнинг бўлинмасини топишнинг соддароқ, (4) формулани ёдда сақлашни талаб этмайдиган усули келтирилади.

4-мисол. Ушбу

$$z = \frac{(1 + i)(1 - 2i)}{3 + i}$$

комплекс сонни топинг.

Суратдаги комплекс сонларни ўзаро кўпайтирамиз.

$$z = \frac{(1 + i)(1 - 2i)}{3 + i} = \frac{1 - 2i + i - 2i^2}{3 + i} = \frac{3 - i}{3 + i}.$$

Энди (4) формуладан фойдаланиш мумкин, бироқ бошқача йўл тутган маъқулроқ. $\frac{3-i}{3+i}$ касрнинг сурат ва махражини $3-i$ га, яъни махражнинг қўшмасига кўпайтирамиз, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$z=\frac{3-i}{3+i}=\frac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{9-3i-3i+i^2}{9+1}=$$

$$=\frac{8-6i}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,i.$$

Машқлар

1. z_1 ва z_2 комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг:

а) $z_1=5+4i,\quad z_2=-2+3i;$

б) $z_1=0{,}5-3{,}2i,\quad z_2=1{,}5-0{,}8i;$

в) $z_1=-8-7i,\quad z_2=-3i;$

г) $z_1=5+\sqrt{3}\,i,\quad z_2=5-\sqrt{3}\,i.$

2. z_2-z_1 айирма ва $\frac{z_2}{z_1}$ бўлинмани топинг:

а) $z_1=1+i.\quad z_2=1-i;$

б) $z_1=1+2i,\quad z_2=5;$

в) $z_1=-1+\sqrt{3}\,i,\quad z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i;$

г) $z_1=a-\sqrt{b}\,i,\quad z_2=a+\sqrt{b}\,i.$

3. Ҳисобланг:

а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\,i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)i;$

б) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i};$

в) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right);$

г) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2i}\right)^2;$

д) $i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16}.$

4. Комплекс соннинг ҳақиқий қисмини топинг:

а) $z=\frac{(1+2i)^3}{i}+i^{19};$

б) $z=\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}+\frac{1}{i}.$

5. Комплекс соннинг мавҳум қисмини топинг:

$$а)\ z = (2 - i)^3(2 + 11i);$$

$$б)\ z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$$

6. Комплекс сонларни топинг:

$$а)\ z = i + \frac{6i + 1}{1 - 7i};$$

$$б)\ z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2};$$

$$в)\ z = (2 + i)^5;$$

$$г)\ z = \frac{5 + 12i}{8 - 6i} + \frac{(1 + 2i)^2}{2 + i}.$$

7. Тенгламаларни ечинг:

$$а)\ (i - z)(1 + 2i) + (1 - iz)(3 - 4i) = 1 + 7i,$$

$$б)\ z^2 + \overline{z} = 0.$$

8. x ва y нинг қандай ҳақиқий қийматларида $z_1 = x^2 - 7x + 9yi$ ва $z_2 = y^2i + 20i - 12$ комплекс сонлар тенг бўлади?

9. x ва y нинг қандай ҳақиқий қийматларида $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ ва $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ комплекс сонлар қўшма бўлади?

10. Тенгликни исбот қилинг:

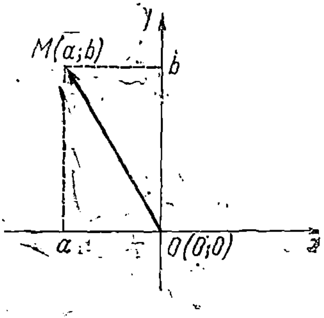
$$а)\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad б)\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

11. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

8-§. Комплекс сонларнинг геометрик талқини. Комплекс соннинг модули ва аргументлари

1. Комплекс текислик. Маълумки, ҳақиқий сонлар тўплами билан тўғри чизиқ нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. Бундай мослик мавжудлиги алгебра ва анализда кўпчилик ҳолларда фойдали бўлган геометрик талқиндан фойдаланишга имкон беради. Агар комплекс сонлар тўплами ва координаталар текислиги нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатадиган бўлсак, геометрик терминология ва геометрик талқиндан комплекс сонларни ўрганишда ҳам муваффақият билан фойдаланиш мумкин. Бундай мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин. Ҳар бир $a + bi$ комплекс сонга координаталар текислигининг $M(a;\ b)$ нуқтасини, яъни абсциссаси комплек соннинг ҳақиқий қисмига, ординатаси эса мавҳум қис



5-расм.

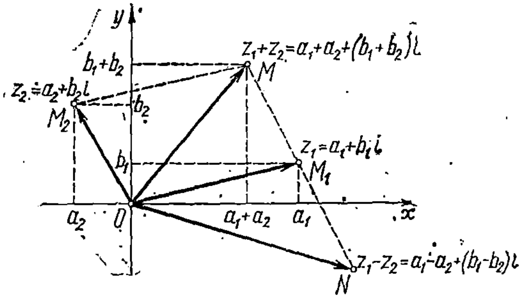
ига тенг бўлган нуқтани мос қўямиз. Координаталар текислигининг ҳар бир $M(a; b)$ нуқтасига $a+bi$ комплекс сонни мос келтирамиз (5-расм). Равшанки, бундай ҳосил қилинган мослик ўзаро бир қийматли бўлади. Бу мослик комплекс сонларни координаталар системаси танлаб олинган бирор текисликнинг нуқталари сифатида талқин қилишга имкон беради. Бунда координаталар текислигининг ўзи *комплекс текислик* дейилади. Абсциссалар ўқида $a+0i$ комплекс сонларга мос келувчи, яъни ҳақиқий сонларга мос келувчи нуқталар ётганлиги учун бу ўқ *ҳақиқий ўқ* деб аталади. Ординаталар ўқи *мавҳум ўқ* дейилади—бу ўқда $0+bi$ соф мавҳум комплекс сонларга мос келувчи нуқталар ётади.

$a+bi$ комплекс сонни $\overrightarrow{OM}$ вектор (5-расмга қ.), яъни $O(0; 0)$ координаталар бошидан чиқиб, $M(a; b)$ нуқтага борувчи вектор каби талқин этиш ҳам муҳим ва қулайдир. $\overrightarrow{OM}$ вектор ўрнига унга тенг бўлган исталган векторни олиш мумкин, албатта. Равшанки, текисликнинг боши $O(0; 0)$ нуқтада ва охири $M(a; b)$ нуқтада бўлган ҳар қандай векторига $a+bi$ комплекс сон мос келади ва аксинча. Ноль векторга $0+0i$ комплекс сон мос келади.

Комплекс сонлар тўплами билан текисликнинг нуқталари ёки векторлари тўплами орасида ўрнатилган мослик комплекс сонларни нуқталар ёки векторлар деб аташ ва, масалан, $a+bi$ вектор ёки $a+bi$ нуқта ҳақида гапиришга имкон беради.

Комплекс сонларни векторлар билан тасвирлаш комплекс сонлар устидаги амалларга содда геометрик талқин беришга имкон яратади. Ҳозирча комплекс сонларни қўшиш ва айиришгагина тўхталамиз. Кўпайтиришнинг геометрик маъноси кейинроқ ойдинлаштирилади.

$z_1 = a_1 + b_1 i$ ва $z_2 = a_2 + b_2 i$ сонларни қўшишда уларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари қўшилади (6-расм). Уларга мос $\overrightarrow{OM_1}$ ва $\overrightarrow{OM_2}$ векторларни қўшишда бу векторларнинг координаталари қўшилади. Шунинг учун



6-расм.

комплекс сонлар ва векторлар орасида юқорида ўрнатилган мосликка кўра z_1 ва z_2 сонларнинг йиғиндиси z_1+z_2 га $\overrightarrow{OM_1}$ ва $\overrightarrow{OM_2}$ векторларнинг йиғиндисига тенг бўлган $\overrightarrow{OM}$ вектор мос келади. Шундай қилиб, комплекс сонларнинг йиғиндиси геометрик нуқтаи назардан қўшилаётган комплекс сонларга мос келувчи векторларнинг йиғиндиси каби талқин қилиниши мумкин. Худди шунга ўхшаш, z_1-z_2 айирма векторларнинг $\overrightarrow{OM_1}-$ $-\overrightarrow{OM_2}$ айирмасига мос келувчи $\overrightarrow{M_2M_1}$ (ёки $\overrightarrow{ON}$) векторга мос келишини кўрсатиш мумкин (6-расм).

Машқлар

1. Қуйидаги векторларни ясанг: $z=3+2i$, $z=5-4i$, $z=-6+3i$, $z=-1-i$, $z=\cos 30°-i\sin 30°$, $z=\cos 150°+i\sin 150°$, $z=-2$, $z=i$.

2. Комплекс текисликда z_1, z_2, z_3 нуқталар берилган бўлиб, улар бирор параллелограммнинг кетма-кет учта учидир. Бу параллелограммнинг тўртинчи учини топинг.

3. Комплекс текисликда $z_1=6+8i$, $z_2=4-3i$ нуқталар берилган. z_1 ва z_2 векторлар ҳосил қилган бурчак биссектрисасида ётган нуқталарга мос келувчи комплекс сонларни топинг.

2. Комплекс соннинг модули. Комплекс соннинг модули-тушунчасини кўриб чиқамиз.

Таъриф. *Комплекс соннинг модули* деб бу сонга мос келувчи векторнинг узунлигига айтилади.

z соннинг модули учун $|z|$ белгилашдан фойдаланилади. Кўпинча модулни r ҳарфи билан ҳам белгиланади. $z=a+bi$ комплекс соннинг модули учун

Пифагор теоремасига кўра қуйидаги муҳим формула ҳосил қилинади (5-расмга қаранг):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

бу формула комплекс соннинг модулини унинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари орқали ифодалайди.

$z = a + 0i$ ҳақиқий сон учун унинг модули бу соннинг абсолют қиймати билан бир хил бўлади:

$$|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Равшанки, $z = a + bi$ ва $\bar{z} = a - bi$ қўшма сонлар бир хил модулларга эга.

7-§, 2-мисолда ҳосил қилинган натижани энди бундай ёзиш мумкин:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

яъни *қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмаси улар модулининг квадратига тенг.*

Энди комплекс сонларни бўлиш учун 7-§ даги (4) формулани эслаб қолиш шарт эмаслигини қайд қилиб ўтамиз.

Ушбу

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2}$$

муносабат z_2 ва z_1 сонларни бўлишни z_2 ва $\bar{z}_1$ сонларни кўпайтириш ва $z_2\bar{z}_1$ кўпайтмани $|z_1|^2$ ҳақиқий мусбат сонга бўлишга олиб келиш имконини беради. 7-§ даги 4-мисолда (2-пункт) бу усулдан фойдаланган эдик. Бу усулни яна битта мисолда намойиш этамиз.

1-мисол. Ушбу $\frac{i-1}{4-5i}$ бўлинмани топинг.

Касрнинг сурат ва махражини махражнинг қўшмасига кўпайтириб, топамиз:

$$\frac{i-1}{4-5i} = \frac{(i-1)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{4i+5i^2-4-5i}{16+25} = -\frac{9}{41} - \frac{1}{41}i.$$

Мазкур пунктнинг охирида иккита комплекс соннинг айирмаси модулининг геометрик маъноси тўғрисида ҳам тўхталиб ўтамиз.

Модулнинг таърифига кўра $|z_1 - z_2|$ ифода $z_1 - z_2$ векторнинг узунлигидир. Бу вектор 6-расмда тасвирланган. У $\overrightarrow{ON}$ вектордан иборат бўлиб, унинг узунлиги M_1 ва M_2 нуқталар орасидаги масофани беради.

Шундай қилиб, *икки комплекс сон айирмасининг модули комплекс текисликда бу комплекс сонларга мос келувчи нуқталар орасидаги масофадан иборатдир.* Икки комплекс сон айирмаси модулининг бу геометрик талқини баъзи масалаларни ечишда содда геометрик фактлардан фойдаланиш имконини беради.

2-мисол. Комплекс текисликнинг қандай нуқталари тўплами ушбу шарт билан берилади:

а) $|z-1-i|=|z+1+i|$,

б) $|z+i|=1$,

в) $1\leqslant|z+2|\leqslant 2$?

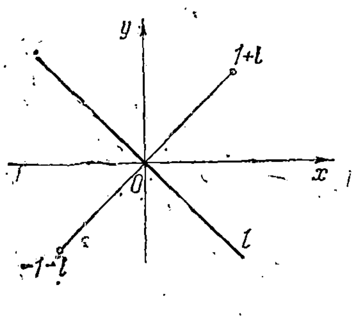
а) Ушбу $|z-(1+i)|=|z-(-1-i)|$ шартни комплекс текисликнинг $z_1=1+i$ ва $z_2=-1-i$ нуқталардан тенг узоқлашган нуқталари ва фақат шундай нуқталари қаноатлантиради. Текисликнинг берилган икки нуқтадан тенг узоқлашган нуқталар тўплами берилган нуқталарни туташтирувчи кесмага перпендикуляр ва унинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқдан иборатдир. 7-расмда изланаётган тўпламни тасвирловчи l тўғри чизиқ келтирилган.

б) $|z+i|=1$ муносабатни комплекс текисликнинг $z_1=-i$ нуқтадан бирга тенг масофада ётган нуқталари ва фақат шундай нуқталари қаноатлантиради. Бундай нуқталар маркази $z_1=-i$ нуқтада ва радиуси бирга тенг бўлган айланада ётади (8-расм).

в) Икки комплекс сон айирмаси модулининг геометрик талқинидан

$$1\leqslant|z+2|\leqslant 2$$

шартни қаноатлантирувчи z комплекс сонлар марказлари $z_1=-2$ нуқтада ҳамда радиуслари 1 ва 2 га тенг бўлган концентрик айланалар ҳосил қилган ҳалқанинг ичида ва чегарасида ётишлиги келиб чиқади. 9-расмда изланаётган нуқталар тўплами штрихлаб кўрсатилган.



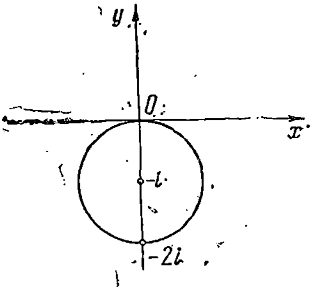
7-расм.

Машқлар

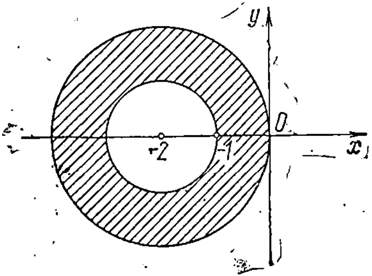
4. Комплекс соннинг модулини топинг:

а) $z=-3$, б) $z=-i$,

в) $z=7$, г) $z=1-i$



8-расм.



9-расм.

д) $z = \cos\pi + i\sin\pi$,

е) $z = -5 - 2\sqrt{6}\,i$.

5. Тенгламаларни ечинг:

а) $|z| - iz = 1 - 2i$,

б) $z^2 + 3|z| = 0$,

в) $z^2 + |z|^2 = 0$.

6. Тенгламалар системасини ечинг:

$$|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|.$$

7. Комплекс текисликнинг қандай нуқталари тўплами қуйидаги шарт билан берилади:

а) $|z| < 1$;

б) $|z| = 2$,

в) $|z - i| \leqslant 0$,

г) $|z + 2| < |z-2|$,

д) $|z + 1| < |z - i|$,

е) $|z + 2i - 1| \leqslant 2$,

ж) $2 < |z - 1 + 2i| < 3$,

з) $\sin|z| > 0$,

и) $\lg|z - 10i| < 1$,

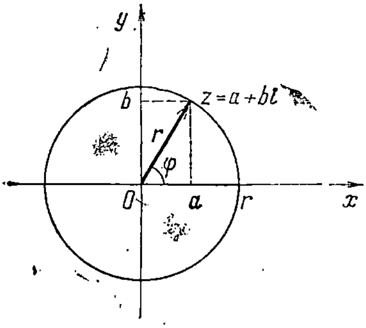
к) $|z|^2 + 3z + 3 = 0$?

8. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} |z + 1| = |z + 2|, \\ |3z + 9| = |5z + 10i|. \end{cases}$$

3. Комплекс соннинг аргументлари. Равшанки, бир хил $|z| = r$ модулга эга бўлган z комплекс сонлар комплекс текисликнинг r радиусли ва маркази $z = 0$ нуқтада бўлган айланада ётувчи нуқталарига мос келади (10-расм). Агар $|z| \neq 0$ бўлса, у ҳолда берилган модулга эга бўлган чексиз кўп сонлар мавжуддир. Фақат бир комплекс сон, яъни $z = 0$ комплекс сон нолга тенг модулга эга.

Берилган $|z| = r \neq 0$ модулга эга бўлган комплекс сонлар тўпламидан бирорта тайин комплекс сонни ажратиб кўрсатиш учун z векторга йўналиш бериш (ма-



10- расм.

салан, φ бурчакни бериш, 10- расмга қаранг) етарли эканлиги геометрик нуқтаи назардан аёндир.

Таъриф. $z \neq 0$ комлекс соннинг *аргументи* деб, ҳақиқий ўқнинг мусбат йўналиши билан z вектор орасидаги бурчакка айтилади, бунда ҳисоб соат стрелкаси йўналишига қарши олинаётган бўлса, бурчак катталиги мусбат, ҳисоб соат стрелкаси йўналиши бўйича олинаётган бўлса, манфий деб қабул қилинади.

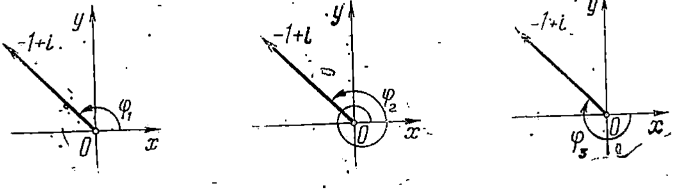
$z = a + bi$ комплекс соннинг аргументларини белгилаш учун $\arg z$ ёки $\arg (a + bi)$ белгилашлар ишлатилади. Модуль ва аргументнинг берилиши билан комплекс сон бир қийматли аниқланади. $z = 0$ сон учун аргумент аниқланмайди, бироқ ана шу ҳолда ва фақат шу ҳолдагина комплекс сон фақат ўз модули билан берилади.

Комплекс соннинг аргументи унинг модулидан фарқли ўлароқ бир қийматли аниқланмайди. Масалан, $-1 + i$ соннинг аргументлари $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$, $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$ бурчаклар, ва умуман, $\varphi_k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ бурчакларнинг ҳар бири бўлади (11-расм). Комплекс соннинг исталган икки аргументи бир-биридан 2π га каррали қўшилувчи билан фарқ қилади.

Машқлар

9. Комплекс соннинг аргументларини топинг:

а) $z = i$, б) $z = 1 + i$, в) $z = -1$.



11- расм.

г) $z = 8$, д) $z = -3i$, е) $z = 2 - 2i$.

10. Комплекс текисликнинг қандай нуқталари тўплами қуйидаги шарт билан берилади:

а) соннинг аргументларидан бири 0 га тенг,

б) аргументларидан бири $\frac{\pi}{2}$ га тенг,

в) аргументларидан бири $\frac{5\pi}{2}$ га тенг,

г) аргументлардан бири φ қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради: $2\pi < \varphi < 3\pi$,

д) аргументлардан бири φ қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$?

11. Комплекс текисликнинг қандай нуқталари тўплами

$$\arg z = (2n + 1)\pi, \ n \in Z$$

шарт билан берилади?

12. $|z + 1 - i| \leqslant 1$ шартни қаноатлантирадиган z комплекс сонлар ичидан энг кичик мусбат аргументга эга бўлганини топинг.

13. $|z - 5i| \leqslant 3$ шартни қаноатлантирадиган z комплекс сонлар ичидан энг кичик мусбат аргументга эга бўлганини топинг.

9-§. Комплекс сонларни ёзилишининг турли шакллари. Комплекс сонлар устида амаллар

1. Комплекс сонни ёзилишининг алгебраик ва тригонометрик шакллари. z комплекс соннинг $a + bi$ кўринишда ёзилиши *комплекс соннинг алгебраик шаклдаги ёзуви* дейилади.

Комплекс сонларни ёзилишининг алгебраик шаклидан ташқари яна унинг тригонометрик шакли ва кўрсаткичли шаклидан ҳам фойдаланилади.

Комплекс сонларни ёзилишининг тригонометрик шаклини қараб чиқамиз. Кўрсаткичли шаклдаги ёзув тўғрисида 6-пунктда сўз юритилади.

$z = a + bi$ комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари унинг $|z| = r$ модули ва φ аргументи орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Бу боғланишни 10-расмга қараб осонгина аниқлаш мумкин. Шундай қилиб, z комплекс сон

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

кўринишда ёзилиши мумкин экан. Бу ерда r — комплекс соннинг модули, φ эса унинг (исталган) аргументларидан бири.

Комплекс сонниңг

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

кўринишдаги ёзуви униңг *тригонометрик шаклдаги ёзуви* дейилади.

Комплекс сонларниңг тригонометрик шаклдаги ёзуви кўп ҳолларда униңг алгебраик шаклдаги ёзувига қараганда қулайроқ бўлади.

$z = a + bi$ комплекс сонниңг алгебраик шаклдаги ёзувидан униңг тригонометрик шаклдаги ёзувига ўтиш учун z ниңг модулини ва аргументларидан бирини топиш кифоядир. Модуль ушбу формуладан топилади:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

r модулни топгач, аргументни ушбу системадан топамиз:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}. \end{cases} \qquad (1)$$

1-мисол. $z = 1 - i$ сонни тригонометрик шаклда ёзинг.

Модулни топамиз:

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

φ аргумент учун қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Бу системаниңг ечимларидан бири, масалан, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ бўлади, демак, берилган комплекс сон тригонометрик шаклда қуйидагича ёзилади:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Ушбу

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ёзув ҳам тригонометрик шаклдаги ёзув бўлиши аёндир.

$1-i$ сон тригонометрик функцияларнинг қийматлари орқали бошқа усуллар билан ҳам ёзилиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз, масалан,

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ёки

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$1-i$ соннинг бу ёзувлари тўғри бўлса-да, улар $1-i$ соннинг тригонометрик шаклдаги ёзувлари эмаслигини тушуниш муҳимдир.

Яна бир марта таъкидлаб ўтамизки, $a+bi$ сонни тригонометрик шаклда ёзиш учун (1) системанинг ҳамма ечимларини топиш шарт бўлмасдан, балки битта ечимни билиш кифоядир.

1-изоҳ. (1) системани ечиш учун кўп ҳолларда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a} \qquad (2)$$

тенгламага ўтиш қулайдир.

Бу тенглама (1) системанинг натижасидир. У системанинг иккинчи тенгламасини биринчи тенгламага ҳадма-ҳад бўлишдан келиб чиққан. (1) системанинг ҳар бир ечими (2) тенгламанинг ечими бўлади. Тескари даъво ўринли эмас, бинобарин, (2) тенглама (1) системага эквивалент эмас. Бироқ (2) тенгламанинг ечимлари топилган бўлса, уларнинг орасидан (1) системани қаноатлантирадиганларини танлаб олиш осондир. Бунинг учун $z=a+bi$ нуқта комплекс текисликнинг қайси квадрантида ётишлигига қараш керак. Комплекс соннинг алгебраик шаклдаги ёзувидан буни ҳар доим билиш осон. Тегишли мисол кўрамиз:

2-мисол. $z=-1-\sqrt{3}i$ сонни тригонометрик шаклда ёзинг.

Берилган соннинг модулини топамиз:

$$r=|-1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2.$$

z соннинг аргументлари $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$ тенгламани қаноатлантириши лозим.

Бу тенгламанинг ечимлари:

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$$

$z=-1-\sqrt{3}i$ сон комплекс текисликнинг учинчи квадрантида ётганлиги учун

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z$$

қийматларни ташлаб юбориш керак: улар (1) системани қаноатлантирмайди. $z=-1-\sqrt{3}i$ соннинг аргументи сифатида, масалан, $\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi$ ни олиш мумкин.

Шундай қилиб,

$$-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

2-изоҳ. Равшанки, (1) системадан (2) тенгламага ҳар доим ҳам ўтавериш керак эмас. Масалан, $a=0$ да биринчидан бундай қилишнинг ҳожати йўқ, иккинчидан бундай ўтишнинг ўзи мумкин ҳам эмас. Бундай ҳолда соннинг аргументи ё $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (агар $b>0$ бўлса), ёки $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ (агар $b<0$ бўлса) бўлиши аёндир.

Машқ

1. Комплекс сонни тригонометрик шаклда ифодаланг:

а) $z=\sqrt{3}-i$, б) $z=-2$, в) $z=1$,

г) $z=i^{17}$, д) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$,

е) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, ж) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

2. Тригонометрик шаклда ёзилган комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлиш. Комплекс сонларнинг тригонометрик шаклдаги ёзуви комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлишда жуда қулай бўлар экан. Айтайлик,

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\text{ ва }z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

тригонометрик шаклда ёзилган иккита комплекс сон бўлсин. У ҳолда

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

ёки

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).\qquad(1)$$

Шундай қилиб, қуйидаги даъво ўринлидир:

Иккита комплекс сон кўпайтмасининг модули бу сонлар модулларининг кўпайтмасига тенг, кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндиси кўпайтманинг аргументидан иборат.

Бўлинма учун, сурат ва махражни махражнинг қўшмасига кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}$$

ёки

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (2)$$

Демак, *иккита комплекс сон бўлинмасининг модули бу сонлар модулларининг бўлинмасига тенг бўлиб, бўлинувчи ва бўлувчи аргументларининг айирмаси бўлинманинг аргументидан иборатдир.*

1-мисол. $z=\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}+i)}{i-1}$ комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг.

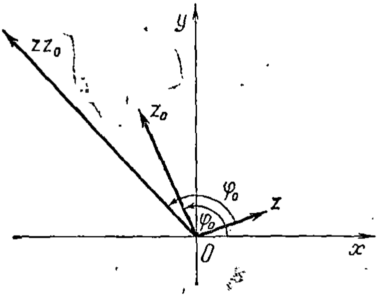
$z_1=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$ соннинг модули 1 га, аргументи $\varphi_1=-\frac{\pi}{3}$ га тенг; $z_2=\sqrt{3}+i$ соннинг модули 2 га, аргументи $\varphi_2=\frac{\pi}{6}$ га тенг; $z_3=i-1$ соннинг модули $\sqrt{2}$ га, аргументи $\varphi_3=\frac{3\pi}{4}$ га тенг. Шунинг учун $|z|=$ $=\frac{|z_1|\cdot|z_2|}{|z_3|}=\frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ бўлиб, аргумент қуйидагига тенг:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{11}{12}\pi.$$

Демак,

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right).$$

(1) формула z комплекс соннинг z_0 комплекс сонга кўпайтмасига геометрик талқин беришга имкон беради. z ва z_0 сонларнинг кўпайтмаси вектор бўлиб, у z век-



12- расм.

торни z_0 соннинг аргументи қадар бурчакка буриш ва уни $|z_0|$ марта чўзиш (сиқиш) орқали ҳосил қилиниши мумкин (12- расм).

Хусусий ҳол — комплекс сон z ни i мавҳум бирликка кўпайтириш z векторни соат стрелкаси йўналишига қарши $\frac{\pi}{2}$ бурчакка буришни билдиради.

Машқлар

2. Комплекс сонни алгебраик ва тригонометрик шаклларда ифодаланг:

$$\text{а) } z = \frac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}; \quad \text{б) } z = \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}};$$

$$\text{в) } z = \frac{i}{(1+i)^2}; \quad \text{г) } z = \frac{-\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}};$$

$$\text{д) } z = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}.$$

3. Комплекс сонни тригонометрик шаклда ифодаланг:

$$\text{а) } z = \frac{5\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)\, i}{3(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ)};$$

$$\text{б) } z = \frac{\sin\frac{2\pi}{5} + i\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}.$$

4. $z_1 = 2 + 5i$ векторни соат стрелкаси бўйича $\frac{\pi}{2}$ бурчакка буриб, икки марта узайтирилгандан сўнг, z_1 вектор z_2 векторга ўтади. z_2 га мос келувчи комплекс сонни топинг.

5. $z = -2 + 3i$ вектор 180° га бурилди ва 1,5 марта узайтирилди. Ҳосил бўлган векторга мос комплекс сонни топинг.

3. Даражага кўтариш ва илдиз чиқариш. 2- пунктдаги икки комплекс соннинг кўпайтмаси учун чиқарилган (1) формулани кўпайтувчилар сони n та бўлган ҳол учун ҳам умумлаштириш мумкин. Математик индукция методидан фойдаланиб, қуйидаги натижани ҳосил қилиш осон:

n та комплекс сон кўпайтмасининг модули барча кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг бўлиб, кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндиси комплекс сонлар кўпайтмасининг аргументи бўлади.

Бу ердан хусусий ҳол сифатида

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1)$$

формула ҳосил бўлади, бу формула $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс сонни бутун мусбат даражага кўтариш қоидасини беради:

комплекс сонни натурал кўрсаткичли даражага кўтарганда унинг модули шу кўрсаткичли даражага кўтарилади, аргумент эса даража кўрсаткичига кўпайтирилади.

1-мисол. $z = \sqrt{3} - i$ комплекс сонни тўққизинчи даражага кўтаринг

z соннинг модули 2 га тенг, аргументларидан бири эса $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ дан иборат, шунинг учун z^9 соннинг модули 2^9 га тенг. z^9 нинг аргументи эса $9\varphi = -\frac{3}{2}\pi$ га тенг Демак,

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 512i.$$

Машқлар

6. Комплекс сонни алгебраик шаклда ёзинг:

а) $z = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$; б) $z = \left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$;

в) $z = (\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)^{-10}$; г) $z = \left(\frac{i^8 + \sqrt{3}\,i^5}{4}\right)^5$;

д) $z = \frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6}$; е) $z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

7. Комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг:

а) $z = (\sqrt{3} - i)^{100}$; б) $z = \left(\frac{\sqrt{3}\,i + 1}{i - 1}\right)^6$;

в) $z=\dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in N$; г) $z=(\operatorname{tg}1-i)^4$;

д) $z=(\operatorname{tg}2-i)^4$; е) $z=\left(\sin\dfrac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

8. n нинг қандай бутун қийматларида ушбу тенглик ўринли

$$(1+i)^n=(1-i)^n?$$

Комплекс сондан берилган даражали илдиз чиқариш амалига ўтамиз.

Агар $z^n=w$ бўлса, z *сон* w *сондан олинган* n*-даражали илдиз* дейилади ($\sqrt[n]{w}$ каби белгиланади).

Бу таърифдаң $z^n=w$ тенгламанинг ҳар бир ечими w соннинг n-даражали илдизи бўлиши келиб чиқади. Бошқача айтганда, w сондан n-даражали илдиз чиқариш учун $z^n=w$ тенгламани ечиш кифоя экан.

Агар $w=0$ бўлса, у ҳолда исталган n да $z^n=w$ тенглама битта ва фақат битта $z=0$ ечимга эга бўлади. Агар $w\neq0$ бўлса, унда $z\neq0$ бўлиб, бинобарин, z ни ҳам, w ни ҳам тригонометрик шаклда ифодалаш мумкин бўлади:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad w=s(\cos\psi+i\sin\psi).$$

У ҳолда $z^n=w$ тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=s(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Иккита комплекс соннинг модуллари тенг бўлиб, аргументлари 2π га каррали қўшилувчига фарқ қилганда ва фақат шундагина бу икки комплекс сон ўзаро тенг бўлади. Демак,

$$r^n=s \text{ ва } n\varphi=\psi+2\pi k$$

ёки

$$r=\sqrt[n]{s} \text{ ва } \varphi=\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k,\quad k\in Z.$$

Шундай қилиб, $z^n=w$ тенгламанинг барча ечимлари қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$z_k=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right),\tag{2}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Ҳақиқатан ҳам, ҳосил бўлган формулада k сонга у ерда кўрсатилган қийматлардан ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) бошқа бутун қийматлар берсак, бошқа комплекс сонларни ҳосил қилмаймиз. Масалан, $k=n$ да қуйидаги комплекс сонни ҳосил қиламиз:

$$z_n=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)\right)=$$
$$=\sqrt[n]{s}\left(\cos\frac{\psi}{n}+i\sin\frac{\psi}{n}\right)=z_0.$$

Шундай қилиб, агар $w\neq0$ бўлса, w нинг роппа-роса n та n-даражали илдизи мавжуд бўлади; уларнинг ҳаммаси (2) формулада бўлади. w соннинг барча n-даражали илдизлари бир хил $\sqrt[n]{s}$ модулга эга бўлади, бироқ уларнинг аргументлари турли бўлиб, $\frac{2\pi}{n}$ сонга каррали бўлган қўшилувчига фарқ қилади. Бу ердан w комплекс соннинг n-даражали илдизлари бўлган барча комплекс сонлар комплекс текисликнинг радиуси $\sqrt[n]{s}$, маркази $z=0$ нуқтада бўлган айланага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг учларида жойлашган нуқталарига мос келиши келиб чиқади.

$\sqrt[n]{w}$ белгилашга доир яна бир изоҳ бериб ўтамиз. $\sqrt[n]{w}$ символи бир қийматли маънога эга эмас. Шунинг учун уни ишлатар эканмиз, бу символ нимани билдиришини аниқ тасаввур этишимиз керак бўлади. Масалан, $\sqrt{-1}$ ёзувдан фойдаланар эканмиз, аниқ бўлиши учун бу символ орқали i ва $-i$ комплекс сонлар жуфти тушуниладими ёки битта сон тушуниладими, агар битта сон тушунилса, у ҳолда айни қайси сон тушуниладими, шуни билиб олишимиз керак бўлади.

2-мисол. $\sqrt[4]{-16}$ нинг ҳамма қийматларини топинг. $w=-16$ сонни тригонометрик шаклда ёзамиз:

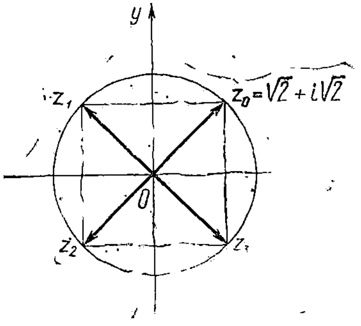
$$w=-16=16(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Бу ҳолда (2) формула қуйидагини беради:

$$z_k=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right)$$
$$(k=0,1,2,3).$$

Демак,

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$
$$z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$



13-расм.

$$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},$$
$$z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=$$
$$=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

13-расмда $\sqrt[4]{-16}$нинг тўртала қиймати тасвирланган. z_0, z_1, z_2, z_8 сонларга мос нуқталар радиуси 2 га тенг, маркази $z=0$ нуқтада бўлган айланага ички чизилган квадратнинг учларида ётади.

Машқлар

9. $\sqrt[n]{w}$ нинг барча қийматларини топинг, бу ерда:

а) $w=-i$, $n=2$;
б) $w=-1$, $n=3$;
в) $w=8i$, $n=3$;
г) $w=1$, $n=5$.

10. Тенгламани ечинг.

а) $z^3-1=i$; в) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$;
б) $z^4-i=1$; г) $z^6+64=0$.

4. Квадрат тенгламалар. VII синф алгебра курсида a, b, c ҳақиқий коэффициентли

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0 \qquad (1)$$

квадрат тенгламалар қаралган эди. У ерда агар (1) тенгламанинг $D=b^2-4ac$ дискриминанти манфий бўлмаса, бундай тенгламанинг ечимлари

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

формула орқали топилиши кўрсатилган эди.

$D<0$ бўлган ҳолда тенглама ечимларга эга эмас деб айтилган эди.

(2) формулани келтириб чиқариш учун иккиҳад квадратини ажратиш ва кейин тенгламанинг чап томонини чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш усулидан фой-

далаНилган эди, яъни тенглама қуйидагича ёзиб олинар эди:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\times$$
$$\times\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0,$$

бу ердан (2) формула келиб чиқар эди. Равшанки, бу барча ҳисоб-китоблар a, b, c лар комплекс сонлар ва тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар тўпламида изланаётган ҳол учун ҳам ўринли бўлиб қолаверади. Бинобарин, (2) формула квадрат тенгламанинг коэффициентлари комплекс сонлар бўлган ҳолда ҳам квадрат тенгламанинг ечимларини беради. Комплекс сонлар тўпламида квадрат илдиз чиқариш амали ҳар қандай комплекс сон учун маънога эга бўлгани сабабли $D<0$ чеклаш ортиқча бўлиб қолади. Бунинг устига у умуман маънога эга бўлмай қолади, чунки D дискриминант ҳақиқий сон бўлмай қолиши мумкин, бундай сонлар учун эса „катта“, „кичик“ тушунчалари аниқланмаган. Шундай қилиб, комплекс сонлар тўпламида az^2+bz+ $+c=0$ (a, b, c — комплекс сонлар, $a\neq0$) тенглама ҳар доим ечилишга эга

Агар $D=b^2-4ac=0$ бўлса, тенглама битта илдизга эга; агар $D\neq0$ бўлса, тенглама иккита илдизга эга. Барча ҳолларда ҳам квадрат тенглама илдизлари учун

$$z=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

формула ўринли (бу ерда $\sqrt{D}$ деганда илдизнинг ҳамма қийматлари тушунилади).

1-мисол. Ушбу $z^2+3z+3=0$ тенгламани ечинг. (2) формулага кўра топамиз:

$$z=\frac{-3+\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}.$$

$\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$ эканлигини кўриш осон, шунинг учун

$$z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad z_2=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i.$$

2-мисол. Ушбу

$$z^2-(2+i)z-1+7i=0$$

тенгламани ечинг.

Квадрат тенглама илдизлари формуласига кўра қуйидагига эгамиз:

$$z=\frac{2+i+\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i+\sqrt{7-24i}}{2}.$$

$\sqrt{7-24i}$ нинг барча қийматларини аниқлаш учун

$$\sqrt{7-24i}=x+yi$$

деймиз, у ҳолда

$$7-24i=x^2+2xyi-y^2$$

ва демак, x ва y қуйидаги системани қаноатлантиради:

$$\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12, \end{cases}$$

шу билан бирга x ва y — ҳақиқий сонлар. Система иккита ҳақиқий ечимга эга: $x=4$, $y=-3$ ва $x=-4$, $y=3$. Шунинг учун

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i,\quad z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i.$$

Машқлар

11. Тенгламаларни ечинг:

а) $z^2-2z+5=0$,
б) $z^2-2iz-5=0$,
в) $z^2-(5+2i)z+21+i=0$,
г) $z^2-8z-3iz+13+13i=0$.

12. Ушбу

$$z=\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$$

сонни $\sqrt{5+12i}$ ва $\sqrt{5-12i}$ нинг ҳақиқий кисмлари манфий деган шарт остида алгебраик шаклда ёзинг.

13. Ушбу тенгламанинг ҳақиқий қисми манфий бўлган илдизларини топинг: $z^{10}-z^5-992=0$.

5. *e* сонининг комплекс даражаси. *e* сонининг комплекс даражаси тушунчасини киритамиз. *e* сонини $z=x+yi$ комплекс даражага кўтариш амали

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \qquad (1)$$

формула ёрдамида аниқланади.

1-мисол. *e* сонини z даражага кўтаринг, бунда:

а) $z=1+i$, б) $z=\frac{\pi}{2}i$, в) $z=\pi i$.

(1) формула бўйича топамиз:

а) $e^{1+i} = e(\cos 1 + i\sin 1)$,

б) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$,

в) $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

2-мисол. $e^z = e^{x+yi}$ соннинг модули ва аргументини топинг. e^z комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари мос равишда $e^x\cos y$ ва $e^x\sin y$ га тенг. Демак,

$$|e^z| = \sqrt{(e^x\cos y)^2 + (e^x\sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}} = e^x.$$

Аргументларни қуйидаги системадан топамиз:

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{r},\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}.\end{cases}$$

Бу система қаралаётган ҳолда қуйидаги кўринишни олади:

$$\cos\varphi = \frac{e^x\cos y}{e^x} = \cos y,$$

$$\sin\varphi = \frac{e^x\sin y}{e^x} = \sin y.$$

Унинг ечимлари: $\varphi = y + 2\pi n$, $n \in Z$.

Шундай қилиб,

$$|e^z| = e^x,$$

$$\arg e^z = y + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

e сонининг комплекс даражасининг асосий хоссаларини қайд қилиб ўтамиз.

1. а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, б) $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$, яъни e^z учун даражанинг одатдаги хоссалари сақланади.

а) хоссани исбот қиламиз. Айтайлик, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ бўлсин, у ҳолда

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + \\ &\quad + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+y_1i+x_2+y_2i} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

б) хосса ҳам худди шундай исбот қилинади.

2. $z=x+0i$ ҳақиқий қийматлар учун

$$e^z=e^{x+0i}=e^x,$$

яъни e сонининг комплекс даражаси бундай ҳолда ҳақиқий кўрсаткичли даражага айланади.

3. Ҳар бир $n\in Z$ учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$e^{2\pi ni}=1.$$

Ҳақиқатан ҳам, (1) формулага кўра

$$e^{2\pi ni}=\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n=1.$$

4. Исталган z комплекс сон учун ушбу тенглик ўринли:

$$e^{z+2\pi ni}=e^z, \qquad n\in Z.$$

Ҳақиқатан ҳам, 1- хоссага кўра бундай ёза оламиз:

$$e^{z+2\pi ni}=e^z e^{2\pi ni}.$$

Энди 3- хоссани эътиборга олсак,

$$e^{z+2\pi ni}=e^z$$

келиб чиқади.

3- ва 4- хоссалар фақат ҳақиқий бўлмаган даражалар учун хосдир.

Машқ

14. Комплекс сонни алгебраик шаклда ифодаланг:

а) $z=e^{2-i}$

б) $z=e^{-\frac{3}{2}\pi i+12\pi i}$

в) $z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}.$

6. Комплекс соннинг кўрсаткичли шаклида ёзилиши. 5- пунктдаги (1) формулада $z=i\varphi$, $\varphi\in R$ дейлик. У ҳолда қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Бу муҳим формула *Эйлер формуласи* дейилади.

Юқорида ҳар қандай $z\neq 0$ комплекс сонни

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

тригонометрик шаклда ифодалаш мумкинлиги кўрсатилган эди.

Бу ердан ва Эйлер формуласидан ҳар қандай $z \neq 0$ комплекс сонни

$$z = re^{i\varphi}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкинлиги келиб чиқади.

Комплекс сонниңг $z = re^{i\varphi}$ кўринишдаги ёзуви *унинг кўрсаткичли шаклдаги ёзуви* дейилади.

Бу ерда r — комплекс сонниңг модули, φ эса унинг аргументларидан бири (исталгани).

1-мисол. $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$ комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ифодаланг.

Сонниңг модулини топамиз:

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4},$$

унинг аргументларидан бирини топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

(чунки z тўртинчи квадрантда жойлашган). Демак,

$$z = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Комплекс сонниңг кўрсаткичли шаклдаги ёзуви унинг тригонометрик шаклдаги ёзувига қараганда ихчамроқдир.

Комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлишни, шунингдек, натурал даражага кўтариш ва илдиз чиқаришни, одатда, комплекс сонларни дастлаб кўрсаткичли шаклда ёзиб олиб бажариш қулайдир.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \text{ ва } z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

бўлсин, у ҳолда

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (1)$$

Бу ерда биз e сони комплекс даражасининг юқорида исбот қилинган 1а) хоссасидан фойдаландик.

1б) хоссадан фойдаланиб, $\frac{z_1}{z_2}$ ни осонгина топамиз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (2)$$

2-мисол. Ушбу

$$z=\frac{(-\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}$$

комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ёзинг.

$-\sqrt{3}+i,\quad \cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12},\ 1-i$ сонларнинг ҳар бирини кўрсаткичли шаклда ёзамиз:

$$-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=e^{-i\frac{\pi}{12}},$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(1) ва (2) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$z=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Эйлер формуласини билган ҳолда комплекс сонни натурал даражага кўтариш формуласини қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}. \tag{3}$$

$z^n=w$ тенгламанинг барча ечимларини берувчи формулани ҳам Эйлер формуласидан фойдаланиб, анча ихчам кўринишда ёзиш мумкин:

$$z_k=\sqrt[n]{se^{i\psi}}=\sqrt[n]{s}\,e^{i\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)},\quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{4}$$

3-мисол. $z=(-1+i)^5$ комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ифодаланг.

Даражанинг асосини кўрсаткичли шаклда ёзамиз ва (3) формулани қўлланамиз:

$$(-1+i)^5=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5=4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}}=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

4-мисол. $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ илдизнинг барча қийматларини кўрсаткичли шаклда ёзинг.

$\sqrt{3}+i$ сонни кўрсаткичли шаклда тасвирлаймиз в (4) формулани қўлланамиз:

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)},\quad k=0,1,2,3.$$

Машқлар

15. Комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ифодаланг:

а) $z=-\sqrt{12}-2i$, б) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

16. Комплекс сонни кўрсаткичли ва алгебраик шаклларда ёзинг;

а) $z=5e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $z=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{-8}$;

в) $z=(\sqrt{3}-i)^6$;

г) $z=\frac{1}{(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^5}$;

д) $z=\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+\sqrt{3}i)^7}{i}$.

17. (4) формуладан фойдаланиб, $\sqrt[n]{w}$ нинг барча қийматларини топинг, бу ерда:

а) $w=1$, $n=3$;

б) $w=-1$, $n=4$;

в) $w=-4+\sqrt{48}\,i$, $n=3$;

г) $w=1-\sqrt{3}\,i$, $n=4$.

III-БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

10-§. Функциянинг дифференциали

1. Функция дифференциалининг таърифи. f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Лимитнинг хоссасидан фойдаланиб, (1) тенгликни

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\Delta x\to 0$ да $\alpha(\Delta x)\to 0$. Шундай қилиб,

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (2)$$

(2) формуладан f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси иккита қўшилувчидан иборат эканлиги келиб чиқади. $f'(x_0)\neq 0$ бўлсин. У ҳолда (2) формуладаги биринчи $f'(x_0)\Delta x$ қўшилувчи Δx га пропорционал, чунки у $f'(x_0)$ га боғлиқ эмас, яъни Δx га нисбатан чизиқлидир. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f'(x_0)\cdot\Delta x=0$ бўлганлиги учун биринчи қўшилувчи $\Delta x\to 0$да чексиз кичик миқдордир. (2) формуладаги иккинчи қўшилувчи ҳам $\Delta x\to 0$ да чексиз кичикдир, шу билан бирга шундай чексиз кичикки, $\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x}$ нисбат $\Delta x\to 0$ да яна чексиз кичикдир, чунки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x}=0.$$

Шунинг учун $f'(x_0)\Delta x$ биринчи қўшилувчи функциянинг x_0 даги орттирмасининг бош қисмидир. Δx га нисбатан чизиқли бўлган бу қўшилувчи *f функциянинг*

x_0 *нуқтадаги дифференциали* дейилади ва $df(x_0)$ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

$dx = x'\Delta x = \Delta x$ эканлигини назарда тутиб, эркли ўзгарувчининг дифференциалини унинг орттирмаси сифатида аниқлаймиз. У ҳолда функциянинг нуқтадаги дифференциали

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \tag{3}$$

формула билан ифодаланишини кўрамиз. Шунинг учун дифференциалга қуйидагича таъриф бериш мумкин.

Таъриф. f функция x_0 нуқтанинг бирорта атрофида аниқланган ва бу x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлсин. f функциянинг x_0 нуқтадаги *дифференциали* деб, бу нуқтада ҳисобланган ҳосиланинг эркли ўзгарувчининг дифференциалига (ёки орттирмасига) кўпайтмасига айтилади.

Агар $f(x)$, $x \in]a, b[$ функция $]a; b[$ интервалнинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{4}$$

Бу тенгликдан

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, функциянинг ҳосиласи бу функция дифференциалини аргументнинг дифференциалига бўлинганига тенгдир. (4) формула функциянинг ҳосиласи маълум бўлганда унинг дифференциалини ҳисоблаш имконини беради. Масалан, $dc = (c)'dx = 0\cdot dx = 0$, бу ерда c — ўзгармас,

$$dx^2 = (x^2)'dx = 2xdx,$$

$$d(3x^3+4x+7) = (3x^3+4x+7)'dx = (9x^2+4)dx,$$

$$d(\sin x+x^3) = (\sin x+x^3)'dx = (\cos x+3x^2)dx,$$

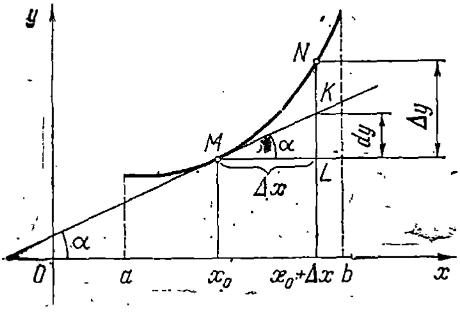
$$d(e^x+\cos 3x) = (e^x+\cos 3x)'dx = (e^x-3\sin 3x)dx,$$

$$d\ln x = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}.$$

2. Дифференциалнинг геометрик маъноси. Графиги 14-расмда тасвирланган дифференциалланувчи $y=f(x)$, $x \in]a; b[$ функцияни қараймиз.

ΔMKL дан

$$|KL| = |ML|\operatorname{tg}\alpha.$$



14-расм.

Расмга кўра $|ML|=\Delta x$ ва $\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0)$ бўлгани учун $|KL|=f'(x_0)\Delta x$. Демак,

$$dy=|KL|.$$

Бу тенглик дифференциалга қуйидагича геометрик талқин беришга имкон беради: агар f функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда f функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали берилган фукнциянинг графигига абсциссаси x_0 бўлган нуқтада ўтказилган уринма ординатасининг уриниш нуқтасидан $(x_0+\Delta x)$ абсциссали нуқтага ўтишдаги орттирмасига тенг.

Изоҳ. Кўриш осонки, функциянинг нуқтадаги дифференциали, умуман айтганда, унинг шу нуқтадаги орттирмаси билан бир хил бўлмайди(14- расмга қаранг):

$$dy\neq\Delta y, \quad \text{чунки} \quad |KL|\neq|NL|.$$

Бироқ Δx нинг кичик қийматларида функциянинг орттирмаси функциянинг дифференциалига тақрибан тенг бўлади, яъни $\Delta y\approx dy$. Бу яқинлашишдан ҳам математикада, ҳам унинг татбиқларида кенг фойдаланилади, чунки функциянинг орттирмасини унча катта бўлмаган хатолик билан осонликча ҳисоблашга имкон беради. Δy ни dy билан алмаштириш геометрик нуқтаи назардан эгри чизиқнинг MN ёйини MK тўғри чизиқ кесмаси билан алмаштиришни билдиради. Бинобарин, ҳар қандай чизиқли бўлмаган дифференциалланувчи функцияни аргумент ўзгаришининг кичик оралиқларида чизиқли деб қараш мумкин экан.

Пировардида, чизиқли функциянинг дифференциали унинг орттирмаси билан бир хил эканлигини қайд қилиб ўтамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$d(kx+b)=(kx+b)'dx=kdx;$$

$$\Delta(kx+b)=[k(x+\Delta x)+b]-(kx+b)=k\Delta x=k\,dx,$$

яъни

$$d(kx+b)=\Delta(kx+b).$$

3. Дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашга татби-

қи. Функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали таърифидан

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)=\alpha(\Delta x)\Delta x$$

эканлиги келиб чиқади, бу ерда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$

Демак, $df(x_0)$ дифференциал $\Delta f(x_0)$ нинг x_0 нуқтадаги яқинлашишидан иборат экан, шу билан бирга яқинлашишнинг $\Delta x\to 0$ даги абсолют хатолиги нолга интилади. Бундан ташқари агар $f'(x)\neq 0$ бўлса, $\Delta x\to 0$ да нисбий хато ҳам нолга интилади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta f(x_0)-df(x_0)}{df(x_0)}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x}\right|=0.$$

Айтилганларнинг ҳаммаси x_0 нуқтада дифференциалланувчи ва $f'(x_0)\neq 0$ бўлган f функция учун барча кичик Δx ларда қуйидаги формула ўринли бўлишини билдиради:

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0),\ \text{яъни}\ \Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

(1) формула энг содда тақрибий ҳисоблашлар учун асосий формула бўлиб ҳисобланади.

1-мисол. $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $x\in\,]0;+\infty[$ бўлсин.
$x\neq 0$ учун

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

бўлганлигидан (1) формуладан фойдаланиб, $x_0\neq 0$ ва барча етарлича кичик Δx лар учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta f(x_0)=\sqrt[n]{x_0+\Delta x}-\sqrt[n]{x_0}\approx\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x.$$

Шундай қилиб, барча етарлича кичик Δx лар учун

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x \qquad (2)$$

(2) формуладан фойдаланиб, $\sqrt{3{,}998}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\sqrt{3{,}998}=\sqrt{4-0{,}002}\approx\sqrt{4}+\frac{-0{,}002\cdot\sqrt{4}}{2\cdot 4}=$$

$$=2-0{,}0005=1{,}9995.$$

$\sqrt[5]{243,45}$ ни ҳисоблаш учун ҳам (2) формуладан фойдаланамиз:

$$\sqrt[5]{243,45}=\sqrt[5]{243+0,45}\approx\sqrt[5]{243}+\frac{0,45\cdot\sqrt[5]{243}}{5\cdot 243}=$$
$$=3+\frac{0,45\cdot 3}{5\cdot 3^5}\approx 3,001.$$

2-мисол. $f(x)=\sin x$, $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$ бўлсин. Маълумки, $f'(x)=\cos x$, $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$. Шунинг учун (1) формуладан фойдаланиб, исталган $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$ учун ва барча етарлича кичик Δx лар учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0\approx\cos x_0\Delta x.$$

Шундай қилиб, барча етарлича кичик Δx лар учун

$$\sin(x_0+\Delta x)\approx\sin x_0+\cos x_0\Delta x. \qquad (3)$$

Хусусан, $x_0=0$ да (3) формуладан барча етарлича кичик Δx лар учун

$$\sin x\approx\Delta x$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Агар (3) формулада $x=\frac{\pi}{4}$ десак, барча етарлича кичик Δx лар учун

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)\approx\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\Delta x)$$

тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз.

3-мисол. Агар $f(x)=\ln x$, $x\in\,]0;\ +\infty[$ бўлса, у ҳолда $f'(x)=\frac{1}{x}$, $x\in\,]0;\ +\infty[$. Шунинг учун $x_0>0$ бўлганда барча етарлича кичик Δx лар учун (1) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\Delta f(x_0)=\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0\approx\frac{\Delta x}{x_0},$$

яъни

$$\ln(x_0+\Delta x)\approx\ln x_0+\frac{\Delta x}{x_0}. \qquad (4)$$

Хусусан, $x_0=1$ бўлганда (4) формуладан барча етарлича кичик Δx лар учун

$$\ln(1+\Delta x)\approx\Delta x$$

тақрибий тенглик келиб чиқади.

Машқлар.

1. x нинг барча етарлича кичик қийматлари учун қуйидаги тақрибий формулалар ўринли эканлигини исбот қилинг:

а) $e^x \approx 1+x$; б) $\operatorname{tg} x \approx x$; в) $\arcsin x \approx x$; г) $\operatorname{arctg} x \approx x$.

2. Тақрибий қийматларни топинг:

а) $\sqrt{9,02}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[3]{24}$; г) $\sqrt[3]{30}$; д) $\sqrt[4]{3}$; е) $\sqrt[4]{90}$.

3. Тақрибий ҳисобланг:

а) $\sqrt[3]{65}$; б) $\sqrt[10]{1000}$; в) $\sqrt[3]{125,1324}$;

г) $\sin 29°$; д) $\ln 1,05$; е) $\cos 91°$; ж) $\operatorname{tg} 44$;

з) $\ln(e+0,1)$; и) $\ln 0,97$.

11-§. Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари

1. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Дифференциал ҳисобда биз берилган функциянинг ҳосиласини ёки дифференциалини топиш масаласини ҳал қилган эдик Практика шуни кўрсатадики, кўпинча берилган $F'(x)=f(x)$ ҳосила, ёки шунинг ўзи: берилган $dF(x) = f(x)\,dx$ дифференциал бўйича шу ҳосиласи олинган функциянинг ўзини топишга, яъни дифференциаллаш масаласига тескари масалани ечишга тўғри келади. Масалан, агар бизга моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги v маълум бўлса, яъни $v=v(t)$, $t \in [a;b]$ бўлса ва биз бу нуқта босиб ўтган s йўлни топишимиз керак бўлса, у ҳолда $\frac{ds}{dt}=v$ эканлигини билган ҳолда берилган ҳосила $\frac{ds}{dt}=v(t)$ ёки $ds=v(t)dt$ дифференциал бўйича s функцияни топишимиз керак бўлади. Функцияни унинг ҳосиласи ёки дифференциали бўйича топиш интеграл ҳисобда қаралади. Берилган ҳосиласи ёки дифференциали бўйича тикланаётган функцияни *бошланғич функция* дейилади.

Таъриф. Агар ҳар бир $x \in]a;b[$ учун $F'(x)=f(x)$ бўлса, дифференциалланувчи $F(x)$, $x \in]a;b[$ функция $]a;b[$ интервалда $f(x)$ функция учун *бошланғич функция* (ёки бошланғичи) дейилади.

Изоҳ. Кесмада ҳосилага эга бўлган функциялар учун бошланғич функция тушунчаси худди шунга ўхшаш киритилади.

$f(x)=3x^2$, $x \in R$ функция учун ҳақиқий ўқнинг барча нуқталарида $F(x)=x^3$ функция бошланғич бўлади, чунки ҳар бир $x \in R$ учун $F'(x)=3x^2=f(x)$. Шуни қайд қилайликки, $F_1(x)=x^3+1$ ёки $F_2(x)=x^3-5$ ёки, умуман, $F_3(x)=x^3+C$ (бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас) берилган $f(x)=3x^2$ функция учун бошланғич функциялар бўлади, чунки бу функцияларнинг ҳаммаси бир хил $3x^2$ ҳосилага эга.

Бу мисол кўрсатадики, агар функция бошланғич функцияга эга бўлса, улар чексиз кўп бўлади. Бу бошланғич функциялардан бирини билган ҳолда қолганларини қандай топиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Теорема. Агар $F(x)$ функция $f(x)$, $x\in\,]a;b[$ *функция учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда* f *нинг барча бошланғич функциялар тўплами* $F(x)+C$, $C\in R$ *формула билан берилади.*

Исботи. Кўриш осонки, $F(x)+C$, (бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас) кўринишдаги исталган функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Энди f нинг исталган бошланғич функцияси $F(x)+C$ (бу ерда C — бирор сон) кўринишда ифодаланишини кўрсатамиз.

Айтайлик, $\Phi(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлсин, яъни ҳар қандай $x\in\,]a;b[$ учун $\Phi'(x)=f(x)$ бўлсин. $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$, $x\in\,]a;b[$ ёрдамчи функцияни қараймиз ва ўзгармас эканлигини кўрсатамиз.

x_1 ва x_2 лар $]a;b[$ интервалнинг ихтиёрий икки нуқтаси бўлсин. Лагранж теоремасига кўра

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)(x_2-x_1)$$

шартни қаноатлантирадиган $\xi\in\,]x_1;x_2[$ нуқта топилади. Барча $x\in\,]a;b[$ лар учун $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ ва хусусан, $\varphi'(\xi)=0$ бўлгани учун $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$ Шундай қилиб, $]a;b[$ даги ихтиёрий x_1 ва x_2 учун $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$.

Демак, $\varphi(x)=C$, бу ерда C — бирор сон, яъни

$$\Phi(x)=F(x)+C,\quad x\in\,]a;b[,$$

ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Таъриф. $f(x)$ функциянинг $]a;b[$ интервалдаги барча бошланғич функциялари тўплами f функциянинг $]a;b[$ интервалдаги *аниқмас интеграли* дейилади ва

$$\int f(x)dx$$

символ билан белгиланади. Бу символ „интеграл эф икс де икс“ деб ўқилади. $\int$ символ интеграл белгиси, $f(x)$ — интеграл остидаги функция, $f(x)\,dx$ — интеграл остидаги ифода, x эса интеграллаш ўзгарувчиси дейилади.

Агар $F(x)$, $x\in\,]a;b[$ функция $f(x)$ нинг $]a;b[$ интервалдаги бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда бу қуйидагича ёзилади:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас.

Функцияни унинг ҳосиласи ёки унинг дифференциали бўйича топиш амали *функцияни интеграллаш* дейилади. Интеграллаш дифференциаллашга тескари амалдир. Интеграллашнинг тўғри-нотўғрилиги дифференциаллаш билан текширилади.

Масалан, $\int(2x+3)dx = x^2+3x+C$, чунки $(x^2+3x+C)' = (x^2)'+(3x)'+(C)' = 2x+3$. Шундай қилиб, $(x^2+3x+C)' = 2x+3$ ёки $\left(\int(2x+3)dx\right)' = (x^2+3x+C)'$.

2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари. Қуйидаги 1—6 формулаларда барча функциялар бир хил интервалда аниқланган ва бу интервалда бошланғич функцияларга эга деб фараз қиламиз. У ҳолда

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C;$
4. $\int df(x) = f(x) + C;$
5. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$

бу ерда $a \neq 0$ — ўзгармас;

6. $\int[f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

1—2-хоссаларнинг ўринли эканлиги аниқмас интеграл тушунчасининг таърифидан осонгина келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, F функция f нинг бошланғич функцияларидан бири бўлсин, у ҳолда таърифга кўра

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

бу ерда $F'(x) = f(x)$ ёки $dF(x) = f(x)dx$.

Демак,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = dF(x) = f(x)dx.$$

$df(x) = f'(x)dx$ бўлганлиги учун 3 ва 4-хоссалардан бирининг ўринли эканлигини исботлаш етарли. f

ўзининг ҳосиласи f' учун бошланғич функция эканлигини кўриш осон. Бинобарин, таърифга кўра

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

5 ва 6- хоссалар ҳам худди шундай исбот қилинади.

3. Аниқмас интеграллар жадвали. Интегралнинг таърифидан конкрет функциянинг ҳосиласи формуласи, яъни $F'(x) = f(x)$ кўринишдаги формула интеграл кўринишдаги

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

формула каби ёзилиши мумкинлиги келиб чиқади. Шунинг учун бу формуладан ва ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб, аниқмас интеграллар жадвалини тузиш мумкин:

1. $\int 0dx = C.$ C—ўзгармас.

2. $\int dx = x + C.$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1.$

Хусусан, $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ |x| < a.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C; \ a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \ a \neq 0,$

шу билан бирга, агар илдиз остида x^2-a^2 ифода турган бўлса, $|x|>|a|$ деб фараз қилинади.

4, 8, 9, 10, 12, 13-формулалар x нинг махраж нолга айланмайдиган қийматлари учунгина тўғри эканлигини қайд қилиб ўтамиз. Келтирилган формулаларнинг ҳар бирининг ўринли эканлигини дифференциаллаш билан текшириб кўриш мумкин. Масалан, 4-формулани текшириб кўрайлик.

Бу ерда икки ҳолни қараш керак:

1) $x>0$ бўлсин, у ҳолда $|x|=x$ ва 4-формула

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$$

кўринишга келади. Дифференциаллаб, топамиз:

$$(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}.$$

2) $x<0$ бўлсин, у ҳолда $|x|=-x$ бўлиб, 4-формула

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$$

кўринишга келади. Дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(\ln(-x)+C)'=\frac{-1}{-x}+0=\frac{1}{x}.$$

Юқоридаги жадвалда келтирилган интеграллар *жадвал интеграллари* деган ном билан юритилади.

12-§. Интеграллаш усуллари

1. Бевосита интеграллашга мисоллар. Интегралларни топишнинг *бевосита интеграллаш усули* деб шундай усулга айтиладики, бунда улар аниқмас интегралларнинг асосий хоссаларини татбиқ қилиш йўли билан жадвалли интегралларга келтирилади.

1-мисол.

$$\int(3x^2+x+1)\,dx=\int 3x^2dx+\int x\,dx+\int dx=$$
$$=3\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C=x^3+\frac{x^2}{2}+x+C.$$

2-мисол.

$$\int\frac{(2+x)\,dx}{x}=\int\frac{2dx}{x}+\int\frac{x\,dx}{x}=2\int\frac{dx}{x}+\int dx=$$
$$=2\ln|x|+x+C.$$

3-мисол.

$$\int \frac{x^2dx}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\int \frac{d(4+3x^3)}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\ \ln|4+3x^3|+C.$$

4-мисол.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

5-мисол.

$$\int e^{7x}dx = \frac{1}{7}\int e^{7x}\, d(7x) = \frac{1}{7}\ e^{7x} + C.$$

6-мисол.

$$\int \frac{x^2dx}{3+x^2} = \int \frac{3+x^2-3}{3+x^2}\, dx = \int \frac{3+x^2}{3+x^2}\, dx + \int \frac{-3dx}{3+x^2} =$$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{3+x^2} = x - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= x - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

7-мисол.

$$\int 3^x\cdot 4^{2x}\, dx = \int (3\cdot 16)^x\, dx = \int 48^x\, dx = \frac{48^x}{\ln 48} + C.$$

8-мисол.

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{5} + C.$$

9-мисол.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\ \mathrm{arc\,sin}\ \frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\,\mathrm{arcsin} 3x + C$$

10-мисол.

$$\int\frac{dx}{3x^2-5}=\int\frac{dx}{3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right|+C.$$

11-мисол.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{7\left(x^2-\frac{8}{7}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right|+C.$$

12-мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Ечилиши. $\sin^2x+\cos^2x=1$ бўлгани учун

$$\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Шунинг учун

$$\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=$$

$$=\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=$$

$$=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|+C=\ln|\operatorname{tg}x|+C.$$

13-мисол. Ушбу интегрални топинг:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}.$$

Ечилиши. $11+10x-x^2=36-25+10x-x^2=$ $=36-(x-5)^2$ бўлгани учун

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-5)^2}}=\int \frac{d(x-5)}{\sqrt{6^2-(x-5)^2}}=$$

$$=\arcsin \frac{x-5}{6}+C.$$

14-мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}.$$

Ечилиши. $17-4x-x^2=21-4-4x-x^2=21-$ $-(x+2)^2$ бўлгани учун

$$\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{21-(x+2)^2}}=$$

$$=\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{21-(x+2)^2}}=\arcsin \frac{x+2}{\sqrt{21}}+C.$$

Умуман, интегралларни ҳисоблашда дастлаб интеграл остидаги ифодани кераклича ўзгартириб, сўнгра аниқмас интеграллар жадвалидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Ушбу

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx$$

ва

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини уларнинг алгебраик йиғиндисига алмаштирадиган қуйидаги формулалардан фойдаланиш қулай:

$$\sin mx \cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin (m-n) x+\sin (m+n) x\right],$$

$$\sin mx \sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos (m-n) x-\cos (m+n) x\right],$$

$$\cos mx \cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos (m-n) x+\cos (m+n) x\right].$$

15-мисол.

$$\int \sin 3x \cos 2x\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{2} [\sin (3-2)\, x + \sin (3+2)\, x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin x\, dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos x) + \frac{1}{2\cdot 5} \int \sin 5x d\,(5x) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

16-мисол.

$$\int \sin 4x \sin 5x\, dx = \int \frac{1}{2} [\cos (-x) - \cos 9x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x\, dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2\cdot 9} \int \cos 9x d\,(9x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

17-мисол.

$$\int \cos 3x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2} [\cos (-2x) + \cos 8x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{2} \int \cos 8x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2} \int \cos 2x d\,(2x) + \frac{1}{2\cdot 8} \int \cos 8x d\,(8x) =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

2. Ўзгарувчини алмаштириш (ўрнига қўйиш) усули билан интеграллаш. Аниқмас интегрални ҳисоблашнинг ўрнига қўйиш (ёки ўзгарувчини алмаштириш) усули заминида мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасининг натижаси бўлган қуйидаги даъво ётади.

$f(x)$, $x \in]a; b[$ ва $\varphi(t)$, $t \in]c; d[$ функциялар берилган ва $f(\varphi(t))$, $t \in]c; d[$ мураккаб функция мавжуд бўлсин. Агар $f(x)$ функция $F(x)$ бошланғич функцияга эга бўлиб, $\varphi(t)$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in]c; d[$ функция учун бошланғич функция бўлади ва шунинг учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C.$$

1-мисол. $\int \cos 5x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Ўзгарувчини алмаштирамиз. $t=5x$, ҳолда $x=\frac{t}{5}$ ва $dx=\frac{dt}{5}$.

Демак,

$$\int \cos 5x\,dx=\int \cos t\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int \cos t\,dt=$$
$$=\frac{1}{5}\sin t+C=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

2-мисол. $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $t=\frac{1}{x}$ деймиз, у ҳолда $x=\frac{1}{t}$ ва $dx=$ $=-\frac{dt}{t^2}$.

Шундай қилиб,

$$\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=\int t^2e^t\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\int e^t dt=$$
$$=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

3-мисол. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $t=1-x^2$ деймиз, у ҳолда $dt=-2xdx$ яъни $xdx=-\frac{dt}{2}$. Шунинг учун

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}t^{3/2}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C$$

4-мисол. $\int \frac{(\arcsin x)^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрални топинг.

Ечилиши. $t=\arcsin x$ деймиз, у ҳолда $dt=$ $=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Шундай қилиб,

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C.$$

5-мисол. $\int \frac{2x(\arccos x^2)^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $t=\arccos x^2$ деймиз, у ҳолда

$$dt=-\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Шунинг учун

$$\int\frac{2x\,(\arccos x^2)^3}{\sqrt{1-x^4}}=-\int t^3\,dt=-\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\,(\arccos x^2)^4+C.$$

6-мисол. $\int \sin x\cos^7 x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $t=\cos x$ деймиз, у ҳолда $dt=-\sin x dx$. Демак,

$$\int\sin x\cos^7 x dx=-\int t^7dt=-\frac{t^8}{8}+C=-\frac{\cos^8 x}{8}+C.$$

7-мисол. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx$ интегрални топинг.

Ечилиши. $t=\sqrt{x}$ ўрнига қўйишни бажарамиз, у ҳолда $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ва $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt$. Шундай қилиб,

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}\int e^t dt=\frac{2}{3}\,e^t+C=\frac{2}{3}e^{\sqrt{x}}+C.$$

8-мисол. $\int\sqrt{4-x^2}\;dx$ ($|x|\leqslant 2$) интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $x=2\sin t$ $\left(|t|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ ёки $\sin t=\frac{x}{2}$ деймиз, у ҳолда $dx=2\cos t\;dt$ ва $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Демак,

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cos t.$$

Шундай қилиб,

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=4\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int(1+\cos 2t)\,dt=2t+\sin 2t+C.$$

Сўнгра

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$$
$$= 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},$$

бўлгани учун

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

3. Бўлаклаб интеграллаш. Кўпайтманинг дифференциали формуласига кўра

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Шунинг учун қуйидагига эгамиз:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Агар икки функциянинг ҳосилалари (ёки шунинг ўзи, дифференциаллари) тенг бўлса, у ҳолда уларнинг аниқмас интеграллари ҳам бир хил бўлади. Шунинг учун

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Аниқмас интегралларнинг 4-хоссаси

$$\int d(uv) = uv + C$$

дан фойдаланиб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1)$$

Бу (1) формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

1-мисол. $\int xe^x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $u = x$, $dv = e^x dx$ деб,

$$du = dx, \quad v = e^x$$

ни топамиз. Энди (1) формуладан фойдаланиб, берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2-мисол $\int \ln x\,dx$ интегрални топинг.

Ечилиши. $u = \ln x$, $dv = dx$ деб оламиз, у ҳолда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Буларни (1) формулага қўйиб, топамиз:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$
$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

3-мисол. $\int x\cos x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $u=x$, $dv=\cos x\,dx$ деймиз, у ҳолда $du=dx$, $v=\sin x$.

(1) формулага кўра

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

4-мисол. $\int (\arcsin x)^2\,dx$ интегрални топинг.

Ечилиши. $u=(\arcsin x)^2$, $dv=dx$ деймиз, у ҳолда

$$du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad v = x.$$

Демак, (1) формулага кўра

$$\int (\arcsin x^2)\,dx = x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Кейинги интегрални топиш учун бўлаклаб интеграллаш формуласини яна бир марта татбиқ қиламиз. Бу ерда $u=\arcsin x$, $dv=\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ деймиз, у ҳолда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=\sqrt{1-x^2}.$$

Шунинг учун

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx = \sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int dx = \sqrt{1-x^2}\arcsin x - x + C.$$

Шундай қилиб,

$$\int (\arcsin x)^2dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Кўпайтмалардан олинган интегралларни топиш учун бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ қилишда интеграл остидаги ифодадаги қайси кўпайтувчини u деб, қайси бирини dv деб олиш тўғрисида умумий қоида бериш қийин. Шу билан бирга, интегралларни топишда dx албатта dv нинг ифодасига киришини ва бу ифода осон интегралланадиган, бундан ташқари, $\int u\,dv$ интеграл берилган интегралдан соддароқ бўлиши кераклигини унутмаслик керак. Масалан, $\int P(x)\,e^{ax}\,dx$,

$\int P(x)\sin mx dx$, $\int P(x)\cos mx dx$ кўринишдаги интегралларда u деб $P(x)$ кўпҳад, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x dx$ $\int P(x)\arcsin x dx$ кўринишдаги интегралларда мос равишда $\ln x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\arcsin x$ олинади.

Агар биринчи кўринишдаги интегралларда $P(x)$ кўпҳаднинг даражаси бирдан юқори бўлса, бўлаклаб интеграллаш операциясини бир неча марта такрорланади.

5-мисол. $\int(x^2-5x+3)\sin 4x dx$ интегрални топинг.

Ечилиши. $u=x^2-5x+3$ ва $dv=\sin 4x dx$ деб оламиз, у ҳолда $du=(2x-5)dx$ ва $v=-\frac{1}{4}\cos 4x$. Шунинг учун

$$\int(x^2-5x+3)\sin 4x\,dx=$$
$$=-\frac{x^2-5x+3}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}\int(2x-5)\cos 4x dx.$$

Охирги интегрални бўлаклаб интеграллаш орқали топамиз. Бунинг учун $u=2x-5$ ва $dv=\cos 4x dx$ деймиз, у ҳолда $du=2dx$ ва $v=\frac{1}{4}\sin 4x$. Демак,

$$\int(2x-5)\cos 4x\,dx=\frac{2x-5}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\int\sin 4x dx=$$
$$=\frac{2x-5}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C.$$

Ниҳоят, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\int(x^2-5x+3)\sin 4x dx=$$
$$=-\frac{x^2-5x+3}{4}\cos 4x+\frac{2x-5}{16}\sin 4x+\frac{1}{32}\cos 4x+C=$$
$$=\frac{-8x^2+40x-23}{32}\cos 4x+\frac{2x-5}{16}\sin 4x+C.$$

6-мисол. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$ интегрални топинг.

Ечилиши. $u=\mathrm{arctg}\,x$ ва $dv=xdx$ деб оламиз, у ҳолда $du=\frac{dx}{1+x^2}$ ва $v=\frac{x^2}{2}$. Демак, $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx=$ $=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$.

Охирги интегрални алоҳида ҳисоблаб оламиз:

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

Шундай қилиб, берилган интеграл қуйидагига тенг бўлади:

$$\int x\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=$$
$$=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласи $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ва $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ кўринишдаги интегралларни топиш учун ҳам қўлланилади. Бу интегралларни топиш учун бўлаклаб интеграллаш формуласи кетма-кет икки марта татбиқ қилинади, бунда ҳар гал u учун ё кўрсаткичли функция, ё тригонометрик функция қабул қилинади. Икки марта бўлаклаб интеграллагандан сўнг берилган интегралга нисбатан чизиқли бўлган тенглама ҳосил бўлади.

7-мисол. $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $u=e^{3x}$ ва $dv=\sin 2x\,dx$ деймиз, бу ердан $du=3e^{3x}dx$ ва $v=-\frac{1}{2}\cos 2x.$

Шунинг учун

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx. \qquad (2)$$

Охирги интегрални топиш учун яна бир марта бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланамиз:

$$u=e^{3x} \text{ ва } dv=\cos 2x\,dx;$$

$$du=3e^{3x}dx \text{ ва } v=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Шундай қилиб,

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx. \qquad (3)$$

(3) ифодани (2) тенгликка қўямиз:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx,$$

бу ердан қуйидагига эгамиз:

$$\int e^{3x}\sin 2x dx = -\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x + C.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласининг эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш билан алоқадор бўлган $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$ кўринишдаги интегрални топиш мисолида яна бир қўлланилишига мисол кўрамиз.

8-мисол. $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$ интегрални топинг.

Ечилиши. $u=\sqrt{x^2+a^2}$ ва $dv=dx$ деймиз, у ҳолда

$$du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{ва} \quad v=x.$$

Демак,

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Охирги интегралда интеграл остидаги функциянинг шаклини ўзгартирамиз:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

у ҳолда

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\int\sqrt{x^2+a^2}dx-a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|.$$

Ҳосил қилинган ифодани берилган интегралга қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+$$

$$+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

бу ердан

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$$

Доира юзини ҳисоблаш билан узвий боғлиқ бўлган $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ кўринишдаги интегрални ҳам худди шунга ўхшаш ҳисоблаш мумкин.

4. Баъзи рационал функцияларни интеграллаш.

Дастлаб

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

кўринишдаги интегралларни қараймиз.

Бундай интегралларни топиш учун дастлаб махраж x^2+px+q ни квадратлар айирмаси (агар $p^2-4q>0$ бўлса) билан ёки квадратлар йиғиндиси (агар $p^2-4q<0$ бўлса) билан алмаштириш, сўнгра аниқмас интеграллар жадвалидан фойдаланиш керак.

1-мисол. $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$ интегрални топинг.

Ечилиши. $p^2-4q=64-28=36>0$ бўлгани учун $x^2+8x+7=(x+4)^2-9$. Шунинг учун

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+7} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-9} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2-9} =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+4-3}{x+4+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+1}{x+7} \right| + C.$$

2-мисол. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ интегрални топинг.

Ечилиши. $p^2-4q=4-20=-16<0$ бўлгани учун $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Демак,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Энди $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ кўринишдаги интегралларни топиш масаласини қараб чиқамиз, бу ерда $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ — кўпҳадлар, n ва m $(n<m)$ — кўпҳадларнинг даражалари.

Бундай интегралларни ҳисоблаш учун $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ касрни соддароқ касрлар йиғиндиси кўринишида тасвирлаш керак. Бу масаланинг умумий кўринишда ечилишига тўхтаб ўтирмасдан, бир қатор хусусий ҳолларни қараб чиқамиз.

3-мисол. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+6}$ интегрални топинг.

Ечилиши. Махражнинг илдизлари $x_1=2$ ва $x_2=3$ бўлгани учун махраж кўпайтувчиларга ажралади:

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3).$$

Энди касрни қуйидаги йиғинди кўринишида тасвирлаймиз:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

бу ердаги A ва B коэффициентларни топамиз. Ўнг томондаги касрни умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Бу айният бўлгани учун суратларни тенглаб қуйидагини топамиз:

$$x=A(x-3)+B(x-2)$$

ёки

$$x=(A+B)x-3A-2B.$$

Айниятнинг иккала томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=0. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $A=-2$ ва $B=3$ ни топамиз.

Шундай қилиб,

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

Буларни берилган интегралга қўйиб, узил-кесил топамиз:

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+6}=-2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.$$

4-мисол. $\int\frac{dx}{x^3-1}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ бўлгани учун касрни қуйидаги йиғинди кўринишида тасвирлаймиз:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

яъни

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

ёки

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Шундай қилиб,

$$1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).$$

Айниятнинг иккала қисмида x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=0, \\ A-C=1. \end{cases}$$

Системани ечиб, $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{3}$ ни топамиз.

Демак,

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5-мисол. $\int\frac{(x-1)dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$ интегрални топинг.

Ечилиши. Интеграл остидаги касрнинг энг содда касрларга қуйидагича ёйилишини қарайлик:

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}.$$

Ўнг томонни умумий махражга келтирамиз ва суратларни тенглаштирамиз:

$$x-1=A(x-2)(x+1)^2+Bx(x-2)(x+1)^2+$$
$$+Cx^2(x+1)^2+Dx^2(x-2)+Ex^2(x+1)(x-2).$$

Айниятнинг иккала қисмидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} B+C+E=0, \\ A+2C+D-E=0, \\ -3B+C-2D-2E=0, \\ -3A-2B=1, \\ -2A=-1. \end{cases}$$

Системани ечиб, $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{5}{4}$, $C=\frac{1}{36}$, $D=\frac{2}{3}$, $E=\frac{11}{9}$ ларни топамиз.

Шундай қилиб,

$$\int\frac{(x-1)dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{36}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{11}{9}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+\frac{1}{36}\ln|x-2|-\frac{2}{3(x+1)}+$$

$$+\frac{11}{9}\ln|x+1|+C.$$

5. „Олинмайдиган“ интегралларга мисоллар. Юқорида биз аниқмас интегралларни ҳисоблашнинг баъзи усуллари билан танишдик. Қайд қилиш керакки, ҳар қандай функциянинг ҳам бошланғич функцияси элементар функция бўлавермайди. Бирор элементар f функциянинг бошланғич функцияси элементар функция бўлса, бундай ҳолда $\int f(x)dx$ интеграл элементар функциялар орқали ифодаланади ёки интеграл ҳисобланади, „олинади“ деб юритилади. Агар интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмаса, бундай ҳолда интегрални „топиб бўлмайди“ ёки „олинмайди“ дейилади. Масалан,

$$e^{x^2},\quad e^{-x^2},\quad x\operatorname{tg}x,\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{\cos x}{x},\quad \sin x^2,$$

$$\sqrt{1+x^3},\quad \sqrt[3]{1+x^2},\ \sqrt{\sin x},\quad \frac{1}{\ln x}$$

функцияларнинг бошланғич функциялари мавжуд бўлсада, улар элементар функциялар эмас. Шунинг учун ҳам

$$\int e^{x^2}dx,\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int x\operatorname{tg}x\,dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx,$$

$$\int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\sin x^2dx,\quad \int\sqrt{1+x^3}dx,$$

$$\int\sqrt[3]{1+x^2}dx,\quad \int\sqrt{\sin x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ln x}$$

интегралларни „олинмайдиган“ интеграллар дейилади.

Машқлар

Қуйидаги интегралларни топинг:

1. $\int x^4dx$. 2. $\int 5x^7dx$. 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

4. $\int x^3(x^2-1)dx$. 5. $\int (ax+b)\,dx$.

6. $\int (7-3t-t^3)dt$. 7. $\int (2u^3-5u^2-7u-3)du$.

8. $\int \left(\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^5}\right)dx$. 9. $\int \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$.

10. $\int (ax^7+bx^3+cx^2+dx+e\sqrt{x}+f)\,dx$.

11. $\int \frac{x^8-3x^5-x+1}{x^3}\,dx$. 12. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx$.

13. $\int \frac{t^2+\sqrt{t^3}+3}{\sqrt{t}}\,dt$. 14. $\int 4^x\,dx$.

15. $\int b^xdx\ (b>0,\ b\neq 1)$. 16. $\int (t^7+7^t)\,dt$.

17. $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx$. 18. $\int \frac{3x+1}{x+2}\,dx$.

19. $\int \frac{t^3+2t^2+5t+13}{t^2+5}\,dt$. 20. $\int \frac{dx}{16+9x^2}$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$. 22. $\int \frac{dt}{t^2-3}$. 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-13}}$.

24. $\int \frac{dt}{\sqrt{9-4t^2}}$. 25. $\int \frac{dx}{5-2x^2}$.

26. $\int (3e^x+5\sin x+3\cos x+4)dx$.

27. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$. 28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$.

29. $\int \sin 3x\sin 10x\,dx$. 30. $\int \sin 7x\cos 3x\,dx$.

31. $\int \sin x\sin 3x\,dx$. 32. $\int \cos 8x\cos 3x\,dx$.

33. $\int \sin 7x\,dx$. 34. $\int \sin\frac{3}{5}x\,dx$.

35. $\int \cos 10x\,dx$. 36. $\int \cos\frac{x}{9}\,dx$.

37. $\int\left(\sin 11x + \cos 6x + \sin\frac{x}{7} + \cos\frac{3}{4}x\right)dx.$

38. $\int (e^{x} + e^{-x})\,dx.$ 39. $\int e^{3x+5}\,dx.$

40. $\int (3x-1)^{5}\,dx.$ 41. $\int (1+4x)^{\frac{3}{5}}\,dx.$

42. $\int \frac{(6x+7)\,dx}{3x^{2}+7x+4}.$ 43. $\int \frac{x^{5}\,dx}{7x^{6}+1}.$

44. $\int \frac{x^{2}\,dx}{(3+5x^{3})^{7}}.$ 45. $\int \sqrt{3x^{2}-1}\;x\,dx.$

46 $\int \cos^{5}x\sin x\,dx.$ 47. $\int \sqrt[3]{1+\cos x}\,\sin x\,dx.$

48. $\int \cos^{2}x\,dx.$ 49. $\int \sin^{2}x\,dx$

50. $\int \sqrt{a^{2}-x^{2}}\,dx.$ 51. $\int x^{3}e^{x^{4}}\,dx.$

52. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx.$ 53. $\int \frac{3dx}{(1+x^{2})\operatorname{arctg}x}.$

54. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^{2}}\,dx.$ 55. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+3}}.$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{27-x^{2}+6x}}.$ 57. $\int \frac{dx}{x^{2}+10x+41}.$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^{2}}}.$ 59. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+4x+7}}.$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+3x}}.$ 61. $\int \frac{dx}{x^{2}+6x+25}.$

62. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x+9}.$ 63. $\int x\ln x\,dx.$

64. $\int x^{2}\sin x\,dx.$ 65. $\int (3x-4)\ln x\,dx.$

66. $\int x\operatorname{arctg}x\,dx.$ 67. $\int (2x-5)e^{-3x}dx.$

68. $\int \arccos x\,dx.$ 69. $\int x\cos\frac{x}{2}\,dx.$

70. $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2}\,dx.$ 71. $\int x^{2}e^{-x}dx.$ 72. $\int \sqrt{a^{2}+x^{2}}\,dx.$

73. $\int \arcsin x\,dx$. 74. $\int e^{x}\cos x\,dx$.

75. $\int e^{x}\sin x\,dx$. 76. $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$.

77. $\int \frac{dx}{17+2x+x^2}$. 78. $\int \frac{dx}{x^2+7x-8}$.

79. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-4x+4}$. 80. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+x+1}$.

81. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$. 82. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

83. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. 84. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

IV БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

13-§. Эгри чизиқли трапециянинг юзи

Манфий бўлмаган узлуксиз бирор $f(x)$, $x \in [a;\ b]$ функцияни қарайлик.

Абсциссалар ўқи кесмаси, $x = a$ ва $x = b$ вертикал тўғри чизиқлар кесмалари ва берилган функция графиги билан чегараланган $AabB$ фигура (15-расм) *эгри чизиқли трапеция* дейилади.

Бошқача айтганда, эгри чизиқли трапеция—бу текисликнинг x, y координаталари $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ шартларни қаноатлантирадиган нуқталари тўпламидир.

Бу эгри чизиқли трапециянинг юзини топайлик. Бунинг учун $[a;\ b]$ кесмани

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

нуқталар ёрдамида узунликлари тенг бўлган n та $[a;\ x_1]$, $]x_1;\ x_2]$, ..., $[x_{n-1};\ b]$ кесмаларга бўламиз.

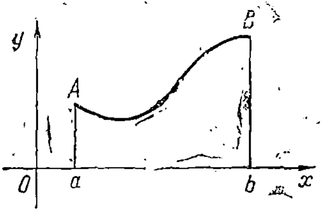
$f(x)$ функциянинг $[x_{i-1};\ x_i]$ (бу ерда $i = 1, \ldots, n$) кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини m_i ва M_i орқали белгилаймиз.

Эгри чизиқли $AabB$ трапеция n та бўлакка бўлинади (16-расм). i-бўлакнинг юзи $m_i(x_i - x_{i-1})$ дан кичик эмаслиги ва $M_i(x_i - x_{i-1})$ дан катта эмаслиги равшан. Демак, бутун эгри чизиқли $AabB$ трапециянинг юзи

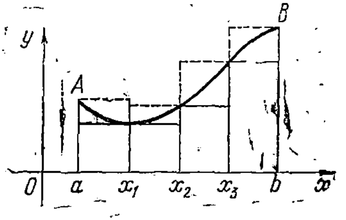
$$m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

йиғиндидан кичик эмас ва

$$M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$



15-расм



16-расм.

йиғиндидан катта эмас, бу ерда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Бу йиғиндиларни мос равишда s_n ва S_n орқали белгилаб, S_{AabB} юз

$$s_n \leqslant S_{AabB} \leqslant S_n$$

тенгсизликларни қаноатлантиришини кўрамиз.

Бу ерда чап томонда берилган эгри чизиқли трапеция ичида жойлашган поғонали фигуранинг юзи, ўнг томонда эса берилган эгри чизиқли трапецияни ўз ичига оладиган поғонали фигуранинг юзи турибди. $[a; b]$ кесмани етарлича кичик бўлакларга бўлинганда, яъни n етарлича катта бўлганда бу фигураларнинг юзлари бир-биридан ва эгри чизиқли трапециянинг юзидан кам фарқ қилади. Бинобарин, (s_n) ва (S_n) кетма-кетликлар бир хил лимитга эга ва бу лимит $AabB$ фигуранинг юзига тенг деб ҳисоблаш мумкин.

Бу даъво қаралаётган эгри чизиқли трапеция юзга эга деган фараз остида ҳосил қилинди, бироқ ҳали ҳеч қаерда бу тушунчага таъриф берилмади. Қуйидаги таъриф юқорида юритилган мулоҳазалардан табиий равишда келиб чиқади.

Таъриф. Узлуксиз манфий бўлмаган $f(x)$, $x \in [a; b]$ функция берилган бўлсин. У ҳолда (s_n) ва (S_n) кетма-кетликларнинг лимитлари мавжуд ва улар тенг бўлса, уларнинг бу умумий қиймати

$$\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

эгри чизиқли трапециянинг юзи дейилади.

14-§ да исталган эгри чизиқли трапеция юзга эгалиги келиб чиқадиган даъво келтирилади.

1-мисол. Учлари (0; 0), $(a; 0)$ ва $(a; b)$ нуқталарда бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи берилган таърифга кўра $\frac{1}{2}\,ab$ га тенглигини, яъни бизга таниш формула бўйича ҳисобланишини кўрсатамиз.

Ечилиши. Берилган учбурчак

$$f(x) = \frac{b}{a}\,x, \qquad x \in [0;\ a]$$

функция учун эгри чизиқли трапециядир.

$[0;\ a]$ кесмани $x_i = \frac{a}{n}\,i,\quad i = 0, 1, \ldots, n$ нуқталар билан узунликлари $\frac{a}{n}$ бўлган n та кесмага бўламиз. У ҳолда (17-расм)

$$m_i = f(x_{i-1}) = \frac{b}{n}\,(i-1),$$

$$M_i = f(x_i) = \frac{b}{n}\,i$$

ва шунинг учун

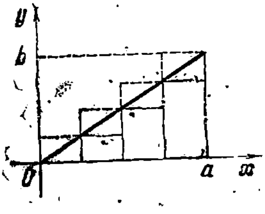
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\,(i-1)\,\frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\,i\,\frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

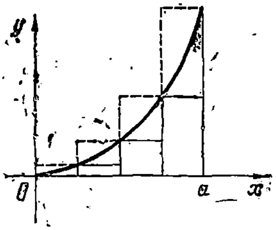
Бу ердан

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{ab}{2}$$

эканлиги кўриниб турибди. Шундай қилиб, берилган учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}\,ab$ га тенг эканлиги исбот қилинди.



17-расм.



18-расм

2-мисол. $y=x^2$ параболанинг бир қисми, $y=0$ ва $x=a$ (бу ерда $a>0$) тўғри чизиқ кесмалари билан чегараланган фигура юзини топайлик (18-расм).

Ечилиши. 1-мисолдагига ўхшаш, $[0; a]$ кесмани $x_i=\frac{a}{n}i$, $i=0,1,\ldots,n$ нуқталар билан узунликлари $\frac{a}{n}$ бўлган n та кесмага бўламиз. У ҳолда

$$s_n=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2,$$

$$S_n=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2.$$

I қисм, 7-§, 3-пунктда

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

эканлиги кўрсатилган эди. Бинобарин,

$$S_n=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

$$s_n=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

ва шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a^3}{3}.$$

Шундай қилиб, берилган фигуранинг юзи $\frac{1}{3}a^3$ га тенг.

Бир нечта изоҳ бериб ўтамиз.

1-изоҳ. Яна $AabB$ эгри чизиқли трапецияни қараймиз ва, одатдагича, $[a; b]$ кесмани x_i, $i=0,1,\ldots,n$ нуқталар билан бир хил узунликдаги n та кесмага бўламиз. Ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ кесмада ихтиёрий бирор нуқтани танлаб оламиз ва уни ξ_i билан белгилаймиз.

Юқоридагига ўхшаш, f функциянинг $[x_{i-1}; x_i]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматлари m_i ва M_i бўлса, у ҳолда равшанки,

$$m_i\leqslant f(\xi_i)\leqslant M_i$$

бўлади, бу ерда $i=1, \ldots, n$. Бу тенгсизликларнинг ҳар бирини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгсизликларни ҳадлаб қўшамиз. Натижада қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Бу ердан

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

лимит мавжуд эканлиги ва у ξ_i нуқталарнинг танланишига боғлиқ эмаслиги ҳамда доимо $AabB$ фигуранинг юзига тенг эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S_{AabB}. \qquad (1)$$

2- изоҳ. Юқорида $[a;\ b]$ кесмани узунликлари тенг бўлган n та кесмага бўлинди. $[a;\ b]$ кесмани ихтиёрий узунликдаги n та кесмага бўлиниб, лекин бу кесмалар узунликларининг энг каттаси $n \to \infty$ да нолга интилган ҳолда ҳам (1) формула ўз кучини сақлашини кўрсатиш мумкин.

Машқлар

1. $y = x$ тўғри чизиқнинг бўлаги ҳамда $y = 0$ ва $x = 3$ тўғри чизиқлар кесмалари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг

2. $y = 2x$ тўғри чизиқнинг бўлаги ҳамда $x = a$ ва $x = b$ (бу ерда $a > 0$, $b > a$) тўғри чизиқ кесмалари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

3. $y = e^x$ функциянинг $0 \leqslant x \leqslant 1$ кесмадаги графиги билан аниқланадиган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисобланг.

4. $y = 1 - x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ параболанинг бўлаги билан аниқланадиган эгри чизиқли трапециянинг юзи $\frac{2}{3}$ га тенг эканлигини исбот қилинг.

14-§. Аниқ интеграл

$[a;\ b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ функцияни қараймиз. 13-§ дагига ўхшаш, $[a;\ b]$ кесмани

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

нуқталар билан тенг узунликдаги n та кесмага бўламиз.

Ҳар бир $[x_{i-1};\ x_i]$, $i=1,\ \ldots\ ,\ n$ кесмада биттадан нуқтани ихтиёрий танлаб оламиз ва уни ξ_i билан белгилаймиз: $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$.

У ҳолда

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

йиғинди (бу ерда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) функциянинг *интеграл йиғиндиси* дейилади.

Бу йиғинди $[a;\ b]$ кесма қандай бўлинганига ҳам, ξ_i нуқталар қандай танлаб олинганига ҳам боғлиқ эканлиги равшандир.

Таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

лимит мавжуд бўлса ва ξ_i нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, f функция $[a;\ b]$ кесмада *интегралланувчи* дейилиб, бу лимит f функциядан $[a;\ b]$ кесмада олинган *аниқ интеграл* дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Бу белгилаш қуйидагича ўқилади: „$f(x)$ функциядан dx бўйича a дан b гача интеграл“ ёки қисқача: „$f(x)dx$ дан a дан b гача интеграл“. $\int$ белги *интеграл белгиси*, f функция *интеграл остидаги функция*, x ўзгарувчи *интеграллаш ўзгарувчиси*, $f(x)dx$ ифода эса *интеграл остидаги ифода* дейилади. a ва b сонлар мос равишда *интеграллашнинг қуйи ва юқори чегаралари* дейилади.

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Шуни қайд қиламизки, интегралнинг қиймати интеграллаш ўзгарувчиси қандай ҳарф билан белгиланганлигига боғлиқ эмас, бинобарин, масалан,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Қуйидаги даъволарни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада монотон бўлса, у ҳолда у шу кесмада интегралланувчидир.*

2-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда у шу кесмада интегралланувчидир.*

Албатта, агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да монотон ва узлуксиз бўлса, у $]a; b[$ да интегралланувчидир.

Амалда учрайдиган чегараланган функциялар одатда бу функциялар берилган исталган кесмада интегралланувчи эканлигини қайд қилиб ўтамиз.

Аниқ интегралларни бевосита ҳисоблашга (бевосита таърифдан фойдаланиб ҳисоблашга) доир мисоллар 13-§ да берилган эди (1-ва 2-мисолларга қаранг).

Пировардида интегралланмайдиган функцияга мисол келтирамиз. $[0; 1]$ кесмада Дирихле функциясини қараймиз. Бу функция рационал нуқталарда 1 га, иррационал нуқталарда эса 0 га тенг. Шунинг учун агар интеграл йиғиндиларда ξ_i нуқта учун иррационал нуқталар олинса, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$$

бўлади, бинобарин, $n \to \infty$ да бу йиғиндиларнинг лимити 0 га тенг. Агар ξ_i учун рационал нуқталар олинса, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

бўлиб, бу йиғиндиларнинг лимити 1 га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $[0; 1]$ кесмада Дирихле функцияси учун интеграл йиғиндиларнинг лимити ξ_i нуқталарнинг танлаб олинишига боғлиқдир. Бу эса Дирихле функцияси $[0; 1]$ кесмада интегралланмаслигини билдиради.

15-§. Аниқ интегралларнинг асосий хоссалари ва улардан келиб чиқадиган натижалар

Дастлаб аниқ интегралларнинг асосий хоссаларини қараб чиқамиз.

1. *Ҳар қандай α ҳақиқий сон учун қуйидаги тенглик ўринлидир:*

$$\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a). \tag{1}$$

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)=\alpha$, $x \in [a; b]$ функциянинг исталган интеграл йиғиндиси учун қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \alpha(b-a),$$

шунинг учун бундай йиғиндиларнинг $n \to \infty$ даги лимити $\alpha(b-a)$ га тенг.

2. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда исталган α ҳақиқий сон учун $\alpha f(x)$ функция ҳам $[a; b]$ да интегралланувчидир ва*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

яъни ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $\alpha f(x)$ функциянинг исталган интеграл йиғиндиси учун

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

га эгамиз ва шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\int_a^b f(x)dx,$$

бу эса $\alpha f(x)$ функциянинг $[a; b]$ да интегралланувчанлигини ва (2) формуланинг ўринли эканлигини билдиради.

3. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a; b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда уларнинг $f(x)+$*

$+g(x)$ йиғиндиси ҳам $[a;\ b]$ да интегралланувчидир ва

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \qquad (3)$$

яъни йиғиндидан олинган интеграл қўшилувчилардан олинган интегралларнинг йиғиндисига тенгдир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

4. *Агар $[a;\ b]$ кесмада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар интегралланувчи ва*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad (4)$$

бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx. \qquad (5)$$

Ҳақиқатан ҳам, (4) тенгсизликдан $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг исталган интеграл йиғиндилари учун

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади, бу ерда $n\to\infty$ деб лимитга ўтилса, (5) тенгсизлик ҳосил бўлади.

5. *Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда у $[a;\ b]$ кесмада жойлашган ҳар қандай кесмада ҳам интегралланувчидир. Бундан ташқари, агар $f(x)$ функция $[a;\ c]$ кесмада ва $[c;\ b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $[a;\ b]$ кесмада интегралланувчи бўлади ва*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (6)$$

тенглик ўринли бўлади.

Биз бу хоссани исботлаб ўтирмаймиз.

1-натижа. *Агар* $[a;\ b]$ *кесмада* $f(x)$, $g(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар интегралланувчи ва*

$$m\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx. \qquad (7)$$

Хусусий ҳолда, агар $m \leqslant f(x) \leqslant M$ бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \qquad (8)$$

(7) тенгсизлик 4-хоссанинг бевосита натижасидир, (8) тенгсизлик эса (7) дан $\varphi(x) = g(x) = 1$ бўлганда ва 1-хоссадан келиб чиқади.

2-натижа. *Агар* $[a;\ b]$ *кесмада* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар интегралланувчи ҳамда* $g(x) \geqslant 0$ *ва*

$$|f(x)| \leqslant Mg(x) \qquad (9)$$

бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M\int_a^b g(x)dx. \qquad (10)$$

Хусусан, агар $|f(x)| \leqslant M$ бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M(b-a). \qquad (11)$$

Ҳақиқатан ҳам, (9) дан

$$-Mg(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x)$$

эканлиги келиб чиқади, шунинг учун

$$-M\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx,$$

бу эса (10) тенгсизлик бажарилишини кўрсатади, чунки $M\int_a^b g(x)dx \geqslant 0$. (11) тенгсизлик (10) нинг $g(x) = 1$ бўлгандаги хусусий ҳолидир.

16-§. Баъзи умумлаштиришлар

Юқорида аниқ интеграл интеграллашнинг қуйи чегараси унинг юқори чегарасидан кичик бўлган ҳолда қараб чиқилди. Амалда бундай чеклаш баъзан ноқулай бўлади.

Бу чеклашдан қутулиш мақсадида қуйидаги таърифни киритамиз.

Таъриф. Агар $a=b$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

Агар $a<b$ бўлса, у ҳолда

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

Бу формула интегралда интеграллаш чегараларининг ўрнини алмаштирилса, у ҳолда интегралнинг ишораси ўзгаришини билдиради. Бундай интеграллар учун аниқ интегралнинг 4-хоссаси ва ундан келиб чиқадиган натижалардан ташқари барча хоссалари ўринлидир.

1, 2 ва 3-хоссаларни исботлашни ўқувчининг ўзига тавсия қиламиз.

Интеграллашнинг қуйи чегараси юқори чегарасидан катта бўлган интеграллар учун 4-хосса қуйидагича ифодаланади:

Агар $[a; b]$ кесмада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар интегралланувчи ва $f(x)\leqslant g(x)$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринлидир:

$$\int_b^a f(x)dx\geqslant\int_b^a g(x)dx.$$

Бу тенгсизлик 15-§ даги (5) тенгсизликни -1 га кўпайтириш билан ҳосил қилинади.

15-§ даги (7) ва (8) тенгсизликлар ҳам мос равишда ўзгаради.

Худди юқоридагидек, агар $[a; b]$ да $|f(x)|\leqslant M$ бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_b^a f(x)dx\right|\leqslant M(b-a).$$

Интегрални бундай умумлаштиришда 5-хосса ҳам ўз кучини сақлайди.

Бундан ташқари $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидаги исталган учта c_1, c_2 ва c_3 нуқта учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx. \qquad (1)$$

Агар $c_1 < c_2 < c_3$ бўлса, бу формула 15-§ даги (6) формуланинг ўзи бўлади. Агар, масалан, $c_2 < c_1 < c_3$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx = \int_{c_2}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_3} f(x)dx$$

ёки

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx = -\int_{c_2}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx.$$

Интеграллаш чегаралари c_1 ва c_2 нинг ўринларини алмаштириб, (1) формулани ҳосил қиламиз.

Қолган ҳоллар учун (1) формула шунга ўхшаш исботланади.

17-§. Ўртача қиймат ҳақидаги теорема

Узлуксиз функция учун қуйидаги теорема ўринлидир. Бу қизиқарли теорема *аниқ интеграл учун ўртача қиймат ҳақидаги теорема* дейилади.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a; b]$ да шундай ξ нуқта мавжуд бўладики, унинг учун*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (1)$$

бўлади.

Исбот. Агар $a = b$ бўлса, (1) тенглик равшан эканлигини қайд қилайлик. Бу ҳолда бу тенгликнинг чап томонида ҳам, ўнг томонида ҳам ноль бўлади, бинобарин, $a < b$ бўлган ҳолгина мазмунли бўлади.

Айтайлик, $a < b$ бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини мос равишда m ва M орқали белгилаймиз. У ҳолда $]a; b]$

даги исталган x учун $m\leqslant f(x)\leqslant M$ бўлади, шунинг учун

$$m(b-a)\leqslant\int\limits_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

Бу тенгсизликни $b-a>0$ га ҳадма-ҳад бўлиб, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\leqslant M.$$

Бу ердан (1) формула келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a;\ b]$ да узлуксиз бўлгани учун у $[m;\ M]$ кесмадаги исталган қийматни қабул қилади ва шунинг учун шундай $\xi\in[a;\ b]$ нуқта мавжуд бўладики, унинг учун

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Теорема исбот қилинди.

Манфий бўлмаган функция учун ўртача қиймат ҳақидаги теорема содда геометрик талқинга эга. Бундай талқинга кўра f функцияга мос келувчи эгри чизиқли трапециянинг юзи асоси трапециянинг асосига, баландлиги эса интегралланувчи функциянинг қийматларидан бирига тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг (19-расм).

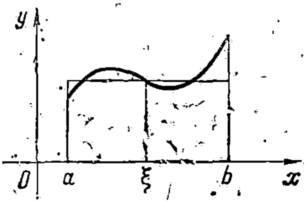
Изоҳ. (1) формула интеграллашнинг қуйи чегараси юқори чегарасидан кичик бўлган интеграллар учунгина эмас, балки қуйи чегараси юқори чегарасидан катта бўлган интеграллар учун ҳам ўринлидир.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция ҳозиргина исботланган теореманинг ҳамма шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx=$$

$$=-f(\xi)(b-a)=f(\xi)(a-b),$$

бу ерда $\xi\in[a;\ b]$.



19-расм.

18-§. Юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграл

$f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. У ҳолда у исталган $[a;\ x]$ кесмада интегралланувчидир, бу ерда $x \in [a;\ b]$. Қуйидаги функцияни кўрайлик:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a;\ b]. \qquad (1)$$

Бу функция *юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграл* дейилади.

(1) формулада интеграллаш ўзгарувчиси t ҳарфи билан белгиланган, чунки бу ерда x ҳарфи орқали интегралнинг юқори чегараси белгиланган (бу ерда у Φ функциянинг эркли ўзгарувчисидир).

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда (1) функция $[a;\ b]$ кесмада* $\Phi'(x) = f(x)$ ҳосилага эга бўлади, яъни

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \qquad (2)$$

Равшанки, a ва b нуқталарда $\Phi(x)$ функциянинг бир томонлама ҳосилалари ҳақидагина гапириш маънога эгадир.

Бу теорема *интегрални унинг юқори чегараси бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теорема* дейилади.

Исботи. $\Phi(x)$ функциянинг таърифидан ва интегралнинг хоссасидан (5-хоссага қаранг) $[a;\ b]$ даги исталган x ва x_0 учун

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

эканлиги келиб чиқади. Кейинги интегралга ўртача қиймат ҳақидаги теоремани қўлланамиз (бундан ташқари 17-§ нинг охиридаги изоҳга ҳам қаранг). У ҳолда

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = f(\xi)(x - x_0),$$

бу ерда агар $x_0 < x$ бўлса, $\xi \in [x_0;\ x]$ ва $x < x_0$ бўлса, $\xi \in [x;\ x_0]$.

Шундай қилиб, исталган $x \neq x_0$ учун x ва x_0 нинг орасида ётувчи шундай ξ топиладики, унинг учун

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = f(\xi)$$

бўлади. $f(x)$ функция $[a;\ b]$ да, бинобарин, $x_0 \in [a;\ b]$ нуқтада ҳам узлуксиз бўлгани учун

$$\Phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

бўлади. $x_0 = a$ нуқтада $\Phi(x)$ нинг ўнг ҳосиласи, $x_0 = b$ нуқтада эса чап ҳосиласи мавжуд бўлиши равшандир. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремани қисқача қуйидагича ифодалаш мумкин: *узлуксиз функция учун интегралнинг юқори чегара бўйича ҳосиласи функциянинг ўзига тенг.*

Дифференциалларда ёзилса, (2) формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$d \int_a^x f(t)dt = f(x)dx, \tag{3}$$

яъни интегралнинг юқори чегара бўйича дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг.

Исботланган теоремадан келиб чиқадики, ихтиёрий узлуксиз функция бошланғич функцияга эга бўлади ва у берилган функциядан олинган юқори чегараси ўзгарувчи бўлган интегралдан иборатдир.

19-§. Ньютон—Лейбниц формуласи

Агар $F(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада ҳосилага эга бўлса ва $F'(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада $f(x)$ функция учун бошланғич функция деб аталишини эслатиб ўтамиз.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринлидир:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Бу формула *Ньютон—Лейбниц формуласи* дейилади.

Исбот. Интегрални унинг юқори чегараси бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теоремадан

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

функция $[a;\ b]$ кесмада $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлиши келиб чиқади. $[a;\ b]$ кесмада $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлгани учун $\Phi(x)-F(x)$ айирма бутун $[a;\ b]$ кесмада бирор C ўзгармасга тенг, яъни

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

бўлади.

Бу ерда дастлаб $x=a$ деб, сўнгра $x=b$ деб фараз қилсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Phi(a)=F(a)+C,$$

$$\Phi(b)=F(b)+C.$$

$\Phi(a)=0$ бўлгани учун $C=-F(a)$ ва шунинг учун

$$\Phi(b)=F(b)-F(a),$$

бу ерда

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема исбот бўлди.

Кўпинча $F(b)-F(a)$ айирма ўрнига

$$F(x)\Big|_a^b \text{ ёки } \Big[F(x)\Big]_a^b$$

лар ёзилади ва (1) формула бу ҳолда қуйидаги кўринишни олади:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b. \qquad (2)$$

Бу формула бундай ўқилади: „$f(x)$ дан dx бўйича a дан b гача олинган интеграл $F(x)$ га a дан b гача ўрнига қўйишга тенг“.

$f(x)dx=dF(x)$ бўлгани учун $\int_a^b f(x)dx$ ўрнига $\int_a^b dF(x)$ ёзилади ва „$dF(x)$ дифференциалдан a дан b

гача интеграл“ ёки қисқача, „$dF(x)$ дан a дан b гача интеграл“ деб ўқилади.

Шундай қилиб,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

яъни бирор функциянинг дифференциалидан a дан b гача олинган интеграл бу функциянинг b ва a нуқталардаги қийматлари айирмасига тенгдир.

Айтиб ўтилганидек, (1) формула Ньютон—Лейбниц формуласи деб аталади. У дифференциал ва интеграл ҳисобни яратувчилари буюк олимлар И. Ньютон ва Г. Лейбниц шарафига шундай деб юритилади. Бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ривожланган дифференциал ҳисоб ва интеграл ҳисоб бу формула ҳосил қилинганидан сўнг ўзаро узвий алоқадор эканлиги маълум бўлиб қолди ва ягона назария—математик анализга бирлаштирилди, бинобарин, Ньютон—Лейбниц формуласини ҳақли равишда математик анализнинг марказий теоремаси деб айтиш мумкин.

Ньютон—Лейбниц формуласи аниқ интегралларни интеграл остидаги функциянинг ҳеч бўлмаганда битта бошланғич функцияси маълум бўлганда интеграл йиғиндиларсиз ва лимитларни ҳисобламасдан топиш имконини беради. Бошланғич функцияларни топиш усуллари илгарироқ, III бобда баён қилинган эди.

Аниқ интегралларни Ньютон—Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблашга доир бир нечта мисол кўрамиз.

1-мисол. $\int_0^1 x^2dx$ ни ҳисоблайлик. $\frac{1}{3}x^3$ функция x^2 функция учун бошланғич функция бўлгани сабабли Ньютон—Лейбниц формуласига кўра

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2-мисол. $\int_{-1}^1 (x + \sin x + x^{10})dx$ ни ҳисоблаймиз.

Йиғиндидан олинган интеграл қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисидан иборат бўлгани ва $\frac{1}{2}x^2$, $-\cos x$, $\frac{1}{11}x^{11}$ функциялар мос равишда x, $\sin x$, x^{10}

функциялар учун бошланғич функциялар бўлгани учун қуйидагига эгамиз:

$$\int_{-1}^{1} (x+\sin x+x^{10})dx = \int_{-1}^{1} x dx + \int_{-1}^{1} \sin x dx + \int_{-1}^{1} x^{10} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{1} + (-\cos x) \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{11} x^{11} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-1)+(-\cos 1+\cos(-1))+\frac{1}{11}(1+1)=\frac{2}{11}.$$

Демак,

$$\int_{-1}^{1} (x+\sin x+x^{10})\, dx = \frac{2}{11}.$$

3-мисол. $\int_{0}^{2} f(x)dx$ ни ҳисоблаймиз, бу ерда $x \in [0;\ 1]$ бўлса, $f(x)=e^x$ ва $x \in]1;\ 2]$ бўлса, $f(x)=2x$.

0 дан 2 гача интеграл 0 дан 1 гача ва 1 дан 2 гача интегралларнинг йиғиндисига тенг бўлгани учун қуйидагига эгамиз:

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} e^x dx + \int_{1}^{2} 2x\, dx = e^x \Big|_{0}^{1} + x^2 \Big|_{1}^{2} =$$

$$= e-1+4-1=e+2.$$

Демак,

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = e+2.$$

Машқлар

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_{1}^{3} x^3\, dx$; б) $\int_{1}^{2} \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right) dx$;

в) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\, dx$; г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx$; д) $\int_{0}^{\pi} \sin 2x\, dx$.

2. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_{1}^{2}(2x+1)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx.$

3. $f(x)=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1 & \text{бўлса, } x^2,\\ 1\leqslant x\leqslant 2 & \text{бўлса, } \sqrt{x}\end{cases}$ функция берилган

$\int\limits_{0}^{2}f(x)dx$ интегрални ҳисобланг.

4. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; б) $\int\limits_{0}^{1}e^{2x}dx$; в) $\int\limits_{0}^{2}x(3-x)\,dx$;

г) $\int\limits_{1}^{2}\frac{e^x}{e^x-1}dx$; д) $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; е) $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{1}{1+x^2}dx$;

5. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_{4}^{9}\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$; б) $\int\limits_{0}^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_{0}^{1}(e^x-1)^4e^x\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

20-§. Аниқ интегралларни ўрнига қўйиш усули ёрдамида ҳисоблаш

Аниқмас интегралларни топишдаги каби аниқ интегралларни ҳисоблашда ҳам ўрнига қўйиш ёки интеграллаш ўзгарувчисини алмаштириш усулидан кенг фойдаланилади. Тегишли теоремани баён қиламиз ва уни исботлаймиз.

Теорема. *$f(x)$ функция исталган $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$ нуқтада узлуксиз ва $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ бўлсин. У ҳолда $\varphi(t)$ функция узлуксиз ҳосилага эга бўлса, қуйидаги формула ўринли бўлади:*

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Бу формула *аниқ интегралда интеграллаш ўзгарувчисини алмаштириш формуласи* дейилади.

Исботи. $f(x)$ функция узлуксиз бўлгани учун у албатта бошланғич функцияга эга бўлади. Уни $F(x)$ билан белгилайлик. У ҳолда $F(\varphi(t))$ мураккаб функция ушбу $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функция учун бошланғич функция бўлади.

$f(x)$ ва $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функцияларнинг аниқ интегралларини Ньютон—Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{2}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \tag{3}$$

Шартга кўра $b=\varphi(\beta)$ ва $a=\varphi(\alpha)$, шунинг учун (2) ва (3) формулаларнинг ўнг томонлари тенг. Бинобарин, уларнинг чап томонлари ҳам тенг, яъни (1) формула ўринлидир. Теорема исбот бўлди.

(1) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t). \tag{4}$$

Шундай қилиб, интеграллаш ўзгарувчисини $x=\varphi(t)$ алмаштиришда, биринчидан, интеграл остида ҳамма ерда x ни $\varphi(t)$ га алмаштириш, иккинчидан, интеграллаш чегараларини мос равишда ўзгартириш керак.

Аниқ интегралларни ҳисоблашда (1) ва (4) формулаларни фақат чапдан ўнгга қараб эмас, балки ўнгдан чапга қараб ҳам қўлланилади.

Кўпчилик ҳолларда $f(\varphi)\varphi'$ дан олинган интегрални ҳисоблашни f дан олинган интегрални ҳисоблашга келтирилади. Бундай ҳолда (1) ва (4) формулаларни қуйидагича қайта ёзиб олиш қулайдир;

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy, \tag{5}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy. \tag{6}$$

(Бу ерда интеграллаш ўзгарувчиларини белгилаш ўзгартирилган: t ўзгарувчи x билан, x эса y билан алмаштирилган.)

Шундай қилиб, агар интеграл остидаги ифода $f(\varphi(x))d\varphi(x)$ кўринишга эга бўлса ёки шу кўринишга келтирилса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ алмаштириш қилиш мумкин. Бунинг учун интеграл остида ҳамма ерда $\varphi(x)$ нинг ўрнига y ни қўйиш керак, интеграллаш чегаралари α ва β ни мос равишда $\varphi(\alpha)$ ва $\varphi(\beta)$ билан алмаштириш керак.

1-мисол. $\int\limits_1^2 x\cos x^2 dx$ интегрални ҳисоблайлик.

(1) формуладан фойдаланамиз. $x=\sqrt{t}$ деймиз. Интеграл остида ҳамма ерда x ни $\sqrt{t}$ билан алмаштириш ва интеграллаш чегараларини мос равишда ўзгартириш керак. Бу ерда $t=x^2$, шунинг учун янги интегралда интеграллаш чегаралари 1 ва 4 бўлади. Шундай қилиб,

$$\int\limits_1^2 x\cos x^2 dx=\int\limits_1^4 \sqrt{t}\cos t\, d\sqrt{t}=\int\limits_1^4 \sqrt{t}\cos t\,\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 \cos t dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 1).$$

Энди бу интегрални (6) формула ёрдамида ҳисоблашни кўрсатамиз:

$$\int\limits_1^2 x\cos x^2 dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \cos x^2 2x dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \cos x^2 d(x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 \cos y dy=\frac{1}{2}\sin y\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\sin 4+\sin 1).$$

Бу ерда $y=x^2$ ўрнига қўйиш бажарилган.

2-мисол. $\int\limits_{-1}^2 x\sin x^2 dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Қуйидагига эгамиз:

$$\int\limits_{-1}^2 x\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^2 \sin x^2\, d(x^2),$$

шунинг учун $y=x^2$ деб оламиз. У ҳолда

$$\int_{-1}^{2} x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sin y\, dy = \frac{1}{2}\,(-\cos y)\Big|_1^4 =$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-\cos 4).$$

Бу ерда $x=\sqrt{t}$ алмаштириш қилиш мумкин эмаслигини айтиб ўтиш керак, чунки $\sqrt{t}\geqslant 0$ бўлиб, берилган интегралда эса x манфий қийматларни ҳам қабул қилади.

3-мисол. $e^{\sin x}\cos x$ функциядан 0 дан $\pi/2$ гача олинган аниқ интегрални ҳисоблаймиз.

Қуйидагига эгамиз:

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) = \int_0^1 e^y dy =$$

$$= e^y\Big|_0^1 = e-1.$$

Бу ерда $y=\sin x$ алмаштириш бажарилди.

1 ва 2-мисоллардаги интеграллар каби бу интегрални ҳам интеграллаш ўзгарувчисини алмаштирмасдан ҳисоблаш мумкинлигини қайд қилиб ўтайлик. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) = \int_0^{\pi/2} d(e^{\sin x}) =$$

$$= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} = e-1.$$

4-мисол. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}$ интегрални ҳисоблаймиз. $f(x)=$ $=\frac{1}{1+\cos x}$ функциядан олинган аниқмас интегрални топиш учун $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз. Аниқроғи, интеграллаш ўзгарувчисини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x=2\operatorname{arctg} t.$$

Тригонометриядан маълум формулаларга кўра

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

шунинг учун

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2} = \frac{1+t^2}{2}.$$

dx ни топамиз:

$$dx = 2(\operatorname{arctg} t)' dt = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Ниҳоят, $\operatorname{tg}\frac{0}{2} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\cdot 2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ бўлгани учун янги интегралда интеграллаш чегараларини 0 ва 1 деб олиш керак.

Шундай қилиб,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 dt = 1.$$

5- мисол. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ интегрални ҳисоблаймиз.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ деймиз. У ҳолда

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

ва dt бўйича интегрални 0 дан 1 гача олиш керак.

Демак,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,dt.$$

Энди янги $t = \sqrt{3}y$ алмаштириш бажарамиз:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{3+3y^2}\sqrt{3}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2}.$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} y \Big|_0^{1/\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Машқлар

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; г) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; д) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. Нима учун $\int\limits_2^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ интегралда $x=\sin t$ ўрнига қўйишни бажариш мумкин эмас?

3. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x\,dx$; б) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

21-§. Аниқ интегралларни бўлаклаб интеграллаш усули билан ҳисоблаш

Маълумки, аниқмас интегралларни бўлаклаб интеграллаш формуласи ушбу

$$(uv)' = uv' + vu' \qquad (1)$$

формулани интеграллаш орқали исботланади.

Аниқ интеграллар учун бўлаклаб интеграллаш формуласи ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Теорема. *Агар $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, қуйидаги формула ўринли бўлади:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (2)$$

Бу формула қисқача қуйидагича ёзилади:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (3)$$

(2) формула ҳам, (3) формула ҳам аниқ интегрални *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

Исботи. (1) тенгликдан

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b uv'dx + \int_a^b vu'dx$$

эканлиги келиб чиқади. $(uv)'$ дан олинган интеграл эса $uv \Big|_a^b$ ўрнига қўйишдан иборат бўлгани учун

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b uv'dx + \int_a^b vu'dx.$$

Бу ердан (2) формула келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бўлаклаб интеграллаш формуласи бир интегрални ҳисоблашни бошқа интегрални ҳисоблашга келтиради. Табиийки, ҳосил қилинган интеграл берилган интегралдан содда ёки ҳисоблаш қулайроқ бўлишига ҳаракат қилинади.

1-мисол. $\int_1^3 \ln x dx$ ни ҳисоблаймиз.

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланамиз, бунинг учун $u = \ln x$, $dv = dx$ деб оламиз. У ҳолда

$$\int_1^3 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 x d(\ln x) =$$

$$= 3 \ln 3 - \int_1^3 x \frac{1}{x} dx = 3 \ln 3 - \int_1^3 dx = 3 \ln 3 - 2.$$

2-мисол. $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$ ни ҳисоблаймиз.

$u = x^2$, $\cos x dx = dv$ деймиз, у ҳолда $v = \sin x$. Энди (2) формулани қўлланамиз:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin x dx = -2 \int_0^\pi x \sin x dx.$$

Ҳосил бўлган интегрални яна бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \int_0^\pi x\,d(-\cos x) =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = -2\pi.$$

3-мисол. [0; 1] оралиқда x^2 га, [1; 2] оралиқда x га ва [2; 3] оралиқда $e^x + \frac{1}{6}$ га тенг бўлган $f(x)$ функциядан 0 дан 3 гача олинган интегрални ҳисоблаймиз.

Қуйидагига эгамиз:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 xdx + \int_2^3\left(e^x + \frac{1}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 + e^x\Big|_2^3 + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(4-1) + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + e^3 - e^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} = \frac{11}{6} + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} = 2 + e^3 - e^2.$$

Машқлар

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_0^1 xe^x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$; д) $\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx$;

е) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; ж) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

22-§. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш усуллари

Амалда кўпинча бошланғич функцияларини топиб бўлмайдиган функциялардан олинган аниқ интегралларни ҳисоблаш талаб этилади. Бундай ҳолларда одатда қаралаётган интегралнинг тақрибий қийматини топиш билан чекланилади. Ҳатто, бошланғич функция маълум бўлган ҳолларда ҳам, амалда баъзан интегралнинг қийматини Ньютон—Лейбниц формуласи бўйича эмас, балки тақрибий интеграллаш формулалари бўйича тақрибий қийматини топиш анча қулай бўлади.

Бу параграфда аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашга доир иккита содда формулани—тўғри тўртбурчаклар формуласи ва трапециялар формуласини келтирамиз.

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. $f(x)$ функциядан a дан b гача олинган интегрални ҳисоблаш талаб қилинаётган бўлсин. Одатдагича, $[a; b]$ кесмани

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \qquad i=0, 1, \dots, n \qquad (1)$$

нуқталар билан узунликлари тенг бўлган n та кесмага бўламиз. Ҳар бир ҳосил қилинган $[x_{i-1}; x_i]$ кесмада ξ_i орқали бу кесманинг ўртасини белгилаймиз. $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i=1, \dots, n$ ва ушбу интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i). \qquad (2)$$

Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Шунинг учун етарлича катта n да (2) интеграл йиғиндини берилган интегралнинг тақрибий қиймати учун қабул қилиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (4)$$

(3) тенглик исталган интеграл йиғинди учун ўринли эканлигини қайд қилиш мумкин. Бироқ умумий ҳолда ξ_i сифатида $[x_{i-1};\ x_i]$, $i=1, \ldots, n$ кесмаларнинг ўрталари олинганда интеграл йиғиндилар энг яхши яқинлашиш беришини исбот қилиш мумкин.

Шундай қилиб, $[a;\ b]$ кесма x_i, $i=0,1, \ldots, n$ нуқталар билан узунликлари тенг бўлган n та $[x_{i-1};\ x_i]$ кесмага бўлинади:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,$$

ва $[x_{i-1};\ x_i]$ кесмадаги ҳар қайси интеграл $f(\xi_i)\Delta x_i$ кўпайтма билан алмаштирилади, яъни

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(\xi_i)\Delta x_i,$$

бу ерда ξ_i —$]x_{i-1};\ x_i[$ кесманиңг ўртаси.

Манфий бўлмаган функциялар учун бу $[x_{i-1};\ x_i]$ даги тегишли эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлган интеграл ўша асосли ва баландлиги $f(\xi_i)$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи билан алмаштирилганини билдиради (20-расм). Шунинг учун (4) формула аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг *тўғри тўртбурчаклар формуласи* дейилади.

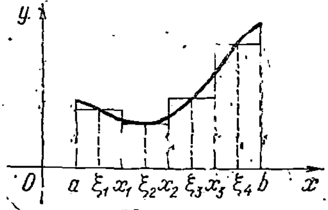
Қуйидаги теорема узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган функциялар учун тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича ҳосил қилинадиган яқинлашишнинг абсолют хатосини баҳолайди.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \qquad (5)$$

бу ерда M — ушбу $|f''(x)|$ функциянинг $[a;\ b]$ даги энг катта қиймати.

Бу теоремани исбот қилмаймиз.



20-расм.

(1) формуладан

$$\frac{x_{i-1}+x_i}{2}=a+\frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)$$

эканлиги келиб чиқади.

Демак, тўғри тўртбурчаклар формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right).$$

2. Трапециялар формуласи. Худди юқоридагидек $f(x)$ функциядан a дан b гача олинган интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. $[a;\ b]$ кесмани

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\quad i=0,1,\ \dots\ ,\ n$$

нуқталар ёрдамида узунликлари тенг бўлган n та кесмага бўламиз ва қуйидаги интеграл йиғиндиларни тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}),\qquad(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i)\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).\qquad(2)$$

Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

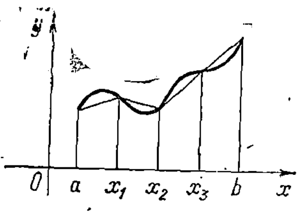
Шунинг учун етарлича катта n ларда (1) ва (2) интеграл йиғиндиларнинг ҳар бирини берилган интегралнинг тақрибий қиймати учун қабул қилиш мумкин. Бироқ умумий ҳолда аниқроқ тақрибий яқинлашишни бу йиғиндиларнинг ўртача арифметик қиймати беради:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.$$

Шундай қилиб, қуйидаги формула ўринлидир:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.$$

Бу формула аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг *трапециялар формуласи* дейилади.



21-расм.

Манфий бўлмаган $f(x)$ функция учун бу формула содда геометрик талқинга эга. Чунончи, $[a; b]$ кесма узунликлари тенг бўлган n та кесмага бўлинади ва эгри чизиқли трапециянинг ҳар қайси бўлагининг юзи асослари $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ ва баландлиги $\frac{b-a}{n}$ бўлган трапеция юзи билан алмаштирилади (21-расм).

Қуйидаги теорема трапециялар формуласи бўйича ҳосил қилинадиган тақрибий қийматнинг абсолют хатосини баҳолайди.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2},$$

бу ерда M — ушбу $|f''(x)|$ функциянинг $]a; b[$ кесмадаги энг катта қиймати.

Бу теореманинг исботини келтирмаймиз.

Қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b),$$

шунинг учун

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

Демак, трапециялар формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right).$$

1-мисол. $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ интегрални 0,01 гача аниқлик билан ҳисоблаймиз.

Бу ерда

$$f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2} \quad f''(x) = 4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}.$$

[0; 1] кесмада $|f''(x)| \leqslant 6e$.

Дастлаб тўғри тўртбурчаклар формуласини қўллаймиз. Берилган интегрални 0,01 гача аниқлик билан ҳисоблаш лозим, шунинг учун [0; 1] кесмани тенг узунликдаги шунча оралиққа бўлиш керакки, натижада

$$\frac{6e}{24n^2} \leqslant 0{,}01 \tag{3}$$

тенгсизлик бажарилсин, бу ердан $n \geqslant 5\sqrt{e}$ эканлиги келиб чиқади. $e < 2{,}89 = (1{,}7)^2$ бўлгани учун $n = 9$ юқоридаги (3) тенгсизликни қаноатлантириши аниқ.

Демак, 0,01 гача аниқлик билан

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} f\left(\frac{1}{9}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left\{f\left(\frac{1}{18}\right)+f\left(\frac{3}{18}\right)+f\left(\frac{5}{18}\right)+f\left(\frac{7}{18}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{9}{18}\right)+f\left(\frac{11}{18}\right)+f\left(\frac{13}{18}\right)+f\left(\frac{15}{18}\right)+f\left(\frac{17}{18}\right)\right\}.$$

Узил-кесил натижани ҳосил қилиш учун $f(x) = e^{x^2}$ функциянинг кўрсатилган нуқталардаги қийматларини ҳам ҳисоблаб чиқиш керак. Натижада 1,46 ни ҳосил қиламиз.

Энди трапециялар формуласини татбиқ қиламиз.

Бу ҳолда $\frac{6e}{12n^2} \leqslant 0{,}01$ тенгсизлик бажарилиши лозим, яъни $n \geqslant 10\sqrt{\frac{e}{2}}$. Бу тенгсизликни $n=12$ қаноатлантиради. Демак, 0,01 гача аниқлик билан

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{12}\left(\frac{1+e}{2}+\sum_{i=1}^{11} f\left(\frac{i}{12}\right)\right) \approx 1{,}46.$$

2-мисол. $\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx$ интегрални 0,01 гача аниқлик билан ҳисоблаймиз.

Бу ерда $f(x)=\sqrt{x^2+1}\sin x$; $f''(x)$ ни топамиз:

$$f''(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\cos x + \frac{x^4}{(1+x^2)^{3/2}}\sin x.$$

Сўнгра

$$|f''(x)| \leqslant \sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}+\frac{x^8}{(1+x^2)^3}} \leqslant \sqrt{4-\frac{4}{x^2+1}+1} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{4-2+1}=\sqrt{3}<2.$$

Демак, тўғри тўртбурчаклар формуласида n қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши керак:

$$\frac{\sqrt{3}}{24\,n^2} \leqslant 0{,}01,$$

яъни

$$n \geqslant \sqrt{\frac{100\sqrt{3}}{24}} = \frac{5}{\sqrt{2\sqrt{3}}}.$$

Кўриш осонки, $n=3$ бу тенгсизликни қаноатлантиради. Шундай қилиб, 0,01 гача аниқлик билан

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{1}{3}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$=\frac{1}{3}\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)\right\}\approx 0{,}56.$$

Трапециялар формуласида n қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши керак:

$$n \geqslant \frac{5}{\sqrt{\sqrt{3}}}.$$

Бу тенгсизликни $n=4$ қаноатлантиради.

Демак,

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin 1 + f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\approx 0{,}56.$$

Кўриб чиқилган мисоллардан қуйидагича хулоса чиқариш мумкин: тўғри тўртбурчаклар ва трапециялар формулалари бўйича ҳисоблаш мураккаблиги деярли бир хилдир.

Машқлар

1. $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0{,}69315$ интегралнинг тақрибий қийматини $n = 10$ да тўғри тўртбурчаклар формуласи ва трапециялар формуласи бўйича топинг.

2. Трапециялар формуласи бўйича $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ интегрални 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

3. $I = \int\limits_0^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3} \approx 21{,}33$ интегралнинг тақрибий қийматини $n = 10$ да тўғри тўртбурчаклар формуласи ва трапециялар формуласидан фойдаланиб, икки усул билан ҳисобланг

4. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x}$ интегрални трапециялар формуласи бўйича интеграллаш оралиғини 4 бўлакка бўлиб ҳисобланг.

V БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

23-§. Ясси фигураларнинг юзини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш

Ясси фигураларнинг юзини аниқ интеграл тушунчасидан фойдаланиб ҳисоблашнинг умумий методини берамиз. Маълумки, манфий бўлмаган узлуксиз функциянинг аниқ интеграли тегишли эгри чизиқли трапециянинг юзидан иборатдир (IV бобга қаранг). Аниқ интегралнинг геометрик маъноси ана шунда бўлиб, унинг ясси фигураларнинг юзини ҳисоблашга татбиқ қилиниши ҳам шунга асослангандир.

Манфий бўлмаган, узлуксиз $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$ функция графиги, Ox ўқнинг $[a;\ b]$ кесмаси, $x=a$ ва $x=b\,(a<b)$ тўғри чизиқлар кесмалари билан чегараланган $aABb$ эгри чизиқли трапецияни қарайлик (22-расм). Бу ҳолда, маълумки, эгри чизиқли трапециянинг юзи ушбу формула ёрдамида ҳисобланади:

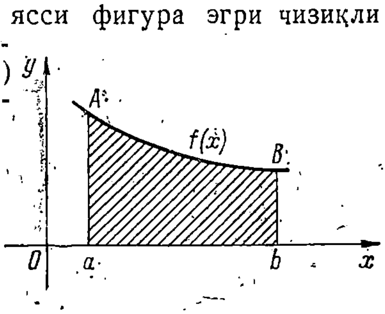
$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

1-мисол. $y=f(x)=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ чизиқлар ва Ox ўқнинг $[-1;\ 2]$ кесмаси билан чегараланган ясси фигуранинг юзини ҳисоблаймиз (23-расм).

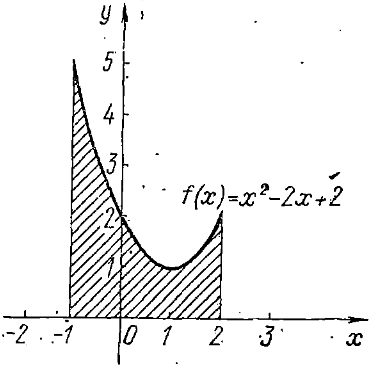
Ечилиши. Берилган ясси фигура эгри чизиқли трапециядан иборат, шунинг учун унинг юзини (1) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=$$

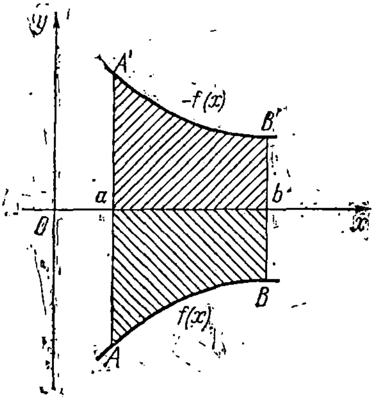
$$=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=6.$$



22-расм.



23-расм.



24-расм.

Энди $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$ функция мусбат бўлмаган узлуксиз функция бўлсин. Бу ҳолда f функциянинг графиги Ox ўқдан пастда жойлашган бўлади (24-расм) ва

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$$

бўлади.

$y=-f(x)$, $x\in[a;\ b]$ ёрдамчи функцияни қараб чиқиб, $y=-f(x)$ функция графиги, Ox ўқнинг $[a;\ b]$ кесмаси, $x=a$ ва $x=b(a<b)$ тўғри чизиқлар кесмалари билан чегараланган $aA'B'b$ эгри чизиқли трапециянинг юзи (1) формула ёрдамида ҳисобланишини кўрамиз, яъни

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Энди, f функция графиги, Ox ўқнинг $[a;\ b]$ кесмаси, $x=a$ ва $x=b$, $(a<b)$ тўғри чизиқлар кесмалари билан чегараланган эгри чизиқли $aABb$ трапецияни қараймиз (24-расм). $y=-f(x)$ функциянинг графиги $y=f(x)$ функциянинг графигига Ox ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун $aABb$ ва $aA'B'b$ эгри чизиқли трапециялар конгруэнтдир.

Маълумки, конгруэнт фигураларнинг юзлари тенг бўлади, шунинг учун $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзи ҳам (2) формула бўйича ҳисобланади.

2-мисол. $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=-1$ чизиқлар ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш талаб қилинади (25-расм).

Ечилиши. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in[-1;\ 0]$ функциянинг графиги Ox ўқнинг пастида жойлашган, шунинг учун берилган ясси фигуранинг юзини ҳисоблаш учун (2) формуладан фойдаланамиз:

$$S=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx=-\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}.$$

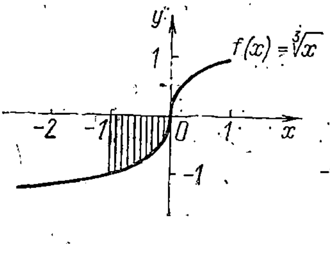
Энди $f(x)$, $x\in[a;b]$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, унинг графиги Ox ўқнинг $[a;\ b]$ кесмасини чекли сондаги нуқталарда кессин. (1) ва (2) формулалардан келиб чиқадики, $f(x)$ функция графиги, Ox ўқнинг $[a;\ b]$ кесмаси, $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар кесмалари билан чегараланган ясси фигуранинг юзи

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx \qquad (3)$$

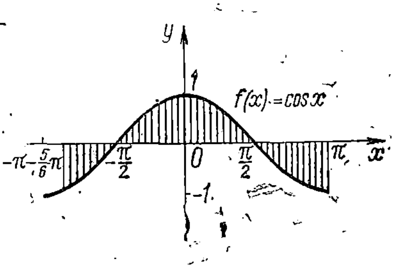
формула бўйича ҳисобланади.

3-мисол. Ox ўқнинг $\left[\frac{-5\pi}{6};\ \pi\right]$ кесмаси, $f(x)=\cos x$ функция графиги, $x=-\frac{5\pi}{6}$ ва $x=\pi$ тўғри чизиқлар кесмалари билан чегараланган ясси фигура юзини ҳисобланг (26-расм).

Ечилиши. $\cos x=0$ тенгламани ечиб, $y=\cos x$ функциянинг $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$ даги графиги Ox ўқни $x_1=-\frac{\pi}{2}$,



25-расм.



26-расм.

$x_2=\frac{\pi}{2}$ нуқталарда кесиб ўтишини кўрамиз. Демак, (3) формулага кўра

$$S=\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\pi}|\cos x|dx=$$

$$=-\int_{-\frac{5}{6}\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=$$

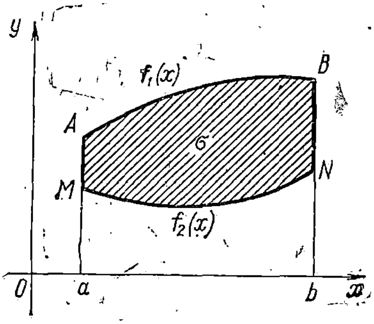
$$=-\sin x\Big|_{-\frac{5}{6}\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{7}{2}.$$

Энди $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ тўғри чизиқлар кесмалари ҳамда манфий бўлмаган узлуксиз $f_1(x)$, $x\in[a;b]$ ва $f_2(x)$ $x\in[a;b]$ функцияларнинг графиклари билан чегараланган σ фигурани қараймиз (27-расм). σ фигурани $aABb$ ва $aMNb$ эгри чизиқли трапецияларнинг айирмаси деб қараш мумкин, шунинг учун (1) формулани назарда тутиб, σ фигуранинг юзини ҳисоблаш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

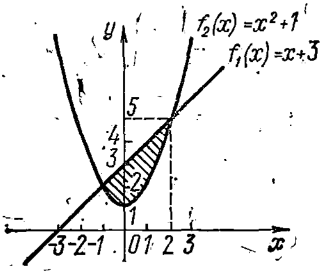
$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx. \quad (4)$$

4-мисол. $y=f_1(x)=x+3$ ва $y=f_2(x)=x^2+1$ чизиқлар билан чегараланган σ фигуранинг юзини ҳисобланг (28-расм).

Ечилиши. $x+3=x^2+1$ тенгламани ечиб, f_1 ва



27-расм.



28-расм.

f_2 функциялар графикларининг кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз: $x_1=-1$ ва $x_2=2$. (4) формуладан фойдаланиб, σ фигура юзини ҳисоблаймиз:

$$S=\int_{-1}^{2}[x+3-(x^2+1)]\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

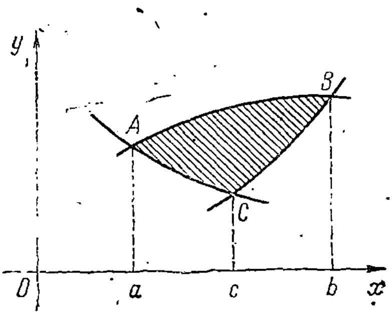
Агар мураккаб кўринишдаги ясси фигуранинг юзини топиш талаб этилаётган бўлса, у ҳолда изланаётган юзни бир нечта эгри чизиқли трапеция юзларининг алгебраик йиғиндиси шаклида ифодалаб олишга ҳаракат қилинади. Масалан, 29-расмда тасвирланган σ фигуранинг юзи

$$S=S_{aABb}-S_{aACc}-S_{cCBb}$$

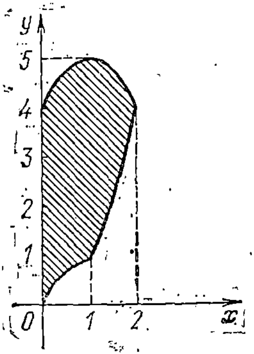
формула бўйича ҳисобланади. Айтайлик, AB, BC ва AC эгри чизиқлар мос равишда $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$; $y=\varphi(x)$, $x\in[a;\ c]$ ва $y=\psi(x)$, $x\in[c;\ b]$ функцияларнинг графиклари бўлсин. У ҳолда,

$$S=\int_{a}^{b}f(x)\,dx-\int_{a}^{c}\varphi(x)\,dx-\int_{c}^{b}\psi(x)\,dx. \qquad (5)$$

5-мисол. $y=\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 1]$, $y=x^2$, $x\in[1;\ 2]$ ва $y=-x^2+2x+4$, $x\in[0;\ 2]$ чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини ҳисобланг (30-расм).



29-расм.



30-расм.

Ечилиши. Изланаётган юзни топиш учун (5) формуладан фойдаланамиз:

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 4)\,dx - \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_1^2 x^2\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + 4x\Big|_0^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{19}{3}.$$

Машқ

1. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган ясси фигураларнинг юзини ҳисобланг:

а) $y = 6x - x^2$, $y = 0$;
б) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
в) $y = 8 + 2x - x^2$, $y = 2x + 4$;
г) $y = x^3 - 4x$, $y = 0$;
д) $y = 2x + 16$, $y = 8 - 7x - x^2$, $x = 0$;
е) $y^2 - 4x = 0$, $x - y = 0$;
ж) $y^2 = ax$, $x^2 = by$;
з) $y^2 = 2x$, $2y = x^2$;
и) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$;
к) $y = \sin x$, $y = \frac{2}{\pi}x$;
л) $y = x^3$, $x + y = 2$, $y = 0$;
м) $y = \operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;
н) $y = \arcsin x$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

24-§. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги

Тенгламаси $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ бўлган AB эгри чизиқ (31-расм) берилган бўлиб, бу ерда $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. $[a; b]$ кесмани

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

нуқталар билан тенг узунликдаги n та тенг бўлакка бўламиз.

x_i нуқталар орқали Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг AB эгри чизиқ билан кесишган нуқталарини M_i орқали белгилаймиз. Бу нуқталарни туташтириб, AB га ички чизилган $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри P_n бўлсин. AB

ёйнинг узунлиги деб периметрлар кетма-кетлиги (P_n) нинг лимитига тенг бўлган l сонга айтилади:

$$l = \lim_{n \to \infty} P_n.$$

Узунликка эга бўлган эгри чизиқ *тўғриланувчи эгри чизиқ* дейилади.

Изоҳ. AB эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқ сифатида ҳар қандай синиқ чизиқни олиш мумкин. Бундай ҳолда берилган эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқлар (P_n) периметрлари кетма-кетлигининг лимити бу синиқ чизиқлар бўғинларининг энг каттасининг узунлиги $\lambda \to 0$ бўлганда эгри чизиқ ёйининг узунлигига тенг бўлади, яъни

$$l = \lim_{\lambda \to 0} P_n.$$

Энди AB ёйнинг узунлигини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. AB ёйга ички чизилган $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ синиқ чизиқнинг i-бўғинини қараймиз; унинг учлари $M_{i-1}(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$ ва $M_i(x_i; f(x_i))$ нуқталардан иборатдир. i-бўғин $M_{i-1}M_i$ нинг узунлигини икки нуқта орасидаги масофа формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$l_i = |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (1)$$

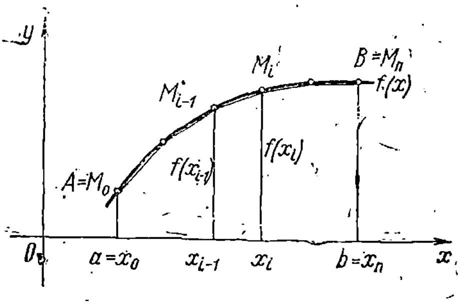
f функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз дифференциалланувчи бўлгани учун Лагранж формуласига кўра

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad (2)$$

бу ерда ξ_i нуқта $]x_{i-1}, x_i[$ интервалга тегишли.

(2) ифодани (1) формулага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i$ бу ерда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



51-расм.

Демак, $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ синиқ чизиқнинг периметри

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i$$

га тенг.

Биз $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ узлуксиз функциянинг $[a; b]$ кесмадаги интеграл йиғиндисини ҳосил қилдик. Бу йиғиндининг $n \to \infty$ даги лимити мавжуд бўлгани учун таърифга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$l = \lim_{n \to \infty} P_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Шундай қилиб,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{3}$$

Юқори чегараси ўзгарувчи бўлган

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

интегрални қарайлик. Интеграл остидаги функция узлуксиз, шунинг учун интегрални унинг юқори чегараси бўйича дифференциаллаш теоремасига кўра (18-§ га қаранг) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Бу ердан ёй дифференциали учун формулани осонгина ҳосил қилиш мумкин:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ёки

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{4}$$

Эгри чизиқ параметрик кўринишда

$$x = \varphi(t);\; y = \psi(t),\; \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

тенгламалар билан берилган бўлсин, бу ерда φ ва ψ лар $[\alpha; \beta]$ кесмада узлуксиз ҳосилаларга эга.

У ҳолда (4) формула

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

кўринишга эга бўлади, эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш формуласи эса қуйидагича ёзилади:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (5)$$

1-мисол. $y = x^{3/2}$ ярим кубик параболанинг охирлари $A(0;\ 0)$ ва $B(1;\ 1)$ нуқталарда бўлган ёйининг узунлигини ҳисобланг.

Ечилиши. Ёй узунлигини ҳисоблаш учун (3) формуладан фойдаланамиз. $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$ бўлгани учун

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

2-мисол. Ушбу

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

айлананинг узунлигини ҳисобланг.

Ечилиши. $x' = -R\sin t$, $y' = R\cos t$ бўлгани учун айлананинг тўртдан бир қисмининг узунлигини (5) формуладан фойдаланиб, ҳисоблаймиз:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}R.$$

Демак, айлана узунлиги $C = 4l = 2\pi R$.

3-мисол. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ циклоида битта аркининг узунлигини ҳисобланг.

Ечилиши. $x' = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$ бўлгани учун (5) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

Машқ

1. Қуйидаги эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисобланг:

а) $y=\sqrt{x}$, $0 < x < 1$;

б) $y=\ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$;

в) $y=e^{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

г) $y=\ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2}$;

д) $x=a(\cos t+t\sin t)$ $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

е) $x=e^{t}\cos t$, $y=e^{t}\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \ln\pi$;

ж) $x=\frac{1}{3}t^{3}-t$, $y=t^{2}+2$, $0 \leqslant t \leqslant 3$;

з) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, абсциссалари 0 ва a бўлган нуқталар орасидаги қисми;

и) $y=\ln\sin x$, абсциссалари $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{3}$ бўлган нуқталар орасидаги қисми

к) $x=a\cos^{3}t$, $y=a\sin^{3}t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

25-§. Физика ва техника масалаларини ечишда аниқ интегрални татбиқ қилиш

1. Йўлни ҳисоблаш ҳақидаги масала. Моддий нуқта бирор $v=v(t)$ оний тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин. $t=T_1$ дан $t=T_2$ гача вақт оралиғида жисм босиб ўтган йўлни топиш талаб қилинади (32-расм).

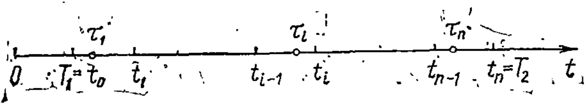
Энг оддий ҳолда, агар оний тезлик ўзгармас, яъни $v(t)=v_0=\mathrm{const}$ бўлса, у ҳолда жисм босиб ўтган йўл (физика курсидан маълум бўлган таърифга кўра) тезликни ҳаракат вақтига кўпайтмасига тенгдир:

$$s=v_0(T_2-T_1).$$

Умумий ҳолда, яъни оний тезлик ўзгарувчан бўлганда қуйидагича йўл тутилади.

Вақт оралиғи $[T_1;\ T_2]$ ни $t_0=T_1,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n=T_2(t_0<t_1<\ldots<t_n)$ нуқталар билан бир хил

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}=\frac{T_2-T_1}{n}$$



32-расм.

зунликдаги n та $[t_{i-1};\ t_i]$, $i=1, 2, \dots, n$ кесмага бўлинади.

Сўнгра ҳар бир $[t_{i-1};\ t_i]$ кесмада ихтиёрий τ_i нуқта танлаб олиниб,

$$\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \tag{1}$$

йиғинди тузилади. Бу йиғиндининг ҳар бир $v(\tau_i)\Delta t_i$ қўшилувчиси жисмнинг $t=t_{i-1}$ дан $t=t_i$ гача вақт ичида босиб ўтган йўлининг тақрибий қийматини беради. Демак, жисмнинг $t=T_1$ дан $t=T_2$ гача вақт ичида босиб ўтган йўли тақрибан (1) йиғинди билан ифодаланади.

Бўлиниш кесмалари $[t_{i-1};\ t_i]$, $i=1, 2, 3, \dots, n$ қанчалик кичик бўлса, тақрибий қиймат шунчалик аниқроқ бўлишини кўриш осон. Шунинг учун жисмнинг $[T_1;\ T_2]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли s (1) йиғиндининг $n \to \infty$ даги лимити каби аниқланади:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

Бу лимит таърифга кўра $v(t)$ функциядан $[T_1;\ T_2]$ кесмада олинган аниқ интегрални ифодалагани учун жисмнинг $[T_1;\ T_2]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt. \tag{2}$$

1-мисол. Жисм $v(t)=(3t^2+4t+1)$ м/с тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг дастлабки 3 с ичида босиб ўтган йўлини топинг.

Ечилиши. (2) формулага кўра

$$s=\int_0^3 (3t^2+4t+1)dt = (t^3+2t^2+t)\Big|_0^3 = 48\ (\text{м}).$$

2-мисол. Нуқта $v(t)=at+v_0$ тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Нуқта $t=T_1$ дан $t=T_2$ гача вақт оралиғида қанча масофани босиб ўтади?

Ечилиши. (2) формулага кўра қуйидагини топамиз:

$$s = \int_{T_1}^{T_2}(at+v_0)dt = \left(\frac{at^2}{2} + v_0t\right)\Big|_{T_1}^{T_2} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) + v_0\left(T_2 - T_1\right).$$

3-мисол. Жисм $v(t) = 16t - 4t^2$ тезлик била тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисм ҳаракат бошлангандан то тўхтагунча босиб ўтган йўлни топинг.

Ечилиши. Жисмнинг ҳаракаг бошланаётгандаги ва тўхтагандаги тезлиги нолга тенг. Жисмнинг тўхташ вақтини топайлик. Бунинг учун унинг тезлигини нолга тенглаб, ҳосил бўлган тенгламани ечамиз:

$$16t - 4t^2 = 0, \ t_1 = 0, \ t_2 = 4.$$

Энди (2) формулага кўра

$$s = \int_0^4 (16t - 4t^2)dt = \left(8t^2 - \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^4 = \frac{178}{3}.$$

Машқлар

1. Жисм $v(t) = (2t^2 + 1)$ м/с тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг дастлабки 5 с ичида босиб ўтган йўлини топинг.

2. Жисм $v(t) = (2t^3 + 1)$ м/с тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг $t = 1$ с дан $t = 3$ с **гача** вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топинг.

3. Тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги $v(t) = (12t - 3t^2)$ м/с формула билан берилган. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан то тўхтагунча босиб ўтган йўлини топинг.

4. Иккита жисм бир нуқтадан бир пайтда бир хил йўналишда мос равишда $v_1(t) = (6t^2 + 4t)$ м/с ва $v_2(t) = 4t$ м/с тезлик билан ҳаракат қила бошлади. Неча секунддан сўнг уларнинг орасидаги масофа 250 м га тенг бўлади?

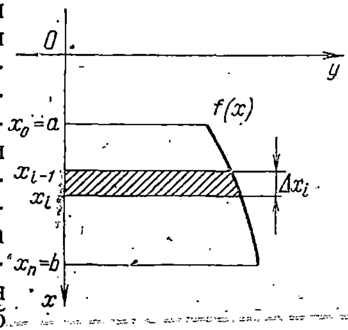
5. Жисм $v(t) = (4t + a)$ м/с тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисм ҳаракат бошлангандан 2 с ўтгач 48 м масофани босиб ўтганлиги маълум бўлса, a ни топинг.

6. Жисм тўғри чизиқ бўйича $v(t) = (6t + 4)$ м/с тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг учинчи секундда босиб ўтган йўлини топинг.

7. Агар жисм $v(t) = (9{,}8t - 0{,}003t^2)$ м/с тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилган бўлса, унинг $t = 0$ с дан $t = 5$ с гача бўлган вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топинг.

8. Тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги $v(t) = \left(Rt + a\sqrt{t}\right)$ м/с қонун бўйича ўзгаради. Бу нуқтанинг $t = 0$ с дан $t = 4$ с гача вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топинг.

2. Суюқликнинг босим кучи ҳақидаги масала. Эгри чизиқли трапеция кўринишидаги пластинка зичлиги ρ бўлган суюқликка шундай ботирилганки, унинг ён томонлари суюқлик сиртига параллел бўлиб, суюқлик сатҳидан мос равишда a ва b масофа пастда жойлашган (33-расм). Суюқликнинг пластинкага бўлган босим кучини аниқлаш талаб қилинади.



33-расм.

Агар пластинка суюқлик сатҳида h-чуқурликда горизонтал ҳолатда жойлашган бўлса, у ҳолда горизонтал пластинкага суюқликнинг ньютонларда ҳисобланган P босим кучи асоси шу пластинкадан, баландлиги эса h чуқурликдан иборат бўлган суюқлик устуни оғирлигига тенг бўлади, яъни

$$P = g\rho hS, \tag{1}$$

бу ерда S—пластинканинг юзи.

Агар пластинка суюқликка вертикал ботирилган бўлса, суюқликнинг пластинкага бўлган босим кучини (1) формула бўйича ҳисоблаб бўлмайди, чунки бу ҳолда суюқликнинг пластинканинг бирлик юзига бўлган босими чўкиш чуқурлигига қараб ўзгара боради, яъни пластинка юзидан суюқлик сиртигача бўлган масофага боғлиқ бўлади.

Масалани ечишда суюқликдаги босим Паскаль қонунига мувофиқ барча йўналишларда бир хил, шу жумладан вертикал юзга ҳам бир хил бўлишини ҳисобга оламиз.

Масалани ечиш учун пластинкани суюқлик сиртига параллел (яъни Oy ўққа параллел) ва $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n b =$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқлар билан n та бўлакка (кичик горизонтал полоскаларга) бўламиз, бу ерда $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ x_i чуқурликда жойлашган полоскалардан бирини кўрайлик (33-расмда у штрихлаб кўрсатилган). Етарлича тор полоска учун унинг барча қисмларига бўлган босимни тақрибан бир хил деб ҳисоблаш, полосканинг ўзини эса баландлиги $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, асоси эса полосканинг пастки асосига тенг бўлган тўғри тўртбурчак деб қабул қилиш мумкин. Тўғри тўртбурчак асосининг узунлиги x абсциссанинг функцияси эканлигини кўриш осон. Бу функцияни $f(x)$, $x \in [a; b]$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб, i-полоскага бўлган P_i босим кучини (1) формула бўйича ҳисоблаш мумкин, яъни

$$P_i \approx g\rho f(x_i)x_i\Delta x..$$

Барча полоскаларга босим кучларини жамлаб, бутун пластинкага бўлган босим кучининг тақрибий қийматини топамиз:

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i)x_i\Delta x_i,$$

Тақрибий қийматнинг аниқлиги $[a, b]$ кесма бўлинган $[x_{i-1}; x_i]$ кесмачалар қанчалик майда бўлса, шунча ортади.

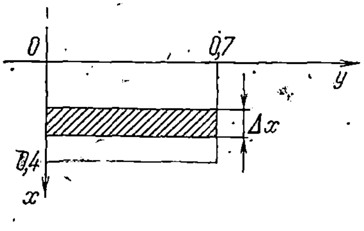
Шундай қилиб, суюқликнинг пластинкага бўлган босим кучининг аниқ қиймати қуйидаги формула бўйича топилади:

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i)x_i\Delta x_i.$$

Таърифга кўра бу лимит $xf(x)$ функциядан $[a; b]$ кесмада олинган интегралга тенг, шунинг учун суюқликнинг пластинкага бўлган босим кучи қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$P = g\int_a^b \rho x f(x)dx. \qquad (2)$$

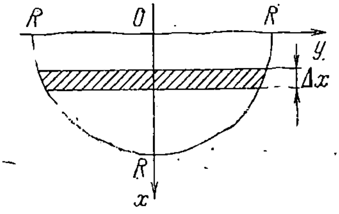
4-мисол. Аквариум тўғри бурчакли параллелепипед шаклига эга. Аквариумни тўлдириб турган сувнинг (сувнинг зичлиги 1000 кг/м^3) аквариумнинг ўлчамлари 0,4 м × 0,7 м бўлган вертикал деворларидан бирига бўлган босим кучини аниқлаймиз (34-расм).



34-расм.

Ечилиши. Координаталар системасини шундай танлаб оламизки, Oy

ва Ox ўқлар мос равишда аквариум вертикал деворининг юқори асоси ва ён томонидан ўтсин (34-расм). Сувнинг деворга бўлган босим кучини аниқлаш учун (2) формуладан фойдаланамиз. Девор тўғри тўртбурчак шаклида, шунинг учун $f(x)=0,7$, $x\in[0;\ 0,4[$. Интеграллаш чегаралари $a=0$ ва $b=0,4$ бўлгани учун (2) формулага кўра



35-расм.

$$P=g\int\limits_0^{0,4}1000\cdot0,7\cdot x dx=700g\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4}=56\,g.$$

$g\approx9,8$ м/с^2 эканини ҳисобга олсак. $P\approx548,8$ (Н) га эга бўламиз.

5-мисол. Диаметри мой сиртида жойлашган, радиуси $R=5$ м бўлган ярим доира шаклидаги вертикал деворга мойнинг босим кучини аниқланг (мойнинг зичлиги 900 кг/м^3).

Ечилиши. Координаталар системасини 35-расмдагидек танлаб оламиз. Девор радиуси $R=5$ бўлган ярим доирадан иборат бўлгани учун $f(x)=\sqrt{5^2-x^2}$, $x\in[0;\ 5]$. Босим кучини топиш учун (2) формуладан фойдаланамиз. Бу ҳол учун $\rho=900$ кг/м^3, $a=0$, $b=5$, шунинг учун

$$P=2g\int\limits_0^5 900\;x\sqrt{5^2-x^2}\,dx=900g\cdot\frac{2}{3}(5^2-x^2)^{3/2}\Big|_5^0=$$
$$=600\,g\cdot5^3=75000\,g.$$

$g=9,8$ м/с^2 эканлигини назарга олсак, $P\approx735$(кН).

Машқлар

9. Сув билан тўлдирилган шлюз деворининг узунлиги 20 м, баландлиги эса 5 м. Сувнинг деворга бўлган босим кучини аниқланг.

10. Юқори асоси a га, пастки асоси b га $(a>b)$, баландлиги эса H га тенг бўлган трапеция шаклидаги тўғонга сувнинг босим кучини ҳисобланг. Сув сатҳи тўғоннинг юқори асосига етади деб фараз қилинади. Босимни $a=400$ м, $b=200$ м, $H=20$ м бўлган ҳол учун ҳисобланг.

11. Диаметри сув сиртида жойлашган бўлиб, радиуси $R=6$ м бўлган ярим доира шаклидаги вертикал деворга сувнинг босим кучини аниқланг.

12. Асоси 10 м ва баландлиги 6 м бўлган вертикал тўғри тўртбурчак шлюзга сувнинг босим кучини аниқланг. Шунингдек, шлюзнинг пастки ярмига бўлган босимни ҳам топинг.

13. Баландлиги $h = 3{,}5$ м ва радиуси $r = 1{,}5$ м бўлган цилиндрик бакдаги бензиннинг бак деворларига босим кучини топинг (бензиннинг зичлиги $\rho = 900$ кг/м^3).

14. Асоси a, баландлиги H бўлган учбурчакли пластинка асоси сув сатҳи билан баравар турадиган қилиб сувга вертикал ботирилган. Сувнинг пластинкага бўлган босим кучини ҳисобланг.

15. Ярмигача сув билан тўлдирилган горизонтал жойлашган қувурни беркитиб турувчи заслонкага сувнинг босим кучини аниқланг. Қувурнинг кўндаланг кесими юзи диаметри 6 м бўлган доирадан иборат эканлиги маълум.

16. Сув билан тўлдирилган вертикал жойлашган доиравий цистернанинг ён сиртига сувнинг босим кучини ҳисобланг. Цистернанинг диаметри 3 м га, баландлиги эса 4 м га тенг.

17. Асосининг томонлари 0,9 м ва 0,6 м баландлиги эса 0,4 м бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги аквариум сув билан лиқ тўлдирилган. Сувнинг аквариум тубига ва деворларига бўлган жами босим кучини ҳисобланг.

3. Ўзгарувчан куч бажарган иш. Моддий нуқта F куч таъсири остида тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилаётган бўлсин. Агар таъсир этаётган куч ўзгармас, босиб ўтилган йўл s га тенг бўлса, физика курсидан маълумки, бу F куч бажарган A иш қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

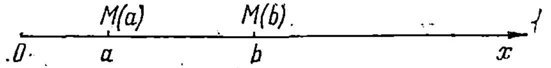
$$A = F \cdot s. \tag{1}$$

Энди ўзгарувчан куч бажарган ишни топиш масаласини қарашга ўтамиз. Моддий нуқта Ox ўқ бўйлаб бу ўққа проекцияси x нинг функциясидан иборат бўлган куч таъсири остида ҳаракат қилаётган бўлсин. Бу функцияни $f(x)$ орқали белгилаймиз ва у узлуксиз деб фараз қиламиз. F куч таъсири остида моддий нуқта $M(a)$ нуқтадан $M(b)$ нуқтага кўчган бўлсин (36-расм). Бундай ҳолда иш:

$$A = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

формула бўйича ҳисобланишини исбот қиламиз.

$[a; b]$ кесмани $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ нуқталар билан бир



36-расм.

хил $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ узунликдаги n та $[x_{i-1}; x_i]$ бўлакка бўламиз.

Ҳар бир $[x_{i-1}; x_i]$ кесмада ишни (1) формула бўйича тақрибий ҳисоблаш мумкин, яъни уни $f(\xi_i)\Delta x_i$ га тенг деб олиш мумкин, бу ерда ξ_i тегишли $[x_{i-1}; x_i]$ кесманинг бирор нуқтаси.

У ҳолда $[a; b]$ кесмада куч бажарган иш тақрибан

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

формула билан ифодаланади. $[a; b]$ кесма бўлинган $[x_{i-1}; x_i]$ кесмалар қанчалик кичик бўлса, яқинлашиш аниқлиги шунча яхши бўлади. Шунинг учун юқоридаги тенгликда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (8)$$

формулани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, ўзгарувчи куч бажарган иш (3) формула бўйича ҳисобланади.

6-мисол. 0,05 м чўзилган пружинанинг эластиклик кучи 3 Н га тенг. Пружинани 0,05 м га чўзиш учун қандай иш бажариш керак?

Ечилиши. Гук қонунига мувофиқ пружинани чўзувчи ёки сиқувчи куч бу чўзилишга ёки сиқилишга пропорционал, яъни $F = kx$, бу ерда x—чўзилиш ёки сиқилиш катталиги, k—пропорционаллик коэффициенти. Масала шартидан: $3 = k \cdot 0{,}05$, яъни $k = 60$. Демак, $F = 60x$.

(3) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0{,}05} = 0{,}075\,(\text{Ж}).$$

7-мисол. Пружинанинг тинч ҳолатдаги узунлиги 20 см. 10 кг куч уни 2 см чўзади. Пружинани 25 см дан 35 см га чўзиш учун сарф қилинган ишни аниқланг.

Ечилиши. Масалада берилганларни СИ системаси бирликларида ифодалаймиз: 2 см $=$ 0,02 м; 20 см $=$ 0,2 м; $F =$ 10 кг $=$ 98,1 (Н); 25 см $=$ 0,25 м ва 35 см $=$ 0,35 м. Масала шартидан ва Гук қонунидан фойдаланиб топамиз:

$98{,}1 = k \cdot 0{,}02$ ёки $k = 4905$. Демак, $F = 4905x$. Мазкур ҳол учун $a = 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}05$ ва $b = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$ бўлгани сабабли (3) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$A = 4905\int_{0,05}^{0,15} x\,dx = 4905\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0,05}^{0,15} \approx 49{,}05\ (Ж).$$

Машқлар

18. Агар пружинани 0,01 м сиқиш учун 78 Н куч керак бўлса, уни 0,1 м сиқиш учун қанча иш бажариш кераклигини ҳисобланг.

19. Рессора 2 Ж нагрузка остида 1 см эгилади. Рессорани 3 см деформациялаш учун қанча иш бажариш лозим?

20. Агар пружинага таъсир этувчи куч унинг сиқилишига пропорционал эканлиги ва уни 1 см сиқиш учун 4 кг куч зарурлиги маълум бўлса, пружинани 25 см сиқиш учун сарф қилинган ишни ҳисобланг.

21. Винтсимон пружинани 0,2 см сиқиш учун 0,32 кг иш бажарилган бўлса, уни 6 см сиқиш учун сарф бўладиган ишни ҳисобланг.

22. Пружина 50 Н куч таъсирида 0,02 м чўзилади. Пружинани 0,45 м гача чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

23. Пружинани 1 см сиқиш учун 10 кгм иш сарф бўлади. Пружинани 5 см сиқиш учун қанча иш бажариш керак?

24. Пружинанинг сиқилиши унга қўйилган кучга пропорционал. Агар пружинани 1 см сиқиш учун 1 кг куч сарфланган бўлса, уни 7 см сиқиш учун қанча иш бажариш кераклигини ҳисобланг.

25. 2 Н куч пружинани 1 см сиқса, бу пружинани 4 см сиқиш учун қанча иш бажариш керак?

26. 6 Н куч пружинани 2 см чўзади. Бу пружинани 6 см чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

27. 80 Н куч таъсирида пружина 0,2 м чўзилади. Пружинанинг дастлабки узунлиги 0,15 м. Пружинани 0,2 м гача чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

4. Статик моментлар ва массалар маркази координаталари

Текисликда xOy тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. m масса мужассамланган (тўпланган) $A(x; y)$ *моддий нуқтанинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари* деб, бу нуқта массасининг мос равишда шу нуқта ординатасига ва абсциссасига кўпайтмасига айтилишини, яъни

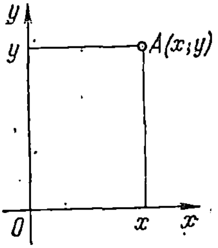
$$M_x = my \text{ ва } M_y = mx$$

эканлигини эслатиб ўтайлик (37-расм).

Агар массалари $m_1, m_2, \ldots, m_n$ бўлган n та $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2), \ldots, A_n(x_n; y_n)$ моддий нуқталар системаси берилган бўлса, у ҳолда *бу системанинг Ох ва Оу ўқларга нисбатан статик моментлари*

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{ва} \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

бўлади.



37-расм

Бундай моддий нуқталар системасининг *массалар маркази* деб шундай нуқтага айтиладики, агар бу нуқтага бутун системанинг массаси $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ ни тўпланганда бу нуқтанинг исталган ўққа нисбатан статик моменти берилган нуқталар системасининг шу ўққа нисбатан статик моментига тенг бўлади. Шунинг учун агар системанинг массалари марказини $C(x_C; y_C)$ орқали белгиласак, у ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_C, \tag{1}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m x_C. \tag{2}$$

Шундай қилиб, моддий нуқталар системаси массалар марказининг координаталари қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad (3) \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \quad (4)$$

Агар чизиқ ёки ясси фигура қаралаётган бўлса, статик моментлар ва массалар маркази координаталарини топиш учун аниқ интегралдан фойдаланилади.

Ясси эгри чизиқнинг статик моментлари ва массалар маркази координаталари. Айтайлик, узунлиги l бўлган AB эгри чизиқ узлуксиз ҳосилага эга бўлган $f(x)$, $x \in [a; b]$ функциянинг графиги бўлсин. AB эгри чизиқ бир жинсли, яъни масса тақсимотининг чизиқли зичлиги ρ ўзгармас бўлсин. Агар $\rho=1$ бўлса у, ҳолда берилган эгри чизиқда тақсимланган масса сон жиҳатдан эгри чизиқ узунлигига тенг. Эгри чизиқни Δl_i узунликдаги бўлакларга бўламиз. Массаси $\Delta m_i = \Delta l_i$ бўлган бу бўлакларни Ox ўқдан y_i масофада, Oy ўқдан x_i масофада ётувчи моддий нуқталар деб фараз қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta M_{x_i} = y_i \cdot \Delta m_i = y_i \Delta l_i \text{ ва } \Delta M_{y_i} = x_i \cdot \Delta m_i = x_i \Delta l_i.$$

$\Delta l_i \approx \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\,\Delta x_i$ бўлгани учун

$$\Delta M_{x_i} \approx f(x_i)\sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\,\Delta x_i,$$

$$\Delta M_{y_i} \approx x_i \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Бундай йиғиндиларнинг барчасини жамлаб ва лимитга ўтиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \tag{5}$$

$$M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{6}$$

Бундан ташқари,

$$m = l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{7}$$

(3) — (7) тенгликлардан фойдаланиб, ясси эгри чизиқ массалар марказининг координаталарини топиш учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$x_C = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}, \tag{8}$$

$$y_C = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 \quad (f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}. \tag{9}$$

Изоҳ. Агар ρ зичлиқ ўзгармас бўлиб, бироқ $\rho \neq 1$ бўлса, у ҳолда статик моментлар ва ясси эгри чизиқ массаларини ҳисоблаш формулалари (5) — (7) нинг ўнг томонларини ρ га кўпайтириш керак. Массалар маркази координаталарини ҳисоблаш формулалари (8) ва (9) эса ўзгаришсиз қолади.

(9) формуладан фойдаланиб, муҳим бир геометрик фактни келтириб чиқарамиз. (9) дан

$$y_C\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

бўлгани учун, бу тенгликни 2π га кўпайтириб,

$$S=2\pi y_C l$$

ни ҳосил қиламиз, чунки эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

формула бўйича, айланиш сиртининг юзи эса

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

формула бўйича ҳисобланади. Шундай қилиб, қуйидаги даъво ўринлидир. Эгри чизиқни у билан бир текисликда ётган ва уни кесмайдиган ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзи бу эгри чизиқ узунлигини бундай айлантиришда эгри чизиқ массаларининг маркази чизадиган айлана узунлигига кўпайтмасига тенг. Бу даъво Гульденнинг биринчи теоремаси дейилади.

8-мисол. $y=\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqslant x\leqslant R)$ ярим айлананинг координата ўқларига нисбатан статик моментларини ва массалар марказининг координаталарини топамиз.

Ечилиши. $y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ бўлгани учун $\sqrt{1+(y')^2}=$ $=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Шунинг учун (5) ва (6) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$M_x=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\int_{-R}^{R}dx=2R^2,$$

$$M_y=\int_{-R}^{R}x\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=-R\sqrt{R^2-x^2}\Big|_{-R}^{R}=0.$$

Ярим айлананинг узунлиги πR га тенг, шунинг учун

(8) ва (9) формулалар бўйича массалар марказининг координаталари қуйидагича бўлади:

$$y_C=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi},\quad x_C=\frac{0}{\pi R}=0,$$

Шундай қилиб, $C\left(0;\frac{2R}{\pi}\right)$.

9-мисол. $x^2+y^2=R^2$ айлананинг биринчи координата чорагида ётган ёйининг массалари маркази координаталарини топамиз.

Ечилиши. Берилган фигура биринчи координата бурчагининг биссектрисасига нисбатан симметрик, шунинг учун бу фигуранинг массалар марказининг ординатаси ва абсциссаси тенг. Массалар марказининг ординатасини топиш учун Гульденнинг биринчи теоремасидан фойдаланамиз. Кўриш осонки, айлананинг бир чорагини ўқ атрофида айлантиришдан сферанинг ярми ҳосил бўлади, бинобарин, унинг юзи $2\pi R^2$ га тенг бўлади. Айлана чорагининг узунлиги $\frac{\pi R}{2}$ га тенг бўлгани учун теоремага кўра

$$2\pi R^2=2\pi y_C\cdot\frac{\pi R}{2}$$

ни ҳосил қиламиз, яъни $y_C=\frac{2R}{\pi}$.

Шундай қилиб,

$$C\left(\frac{2R}{\pi};\ \frac{2R}{\pi}\right).$$

Ясси фигуранинг статик моментлари ва массалар марказининг координаталари. Манфий бўлмаган $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ функция графиги, Ox ўқ, $x=a$, $x=b$, тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция берилган бўлсин ва бу трапеция бўйлаб $\rho=1$ зичлик билан масса тақсимланган бўлсин. У ҳолда эгри чизиқли трапециянинг массаси сон жиҳатдан унинг юзига тенг бўлади. Эгри чизиқли трапециянинг статик моментлари M_x ва M_y ни топиш учун уни ордината ўқларига параллел ва

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i\qquad(i=0,1,2,\ldots,n)$$

нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқлар билан n та бўлакка бўламиз (38-расмга қаранг).

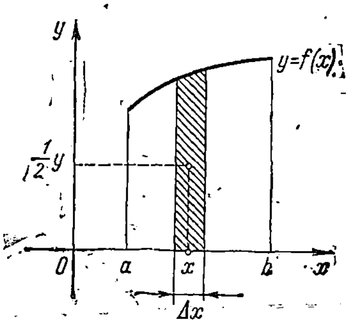
Бундай битта бўлакнинг массаси: $\Delta S_i=y_i\Delta x_i$. Бу бўлакнинг массасини унинг массалар маркази $\left(x_i; \frac{y_i}{2}\right)$ га тўплаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta M_{x_i} = y_i \Delta x_i \cdot \frac{y_i}{2} = \frac{y_i^2}{2} \Delta x_i,$$

$$\Delta M_{y_i} = y_i \Delta x_i \cdot x_i = x_i y_i \Delta x_i.$$

Барча i лар бўйича жамлаб ва лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \qquad (10)$$



38-расм.

$$M_y = \int_a^b xy\,dx. \qquad (11)$$

(3) ва (4) формулалардан фойдаланиб, массалар марказини топиш учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \qquad (12)$$

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx} \qquad (13)$$

Охирги тенгликни $2\pi m$ га кўпайтириб,

$$2\pi y_C \cdot m = \pi \int_a^b y^2\,dx \qquad (14)$$

ни топамиз. Кўриш осонки, (14) тенгликнинг ўнг томонида айланиш жисмининг ҳажми турибди. Шундай қилиб,

$$V = S \cdot 2\pi y_C,$$

яъни эгри чизиқли трапецияни абсциссалар ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмининг ҳажми бу трапеция юзини унинг массалари маркази бу айлантиришда чизган айлана узунлигига кўпайтмасига тенг. Бу даъво Гульденнинг иккинчи теоремаси дейилади.

10-мисол. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$ циклоида битта арки ва унинг асоси билан чегараланган пластинканинг Ox ўққа нисбатан статик моментини топамиз.

Ечилиши. (10) формуладан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\,dt=\frac{5a^3}{2}\pi.$$

11-мисол. $x^2+y^2\leqslant r^2$, $y\geqslant 0$ ярим доиранинг массалар маркази координаталарини топамиз.

Ечилиши. Ординатани топиш учун Гульденнинг иккинчи теоремасидан фойдаланамиз: $y_C=\frac{V}{2\pi S}$. Шар учун $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ бўлгани учун ва ярим доиранинг юзи $S=\frac{\pi r^2}{2}$ бўлгани учун

$$y_C=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\frac{\pi r^2}{2}}=\frac{4r}{3\pi}.$$

Берилган фигуранинг ординаталар ўқига нисбатан симметриклигидан $x_C=0$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$C\left(0;\ \frac{4r}{3\pi}\right).$$

Машқлар

28. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0\leqslant x\leqslant a$ занжир чизиқ ёйининг Ox ўққа нисбатан статик моментини топинг.

29. $y^2=2x(y>0)$, $0\leqslant x\leqslant 2$ парабола ёйининг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментларини топинг.

30. $y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ косинусоида ёйининг Ox ўққа нисбатан статик моментини топинг.

31. $y=2\sqrt{x}$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг массалар марказини топинг.

32. $y^2 = 20x$ ва $x^2 = 20y$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг массалар марказини топинг.

33. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ циклоида тармоғининг массалар марказини топинг.

34. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг биринчи квадрантда ётган ёйи ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг массалар марказини топинг.

35. $y = 4 - x^2$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган параболик сегмент массалар марказининг координаталарини топинг.

36. Гульден теоремасидан фойдаланиб, радиуси a бўлган ярим айлананинг массалар марказини топинг.

37. Гульден теоремаси бўйича баландлиги H ва асосининг радиуси r бўлган тўғри конуснинг ҳажмини ва ён сирт юзини ҳисобланг.

38. Гульден теоремасидан фойдаланиб, томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакни унинг массалар марказидан $d(d > a)$ масофада ўтган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини ва сирти юзини ҳисобланг.

VI БОБ

КОМБИНАТОРИКА ВА БИНОМ ДАРАЖАСИ УЧУН НЬЮТОН ФОРМУЛАСИ

26-§. Ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, группалашлар

1. Комбинаторикага оид энг содда масалалар. *Комбинаторика масалалари* деб, у ёки бу талабни неча усул билан амалга ошириш мумкинлигини санаш, бирон-бир шартни бажариш, у ёки бу вариантни танлаш керак бўладиган масалаларга айтилади.

Комбинаторика учун типик бўлган бир нечта масалани қараб чиқамиз.

1-мисол. Группада 20 ўқувчи бор. Агар ҳар бир ўқувчи комсорг ва профорг лавозимларининг фақат бирига сайланиши мумкин бўлса, комсорг ва профорг неча усул билан сайланиши мумкин (группадаги барча ўқувчилар комсомол аъзоси деб фараз қилинади)?

Ечилиши. Дастлаб комсорг сайланаётган бўлсин. Группанинг ҳар бир аъзоси комсорг қилиб сайланиши мумкин, бинобарин, равшанки, комсорг сайлашнинг 20 хил усули мавжуд. У ҳолда қолган 19 кишидан исталган бири профорг қилиб сайланиши мумкин. Комсоргни сайлашнинг 20 усулидан исталган бири профоргни сайлашнинг 19 усулидан исталган бири билан биргаликда бўлиши мумкин. Шунинг учун комсорг ва профоргни сайлашнинг ҳаммаси бўлиб $20 \cdot 19 = 380$ усули мавжуд.

2-мисол. Мажлисда 4 киши сўзга чиқадиган бўлди. Уларни сўзга чиқувчилар рўйхатида неча усул билан жойлаштириш мумкин?

Ечилиши. Биринчи нотиқни тўрт усул билан, иккинчи нотиқни, равшанки, уч усул билан жойлаштириш мумкин. Навбатдаги учинчи ўринга энди икки киши даъвогарлик қилади, бинобарин, рўйхатдаги учинчи ўринни тўлдиришнинг икки усули бор. Тўртинчи нотиқ учун танлашга имкон қолмайди: у охирда сўзга чиқади. Биринчи нотиқни танлашнинг ҳар бир усулини иккинчи нотиқни танлашнинг ҳар бир усули билан ва учинчи нотиқни танлашнинг мумкин бўлган иккита усули билан биргаликда қўшиб кўрилиши мумкин, шу сабабли сўзга чиқувчилар рўйхатини тузиш усуллари сони

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

га тенг.

3-мисол. Техникум ўқувчиларининг бир группасидан икки ўқитувчидан иборат комиссия математикадан имтиҳон олиши керак. Агар техникумда беш нафар математика ўқитувчиси бўлса, бундай комиссияни неча усул билан тузиш мумкин?

Ечилиши. Ўқитувчиларни A, B, C, D, E ҳарфлари билан белгилаб, мумкин бўлган барча имтиҳон комиссияларини ёзиб чиқиш мумкин, чунончи

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,$$
$$BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE;$$

кўриб турибмизки, уларнинг сони ўнта экан.

Изоҳ. Албатта, 3- мисолни бундай ечиш қониқмаслик ҳиссини келтириб чиқаради. Ҳақиқатан ҳам, агар ўқитувчилар беш киши эмас, балки, айтайлик, ўн тўрт киши бўлиб, комиссияни икки кишидан эмас, балки, масалан, етти кишидан иборат қилиб тузиладиган бўлса, у ҳолда масалани юқоридаги усул билан ҳал этиш бутунлай муваффақиятсизликка олиб келар эди, чунки бу ҳолда уч мингдан ортиқ турли комиссияларни тузиш мумкин (бу қуйида кўрсатилади).

Янги тушунчалар киритиш ва юқоридаги каби масалаларни ҳал этишга имкон берадиган умумий формулаларни келтириб чиқаришдан аввал қуйидаги саволни қўямиз: 1—3-мисолларда нима умумий ва улар орасида муҳим фарқлар борми? Энг аввало шу нарса кўзга ташланадики, ҳар учала мисолда элементларнинг бирорта чекли тўплами ва унинг берилган баъзи талабларни қаноатлантирувчи қисм тўпламлари ҳақида гап боради. Масалан, 1- мисолда группадаги барча ўқувчилар тўплами, яъни 20 та элементдан иборат тўплам қаралди ва бу тўпламнинг иккита элементдан (комсорг ва профорг этиб сайланган икки ўқувчидан) иборат барча турли қисм тўпламларини топиш талаб қилинди. 2-мисолда барча нотиқлардан иборат тўртта элементли тўплам тўғрисида сўз юритилди ва бу тўпламнинг бирбиридан элементларининг келиши тартиби билан фарқ қилувчи тўрт элементли қисм тўпламлари сони топилди. 3- мисолда барча математика ўқитувчиларининг беш элементли тўпламидан турли икки элементли тўпламлар (комиссиялар) ажратилди ва уларнинг сони санаб чиқилди.

1—3- мисолларни диққат билан қараб чиқадиган бўлсак, қайд қилиб ўтилган ўхшашлик билан бир қаторда улар орасидаги муҳим бир фарқ аниқланади. У шундан иборатки, 1—2- мисоллардаги ва 3- мисолдаги „турли қисм тўпламлар" сўзлари мутлақо ҳар хил тушунилади. 3- мисолда бир-биридан ҳеч бўлмаганда битта элементи билан фарқланадиган қисм тўпламлар турлича деб ҳисобланган эди. Элементларнинг тартиби эътиборга олинмаган эди. Аҳмедов ва Каримовдан иборат комиссия, табиийки, Каримов ва Аҳмедовдан иборат комиссиядан ҳеч бир фарқ қилмайди. Аксинча, 1- мисолда фақат элементларининг тартиби билан бир-биридан фарқ қиладиган қисм тўпламлар турлича деб қабул қилинди. Аҳмедовни комсорг, Каримовни профорг қилиб сайлаш ва Каримовни комсорг, Аҳмедовни эса профорг қилиб сайлаш, бу сайлашнинг иккита турли усулидир. 2-мисолда барча нотиқлар тўпламининг бир-биридан элементларнинг фақат келиш тартиби билан фарқ қилувчи тўрт элементли қисм тўпламлари қаралди.

Комбинаторика масалаларида ҳар доим берилган тўпламнинг маълум шартларни қаноатлантирувчи барча қисм тўпламлари сонини ҳисоблаш зарур бўлади, бироқ бир хил масалаларда элементларнинг келиш тартиби билангина фарқ қиладиган қисм тўпламларни турли деб ҳисобланса, бошқа бир масалаларда элементларнинг келиш тартиби муҳим бўлмай, элементларнинг фақат жойлашиши билан фарқ қиладиган қисм тўпламлари турли деб ҳисобланади.

Бу ҳолатни комбинаторика ва эҳтимоллар назариясини ўрганишда ҳар доим назарда тутиш жуда муҳимдир.

2. Ўринлаштиришлар ва ўрин алмаштиришлар. Таъриф. n та элементдан иборат тўплам берилган бўлсин. Унинг k та элементдан тузилган ҳар бир тартибланган қисм тўплами *n та элементдан k та элементли ўринлаштириш* дейилади.

Таърифдан келиб чиқадики, $n \geqslant k \geqslant 0$ ва n та элементдан k та элементли ўринлаштиришлар k та элементли қисм тўпламлар бўлиб, буларнинг барчаси элементларнинг таркиби билан ёки уларнинг келиш тартиби билан фарқ қилади. Қайд қиламизки, $k=0$ бўлган хусусий ҳолни, яъни n та элементдан 0 та элементли ўринлаштиришни n та элементдан иборат тўпламнинг элементларга эга бўлмаган қисм тўплами, яъни фақат бўш тўплам беради.

Комбинаторика масалаларида n та элементдан k та элементли барча ўринлаштиришлар сонини ҳисоблашни билиш зарур бўлади. Бу сонни белгилаш учун махсус A_n^k символ („n тадан k тадан тузилган ўринлаштиришлар сони“ ёки „a n тадан k тали“ деб ўқилади*) ишлатилади. Энди кўриниб турибдики, олдинги пунктдаги 1-мисолда 20 та элементдан 2 та элементли ўринлаштиришлар сонини топиш талаб қилинган экан ва бу мисолнинг ечилишидан $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$ келиб чиқади.

Сўнгра, равшанки, $A_n^0 = 1$, чунки n та элементли тўпламнинг элементга эга бўлмаган фақат битта қисм тўплами (бўш тўплам) мавжуддир.

Умумий ҳолда n та элементдан k та элементли ўринлаштиришлар сони ҳақидаги масалага қуйидаги теорема жавоб беради.

1-теорема. *n та элементдан k та элементли ўринлаштиришлар сони n дан $n-k+1$ гача (бу сон ҳам киради) бўлган k та кетма-кет натурал соннинг кўпайтмасига тенг, яъни*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),\ k>0. \quad (1)$$

Исбот. n та элементдан k та элементли ўринлаштиришлар сони n та элементдан иборат тўпламнинг барча k та элементли тартибланган қисм тўпламларининг сонига тенгдир. Қисм тўпламнинг биринчи элементини, равшанки, n та усул билан танлаш мумкин, қисм тўпламнинг иккинчи элементини эса энди $n-1$ та усул билан танлаш мумкин, чунки иккинчи элемент сифатида тўпламнинг биринчи бўлиб танланган элементидан бошқа исталган элементини танлаш мумкин. Биринчи элементни танлашнинг ҳар бир усули иккинчи элементни танлашнинг ҳар бир усули билан биргаликда бўлиши мумкин, демак k та элементли тартибланган қисм тўпламни тузишда дастлабки иккита элементни танлашнинг $n(n-1)$ та усули мавжуд экан. Биринчи иккита элементни танлаб бўлингандан сўнг учинчи элементни танлаш учун $n-2$ та имконият қолади ва яна бу имкониятларнинг ҳар бири дастлабки иккита эле-

---

* А — французча arrangement сўзининг биринчи ҳарфи бўлиб, бу сўз ўринлаштириш, тартибга келтириш маъносини англатади.

ментни танлаш имкониятларидан истаган бири билан биргаликда бўлиши мумкин, яъни дастлабки 3 та элементни $n(n-1)(n-2)$ та усули билан танлаш мумкин экан. k та элементли қисм тўпламнинг сўнгги k-элементи $n-k+1$ та усул билан танланиши мумкин, чунки k-элементни танлаш чоғида $k-1$ та элемент танлаб олинган бўлиб ва демак, $n-(k-1)$ та, яъни $n-k+1$ та элемент қолган бўлади. Шундай қилиб (1) формула исбот қилинди. Бу исбот биринчи пунктдаги 1-мисолни ечишда олиб борилган мулоҳазанинг умумлаштирилишидан иборатдир.

(1) формулани бошқача кўринишда ёзиш қулайдир. Қисқалик учун, $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$ кўпайтмани, яъни n дан 1 гача бўлган барча натурал сонлар кўпайтмасини $n!$ символ(„эн факториал“ деб ўқилади) билан белгилаймиз. Факториал белгисидан фойдаланиб, масалан, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}1! &= 1\\ 2! &= 2\cdot 1 = 2\\ 3! &= 3\cdot 2\cdot 1 = 6\\ 4! &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24\\ 5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.\end{aligned}$$

(1) формуланинг ўнг томонидаги кўпайтмани $(n-k)!$ га кўпайтирамиз ва бўламиз. У ҳолда

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

ёки

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

(1) формула $k>0$ деган шартда ҳосил қилинган эди, (2) формуладан $k=0$ бўлганда ҳам фойдаланиш мумкин, чунки у бу хусусий ҳолда ҳам тўғри натижа беради, чунончи

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

(1) формулани келтириб чиқаришда яна $n\neq 0$ деб, яъни берилган тўплам ҳеч бўлмаганда битта элементга эга деб фараз қилинган эди. Агар $n=0$ бўлса, бу бўш тўплам қаралаётганини билдиради, бўш тўплам фақат битта қисм тўпламга (ўзига) эга бўлгани учун $A_0^0=1$ бўлади. Агар $0!=1$ деб шартлашилса, у ҳолда (2) фор-

мула $n=0$ бўлган ҳолда ҳам тўғри натижа беради. Ҳақиқатан ҳам,

$$A_0^0=\frac{0!}{0!}=1.$$

1-мисол. Ўқувчилар 7 та ўқув предметини ўрганадилар. Агар ҳафтанинг душанба куни 4 та турли дарс ўтилиши керак бўлса, шу кунги дарс жадвалини неча усул билан тузиш мумкин?

Ечилиши. Усуллар сони 7 та элементдан 4 та элементли ўринлаштиришлар сонига, яъни A_7^4 га тенг. (1) формулада $n=7$, $k=4$ деб, $A_7^4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ ни топамиз.

Таъриф. n та элементдан n та элементли ўринлаштиришлар *n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар* дейилади.

Таърифдан ўрин алмаштиришлар ўринлаштиришларнинг хусусий ҳоли эканлиги кўринади. Ҳар қайси ўрин алмаштириш тўпламдаги барча n та элементни ўз ичига олгани учун турли ўрин алмаштиришлар бир-биридан фақат элементларнинг ўрни билангина фарқ қилади. n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар (у P_n^* орқали белгиланади) n та элементдан иборат тўпламнинг n та элементли барча тартибланган қисм тўпламларининг сонига тенгдир. 1-пунктдаги 2-мисолда 4 та элементдан тузилган барча ўрин алмаштиришлар сонини (нотиқларнинг барча мумкин бўлган ўрин алмаштиришлар сонини) топиш талаб қилинган эди. Бу сон 24 га тенг эканлиги маълум бўлди, демак,

$$P_4=24.$$

Умумий ҳолда n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони $P_n=A_n^n$ га тенг, бинобарин, уни (1) ёки (2) формулаларнинг ҳар биридан $k=n$ деб фараз қилиб топиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, (2) формуладан қуйидагига эга бўламиз:

$$P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

---

[*] P — французча permutation, яъни ўрин алмаштириш деган маънони билдирувчи сўзнинг биринчи ҳарфи.

Худди шундай, (1) формуладан:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-n+1) = n!.$$

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

2- теорема. *n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони $n!$ га тенг.*

2- мисол. Ушбу 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамларидан бешга каррали бўлган ва рақамлари такрорланмайдиган нечта олти хонали сон тузиш мумкин?

Ечилиши. 5 рақами тузиладиган сонларнинг охирида туриши керак. Қолган бешга рақам қолган бешта ўринда исталган тартибда туриши мумкин. Демак, бешга каррали бўлган олти хонали сонлар сони бешта элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сонига тенг, яъни $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ та.

Машқлар

1. Ҳисобланг:

а) $\dfrac{P_6 - P_5}{5!}$; б) $\dfrac{20!}{5!\,16!}$; в) $\dfrac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$;

г) $\dfrac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1}\, P_{k-n}}$ $(k \geqslant n)$; д) $\dfrac{A_n^k\,(n-k)!}{(n-1)!}$ $(k \leqslant n)$.

2. n ни топинг:

а) $A_n^5 = 18\, A_{n-2}^4$; б) $A_n^4\, P_{n-4} = 42\, P_{n-2}$;

в) $P_{n+2} = 132\, A_n^k\, P_{n-k}$; г) $(n+5)! = 240\,(n-k)!\,A_{n+3}^{k+3}$.

3. Ушбу $f(x) = A_{7-x}^{x-3}$ функциянинг аниқланиш соҳасини ва қийматлар тўпламини топинг.

4. Ҳар бирида бир хил рақам бўлмаслик шарти билан 1, 2, 3, 4 рақамларидан нечта турли икки хонали сон тузиш мумкин?

5. Ушбу 1, 2, 3, 4 рақамларидан нечта ҳар хил икки хонали сон тузиш мумкин?

6. 0, 1, 2, 3, рақамларидан ҳар бир сонда бир хил рақам бўлмайдиган қилиб мумкин бўлган тўрт хонали сонлар тузилган. Нечта сон ҳосил бўлган? Улар орасида нечта жуфт сон бор?

7. Ушбу а) зебра, б) ватар, в) водород, г) абракадабра сўзларининг ҳарфларидан нечта турли ўрин алмаштириш тузиш мумкин?

8. Душанба куни алгебра, геометрия, тарих, география ва адабиётдан иборат бешта дарс бўлиши керак. Алгебра ва геометрия дарслари бевосита бир-биридан кейин келмаслиги лозим бўлса, бу кунги дарс жадвалини неча усул билан тузиш мумкин?

9. 5 та оқ ва 4 та қора шарни қора шарлар ёнма-ён ётмайдиган қилиб неча усул билан бир қаторга тизиб чиқиш мумкин? Бир хил рангли шарлар бир-биридан фарқ қилмайди.

10. Йиртқич ҳайвонларни ўргатувчи цирк аренасига бирин-кетин бешта шер ва тўртта йўлбарсни олиб чиқиши керак. Бунинг ҳеч қайси икки йўлбарс бир-бирининг кетидан чиқмайдиган қилиб неча усул билан амалга ошириш мумкин?

3. Группалашлар. Таъриф. n та элементдан иборат тўплам мавжуд бўлсин. Унинг k та элементдан иборат ҳар бир қисм тўплами *n та элементдан k та элементли группалаш* дейилади.

Шундай қилиб, n та элементдан k та элементли группалашлар бу n та элементли тўпламнинг барча k та элементли қисм тўпламлари бўлиб, бунда турли қисм тўпламлар деб, элементларининг фақат таркиби турлича бўлган қисм тўпламларгина ҳисобланади. Бир-биридан элементларининг фақат келиш тартиби билан фарқ қиладиган қисм тўпламлар турли деб ҳисобланмайди.

n та элементдан k та элементли барча группалашлар сони C_n^k символи билан белгиланади* (бундай ўқилади: n дан k тали группалашлар сони ёки „це n дан k тадан“). 1-пунктдаги 3-мисолда 5 та элементдан 2 та элементли группалашлар сони топилган эди, у $C_5^2=10$ га тенг эди.

Умумий ҳолда n та элементдан k та элементли группалашлар сони

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1}$$

формула орқали аниқланади.

Бу формулани исбот қилиш учун C_n^k ва A_n^k орасидаги боғланишни топамиз. A_n^k сонни, яъни барча тартибланган k та элементли қисм тўпламлар сонини қуйидагича топиш мумкин. Дастлаб k та элементни ўз ичига олган мумкин бўлган барча тартибланмаган қисм тўпламлар тузилади. Уларнинг сони C_n^k га тенг, сўнгра ҳосил қилинган ҳар бир қисм тўпламдан унинг элементларинин ўринларини алмаштириб, барча тартибланган қисм тўпламлар ҳосил қилинади, уларнинг сони энди $k!$ марта кўп бўлади, чунки ҳар қайси k та элементли тўпламни $k!$ та усул билан тартиблаш мумкин. Бошқача айтганда, k та элементли тартибланган қисм тўпламлар шунча элементли тартибланмаган қисм тўпламлардан $k!$ марта кўп, яъни $A_n^k=k!\ C_n^k$, бу ердан

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{k!} \text{ ва } A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!} \text{ бўлгани учун } C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

---

*C — французча combinasion—группалаш деган сўзнинг биринчи ҳарфи. Баъзан C_n^k ўрнига $\binom{n}{k}$ ҳам ёзилади.

Энди имтиҳон олувчилар жами 14 киши бўлган ҳолда, улардан тузиладиган 7 кишилик комиссиялар сонини ҳисоблаб чиқиш мумкин (1-пунктнинг 3-мисолидан кейинги изоҳга қаранг):

$$C_{14}^{7}=\frac{14!}{7!7!}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=3432.$$

(1) формулани ҳисоблашлар учун қулай бўлган бошқача кўринишда ёзиш мумкин. Касрнинг сурат ва махражини $(n-k)!$ га қисқартириб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \qquad (2)$$

Бу натижани қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин.

3-теорема. *n та элементдан k та элементли группалашлар сони n дан $n-k+1$ гача (у ҳам киради) бўлган барча натурал сонлар кўпайтмасининг $k!$ га бўлинганига тенг.*

1-мисол. Футбол чемпионатида 16 команда иштирок этади. Агар ҳар икки команда ўзаро бир марта учрашса, чемпионатда ҳаммаси бўлиб нечта матч ўтказилади?

Ечилиши. 16 та элементдан иборат тўпламнинг иккита элементли қисм тўпламлари нечта бўлса, матчлар сони шунча бўлади, яъни уларнинг сони C_{16}^2 га тенг бўлади. (2) формулага кўра топамиз:

$$C_{16}^2=\frac{16\cdot15}{2}=120,$$

яъни ҳаммаси бўлиб, 120 та матч ўтказилади.

C_n^k сон баъзи ажойиб ва муҳим хоссаларга эга. Шулардан иккитасини қайд қилиб ўтамиз. Биринчи хосса

$$C_n^k=C_n^{n-k} \qquad (3)$$

тенглик билан ифодаланади, бу хоссани (1) формула ёрдамида исботлаш осон:

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=C_n^k.$$

Бу хоссадан фойдаланиб, $k>\frac{n}{2}$ бўлган ҳолларда C_n^k

сонларни ҳисоблашни соддалаштириш мумкин, масалан

$$C_{15}^{12}=C_{15}^{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2}=455.$$

Иккинчи хосса

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k \qquad (k<n) \qquad (4)$$

ни ҳам (1) формулани қўлланиб исбот қилиш осондир:

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}+\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=$$

$$=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\left(\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}+\frac{(k+1)!}{k!}\right)=$$

$$=\frac{n!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}\left(\frac{n-k}{1}+\frac{k+1}{1}\right)=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

(4) формула C_n^k сонларни кетма-кет топишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, $n=1$, $k=1$ деб олиб, $C_2^1=C_1^1+C_1^0=2$ ни ҳосил қиламиз: сўнгра $n=2$ ва $k=0$ ёки $k=1$ деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$C_3^1=C_2^1+C_2^0=2+1=3,$$
$$C_3^2=C_2^2+C_2^1=1+2=3.$$

Сўнгра, агар $n=3$ дейдиган бўлсак, у ҳолда $k=0,1,2$ бўлганда мос равишда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$C_4^1=C_3^1+C_3^0=3+1=4,$$
$$C_4^2=C_3^2+C_3^1=3+3=6,$$
$$C_4^3=C_3^3+C_3^2=1+3=4 \text{ ва ҳоказо.}$$

Агар C_n^k сонларни ушбу

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3
\end{array}$$

учбурчак жадвал кўринишида жойлаштирсак, у ҳолда ҳар бир сатрнинг бошида ва охирида бирлар туради, чунки $C_n^0=C_n^n=1$, қолган жойларни эса (4) формула ёрдамида осонгина кетма-кет тўлдириш мумкин, (4) формула эса жадвалнинг исталган сатридаги исталган жойида (чекка жойлардан ташқари) турган сон бу сатрдан олдинги сатрда ўша соннинг тепасида турган иккита соннинг йиғиндисига тенг эканлигини кўрсатиб турибди. Тавсифланган бу жадвал *Паскаль учбурчаги* дейилади. Паскаль учбурчагининг дастлабки саккиз сатри қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1 & & & \\
 & & 1 & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & 1 & & \\
 & 1 & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & 1 &
\end{array}$$

Бу жадвални яна давом эттириш мумкин, бунда навбатдаги сатрлар (4) формула билан ифодаланадиган қонун бўйича тўлдирилади.

Машқлар

11. Ҳисобланг:

$$\frac{P_6\left(C_7^5 + C_7^4\right)}{A_{10}^7}.$$

12. n ни топинг:

а) $12C_{n+3}^{n-1} = 55\,A_{n+1}^2$; б) $12C_n^1 + C_{n+4}^2 = 126$;

в) $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 15(n+2)$; г) $\frac{1}{C_4^n} = \frac{1}{C_5^n} + \frac{1}{C_6^n}$.

13. Ушбу

$$f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини ва унинг қийматлар тўпламини топинг.

14. Тенгсизликни ечинг:

а) $C_{10}^{x-1} > 2\,C_{10}^{x}$; б) $8C_{105}^{x} < 3\,C_{105}^{x+1}$.

15. Беш ходимга учта путёвка ажратилди. Агар: а) ҳамма путёвкалар ҳар хил, б) ҳамма путёвкалар бир хил бўлса, уларни неча усул билан тақсимлаш мумкин?

16. Группада 30 студент бор. Буларнинг ичида икки кишини навбатчиликка тайинлаш керак. Агар уларнинг бири:

а) раҳбар бўлса;

б) раҳбар бўлмаса,

навбатчиларни неча усул билан тайинлаш мумкин?

17. Синфда 38 та жой бор. Бу жойларга 35 ўқувчини неча усул билан ўтқазиш мумкин?

18. Футбол бўйича биринчиликда 153 та матч ўтказилди. Ҳар икки команда бир-бири билан ўзаро бир марта ўйнади. Биринчиликда нечта команда қатнашган?

19. Шахмат турнирида иштирокчилар ўзаро бир марта учрашадилар. Иккита ўйинчи учтадан ўйин ўтказгач касалликлари туфайли турнирдан чиқиб кетдилар. Агар жами 84 та партия ўйналган бўлса, турнирни нечта шахматчи бошлаган?

20. Қавариқ ўнбурчак нечта диагоналга эга?

21. Қавариқ ўнбурчакнинг ҳеч қайси учта диагонали бир нуқтада кесишмайди. Диагоналлар кесишган нуқталар сонини аниқланг.

22. Взводда 3 сержант ва 30 солдат бор. Патруль учун бир сержант ва уч солдатни неча усул билан ажратиш мумкин?

23. Морзе алифбесининг ҳарфлари „нуқталар" ва „тире" лар наборидан иборат. Агар:

а) ҳарфда тўрттадан ортиқ белги бўлмаслиги керак бўлса,

б) ҳарфда бештадан ортиқ белги бўлмаслиги керак бўлса,

Морзе алифбесида нечта ҳарф бўлиши мумкин?

24. Хоккей командасида 2 дарвозабон, 7 ҳимоячи ва 10 ҳужумчи бор. Тренер дарвозабон, икки ҳимоячи ва уч ҳужумчидан иборат биринчи олтиликни неча усул билан тузиши мумкин?

25. Барча рақамлари тоқ бўлган (1,3,5,7,9 рақамлари) нечта олти хонали сон мавжуд?

26. Сейф ҳар бирида 0,1,2,...,9 рақамлари тасвирланган бешта дискдан иборат қулф билан қулфланади. Дискларда рақамларнинг маълум бир комбинацияси терилганда қулф очилади. Агар „иш куни" 13 соат давом этадиган бўлса ва рақамларнинг бир комбинациясини теришга 5 секунд кетадиган бўлса, сейфни очишга 10 кун етадими?

27. Автомобиль номерлари учта ҳарф (ҳаммаси бўлиб 30 та ҳарф ишлатилади) ва тўртта рақамдан (ҳаммаси бўлиб 10 та рақам ишлатилади) иборат. Иккита автомобиль бир хил номерга эга бўлиб қолмайдиган қилиб, шу усулда нечта автомобилни номерлаш мумкин?

27-§. Ньютон формуласи

Паскаль учбурчагининг учинчи ва тўртинчи сатрларида турувчи сонлар $a+b$ икки ҳад (бином) ни квадратга ва кубга кўтарганда пайдо бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бизга яхши таниш бўлган

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

формулаларни қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2,$$

$$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3.$$

Бундай табиий гипотеза туғилади: шунга ўхшаш формулалар биномнинг тўртинчи, бешинчи ва умуман, исталган натурал даражаси учун ўринли бўлмасмикан?

Дастлаб, бундай формула тўртинчи даража учу ўринли бўлиш-бўлмаслигини аниқлаймиз. Шу мақсадда $(a+b)^3$ учун чиқарилган формуланинг иккала қисмини $a+b$ га кўпайтирамиз. У ҳолда қуйидагига эг бўламиз:

$$(a+b)^4=(C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3)(a+b)=$$

$$=C_3^0a^4+C_3^1a^3b+C_3^2a^2b^2+C_3^3ab^3+$$

$$+C_3^0a^3b+C_3^1a^2b^2+C_3^2ab^3+C_3^3b^4=$$

$$=C_3^0a^4+(C_3^1+C_3^0)a^3b+(C_3^2+C_3^1)a^2b^2+(C_3^3+C_3^2)ab^3+C_3^3b^4.$$

Ушбу

$$C_3^0=C_4^0, \quad C_3^1+C_3^0=C_4^1, \quad C_3^2+C_3^1=C_4^2.$$

$$C_3^3+C_3^2=C_4^3, \quad C_3^3=C_4^4$$

тенгликларни эътиборга олсак,

$$(a+b)^4=C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4$$

формуланинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, биномнинг учинчи даражаси учун формуладан фойдаланиб худди шундай формулани тўртинчи даража учун ҳам ҳосил қилишга эришдик. Юритилган муҳокама, биринчидан гипотезани тасдиқлайди, иккинчидан, уни исботлаш учун математик индукция методидан фойдаланиш фикрига олиб келади.

Теорема. Исталган a ва b сонлар ва исталган n натурал сон учун ушбу формула ўринлидир:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n. \quad (1$$

Йиғинди белгисидан фойдаланиб, Ньютон формуласини қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (2)$$

Исбот. $n=1$ учун Ньютон формуласи

$$(a+b)^1=C_1^0a+C_1^1b$$

кўринишга эга бўлиб, $C_1^0=C_1^1=1$ бўлгани учун бу ҳолда формула ўринлидир.

Формула $n=m$ учун ўринли деб фараз қиламиз, яъни

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

бўлсин. У ҳолда

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k+\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} =$$

$$=C_m^0 a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k+\sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k+C_m^m b^{m+1}=$$

$$=C_m^0 a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}(C_m^k+C_m^{k-1})a^{m+1-k} b^k+C_m^m b^{m+1}.$$

Ушбу

$$C_m^0=C_{m+1}^0,\quad C_m^k+C_m^{k-1}=C_{m+1}^k,\quad C_m^m=C_{m+1}^{m+1}$$

тенгликларни эътиборга олсак,

$$(a+b)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (1) формуланинг $n=m$ учун ўринли эканлигидан унинг $n=m+1$ учун ҳам ўринли эканлиги келиб чиқади ва бинобарин, Ньютон формуласи $n=1$ да ҳам ўринли бўлгани учун математик индукция принципига кўра бу формула барча натурал n лар учун ўринли эканлиги исбот қилинди.

(1) формула буюк инглиз физиги ва математиги И. Ньютоннинг номи билан юритилади. Унинг ўнг томони *бином натурал даражасининг ёйилмаси* дейилади. C_n^k коэффициентлар *биномиал коэффициентлар* дейилади.

Ньютон фомуласининг баъзи бир ўзига хос хусусиятларини қайд қилиб ўтамиз.

а) Ньютон формуласининг ўнг томони $n+1$ та қўшилувчига эга.

б) Ҳар бир қўшилувчи $C_n^k a^{n-k} b^k$ кўринишда бўлади. $k+1$ - ўринда турувчи $C_n^k a^{n-k} b^k$ қўшилувчини ёйилманинг k-қўшилувчиси деб ҳисоблаш ва T_k орқали белгилаш қулайдир. Бу шартда $T_0=C_n^0 a^n$ ёйилманинг нолинчи ҳади, $T_1=C_n^1 a^{n-1} b$ биринчи ҳади, $T_n=C_n^n b^n$ эса n - ҳади бўлади.

в) Ёйилмада ҳар бир ҳаддаги a нинг даража кўрсаткичи ундан олдинги ҳаддаги a нинг даража кўрсаткичидан бир бирлик кам, b нинг даража кўрсаткичи эса бир бирлик ортиқ. Ҳар бир ҳаддаги a ва b лар даража кўрсаткичларининг йиғиндиси n га тенг.

г) Ёйилманинг биномиал коэффициентлари Паскаль учбурчагининг $(n+1)$- қаторида турувчи сонлардан иборатдир. Ёйилманинг нолинчи ва n- ҳадидан баравар узоқликда турган коэффициентлари тенг, чунки $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Ньютон формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k \tag{3}$$

ёки йиғинди белгисидан фойдаланмасак:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n. \tag{3'}$$

Бу ерда C_n^k биномиал коэффициентлар уларнинг 26-§ (4) формуладаги қийматлари билан алмаштирилган.

1-мисол. $x+1$ иккиҳадни еттинчи даражага кўтаринг.

(2) формулада $a=x$, $b=1$, $n=7$ деб топамиз:

$$(x+1)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{7-k} =$$

$$= C_7^0x^7 + C_7^1x^6 + C_7^2x^5 + C_7^3x^4 + C_7^4x^3 + C_7^5x^2 + C_7^6x + C_7^7 =$$

$$= x^7 + 7x^6 + \frac{7\cdot 6}{2}x^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}x^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}x^3 +$$

$$+ \frac{7\cdot 6}{2}x^2 + 7x + 1 =$$

$$= x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1.$$

2-мисол. $x-y$ иккиҳадни бешинчи даражага кўтаринг.

(3) формуладан фойдаланамиз, бунинг учун у ерда $a=x$, $b=-y$, $n=5$ деймиз. У ҳолда

$$(x-y)^5=\sum_{k=0}^{5}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{5-k}(-y)^k=$$

$$=x^5+5x^4(-y)+\frac{5\cdot4}{2}x^3(-y)^2+$$

$$+\frac{5\cdot4}{2}x^2(-y)^3+5x(-y)^4+(y)^5=$$

$$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5.$$

3-мисол. $(1+i)^6$ ни ҳисобланг.

(3) формулада $a=1$, $b=i$, $n=6$ деб топамиз:

$$(1+i)^6=1+6i+\frac{6\cdot5}{2}i^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}i^3+\frac{6\cdot5}{2}i^4+$$

$$+6i^5+i^6=1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i.$$

4-мисол. Ушбу $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{12}$ бином даражаси ёйилмасининг тўққизинчи ҳадини топинг.

Қуйидагига эгамиз:

$$T_9=C_{12}^9\left(\frac{1}{x}\right)^3x^9=C_{12}^3x^6=\frac{12\cdot11\cdot10}{2\cdot3}x^6=220x^6.$$

5-мисол. Ушбу $\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20}$ бином даражаси ёйилмасининг t га боғлиқ бўлмайдиган ҳади номерини топинг.

Ёйилманинг k- ҳадини ёзамиз:

$$T_k=C_{20}^k\left(\sqrt[3]{t}\right)^{20-k}\left(-\frac{1}{t}\right)^k=(-1)^kC_{20}^k\,t^{\frac{20-k}{8}-k}.$$

T_k ҳад t га боғлиқ бўлмаслиги учун

$$\frac{20-k}{3}-k=0, \qquad \text{яъни } k=5$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Демак, ёйилманинг бешинчи ҳади t га боғлиқ эмас.

6-мисол. Барча биномиал коэффициентларнинг йиғиндисини топинг.

(2) формулада $a=1$, $b=1$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Шундай қилиб,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n.$$

Изоҳ. Ҳозир келтириб чиқарилган тенгликнинг маъноси қуйидагидан иборатдир. C_n^k сон n та элементдан иборат тўпламнинг k та элементли барча қисм тўпламлари сони бўлгани учун

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$$

йиғинди, равшанки, n та элементли тўпламнинг барча қисм тўпламлари сонидан иборат бўлади. Бинобарин, n та элементдан иборат тўпламнинг барча қисм тўпламлари сони 2^n га тенг.

7-мисол. Ушбу $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ кўпҳаднинг энг катта коэффициентини топинг.

Кўпҳаднинг x^k олдидаги коэффициентини a_k орқали белгилаймиз. (2) формуладан фойдаланиб, берилган кўпҳаднинг ҳадларини x ўзгарувчининг даражалари ўсиб бориш тартибида жойлаштирамиз:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k=\sum_{k=0}^{10} a_k x^k.$$

Энг катта коэффициент a_k ни топиш учун $a_{k-1}\leqslant a_k$ тенгсизликни, яъни

$$C_{10}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\leqslant C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

тенгсизликни ечамиз.

Тенгсизликнинг иккала қисмини $\frac{2^{k-1}}{3^{10}}$ га бўлиб топамиз:

$$C_{10}^{k-1}\leqslant 2C_{10}^k$$

ёки

$$\frac{10!}{(k-1)!\,(10-k+1)!}\leqslant\frac{2\cdot 10!}{k!(10-k)!}.$$

Кейинги ўз-ўзидан кўриниб турадиган шакл алмашти-ишлардан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{10-k+1} \leqslant \frac{2}{k}, \qquad k \leqslant 20-2k+2, \quad k \leqslant \frac{22}{3}.$$

Шундай қилиб,

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_7$$

канлигини исбот қилдик.

Равшанки, $k > \frac{22}{3}$да тескари тенгсизлик $a_{k-1} > a_k$ ринли бўлади, яъни кўпҳаднинг коэффициентлари ттинчи ҳаддан бошлаб камаяди.

Шундай қилиб, a_7 коэффициент берилган кўпҳаднинг ўн битта коэффициенти ичида энг каттаси бўлиб, у энг катта коэффициент

$$C_{10}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

а тенг.

Машқлар

1. Ньютон формуласини ушбу бином даражалари учун ёзинг

а) $(x^2-y)^6$; б) $(3a^2-2b)^5$.

2. Қуйидаги бином даражаларининг ёйилмасини топинг:

а) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; б) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$.

3. Қуйидаги бином даражаси ёйилмасини топинг ва ҳосил қилинган ифодани соддалаштиринг:

а) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^5$; б) $(1+i\sqrt{3})^6$.

4. а) $(2x-3)^{10}$ ёйилманинг еттинчи ҳадини топинг;

б) $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$ ёйилманинг тўртинчи ҳадини топинг;

5. а) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$ ёйилманинг ўрта ҳадини топинг;

б) $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^{13}$ ёйилманинг иккита ўрта ҳадини топинг.

6. Ёйилмаларнинг x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган ҳадини топинг:

а) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$; б) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

7. Ёйилмаларнинг z ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган ҳадини топинг:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{z^2}}-2\sqrt{z}\right)^{11}$; б) $\left(z^{\frac{1}{3}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)^{15}$.

8. Ушбу $\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-1}\right)^{n}$ бином даражаси ёйилмасининг тўртинчи ҳадида a қатнашмайди. Даража кўрсаткич n ни топинг.

9. Ушбу $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{n}$ бином даражаси ёйилмасининг биномиал коэффициентлари йиғиндиси 256 га тенг. Ёйилманинг x га боғлиқ бўлмаган ҳадини топинг.

10. Ёйилмаларнинг рационал ҳадларини топинг:

а) $(\sqrt[6]{3}+\sqrt[5]{2})^{11}$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^{8}$.

11. Кўпҳаднинг энг катта коэффициентини топинг:

а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{100}$; б) $\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}x\right)^{12}$;

в) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x\right)^{105}$; б) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}x)^{20}$.

12. $(1+x^2-x^3)^9$ кўпҳаднинг x^8 олдидаги; б) $(1+3x+2x^3)^{10}$ кўпҳаднинг x^4 олдидаги коэффициентини топинг.

13. Ушбу йиғиндиларни ҳисобланг:

а) $\sum\limits_{k=2}^{n-2} C_n^k$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

в) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$.

14. Кўпҳаднинг коэффициентлари йиғиндисини топинг:

а) $(2x-1)^{100}$; б) $(x^3-x-1)^{99}$.

VII БОБ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

28-§. Тасодифий ҳодисалар. Ҳодисанинг эҳтимоли

1. Тасодифий ҳодисалар ва улар устида амаллар. Бирор тажриба билан боғлиқ бўлган *тасодифий ҳодиса* дейилганда бу тажриба ўтказилиши натижасида ё содир бўладиган, ёки содир бўлмайдиган ҳодиса тушунилади.

Масалан, агар тажриба танга ташлашдан иборат бўлса, у ҳолда бу тажриба билан боғлиқ бўлган тасодифий ҳодиса „гербли томоннинг тушиши“ бўлади: айрим ҳолларда танганинг гербли томони юқорида бўлиб тушади, яъни „гербли томоннинг тушиши“ ҳодисаси рўй беради, бошқа ҳолларда танга гербли томони пастда бўлиб тушади, демак, бизни қизиқтираётган ҳодиса рўй бермайди. Шунингдек, ўйин соққасини ташлаганда „олти рақам тушиши“, маълум вақт давомида электр лампанинг ишдан чиқиши, ҳужайранинг радиоактив нурланиш таъсирида ҳалок бўлиши ҳодисалари ҳам тасодифий ҳодисалар бўлади. Санаб ўтилган барча ҳолларда тажриба ўтказилмагунга қадар тегишли ҳодисанинг рўй бериш-бермаслигини олдиндан айтиб бериш мумкин эмас, чунки натижа жуда кўп факторларга боғлиқ бўлиб, уларни олдиндан ҳисобга олишнинг иложи йўқ. Ҳеч бир фан, шу жумладан математика ҳам, қандайдир бир синов (тажриба)нинг натижасини олдиндан айтиб беришни даъво қилмайди. Тасодифий ҳодисаларни тажрибани жуда кўп марта такрорлаш ва ҳар гал қаралаётган ҳодисанинг рўй беришини (ёки рўй бермаслигини) фиксирлаб боришнинг жуда бўлмаганда принципиал имкони бўлган тақдирдагина ўрганиш мумкин.

Бу шарт бажарилганда тасодифий ҳодиса *частотаси* ҳақида тушунча киритиш мумкин. Айтайлик, тажрибанинг n марта ўтказилишида ҳодиса k марта рўй берган бўлсин, у ҳолда $\frac{k}{n}$ нисбат тасодифий ҳодиса частотасини ифодалайди.

1-**мисол**. Француз табиатшуноси Бюффон катта сонлар қонунини ўрганишда тангани 4040 марта ташлаб тажриба ўтказган. Гербли томон 2048 марта тушган. Демак, бу тажрибада „гербли томоннинг тушиши“ ҳодисасининг частотаси

$$\frac{2048}{4040} \approx 0{,}507 \approx 0{,}5$$

га тенг.

2-**мисол**. Мендель назарияси бўйича сариқ нўхатни сариқ нўхат билан чатиштиришда тахминан тўрт ҳолдан бирида яшил нўхат чиқади. Бу назарияни текшириш учун сариқ нўхатни чатиштириш тажрибаси 34153 марта такрорланган. 8506 та ҳолда яшил нўхат ҳосил бўлган. Ўтказилган тажрибада „яшил нўхатнинг ҳосил бўлиши“ ҳодисасининг частотаси

$$\frac{8506}{34153} \approx 0{,}252 \approx 0{,}25$$

га тенг.

1, 2- мисолларда қаралган тажрибалар кўп марта такрорланди ва ҳар гал ўтказилаётган тажрибалар сони етарлича катта бўлганда, „гербли томоннинг тушиши“ ҳодисасининг частотаси $\frac{1}{2}$ га яқин, „яшил нўхатнинг ҳосил бўлиши“ ҳодисасининг частотаси эса $\frac{1}{4}$ дан кам фарқ қилади. Тавсифланган бу ҳолат *ҳодиса частотасининг статистик турғунлиги* дейилади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, статистик турғунлик хоссаси амалиёт учун қизиқиш уйғотадиган кўп тасодифий ҳодисаларга мансуб экан. Частотанинг статистик турғунлиги хоссасига эга бўлган ҳодисалар махсус математик фан—эҳтимоллар назарияси фанининг ўрганиш мавзуи бўлиб ҳисобланади.

Эҳтимоллар назарияси XVII асрда Паскаль, Ферма ва Гюйгенс ишларида шаклланди, бунда унинг дастлабки тараққиёти қимор ўйинларини текшириш билан боғлиқдир. Шуни эътироф этиш керакки, эҳтимоллар назариясини ўрганиш ва татбиқ қилишда ҳозир ҳам қимор ўйинларидан кенг „фойдаланилаётганлигини“ қайд қилиб ўтишимиз керак. Гап шундаки, қимор ўйинларида учрайдиган тасодифий ҳодисалар частотанинг статистик турғунлиги хоссасига эга бўлиш билан бир қаторда бошқа афзалликларга ҳам эгадир. Улар соддалиги билан ажралиб туради, масалани у ёки бу махсус билимлар соҳасига тегишли бўлган қўшимча факторлар билан оғирлаштириб юбормай, аниқ қўйилишига имконият яратади. Ниҳоят, улар ҳосил қилинган қонуниятларни чегараланмаган миқдордаги экспериментлар ёрдамида текшириб кўриш имконини беради, чунки худди ана шу қимор ўйинларида бир тажрибанинг ўзини исталганча амалга ошириш мумкин. Шундай қилиб, қимор ўйинлари билан боғлиқ бўлган тасодифий ҳодисалар анча мураккаб, энг асосийси, анча муҳим амалий масалаларни ўрганишда қулай модель бўлиб қолди.

Эҳтимоллар назарияси ўз йўлини қимор ўйинлардан келиб чиқадиган ҳолатларни таҳлил қилишдан, соққа ташлаб ўйналадиган ўйинларга тавсиялар беришдан бошлаб, шундай фанга айландики, ҳозирда на физика, на астрономия ва на лингвистика унинг ёрдамисиз ўз муаммоларини ҳал қила олмайди. Бундан ташқари, кейинги пайтда эҳтимоллар назарияси математик статистика, информациялар назарияси, оммавий хизмат назарияси каби кўпгина янги илмий йўналишларга асос бўлди. Эҳтимоллар назариясининг математик фан сифатида шаклланишида буюк олимлар Я. Бернулли, А. Муавр, П. Лаплас, К. Гаусс, С, Пуассон катта роль ўйнадилар. Рус олимлари П. Л. Чебишев, А. А. Марков, А. М. Ляпуновлар катта ҳисса қўшдилар; совет математиги А. Н. Колмогоров эҳтимоллар назариясининг турли соҳаларида бир қатор муҳим натижаларга эришди.

Эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорларни лотин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C ва ҳ. к. лар билан, баъзан уларга индекслар қўйиб, масалан, A_1, A_m каби белгилаш қабул қилинган. „Тасодифий“ сифати қисқалик учун кўпинча айтилмайди ва оддий қилиб „ҳодиса“ деб атала берилади.

Тажриба ўтказилганда ҳар доим рўй берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* деб аталади.

Тажриба ўтказилганда рўй бермаслиги олдиндан маълум бўлган ҳодиса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади.

Агар қутида фақат оқ шарлар бўлиб, тажриба қутидан таваккалига шар олиш бўлса, у ҳолда A ҳодиса („оқ шар чиқди“) муқаррар ҳодиса бўлиб, B ҳодиса („қора шар чиқди“) мумкин бўлмаган ҳодиса бўлади. Муқаррар ҳодисаларни U ҳарфи билан, мумкин бўлмаган ҳодисаларни V ҳарфи билан белгилаймиз.

Агар A ҳодиса B ҳодиса рўй берганда ва фақат шундагина рўй берса, у ҳолда A ва B ҳодисалар *тенг кучли* (тенг) *ҳодисалар* дейилади. Тенг кучли ҳодисаларни тенг белгиси билан бирлаштирилади, яъни

$A = B$ каби ёзилади. Ўйин соққасини (шашқол тошни) ташлаш тажрибасида A ҳодиса (олти рақамли ёқ тушди) ва B ҳодиса (мумкин бўлган энг юқори номерли ёқ тушди) тенг кучлидир.

Ҳар қандай A ҳодиса учун бу A ҳодиса рўй бермаслигидан иборат бўлган ҳодисани кўриш мумкин. Бу ҳодиса A га *қарама-қарши ҳодиса* дейилади ва $\overline{A}$ билан белгиланади. Муқаррар ва мумкин бўлмаган ҳодисалар учун $\overline{U} = V$, $\overline{V} = U$ деб ҳисобланади. Агар тажриба мерганнинг нишонга қарата ўқ узишидан иборат бўлса, у ҳолда A ҳодиса (ўқ нишонга тегди) ва B ҳодиса (ўқ нишонга тегмади) бир-бирига қарама-қарши ҳодисалардир, яъни $\overline{A} = B$ ва $\overline{B} = A$.

Ҳодисалар учун қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилади.

1-таъриф. A_1 ва A_2 ҳодисаларнинг *йиғиндиси* (*бирлашмаси*) деб A_1 ва A_2 ҳодисаларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси рўй берганда юз берадиган A ҳодисага айтилади. Бу ҳолда бундай ёзилади: $A = A_1 \cup A_2$.

3-мисол. Тажриба қарталар дастасидаги таваккалига битта қарта олишдан иборат бўлсин. A_1 ҳодиса олинган қарта „мотка" („дама") бўлишидан, A_2 ҳодиса эса олинган қарта „қарға" бўлишидан иборат бўлса, у ҳолда $A = A_1 \cup A_2$ ҳодиса „мотка" ёки „қарға" қарта олинишидан иборат бўлади.

2-таъриф. A_1 ва A_2 ҳодисаларнинг *кўпайтмаси* (*кесишмаси*) деб A_1 ва A_2 ҳодисалар фақат бир вақтда рўй бергандагина юз берадиган A ҳодисага айтилади. Бу ҳолда бундай ёзилади: $A = A_1 \cap A_2$.

4-мисол. A_1 ва A_2 ҳодисалар 3-мисолда қаралган ҳодисалар бўлсин. Уларнинг кўпайтмаси $A = A_1 \cap A_2$ — дастадан қарға мотка олинишидан иборат ҳодиса бўлади.

Ҳодисаларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари учун қуйидаги қонунлар ўринли эканлигини кўриш осон:

$A \cup B = B \cup A$ — қўшишнинг коммутативлиги,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — қўшишнинг ассоциативлиги,

$A \cap B = B \cap A$ — кўпайтиришнинг коммутативлиги,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — кўпайтиришнинг ассоциативлиги,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивлик.

3-таъриф. Агар $A_1 \cap A_2 = V$ бўлса, A_1 ва A_2 ҳодисалар *биргаликда бўлмаган ҳодисалар* дейилади.

Иккита ҳодисанинг йиғиндиси ва кўпайтмаси таърифлари қўшилувчилар ва кўпайтувчилар сони исталган чекли сонга тенг бўлган ҳол учун ҳам умумлаштирилади. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ ҳодиса дейилганда $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ҳодисаларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси рўй беришидан иборат бўлган ҳодиса тушунилади. $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ ҳодиса $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ҳодисаларнинг бир вақтда рўй беришидан иборат ҳодисадир. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ҳодисалардан исталган иккитаси биргаликда бўлмаса, ҳодисалар *ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар* дейилади.

5- мисол. Ўйин соққасини ташлаш тажрибасида қуйидаги ҳодисаларни кўрайлик: A_1 (жуфт сон тушиши), A_2 (олти рақами тушиши), A_3 (иккидан катта рақам тушиши). У ҳолда $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ҳодиса 2, 3, 4, 5, 6 рақамларидан бири билан номерланган ёқнинг тушишидан иборат ҳодиса бўлади: $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ эса олти рақамли ёқнинг тушишидан иборат ҳодисадир.

6- мисол. Соққани ташлаш тажрибасида A_i ҳодиса i рақамли ёқнинг тушишидан иборат бўлсин. У ҳолда $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$ ҳодиса соққа ўзининг олтита ёғидан бири билан тушганини билдирса, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6$ ҳодиса соққа бир вақтнинг ўзида барча ёқлари билан тушганлигини билдиради. Равшанки,

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6 = U,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6 = V.$$

4- таъриф. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ҳодисаларнинг йиғиндиси муқаррар ҳодиса, яъни

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = U$$

бўлса, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ лар *ҳодисаларнинг тўлиқ системасини* ташкил этади дейилади. 5- мисолда қаралган ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этмайди. Аксинча 6- мисолдаги ҳодисалар тўлиқ системани ташкил этади, бунинг устига улар ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этади.

Машқлар

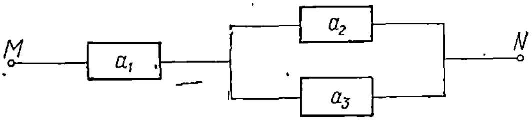
1. Нишонга қарата учта ўқ узилган. A_i ҳодиса i- ўқ узиш муваффақиятли эканини билдирсин. Қуйидаги ҳодисалар нимани билдиради:

а) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

б) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$,

в) $(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$?

2. Электр занжири ушбу расмда тасвирланган схема бўйича



тузилган. Агар B ҳодиса MN занжир ток ўтказмаслигини, A_i ($i=1, 2, 3$) ҳодиса эса a_i элемент ишдан чиққанлигини билдирса, B ва $\overline{B}$ ҳодисалар A_i ҳодисалар орқали қандай ифодаланади?

3. Нишонга қарата иккита ўқ узилди, A (ўқ нишонга тегди) ва B (ҳеч бўлмаганда битта ўқ хато кетди) ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этадими? A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўладими?

4. Шундай учта ҳодиса кўрсатингки, уларнинг ҳар иккитаси биргаликда бўлмасин, бироқ ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этсин.

2. Натижалари тенг эҳтимолли тажриба. Ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи. Бирор тажриба билан боғлиқ бўлган ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

ҳодисалар системасини қарайлик. Бу тажрибада $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ҳодисалардан ҳар бирининг рўй бериши тенг имкониятли деб фараз қиламиз, яъни бир ҳодисанинг рўй бериши бошқасига қараганда каттароқ имкониятга эга бўлишига ҳеч қандай объектив асос йўқ деб фараз қиламиз. Бундай тажрибани *натижалари тенг эҳтимолли тажриба* деб атаймиз. Бундай ҳолда $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ҳодисалар тенг эҳтимолли ва ҳар бир ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $\frac{1}{n}$ га тенг деб айтамиз. Буни қуйидагича ёзамиз:

$$P(U_1)=\frac{1}{n}, \quad P(U_2)=\frac{1}{n}, \ldots, \quad P(U_n)=\frac{1}{n}^{*)}.$$

1-мисол. Ўйин соққасини ташлаш тажрибасига қайтамиз. U_i ҳодиса соққа i рақамли ёғи билан тушишидан иборат бўлсин. Бизга маълумки,

$$U_1, U_2, \ldots, U_6$$

---

[*] $P(U_1)=\frac{1}{n}$ формула бундай ўқилади: U_1 ҳодисанинг эҳтимоли $\frac{1}{n}$ га тенг. P — инглизча „probability“ (эҳтимоллик) сўзининг биринчи ҳарфи.

ҳодисалар ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар тўлиқ системасини ташкил этади. Соққа бир жинсли ва симметрик деб ҳисоблангани учун, табиийки, тажрибанинг барча натижаларини бир хил имкониятли деб ҳисоблаш мумкин. Демак, қаралаётган тажриба натижалари тенг эҳтимолли тажрибадир, U_1, U_2, ..., U_6 ҳодисалар тенг эҳтимолли ва

$$P(U_1)=\frac{1}{6},\ P(U_2)=\frac{1}{6},\ \ldots,\ P(U_6)=\frac{1}{6}.$$

Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ва тенг эҳтимолли ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этувчи

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$$

ҳодисаларни *элементар ҳодисалар* деб атаймиз.

Энди натижалари тенг эҳтимолли тажриба билан боғлиқ бўлган A ҳодисани қарайлик. Бу A ҳодиса қандайдир k та элементар ҳодисалардан бири рўй берганда рўй бериб, қолган $n-k$ та элементар ҳодисалардан исталган бири рўй берганда рўй бермасин. A ҳодисанинг рўй беришига олиб келадиган элементар ҳодисаларни A ҳодисага *қулайлик туғдирувчи ҳодисалар* деймиз.

2-мисол. Ўйин соққаси билан боғлиқ бўлган тажрибада (1-мисолга қаранг) A ҳодисага (тушган очколар сони 3 га каррали) иккита U_3 ва U_6 элементар ҳодиса қулайлик туғдиради; B ҳодисага (туб сон тушди) U_2, U_3, U_5 қулайлик туғдиради; C ҳодисага (7 очко тушди) олтита элементар ҳодисадан ҳеч қайсиниси қулайлик туғдирмайди; D ҳодисага (тушган очколар сони 7 дан кичик) барча олтита элементар ҳодиса қулайлик туғдиради.

Изоҳ. Натижалари тенг эҳтимолли тажриба билан боғлиқ бўлган барча турли ҳодисалар сони элементар ҳодисалар тўпламининг ҳамма қисм тўпламлари сонига, яъни 2^n га тенг.

Таъриф. Натижалари тенг эҳтимолли тажриба билан боғлиқ *A ҳодисасининг $P(A)$ эҳтимоли деб* A ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонининг барча элементар ҳодисалар сонига нисбати $\frac{k}{n}$ га айтилади, яъни

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

3-мисол. 2-мисолда қаралган A, B, C, D ҳодисаларнинг эҳтимоллари бу таърифга биноан мос равишда қуйидагича бўлади:

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$P(C)=\frac{0}{6}=0,\quad P(D)=\frac{6}{6}=1.$$

Изоҳ. Ҳодисанинг эҳтимоли элементар ҳодисалар тўпламининг барча қисм тўпламлари тўпламида аниқланган сонли функциядир.

Ҳодиса эҳтимолининг келтирилган бу таърифи *эҳтимолнинг классик таърифи* дейилади.

Ҳодисанинг эҳтимоли

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

тенгсизликларни қаноатлантиради, бу бевосита таърифдан келиб чиқади, чунки $0\leqslant k\leqslant n$.

Мумкин бўлмаган V ҳодисага элементар ҳодисаларнинг ҳеч бири қулайлик туғдирмайди, шунинг учун

$$P(V)=\frac{0}{n}=0.$$

U муқаррар ҳодиса элементар ҳодисаларнинг ҳар бири рўй берганда юз беради, демак,

$$P(U)=\frac{n}{n}=1.$$

$U_i\,(i=1,2,\ \ldots,\ n)$ элементар ҳодисага фақат битта элементар ҳодиса—унинг ўзи қулайлик туғдиради, демак,

$$P(U_i)=\frac{1}{n}\quad (i=1,2,\ \ldots,\ n),$$

бу илгариги берилган таърифга мос келади.

4-мисол. Танга икки марта ташланади. Ҳеч бўлмаганда бир марта гербли томон тушишининг эҳтимоли қанча?

Бу ерда элементар ҳодисалар қуйидаги 4 ҳодиса бўлади:

U_1 — иккала ғал ҳам гербли томон тушди,

U_2 — гербли томон фақат биринчи ташлашда тушди,

U_3 — гербли томон фақат иккинчи ташлашда тушди,

U_4 — гербли томон бир марта ҳам тушмади.

A ҳодисага (гербли томоннинг ҳеч бўлмаганда бир марта тушиши)

U_1, U_2, U_3 элементар ҳодисалар қулайлик туғдиради.

Демак,

$$P(A) = \frac{3}{4}.$$

5-мисол. Абонент телефон номерини тера туриб, унинг охирги икки рақамини унутиб қўйди. Бу рақамлар ҳар хил эканлигини билган ҳолда у шу рақамларни таваккалига терди. Номер тўғри терилган бўлиш эҳтимоли қанча?

Охирги иккита рақамни A_{10}^2 усул билан териш мумкин, A ҳодисага (рақамлар тўғри терилган) эса битта усул қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

6-мисол. 100 та электр лампанинг 5 таси ишдан чиққан. Таваккалига олинган 3 та лампанинг яроқли бўлиб чиқиш эҳтимоли қанча?

100 та электр лампа ичидан 3 та лампани C_{100}^3 усул билан танлаш мумкин. 95 та яроқли лампа ичидан 3 та яроқли лампани C_{95}^3 усул билан танлаш мумкин. Демак, изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг бўлади:

$$P = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0,86.$$

Ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи ихтиёрий тасодифий ҳодисаларни ўрганиш учун яроқли бўлган универсал таъриф эмас. Бу таъриф ишни тенг имкониятли ҳодисалар чекли тўпламини текширишга олиб келишга имкон берадиган қандайдир симметрия мавжуд бўлган энг содда ҳоллар учунгина татбиқ қилиниши мумкин.

Мураккаброқ тажрибаларда турли натижаларнинг сони чексиз бўлиши билан ҳам ва натижаларнинг ўзи тенг имкониятли бўлмаслиги билан ҳам ҳисоблашишга тўғри келади. Шу сабабли эҳтимоллар назариясида классик таъриф билан бир қаторда ҳодиса эҳтимолининг бошқа таърифларидан ҳам фойдаланилади.

Статистик таъриф деб аталувчи таърифда ҳодиса эҳтимоли ҳодиса частотаси ва унинг статистик турғунлиги тушунчаларидан фойдаланиб аниқланади. Масалан, сариқ нўхатни сариқ нўхат билан чатиштиришда

(1- пунктдаги 2- мисолга қаранг) „яшил нўхатнинг ҳосил бўлиши“ ҳодисасининг эҳтимоли учун $\frac{1}{4}$ га тенг сон қабул қилинади, чунки тажрибаларнинг кўрсатишича қаралаётган ҳодисаларнинг частотаси худди ана шу сон атрофида группаланади.

Ҳозирги замон математика курсларида эҳтимол аксиоматик йўл билан — $\{A\}$ ҳодисалар тўпламида аниқланган ва қуйидаги учта аксиомани қаноатлантирадиган $P(A)$ функция сифатида аниқланади:

1. Ихтиёрий A ҳодиса учун $P(A) \geqslant 0$ тенгсизлик ўринли;
2. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг;
3. Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг.

Машқлар

5. Қутида 3 та оқ, 4 та қора ва 5 та қизил шар бор. Ундан таваккалига олинган шарнинг: а) оқ; б) қора; в) сариқ; г) қизил бўлиш эҳтимоли қанча?

6. Иккита ўйин соққаси ташланяпти. Иккала соққада тушган очколар йиғиндисининг 8 га тенг бўлиш эҳтимоли қанча?

7. 50 та лотерея билетининг 8 таси ютуқли. Таваккалига олинган биринчи бешта билетнинг иккитаси ютуқли бўлиш эҳтимоли қанча?

8. Баскетбол биринчилигида 18 та команда қатнашяпти. Шулардан иккитаси юқори классли командалар. Ўйинларнинг умумий сонини камайтириш мақсадида командалар қуръа ташлаш йўли билан иккита тенг группага ажратилади. Юқори классли иккита команданинг:

а) бошқа - бошқа группаларда бўлиб қолиш;

б) битта группага тушиб қолиш эҳтимоли қанча?

29- §. Эҳтимоллар назариясининг асосий теоремалари ва уларнинг натижалари

1. Қўшиш теоремаси. Юқорида қаралган мисолларда ҳодисаларнинг эҳтимоли бевосита таърифдан фойдаланиб ҳисобланди. Афсуски, бу йўл фақат энг содда ҳоллардагина натижага олиб келади. Одатда эса барча элементар ҳодисаларни ва уларнинг ичидан қулайлик туғдирувчиларни тўғридан - тўғри санаб чиқиш ноқулай бўлиб чиқади, баъзан эса ўта мураккаблиги сабабли амалий жиҳатдан мумкин бўлмайди. Агар ҳодисаларнинг эҳтимоллари орасидаги боғланишларни кўрсатадиган теоремалардан фойдаланилса, ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблашни анча соддалаштириш мумкин

1- теорема. *Биргаликда бўлмаган иккита ҳодиса йиғиндисининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг, яъни*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Исбот. A ҳодисага k та элементар ҳодиса қулайлик туғдирсин, B ҳодисага эса l та элементар ҳодиса қулайлик туғдирсин. Бироқ A ва B ҳодисалар биргаликда эмас, шунинг учун $U_i(i=1, 2, \ldots, n)$ элементар ҳодисалар ичида бир вақтнинг ўзида ҳам A ҳодисага, ҳам B ҳодисага қулайлик туғдирадиганлари йўқ. Демак, $A \cup B$ ҳодисага роппа-роса $k+l$ та элементар ҳодиса қулайлик туғдиради. Эҳтимолнинг таърифига кўра

$$\mathrm{P}(A)=\frac{k}{n}, \qquad \mathrm{P}(B)=\frac{l}{n}, \qquad \mathrm{P}(A \cup B)=\frac{k+l}{n},$$

бу ердан теореманинг даъвоси келиб чиқади. Теоремани исботлашда ҳодисаларнинг биргаликда эмаслигидан тўла фойдаланганимизни қайд қилиб ўтамиз.

Бу теорема *биргаликда бўлмаган ҳодисаларни қўшиш теоремаси* дейилади.

1-натижа. *Қарама-қарши ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндиси бирга тенг, яъни*

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A})=1. \tag{2}$$

A ва $\overline{A}$ ҳодисалар биргаликда бўлмагани учун уларга қўшиш теоремасини қўлланиш мумкин:

$$\mathrm{P}(A \cup \overline{A})=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A}).$$

$A \cup \overline{A}$ ҳодиса муқаррар эканлигини ва шунинг учун $\mathrm{P}(A \cup \overline{A})=1$ бўлишини эътиборга олиб, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A})=1$ ни ҳосил қиламиз.

1-изоҳ. Амалда кўпинча шундай ҳолга дуч келинадики, бунда ҳодиса эҳтимолини ҳисоблашда унга қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш осонроқ бўлиб чиқади. Бундай ҳолларда $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})$ формуладан фойдаланиш тавсия этилади.

2-изоҳ. (2) формулани қўшиш теоремасининг натижаси сифатида эмас, балки бевосита ушбу фактдан фойдаланиб ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. Агар A ҳодисага k та элементар ҳодиса қулайлик туғдирса, у ҳолда $\overline{A}$ ҳодисага қолган барча $n-k$ та элементар ҳодиса қулайлик туғдиради.

Қуйидаги теорема қўшиш теоремасининг ҳодисалар сони исталган чекли сон бўлган ҳолга умумлашмасидир.

2-теорема. *Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг, яъни*

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\ldots+\mathrm{P}(A_m). \tag{3}$$

Бу теореманинг исботи қўшилувчилар сони иккита бўлган ҳолдаги исботга ўхшаш.

2-натижа. *Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла системасини ташкил этувчи ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндиси бирга тенг.*

Исбот. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ҳодисалар ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла системасини ташкил этсин. У ҳолда бу ҳодисаларнинг ҳар иккитаси биргаликда бўлмагани учун уларга қўшиш теоремасини татбиқ қилиш мумкин:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_m).$$

Иккинчи томондан, ҳодисалар тўла система ташкил қилгани учун уларнинг йиғиндиси муқаррар ҳодисадир:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \mathrm{U}.$$

$\mathrm{P}(\mathrm{U}) = 1$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_m) = 1.$$

Иккита ҳодиса бўлган ҳолда қўшиш теоремаси бошқача йўналишда ҳам умумлаштирилади. Агар ҳодисаларнинг албатта биргаликда бўлмаслик талабидан воз кечилса, янада умумийроқ теоремани исбот қилиш мумкин, юқорида исбот қилинган 1-теорема эса бу ердан хусусий ҳол сифатида келиб чиқади.

3-теорема. *Исталган иккита ҳодиса йиғиндисининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисидан уларнинг кўпайтмаси эҳтимолини айирилганига тенг, яъни*

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B). \qquad (4)$$

Исбот. Айтайлик, A ҳодисага k та элементар ҳодиса, B ҳодисага l та элементар ҳодиса қулайлик туғдирсин ва q та элементар ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришига қулайлик туғдирсин. Агар барча элементар ҳодисалар сони n га тенг бўлса, у ҳолда эҳтимолнинг таърифига кўра:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{l}{n}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{q}{n}.$$

Бу ҳолда $A \cup B$ ҳодисага $k+l-q$ та элементар ҳодиса қулайлик туғдиришини кўриш осон, бинобарин,

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{k+l-q}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{h} - \frac{q}{n} =$$
$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B),$$

яъни (4) формула ўринлидир.

Хусусий ҳолда ҳодисалар биргаликда бўлмаганда, яъни $A \cap B = V$ бўлганда $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ бўлиб, юқорида исбот қилинган 1-теорема ҳосил бўлади.

2. Шартли эҳтимол. Кўпайтириш теоремаси. Ҳодисаларнинг эрклилиги. Энг оддий кузатишлар шуни кўрсатадики, айрим ҳолларда бир ҳодисанинг рўй бериши бошқа ҳодисанинг рўй бериш-бермаслигига ҳеч бир таъсир этмайди, бошқа ҳолларда, аксинча, бир ҳодисанинг рўй бериши иккинчи бир ҳодисанинг рўй бериши эҳтимолини сезиларли даражада ўзгартириб юборади.

Масалан, тангани икки марта ташлаш тажрибасида A ҳодисанинг (гербли томон тангани иккинчи марта ташлашда тушди) эҳтимоли B ҳодисанинг (гербли томон тангани биринчи ташлашда тушди) рўй бериш-бермаслигига мутлақо боғлиқ эмас. Битта оқ ва битта қора шар бўлган қутидан шарларни олиш (қайтариб қўймасдан) тажрибасида A (биринчи бўлиб олинган шар оқ шар) ва B (иккинчи бўлиб олинган шар оқ шар) ҳодисалар ўртасидаги муносабат мутлақо бошқачадир: агар A рўй берса, у ҳолда B рўй бера олмайди. Бу ҳолда бир ҳодисанинг рўй бериши иккинчи бир ҳодисанинг рўй бермаслигига олиб келади.

Бирор тажриба билан боғлиқ бўлган A ва B ҳодисаларни қарайлик. Айтайлик, B ҳодисага l та элементар ҳодиса, $A \cap B$ ҳодисага эса q та элементар ҳодиса қулайлик туғдирсин. $\frac{q}{l}$ нисбат, яъни $A \cap B$ ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонининг B ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонига нисбати A ҳодисанинг B шартдаги *шартли эҳтимоли* дейилади ва бундай белгиланади: $\mathrm{P}(A/B)$.

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{q}{l}.$$

Бу таърифни мисол орқали тушунтирамиз. Тажриба ўйин соққасини бир марта ташлашдан иборат бўлсин. B ҳодиса—тушган очколар сони жуфт, A ҳодиса—олти очко тушган. Бу ҳолда B ҳодисага 3 та элементар ҳодиса қулайлик туғдиради ($l = 3$), $A \cap B$ ҳодисага эса фақат битта элементар ҳодиса қулайлик туғдиради ($q = 1$). Демак, A ҳодисанинг B шартдаги шартли эҳтимоли $\frac{q}{l} = \frac{1}{3}$ га тенг бўлади.

Қуйидагига эътибор беринг: A ҳодисанинг $P(A)$ эҳтимоли тажриба натижаси тўғрисида бирон-бир қўшимча маълумот бўлмаганда, равшанки, $\frac{1}{6}$ га тенг.

Агар ўйин соққасини ташлашда жуфт сондаги очколар тушганлиги (B ҳодиса рўй берди) маълум бўлса, у ҳолда бу шартда A ҳодисанинг эҳтимоли $\frac{1}{3}$ га тенг деб олинади, яъни $P(A/B)=\frac{1}{3}$.

4- теорема. $P(A/B)$ шартли эҳтимол учун ушбу формула ўринли:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

(1) формула шартли эҳтимол формуласи дейилади.

Исбот. Айтайлик, B ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони l бўлиб, $A\cap B$ ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони q бўлсин. У ҳолда

$$P(A/B)=\frac{q}{l}.$$

ёки

$$P(A/B)=\frac{\frac{q}{n}}{\frac{l}{n}},$$

бу ерда n—барча элементар ҳодисалар сони. Энди

$$\frac{q}{n}=P(A\cap B) \text{ ва } \frac{l}{n}=P(B)$$

ни эътиборга олиб, (1) формулани ҳосил қиламиз.

Худди шундай, B ҳодисанинг A шартдаги шартли эҳтимоли учун

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad (2)$$

формулани ҳосил қилиш мумкин.

(1) ва (2) формулаларни қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A/B). \quad (3)$$

Бу формула исталган иккита ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимолини бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари ва шартли эҳтимоллари орқали ифодасини беради. Шундай қилиб, кўпайтириш теоремаси деб аталувчи ушбу теорема исбот қилинди.

5- теорема. *Исталган иккита ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимоли бу ҳодисалардан бирининг эҳтимолини иккинчи ҳодисанинг биринчи ҳодиса рўй берди деган шартдаги шартли эҳтимолига кўпайтирилганига тенг.*

Шартли эҳтимол тушунчасидан фойдаланиб, муҳим бўлган иккита ҳодисанинг эрклилиги тушунчасини киритиш мумкин.

Таъриф. Агар A ҳодисанинг B шартдаги шартли эҳтимоли A нинг эҳтимолига тенг, яъни агар $P(A/B) = P(A)$ бўлса, A ҳодиса B ҳодисадан эркли дейилади.

Акс ҳолда, яъни

$$P(A/B) \neq P(A)$$

бўлса, A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ дейилади.

Ушбу

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

тенгликдан ((3) формулага қаранг) келиб чиқадики, агар A ҳодиса B ҳодисадан эркли, яъни $P(A/B) = P(A)$ бўлса, у ҳолда $P(B/A) = P(B)$, яъни B ҳодиса ҳам A ҳодисадан эркли бўлади. Шундай қилиб, эрклилик хоссаси ўзаро экан.

1-мисол. 36 картали дастадан таваккалига битта карта олинади. A (туз карта чиқиши) ва B (қизил „холли“ карта чиқиши) ҳодисалар эркли ҳодисалар бўладими?

Жами 36 та элементар ҳодисадан A ҳодисага 4 таси қулайлик туғдиради, шунинг учун $P(A) = 4/36=1/9$. Агар B ҳодиса рўй берган бўлса, бу 18 та элементар ҳодисадан биттаси рўй берганини билдиради, бу ҳодисалар ичидан иккитаси A га қулайлик туғдиради, демак, $P(A/B) = 2/18 = 1/9$.

Шундай қилиб,

$$P(A/B) = P(A),$$

яъни A ва B ҳодисалар эркли ҳодисалардир.

Машқлар

1. Агар A ва B ҳодисалар эркли бўлса, у ҳолда A ва $\overline{B}$ ҳодисалар ҳам эркли бўлишини исботланг.
2. Агар A ва B ҳодисалар эркли бўлса, у ҳолда $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ ҳодисалар ҳам эркли бўлишини исботланг.

Кўпайтириш теоремасидан хусусий ҳол сифатида эркли ҳодисалар учун кўпайтириш теоремаси келиб чиқади.

6-теорема. *Иккита эркли ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг:*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B). \tag{4}$$

Ҳақиқатан ҳам, агар A ва B эркли ҳодисалар бўлса, у ҳолда $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$ бўлиб, (3) формула (4) формулага айланади.

6-теорема *иккита эркли ҳодиса учун кўпайтириш теоремаси* дейилади.

Бу ерда бир муҳим савол туғилади: 6-теоремани ҳодисалар сони исталган чекли сон бўлган ҳолга умумлаштириш мумкинми ва мумкин бўлса, буни қандай қилиб қилиш мумкин? Қандай шартларда учта ва ундан ортиқ ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоли бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг бўлишини билиш қизиқиш уйғотади. Дастлаб қуйидаги таърифни берамиз.

Таъриф. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m > 2)$ ҳодисаларнинг исталган иккитаси эркли бўлса, у ҳолда улар *ҳар иккитаси эркли ҳодисалар* дейилади.

Ҳар иккитаси эркли ҳодисалар бўлган ҳолда уларнинг кўпайтмасининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг бўлиши шарт деб айтиш мумкинми? Қуйидаги мисол бундай деб айтиш мумкин эмаслигини кўрсатади.

2-мисол. Қутида 4 та: қизил, сариқ, яшил ва бу уч рангга бўялган яна битта шар бор. Қутидан шар олиняпти. Қуйидаги ҳодисаларни қарайлик:

A (қизил рангли шар олинган),
B (сариқ рангли шар олинган),
C (яшил рангли шар олинган).

A, B, C ҳодисалар ҳар иккитаси эркли ҳодисаларми? Бу тажрибада элементар ҳодисалар, равшанки, тўрттадир:

U_1—қизил рангли шар олинган,
U_2—сариқ рангли шар олинган,
U_3—яшил рангли шар олинган,
U_4—учала рангга бўялган шар олинган.

A ҳодисага U_1 ва U_4 қулайлик туғдиради, шунинг учун $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. A ҳодисанинг B шартдаги шартли эҳтимолини ҳисоблаймиз. Агар B ҳодиса рўй берган бўлса, бу U_2 ёки U_4 ҳодисалар рўй берди деган сўздир, буларнинг ичидан фақат U_4 ҳодиса A га қулайлик туғдиради.

Бинобарин, $P(A/B) = \frac{1}{2}$. Шундай қилиб, A ва B ҳодисалар эркли. Равшанки, худди шундай

$$P(B) = P(B/C) = \frac{1}{2} \text{ ва } P(C) = P(C/A) = \frac{1}{2}$$

ни ҳосил қилиш мумкин ва қолган ҳодисалар жуфтлари B ва C, C ва A нинг эрклилигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб, A, B, C ҳодисалар ҳар иккитаси эркли ҳодисалардир.

Бу ҳодисалар учун

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$

формула ўринли бўладими? Ўринли бўлмаслиги равшан, чунки $P(A)\ P(B)\ P(C) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$. Чунки $A \cap B \cap C$ ҳодисага фақат U_4 элементар ҳодиса қулайлик туғдиради.

(4) формулани ҳодисалар сони учта ва ундан ортиқ бўлган ҳоллар учун умумлаштириш учун янги тушунча—биргаликда эрклилик тушунчасини киритиш керак.

Таъриф. Агар A_1, A_2, . . . , $A_m (m > 2)$ ҳодисаларнинг ҳар бири ва қолган ҳодисаларнинг исталган сондагисининг кўпайтмасидан иборат бўлган ҳодиса эркли бўлса, бу ҳодисалар *биргаликда эркли ҳодисалар* дейилади.

Ҳар иккитаси эркли ҳодисалар ва биргаликда эркли ҳодисалар тушунчалари орасидаги фарқни учта ҳодиса мисолида тушунтирамиз. A, B, C ҳодисалар ҳар иккитаси эркли ҳодисалар бўлиши учун A ва B, B ва C, C ва A ҳодисалар эркли бўлиши керак. Бу ҳодисалар биргаликда эркин ҳодисалар бўлиши учун бундан ташқари яна ушбу уч жуфт:

$$A \text{ ва } B \cap C, \ B \text{ ва } C \cap A, \ C \text{ ва } A \cap B$$

ҳодисанинг эркли бўлиши талаб қилинади. Биргаликда эркли бўлиш талаби ҳар иккитаси эркли бўлиш талабидан кучлироқдир. 2-мисолда қаралган ҳодисалар юқорида исботланганига кўра ҳар иккитаси эркли ҳодисалар бўлиб, бироқ биргаликда эркли ҳодисалар эмас. Ҳақиқатан ҳам, A ва $B \cap C$ ҳодисалар боғлиқ, чунки агар $B \cap C$ ҳодиса рўй берган бўлса, бу U_4 элементар ҳодиса рўй берганини билдиради, бунда эса A ҳодиса албатта рўй беради, яъни

$$P(A/B \cap C) = 1,$$

демак,

$$P(A) \neq P(A/B \cap C).$$

7-теорема. *Учта биргаликда эркли ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг, яъни*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C). \qquad (5)$$

Исбот. $B \cap C = D$ деймиз ва A, D ҳодисалар эркли бўлгани учун 6-теоремага кўра бундай ёза оламиз:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap D) = P(A)\,P(D),$$

бироқ B ва C ҳам эркли, шунинг учун

$$P(D) = P(B \cap C) = P(B)\,P(C).$$

$P(D)$ ни биринчи формулага қўйиб, теореманинг даъвосини ҳосил қиламиз.

Келтирилган исботдан шу нарса равшан бўлиши керакки, математик индукция методи ёрдамида исталган чекли сондаги биргаликда эркли ҳодисалар учун тегишли кўпайтириш теоремасини исботлаш осон.

Изоҳ. Бу ерда қўшиш ва кўпайтириш теоремалари натижалари тенг эҳтимолли тажрибалар учун исбот қилинди. Бироқ ҳосил қилинган ҳамма формулалар анча мураккаб ҳолларда — эҳтимолнинг классик таърифи етарли бўлмай, статистик ёки аксиоматик таърифларга мурожаат қилишга тўғри келадиган ҳолларда ҳам ўз кучини сақлайди, Эҳтимоллар назариясини аксиоматик қуришда, юқорида айтилганидек, 1-пунктдаги (1) формула аксиома сифатида қабул қилинади, шу муносабат билан уни эҳтимолларни қўшиш теоремаси дейилади. (1) ва (4) формулалар орқали шартли эҳтимол ва ҳодисаларнинг эрклилиги тушунчалари киритилади.

Қуйида келтириладиган мисолларда исбот қилинган теоремалардан турли ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблашда фойдаланилади.

3-мисол. ОТК буюмлар партиясининг ярмини текширади ва агар текширилган буюмлар ичидан яроқсизлари биттадан ортиқ бўлмаса, бутун партияни яроқли деб топади. 20 та буюмдан иборат партияда 2 та яроқсиз буюм бўлса, бу партиянинг яроқли деб топилиш эҳтимоли қанча?

A ҳодиса текшириладиган буюмлар орасида яроқсизлари йўқлигидан, *B* ҳодиса эса текшириш учун ажратилган буюмлар орасида битта яроқсизи бўлишдан иборат ҳодисалар бўлсин. Агар $A \cup B$ ҳодиса рўй берса, буюмлар партияси яроқли деб топилади. *A* ва *B* ҳодисалар биргаликда эмас, бинобарин, ушбу формула ўринлидир:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

A ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаймиз. 20 та буюм ичидан текшириш учун 10 та буюмни C_{20}^{10} усул билан танлаш мумкин. Яроқли буюмлар орасидан 10 та буюмни C_{18}^{10} усул билан танланади. Шунинг учун:

$$P(A) = \frac{C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{18!\,10!}{8!\,20!} = \frac{10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{38}.$$

B ҳодиса учун қулайлик туғдирувчи натижалар $C_{18}^{9} \cdot C_{2}^{1}$ га тенг (9 та яроқли ва битта яроқсиз буюмларни танлаш усуллар сони), шунинг учун:

$$P(B) = \frac{C_{18}^{9} C_{2}^{1}}{C_{20}^{10}} = \frac{18!\,10!\,10!\,2}{9!\,9!\,20!} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{20}{38}.$$

Биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасига биноан:

$$P(A \cup B) = \frac{9}{38} + \frac{20}{38} = \frac{29}{38}.$$

4-мисол. 36 картали дастадан таваккалига битта карта олинади. „Қарға“ ёки „туз“ чиқиш эҳтимоли қанча?

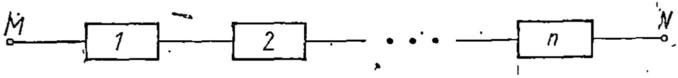
A (қарға олинди) ва *B* (туз олинди) ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар эмас. Шу сабабли $A \cup B$ ҳодисанинг изланаётган эҳтимолини ҳисоблаш учун

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

формуладан фойдаланамиз.

A, *B* ва $A \cap B$ ҳодисаларнинг эҳтимоллари осонликча ҳисобланади:

$$P(A) = \frac{1}{4},\quad P(B) = \frac{1}{9},\quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$



Шундай қилиб,

$$P(A \cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}.$$

5-мисол. Электр занжирининг бир қисми кетма-кет уланган n та элементдан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири бошқасига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлайди. Ҳар бир элементнинг маълум вақт давомида ишдан чиқмаслик эҳтимоли („ишончлилиги“) маълум: p_1, p_2, $\ldots$, p_n. Бутун занжирнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимолини (занжирнинг ишончлилигини) топинг.

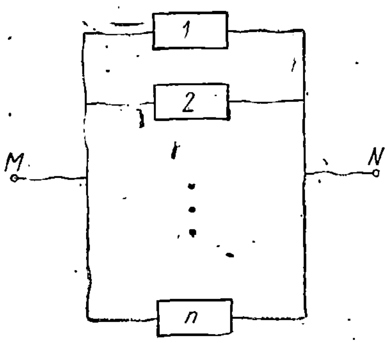
A_i орқали i-элементнинг бузилмай ишлашидан иборат ҳодисани, A орқали эса бутун занжирнинг нормал ишлашидан иборат ҳодисани белгилаймиз. У ҳолда

$$A=A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

ва A_i ҳодисалар биргаликда эркли ҳодисалар бўлгани учун

$$P(A)=P(A_1)\,P(A_2)\,\ldots\,P(A_n)=p_1 p_2 \ldots p_n.$$

6-мисол. Электр занжири участкаси параллел уланган n та элементдан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири бошқасига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлайди. Ҳар бир элементнинг маълум вақт ичида ишдан чиқмаслик эҳтимоли маълум: p_1, p_2, $\ldots$, p_n. Занжирнинг бузилмай ишлаш эҳтимолини (занжирнинг ишончлилигини) аниқланг.



A_i ва A лар 5-мисолда қаралган ҳодисалар бўлсин. A ҳодисанинг эҳтимолини аниқлаш учун дастлаб $\bar{A}$ ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаб олиш қулайдир. Қуйидагини кўриш осон:

$$\bar{A}=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n,$$

чунки занжирнинг барча элементлари ишдан чиққанда ва фақат шунда занжир ишдан чиқади. Масала шартига кўра A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ ҳодисалар биргаликда эркли ҳодисалардир, демак, $\overline{A}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ҳодисалар ҳам биргаликда эркли ҳодисалардир. Биргаликда эркли ҳодисаларни кўпайтириш теоремасига биноан

$$\mathrm{P}(\overline{A})=\mathrm{P}(\overline{A}_1)\,\mathrm{P}(\overline{A}_2)\ldots\mathrm{P}(\overline{A}_n)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$1-\mathrm{P}(A)=(1-\mathrm{P}(A_1))\,(1-\mathrm{P}(A_2))\ldots(1-\mathrm{P}(A_n)),$$

демак,

$$\mathrm{P}(A)=1-(1-p_1)\,(1-p_2)\ldots(1-p_n).$$

7-мисол. Юқоридаги схема қаралади, фақат бу ерда энди $p_1=p_2=\ldots=p_n=p=0{,}7$ деб олинади. Занжирнинг ишончлилиги 0,99 дан юқори бўлиши учун электр занжири участкасида нечта элемент бўлиши керак?

Олдинги мисолда топилган натижага кўра $\mathrm{P}(A)=1-(1-p)^n$. Элементларнинг сони n учун

$$1-(1-p)^n>0{,}99$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликни ечиб, n ни топамиз:

$$(1-p)^n<0{,}01,$$

$$n\lg(1-p)<\lg 0{,}01=-2,$$

$$n>-\frac{2}{\lg(1-p)}.$$

Агар $p=0{,}7$ бўлса, у ҳолда $n>-\frac{2}{\lg 0{,}3}\approx 3{,}8$, яъни бу ҳолда занжир участкасида 4 дан кам бўлмаган сондаги элемент бўлиши керак.

8-мисол. 4 та соққани бир марта ташлаганда камида бир марта олти рақами тушиш эҳтимоли 2 та соққани 24 марта ташлаганда камида бир марта иккита олти рақами тушиш эҳтимолидан катта эканини кўрсатинг. (Масалани XVII асрда Де Мере исмли шахс Паскалга таклиф қилган ва шу сабабли масала унинг номи билан юритилади. Де Мере ўйнаганида тавсифланган ҳодисаларни тенг эҳтимолли деб нотўғри фикр юритган.)

A ҳодиса 4 та соққани ташлаганда уларнинг камида бирида олти рақами тушишидан иборат бўлсин. Дастлаб $\bar{A}$ ҳодисанинг эҳтимолини топамиз. $\bar{A}$ ҳодиса биргаликда эркли ҳодисалар бўлган қуйидаги тўртта ҳодиса бир вақтда рўй берганда содир бўлади: олти рақами биринчи соққада тушмади, иккинчи соққада тушмади, учинчи соққада тушмади ва тўртинчи соққада ҳам тушмади. Бу ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимоли $\frac{5}{6}$ га тенг, улар кўпайтмасининг эҳтимоли биргаликда эркли ҳодисалар учун кўпайтириш теоремасига кўра $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ га тенг, яъни $P(\bar{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^4$, бинобарин,

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}52.$$

Иккита соққани 24 марта ташлаганда камида бир марта иккита олти рақами тўшишидан иборат B ҳодисанинг эҳтимоли ҳам худди шундай ҳисобланади. Иккита олти рақамининг тушмаслик эҳтимоли биринчи ташлашда $\frac{35}{36}$ га, биринчи ва иккинчи ташлашда $\left(\frac{35}{36}\right)^2$ га, 24 ташлашда эса $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ га тенг, яъни $P(\bar{B})=$ $=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ ва у ҳолда

$$P(B)=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}49.$$

Машқлар

3. Ҳар бирининг нишонга теккизиш эҳтимоли мос равишда 0,7 ва 0,8 бўлган икки мерган биттадан ўқ узади.

а) камида битта ўқнинг нишонга тегиш;

б) битта ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини аниқланг.

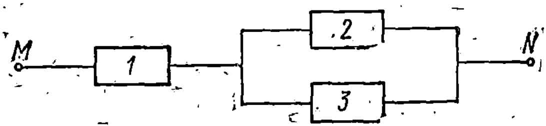
4. Студент программанинг 25 саволидан 20 тасини билади. Студент имтиҳон олувчи берадиган иккита саволни билиш эҳтимолини ҳисобланг.

5. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар ҳар иккитаси эркли ҳодисалар бўлиши мумкинми?

6. Ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этувчи ҳодисалар биргаликда эркли ҳодисалар бўладими?

7. Тажриба тангани икки марта ташлашдан иборат. Қуйидаги ҳодисаларни қаранг: A (гербли томон биринчи ташлашда тушди, B (гербли томон камида бир марта тушди), C (гербли томон иккинчи ташлашда тушди). A ва B, B ва C, C ва A ҳодисалар жуфтлари боғлиқ ёки эркли эканлигини аниқланг.

8. Иккита ўйин соққаси ташланяпти. Қуйидаги ҳодисаларни қаранг:



A—биринчи соққада тоқ сондаги очколар чиқди,

B—иккинчи соққада тоқ сондаги очколар чиқди,

C—иккала соққада чиққан очколар йиғиндиси тоқ.

A, *B*, *C* ҳодисалар ҳар иккитаси эркли ҳодисалар бўладими, улар биргаликда эркли ҳодисалар бўладими?

9. Ишчи 3 та станокни бошқаради, бу станокларнинг ҳар бири қолган иккитасига боғлиқ бўлмасдан ишлайди. Смена давомида станокларнинг ишчининг аралашувини талаб этмаслик эҳтимоллари мос равишда $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}2$.

Смена давомида камида битта станок ишчининг аралашувини талаб қилиш эҳтимолини топинг.

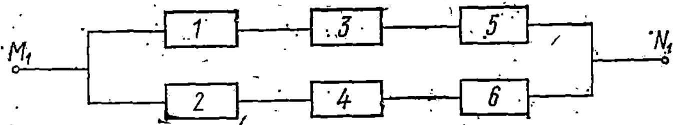
10. Электр занжири участкаси учта элементдан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири қолган иккитасига боғлиқ бўлмай ишлайди. Элементларнинг маълум вақт ичида ишдан чиқмаслик эҳтимоллари мос равишда $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = p_3 = 0{,}7$. Бутун участканинг нормал ишлаш эҳтимолини аниқланг.

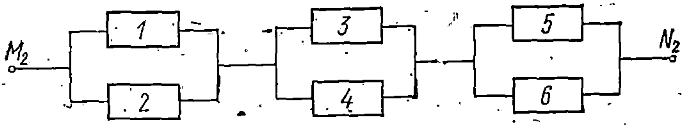
11. Иккита электр занжири участкаси расмда тасвирланган схемалар бўйича тузилган. Ҳар бир элемент бошқаларига боғлиқсиз ишлайди ва маълум вақт оралиғида p эҳтимол билан ишдан чиқмайди. Ҳар бир участканинг нормал ишлаш эҳтимолини топинг. Занжирнинг қайси участкаси ишончлироқ?

12. Телевизор 12 лампали. Ҳар бир лампа бошқаларига боғлиқсиз ишлайди ва йил давомида p эҳтимол билан ишдан чиқмайди. Йил давомида камида битта лампанинг ишдан чиқиш эҳтимоли қанча?

13. Олти рақами камида бир марта 0,9 дан катта эҳтимол билан тушиши учун ўйин соққасини неча марта ташлаш керак?

14. 2 та оқ ва 4 та қора шар бўлган қутидан икки киши галма-гал биттадан шар олади. Ҳар бир киши учун биринчи бўлиб оқ шар олиш эҳтимолини аниқланг.





3. Тўла эҳтимол формуласи. Қўшиш ва кўпайтириш теоремаларининг натижаси муҳим формула бўлиб, у тўла эҳтимол формуласи деб аталади. Бу формуладаң турли масалаларни ечишда кўпинча фойдаланилади.

Айтайлик, H_1, H_2, ... ; H_n лар бирор тажриба билан боғлиқ ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла системаси бўлсин, A эса ўша тажриба билан боғлиқ бўлган иҳтиёрий ҳодиса бўлсин. Равшанки, ихтиёрий A ҳодиса учун

$$A = A \cap U$$

тенглик ўринлидир. Иккинчи томондан, ҳодисаларнинг тўла системаси таърифига биноан

$$U = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n,$$

шунинг учун

$$A = A \cap (H_1 \cup H_2 U \ldots \cup H_n).$$

Бу муносабатни дистрибутивлик қонунидан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Агар H_1, H_2, ... , H_n ҳодисалар ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, $A \cap H_1$, $A \cap H_2$, ... , $A \cap H_n$ ҳодисалар ҳам ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлишини исботлаш осон. Ҳақиқатан ҳам, исталган i ва $j (i \neq j)$ лар учун:

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (A \cap A)(H_i \cap H_j) = A \cap V = V.$$

Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасига мувофиқ қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap H_1) + \mathrm{P}(A \cap H_2) + \ldots + \mathrm{P}(A \cap H_n)$$

ёки қисқача ёзсак,

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap H_i).$$

Бироқ кўпайтириш теоремасига кўра

$$\mathrm{P}(A \cap H_i) = \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A \mid H_i).$$

демак,

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A \mid H_i). \quad (1)$$

Бу *тўла эҳтимол формуласидир.* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларни одатда *гипотезалар* дейилади. (1) формуладан A ҳодисанинг эҳтимолини бевосита топиш қийин бўлиб, $\mathrm{P}(A|H_i)$ шартли эҳтимолларни ва гипотезаларнинг $\mathrm{P}(H_i)$ эҳтимолларини ҳисоблаш осон бўлган ҳолларда фойдаланилади.

1-мисол. 50 та деталнинг 18 таси биринчи цехда, 20 таси иккинчи цехда, қолганлари учинчи цехда тайёрланган. Биринчи ва учинчи цехлар 0,9 эҳтимол билан, иккинчи цех эса 0,6 эҳтимол билан аъло сифатли маҳсулот ишлаб чиқарадилар. Таваккалига олинган деталнинг аъло сифатли бўлиш эҳтимоли қанча?

A ҳодиса аъло сифатли деталь танланганлигидан иборат ҳодиса бўлсин H_1, H_2, H_3 орқали танланган деталь мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи цехда тайёрланганлигидан иборат ҳодисаларни (гипотезаларни) белгилаймиз. Гипотезаларнинг эҳтимоллари осонликча топилади:

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{18}{50},\ \mathrm{P}(H_2)=\frac{20}{50},\ \mathrm{P}(H_3)=\frac{12}{50}.$$

A ҳодисанинг H_1, H_2 ёки H_3 гипотезалар ўринли деган шарт остидаги шартли эҳтимоллари масала шартида берилган, яъни

$$\mathrm{P}(A|H_1)=0{,}9,\quad \mathrm{P}(A|H_2)=0{,}6,\quad \mathrm{P}(A|H_3)=0{,}9.$$

Тўла эҳтимол формуласига кўра изланаётган эҳтимолни топамиз:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1)+\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)+\mathrm{P}(H_3)\mathrm{P}(A|H_3)=$$
$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{18}{50}+\frac{6}{10}\cdot\frac{20}{50}+\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{50}=\frac{39}{50}=0{,}78.$$

2-мисол. Студент Каримов имтиҳон билетларидан баъзиларини билмайди. Унинг учун қайси бири қулай: биринчи бўлиб жавоб беришми ёки иккинчи бўлибми? Каримов биладиган билетларни „яхши“ билетлар деб атайлик. Билетларнинг жами сони n, „яхши“ билетлар сони k га тенг ($k < n$) бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда A ҳодисанинг (Каримовга „яхши“ билет чиқди) эҳтимоли у биринчи бўлиб жавоб берганда $\mathrm{P}(A)=$ $=\frac{k}{n}$ га тенг бўлади. Каримов иккинчи бўлиб жавоб берганда A ҳодисанинг эҳтимолини аниқлаш учун ушбу иккита гипотезани қараймиз: H_1 (Каримовдан олдин жавоб берган студентга „яхши“ билет чиққан) ва H_2

(биринчи бўлиб жавоб берган студентга „ёмон“ билет чиққан). H_1 ва H_2 гипотезаларнинг эҳтимоллари қуйидагига тенг:

$$P(H_1)=\frac{k}{n} \quad \text{ва} \quad P(H_2)=\frac{n-k}{n}.$$

A ҳодисанинг H_1 гипотеза ўринли бўлиши шарти остидаги шартли эҳтимоли

$$P(A|H)_1=\frac{k-1}{n-1}$$

га тенг.

Агар иккинчи гипотеза ўринли бўлиб чиқса, A ҳодисанинг шартли эҳтимоли

$$P(A|H_2)=\frac{k}{n-1}$$

га тенг бўлади.

Тўла эҳтимол формуласига кўра топамиз:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=$$
$$=\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1}=\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n-1}(k-1+n-k)=\frac{k}{n}.$$

Шундай қилиб, „яхши“ билетнинг чиқиш эҳтимоли ҳар иккала ҳолда ҳам бир хил, яъни Каримовнинг биринчи ёки иккинчи бўлиб жавоб беришига боғлиқ эмас экан.

Машқлар

15. Асбоб икки: қулай ва ноқулай режимда ишлайди, шу билан бирга асбобнинг қулай режимда ишлаши барча ҳолларнинг 80% ини ташкил қилади. Бир соат давомида ишлаганда асбобнинг ишдан чиқиш эҳтимоли қулай режимда 0,1 га, ноқулай режимда эса 0,7 га тенг. Асбобнинг бир соат давомида тўхтовсиз ишлаш эҳтимолини аниқланг.

16. Учта станок бутун маҳсулотнинг мос равишда 50%, 30% ва 20% ини ишлаб чиқаради. Уларнинг ишида брак мос равишда 1%, 2% ва 1,5% ни ташкил қилади. Таваккалига олинган буюмнинг брак бўлиб чиқиш эҳтимоли қандай?

17. Радиолампа учта заводнинг биридан мос равишда 0,25; 0,50 ва 0,25 эҳтимол билан қабул қилинди. Бир йил ичида ишдан чиқишлик эҳтимоли биринчи заводда тайёрланган лампалар учун 0,1 га, иккинчи завод учун 0,2 га, учинчи завод учун 0,4 га тенг. Лампанинг бир йил ишлаш эҳтимолини аниқланг.

4. Байес формулалари. Қуйидаги вазиятни кўз олдимизга келтирайлик. Ичида учта шар бўлган қути бор. Шарлар ё оқ рангда, ё қора рангда бўлиши мумкин, бироқ қутида нечта оқ шар ва нечта қора шар борлиги мутлақо маълум эмас. Бундай шароитда қутидаги шарларнинг ранги тўғрисида тўртта гипотеза қилиш мумкин, чунончи: H_0 гипотеза қутида 0 та оқ шар бор, H_1 гипотеза—қутида 1 та оқ шар бор, H_2 гипотеза—қутида 2 та оқ шар бор ва ниҳоят, H_3 гипотеза—қутида 3 та оқ шар бор. Қутидаги оқ шарларнинг сони тўғрисида ҳеч қандай маълумот бўлмагани учун H_0, H_1, H_2, H_3 гипотезаларни тенг имкониятли деб ҳисоблашимизга тўғри келади. Энди, қутидан таваккалига битта шар олинди ва у шар оқ бўлиб чиқди деб фараз қилайлик. Бу экспериментдан сўнг энди қутидаги оқ шарлар сони тўғрисидаги тўртала гипотезани тенг имкониятли деб ҳисоблаш бутунлай мумкин эмаслиги аниқ. Тасодифан олинган шар оқ бўлиб чиққанлигидан қутида оқ шарлар қора шарлардан кўп деб айта олишимизга асос бор. H_0 гипотезани эса бу экспериментдан сўнг умуман ташлаб юборишга тўғри келади. Шундай қилиб, тасодифан олинган шар оқ шар бўлиб чиққанлиги гипотезаларнинг эҳтимолларини қайта баҳолашимизни тақозо этади. Гипотезаларнинг эҳтимолларини бундай қайта баҳолаш Байес формулалари ёрдамида амалга оширилади. Бу формулалар кўпайтириш теоремасидан ва тўла эҳтимол формуласидан осонликча келтириб чиқарилади.

Айтайлик, A—ихтиёрий ҳодиса, H_1, H_2, ... , H_n—ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла системаси бўлсин, у ҳолда кўпайтириш теоремасига кўра:

$$\mathrm{P}(A \cap H_i) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(H_i \mid A) = \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A \mid H_i),$$

бу ердан

$$\mathrm{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(A/H_i)}{\mathrm{P}(A)} \qquad (i = 1,2, \dots , n).$$

Бу ерда $\mathrm{P}(A)$ ни унинг тўла эҳтимол формуласи орқали ифодаси билан алмаштириб, *гипотезаларнинг эҳтимолларини қайта баҳолаш учун Байес формулаларини* ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}(H_i/A) = \frac{\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A/H_i)} \qquad (i = 1,2, \dots , n). \quad (1)$$

(1) формулалар H_i гипотезаларнинг A ҳодиса рўй берди деган шартдаги шартли эҳтимоллари учун $\mathrm{P}(H_i)$

эҳтимоллар ва A ҳодиса рўй бергунга қадар ҳисобланган $P(A|H_i)$ шартли эҳтимоллар орқали ифодасини беради.

Ичида учта шар бўлган қути ҳолидаги гипотезалар эҳтимолларини қайта баҳолаш масаласига қайтайлик, A—қутидан таваккалига олинган шар оқ шар эканлигидан иборат ҳодиса бўлсин. A ҳодисанинг H_0, H_1, H_2, H_3 гипотезалар ўринли деган шартдаги шартли эҳтимоллари осонликча ҳисобланади:

$$P(A|H_0)=0, \qquad P(A|H_1)=\frac{1}{3},$$

$$P(A|H_2)=\frac{2}{3}, \qquad P(A|H_3)=1,$$

қутидаги оқ шарлар сони тўғрисидаги барча фаразлар ҳақиқатга бир хил яқин бўлганлиги учун:

$$P(H_0)=\frac{1}{4}, \qquad P(H_1)=\frac{1}{4}, \qquad P(H_2)=\frac{1}{4},$$

$$P(H_3)=\frac{1}{4}.$$

Байес формуласига кўра топамиз:

$$P(H_0/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=0,$$

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{6},$$

$$P(H_2|A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$P(H_3|A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1.}=\frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, қутидан шар олингунга қадар тўртта гипотезанинг бирортасини афзал кўришга ҳеч қандай асосимиз йўқ бўлса ва уларнинг ҳар бирининг эҳтимолини $\frac{1}{4}$ га тенг дейишга мажбур бўлган бўлсак, энди оқ шар олингандан кейин гипотезаларнинг эҳтимолларини қайта баҳолаймиз, шу билан бирга қутида 0,1, 2,3 та оқ шар борлиги эҳтимолини мос равишда 0, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ га тенг деб ҳисоблаймиз.

1-мисол. Деталлар партияси уч ишчи томонидан тайёрланди, бунда биринчи ишчи барча деталларнинг 25% ини, иккинчи ишчи 35% ини, учинчи ишчи 40% ини тайёрлади. Биринчи ишчининг маҳсулотида брак 5% ни, иккинчи ишчиникида 4% ни, учинчи ишчиникида эса 2% ни ташкил этади. Контроль учун таваккалига олинган деталь брак бўлиб чиқди. Бу детални иккинчи ишчи тайёрлаганлигининг эҳтимоли қанча?

H_1, H_2 ва H_3 орқали контроль учун таваккалига олинган деталь мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи ишчи томонидан тайёрланган деган гипотезаларни белгилаймиз. Биринчи ишчи барча деталларнинг 22% ини, иккинчи ишчи 35% ини ва учинчи ишчи 40% ини тайёрлагани сабабли қуйидагига эгамиз:

$$P(H_1)=\frac{25}{100}, \qquad P(H_2)=\frac{35}{100}, \qquad P(H_3)=\frac{40}{100}.$$

A — контроль учун танланган деталь брак эканлигидан иборат ҳодиса бўлсин. A ҳодисанинг H_1, H_2 ва H_3 гипотезалар ўринли деган шартдаги эҳтимоллари масала шартида берилган, чунончи

$$P(A|H_1)=\frac{5}{100}, \qquad P(A|H_2)=\frac{4}{100}, \qquad P(A|H_3)=\frac{2}{100}.$$

Байес формуласи бўйича топамиз:

$$P(H_2/A)=$$

$$=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}}=$$

$$=\frac{35\cdot4}{25\cdot5+35\cdot4+40\cdot2}=\frac{28}{69}.$$

Машқлар

18. Иккита автомат бир хил буюмлар ишлаб чиқаради. Биринчи автоматнинг меҳнат унумдорлиги иккинчи автоматнинг меҳнат унумдорлигидан икки баравар катта. Биринчи автомат 60% биринчи сорт маҳсулот, иккинчи автомат 84% биринчи сорт маҳсулот беради. Таваккалига олинган маҳсулот биринчи сорт бўлиб чиқди. Бу маҳсулотни биринчи автомат тайёрлаганлигининг эҳтимоли қандай?

19. Ишлаб чиқарилаётган маҳсулотнинг 96% и стандартга мувофиқ бўлиши маълум. Соддалаштирилган контроль стандарт маҳсулотни 0,98 эҳтимол билан ва ностандарт маҳсулотни 0,05 эҳтимол билан яроқли деб топади. Соддалаштирилган контролдан ўтган маҳсулотнинг стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли қанча?

20. Асбоб иккита тармоқдан иборат бўлиб, бунда асбобнинг ишлаши учун ҳар бир тармоқ бузилмаган бўлиши зарур. Биринчи тармоқнинг ишончлилиги (t вақт ичида узлуксиз ишлаш эҳтимоли) p_1 га, иккинчисиники p_2 га тенг. Асбоб t вақт давомида синовдан ўтказилди ва бузилиб қолди. Синовда фақат биринчи тармоқ ишдан чиқиб, иккинчи тармоқ эса бузилмаганлигининг эҳтимолини топинг.

21. Қутида тўртта шар бор, шу билан бирга у ердаги оқ шарлар тўғрисидаги барча фаразлар тенг эҳтимоллидир. Қутидан таваккал қилиб олинган шар оқ шар бўлиб чиқди. Қутидан навбатдаги олинган шар ҳам оқ бўлиш эҳтимоли қанча?

22. Қутида n та шар бор, шу билан бирга у ердаги оқ шарлар тўғрисидаги барча фаразлар тенг эҳтимолли. Қутидан таваккалига олинган шар оқ бўлиб чиқди. Қутидан навбатдаги олинадиган шар ҳам оқ бўлиш эҳтимоли қанча?

30-§. Эркли тажрибалар сериялари. Я. Бернулли формуласи

Шу пайтга қадар биз бирор якка тажрибалар билан боғлиқ бўлган тасодифий ҳодисаларни қараб чиқдик. Бироқ амалиёт учун ҳам, эҳтимоллар назариясининг ўзи учун ҳам бир-биридан эркли равишда ўтказиладиган бир хил тажрибалар сериясини ўрганиш катта аҳамият касб этади. Тангани ташлаш, нишонга қарата ўқ узиш, маҳсулотни контрол учун танлаш тажрибаларини кўп марта ва бир хил шароитларда ўтказиладиган ҳолларда улар эркли тажрибалар серияларига мисол бўлади. Масала қуйидагича қўйилади.

A тасодифий ҳодиса бирор тажрибада p эҳтимол билан рўй берсин. Тажриба n марта такрорланганда A ҳодисанинг роппа-роса k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ қандай бўлади? Қўйилган саволга Я. Бернулли формуласи жавоб беради.

Я. Бернулли формуласини дастлаб хусусий ҳол учун ҳосил қиламиз. $n=4$ ва $k=2$ бўлсин, яъни ҳар бирида A ҳодиса p эҳтимол билан рўй берадиган 4 та тажрибадан иборат серияни қараб чиқамиз ва тўртта тажрибада A ҳодисанинг роппа-роса икки марта рўй бериш эҳтимоли $P_4(2)$ ни аниқлашга ҳаракат қиламиз.

A_1, A_2, A_3 ва A_4 орқали A ҳодисанинг мос равишда биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи тажрибаларда рўй беришидан иборат ҳодисаларни белгилаймиз. У ҳолда A ҳодиса роса икки марта рўй беришидан иборат ҳодиса қуйидаги биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг йиғиндиси каби ёзилиши мумкин:

$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$	(A ҳодиса 1- ва 2-тажрибаларда рўй берди),
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$	(A ҳодиса 1- ва 3-тажрибаларда рўй берди),
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$	(A ҳодиса 1- ва 4-тажрибаларда рўй берди),
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap B_8 \cap \overline{A}_4$	(A ҳодиса 2- ва 3-тажрибаларда рўй берди),
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$	(A ҳодиса 2- ва 4-тажрибаларда рўй берди),
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$	(A ҳодиса 3- ва 4-тажрибаларда рўй берди).

Бу ерда C_4^2 та ҳодиса ёзилган, чунки A ҳодисанинг тўртта тажрибада икки марта рўй беришининг худди ана шунча усули мавжуддир. Бу ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимоли кўпайтириш теоремасига кўра $p^2(1-p)^2$ га тенг, яъни бир хилдир.

Биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасига кўра

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2$$

ни ҳосил қиламиз.

Умумий ҳолда Я. Бернулли формуласи худди шундай ҳосил қилинади. $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ орқали A ҳодисанинг i-тажрибада рўй беришидан иборат ҳодисани белгилаймиз. У ҳолда A ҳодисанинг роса k марта рўй беришидан иборат ҳодиса қуйидаги биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг йиғиндиси кўринишида ифода қилинади:

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \cap \overline{A}_{k+1} \ldots \cap \overline{A}_n$	(A ҳодиса дастлабки k та тажрибада рўй берди).
. . . .	. . . .
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \cap \ldots \cap A_n$	(A ҳодиса охирги k та тажрибада рўй берди).

Бу ерда C_n^k та ҳодиса ёзилиши керак, чунки A ҳодисанинг n та тажрибада k марта рўй бериш усуллари сони худди шунчадир.

Кўпайтириш теоремасига кўра бу ҳар бир ҳодисанинг эҳтимоли

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

га тенг.

Биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасини қўлланиб, ушбу Я. Бернулли формуласини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (1)$$

1-мисол. Нишонга қарата бешта ўқ узиляпти, бунда ҳар бир ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Нишоннинг учта ўқ билан яксон қилиниш эҳтимоли қанча?

Я. Бернулли формуласига кўра $n=5$, $k=3$, $p=0,8$ деб қуйидагини топамиз:

$$\mathrm{P}_5(3)=C_5^3\ 0,8^3\cdot 0,2^2=0,2048\approx 0,2.$$

2-мисол. Асбобда 4 та лампа бор. Йил давомида ишга яроқсиз бўлиб қолиш эҳтимоли ҳар қайси лампа учун $\frac{1}{6}$ га тенг. Йил давомида барча лампаларнинг камида ярмисини алмаштирилиш эҳтимоли қанча?

Я. Бернулли формуласини татбиқ этиб, йил давомида мос равишда иккита, учта ва тўртта лампанинг ишдан чиқиш эҳтимолини топамиз: $C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$, $C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6}$ ва $C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$.

Биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасига кўра изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг бўлади:

$$C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6}+C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4=$$

$$=\frac{150+20+1}{6^4}=\frac{171}{1\,296}=\frac{19}{144}\approx 0,13.$$

Я. Бернулли формуласида $1-p=q$ деймиз ва уни қуйидагича ёзамиз:

$$\mathrm{P}_n(k)=C_n^k q^{n-k}p^k.$$

Энди $(q+px)^n$ кўпҳадни қарайлик. Ньютон формуласини қўлланиб, бу кўпҳадни x нинг даражалари ўсиб бориш тартибида жойлаштирамиз:

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k q^{n-k} p^k\right)x^k. \tag{2}$$

Ҳосил қилинган айниятдан кўриниб турибдики, $\mathrm{P}_n(k)=C_n^k q^{n-k} p^k$ $(k=0,1, \ldots, n)$ эҳтимоллар $(q+px)^n$ кўпҳаднинг коэффициентларидан иборат. Шу муносабат билан $(q+px)^n$ кўпҳадни A ҳодисанинг n та эркли тажрибадан иборат серияда k марта рўй беришининг эҳтимоллари учун *ҳосил қилувчи кўпҳад* дейилади.

Барча $\mathrm{P}_n(k)$ $(k=0,1, \ldots, n)$ эҳтимолларни топиш зарур бўлган ҳолларда ҳосил қилувчи кўпҳадни ёзиб олиш ва уни Ньютон формуласи бўйича ёйиб чиқиш қулайдир. Кўпҳаднинг коэффициентлари изланаётган эҳтимолларни беради.

Яна шуни қайд қилиб ўтамизки, баъзан A ҳодисанинг n та эркли тажрибадан иборат серияда рўй беришининг энг эҳтимолли сонини топиш талаб қилинади. Бошқача айтганда, k нинг шундай қийматларини топиш талаб қилинадики, бу қийматларда $C_n^k q^{n-k} p^k$ миқдор (ўзгармас n да) энг катта қийматга эга бўлади. (2) формуладан бу масала ҳосил қилувчи $(q+px)^n$ кўпҳаднинг энг катта коэффициентини аниқлашга тенг кучли эканлиги кўринади. 27-§ да (7-мисолга қаранг) бундай кўринишдаги кўпҳаднинг энг катта коэффициентини қандай қилиб топиш кўрсатилган эди.

3-мисол. Ҳисоблаш қурилмасининг тўртта элементи бир-биридан эркли ишлайди. Ҳар қайси элемент учун t вақт давомида нуқсонсиз ишлаш эҳтимоли $\frac{3}{4}$ га тенг. t вақт давомида:

а) бирорта ҳам элементнинг нуқсонсиз ишламаслик;

б) фақат бир элементнинг нуқсонсиз ишлаш;

в) иккита элементнинг ишдан чиқмаслик;

г) учта элементнинг бузилмасдан (нуқсонсиз) ишлаш;

д) тўртала элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимолини топинг.

Бу ерда тажриба битта элементнинг ишини t вақт мобайнида кузатишдан, A ҳодиса эса элементнинг берилган вақт ичида тўхтовсиз (нуқсонсиз) ишлашидан иборат. A ҳодиса $p=\frac{3}{4}$ эҳтимолга эга, қарама-қарши A ҳодиса $q=\frac{1}{4}$ эҳтимол билан рўй беради. Қурилмада тўртта элемент бор, демак, тажриба тўрт марта ўтказилади, яъни $n=4$.

Масалани ечиш учун $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$ ҳосил қилувчи кўпҳадни тузамиз ва унинг учун Ньютон формуласини ёзамиз:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}x+$$

$$+\frac{4\cdot3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3x^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4x^4.$$

Кўпҳаднинг коэффициентлари изланаётган эҳтимолларни беради:

а) бирорта ҳам элемент нуқсонсиз ишламаслигининг эҳтимоли x^0 нинг олдидаги коэффициентга тенг, яъни

$$P_4(0)=\left(\frac{1}{4}\right)^4\approx0{,}004,$$

б) фақат бир элементнинг нуқсонсиз ишлаш эҳтимоли x нинг олдидаги коэффициентга тенг, яъни

$$P_4(1)=4\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}\approx0{,}048,$$

в) иккита элементнинг нуқсонсиз ишлаш эҳтимоли x^2 нинг олдидаги коэффициентга тенг, яъни

$$P_4(2)=\frac{4\cdot3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\approx0{,}212,$$

г) учта элементнинг нуқсонсиз ишлаш эҳтимоли x^3 нинг олдидаги коэффициентга тенг, яъни

$$P_4(3)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\approx0{,}422,$$

д) тўртала элементнинг нуқсонсиз ишлаш эҳтимоли x^4 нинг олдидаги коэффициентга тенг, яъни

$$P_4(4)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\approx0{,}314.$$

4-мисол. A ҳодиса тажриба бир марта ўтказилганда $\frac{2}{3}$ эҳтимол билан рўй беради. Тажриба 10 марта ўтказилади. Бу тажрибанинг қандай натижаси энг катта эҳтимолга эга бўлади? У нимага тенг?

Бу ҳолда ҳосил қилувчи кўпҳад $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ кўринишга эга. 27-§ даги 7-мисолда бу кўпҳаднинг энг катта коэффициенти x^7 нинг олдидаги коэффициент бўлиши, яъни $C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7$ эканлиги аниқланган эди. Шундай қилиб, энг катта эҳтимолга тажрибанинг қуйидаги натижаси эга бўлади: A ҳодиса 7 марта рўй беради. Бундай натижанинг эҳтимоли:

$$P_{10}(7)=C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7\approx 0,26.$$

Тажрибанинг қолган 10 натижасининг ҳар бири бундан кичик эҳтимолга эга.

Машқлар

1. Танга 10 марта ташланади. Гербли томон икки марта тушиши эҳтимоли қанча?

2. Корхонада газнинг суткалик сарфининг нормадан ошмаслик эҳтимоли 0,9 га тенг. Бир ҳафта ичида корхона газни уч марта ортиқча сарфлаш эҳтимоли қанча?

3. Танга 5 марта ташланади. Гербли томон камида икки марта тушиши эҳтимоли қанча?

4. Агар бир партияда ютиш ва ютқазиш эҳтимоллари бир хил ва 0,5 га тенг бўлса, у ҳолда қайси бири эҳтимоллироқ: а) тўртта партиядан учтасини ютишми ёки саккизта партиядан бештасини ютишми; б) тўртта партиядан камида учтасини ютишми ёки саккизта партиядан камида бештасини ютишми?

5. A ҳодиса тажриба бир марта ўтказилганда $\frac{2}{3}$ эҳтимол билан рўй беради. Тажриба беш марта такрорланганда A ҳодиса 5 марта, 4 марта, 3 марта, 2 марта, 1 марта рўй бериш эҳтимолини, бир марта ҳам рўй бермаслик эҳтимолини топинг.

6. Нишонга қарата 100 та ўқ узиляпти. Агар бир ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли $\frac{5}{6}$ га тенг бўлса, нишонга теккан ўқларнинг энг эҳтимолли сони қанча?

7. Ишчи 50 та станокни бошқаради. Смена давомида станокнинг ростлашни талаб қилиш эҳтимоли $\frac{1}{3}$ га тенг. Қайси бири эҳтимоллироқ:

а) 17 та станок ростлашни талаб қилади;
б) 16 та станок ростлашни талаб қилади.

8. Асбобда 6 та лампа бор. Занжирдаги кучланиш ортганда

ҳар қайси лампа бир-биридан эркли ҳолда 0,3 эҳтимол билан ишдан чиқади. Учта ёки ундан кам лампа куйиб қолганда асбоб ишдан чиқмайди. Тўртта лампа қуйганда асбоб 0,3 эҳтимол билан бешта лампа куйганда 0,7 эҳтимол билан, олтита лампа куйганда 1 эҳтимол билан ишдан чиқади. Асбобнинг кучланиш ортганда ишдан чиқиш эҳтимолини аниқланг.

31-§. Тасодифий миқдорлар

1. Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни. Бирор тажриба билан боғлиқ бўлган *тасодифий миқдор* дейилганда бу тажриба натижасида у ёки бу сон қийматни қабул қиладиган ҳар қандай миқдор тушунилади. Олдинги параграфларда биз турли-туман тасодифий миқдорларга дуч келдик. Ўйин соққасини ташлаш тажрибасида бизни тушган очколар сони, яъни тасодифга боғлиқ равишда ушбу 1, 2, 3, 4, 5, 6 олтита қийматдан бирини қабул қиладиган миқдор қизиқтирган эди. Нишонга қарата бешта ўқ узишда ҳам биз 0, 1, 2, 3, 4, 5 қийматларни қабул қила оладиган тасодифий миқдор (нишонга теккан ўқлар сони) билан иш кўрдик. Қуйидагилар ҳам тасодифий миқдорларга мисол бўла олади:

а) маълум партиядаги брак қилинган маҳсулотлар миқдори,

б) йил давомида битта сигирдан соғиб олинадиган сут миқдори,

в) астрономнинг бир кун давомида қуёш дискида қайд қилган қуёш доғлари ичида юзи бирор тайин юздан катта бўлган доғлар сони,

г) сирень гулидаги япроқчалар сони,

д) бир сутка давомида шаҳарда рўй берган йўл-транспорт ҳодисалари.

Тасодифий миқдорни тўла характерлаш учун энг аввало у қабул қилиши мумкин бўлган қийматларни билиш керак. Бироқ, равшанки, бу етарли эмас. Бундан ташқари, тасодифий миқдор у ёки бу қийматни қандай эҳтимол билан қабул қилишини ҳам билиш керак.

Тасодифий миқдорни x ҳарфи билан, унинг қийматларини

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

ҳарфлари билан, бу қийматлар қабул қиладиган эҳтимолларни мос равишда

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

ҳарфлари билан белгилаймиз.

Агар X тасодифий миқдор учун у қабул қилиши мумкин бўлган барча x_1, x_2, ... , x_n қийматлар ва бу қийматлар қабул қилинадиган барча p_1, p_2, ... , p_n эҳтимоллар маълум бўлса, X тасодифий миқдорнинг *тақсимот қонуни* ёки, оддий қилиб, X миқдорнинг *тақсимоти* берилган дейилади.

Тақсимот қонунини қуйидаги жадвал кўринишида ёзиш қулайдир:

x_1	x_2	x_3	. . .	x_k	. . .	x_n
p_1	p_2	p_3	. . .	p_k	. . .	p_n

(1)

Жадвалнинг биринчи сатрида тасодифий миқдорнинг барча қийматлари, унинг остига, иккинчи сатрга эса мос эҳтимоллар ёзилади.

Қуйидаги n та тасодифий ҳодисани қараймиз:

A_1 — тасодифий миқдор X x_1 қийматни қабул қилди,

A_2 — тасодифий миқдор X x_2 қийматни қабул қилди,

. . . .

A_n — тасодифий миқдор X x_n қийматни қабул қилди.

A_1, A_2, . . . , A_n ҳодисалар биргаликда эмас, чунки тасодифий миқдор тажриба бир марта ўтказилганда x_1, x_2, . . . , x_n қийматлардан фақат бирини қабул қилиши мумкин. Шуниси ҳам равшанки, A_1, A_2, . . . , A_n ҳодисаларнинг йиғиндиси муқаррар ҳодисадир, яъни

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U,$$

чунки тасодифий миқдор x_1, x_2, . . . , x_n қийматлардан бирини албатта қабул қилади.

Шу сабабли биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасига кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(U) = 1,$$
$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) = 1,$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

ёки қисқача ёзсак,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{2}$$

яъни X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини берадиган (1) жадвалнинг иккинчи сатрида турган барча сонларнинг йиғиндиси бирга тенг бўлиши керак.

1-мисол. X тасодифий миқдор ўйин соққасини ташлаганда тушган очколар сони бўлсин. Тақсимот қонунини топинг.

X тасодифий миқдор

$$x_1=1,\ x_2=2,\ \ldots,\ x_6=6$$

қийматларни

$$p_1=p_2=\ldots=p_6=\frac{1}{6}$$

эҳтимоллар билан қабул қилади. Шунинг учун тақсимот қонуни ушбу жадвал билан берилади:

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-мисол. Нишонга қарата учта ўқ узиляпти, бунда ҳар бир ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,8 га тенг. X тасодифий миқдор—нишонга теккан ўқлар сони қаралади. Бу тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

X тасодифий миқдор қуйидаги қийматларни қабул қилиши мумкин:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3.$$

Тегишли эҳтимолларни топиш учун қуйидагича йўл тутган маъқул: ҳосил қилувчи кўпҳад $(0{,}2+0{,}8x)^3$ ни тузиш ва унинг ёйилмасини ёзиш керак:

$$0{,}2^3+3\cdot0{,}2^2\cdot0{,}8x+3\cdot0{,}2\cdot0{,}8^2x^2+0{,}8^3x^3.$$

Маълумки (30-§ га қаранг), x^k $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ нинг олдидаги коэффициент нишонга k та ўқ тегиш эҳтимолини, яъни X тасодифий миқдорнинг k га тенг қийматни қабул қилиш эҳтимолини беради.

Шундай қилиб:

$$p_1=0{,}2^3=0{,}008,$$
$$p_2=3\cdot0{,}2^2\cdot0{,}8=0{,}096,$$
$$p_3=3\cdot0{,}2\cdot0{,}8^2=0{,}384,$$
$$p_4=0{,}8^3=0{,}512.$$

Шундай қилиб, X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги кўринишда бўлади:

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

3- мисол. X тасодифий миқдорни — ҳар бирида A ҳодиса p эҳтимол билан рўй берадиган n та эркли тажрибадан иборат серияда A ҳодисанинг рўй бериш сонини қарайлик. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

X тасодифий миқдор қуйидаги қийматлардан бирини қабул қилиши мумкинлиги равшандир:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \ldots,\ n.$$

X тасодифий миқдор k га тенг қийматни қабул қилишидан иборат ҳодисанинг эҳтимоли Я. Бернулли формуласига кўра аниқланишини биламиз:

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{бу ерда}\ q = 1 - p.$$

Бинобарин, X тасодифий миқдорнинг тақсимоти қуйидагича ёзилиши мумкин:

0	1	...	k	...	n
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

(3)

(3) жадвал ёрдамида тавсифланадиган тақсимот *Я. Бернулли тақсимоти* ёки *биномиал тақсимот* дейилади. Я. Бернулли тақсимоти учун (2) шарт қуйидаги кўринишни олади:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1. \tag{4}$$

Бу тенгликнинг тўғрилигини исботлаш учун 30-§ даги (2) айният

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k$$

да $x = 1$ деб олиш кифоя.

Я. Бернулли тақсимоти иккита параметр: барча тажрибалар сони n ва ҳодисанинг ҳар бир айрим тажрибада рўй бериш эҳтимоли p билан тўла берилади.

Машқлар

1. Бирор тасодифий миқдорнинг тақсимоти қуйидаги жадвал ёрдамида берилиши мумкинми:

а)

0	$\frac{1}{2}$	10	π
0,1	0,5	0,1	0,3

б)

1	2	3	4
0	0,4	0,2	0,3

?

2. 1-ва 2-мисолларда қаралган тасодифий миқдорларнинг тақсимоти биномиал тақсимот бўладими?

3. Танга уч марта ташланади. Гербли томоннинг тушишидан иборат X тасодифий миқдор қаралади. X тасодифий миқдорнинг тақсимотини топинг.

4. X тасодифий миқдор ўйин соққасини ташлашда тушадиган очколар сонининг квадратидан иборат. Тақсимот қонунини топинг.

5. Ҳар бирида A ҳодиса 0,4 эҳтимол билан рўй берадиган учта эркли тажриба ўтказиляпти. A ҳодисанинг учта тажрибада рўй бериш частотасидан иборат X тасодифий миқдор қаралади. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

2. Тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

Таъриф. Тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* деб тасодифий миқдорнинг барча қийматларини бу қийматларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига айтилади.

X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $\mathrm{M}X$ орқали белгиланади. Агар X тасодифий миқдор x_1, x_2, ..., x_n қийматларни мос равишда p_1, p_2, ..., p_n эҳтимоллар билан қабул қилса, у ҳолда таърифга кўра:

$$\mathrm{M}X = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (1)$$

Математик кутилиш тасодифий миқдорнинг энг муҳим сон характеристикасидир. Кўпинча математик кутилишни тасодифий миқдорнинг ўртача қиймати деб ҳам юритилади, чунки у бирор „ўртача сон" ни ифодалаб, бу сон атрофида тасодифий миқдорнинг барча қийматлари группаланади.

1-мисол. Ўйин соққасини ташлаганда тушадиган очколар сонининг математик кутилишини топинг.

Бу тасодифий миқдорнинг тақсимоти олдинги пунктнинг 1-мисолида топилган эди. (1) формулага кўра топамиз:

$$\mathrm{M}X=\sum_{k=1}^{6} x_k p_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2}=3,5.$$

2-мисол. Ҳар бирида A ҳодиса p эҳтимол билан рўй берадиган n та эркли тажриба сериясида A ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилишини топинг.

X тасодифий миқдорнинг k қийматни қабул қилиш эҳтимоли $C_n^k q^{n-k} p^k$ га тенг. Демак, (1) формулага кўра

$$\mathrm{M}X=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k.$$

Ҳосил қилинган ифодани соддалаштириш учун ушбу 30-§ даги (2) муносабатдан фойдаланамиз:

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k.$$

Бу айниятнинг иккала томонини x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз, у ҳолда

$$n(q+px)^{n-1}p=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k x^{k-1}.$$

Бу ердан $p+q=1$ эканлигини назарда тутиб, $x=1$ да

$$np=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k$$

ни топамиз. Демак,

$$\mathrm{M}X=np. \qquad (2)$$

Шундай қилиб, ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та эркли тажрибадан иборат серияда A ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши барча тажрибалар сони n нинг ҳодисанинг алоҳида тажрибада рўй бериш эҳтимоли p га кўпайтмасига тенг экан.

Бошқача айтганда, n ва p параметрли биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши np кўпайтмага тенгдир.

3-мисол. Агар 10 000 та буюмдан иборат партиядаги ҳар бир буюм 0,005 эҳтимол билан брак бўлиши мумкин бўлса, шу партиядаги брак буюмлар сонининг математик кутилишини топинг.

Яроқсиз буюмлар сони — бу биномиал қонун бўйича тақсимланган X тасодифий миқдордир. Шунинг учун (2) формулага кўра ушбуни топамиз:

$$MX = 10\,000 \cdot 0{,}005 = 50.$$

4-мисол. X — ўйин соққасини ташлаганда тушган очколар сони бўлсин. X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланиши квадратидан иборат Y тасодифий миқдорни қарайлик. Y нинг математик кутилишини топинг.

X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши 1-мисолда ҳисобланган бўлиб, у $MX = 3{,}5$ га тенг эди.

X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланиши квадрати

$$y_1 = (1-3{,}5)^2,\quad y_2 = (2-3{,}5)^2,\quad y_3 = (3-3{,}5)^2,$$
$$y_4 = (4-3{,}5)^2,\quad y_5 = (5-3{,}5)^2,\quad y_6 = (6-3{,}5)^2$$

қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдордир, бунда ҳар бир қиймат $\frac{1}{6}$ эҳтимол билан қабул қилиниши равшандир. Шунинг учун

$$MY = \sum_{k=1}^{6} y_k p_k = \sum_{k=1}^{6} (k-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2}{6} = \frac{35}{12}.$$

3. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси. X тасодифий миқдорнинг бошқа бир муҳим характеристикаси унинг дисперсиясидир. X нинг дисперсияси DX орқали белгиланади ва у қуйидагича аниқланади.

Таъриф. *X тасодифий миқдорнинг дисперсияси* деб X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланиши квадратининг математик кутилишига айтилади, яъни

$$DX = M(X - MX)^2.$$

2-пунктдаги 4-мисолда ўйин соққасини ташлаганда тушган очколар сонидан иборат X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланиши квадратининг математик кутилиши топилган эди, яъни аслида X миқдорнинг дисперсияси ҳисобланган эди. Шундай қилиб, 4-мисолдан агар X соққани ташлаганда тушган очколар сони бўлса, у ҳолда

$$\mathrm{D}X = \frac{35}{12}$$

бўлиши келиб чиқади.

Айтайлик, X тасодифий миқдор

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

қийматларни мос равишда

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

эҳтимоллар билан қабул қилсин. У-ҳолда X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланиши квадрати тасодифий миқдор бўлиб, у

$$(x_1 - \mathrm{M}X)^2, (x_2 - \mathrm{M}X)^2, \ldots, (x_k - \mathrm{M}X)^2, \ldots, (x_n - \mathrm{M}X)^2$$

қийматларни мос равишда

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$$

эҳтимоллар билан қабул қилади. Шунинг учун бундай тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилишини, яъни X нинг дисперсиясини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathrm{D}X = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k. \qquad (1)$$

Тасодифий миқдорнинг дисперсияси бу тасодифий миқдорнинг ўзининг математик кутилишига (ўртача қийматига) нисбатан тарқоқлик, сочилиш даражасини характерлайди. „Дисперсия“ сўзининг ўзи „сочилиш“ ни англатади.

1-мисол. X ва Y тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунларига эга:

—1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ва

—2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\mathrm{D}X$ ва $\mathrm{D}Y$ ни топинг.

Дастлаб математик кутилишларни ҳисоблаймиз:

$$\mathrm{M}X = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0, \quad \mathrm{M}Y = (-2)\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Энди (1) формулани қўлланиб, дисперсияларни топамиз:

$$DX = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad DY = 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

2-мисол. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари қуйидаги жадваллар билан берилган

-2	-1	1	2
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

ва

-2	-1	1	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

DX ва DY ни топинг.

Математик кутилишларни ҳисоблаймиз:

$$MX = (-2)\frac{1}{6} + (-1)\frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0,$$

$$MY = (-2)\frac{1}{4} + (-1)\frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

(1) формула бўйича дисперсияларни ҳисоблаймиз:

$$DX = 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 2,$$

$$DY = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5.$$

X ва Y тасодифий миқдорлар бу ерда бир хил қийматларни қабул қиляпти, бир хил математик кутилишга эга, бироқ Y тасодифий миқдор қийматларининг тарқоқлиги X тасодифий миқдорникига қараганда кўпроқ. Математик кутилишдан анча узоқдаги ± 2 қийматларни Y тасодифий миқдор X тасодифий миқдорга нисбатан каттароқ эҳтимол билан қабул қилади, математик кутилишдан камроқ узоқликдаги ± 1 қийматларни эса Y тасодифий миқдор X тасодифий миқдорга нисбатан кичикроқ эҳтимол билан қабул қилади. $DX < DY$ тенгсизлик худди ана шуни кўрсатади.

1- ва 2- мисолларда тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари (1) формула бўйича ҳисобланди. Бироқ, одатда, дисперсияни бошқа формула ёрдамида ҳисоблаш анча қулай бўлади. Бу формулани ҳосил қилиш учун дастлаб (1) формуланинг ўнг қисмини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\mathrm{D}X=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathrm{M}X)^2 p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2(\mathrm{M}X)x_k+(\mathrm{M}X)^2)p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-2(\mathrm{M}X)\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+(\mathrm{M}X)^2\sum_{k=1}^{n}p_k.$$

Энди

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=1,\qquad \sum_{k=1}^{n}x_kp_k=\mathrm{M}X$$

ни эътиборга олсак,

$$\mathrm{D}X=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-(\mathrm{M}X)^2$$

формулани ҳосил қиламиз.

Бу ердаги йиғинди ушбу

x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилишидир.

Бундай тасодифий миқдорни X тасодифий миқдорнинг квадрати деб аташ ва X^2 орқали белгилаш табиийдир.

Шундай қилиб, дисперсия учун

$$\mathrm{D}X=\mathrm{M}(X^2)-(\mathrm{M}X)^2 \tag{2}$$

формула ўринлидир.

Бу формула бундай ўқилади: тасодифий миқдорнинг дисперсияси бу миқдор квадратининг математик кутилишидан унинг математик кутилиши квадратини айирилганига тенг.

3- мисол. n ва p параметрли биномиал қонун бўйича тақсимланган X тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Олдинги пунктдаги 2-мисолда $MX = np$ эканлиги кўрсатилган эди. Дисперсияни (2) формуладан фойдаланиб ҳисоблаш мақсадида X^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз:

0	1	$\ldots$	k^2	$\ldots$	n^2
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	$C_n^n p^n q^0$

X^2 тасодифий миқдорнинг математик кутилиши учун қуйидагига эгамиз:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Ҳосил қилинган йиғиндини соддалаштириш учун яна 30-§ даги ушбу (2) айниятга мурожаат қиламиз:

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k.$$

Айниятнинг ҳар иккала қисмини x ўзгарувчи бўйича икки марта дифференциаллаймиз. У ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$n(n-1)(q+px)^{n-2}p^2 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k k(k-1)x^{k-2}.$$

Бу айниятда $x = 1$ деб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k q^{n-k} p^k$$

ёки

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k q^{n-k} p^k - \sum_{k=1}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k,$$

бу ердан $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k = MX = np$ эканлигини назарга олиб,

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k q^{n-k} p^k = n(n-1)p^2 + np =$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np$$

ни ҳосил қиламиз. Энди ўзил-кесил қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$DX = \mathrm{M}(X^2) - (\mathrm{M}X)^2 = n^2p^2 - np^2 + np -$$

$$- n^2p^2 = np(1-p),$$

яъни

$$DX = npq. \qquad (3)$$

Машқлар

6. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонунига эга:

1	2	3
0,3	0,2	0,5

$\mathrm{M}X$ ва $\mathrm{D}X$ ни топинг.

7. X тасодифий миқдор ушбу қонун бўйича тақсимланган:

2	4	6	8	10
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$\mathrm{M}X$ ва $\mathrm{D}X$ ни топинг.

8. $\mathrm{M}X$ ва $\mathrm{D}X$ ни а) 3- машқдаги X тасодифий миқдор учун; б) 5- машқдаги X тасодифий миқдор учун топинг.

9. 4- машқдаги X тасодифий миқдор учун $\mathrm{M}X$ ни топинг.

10. Ичида 2 та оқ ва 3 та қора шар бўлган қутидан таваккалига иккита шар олинади. Агар X тасодифий миқдор олинган оқ шарларни билдирса, $\mathrm{M}X$ ва $\mathrm{D}X$ ни топинг.

11. Агар 5000 та буюмдан иборат партиядаги ҳар бир буюм 0,02 эҳтимол билан брак бўлиши мумкин бўлса, шу партиядаги брак буюмлар сонининг математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

12. Завод ишлаб чиқарадиган бутун маҳсулотнинг 98% и сифат белгиси билан чиқарилади. 5000 та маҳсулотдан иборат партиядаги сифат белгиси билан чиқарилаётган буюмлар сонининг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг.

13. Ҳар бирининг нуқсонли бўлиш эҳтимоли $\frac{1}{3}$ га тенг бўлган 4 та лампа бор. Патронга бураб киритишда нуқсонли лампа дарҳол куяди, шунда бошқаси олинади. Бураб киритилган лампалар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорни қаранг. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

14. Агар учта соққа ташлаганда ҳар учала соққада олти очко тушса, ўйинчи 10 сўм ютади. Олти очко фақат иккита соққада тушган ҳолда эса ўйинчи 1 сўм олади. Ўйин ўйинчига фойдали бўлиши учун бундай ўйинда иштирок этишга имкон берадиган билет қанча туриши керак?

15. Тирдаги нишон 1, 2, 3 рақамлари билан номерланган учта конгруэнт секторга бўлинган доирадан иборат. Ўқ узиш пайтида нишон айланади, бинобарин, ўйинчи секторларни ажрата олмай таваккалига ўқ узади. Ўқ 1- секторга текканда бир сўм, 2- секторга текканда икки сўм, 3- секторга текканда эса уч сўм ютуқ берилади. Битта ўқ узиш учун билетнинг нархи бир ярим сўм. Бундай ўйин нишонга: а) 0,7; б) 0,8; в) 0,75 эҳтимол билан „урадиган“ ўйинчига фойда келтирадими?

4. Чебишев тенгсизлиги. X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланишининг абсолют қийматини, яъни $|X - MX|$ тасодифий миқдорни қарайлик.

$|X - MX|$ тасодифий миқдорнинг бирорта ε мусбат сондан кичик бўлмаган қийматни қабул қилиш эҳтимолини $P(|X - MX| \geqslant \varepsilon)$ орқали белгилайлик.

Теорема. *Ихтиёрий X тасодифий миқдор ва исталган мусбат ε сон учун*

$$P(|X - MX| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

тенгсизлик ўринлидир, яъни X тасодифий миқдорнинг унинг математик кутилишидан четланиши абсолют миқдорининг исталган ε мусбат сондан кичик бўлмаслик эҳтимоли X нинг дисперсиясини ε^2 га бўлинганидан катта бўла олмайди.

Бу машҳур Чебишев тенгсизлигидир, бу тенгсизлик ёрдамида эҳтимоллар назариясида кўпгина муҳим теоремалар исбот қилинади,

Исботи. X ушбу қонун бўйича тақсимланган ихтиёрий тасодифий миқдор бўлсин:

x_1	. . .	x_l	x_{l+1}	. . .	x_n
p_1	. . .	p_l	p_{l+1}	. . .	p_n

Ихтиёрий ε мусбат сонни оламиз. У ҳолда X тасодифий миқдорнинг барча қийматлари x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ларни иккита тўпламга бундай ажратиш мумкин: биринчи тўпламга

$$|x_k - MX| \geqslant \varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган x_k қийматларни киритамиз, қолган қийматларни, яъни қарама-қарши

$$|x_k - \mathrm{M}X| < \varepsilon \qquad (2)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматларни иккинчи тўпламга киритамиз.

Бу тўпламлардан бири бўш тўплам бўлиб қолиши истисно қилинмаслигини қайд қилиб ўтамиз.

Умумийликка зиён келтирмасдан, биз тасодифий миқдорнинг қийматларини шундай номерладикки, (1) тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар 1 дан l гача, қолган қийматлар, яъни (2) тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар эса $l+1$ дан n гача номерларни олдилар деб ҳисоблашимиз мумкин.

Энди X тасодифий миқдорнинг

$$DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k$$

дисперсиясини қараб чиқайлик.

Бу йиғиндининг барча қўшилувчилари манфий бўлмагани учун охирги $n-l$ та ҳадни ташлаб юбориб, йиғиндини фақат камайтиришимиз мумкин, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k.$$

Бироқ энди йиғинди белгиси остида номерлари $k \leqslant l$ бўлган x_k лар қолди, бундай барча қийматлар учун эса

$$|x_k - \mathrm{M}X| \geqslant \varepsilon$$

тенгсизлик, бинобарин, унга тенг кучли

$$(x_k - \mathrm{M}X)^2 \geqslant \varepsilon^2$$

тенгсизлик ўринлидир. Шунинг учун

$$\sum_{k=1}^{l} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^2 p_k = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{l} p_k.$$

Сўнгги $\sum_{k=1}^{l} p_k$ йиғинди X тасодифий миқдор x_1, $x_2, \ldots,$ x_l қийматлардан бирини қабул қилиш эҳтимолидир, яъни $\sum_{k=1}^{l} p_k$ йиғинди X миқдор

$$|x_k - \mathrm{M}X| \geqslant \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматни қабул қилиш эҳтимолидир.

Бу эҳтимолни

$$P(|X-MX|\geqslant\varepsilon)$$

билан белгилашга келишган эдик, шунинг учун

$$\sum_{k=1}^{l} p_k = P(|X-MX|\geqslant\varepsilon).$$

Шундай қилиб, дисперсия учун

$$DX\geqslant\varepsilon^2 P(|X-MX|\geqslant\varepsilon)$$

баҳони ҳосил қилдик. Бу ердан Чебишев тенгсизлиги келиб чиқади.

Катта сонлар қонуни. Ҳар бирида A ҳодиса p эҳтимол билан рўй берадиган n та эркли тажрибадан иборат серияда A ҳодисанинг рўй бериш сонини ифодаловчи X тасодифий миқдорга қайтайлик. X тасодифий миқдор k ($k=0,1,\ldots,n$) қийматларни қабул қилади. Илгарироқ (2- ва 3- пунктларга қаранг) X миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси ҳисобланган эди:

$$MX=np,\qquad DX=npq.$$

Ихтиёрий ε_1 мусбат сонни оламиз ва X тасодифий миқдор учун Чебишев тенгсизлигини ёзамиз:

$$P(|k-np|\geqslant\varepsilon_1)\leqslant\frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Ушбу

$$|k-np|\geqslant\varepsilon_1$$

тенгсизлик

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{n}$$

тенгсизликка тенг кучли эканлиги равшан, шунинг учун қуйидагига эга бўламиз:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{n}\right)\leqslant\frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

ε_1 ихтиёрий мусбат сон бўлгани учун $\frac{\varepsilon_1}{n}$ ҳам ихтиёрий мусбат сон бўлади. $\frac{\varepsilon_1}{n}=\varepsilon$ деб A ҳодисанинг n та тажрибадан иборат серияда рўй бериш частотаси $\frac{k}{n}$ нинг

A ҳодисанинг алоҳида тажрибада рўй бериш эҳтимоли p дан четланишининг бирорта ихтиёрий ε сондан кичик бўлмаслигининг эҳтимоли учун қуйидаги баҳони ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Ҳосил қилинган бу баҳодан $n \to \infty$ да $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$ бўлгани учун дарҳол

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Бу натижа биринчи марта Я. Бернулли томонидан ҳосил қилинган бўлиб, Я. Бернулли теоремаси ёки Я. Бернулли формасидаги *катта сонлар қонуни* дейилади.

Катта сонлар қонуни қуйидаги даъвони ифодалайди: ҳар қандай ε мусбат сон учун A ҳодисанинг n та тажрибадан иборат серияда рўй бериш частотасининг A ҳодисанинг айрим тажрибада рўй бериш эҳтимоли p дан четланишининг ε дан кичик бўлмаслик эҳтимоли n ўсиши билан нолга интилади.

Бошқача айтганда, ε қанчалик кичик бўлмасин етарлича катта n ларда

$$\left|\frac{k}{n}-p\right| \geqslant \varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли нолга исталганча яқин бўлади, бинобарин, қарама-қарши

$$\left|\frac{k}{n}-p\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Шундай қилиб, эркли тажрибалар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг рўй бериш частотаси ҳодисанинг айрим тажрибада рўй бериш эҳтимолидан исталганча кам фарқ қилади деб бирга исталганча яқин эҳтимоллик билан айтиш мумкин.

Шундай қилиб, Я. Бернулли формасидаги катта сонлар қонунидан ҳар бирида ҳодиса бир хил эҳтимол билан рўй берадиган n та эркли тажриба сериясида ҳодиса рўй бериши частотасининг статистик турғунлиги келиб чиқади. Ҳодисанинг эҳтимоли номаълум бўлган ҳолларда катта сонлар қонуни ҳодиса эҳтимоли учун унинг тажрибалар сони етарлича катта бўлгандаги частотасини қабул қилиш имконини беради. Масалан, туғилишларни кузатишлар сони етарлича катта бўлганда ўғил болаларнинг туғилиш частотаси 0,511 сонига яқин бўлганлигидан худди ана шу сон ўғил бола туғилишининг эҳтимоли учун қабул қилинади. Бу эҳтимолни билиш жиддий демографик прогнозлар қилиш имконини беради.

VIII боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

32- §. Дифференциал тенгламаларга мисоллар

1. Бактерияларнинг кўпайиши. Бактериялар устида тажрибалар олиб борилганда бактерияларнинг кўпайиш тезлиги (бактериялар учун етарлича озуқа запаси бўлганда) уларнинг сонига пропорционал эканлиги аниқланган.

Бактерияларнинг ўзлари жуда кичик бўлиб, уларнинг сони катта бўлганлиги сабабли бактерияларнинг массаси вақт ўтиши билан узлуксиз ўзгариб туради деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда бактериялар массасининг ортиш тезлиги бактерияларнинг кўпайиш тезлиги дейилади.

Агар $x(t)$ орқали вақтнинг t моментидаги ҳамма бактерияларнинг массасини белгиласак, $\frac{dx}{dt}$ бу бактерияларнинг кўпайиш тезлиги бўлади. Кўпайиш тезлиги $\frac{dx}{dt}$ бактериялар миқдорига пропорционал бўлгани учун шундай ўзгармас k сон топиладики,

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad (1)$$

бўлади.

Шартга кўра $x(t)$ ва $x'(t)$ манфий эмас, шунинг учун k коэффициент ҳам манфий эмас. Равшанки, $k > 0$ бўлган ҳолгина қизиқиш уйғотади, чунки $k = 0$ бўлганда ҳеч қандай кўпайиш бўлмайди.

(1) тенглама *дифференциал тенгламанинг* энг содда мисолидир. У кўпайишнинг дифференциал тенгламаси дейилади. (1) тенгламада изланаётган номаълум $x = x(t)$ функция бўлиб, у тенгламага ўзининг $x'(t)$ ҳосиласи билан биргаликда киради.

Текшириш осонки,

$$x = Ce^{kt} \qquad (2)$$

кўринишдаги исталган функция (бу ерда C — бирор ўзгармас) (1) тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(Ce^{kt})=C\frac{d}{dt}e^{kt}=Cke^{kt}=k(Ce^{kt})=kx.$$

34-§ да (1) тенгламанинг барча ечимлари (2) формула билан берилиши исбот қилинади. Шунинг учун (2) функция (бу ерда C—ихтиёрий ўзгармас) (1) *тенгламанинг умумий ечими* дейилади.

(1) дифференциал тенглама ва унинг умумий ечими (2) дан кўпайиш процессини текширишда қандай фойдаланиш мумкинлиги тўғрисида бир неча изоҳ берамиз.

Равшанки, k коэффицент бактерия турига ва ташқи муҳитга боғлиқдир.

Агар k коэффициентнинг қийматини ва бактерияларнинг вақтнинг бирор t_0 моментидаги массаси m_0 ни билсак, у ҳолда (2) формула бўйича бактериянинг t вақтнинг исталган моментидаги массасини топамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$x(t_0)=m_0 \tag{3}$$

бўлсин. У ҳолда

$$m_0=Ce^{kt_0},\quad C=m_0e^{-kt_0}$$

демак,

$$x(t)=m_0e^{k\,(t-t_0)}. \tag{4}$$

(4) функция (1) тенгламанинг ечими бўлади; бундан ташқари, у (3) шартни қаноатлантиради.

(3) шарт *бошланғич шарт* дейилади.

Шундай қилиб, (1) тенглама чексиз кўп ечимлар тўпламига эгадир, бошланғич шартнинг берилиши эса бу тўпламдан ягона ечимни ажратади.

Амалда кўпинча қуйидагича вазият юзага келади. Бирор турдаги бактериянинг берилган шартлардаги кўпайиши (1) кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи $x=x(t)$ қонун бўйича боради. Бироқ k коэффициентнинг қиймати номаълумдир. k коэффициентни аниқлаш ва берилган турдаги бактериянинг берилган шароитда кўпайиш қонунини топиш талаб қилинади.

Бундай ҳолда (1) тенгламанинг (2) умумий ечими иккита: C ва k номаълум ўзгармасларга эга бўлади.

Юқоридагига ўхшаш (3) бошланғич шартдан C ўзгармасни топамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x(t)=m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{5}$$

k номаълумни топиш учун бактерияларнинг вақтнинг бирор $t_1 > t_0$ моментдаги массасини ҳисоблаймиз; бу масса m_1 га тенг бўлсин. У ҳолда

$$m_1 = m_0 e^{k(t_1-t_0)}, \quad k(t_1 - t_0) = \ln \frac{m_1}{m_0}$$

демак,

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{m_1}{m_0} = \frac{\ln m_1 - \ln m_0}{t_1 - t_0}.$$

k коэффициентнинг топилган қийматини (5) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = m_0 e^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \ln \frac{m_1}{m_0}}$$

ёки

$$x(t) = m_0 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}.$$

2. Радиоактив емирилиш. Тажрибалардан маълумки, радиоактив модданинг емирилиш тезлиги мавжуд бўлган модда миқдорига пропорционалдир.

Шундай қилиб, агар вақтнинг t моментига келиб ҳали емирилмаган модда миқдорини $x(t)$ орқали белгиласак, у ҳолда емирилиш тезлиги $\frac{dx}{dt}$ қуйидаги тенгламани қаноатлантиради:

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t), \tag{1}$$

бу ерда k—бирор мусбат ўзгармас.

(1) тенгламада k олдида минус ишораси олинган, чунки $x(t) > 0$ ва $\frac{dx}{dt} < 0$.

(1) тенглама *радиоактив емирилишнинг дифференциал тенгламаси дейилади.*

Кўрсатиш мумкинки (34-§ га қаранг),

$$x = Ce^{-kt} \tag{2}$$

(бу ерда C—бирор ўзгармас) кўринишидаги функция (1) тенгламанинг ечими бўлади ва бу тенглама бошқа ечимларга эга бўлмайди. Бошқача айтганда, (2) формула (бу ерда C—ихтиёрий ўзгармас) (1) тенгламанинг умумий ечимини беради.

k коэффициент радиоактив модданинг турига қараб аниқланади. C ўзгармас вақтнинг бирор t_0 моментидаги бошланғич шартдан топилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, айтайлик,

$$x(t_0) = m_0 \tag{3}$$

бўлсин. У ҳолда (2) формуладан $t = t_0$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$C = m_0 e^{kt_0}.$$

Демак,

$$x = m_0 e^{-k(t-t_0)} \tag{4}$$

ечим (3) бошланғич шартни қаноатлантиради.

Амалда радиоактив модданинг емирилиш тезлиги *ярим емирилиш даври* деб аталувчи катталик билан, яъни мавжуд бўлган модданинг ярим емирилиб тамом бўладиган вақт билан характерланади. Ярим емирилиш даврини T билан белгилаймиз ва k ни T орқали ифодалаймиз.

(4) дан $t = t_0 + T$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$$

ва шунинг учун

$$kT = \ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Шундай қилиб,

$$x = m_0 e^{-\frac{t-t_0}{T}\ln 2}.$$

ёки

$$x = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}.$$

Хусусан, агар $t_0 = 0$ десак,

$$x = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

бўлади.

3. Модданинг ҳосил бўлиш ва емирилиш тенгламалари тўғрисида умумий изоҳлар. Модданинг ҳосил бўлиш ёки емирилишининг кўпгина процесслари (юқоридаги мисолларга қаранг) қуйидаги шартга бўйсунади: модда миқдорининг ўзгариш тезлиги вақтнинг қаралаётган моментида мавжуд бўлган модда миқдорининг бирор функциясига пропорционал бўлади.

Айтайлик, $x(t)$ вақтнинг t моментидаги модда миқдори бўлсин. У ҳолда қаралаётган процесс учун

$$x' = kf(x)$$

тенглама ўринлидир, бу ерда f—ўзгарувчи x нинг мазкур процессни характерловчи бирор функциясидир, k пропорционаллик коэффициенти. k коэффициент ўзгармас бўлиши, яъни t вақтга боғлиқ ҳам, боғлиқ бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, кўпайиши рўй бераётган шароит (ҳарорат, ёритилганлик ва ҳ.к) эксперимент пайтида ўзгарса, у ҳолда бактерияларнинг кўпайиш тенгламасидаги k коэффициент ўзгармас бўла олмайди. Шундай қилиб, умумий ҳолда қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$x' = k(t)f(x).$$

Бундай дифференциал тенгламалар 34-§ да ўрганилади.

4. Ўзининг ҳар бир нуқтасида берилган уринмага эга бўлган эгри чизиқнинг дифференциал тенгламаси. Айтайлик, G—декарт координаталар системаси киритилган текисликдаги M нуқталарнинг бирор тўплами, x ва y эса M нуқтанинг координаталари бўлсин. Текисликнинг нуқталари билан $(x;\ y)$ сонлар жуфтлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлганлиги учун G ни $(x;\ y)$ нуқталар тўплами дейилади.

G тўпламдаги ҳар қайси $(x;\ y)$ нуқтага бирор ҳақиқий $f(x;\ y)$ сонни мос келтирадиган f мослик $(x;\ y)$ *нуқтанинг функцияси* ёки G тўпламда аниқланган x, y *ўзгарувчиларнинг икки ўзгарувчили функцияси* дейилади ва $f\colon G \to R$ ёки $f(x;\ y)$, $(x;\ y) \in G$ каби белгиланади.

Энди қуйидаги масалани қараб чиқайлик.

Ўзининг ҳар бир нуқтасида берилган $f(x;\ y)$ бурчак коэффициентли уринмага эга бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

Бошқача айтганда,

$$y' = f(x;\ y) \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантирадиган $y = \varphi(x)$ функцияни топиш керак, бу ерда y'— изланаётган функциянинг x бўйича ҳосиласи. Бу тенглама *дифференциал тенглама*, $\varphi(x)$—унинг ечими, $y = \varphi(x)$ тенглама билан берилган эгри чизиқ эса *интеграл эгри чизиқ* дейилади.

Битта хусусий ҳолни қарайлик.

f функция фақат x га боғлиқ бўлсин ва бирор $]a;\ b$ интервалда аниқланган бўлсин. Ушбу

$$y' = f(x) \qquad (2$$

тенглама аниқмас интеграллар назариясида ечилади. У ерда бу тенгламанинг барча ечимлари

$$y = \int f(x)\ dx$$

формула билан берилиши кўрсатилган эди. Бу формулада C ўзгармас ошкормас ҳолда мавжуддир. Ҳақиқатан ҳам, агар $F\ (x)$ функция $f\,(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда

$$y = F(x) + C \qquad (3)$$

бўлади.

Шундай қилиб, (2) тенглама чексиз кўп ечимлар тўпламига эга. (3) тенглама билан берилган ҳар қандай эгри чизиқ тайинланган C да қўйилган масаланинг ечими бўлади.

Аниқ интеграллар назариясидан маълумки, исталган узлуксиз $f\ (x)$ функциянинг бошланғич функцияси мавжуд бўлади ва бу бошланғич функция юқори чегараси ўзгарувчи бўлган интегралдан иборат бўлади. Демак,

$$y = \int_{x_0}^{x} f\,(t)\,dt + C.$$

Бу тенглама билан берилган эгри чизиқ координаталари x_0, C бўлган нуқтадан ўтади. Демак, ҳар қайси $(x_0;\ y_0)$ (бу ерда $x_0 \in\ ]a;\ b[$) нуқтадан биргина

$$y = \int_{x_0}^{x} f\,(t)\,dt + y_0$$

интеграл эгри чизиқ ўтади.

Машқлар

1. 1 соат давомида бактериялар массаси иккиланиши ва бактерияларнинг кўпайиш тезлиги мавжуд бўлган бактериялар миқдорига тўғри пропорционал эканлиги маълум. Берилган бактериялар тури учун кўпайишнинг дифференциал тенгламасини тузинг ва унинг умумий ечимини топинг.

2. Бир соат давомида радиоактив модданинг массаси 1% камайиши маълум. Емирилишнинг дифференциал тенгламасини ёзинг ва унинг умумий ечимини топинг.

3. Олдинги масалада тавсифланган радиоактив модданинг ярим емирилиш даврини топинг.

4. Бакда таркибида 10 кг туз бўлган 100 л эритма бор. Бакка минутига 3 л дан тезлик билан сув келиб туради ва бир вақтнинг ўзида эритма минутига 2 л тезлик билан бакдан оқиб чиқади, бунда бакдаги эритма аралаштирилиб турилгани учун эритманинг концентрацияси доимо бир хил сақланиб туради. Бир соатдан сўнг бакда қанча туз қолади?

5. Бирор модда бошқа моддага айланади, бунда ўзгариш тезлиги ҳали ўзгармаган модда миқдорига пропорционал бўлади. Жараён бошланганидан бир соат ўтгач 31,4 г модда, 3 соатдан сўнг эса 9,7 г модда қолди. Жараён бошланганда қанча модда бўлган?

6. Агар M (0; 4) нуқтадан ўтадиган эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти бу нуқтанинг ординатасига тенг бўлса, бу эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

7. Суюқликда айланаётган дискка ишқаланишнинг сусайтирувчи таъсири бурчак тезликка пропорционал (пропорционаллик коэффициенти k га тенг). Вақтнинг бошланғич $t=0$ моментида бурчак тезлик ω_0 га тенг эди. Вақтнинг исталган $t>0$ моментидаги бурчак тезликни топинг.

8. Ньютон қонунига биноан жисмнинг ҳавода совиш тезлиги жисм температураси ва ҳаво температураси орасидаги фарққа пропорционалдир. Ҳавонинг температураси 20°C бўлганда 20 минут ичида жисм 100°C дан 60°C гача совиди. Жисм температурасининг вақтга боғланишини аниқланг. Неча минутдан сўнг жисмнинг температураси 30°C гача совийди?

33-§. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар назариясининг асосий тушунчалари ва таърифлари

Функциялар номаълум бўлиб кирадиган ва фақат функцияларнинг ўзлари эмас, балки уларнинг ҳосилалари ҳам кирадиган тенгламалар *дифференциал тенгламалар* дейилади.

Агар тенгламага эркли ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг биринчи ҳосиласи кирса, бундай тенглама *биринчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади. Агар, бундан ташқари, тенгламага изланаётган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ҳам кирса, тенглама *иккинчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади.

Учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибли дифференциал тенгламалар ҳам худди шундай аниқланади. Умуман, *дифференциал тенгламанинг тартиби* деб бу тенгламага кирувчи энг юқори ҳосиланинг тартибига айтилади.

Кўп мисолларда (олдинги параграфга қаранг) изланаётган функциялар t вақтнинг функциялари бўлади. Бундай ҳолда изланаётган функциялар $x = x(t)$, $y = y(t)$ ва ҳ.к. орқали белгиланади. Умумий ҳолда эркли ўзгарувчи, одатдагидек, x орқали, изланаётган функциялар эса $y = y(x)$, $z = z(x)$ ва ҳ.к. орқали белгиланади. Бошқача белгилашлар ҳам бўлиши мумкин.

Умумий ҳолда биринчи тартибли дифференциал тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$F(x;\ y;\ y',) = 0, \qquad (1)$$

бу ерда $y = y(x)$ изланаётган номаълум функция, $y' = y'(x)$ функциянинг x бўйича ҳосиласи, F эса x, y, y' ўзгарувчиларнинг берилган функцияси.

Олдинги параграфда қаралган дифференциал тенгламалар қуйидаги кўринишга эгадир:

$$y' = f(x;\ y). \qquad (2)$$

Бундай тенгламалар *ҳосилага нисбатан ечилган тенгламалар* дейилади.

Агар $\varphi(x)$, $x \in]a; b[$ функция $]a; b[$ да $\varphi'(x)$ ҳосилага эга бўлса ва исталган $x \in]a; b[$ учун

$$\varphi'(x) = f(x;\ \varphi(x))$$

тенглик ўринли бўлса, $\varphi(x)$ функция (2) *дифференциал тенгламанинг ечими* дейилади.

Бошқача айтганда, $\varphi(x)$, $x \in]a; b[$ функцияни (2) тенгламада y нинг ўрнига қўйилганда (2) тенглама $]a; b[$ интервалда x бўйича айниятга айланса, $\varphi(x)$, x $]a; b[$ функция (2) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

(1) дифференциал тенгламанинг ечими ҳам худди шундай аниқланади.

Келгусида фақат ҳосилага нисбатан ечилган тенгламаларгина, яъни (2) кўринишдаги ёки шу кўринишдаги тенгламаларга келтириладиган тенгламалар қаралади.

(2) кўринишдаги тенгламанинг берилиши x, y ўзгарувчиларнинг функцияси $f(x; y)$ нинг берилишига тенг кучлидир. Геометрик нуқтаи назардан x, y ларнинг f функцияси текисликнинг координаталари x, y бўлган нуқталарининг бирор G тўпламида аниқланган функциядир.

$y = \varphi(x)$, $x \in]a; b[$ (бу ерда $\varphi(x)$ (2) тенгламанинг бирор ечими) тенглама билан берилган исталган эгри чизиқ (2) тенгламанинг *интеграл эгри чизиғи* дейилади.

Бу таърифдан келиб чиқадики, (2) тенгламанинг интеграл эгри чизиғи f функция аниқланган G соҳада тўла ётади ва интеграл эгри чизиқ ўзининг ҳар бир $M(x; y)$ нуқтасида бурчак коэффициенти f функциянинг бу M нуқтадаги қийматига тенг бўлган уринмага эга бўлади.

(2) тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0 \qquad (3)$$

(бу ерда x_0, y_0 — берилган сонлар) шартни қаноатлантирадиган ечимларини топиш масаласи *Коши масаласи* дейилади. (3) шарт *бошланғич шарт* дейилади. (2) тенгламанинг (3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими (2), (3) *Коши масаласининг ечими* дейилади.

Коши масаласининг ечими содда геометрик талқинга эга. Дарҳақиқат, берилган таърифларга кўра (2), (3) Коши масаласини ечиш деган сўз (2) тенгламанинг берилган $M_0(x_0; y_0)$ нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиғини топиш демакдир.

Агар $f(x; y)$ функция баъзи етарлича умумий шартларни қаноатлантирса, у ҳолда f функция аниқланган G соҳанинг ҳар қайси нуқтасидан (2) тенгламанинг ягона эгри чизиғи ўтишини исботсиз қайд қилиб ўтамиз. Шундай қилиб, бу дифференциал тенглама чексиз кўп ечимга эгадир.

Кўриб чиқилган мисоллар дифференциал тенгламанинг барча (ёки деярли барча) ечимлари

$$y = \varphi(x; C) \qquad (4)$$

(бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас) формула билан берилишини кўрсатади.

(2) тенгламанинг C нинг ҳар бир тайинланган қийматида x нинг функцияси сифатида ечими бўладиган (4) функция (2) *тенгламанинг умумий ечими* дейилади.

(2) тенгламанинг (4) умумий ечимдан C ўзгармаснинг конкрет қийматида ҳосил қилинадиган ҳар бир ечими *хусусий ечим* дейилади. C ўзгармас *интеграллаш ўзгармаси* дейилади.

(2) тенгламага доир яна бир изоҳни келтирамиз.

(2) тенгламанинг иккала қисмини эркли ўзгарувчининг дифференциали dx га кўпайтириб, дифференциаллар қатнашган ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$dy = f(x; y)\, dx. \qquad (5)$$

(5) тенглама ҳам биринчи тартибли дифференциал тенглама дейилади.

Дифференциалнинг таърифидан (5) тенгламанинг (2) тенгламага тенг кучли эканлиги келиб чиқади.

Машқлар.

1. Ушбу

а) $y=\sin x-1$;

б) $y=e^{-\sin x}$;

в) $y=\sin x$

функциялар $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ тенгламанинг ечими бўладими

2. Ушбу

а) $y=\sqrt{1-x^2}$;

б) $y=-\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=\sqrt{C-x^2}$ (C — ихтиёрий мусбат ўзгармас) функцияла

$$x\,dx+y\,dy=0$$

тенгламанинг ечимлари бўладими?

3. α нинг берилган функция ушбу тенгламаларнинг ечими бўладиган қийматларини топинг:

а) $y=e^{\alpha x}+\frac{1}{3}e^x$, $\quad y'+2y=e^x$;

б) $y=(x^2-x)^\alpha$, $\quad y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$;

в) $y=x^\alpha$, $\quad x^2y''+2xy'-6y=0$.

4. A ва α нинг қандай қийматларида $y=A\cos\alpha x$ функция $y'=y\,\mathrm{tg}\,x$ тенгламанинг ечими бўлади?

34-§. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар

1. Таърифлар ва мисоллар. Ушбу

$$y'=f(x)g(y) \qquad (1$$

кўринишдаги дифференциал тенгламалар *ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар* дейилади, бу ерда $f(x$ ва $g(y)$ — берилган функциялар.

Равшанки, агар a сон $g(y)=0$ тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $y=a$ функция (a—ўзгармас) (1) тенгламанинг ечими бўлади. $g(y)\neq 0$ бўладиган y лар учун (1) тенглама

$$p(y)y'=f(x) \qquad (2)$$

тенгламага тенг кучлидир, бу ерда $p(y)=\frac{1}{g(y)}$. Бу тенгламада y фақат чап томонда, x эса фақат ўнг томонда иштирок этяпти. Шунинг учун „(1) тенгламадан (2) тенгламага ўтамиз“ дейиш ўрнига „(1) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз“ дейилади.

(2) тенглама дифференциалларда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$p(y)\,dy = f(x)\,dx. \qquad (3)$$

у ерда чап томонда y га боғлиқ бўлган бирор $P(y)$ ункциянинг дифференциали, ўнг томонда эса x га боғиқ бўлган $F(x)$ функциянинг дифференциали турибди.

(2) тенгламанинг ҳар иккала қисмини x бўйича интеграллаб,

$$P(y) = F(x) + c \qquad (4)$$

и ҳосил қиламиз, бу ерда c — ихтиёрий ўзгармас. Деак, агар дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$, $x \in \,]\,a;\ b[$ ункция (2) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда (y) C згармаснинг бирор қийматида (4) тенгламанинг ечими ўлади, яъни исталган $x \in \,]\,a;\ b]$ учун

$$P(\varphi(x)) = F(x) + c \qquad (5)$$

ўлади. Ва аксинча, агар дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$, $\in\,]a;b]$ функция (4) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳола у (2) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Ҳаиқатан ҳам (5) тенгликнинг иккала қисмини x бўйича ифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$p(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(x),$$

у эса $\varphi(x)$ функция (2) тенгламани қаноатлантиришии билдиради.

Шундай қилиб, (2) дифференциал тенгламанинг исалган ечими (4) формуладан ҳосил қилинади. Бу ҳола (4) формула (2) *тенгламанинг умумий ечимини беради* деб айтамиз.

(2) тенгламанинг барча ечимлари (1) тенгламанинг ҳам ечимлари бўлади; $g(y) \neq 0$ бўлган соҳада (1) тенглама бошқа ечимларга эга бўлмайди. Агар $g(y)$ функция нолга айланса, (1) тенглама бундан ташқари $y=a$ кўринишдаги ечимларга ҳам эга бўлади, бу ерда a сон шундайки, $g(a)=0$.

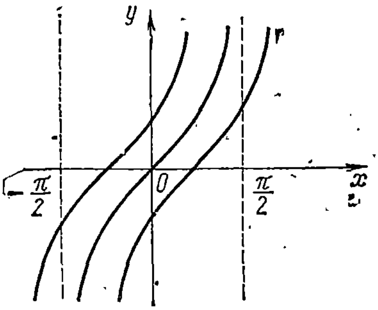
1-мисол. *Ушбу*

$$y' = 1 + y^2 \qquad (6)$$

енгламанинг барча ечимларини топинг.

Ечиш. (6) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган енгламадир. (6) тенгламанинг иккала қисмини $1+y^2$ а қисқартирамиз ва ҳосил бўлган

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1 \qquad (7)$$



39-расм.

тенгламанинг иккала қисмини x бўйича интеграллаймиз. (7) тенгламанинг чап қисми $\operatorname{arc\,tg} y$ (бу ерда $y = (x)$) функциянинг x бўйича ҳосиласи бўлгани учун интеграллашдан сўнг

$$\operatorname{arc\,tg} y = x + C$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда C— ихтиёрий ўзгармас. Бу ердан

$$y = \operatorname{tg} (x + C)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу (6) тенгламанинг умумий ечимидир. (6) тенглама бошқа ечимларга эга эмас. Тегишли интеграл эгри чизиқларнинг жойлашиш схемаси 39-расмда келтирилган. Уларнинг барчаси $y = \operatorname{tg} x$ эгри чизиқни Ox ўқ бўйлаб чап ёки ўнг томонга суриш орқали ҳосил қилинади.

2-мисол. Ушбу

$$y' = 2\sqrt{y} \qquad (8)$$

тенгламанинг барча ечимларини топинг.

Ечиш. (8) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. $y = 0$ функция унинг ечими эканлиги равшандир.

Энди $y > 0$ бўлсин. (8) тенглама дифференциалларда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$dy = 2\sqrt{y}dx.$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб,

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

тенгламани ва бу тенгламани интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\sqrt{y} = x + C,$$

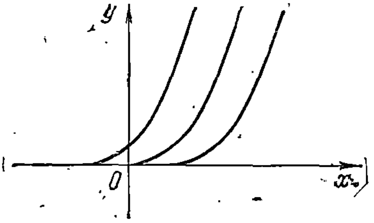
бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас. Бу ердан $y = (x + C)$, шу билан бирга $x + C \geqslant 0$.

Шундай қилиб, C ўзгармаснинг ҳар бир тайинланган қийматида

$$y=(x+C)^2 \quad , \quad x \geqslant -C$$

функция (8) тенгламанинг ечими бўлади. Бу тенглама $y > 0$ ярим текисликда бошқа ечимларга эга эмас.

(8) тенглама интеграл эгри чизиқларининг жойлашиш схемаси 40-расмда кўрсатилган. $y > 0$ ярим текисликда ҳар бир интеграл эгри чизиқ



40-расм.

$$y = x^2, \quad x > 0$$

парабола тармоғини Ox ўқ бўйлаб чапга ёки ўнгга суриш орқали ҳосил қилинади. Ox тўғри чизиқ ҳам интеграл чизиқ бўлади.

2. **Умумий ечимини топиш қоидаси.** Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш учун:

1) ўзгарувчиларни ажратиш, яъни берилган тенгламани

$$p(y)\,dy = f(x)\,dx \tag{1}$$

кўринишга келтириш;

2) ҳосил қилинган тенгламанинг иккала қисмини мос равишда y ва x бўйича интеграллаш, яъни $p(y)$ функциянинг бирор $P(y)$ бошланғич функциясини ва $f(x)$ функциянинг бирор $F(x)$ бошланғич функциясини топиш;

3) тенгламани ёзиш лозим

$$P(y) = F(x) + C \tag{2}$$

(бу ерда C—ихтиёрий ўзгармас)

(2) тенгламани y га нисбатан ечиб, (1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \varphi(x; C)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ечим *берилган тенгламанинг ҳам умумий* ечими дейилади.

Бу тенглама бошқа ечимларга ҳам эга бўлиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз. Масалан,

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{3}$$

тенгламадаги $g(y)$ функция y_0 нуқтада нолга айланса, у ҳолда (3) тенглама $y = y_0$ ечимга эга бўлади. Бу ечим умумий ечимга кирмаслиги мумкин, яъни у умумий ечимдан C ўзгармаснинг ҳеч қандай қийматида ҳосил бўлмайди. Шу сабабли, (3) нинг ҳамма ечимларини кўрсатиш учун яна $g(y)=0$ тенгламанинг ҳамма ечимларини топиш ҳам керак.

1-мисол. Ушбу

$$y'=xy \tag{4}$$

тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dy}{y}=x\,dx,$$

бу тенгликни интеграллаб, топамиз:

$$\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

бу ерда C_1 — ихтиёрий ўзгармас. Бу ердан

$$|y|=e^{C_1}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

ёки

$$y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \tag{5}$$

эканлиги келиб чиқади, бу ерда $C=\pm e^{C_1}$.

(4) тенгламанинг ўнг томони $y=0$ да нолга айланади, шунинг учун (4) $y=0$ ечимга эга. Бу ечим (5) дан $C=0$ да ҳосил қилинади. Шундай қилиб, (5) формула (4) тенгламанинг барча ечимларини беради.

2-мисол. Ушбу

$$y'=xy^2$$

дифференциал тенгламанинг барча ечимларини топинг.

Ечиш. Равшанки, $y=0$ бу тенгламанинг ечими бўлади. Энди $y\neq 0$ бўлсин дейлик. У ҳолда

$$\frac{dy}{y^2}=x\,dx,$$

демак,

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y=-\frac{2}{x^2+C}$$

ўринишда бўлади, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас. Шуни қайд қиламизки, $y=0$ ечим умумий ечимдан C ўзгармаснинг ҳеч бир қийматида ҳосил бўлмайди.

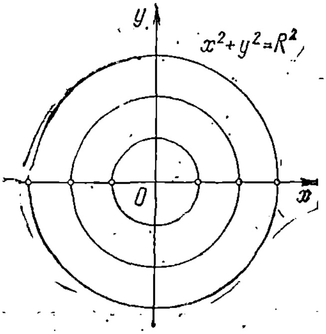
3-мисол. Ушбу

$$y' = -\frac{x}{y}$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$ydy = -xdx,$$



41-расм.

бу тенгликни интеграллаб топамиз:

$$y^2+x^2=C.$$

Бу ерда $C>0$ эканлиги равшан. $C=R^2$ дейлик.

Ҳосил қилинган тенглама радиуси R ва маркази (0; 0) нуқтада бўлган айлананинг тенгламасидир. Бу тенглама ҳар бир тайинланган $R>0$ да ушбу иккита

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2},\quad x\in]-R;\ R[$$

дифференциалланувчи тенгламани аниқлайди, улар берилган тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу тенглама бошқа ечимларга эга эмас.

Берилган тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари пастки ва юқориги очиқ ярим текисликларда жойлашган ярим айланалардан иборат бўлади (41- расм).

Изоҳ. 3-мисолда қаралган тенглама дифференциалларда қуйидаги кўринишга эга:

$$ydx+xdx=0.$$

Бундай ёзувда x ва y ўзгарувчилар тенг кучлидир: y ни x нинг функцияси деб ҳисоблаш мумкин ёки, аксинча, x ни y нинг функцияси деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун баъзан бу тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари маркази координаталар бошида бўлган айланалар бўлади деб айтадилар.

4-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$y' = \frac{xy\cos x}{1+y}. \qquad (6)$$

Ечиш. Равшанки, $y=0$ ўзгармас функция ечим бўлади.

Энди $y\neq 0$ бўлсин. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = x\cos x dx.$$

Бу тенгламанинг чап томонини y бўйича, ўнг томонини эса x бўйича интеграллаб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y+\ln|y| = x\sin x+\cos x + C, \qquad (7$$

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас.

(6) тенгламанинг умумий ечимини топиш учун (7 тенгламани y га нисбатан ечиш керак. Афсуски, бундай қилиш мумкин эмас, чунки ечимлар элемента функциялар орқали ифодаланмайди. Бироқ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш масалас ҳосила қатнашмаган тенгламани ечишга келтирилди Бу ҳолда (6) тенгламанинг умумий ечими (7) формул билан аниқланади деб айтамиз. Нуқталарининг координаталари (7) тенгламани қаноатлантирадиган эгр чизиқлар C ўзгармаснинг бирор қийматида (6) тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари бўлади. $y=0$ тўғр чизиқ ҳам (6) тенгламанинг интеграл эгри чизиғи бўлади.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

1. $y' = x+\sin x$.
2. $y' = e^{-y}-1$.
3. $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$.
4. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy = 0$.
5. $(\sin x)\,y' = y\ln y$.
6. $y' = e^{x+y}$.
7. $y\sin x\,dx + \cos x\,dy = 0$.
8. $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$.
9. $(1+x)\,dy = 2y\,dx$.
10. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$.
11. $(1+y^2)\,dx - x\,dy = 0$.

Тенгламаларнинг барча ечимларини топинг:

12. $y' = \sqrt[3]{y^2}$.
13. $y' = \sqrt{1-y^2}$.

14. $y' = 4x\sqrt{y-1}$.

15. $xy' + y = y^2$.

16. $dy - xy(y+2)\,dx = 0$.

17. $\sqrt{y}\sin^2 x\,dx + dy = 0$.

Коши масаласининг ечимини топинг:

18. $tx' = 2x,\ x(2) = 3$.

19. $(1-t)x' - x = 0,\ x(0) = 1$.

20. $x' = \dfrac{t(1-x^2)}{x(1+t^2)},\ x(\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{2}$.

21, 22- машқларда тенгламанинг берилган M нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиқларини топинг:

21. $y' = \dfrac{y}{x}$, а) $M(1;\ 1)$; б) $M(1;\ 0)$.

22. $dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$.

23. Қуйидаги хоссага эга бўлган барча эгри чизиқларни топинг: агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан координата ўқларига параллел қилиб, ўқлар билан кесишгунча тўғри чизиқлар ўтказсак, у ҳолда эгри чизиқ ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакни юзларининг нисбати 1:2 қаби бўлган иккита фигурага ажратади.

24. Жисмнинг тезлиги ўтилган йўлга пропорционал. Жисм дастлабки 10 секундда 100 метр, 15 секундда 200 метр масофани ўтади. Жисм t вақт ичида қанча масофани ўтади?

25, 26- машқларда берилган M нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиқларнинг тенгламаларини топинг:

25. $(1+e^x)yy' = e^y,\ M(0;\ 0)$.

26. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ M(0;\ 1)$.

35- §. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

1. Биринчи тартибли чизиқли тенгламанинг умумий ечими. Ушбу

$$y' = f(x)\,y + g(x) \tag{1}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламалар *биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар* дейилади.

Агар $g(x) \equiv 0$ бўлса, (1) чизиқли дифференциал тенглама *бир жинсли* тенглама дейилади. У

$$y' = f(x)\,y \tag{2}$$

кўринишга эга бўлади.

(2) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама-

дир. Олдинги параграфда бу тенгламанинг барча ечимлари

$$y = Ce^{F(x)} \tag{3}$$

формула билан берилиши кўрсатилган эди, бу ерда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функциясидир, C эса ихтиёрий ўзгармас. Хусусан, агар $f(x)$ функция ўзгармас бўлса, масалан, исталган x учун $f(x) = k$ бўлса, у ҳолда

$$y' = ky$$

тенглама

$$y = Ce^{kx}$$

умумий ечимга эга бўлади.

Агар $f(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда (1) тенглама

$$y' = g(x)$$

кўринишда бўлади. Маълумки, бу тенгламанинг умумий ечими

$$y = G(x) + C$$

бўлади, бу ерда $G(x)$ функция $g(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси, C эса ихтиёрий ўзгармас (интеграллаш ўзгармаси).

Теорема. *Агар $y = \varphi(x)$ (1) тенгламанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда бу тенгламанинг барча ечимлари*

$$y = Ce^{F(x)} + \varphi(x) \tag{4}$$

формула билан берилади, бу ерда $Ce^{F(x)}$ — бир жинсли (2) тенгламанинг умумий ечими.

Исбот. Дастлаб C ўзгармаснинг исталган қийматида (4) функция (1) тенгламанинг ечими бўлишини текширамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$y' = Ce^{F(x)}F'(x) + \varphi'(x) = Ce^{F(x)}f(x) + f(x)\varphi(x) + g(x) =$$
$$= f(x)(Ce^{F(x)} + \varphi(x)) + g(x) = f(x)y + g(x).$$

Энди $\psi(x)$ — (1) тенгламанинг бирор ечими бўлсин. $y = \psi(x) - \varphi(x)$ функция бир жинсли (2) тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатамиз:

$$y' = \psi'(x) - \varphi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x) - f(x)\varphi(x) - g(x) =$$
$$= f(x)(\psi(x) - \varphi(x)) = f(x)y.$$

Шу сабабли шундай C ўзгармас мавжуд бўладики, унинг учун

$$\psi(x) - \varphi(x) = Ce^{F(x)}$$

бўлади, демак,

$$\psi(x) = Ce^{F(x)} + \varphi(x).$$

Шундай қилиб, (1) тенгламанинг исталган ечими (4) формуладан ўзгармас C нинг бирор қийматида ҳосил бўлади.

Теорема исбот бўлди.

Исбот қилинган теоремадан (1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қилиш учун унинг ҳеч бўлмаганда битта хусусий ечимини топиш етарли бўлиши келиб чиқади.

Ушбу

$$y' = ky + b \tag{5}$$

кўринишдаги чизиқли тенглама учун хусусий ечим осон топилади; бу ерда k ва b — бирор сонлар ва $k \neq 0$. Бу хусусий ечим $y = -\frac{b}{k}$ ўзгармас функция бўлишини текшириб кўриш осон. Шунинг учун (5) тенгламанинг умумий ечими

$$y = Ce^{kx} - \frac{b}{k}$$

кўринишга эга бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$y' + 2y + 3 = 0$$

тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламада $k = -2$, $b = -3$.

Демак, умумий ечим

$$y = Ce^{-2x} - \frac{3}{2}$$

формула орқали аниқланади, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас.

2-мисол. Ушбу

$$y' + xy = 4x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Танлаш орқали $y = 4$ функция берилган чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими эканлигини аниқлаймиз. Энди тегишли бир жинсли

$$y' + xy = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

(4) формула бўйича бу тенгламанинг умумий ечими

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

бўлишини топамиз.

Исбот қилинган теоремага кўра берилган чизиқли бир жинсли мос тенгламанинг ечими

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 4$$

формула билан берилади, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас.

2. Ўзгармасни вариациялаш методи. Бир жинсли бўлмаган

$$y' = f(x)\,y + g(x) \tag{1}$$

тенгламанинг хусусий ечимини топиш методини кўрсатамиз. Айтайлик,

$$y = Ce^{F(x)} \tag{2}$$

функция чизиқли бир жинсли

$$y' = f(x)\,y \tag{3}$$

тенгламанинг умумий ечими бўлсин, у ҳолда (1) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = u(x)\,e^{F(x)}, \tag{4}$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $u(x)$ — номаълум функция, (4) функцияни (1) тенгламага қўйиб, топамиз:

$$u'e^F + ue^Ff = fue^F + g$$

ва узил-кесил

$$u' = g(x)\,e^{-F(x)}.$$

Демак, $u(x)$ функция $g(x)\,e^{-F(x)}$ функция учун бирорга бошланғич функция бўлади.

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган (1) тенгламанинг хусусий ечимини топиш учун тегишли бир жинсли (3) тенгламанинг умумий ечими (2) да ўзгармас C

ни $g(x)e^{-F(x)}$ функциянинг бирор бошланғич функцияси билан алмаштириш керак.

Хусусий ечимни топишнинг бу усули *ўзгармасни вариациялаш методи* дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$y' + xy = \sin x \tag{5}$$

тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенглама учун хусусий ечимни танлаш орқали топиб бўлмайди. Уни ўзгармасни вариациялаш методи ёрдамида топамиз.

Тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

кўринишда бўлгани учун бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = u(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

кўринишда излаш керак, бу ерда $u(x)$ — номаълум функция.

Буни тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u' = \sin x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Бу ердан $u(x)$ ни топамиз:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt.$$

Демак, (5) тенгламанинг хусусий ечими

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt$$

кўринишда бўлади, умумий ечими эса теоремага кўра

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt \tag{6}$$

формула билан ифодаланади, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас, x_0 эса бирор тайинланган сон.

2-мисол. (5) тенгламанинг $y(0)=1$ шартни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Қулайлик учун (6) формулада $x_0 = 0$ деймиз. У ҳолда (5) тенгламанинг умумий ечими

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt$$

кўринишда бўлади.

$y(0)=1$ шартдан $C=1$ ни топамиз, шунинг учун қўйилган масаланинг изланаётган ечими

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt$$

дан иборат бўлади.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

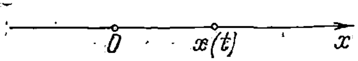
1. $x' = -\frac{2x}{t} + t^2$.
2. $x' = 2t - 2tx$.
3. $x' + x\operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$.
4. $x' = 2tx + (t - t^3)e^{t^2}$.
5. $t(t^3 + 1)x' + (2t^3 - 1)x = x^2 - \frac{2}{x}$.

Қуйидаги машқларда берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимни топинг:

6. $(9 - t^2)x' + tx = 9,\ x(3) = 3$.
7. $x' - x\operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t},\ x(0) = 0$.
8. $x' = x\sin t + 2\sin 2t,\ x(0) = 1$.
9. $(t + 1)dx = (2x + (t + 1)^4)dt,\ x(0) = 2$.
10. Электр занжири кетма-кет уланган V кучланиш берувчи ўзгармас ток манбаи, R қаршилик, L ўзиндукция ва $t = 0$ да уланадиган виключателдан иборат. Ток кучининг вақтга боғланишини топинг.
11. Электр занжири кетма-кет уланган, кучланиши $E = V\sin\omega t$ қонун бўйича ўзгарадиган ток манбаи, R қаршилик ва L ўзиндукциядан иборат. Қарор топган режимда занжирдаги ток кучини топинг.

36- §. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга мисоллар

1. Нуқтанинг ҳаракат тенгламаси. m массали P нуқтанинг F куч таъсири остида l тўғри чизиқ бўйича ҳаракатини қараймиз. Бунинг учун l да бирор O нуқтани ва бирор йўналишни, масалан, чапдан ўнгга томон йўналишни танлаймиз (42-расм). У ҳолда P нуқтанинг l тўғри чизиқда вақтнинг t моментидаги вазияти $x=x(t)$ координата билан характерланади.



42-расм.

Маълумки, биринчи тартибли $x'(t)$ ҳосила P нуқтанинг тезлигидан, иккинчи тартибли $x''(t)$ ҳосила эса P нуқтанинг t моментдаги тезланишидан иборат. Шунинг учун Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра қуйидаги тенглама тўғридир:

$$mx''(t) = F, \qquad (1)$$

Бу тенглама *P нуқтанинг ҳаракат тенгламаси* дейилади.

Умумий ҳолда (1) тенгламадаги F куч t вақтга, x нуқтанинг вазиятига ва $x'(t)$ тезликка боғлиқ бўлиши мумкин, яъни умумий ҳолда (1) тенглама

$$mx'' = F(t;\ x;\ x') \qquad (2)$$

кўринишда бўлади, бу ерда F функция t, x, x' ўзгарувчиларнинг берилган функцияси.

(2) тенглама иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлгани учун у *иккинчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади.

Агар $\varphi(t), t \in]a; b[$ функция $]a; b[$ интервалда $\varphi'(t)$ ва $\varphi''(t)$ ҳосилаларга эга бўлса ва ихтиёрий $t \in]a; b[$ учун

$$m\varphi''(t) = F(t;\ \varphi(t);\ \varphi'(t))$$

тенглик ўринли бўлса, яъни x нинг ўрнига $\varphi(t)$ ни қўйганда (2) тенглама t бўйича айниятга айланса, $\varphi(t)$ функция (2) *тенгламанинг ечими* дейилади.

Физика курсидан маълумки, нуқтанинг ҳаракатини бир қийматли тавсифлаш учун ҳаракат тенгламасидан ташқари нуқтанинг вақтнинг бирор t_0 моментидаги вазияти ва тезлигини, яъни

$$x(t_0) = x_0\ , \qquad x'(t_0) = v_0 \qquad (3)$$

ни ҳам билиш керак.

(3) шартлар *бошланғич шартлар* ёки *Коши шартлари* дейилади, (2) тенгламанинг (3) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топиш масаласи эса *Коши масаласи* дейилади. (2) тенгламаларнинг кенг синфи учун Коши масаласи ягона ечимга эга эканлиги исбот қилинади.

2. Нуқтанинг ўзгармас куч таъсири остидаги ҳаракати. Дастлаб F куч P нуқтанинг ҳаракати давомида ўзгаришсиз қоладиган ҳолни, яъни F куч ўзгармас бўлган ҳолни қараб чиқамиз. Бу ҳолда ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x'' = a, \qquad (1)$$

бу ерда $a = \frac{F}{m}$. (1) тенгламадан $v = x'$ тезлик биринчи тартибли

$$v' = a \qquad (2)$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади.

Аниқмас интеграллар назариясидан маълумки,

$$v = at + C_1$$

формула (2) тенгламанинг барча ечимларини беради бу ерда C_1 — ихтиёрий ўзгармас. Демак, иккинчи тартибли (1) тенгламани ечиш биринчи тартибли

$$x' = at + C_1 \qquad (3)$$

дифференциал тенгламани ечишга келтирилади.

t бўйича интеграллаб топамиз:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2, \qquad (4)$$

бу ерда C_2 — ихтиёрий ўзгармас.

Шундай қилиб, (4) формула (1) тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади, шу сабабли у (1) *тенгламанинг умумий ечими* дейилади.

Иккинчи тартибли (1) дифференциал тенгламанинг умумий ечимида иккита: C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармас қатнашади. C_1 ва C_2 ўзгармасларнинг ҳар бир конкрет қийматида (4) формуладан ечимлар олинади ва улар *хусусий ечимлар* деб аталади.

Хусусий ечимни ҳосил қилиш учун

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0 \qquad (5)$$

бошланғич шартларни берамиз.

У ҳолда C_1 ва C_2 ни топиш учун қуйидаги алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} at_0^2 + C_1 t_0 + C_2 = x_0, \\ at_0 + C_1 = v_0. \end{cases}$$

Бу системани C_1 ва C_2 га нисбатан ечиб ва топилган қийматларни (4) формулага қўйиб, бошланғич шартлари (5) бўлган (1) тенглама учун Коши масаласининг ечимини ҳосил қиламиз.

Бироқ амалда (1), (5) Коши масаласининг ечимини топиш учун бошқача йўл тутилади.

(1) тенгламанинг иккала қисмини t бўйича t_0 дан t гача интеграллаб:

$$\int_{t_0}^{t} x''(t)dt = \int_{t_0}^{t} adt,$$

Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича биринчи тартибли ушбу

$$x'(t) - x'(t_0) = a(t - t_0)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қилинади. Яна t бўйича t_0 дан t гача интеграллаб,

$$x(t) - x(t_0) - x'(t_0)(t - t_0) = \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

ни топилади. Демак,

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Энди (5) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимни ҳосил қилиш учун $x(t_0)$ нинг ўрнига x_0 ни, $x'(t_0)$ нинг ўрнига эса v_0 ни ёзиш керак.

Шундай қилиб, (1), (5) Коши масаласининг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Мисол. Моддий нуқтанинг оғирлик кучи таъсири остидаги ҳаракатини қарайлик. Бунинг учун Ox ўқни вертикал пастга йўналтирамиз ва соддалик учун $t_0 = 0$ деймиз. У ҳолда ҳаракат тенгламаси $x'' = g$ кўринишга эга бўлади, бу ерда $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — эркин тушиш тезланиши. Бу тенгламани ечиб топамиз:

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

3. Нуқтанинг даврий куч таъсири остидаги ҳаракати. Айтайлик, m массали P нуқтага таъсир қиладиган F куч t вақтга қуйидагича боғланган бўлсин:

$$F = A\cos(\omega t + \alpha),$$

бу ерда $A>0$ ва $\omega>0$. У ҳолда ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$mx'' = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Бу тенгламанинг ечимларини топамиз. Бунинг учун тенгламанинг иккала қисмини t бўйича t_0 дан t гача интеграллаймиз. У ҳолда

$$mx'(t) - mx'(t_0) =$$

$$= A\int_{t_0}^{t}\cos(\omega t + \alpha)dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \alpha)\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) - \frac{A}{\omega}\sin(\omega t_0 + \alpha)$$

ва, демак,

$$x'(t) = \frac{A}{\omega m}\sin(\omega t + \alpha) + x'(t_0) - \frac{A}{\omega m}\sin(\omega t_0 + \alpha).$$

Яна t бўйича t_0 дан t гача интеграллаб, топамиз:

$$x(t) - x(t_0) =$$

$$= -\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega \mathrm{t}_0 + \alpha) +$$

$$+ \left(x'(t_0) - \frac{A}{m\omega}\sin(\omega t_0 + \alpha)\right)(t - \mathrm{t}_0).$$

Шундай қилиб,

$$x = -\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t_0 + \alpha) +$$

$$+ \left(v_0 - \frac{A}{m\omega}\sin(\omega t_0 + \alpha)\right)(t - t_0) + x_0,$$

бу ерда $x_0 = x(t_0)$, $v_0 = x'(t_0)$. Хусусан, агар $t_0=0$ бўлса, у ҳолда

$$x = -\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{m\omega^2}\cos\alpha +$$

$$+ \left(v_0 - \frac{A}{m\omega}\sin\alpha\right)t + x_0.$$

Ҳосил қилинган ечимда иккита ихтиёрий ўзгармас — бошланғич маълумотлар x_0 ва v_0 қатнашишини қайд қилиб ўтамиз.

4. Нуқтанинг тезликка пропорционал бўлган куч таъсири остида ҳаракати. Айтайлик, m массали P нуқтага иккита куч: нуқтанинг ҳаракат йўналишидаги ўзгармас F куч ва тезликка пропорционал бўлиб, ҳаракат йўналишига тескари йўналган куч таъсир қилаётган бўлсин. У ҳолда P нуқтанинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$mx'' = F - kx', \qquad (1)$$

бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти, шу билан бирга $k > 0$.

(1) тенгламанинг иккала қисмини t бўйича интеграллаб, топамиз:

$$mx' = Ft - kx + C, \qquad (2)$$

бу ерда C — интеграллаш ўзгармаси.

(2) тенглама чизиқли тенгламадир. Унинг умумий ечимини топиш учун тегишли бир жинсли

$$mx' = -kx$$

тенгламанинг умумий ечимини ва бир жинсли бўлмаган (2) тенгламанинг бирор хусусий ечимини топиш керак.

(3) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги формула ёрдамида берилади:

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{m} t},$$

бу ерда C_1 — ихтиёрий ўзгармас.

(2) тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Бу хусусий ечимни A ва B номаълум коэффициентли

$$x = At + B \qquad (4)$$

чизиқли функция кўринишида излаймиз.

A ва B ни топиш учун (4) функцияни (2) тенгламага қўямиз:

$$Am = Ft - kAt - kB + C.$$

Бу тенглик ҳар қандай t учун тўғри бўлиши керак, шунинг учун $t = 0$ да ушбу

$$Am = -kB + C$$

тенгламани, $t = 1$ да эса

$$F - kA = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$A = \frac{F}{k}, \qquad B = \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}.$$

Энди (2) тенгламанинг хусусий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x=\frac{F}{k}t+\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2}.$$

Олдинги параграфда исбот қилинган теоремага кўра (2) тенгламанинг умумий ечими ушбу формула ёрдамида берилади:

$$x=C_1e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{F}{k}t+\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2}.$$

Бу ерда

$$C_2=\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2}$$

деб олайлик.

Равшанки, агар C ихтиёрий ўзгармас бўлса, у ҳолда C_2 ҳам ихтиёрий ўзгармас бўлади. Шунинг учун (1) тенгламанинг умумий ечими

$$x=C_1e^{-\frac{kt}{m}}+C_2+\frac{F}{k}t \tag{5}$$

кўринишда бўлади.

(5) формуладан келиб чиқадики, P нуқтанинг ҳаракати деярли ўзгармас тезлик билан ўтиб, бу тезлик $\frac{F}{k}$ га тенг бўлади. Бу фактдан амалда кенг фойдаланилади. Масалан, парашютнинг қўлланилиши ана шунга асосланган. Одам парашютда тушаётганида унга $F=mg$ оғирлик кучи ва тезликка пропорционал бўлиб, ҳаракатга тескари йўналган ҳавонинг қаршилик кучи таъсир қилади. Одамнинг парашютда тушиш ҳаракати (5) тенглама билан тавсифланади.

Машқлар

1. Қайиққа $v_0=6$ м/с бошланғич тезлик берилган. Ҳаракат бошлангандан сўнг 69 секунд ўтгач, қайиқнинг тезлиги икки баравар камайди. Агар сувнинг қаршилик кучи қайиқнинг тезлигига тўғри пропорционал бўлса, қайиқнинг ҳаракат қонунини топинг.

2. m массали зарра вертикал юқорига v_0 тезлик билан отилган. Унга оғирлик кучи ва $2\,kmv$ га тенг бўлган қаршилик кучи таъсир қилади. Вақтнинг t моментида зарра отилган жойдан заррагача бўлган масофани топинг.

3. Ўқ қалинлиги h см бўлган тахтага v_0 м/с тезлик билан киради ва ундан v_1 м/с тезлик билан чиқади. Агар тахтанинг ўқ ҳаракатига қаршилик кучи ўқ тезлигининг квадратига пропорционал эканлиги маълум бўлса, ўқнинг тахтадан ўтиш вақтини аниқланг.

4. m массали нуқтанинг $F = t^2$ куч таъсири остидаги ҳаракат тенгламасини ёзинг ва ҳосил қилинган тенгламанинг умумий ечимини топинг.

5. Тенгламани ечинг:

$$2x'' + t^3 = 1.$$

6. Коши масаласини ечинг:

$$\begin{cases} x'' = 5t^2 + 0{,}1; \\ x(0) = 1;\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

37-§. Гармоник тебранишлар

1. Гармоник тебранишлар тенгламаси. Қуйидаги тенгламани қараб чиқайлик:

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad (1)$$

бу ерда ω — бирор мусбат сон.

Ушбу

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (2)$$

функция исталган ўзгармас A ва α-да (1) тенгламанинг ечими бўлишини бевосита ўрнига қўйиш билан текшириб кўриш мумкин. (1) тенглама бошқа ечимларга эга эмаслигини кўрсатиш мумкин. Бу даъвони исботсиз қабул қиламиз.

Шундай қилиб, (2) формула (1) тенгламанинг умумий ечимини беради.

(2) функция берилган исталган A, ω ва α да *гармоник тебраниш жараёнини* тавсифлайди. $|A|$ сон (2) тебранишнинг *амплитудаси,* α сон унинг *бошланғич фазаси* ёки оддий қилиб, *фазаси* дейилади. (1) тенглама *гармоник тебранишлар тенгламаси* дейилади. Мусбат ω сон *тебраниш частотаси* дейилади. Вақт бирлиги ичида тебранишлар сони

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

формула билан аниқланишини кўриш осон.

(1) тенгламанинг (2) умумий ечимида иккита ихтиёрий ўзгармас: амплитуда A ва бошланғич фаза α қатнашаётганини қайд қилиб ўтамиз. Уларни аниқлаш учун иккита шарт қўйиш керак, масалан, Коши масаласининг иккита бошланғич шартини бериш мумкин:

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = v_0, \qquad (3)$$

у ҳолда A ва α ўзгармасларни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} A\cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0, \\ -A\omega\sin(\omega t_0 + \alpha) = v_0. \end{cases} \tag{4}$$

Бу системадан

$$A^2\cos^2(\omega t_0 + \alpha) + A^2\sin^2(\omega t_0 + \alpha) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

эканлиги келиб чиқади, демак,

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Умумийликка зиён келтирмасдан $A > 0$ деб ҳисоблаш мумкин,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Энди A амплитудани билганимиздан сўнг (4) системадан тригонометрия формулаларидан фойдаланиб, бошланғич фаза α топилади.

(2) формуладан (1) тенглама умумий ечимининг бошқача кўринишини ҳосил қилиш мумкин. Дарҳақиқат,

$$x = A(\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha) =$$
$$= A\cos\alpha\cos\omega t - A\sin\alpha\sin\omega t.$$

Бу ерда $C_1 = A\cos\alpha$, $C_2 = -A\sin\alpha$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t. \tag{5}$$

Конкрет масалаларни ечаётганда (2) формуладан ҳам, (5) формуладан ҳам фойдаланиш лозим.

Масалан, масала шартига кўра тебранишнинг амплитудаси ва бошланғич фазаси маълум бўлса, у ҳолда албатта (2) формуладан фойдаланиш зарур. Бироқ, бошланғич шартлари

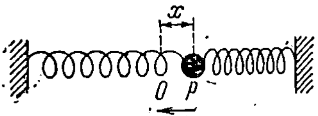
$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0 \tag{6}$$

бўлган Коши масаласини ечганда (5) формуладан фойдаланган маъқул.

Мисол. Коши масаласини бошланғич шартлари (6) бўлган (1) тенглама учун ечинг.

Ечиш. (5) формулага кўра берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади.

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$



43-расм.

Биринчи бошланғич шарт $x(0)=x_0$ дан $C_1=x_0$ ни топамиз. Сўнгра

$$x'=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$$

бўлгани учун иккинчи бошланғич шарт $x'(0)=v_0$ га кўра $v_0=C_2\omega$, яъни $C_2=\frac{v_0}{\omega}$ ни топамиз. Шундай қилиб,

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

функция (1), (6) Коши масаласининг ечими бўлади. Бу масала бошқа ечимларга эга эмас.

2. Нуқтанинг эластик куч таъсири остидаги тебранишлари. m массали P нуқтанинг унга 43-расмда кўрсатилганидек таъсир қилаётган эластик пружинанинг F кучи таъсири остидаги ҳаракатини қарайлик.

P нуқтанинг ҳаракат тенгламасини тузиш учун P нуқта ҳаракатланаётган тўғри чизиқда x координатани киритамиз, бу мақсадда O марказ учун P нуқтанинг мувозанат вазиятини, мусбат йўналиш учун чап томондан ўнг томонга йўналишни қабул қиламиз. У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра нуқтанинг ҳаракат тенгламаси

$$mx''=F$$

кўринишда бўлади. Гук қонунига кўра F эластик куч P нуқтанинг мувозанат вазиятидан четланишига тўғри пропорционал ва ҳаракат йўналишига тескари йўналган. Шунинг учун

$$F=-kx,$$

бу ерда $k>0$ сон берилган пружинанинг *эластиклик коэффициенти* дейилади.

Шундай қилиб, P нуқтанинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$mx''+kx=0. \tag{1}$$

Бу тенглама частотаси

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

бўлган гармоник тебранишлар тенгламасидир. Шунинг учун унинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right)$$

ёки

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Умумий формулаларга кўра бошланғич шарти

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \tag{2}$$

бўлган (1) тенглама учун Коши масаласининг ечими

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

функция бўлади.

Бу гармоник тебранишнинг амплитудаси

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

P нуқтанинг тебраниш частотаси бошланғич шартларга боғлиқ бўлмаслигини қайд қилиб ўтамиз; у фақат P нуқтанинг массаси ва пружинанинг эластиклигига боғлиқдир. A амплитуда эса бошланғич шартларга қатъий боғлиқдир, бошланғич фаза тўғрисида ҳам худди шундай дейиш мумкин.

(1), (2) Коши масаласи ечимининг бир нечта хусусий ҳолларини қараб чиқамиз.

$v_0 = 0$ ва $x_0 > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

яъни $A = x_0$ ва $\alpha = 0$. Бу функция m массали ва вақтнинг $t_0 = 0$ моментида координатаси $x_0 > 0$ бўлган нуқтадан нолга тенг тезлик билан чиқарилган P нуқтанинг гармоник тебранишларини тавсифлайди.

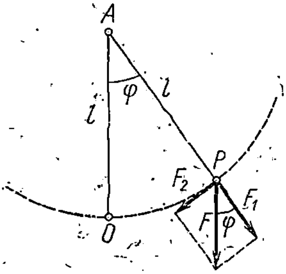
Энди $x_0 = 0$ ва $v_0 > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

ва демак, $A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$ ва $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Бу функция вақтнинг бошланғич $t_0 = 0$ моментида мувозанат вазиятдан

v_0 тезлик билан чиқарилган P нуқтанинг гармоник тебранишларини тавсифлайди.

3. Математик маятникнинг тебранишлари. Математик маятник m массали P нуқтадан иборат бўлиб, оғирлик кучи таъсири остида вертикал текисликда ётувчи айлана бўйича ҳаракатланади. Бу айлананинг радиуси *маятникнинг узунлиги* дейилади.



44-расм.

Маятник ҳаракатланадиган айланада φ бурчак координатани киритамиз, бунда O нуқта учун айлананинг энг қуйи нуқтасини, мусбат йўналиш учун эса чапдан ўнгга томон йўналишни қабул қиламиз (44- расм).

P нуқта вертикал пастга йўналган $F=mg$ оғирлик кучи таъсири остида бўлади. F ни иккита F_1 ва F_2 ташкил этувчиларга ажратамиз. Айлана радиуси бўйича йўналган F_1 ташкил этувчи ҳаракатни келтириб чиқармайди: у бошқа кучлар билан мувозанатланади. Айланага уринма бўйича йўналган F_2 ташкил этувчи P нуқтани айлана бўйича ҳаракатга келтирадиган кучдир. F_2 кучнинг катталиги $mg\sin\varphi$ -га тенг. ва бу куч φ бурчакнинг ўсиш томонига қарама-қарши йўналган, шунинг учун математик маятникнинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$ml\varphi'' = -mg\sin\varphi,$$

бу ерда φ'' P нуқтанинг бурчак тезланиши, $l\varphi''$ эса чизиқли тезланиши.

Бу тенгламани m га қисқартириб,

$$l\varphi''+g\sin\varphi=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама *математик маятникнинг тенгламаси* дейилади.

Бу тенгламани ечиш катта қийинчилик билан боғлиқ.

Агар маятникнинг фақат кичик тебранишларини қарайдиган бўлсак, яъни φ координата модуль бўйича жуда кичик деб ҳисобланса, $\sin\varphi$ ни φ га алмаштириш мумкин. Натижада қуйидаги тақрибий тенгламани ҳосил қиламиз:

$$l\varphi''+g\varphi=0.$$

Бу тенглама *математик маятникнинг кичик тебранишлар тенгламаси* дейилади. Равшанки, бу тенглама частотаси $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ бўлган гармоник тебранишлар тенгламасидир. Унинг умумий ечими қуйидаги кўринишида бўлади:

$$\varphi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right)$$

ёки

$$\varphi = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Олдинги пунктдаги каби бу ерда ҳам тегишли бошланғич шартларга эга бўлган Коши масаласини қараш ва унинг ечимини топиш мумкин.

Математик маятникнинг кичик тебранишлар частотаси ω фақат маятникнинг узунлигига боғлиқ ва узунлигининг ортиши билан камайишини қайд қилиб ўтамиз.

Маятникнинг бир секунддаги кичик тебранишлар сони қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

бу ерда $g \approx 9{,}8$ м/с^2, l—маятникнинг метр ҳисобидаги узунлиги.

Машқлар

1. $x = \sin t + \cos t$ функция қаноатлантирадиган гармоник тебранишлар тенгламасини топинг.

2. Қуйидаги функцияларнинг қайси бири гармоник тебраниш жараёнини тавсифлайди:

а) $x = \sin t + \cos t$; б) $x = t\sin t$;

в) $x = \sin t + \cos 2t$; г) $x = \cos t + 1$?

3. Узунлиги l бўлган математик маятник осилиш нуқтасини a масофага кичик горизонтал кўчириш орқали мувозанат вазиятидан чиқарилади. Маятникнинг оғишини топинг.

4. Массаси m бўлган $2l$ узунликдаги оғир бир жинсли занжир силлиқ горизонтал стол устида шундай ётибдики, унинг ярмиси столдан осилиб тушган. Занжирнинг столдан сирпаниб тушиш вақтидаги ҳаракатини аниқланг ва сирпаниб тушиш вақтини топинг.

38-§. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар

1. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламани умумий ҳолда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'')=0, \tag{1}$$

бу ерда $y=y(x)$ изланаётган номаълум функция, $y'=y'(x)$ ва $y''=y''(x)$—унинг x бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари, F эса x, y, y' ва y'' ўзгарувчиларнинг берилган функцияси.

Агар $\varphi(x)$, $x\in]a; b[$ функция $\varphi'(x)$ ва $\varphi''(x)$ ҳосилаларга эга бўлса ва исталган $x\in]a; b[$ учун

$$F(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \varphi''(x))=0$$

тенглик ўринли бўлса, $\varphi(x)$, $x\in]a; b[$ функция (1) *дифференциал тенгламанинг ечими* дейилади.

Бошқача сўз билан айтганда, агар $\varphi(x)$, $x\in]a; b[$ функцияни (1) тенгламада унинг ўрнига қўйганда бу тенглама x бўйича айниятга айланса, $\varphi(x)$ функция (1) тенгламанинг ечими дейилади.

Ушбу

$$y''=f(x;\ y;\ y') \tag{2}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *иккинчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган тенглама* дейилади, бу ерда f—ўзгарувчи x, y, y' ларнинг берилган функцияси. Анчагина умумий фаразларда f функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган ихтиёрий

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0 \tag{3}$$

бошланғич шартларда (2) тенгламанинг (3)-шартларни қаноатлантирувчи $y=y(x)$ ечими мавжуд бўлиши ва шу билан бирга бу ечим ягона эканлиги исбот қилинган.

Биз бу ерда ана шу даъвонинг жиддий баёнини бериб ўтирмасдан, фақат у дифференциал тенгламалар назариясининг асосий теоремаларидан бири бўлган *Коши теоремасининг* асосий мазмунини ташкил этишини қайд қилиб ўтамиз, холос.

2. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Ушбу

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{1}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламалар *иккинчи тар-*

тибли чизиқли дифференциал тенгламалар дейилади, бу ерда p ва q бирор сонлар. $f(x)$ функция (1) тенгламанинг *озод ҳади* ёки тенгламанинг *ўнг қисми* дейилади.

Агар $f(x)\equiv 0$ бўлса, дифференциал тенглама *чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама* дейилади. У

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

кўринишга эга бўлади.

Мазкур пунктда фақат (2) кўринишдаги тенгламаларни ўрганамиз.

1-мисол. Ушбу тенгламанинг барча ечимларини топинг:

$$y''-y=0. \tag{3}$$

Ечиш. $y=e^x$ функция берилган тенгламанинг ечими эканлигини текшириб кўриш осон. $y=e^{-x}$ функция (3) тенгламанинг ечими эканлиги ҳам худди шундай текширилади. Ихтиёрий C_1 ва C_2 ўзгармасларда

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x} \tag{4}$$

функция (3) тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x},$$

$$y''=C_1e^x+C_2e^{-x}=y,$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Шундай қилиб, (4) кўринишдаги исталган функция (3) тенгламанинг ечими бўлади. Бундан ташқари бу тенглама бошқа ечимларга эга бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, $y=\varphi(x)$ (3) тенгламанинг бирор ечими бўлсин ва

$$\varphi(0)=y_0, \qquad \varphi'(0)=y_0' \tag{5}$$

бўлсин.

Бу шартларга бўйсунадиган (4) кўринишдаги функцияни топамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{cases} y_0=C_1+C_2, \\ y_0'=C_1-C_2, \end{cases}$$

шунинг учун

$$C_1=\frac{y_0+y_0'}{2}, \qquad C_2=\frac{y_0-y_0'}{2}.$$

Демак,

$$y = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^x + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-x}$$

функция (3), (5) Коши масаласининг ечими бўлади.

Коши масаласи ечимининг ягоналигига кўра

$$\varphi(x) = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^x + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-x},$$

яъни $\varphi(x)$ функция (4) дан C_1 ва C_2 ўзгармасларнинг тегишли қийматларида ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, (4) формула (3) тенгламанинг умумий ечимини беради.

2-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$y'' - 4y = 0. \tag{6}$$

Ечиш. 1-мисолдагига ўхшаш, бу тенгламанинг ечимини

$$y = e^{\lambda x}$$

кўринишда излаймиз, бу ерда λ номаълум сон. Бу функцияни тенгламага қўйиб

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Демак, λ

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

тенгламани қаноатлантирганда ва фақат шундагина $e^{\lambda x}$ кўринишдаги функция (6) тенгламани қаноатлантиради. Бу тенгламани $\lambda_1 = 2$ ва $\lambda_2 = -2$ сонлар қаноатлантиради. Шунинг учун e^{2x} ва e^{-2x} функциялар (6) тенгламанинг ечимлари бўлади (бунга бевосита текшириб ишонч ҳосил қилиш ҳам мумкин).

Энди, 1-мисолдагидек, (6) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

формула билан берилишини кўрсатиш мумкин, бу ерда C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармаслар.

3. Характеристик тенглама. Кўриб чиқилган бу мисоллар умумий ҳолда ҳам ечимни $e^{\lambda x}$ кўринишда излаш фикрига йўллайди. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. $e^{\lambda x}$ функцияни (1) тенгламага қўямиз:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0.$$

Бу ердан λ

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

тенгламани қаноатлантирганда ва фақат шундагина $e^{\lambda x}$ функция (1) тенгламанинг ечими бўлиши келиб чиқади.

(2) тенглама (1) дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

Характеристик тенглама дифференциал тенгламадан y'' ни λ^2 га, y' ни λ га, y ни эса 1 га алмаштиришдан ҳосил бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

Характеристик тенглама иккита ҳақиқий λ_1 ва $\lambda_2 (\lambda \neq \lambda_2)$ ечимга эга бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{3}$$

формула билан берилади, бу ерда C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармаслар.

(3) функция (1) тенгламани қаноатлантириш факти бевосита ўрнига қўйиш орқали текшириб кўрилади. (1) тенгламанинг бошқа ечимлари йўқлиги эса Коши теоремасидан келиб чиқади ((1) тенглама учун Коши теоремасининг барча шартлари бажарилган).

Мисол. Ушбу тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \tag{4}$$

Ечиш. Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини ёзамиз:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Бу тенглама иккита ечимга эга $\lambda_1 = -1$ ва $\lambda_2 = -3$. (4) тенгламанинг умумий ечимини (3) формула бўйича ҳосил қиламиз:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

4. Характеристик тенглама комплекс ечимларга эга бўлган ҳол. Ушбу ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

тенгламани қараймиз. Унинг характеристик

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

тенгламаси ҳақиқий ечимларга эга эмас. Бу ҳолда

$$q-\frac{p^2}{4}>0.$$

Бу сонни ω^2 орқали белгилаймиз. (2) тенглама иккита қўшма комплекс ечимга эга: $\lambda=\alpha+i\omega$ ва $\overline{\lambda}=\alpha-i\omega$, бу ерда $\alpha=-\frac{p}{2}$.

У ҳолда

$$e^{\lambda x}=e^{\alpha x}e^{i\omega x}=e^{\alpha x}(\cos\omega x+i\sin\omega x).$$

Бу комплекс қийматли функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмини қараймиз:

$$e^{\alpha x}\cos\omega x,\quad e^{\alpha x}\sin\omega x.$$

Бу функциялар (1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлишига бевосита текшириш билан ишонч ҳосил қилиш осон. (Буни ўзингиз мустақил текширинг.)

Юқоридагидек, бу ҳолда ҳам (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\omega x+C_2e^{\alpha x}\sin\omega x \qquad (3)$$

формула билан берилишини кўрсатиш мумкин, бу ерда C_1 ва C_2—ихтиёрий ўзгармаслар.

Мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$y''+2y'+2y=0.$$

Ечиш. Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$\lambda^2+2\lambda+2=0.$$

Тенглама иккита қўшма комплекс ечимга эга: $\lambda=-1+i$ ва $\overline{\lambda}=-1-i$.

$e^{\lambda x}$ функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топамиз:

$$e^{\lambda x}=e^{-x}(\cos x+i\sin x)=e^{-x}\cos x+ie^{-x}\sin x.$$

Энди берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (3) формула бўйича топамиз:

$$y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x.$$

Изоҳ. Бу турдаги тенгламаларга ушбу

$$y''+\omega^2y=0$$

гармоник тебранишлар тенгламаси киради.

Унинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

5. Характеристик тенглама битта ечимга эга бўлган ҳол. Айтайлик,

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

характеристик тенгламаси карралиги 2 бўлган битта $\lambda = \alpha$ илдизга эга бўлсин. У ҳолда $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2$. Юқоридагидек, $e^{\alpha x}$ функция (1) тенгламанинг ечими бўлиши осонгина текширилади. Бу ҳолда $xe^{\alpha x}$ функция ҳам (1) тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$y = xe^{\alpha x}, \quad y' = e^{\alpha x} + \alpha xe^{\alpha x}, \quad y'' = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 xe^{\alpha x},$$

сўнгра

$$y'' + py' + qy = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 xe^{\alpha x} + pe^{\alpha x} + p\alpha xe^{\alpha x} +$$

$$+ qxe^{\alpha x} = e^{\alpha x}(2\alpha + p) + xe^{\alpha x}(\alpha^2 + p\alpha + q) =$$

$$= e^{\alpha x}(2\alpha - 2\alpha) + xe^{\alpha x}(\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2) = 0.$$

Шундай қилиб, $e^{\alpha x}$ ва $xe^{\alpha x}$ функциялар (1) тенгламанинг ечими бўлади, шунинг учун

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 xe^{\alpha x} \tag{3}$$

кўринишидаги исталган функция ҳам (1) тенгламанинг ечими бўлади. Бу тенглама бошқа ечимларга эга эмаслиги Коши теоремасидан келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$y'' + 2y' + y = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама битта ечимга эга: $\lambda = 1$. Демак, ((3) формулага қаранг) берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

6. Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар.

Бир жинсли бўлмаган чизиқли

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

тенгламаларга нисбатан бир неча изоҳларни келтирамиз.

Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар бўлган ҳолдаги каби (1) тенгламанинг умумий ечими унинг бирор хусусий ечими билан тегишли бир жинсли

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат бўлади.

Бу изоҳдан фойдаланиб иккита мисол кўрамиз.

1-мисол. Ушбу

$$y'' + 2y' - 3y = 1 \qquad (3)$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Танлаш орқали $y = -\frac{1}{3}$ функция (3) тенгламанинг хусусий ечими бўлишини кўрамиз. Энди чизиқли бир жинсли

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad (4)$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Унинг

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

характеристик тенгламаси $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ ечимларга эга. Демак, (4) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$$

кўринишда бўлади.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими унинг бирор хусусий ечими ва тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимининг йиғиндисидан иборат бўлгани учун (3) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{1}{3}$$

формула билан берилади.

2-мисол. Ушбу тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$y'' + 2y' - 3y = x. \qquad (5)$$

Ечиш. (5) тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = Ax + B$$

кўринишда излаймиз, бу ерда A ва B—номаълум сонлар. Бу функцияни (5) га қўйиб топамиз:

$$2A - 3Ax - 3B = x.$$

Бу тенгликдан:

$$\begin{cases} 2A - 3B = 0, \\ \quad -3A = 1, \end{cases}$$

шунинг учун

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{9}.$$

Демак,

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

функция (5) тengламанинг хусусий ечими бўлади, унинг умумий ечими эса (1-мисолга қаранг) қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}.$$

Шу билан дифференциал тенгламаларни ўрганишни тугаллаймиз.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

1. $x'' - 2x' = 0.$
2. $x'' + 5x' + 6x = 0.$
3. $3x'' - 2x' - 8x = 0,$
4. $x'' + 4x' + 13x = 0.$
5. $x'' + x' + x = 0.$
6. $x'' - 6x' + 9x = 0.$
7. $x'' - x = 2.$
8. $x'' + 2x' = 2.$
9. $x'' + 9x = 9.$
10. $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}.$
11. $x'' - 3x' + 2x = \sin t.$
12. $x'' + x = 4\sin t.$

13—19-машқларда тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топинг:

13. $x'' - 3x' + 2x = 0,\qquad x(0) = 2,\quad x'(0) = 3,$
14. $x'' + 2x' + 5x = 0,\qquad x(0) = x'(0) = 1.$
15. $x'' + 6x' + 9x = 0,\qquad x(0) = 2,\quad x'(0) = 1.$
16. $x'' + 2x' + 2x = 0,\qquad x(0) = a,\quad x'(0) = b.$
17. $x'' - x' - 6x = 2,\qquad x(0) = 1,\quad x'(0) = 0.$
18. $x'' - 9x = 2 - t,\qquad x(0) = 0,\quad x'(0) = 1.$
19 $x'' + 4x = 2\cos 2t,\qquad x(0) = 0,\quad x(0) = 4.$

20. α ва β нинг қандай қийматларида

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 0$$

тенгламанинг барча ечимлари даврий функциялар бўлади?

21. α нинг қандай қийматларида

$$x'' + \alpha x = 0$$

тенглама $x(0) = x(\pi) = 0$ шартни қаноатлантирадиган ечимларга эга бўлади?

IX боб

СОНЛИ ВА ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

39-§. Сонли қаторлар

1. Қатор ва унинг йиғиндисининг таърифи. Айтайлик, a_n, $n \in N$ сонли қатор берилган бўлсин. У ҳолда

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in N \tag{1}$$

кетма-кетлик *сонли қатор* дейилади ва

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{ёки} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

билан белгиланади.

a_1, a_2, ... сонлар (2) қаторнинг мос равишда биринчи, иккинчи ва ҳоказо *ҳадлари* дейилади; a_n эса (2) қаторнинг n- ёки *умумий ҳади* дейилади.

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, ... йиғиндилар (2) қаторнинг *хусусий йиғиндилари* дейилади.

Ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{3}$$

қатор (2) *қаторнинг n-қолдиғи* дейилади. (3) қаторда биринчи ҳад (2) қаторнинг $(n+1)$-ҳадидан иборат, (3) қаторнинг k-ҳади a_{n+k} га тенг.

Таърифга кўра қаторлар кетма-кетликларнинг алоҳида кўринишидир, шунинг учун қаторларнинг яқинлашиши ва узоқлашиши тўғрисида гапириш мумкин.

Агар қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги яқинлашса, қатор *яқинлашади* дейилади. Агар қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги узоқлашса, қатор ҳам *узоқлашувчи* дейилади. Демак, агар

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

лимит мавжуд бўлса, (2) қатор яқинлашувчи дейилади. Бу лимит (2) *қаторнинг йиғиндиси* дейилади.

Агар (2) қатор яқинлашса ва S унинг йиғиндиси бўлса, у ҳолда қуйидагича ёзамиз:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

1-мисол. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ қаторни қараймиз ва $|q| < 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлишини, $|q| \geqslant 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Бу қатор геометрик прогрессиянинг йиғиндисини ўрганишда қаралган эди (Алгебра, I қисм, 11-§, 9-пунктга қаранг). У ерда барча $n \in N$ лар учун

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}$$

эканлиги ва $|q| < 1$ бўлганда $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ бўлиб, шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q}{1 - q}$$

эканлиги кўрсатилган эди.

Демак, агар $|q| < 1$ бўлса, берилган қатор яқинлашади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$$

бўлади.

Агар $|q| > 1$ бўлса, $\lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = +\infty$ бўлади, шунинг учун (q^{n+1}) кетма-кетлик чегараланмаган, демак, лимитга эга эмас. Бу ердан (S_n) кетма-кетлик ҳам лимитга эга эмаслиги келиб чиқади, яъни $|q| > 1$ бўлса, мазкур қатор узоқлашади.

$|q|=1$ бўлсин. Агар $q=1$ бўлса, у ҳолда

$$S_1=1,\ S_2=2,\ \dots,\ S_n=n,\ \dots$$

ва, кўриш осонки, берилган қатор узоқлашади.

Агар $q=-1$, бўлса, у ҳолда

$$S_1=-1,\ S_2=-1+1=0,\ S_3=-1,\ \dots,$$

яъни тоқ номерли хусусий йиғиндилар -1 га, жуфт номерли хусусий йиғиндилар 0 га тенг. Бундай кетма-кетлик лимитга эга эмас, демак, $|q|=1$ бўлса, берилган қатор узоқлашади.

1-теорема. *Агар қатор яқинлашса, унинг исталган қолдиғи ҳам яқинлашади. Агар қаторнинг бирор қолдиғи яқинлашса, у ҳолда қатор ҳам яқинлашади.*

Исбот. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ қатор берилган бўлсин. Унинг бирор

қолдиғини, яъни $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ кўринишидаги қаторни қараймиз. Исталган n учун қуйидагига эгамиз:

$$S_{N+n}=\sum_{k=1}^{n+N} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=N+1}^{n+N} a_k=$$

$$=S_N+\sum_{k=1}^{n} a_{N+k}=S_N+S_n^*,$$

бу ерда S_n^* — берилган қатор N-қолдиғининг n-хусусий йиғиндиси. Бу ердан агар қатор яқинлашса ва унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*=\lim_{n\to\infty}(S_{N+n}-S_N)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} S_{N+n}-S_N=\lim_{n\to\infty} S_n-S_N=S-S_N$$

бўлиши келиб чиқади, демак, қаторнинг N-қолдиғи яқинлашади. Аксинча, агар қаторнинг N-қолдиғи яқинлашса ва унинг йиғиндиси R_N га тенг бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{N+n}=\lim_{n\to\infty}(S_N+S_n^*)=$$

$$=S_N+\lim_{n\to\infty} S_n^*=S_N+R_N,$$

демак, қатор яқинлашади. 1-теорема исбот бўлди.

1-теореманинг исботидан агар S берилган қаторнинг йиғиндиси бўлса, у ҳолда

$$S = S_N + R_N$$

бўлиши келиб чиқади, бу ерда S_N — берилган қаторнинг N-хусусий йиғиндиси, R_N эса бу қаторнинг N-қолдиғининг йиғиндиси.

2-теорема. *Агар умумий ҳадлари a_n ва b_n бўлган қаторлар яқинлашувчи бўлса ва*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

бўлса, у ҳолда ихтиёрий α ва β сонлар учун умумий ҳади $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ бўлган қатор яқинлашувчи бўлади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha A + \beta B,$$

бу умумий ҳади $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ бўлган қатор яқинлашувчи бўлишини ва унинг йиғиндиси $\alpha A + \beta B$ га тенг бўлишини билдиради.

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot 3^{-n} + 3 \cdot 2^{1-n})$$

қаторни қараймиз.

Бу қаторнинг умумий ҳади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

1-мисолда кўрсатилганидек, умумий ҳадлари $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ва $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ бўлган қаторлар яқинлашади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

2-теоремага кўра берилган қатор яқинлашади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot 3^{-n} + 3\cdot 2^{1-n}) = 2\cdot\frac{1}{2} + 6 = 7$$

бўлади.

3-теорема (қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти). *Агар умумий ҳади a_n бўлган қатор яқинлашса, у ҳолда $n \to \infty$ да $a_n \to 0$ бўлади.*

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин. У ҳолда исталган $n \geqslant 2$ учун:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1},$$

шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

3-теорема исбот бўлди.

3-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ қаторни қарайлик.

Бу қатор учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажарилмайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}},$$

демак (Алгебра, I қисм, 11- §, 8-пунктга қаранг),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

Шундай қилиб, берилган қатор узоқлашади.

4-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қаторни қарайлик.

Бу қатор *гармоник қатор* дейилади. Бу қатор узоқлашувчи эканлигини кўрсатамиз. Барча $k \in N$ лар учун $\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$ эканлигини назарга олсак, барча $n \in N$ лар учун қуйидагига эга бўламиз:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x}.$$

Энди $\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{1}^{n+1} = \ln(n+1)$

эканлигини билгач, барча $n \in N$ лар учун $S_n > \ln(n+1)$ га эга бўламиз, демак, $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, яъни гармоник қатор узоқлашувчидир.

Бу мисол $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ шартдан умумий ҳади a_n бўлган қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқмаслигини кўрсатади. Бу шарт қатор яқинлашишининг зарурий шарти бўлиб, лекин яқинлашишнинг етарли шарти бўла олмайди.

2. Ҳадлари манфий бўлмаган қаторлар. Энг аввало, ҳадлари манфий бўлмаган исталган қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги камаймайдиган бўлишини айтиб ўтамиз. Ҳақиқатан ҳам, ҳадлари манфий бўлмаган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин: $a_n \geqslant 0$. У ҳолда барча n лар учун:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1}$$

Маълумки (Алгебра, I қисм, 11- §, 8-пунктга қаранг), агар камаймайдиган кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда у чекли лимитга эга бўлади. Агар у чегараланмаган бўлса, у чексиз катта бўлади (Алгебра, I қисм, 11-§. 7-пунктга қаранг); $y+\infty$ га узоқлашади дейилади. Шунинг учун ҳадлари манфий бўлмаган қатор узоқлашса, у ҳолда қатор $+\infty$ га узоқлашади ва унинг йиғиндиси $+\infty$ га тенг дейилади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринлидир.

1-теорема. *Агар ҳадлари манфий бўлмаган қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги чегараланган бўлса, у ҳолда қатор яқинлашади. Агар ҳадлари манфий бўлмаган қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги чегараланмаган бўлса, у ҳолда қатор $+\infty$ га узоқлашади.*

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (1)$$

қаторни қарайлик.

Агар $\alpha > 1$ бўлса, (1) қатор яқинлашишини кўрсатамиз.

Исталган $n \geqslant 2$ учун қуйидагига эгамиз:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \int_{k-1}^{k} dx < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{1}^{n} < 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

шунинг учун 1-теоремага кўра $\alpha > 1$ да (1) қатор яқинлашади.

Олдинги пунктда $\alpha = 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашишини кўрсатган эдик. Қатор исталган $\alpha \leqslant 1$ да узоқлашишини кўрсатамиз. Қуйидагига эгамиз (1-пункт, 4-мисолга қаранг):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(1+n),$$

шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Шундай қилиб, (1) қатор $\alpha > 1$ да яқинлашади, $\alpha \leqslant 1$ да эса $+\infty$ га узоқлашади.

2-теорема (таққослаш аломати). *Айтайлик, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар учун қуйидаги шарт бажарилсин: шундай N мавжудки, барча $n \geqslant N$ учун $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.*

У ҳолда агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашади. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашади.

Исбот. Агар $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ қатор яқинлашса, у ҳолда унинг $\sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k$ қолдиғи ҳам яқинлашади (1-пунктдаги 1-теоремага қаранг). $B = \sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k$ бўлсин, у ҳолда барча $n \geqslant N$ лар учун

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} b_k = B,$$

яъни $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги чегараланган. Бундан ташқари, барча $k \geqslant N$ лар учун $a_k \geqslant 0$ бўлгани сабабли 1-теоремага кўра $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ қатор яқинлашади. Демак, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ қатор ҳам яқинлашади (1-пунктдаги 1-теоремага қаранг).

Агар a_n лардан тузилган қатор узоқлашса, у ҳолда b_n лардан тузилган қатор яқинлашиши мумкин эмас, чунки унинг яқинлашишидан a_n лардан тузилган қаторнинг яқинлашиши келиб чиқар эди.

2-теорема исбот қилинди.

2-мисол. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}$ қаторни қарайлик, бу ерда x— бирор ҳақиқий сон.

Барча n лар учун $0\leqslant\frac{\sin^2 nx}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатор яқинлашувчи бўлгани учун (1-мисолга қаранг), таққослаш аломатига кўра исталган $x\in R$ учун берилган қатор яқинлашади.

3-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ қатор узоқлашади, чунки барча $n\geqslant 3$ лар учун: $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатор узоқлашади.

Лемма. *Ҳадлари мусбат бўлган* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *қатор берилган бўлсин. У ҳолда шундай* q *мавжуд бўлсаки, барча* n *лар учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1 \tag{2}$$

бўлса, қатор яқинлашади. Агар барча n *лар учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1 \tag{3}$$

бўлса, қатор узоқлашади.

Исбот Агар (2) шарт бажарилса, у ҳолда

$$a_{n+1}\leqslant qa_n\leqslant q^2a_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant a_1q^n.$$

емак, барча n лар учун

$$a_n\leqslant a_1q^{n-1}.$$

$<q<1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}$ қатор яқинлашгани учун ққослаш аломатига кўра берилган $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор ҳам инлашади. Лемманинг биринчи қисми исбот қилинди.

Агар (3) шарт бажарилса, у ҳолда

$$a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant a_1;$$

яъни барча n лар учун $a_n \geqslant a_1 > 0$. Бу ердан қатор учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажарилмаслиги келиб чиқади, бинобарин, қатор узоқлашади.

Лемма исбот бўлди.

3-теорема (Даламбер аломати). *a_n ҳадлари мусбат бўлган қатор учун*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

шарт бажарилсин. У ҳолда агар $q<1$ бўлса, қато яқинлашади, агар $q>1$ бўлса, қатор узоқлашади.

Исбот. Кетма-кетлик лимитининг таърифидан ҳа қандай $\varepsilon>0$ учун шундай N мавжуд эканлиги кели чиқадики, унинг учун барча $n \geqslant N$ ларда

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$$

бўлади.

Агар $q < 1$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon > 0$ ни $q + \varepsilon < 1$ бўла диган қилиб танлаб олиб, барча $n \geqslant N$ лар учун қуйи дагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1,$$

яъни берилган қаторнинг N-қолдиғи лемманинг (2 шартини қаноатлантиради. Демак, қатор яқинлашади

Агар $q>1$ бўлса, $\varepsilon>0$ ни $q-\varepsilon>1$ бўладиган қили танлаб, барча $n \geqslant N$ лар учун қуйидагини ҳосил қила миз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon > 1,$$

яъни қаторнинг N-қолдиғи лемманинг (3) шартин қаноатлантиради. Демак, қатор узоқлашади.

3-теорема исбот бўлди

4-мисол. Ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ қаторни қарайлик.

Бу ерда $a_n = \frac{n}{2^n}$, шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Даламбер аломатига кўра берилган қатор яқинлашади.

5-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ қаторни қарайлик.

Бу ерда $a_n = \frac{10^n}{n!}$. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0.$$

Даламбер аломатига кўра берилган қатор яқинлашади.

3. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар. Абсолют яқинлашувчи қаторлар деб аталадиган қаторлар яқинлашувчи қаторларнинг муҳим синфини ташкил этади. Тегишли таърифни беришдан аввал қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

1-теорема. *Агар* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *қатор яқинлашса, у ҳолда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор ҳам яқинлашади.*

Исбот. Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

равшанки, барча n лар учун

$$0 \leqslant p_n \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant q_n \leqslant |a_n|.$$

Таққослаш аломатига кўра $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ қаторлар яқинлашади. $a_n = p_n - q_n$ бўлгани учун (1-пунктдаги 2-теоремага қаранг), берилган қатор ҳам яқинлашади. 1-теорема исбот бўлди.

1-таъриф. *Агар* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *қатор яқинлашса,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор абсолют яқинлашувчи* қатор дейилади.

1-теорема агар қатор абсолют яқинлашса, у ҳолда у оддий маънода ҳам яқинлашишини тасдиқлайди.

Қаторларнинг абсолют яқинлашишини текшириш учун ҳаллари манфий бўлмаган қаторларнинг барча яқинлашиш аломатларидан фойдаланиш мумкин.

2-теорема. *Ушбу* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор учун*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$$

шарт бажарилсин.

У ҳолда $q<1$ *бўлса, қатор абсолют яқинлашади, агар* $q>1$ *бўлса, қатор узоқлашади.*

Исбот. Агар $q<1$ бўлса, у ҳолда абсолют яқинлашиш ҳадлари мусбат бўлган қаторлар учун Даламбер-аломатидан келиб чиқади. Агар $q>1$ бўлса, у ҳолда қатор учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажарилмайди (2-пунктдаги лемма исботининг охирига қаранг). демак. қатор узоқлашади.

2-теорема исбот қилинди.

1-мисол. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ қаторни қарайлик, бу ерда $\alpha>1$.

Бу қатор яқинлашади, бунинг устига у абсолют яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам, бу ерда

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}, \quad |a_n| = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ва $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатор яқинлашади, чунки $\alpha>1$. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашади, хусусан, у яқинлашади.

2-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ қаторни қарайлик, бу ерда $\alpha>1$, x эса ихтиёрий ҳақиқий сон.

Бу қатор абсолют яқинлашади, чунки барча n лар учун

$$\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ва $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатор $\alpha>1$ да яқинлашади.

3-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ қатор (бу ерда $0<\alpha\leqslant 1$) абсолют яқинлашмайди, чунки $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ қатор ($\alpha\leqslant 1$) узоқлашади. Мазкур қатор исталган $\alpha>0$ да яқинлашувчи эканлиги қуйида исботланади.

3-теорема (Лейбниц аломати). *Агар мусбат сонлардан тузилган* (a_n) *кетма-кетлик монотон камая борса ва* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *бўлса, у ҳолда* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *қатор яқинлашади.*

Исбот. Берилган қаторнинг жуфт номерли хусусий йиғиндилари кетма-кетлигини қараб чиқамиз:

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}a_k,\quad m\in N.$$

Қуйидагига эгамиз:

$$S_{2m}=a_1-a_2+\ldots+a_{2m-1}-a_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}-a_{2k})$$

ва шартга кўра $a_{2k-1}-a_{2k}>0$, шунинг учун S_{2m}, $m\in N$ кетма-кетлик монотон ўсувчидир. Иккинчи томондан, барча m лар учун

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-\ldots-a_{2m}<a_1$$

яъни қаралаётган кетма-кетлик чегараланган. Демак, у лимитга эга. Бу лимит

$$S=\lim_{m\to\infty}S_{2m} \tag{1}$$

дан иборат бўлсин.

Тоқ номерли хусусий йиғиндилар учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}(S_{2m}-a_{2m})=$$
$$=\lim_{m\to\infty}S_{2m}-\lim_{m\to\infty}a_{2m}=S. \tag{2}$$

(1) ва (2) дан берилган қатор яқинлашувчи эканлиги ва унинг йиғиндиси S га тенглиги келиб чиқади. 3-теорема исбот бўлди.

Лейбниц аломатидан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$$

қатор исталган $\alpha > 0$ да яқинлашиши келиб чиқади. Бироқ, агар $0 < \alpha \leqslant 1$ бўлса, қатор абсолют яқинлашмайди.

2-таъриф. Агар қатор яқинлашувчи бўлиб, лекин абсолют яқинлашмаса, берилган қатор *шартли яқинлашувчи* дейилади.

Масалан,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{ва} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

қаторларнинг иккаласи ҳам яқинлашади. Бироқ биринчи қатор абсолют яқинлашувчи, иккинчи қатор эса абсолют яқинлашувчи эмас, демак, иккинчи қатор шартли яқинлашувчидир.

Абсолют яқинлашувчи қаторлар одатдаги чекли йиғиндиларнинг кўпгина хоссаларига эгадир. Хусусан, улар учун коммутативлик хоссасига ўхшаган хосса ўринлидир: абсолют яқинлашувчи қаторнинг йиғиндиси бу қатор ҳадларининг ўринларини исталганча алмаштирилганда ҳам ўзгармайди.

Абсолют яқинлашувчи қаторларни ҳадма-ҳад кўпайтириш мумкин. Бу даъво аниқроқ қуйидагича ифодаланади: агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар абсолют яқинлашса ва $A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ бўлса, у ҳолда ҳадлари барча мумкин бўлган a_kb_l кўринишдаги кўпайтмалардан иборат бўлган қатор абсолют яқинлашади ва унинг йиғиндиси AB кўпайтмага тенг бўлади.

Шартли яқинлашувчи қаторлар ўз хоссаларига кўра одатдаги чекли йиғиндилардан кескин фарқ қилади. Масалан, улар учун қуйидаги даъво ўринлидир: шартли яқинлашувчи қаторда унинг ҳадларини ўрнини шундай алмаштириш мумкинки, ҳосил қилинган қатор олдиндан берилган исталган сонга яқинлашади. Бундан ташқари, шартли яқинлашувчи қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштириш мумкинки, ҳосил қилинган қатор узоқлашувчи бўлади.

4. Комплекс ҳадли кетма-кетликлар ва қаторлар. Комплекс сонлардан иборат

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \qquad (1)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Ҳақиқий сонларда бўлганидек, бу кетма-кетликни ҳам $|z_n|$ каби белгилаймиз.

1-таъриф. Агар

$$\lim_{n\to\infty}|z_n - z| = 0$$

бўлса, z комплекс сон (z_n) кетма-кетликнинг лимити дейилади, бу ерда $|z_n - z|$ ифода $z_n - z$ комплекс соннинг модули.

Лимитга эга бўлган кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Агар z сон (z_n) кетма-кетликнинг лимити бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ ёки $n\to\infty$ да $z_n \to z$ деб ёзилади ва (z_n) кетма-кетлик z га интилади дейилади.

1-теорема. Ушбу $z_n = a_n + ib_n$, $n\in N$ комплекс сонлар кетма-кетлигининг ҳақиқий ва мавҳум қисмларидан иборат кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлганда ва фақат шунда (z_n) кетма-кетлик яқинлашади, шу билан бирга

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i\lim_{n\to\infty} b_n$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

бўлсин. Бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ эканлигини исбот қиламиз, бу ерда $z = a + ib$. Қуйидагига эгамиз:

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

ва $n\to\infty$ да $|a_n - a| \to 0$, $|b_n - b| \to 0$. Шунинг учун $n\to\infty$ да $|z_n - z| \to 0$, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ (бу ерда $z = a + ib$) бўлса, у ҳолда

$$|a_n - a| \leqslant |z_n - z|, \quad |b_n - b| \leqslant |z_n - z|$$

тенгсизликлардан $n \to \infty$ да $|a_n - a| \to 0$ ва $|b_n - b| \to 0$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ эканлиги келиб чиқади.

1-теорема исбот бўлди.

1-теоремадан ва ҳақиқий сонлар кетма-кетликлари учун тегишли теоремалардан комплекс сонлар кетма-кетликлари учун қуйидаги даъволар келиб чиқади.

1-натижа. *Яқинлашувчи кетма-кетлик ягона лимитга эга бўлади.*

2-натижа. *Агар* (z_n) *ва* (w_n) *кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $(z_n + w_n)$ *йиғиндининг лимити лимитларнинг йиғиндисига:*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n,$$

$(z_n - w_n)$ *айирманинг лимити эса лимитлар айирмасига:*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n,$$

$(z_n w_n)$ *кўпайтманинг лимити эса лимитларнинг кўпайтмасига тенг бўлади:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$$

Бундан ташқари, агар $z_n \neq 0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left(\frac{w_n}{z_n}\right)$ *касрнинг лимити лимитларнинг бўлинмасига тенг бўлади:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}.$$

1-пунктдаги каби комплекс ҳадли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қаторларга таъриф берилади. Улар учун 1-пунктдаги барча таъриф ва теоремалар ўз кучида қолади. Хусусан, комплекс ҳадли қаторлар учун *яқинлашишнинг қуйидаги зарурий шарти* ўринлидир:

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *қатор яқинлашса,* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *бўлади.*

1-мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ қаторни қарайлик, бу ерда z — бирор комплекс сон.

Агар $|z| \geqslant 1$ бўлса, у ҳолда берилган қатор учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажарилмайди:

барча n лар учун $|z^n| = |z|^n \geqslant 1$,

демак, қатор узоқлашади.

Агар $|z| < 1$ бўлса, қатор узоқлашади. Ҳақиқатан ҳам, n-хусусий йиғинди учун қуйидаги формула ўринли:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z},$$

шунинг учун

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{z}{1 - z} - \frac{z}{1 - z} \lim_{n \to \infty} z^n.$$

$n \to \infty$ да $|z^n| = |z|^n \to 0$ бўлгани учун $\lim\limits_{n \to \infty} z^n = 0$ бўлади ва шунинг учун

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z}{1 - z}.$$

Шундай қилиб, агар $|z| < 1$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ қатор яқинлашади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1 - z}$$

бўлади, $|z| \geqslant 1$ бўлганда эса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ қатор узоқлашади.

2-теорема. *Комплекс ҳадли* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *қатор берилган бўлсин. Агар модуллардан тузилган* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *қатор яқинлашса,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *қатор ҳам яқинлашади.*

Исбот. Айтайлик, $u_n = a_n + ib_n$ бўлсин, демак, $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Маълумки, $|a_n| \leqslant |u_n|$, $|b_n| \leqslant |u_n|$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ қатор яқинлашади, шунинг учун таққослаш аломатига кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар абсолют яқинлашади. Қуйидагича белгилаш киритайлик:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

У ҳолда 1-теоремага кўра

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = A + iB,$$

бу ердан теореманинг исботи келиб чиқади.

Юқоридагиларга ўхшаш, агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ қатор яқинлашса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қаторни абсолют яқинлашувчи қатор дейилишини қайд қилиб ўтайлик. Бинобарин, 2-теорема комплекс ҳадли қатор абсолют яқинлашса, у ҳолда у оддий маънода ҳам яқинлашишини билдиради.

2-мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ қаторни қарайлик, бу ерда z — бирор комплекс сон.

Бу ерда

$$u_n = \frac{z^n}{n!}, \qquad |u_n| = \frac{|z|^n}{n!}.$$

Ҳадлари ҳақиқий бўлган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ қаторнинг исталган z да яқинлашувчи бўлишини исбот қиламиз.

Агар $z = 0$ бўлса, у ҳолда $u_n = 0$,ноллардан иборат қатор албатта яқинлашувчи бўлади. Агар $z \neq 0$ бўлса, у ҳолда $|z| > 0$ бўлади ва қаторга Даламбер аломатини қўлланиш мумкин. Қуйидагига эга бўламиз: исталган $z \neq 0$ комплекс сон учун

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

Шунинг учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ қатор яқинлашади.

Шундай қилиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ қатор исталган комплекс z да яқинлашади.

Машқлар

1. Қуйидаги қаторларнинг йиғиндиларини топинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{10^{2n}}+\frac{50}{10^{2n+1}}\right)$.

2. Қуйидаги қаторлар яқинлашувчими ёки узоқлашувчими:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$?

3. Қуйидаги қаторларнинг узоқлашувчи ёки яқинлашувчи эканлигини таққослаш аломатини қўлланиб текширинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. Даламбер аломатидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$.

5. Қуйидаги қаторларнинг абсолют ва шартли яқинлашишини текширинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

40-§. Даражали қаторлар

1. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш доираси. Мазкур параграфда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (1)$$

кўринишдаги қаторларни кўриб чиқамиз, бу ерда z_0 ва $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — берилган комплекс сонлар, z — исталган комплекс сонни қабул қилувчи ўзгарувчи.

Бундай қаторлар *даражали қаторлар* дейилади. $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ сонлар (1) *даражали қаторнинг коэффициентлари* дейилади.

(1) қаторнинг умумий ҳади

$$u_n = a_n (z - z_0)^n$$

z нинг функцияси бўлиб, z ўзгарувчининг ҳар бир тайинланган қийматида бирор комплекс сондан иборат бўлади. Демак, z ўзгарувчининг ҳар бир қийматида (1) қатор сонли қатордан иборат бўлади.

Даражали қаторда ҳадларни санаш бирдан эмас, балки нолдан бошланишини қайд қилиб ўтайлик: биринчи ҳад нолинчи ҳад, иккинчи ҳад биринчи ҳад деб ўқилади ва ҳоказо. Даражали қатор учун бундай саноқ табиийдир, чунки u_0 нолинчи ҳад a_0 коэффициентнинг нолинчи даражали $(z-z_0)^0 = 1$ кўпҳадга кўпайтмасидан, биринчи ҳад u_1 эса a_1 нинг $z-z_0$ га кўпайтмасидан ва умуман, *n-ҳад u_n коэффициент a_n нинг n-даражали $(z-z_0)^n$ кўпҳадга кўпайтмасидан иборатдир.*

Координата текислигининг нуқталари билан комплекс сонлар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжудлигидан „z комплекс сон“ дейиш ўрнига кўпинча „z нуқта“ дейилади. Бинобарин, агар (1) қатор $z=z_1$ да яқинлашса, у ҳолда берилган даражали қатор z_1 нуқтада яқинлашади деб айта берилади.

Қатор яқинлашадиган барча z нуқталар тўплами унинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади, (1) кўринишдаги исталган қатор z_0 нуқтада яқинлашишини қайд қилиб ўтамиз, бинобарин, исталган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси ҳеч бўлмаганда битта нуқтага эга бўлади. Даражали қатор яқинлашиш соҳасининг тузилиши тўғрисидаги кейинги маълумотларни норвег математиги Н. Абель (1802—1829) номи билан юритиладиган қуйидаги ажойиб теоремадан оламиз.

1-теорема. *Агар (1) даражали қатор $z_1\neq z_0$ нуқтада яқинлашса, у ҳолда у $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ шартни қаноатлантирадиган исталган z нуқтада абсолют яқинлашади. Агар (1) қатор z_1 нуқтада узоқлашса, у ҳолда у $|z-z_0|>|z_1-z_0|$ шартни қаноатлантирадиган исталган z нуқтада узоқлашади.*

Бошқача айтганда, агар (1) даражали қатор $z_1\neq z_0$ нуқтада яқинлашса, у ҳолда у $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ доиранинг исталган z нуқтасида ҳам яқинлашади. Агар (1) қатор z_1 нуқтада узоқлашса, у ҳолда у $|z-z_0|\leqslant|z_1-z_0|$ доирадан ташқарида ётган исталган нуқтада узоқлашади. $|z-z_0|=|z_1-z_0|$ доиранинг нуқталари тўғрисида Абель теоремаси ҳеч нарса демайди.

Исбот. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$$

сонли қатор яқинлашса, у ҳолда бу қаторнинг умумий ҳади чегараланган бўлади.

Айтайлик, барча n лар учун $|a_n(z_1-z_0)^n|\leqslant M$ бўлсин. Агар $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ бўлса, у ҳолда

$$|a_n(z-z_0)^n|=|a_n(z_1-z_0)^n|\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n\leqslant M\cdot q^n$$

бўлади, бу ерда $q=\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}<1$. Таққослаш (геометрик прогрессия билан) аломатини қўллаб, қатор

$|z-z_0|<|z_1-z_0|$ доиранинг исталган z нуқтасида яқинлашишини кўрамиз.

Энди $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда (1) қатор $|z_2-z_0|>|z_1-z_0|$ бўладиган исталган z_2 нуқтада узоқлашади, чунки агар у z_2 нуқтада яқинлашганида эди, у исботланганга кўра z_1 нуқтада яқинлашиши керак. 1-теорема исбот бўлди.

Абель теоремасидан (1) даражали қатор учун уч ҳол бўлиши мумкинлиги келиб чиқади.

1) (1) қатор фақат z_0 нуқтада яқинлашади;

2) (1) қатор барча z нуқталарда яқинлашади;

3) шундай $R>0$ сон мавжуд бўладики, $|z-z_0|<R$ доирадаги барча z лар учун қатор яқинлашади, $|z-z_0|>R$ даги барча z лар учун эса узоқлашади.

1-таъриф. (1) қатор $|z-z_0|<R$ даги барча z лар учун яқинлашувчи бўладиган ва $|z-z_0|>R$ даги барча z лар учун узоқлашувчи бўладиган $R>0$ сон (1) *қаторнинг яқинлашиш радиуси* дейилади. Агар (1) қатор фақат z_0 нуқтада яқинлашса, $R=0$ бўлади. Агар (1) қатор исталган z да яқинлашса, $R=+\infty$ бўлади.

Шундай қилиб, ҳар қандай даражали қаторнинг R яқинлашиш радиуси бор ва таърифга кўра $0\leqslant R\leqslant+\infty$.

2-таъриф. $|z-z_0|<R$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча z нуқталар тўплами (1) *қаторнинг яқинлашиш доираси* дейилади, бу ерда R—(1) қаторнинг яқинлашиш радиуси.

Агар $0<R<+\infty$ бўлса, (1) қаторнинг яқинлашиш доираси радиуси R ва маркази z_0 нуқтада бўлган очиқ доирадан иборат бўлишини қайд қилиб ўтамиз. Агар $R=+\infty$ бўлса, у ҳолда яқинлашиш доираси бутун комплекс текислик бўлади. Агар $R=0$ бўлса, у ҳолда яқинлашиш доираси бўш тўпламдан иборат бўлади.

2-теорема. *Агар (1) даражали қаторда* $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ *кетма-кетлик чекли ёки чексиз лимитга эга бўлса, яқинлашиш радиуси учун ушбу*

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{2}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Айтайлик,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=A$$

бўлсин.

Дастлаб $0<A<+\infty$ бўлган ҳолни қараймиз. Бирор $z_1\neq z_0$ ни танлаб оламиз ва $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n$ сонли қаторга Даламбер аломатини қўлланамиз. Бу ерда $u_n=|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n$ ва шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|z_1-z_0|^{n+1}}{|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n}=$$

$$=|z_1-z_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|z_1-z_0|\cdot\frac{1}{A}.$$

Агар $\frac{1}{A}|z_1-z_0|<1$ бўлса, (1) қатор абсолют яқинлашади, агар $\frac{1}{A}|z_1-z_0|>1$ бўлса, қатор узоқлашади. Демак, $R=A$.

Агар $A=+\infty$ бўлса, исталган $z\neq z_0$ учун $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$ бўлиб, қатор исталган z да яқинлашади, яъни $R=+\infty$.

Агар $A=0$ бўлса, исталган $z\neq z_0$ учун $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=$ $=+\infty$ бўлиб, қатор исталган $z\neq z_0$ да узоқлашади, бу эса $R=0$ эканлигини билдиради.

2-теорема исбот бўлди.

Олдинги параграфнинг сўнгги пунктида

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^n \quad \text{ва} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

қаторлар қаралган эди. У ерда биринчи қатор $|z|<1$ бўладиган барча z лар учун яқинлашиши, $|z|\geqslant1$ бўладиган барча z лар учун эса узоқлашиши; иккинчи қатор эса барча z ларда яқинлашиши кўрсатилган эди. Демак, биринчи қаторда $R=1$, иккинчи қаторда эса $R=+\infty$ дир. Худди шунинг ўзи (2) формула бўйича ҳосил қилиниши мумкинлигини кўрсатиш осон.

Яна бир нечта мисол кўрамиз.

1-мисол. Ушбу $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ даражали қаторни қараймиз ва унинг яқинлашиш радиусини топамиз.

Бу ерда барча n лар учун $a_n = \frac{1}{2^n} > 0$.

(1) формулага кўра R ни топамиз:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot 1} = 2.$$

Шундай қилиб, берилган қатор $|z| < 2$ бўладиган барча z нуқталарда яқинлашади ва $|z| > 2$ бўладиган барча z нуқталарда узоқлашади. Текшириш тўлиқ бўлиши учун шуни қайд қиламизки, бу қатор $|z| = 2$ бўладиган барча z нуқталарда узоқлашади, чунки бу нуқталарда қаторнинг яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти бажарилмайди.

2-мисол. Ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ қаторни қарайлик.

Бу қаторнинг барча коэффициентлари мусбат: барча n лар учун $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$. (2) формулага кўра

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш доираси $|z| < 1$ дан иборат бўлади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатор яқинлашувчи бўлгани сабабли берилган қатор $|z| = 1$ бўладиган исталган z учун абсолют яқинлашади.

Шундай қилиб, берилган қатор $|z| \leqslant 1$ бўладиган барча z ларда абсолют яқинлашади, бошқа z ларда эса узоқлашади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ қатор учун унинг яқинлашиш радиуси 1 га тенглиги ҳам шундай исбот қилинади. Бироқ яқинлашиш доираси чегарасида, яъни $|z| = 1$ айланада берилган қатор яқинлашадиган нуқталар ҳам, берилган қатор узоқлашадиган нуқталар ҳам мавжуддир. Масалан,

$z=1$ нуқтада қатор узоқлашади, $z=-1$ нуқтада эса қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашади.

3-мисол. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$ қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз.

Бу қаторга (2) формулани қўлланиб бўлмайди, чунки унинг барча тоқ коэффициентлари нолга тенг: барча n лар учун

$$a_{2n+1}=0 \text{ ва } a_{2n}=\frac{1}{2^n}.$$

Яқинлашиш радиусини топиш учун бирор $z\neq0$ қийматни фиксирлаймиз ва умумий ҳади $u_n=\frac{|z|^{2n}}{2^n}$ бўлган сонли қаторга Даламбер аломатини татбиқ қиламиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|z|^{2(n+1)}\cdot 2^n}{2^{n+1}|z|^{2n}}=\frac{|z|^2}{2}.$$

Демак, агар $|z|^2<2$ бўлса, у ҳолда қатор абсолют яқинлашади, агар $|z|^2>2$ бўлса, қатор узоқлашади. Шундай қилиб, $R=\sqrt{2}$.

2. Ҳадлари ҳақиқий бўлган даражали қаторлар.

Бу пунктда ҳадлари ҳақиқий бўлган қаторларни, яъни

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

кўринишдаги қаторларни қараймиз, бу ерда x_0, a_0, $a_1, \ldots, a_n \ldots$ — берилган ҳақиқий сонлар, x эса фақат ҳақиқий қийматларни қабул қилади.

Агар x исталган комплекс z қийматни қабул қиладиган бўлса, у ҳолда қаралаётган қаторлар комплекс ҳадли даражали қаторлар бўлиб, улар учун 1-пунктдаги барча таърифлар ва теоремалар ўринли бўлади. Шундай қилиб, агар R(1) қаторнинг яқинлашиш радиуси бўлса, (1) қатор $|x-x_0|>R$ бўладиган барча x лар узоқлашувчи бўлади ва $|x-x_0|<R$ бўладиган барча x лар учун яқинлашади, яъни *яқинлашиш интервали* деб аталувчи $]x_0-R; x_0+R[$ интервалдаги барча x ларда яқинлашувчи бўлади. Хусусан, агар $R=+\infty$ бўлса, яқинлашиш интервали барча ҳақиқий сонлар тўплами $R=]-\infty;+\infty[$ дан иборат бўлади, агар $R=0$ бўлса, қатор фақат x_0 нуқтада яқинлашади.

Яқинлашиш интервалида даражали қатор

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (2,$$

функцияни аниқлайди.

Бу функция *даражали қаторнинг йиғиндиси* дейилади.

Даражали қаторнинг йиғиндиси узлуксиз ва яқинлашиш интервалида исталган тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлишини кўрсатиш мумкин. Бундан ташқари, $S(x)$ нинг $S'(x)$ ҳосиласи ҳосилалардан ибора қаторнинг йиғиндисидан иборатдир, яъни

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}. \qquad (3)$$

Шунга ўхшаш,

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$S'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

ва ҳ. к. Шу маънода баъзан даражали қатор учу йиғиндининг ҳосиласи ҳосилаларнинг йиғиндисига тен ёки даражали қаторларни ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин деб айтадилар.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)'. \qquad (4$$

Даражали қаторларни ҳадлаб дифференциалла тўғрисидаги бу даъвони исботсиз қабул қиламиз. Даражали қаторларни ҳадма-ҳад интеграллаш тўғрисидаги қуйидаги даъвони ҳам исботсиз қабул қиламиз.

Даражали қатор йиғиндисидан олинган интеграл берилган қаторнинг мос ҳадларидан олинган интеграллар қаторининг йиғиндисидан иборатдир яъни яқинлашиш интервалидаги исталган $[a;\ b]$ *оралиқ учун:*

$$\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n(x-x_0)^n dx. \qquad (5$$

Бошқача айтганда, даражали қаторни унинг яқинлашиш интервалида ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-x_0)^n\,dx. \qquad (6)$$

Бир нечта мисол кўрамиз.

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad (7)$$

даражали қаторнинг йиғиндисини топайлик.

Дастлаб (7) қаторнинг яқинлашиш радиуси R ни топамиз. Бу қаторнинг коэффициентлари $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ формула билан берилади, шунинг учун (1-пунктдаги (2) формулага қаранг):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Демак, (7) қатор $]-1;\ 1[$ интервалда яқинлашади ва унинг $S(x)$ йиғиндиси узлуксиз $S'(x)$ ҳосилага эга бўлади, шу билан бирга даражали қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш формуласи (3) га кўра

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}.$$

Кейинги қатор $]-1;\ 1[$ интервалда $\frac{1}{1+x}$ функцияга яқинлашади ва шунинг учун

$$S'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Интеграллаб, $S(x) = \ln(1+x) + C$ ни топамиз, бу ерда C—бирор ўзгармас. $S(0) = 0$, $\ln(1+0) = 0$ бўлгани учун $C = 0$.

Шундай қилиб, $]-1;\ 1[$ интервалдаги исталган x учун:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x).$$

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n \tag{8}$$

даражали қаторнинг йиғиндисини топайлик.

Бу ерда $a_n = n$ ва

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Демак, (8) қатор $]-1;\ 1[$ интервалда яқинлашади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)'.$$

(4) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Шундай қилиб, $]-1;\ 1[$ интервалдаги исталган x учун:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Машқлар

1. Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусини топинг:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\ z^n$.

2. Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш доирасини топинг:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n!}$.

8. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш оралиқларини топинг:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

41-§. Тейлор қаторлари

1. Тейлор формуласи. $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда Ньютон—Лейбниц формуласига кўра қуйидагига эгамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Бундан ташқари $f(x)$ функция иккинчи тартибли узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага ҳам эга бўлса, у ҳолда бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) =$$

$$= -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$$

ва, демак,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt.$$

Сўнгра, агар $f(x)$ функция узлуксиз учинчи тартибли $f'''(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = \int_{x_0}^{x} f''(t)d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt$$

ва, демак,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt.$$

Худди шундай, агар $f(x)$ функция узлуксиз тўртинчи тартибли $f^{IV}(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} f^{IV}(t)(x-t)^3 dt,$$

ва ҳ. к. Умуман агар $f(x)$ функция $(n+1)$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (1)$$

Бу формула $f(x)$ *функциянинг* x_0 *нуқтадаги интеграл формадаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи* дейилади. Ушбу

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

кўпҳад *Тейлор кўпҳади,*

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \qquad (2)$$

функция эса *қолдиқ ҳад* дейилади.

Агар таърифга кўра $f(x_0)=f^{(0)}(x_0)$ ва $0!=1$ деб ҳисобланса, (1) Тейлор формуласини анча ихчам кўринишда ёзиш мумкин:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x). \qquad (3)$$

Ўртача қиймат ҳақидаги теоремани (2) интегралга қўлланадиган бўлсак, x_0 ва x орасида жойлашган шундай ξ сон мавжудки, унинг учун

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ интервалда узлуксиз $(n+1)$-тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда исталган $x\in]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ учун x_0 ва x орасида ётувчи шундай ξ сон мавжуд бўладики, унинг учун*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (4)$$

бўлади.

Бу формула *Лагранж формасидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи* дейилади. (1), (3) ёки (4) Тейлор формуласининг ўнг томони $f(x)$ функциянинг x нуқтада n-тартибгача Тейлор формуласи бўйича ёйилмаси дейилади.

2-теорема. *$f(x)$ функция $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ интервалда $(n+1)$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда шундай $a_0, a_1, \ldots, a_n$ сонлар ва узлуксиз $\varphi(x)$ функция мавжуд бўлсаки, улар учун $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ даги исталган x учун*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1} \qquad (5)$$

бўлса, у ҳолда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k=0,\ 1,\ \dots,\ n$$

бўлади, яъни (5) формуланинг ўнг томони $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласи бўйича x_0 нуқтадаги n-тартибгача ёйилмасидан иборат бўлади.

Исбот. (5) дан ва (4) Тейлор формуласидан

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \varphi(x)(x-x_0)^{n+1} =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$x=x_0$ да $a_0=f(x_0)$ ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1} + \varphi(x)(x-x_0)^n =$$
$$= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1} +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n.$$

$x = x_0$ да $a_1 = f'(x_0)$ ни ҳосил қиламиз.

Шунга ўхшаш,

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ларни ва ниҳоят $\varphi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ни топамиз. 2-теорема исбот бўлди.

—(5) формуланинг ўнг томони *функциянинг $x-x_0$ нинг даражалари бўйича n-тартибгача ёйилмаси* деб аталишини қайд қилиб ўтамиз. Демак, 2-теорема $f(x)$ функциянинг $x-x_0$ нинг даражалари бўйича n-тартибгача ёйилмаси ягона эканлигини тасдиқлайди—бу $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласи бўйича ёйилмасидир.

1-мисол. $f(x)=e^x$ функцияни Тейлор формуласи бўйича $x_0=0$ нуқтада учинчи тартибгача ёямиз.

Қуйидагиларга эгамиз: $f'(x)=e^x, f''(x)=e^x, f'''(x)=e^x, f^{IV}(x)=e^x$, $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=1$, у ҳолда исталган $x \in R$ учун

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

бу ерда ξ сон x ва ноль орасида ётади.

2-мисол. $\sin x$ функцияни $x-x_0$ нинг даражалари бўйича учинчи тартибгача ёямиз.

Қуйидагиларга эгамиз: $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin x)''=-\sin x$, $(\sin x)'''=-\cos x$. Демак,

$$\sin x=\sin x_0+\cos x_0(x-x_0)+$$
$$+\frac{-\sin x_0}{2}(x-x_0)^2+\frac{-\cos x_0}{3!}(x-x_0)^3+R_3(x),$$

бу ерда

$$R_3(x)=\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^3\sin t\,dt=\frac{\sin\xi}{4!}(x-x_0)^4;$$

ξ нуқта x_0 ва x орасида ётади.

$\sin x$ нинг Тейлор формуласи бўйича энг содда ёйилмаси $x_0=0$ нуқтада ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sin\xi}{4!}x^4.$$

$\sin x$ учун $x_0=0$ нуқтадан 4-тартибгача Тейлор формуласи қуйидаги кўринишга эга эканлигини кўриш осон:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\cos\xi}{5!}x^5,$$

бу ерда ξ нуқта x ва ноль орасида ётади.

3-мисол. $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$ оралиқдаги x учун $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ яқинлашиш қандай хатоликка эга бўлади?

Тейлор формуласидан (2-мисолга қаранг):

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right|=\left|\frac{\cos\xi}{5!}x^5\right|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5.$$

Энг кўпол ҳисоб-китоблар $\sin x$ нинг $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$ даги бу яқинлашиши 0,01 дан ошмайдиган абсолют хатоликка эгалигини кўрсатади.

4-мисол. $f(x)=e^{\sin x}$ функцияни $x=0$ нуқтада учинчи тартибгача Тейлор формуласи бўйича ёямиз.

e^y функцияни қараймиз. y учун қуйидаги ёйилма ўринлидир (1-мисолга қаранг):

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{e^\eta}{4!}y^4,$$

бу ерда η сон y ва ноль орасида ётади.

Бу ерда $y = \sin x$ деб, топамиз:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{e^{\eta}}{4!}(\sin x)^4.$$

2-мисолда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5$$

эканлиги кўрсатилган эди. Демак,

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^3 + \frac{e^{\eta}}{4!}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^4 =$$
$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \varphi(x)x^4 =$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(x)x^4,$$

бу ерда $\varphi(x)$—бирор узлуксиз функция.

2-теоремага кўра бу изланаётган ёйилмадир.

2. Баъзи элементар функциялар учун Тейлор формуласи. Бу пунктда e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ ва $(1+x)^{\alpha}$ функцияларнинг $x_0 = 0$ нуқтада Тейлор формуласи бўйича n-тартибгача ёйилмаларини топамиз.

1. $f(x) = e^x$ функция учун $x_0 = 0$ нуқтада Тейлор формуласи. Қуйидагиларга эгамиз: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$ ва, умуман, $f^{(k)}(x) = e^x$. Шунинг учун e^x функция учун $x_0 = 0$ нуқтада Тейлор формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

бу ерда

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Шундай қилиб, e^x учун $x_0 = 0$ нуқтада Лагранж формасидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

кўринишда бўлади, бу ерда ξ сон x ва ноль орасида ётади.

2. $f(x)=\sin x$ функция учун $x_0=0$ нуқтада Тейлор формуласи. Қуйидагига эгамиз:

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

$$(\sin x)''=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)'=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

ва ҳоказо. n-тартибли ҳосила учун индукция бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Демак, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$ ва шу сабабли жуфт n лар учун $f^{(n)}(0)=0$ ва тоқ $n=2k+1$ лар учун $f^{(2k+1)}(0)=$ $=(-1)^k$.

Шундай қилиб, $\sin x$ учун $x_0=0$ нуқтада интеграл шаклидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^x(x-t)^{2n+2}\cos t\,dt,$$

Лагранж формасидаги қолдиқ ҳадли формуласи эса

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi,$$

кўринишда бўлади, бу ерда ξ нуқта 0 ва x орасида ётади.

$\sum$ белгиси ёрдамида кейинги формула қуйидагича ёзилади:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi.$$

3. $f(x)=\cos x$ функция учун $x_0=0$ нуқтада Тейлор формуласи. Худди $\sin x$ даги каби $\cos x$ учун ҳам

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$

формулани исбот қилиш мумкин. Жуфт $n=2k$ лар учун

$$(\cos x)^{(2k)}=\cos(k\pi+x)=(-1)^k\cos x,$$

тоқ $n=2k+1$ лар учун

$$(\cos x)^{(2k+1)}=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=(-1)^{k+1}\sin x.$$

Демак,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x(x-t)^{2n+1}\cos t\,dt.$$

Лагранж формасидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\cos\xi,$$

бу ерда ξ нуқта 0 ва x орасида ётади.

4. $f(x)=\ln(1+x)$ функция учун $x_0=0$ нуқтада Тэйлор формуласи. Қуйидагиларга эгамиз:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

ва ҳоказо. Индукция бўйича топамиз:

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

ва

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Демак,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}},$$

бу ерда ξ нуқта x ва ноль орасида ётади. Қисқача қуйидагича ёзамиз:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

x ни $-x$ га алмаштириб, қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1-\xi)^{n+1}}.$$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ функция учун $x_0=0$ нуқтада Тейлор формуласи. Қуйидагига эгамиз:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

Умуман

$$f^{k}(x)=\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

у ҳолда

$$(1+x)^{\alpha}=1+ax+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

бу ерда ξ нуқта x ва ноль орасида ётади.

Хусусан, агар $\alpha=n$ бўлса, Тейлор формуласи бином учун Ньютон формуласидан иборат бўлади:

$$(1+x)^n=1+nx+C_n^2x^2+\ \ldots\ +C_n^nx^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k.$$

Аналогия бўйича умумий ҳолда

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}x^k+C_{\alpha}^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

деб ҳам ёзилади, бу ерда

$$C_{\alpha}^{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-k+1)}{k!},\quad C_{\alpha}^{0}=1.$$

$\alpha=-1$ бўлганда $C_{-1}^{k}=(-1)^k$ га эгамиз, шунинг учун

$$(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+(-1)^{n+1}(1+\xi)^{-n-2}x^{n+1}.$$

3. Тейлор қаторлари. $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва барча тартибли ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1}$$

даражали қатор $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *Тейлор қатори* дейилади.

Лемма. *$f(x)$ функциянинг Тейлор қатори x нуқтада $f(x)$ га яқинлашиши учун бу нуқтада Тейлор қаторининг қолдиғи $n\to\infty$ да нолга интилиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Тейлор формуласи

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

дан $n\to\infty$ да $R_n(x)\to 0$ бўлса.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim_{n\to\infty}(f(x)-R_n(x))=f(x)$$

бўлиши келиб чиқади, яъни (1) қатор $f(x)$ га яқинлашади.

Аксинча, агар (1) қатор $f(x)$ га яқинлашса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)=$$

$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=0.$$

Лемма исбот бўлди.

1-теорема. *e^x нинг Тейлор қатори исталган $x\in R$ да e^x га яқинлашади, яъни барча $x\in R$ лар учун:*

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{2}$$

Исбот. Дастлаб (2) қатор исталган x да абсолют яқинлашишини исбот қиламиз.

(2) қаторнинг умумий ҳади $u_n = \frac{x^n}{n!}$ кўринишга эга, демак, исталган $x \neq 0$ учун:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Даламбер аломатига кўра қатор исталган $x \in R$ да абсолют яқинлашади, демак, барча $x \in R$ лар учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

Энди Тейлор формуласи

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

да $n \to \infty$ да лимитга ўтилса, (2) тенглик келиб чиқади. 1-теорема исбот бўлди.

2-теорема. $\sin x$ *функциянинг Тейлор қатори исталган* $x \in R$ *да* $\sin x$ *га яқинлашади, яъни барча* $x \in R$ *лар учун*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (3)$$

Исбот. Бу ерда

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

шу сабабли исталган $x \neq 0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Даламбер аломатига кўра (3) қатор исталган x да абсолют яқинлашади. Демак, исталган x да

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

Энди Тейлор формуласи

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos\xi$$

дан ва $n \to \infty$ да

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos\xi\right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0$$

эканлигидан (3) қатор $\sin x$ га яқинлашиши келиб чиқади. 2-теорема исбот бўлди.

Қуйидаги теорема ҳам худди шундай исбот қилинади.

3-теорема. $\cos x$ *функциянинг Тейлор қатори исталган* $x \in \boldsymbol{R}$ *да* $\cos x$ *га яқинлашади, яъни барча* $x \in \boldsymbol{R}$ *лар учун:*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{4}$$

4-теорема. $\ln(1+x)$ *функциянинг Тейлор қатори исталган* $x \in\,]-1; 1[$ *да* $\ln(1+x)$ *га яқинлашади, яъни барча* $x \in\,]-1; 1[$ *лар учун:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{5}$$

Исбот. 40-§, 2-пунктининг 1-мисолида (5) даражали қатор $]-1; 1[$ интервалдаги исталган x учун яқинлашиши ва унинг йиғиндиси $\ln(1+x)$ га тенглиги исбот қилинган эди. 4-теорема исбот бўлди.

5-теорема. $(1+x)^\alpha$ *функциянинг Тейлор қатори исталган* $x \in\,]-1; 1[$ *да* $(1+x)^\alpha$ *га яқинлашади, яъни барча* $x \in\,]-1; 1[$ *лар учун:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n. \tag{6}$$

Исбот. Агар α нолга ёки натурал сонга тенг бўлса, (6) қатор чекли йиғинди бўлади. Қолган ҳолларда (6) даражали қаторнинг барча $a_n = C_\alpha^n$ коэффициентлари нолдан фарқли бўлади. Демак, яқинлашиш радиуси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1.$$

Шундай қилиб, (6) даражали қатор $]-1; 1[$ интервалдаги x учун яқинлашади ва $|x| > 1$ бўладиган исталган x учун узоқлашади.

$f(x)$ ифода (6) қаторнинг йиғиндиси бўлсин. У ҳолда қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_{\alpha}^{n} x^{n-1} =$$

$$= \alpha + \alpha(\alpha - 1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots$$

Бу тенгликни $(1+x)$ га кўпайтириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(1+x)f'(x) = \alpha + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n} + \ldots = \alpha\Big\{1 + \alpha x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n} +$$

$$+ \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}x^{n} + \ldots\Big\} = \alpha\Big\{1 + \alpha x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n} + \ldots\Big\} = \alpha f(x).$$

Ушбу $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ дифференциал тенгламани ечиб, $f(x) = C(1+x)^{\alpha}$ ни топамиз.

Ўзгармас C ни топиш учун $x = 0$ деймиз. У ҳолда $f(0) = C$. Маълумки, $f(0) = 1$, шунинг учун $C = 1$. Демак, $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

5-теорема исбот бўлди.

4. **e^z, $\sin z$ ва $\cos z$ функциялар.** 3-пунктдаги 1-, 2- ва 3- теоремалардан ва даражали қаторлар учун Абель теоремасидан

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

қаторлар исталган z комплекс сон учун яқинлашиши келиб чиқади. Таърифга кўра

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

деб оламиз.

e^z, $\sin z$ ва $\cos z$ функциялар исталган z комплекс сон учун аниқланган, шу билан бирга ҳақиқий $z = x$ учун булар одатдаги e^x, $\sin x$ ва $\cos x$ функциялардир.

$z = iy$ учун (бу ерда y—ҳақиқий сон) қуйидагига эгамиз:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k}\frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1}\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i\sin y.$$

Шундай қилиб,

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Шунга ўхшаш

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y.$$

Қуйидаги формулани исбот қилиш мумкин:

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

Бу формулалардан агар $z = x + iy$ бўлса, у ҳолда

$$e^z = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади.

Илгарироқ, II бобда комплекс z лар учун e^z худди шундай ифодаланган эди. Демак, e^z нинг янгича ифодаси юқорида берилган таърифга зид келмайди.

Машқлар

1. Қуйидаги функцияларни $x_0 = 0$ нуқтада Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

а) $\ln \cos x$ ни тўртинчи тартибгача;

б) $\sin(\sin x)$ ни учинчи тартибгача;

в) $\operatorname{tg} x$ ни бешинчи тартибгача.

2. а) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ яқинлашиш $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]$ кесмада;

б) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ яқинлашиш $[0;\ 1]$

кесмада қандай хатоликка эга?

3. Қуйидаги функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг ва ҳосил қилинган қаторларнинг яқинлашиш радиусини топинг:

а) $y = e-x^{2}$; б) $y = 2^{\frac{x}{2}}$;

в) $y = \ln\frac{4+x}{4-x}$; г) $y = \cos^2 x$;

д) $y = \frac{1}{(1-x)^3}$; е) $y = \frac{1}{1+x^3}$;

ж) $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $y = \frac{1}{x^2-2x-3}$;

и) $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$.

4. Қуйидаги функцияни x даражалари бўйича қаторга ёйинг ва ҳосил қилинган қаторларнинг яқинлашиш радиусини топинг:

а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $y = \arcsin x$;

в) $y = \arccos x$; г) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

д) $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$; е) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$; ж) $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

Кўрсатма. Берилган функцияларнинг ҳосилаларини қараш фойдалидир.

ЖАВОБЛАР

I боб

1. а) 29, б) 18; в) 12; г) 6; д) 20; е) -4.

2. а) -11; б) -1; в) 9; г) $-\frac{1}{2}$.

4. а) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; б) $\pi k\pm\frac{\pi}{4}$; **5.** (3;2). **6.** $k=-4$.

7. а) -5 ва 3, б) -4 ва 5; в) 4 ва 5; г) -2 ва -1. **9.** $-\sin x-\cos x$.

10. а) (3; 2); б) (4; 1); в) (5; 3); г) (2; 2); д) (3; 0); е) (4; 3).

11. а) (0; 0); б) $\left(x;\ \frac{3x}{2}\right)$, $x\in R$; в) (0; 0); г) (0; 0) д) $\left(x;\ \frac{2x}{3}\right)$, $x\in R$; е) (0; 0).

12. а) (4; 3); б) (5; 4). **13.** $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sin\alpha};\ \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\right)$.

14. -18. **15.** $-\frac{1}{2}$.

17. а) $-\frac{11}{7}$ ва 2; б) $\frac{1}{6}$ ва $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{11}{7}$ ва 2.

18. а) 0 ва 2; б) -3 ва 6. **20.** (1; 4 5).

22. 16. **24.** Илдизларга эга. **25.** Ўтади.

26. 1;2 ва 3. **27.** а) $6x^2$, б) $3x^2$.

28. $xy+xz+yz+xyz$. **29.** (0, 0; 0; 0).

30. (2; 4; 1). **31.** (3; 1; 4; 6).

32. Агар $\alpha\neq-1$, $\alpha\neq2$ бўлса, у ҳолда $x=\frac{3-\alpha}{\alpha+1}$, $y=-\frac{2}{\alpha+1}$. Агар $\alpha=-1$ бўлса, у ҳолда ечимлар йўқ Агар $\alpha=2$ бўлса, у ҳолда $x=c$, $y=c-1$, бу ерда $c\in R$.

33. а) (4; 3; 2); б) (5; 3; 1); в) (3, 5; 4); г) (6; 2; 5).

34. $\alpha = 1$ ва $\alpha = -\frac{13}{3}$ да система ягона ечимга эга, қолган $\alpha \in R$ ларда система иккита ечимга эга.

35.

Аҳоли яшайдиган пункт / Нон заводи	№1	№2	№3
№1	20 т	20 т	0
№2	10 т	0	10 т

II боб

7-§. **1.** а) $z_1 + z_2 = 3 + 7i$, $z_1z_2 = -22+7i$; б) $z_1+z_2=2-4i$, $z_1z_2 = -1{,}81 - 5{,}2i$; в) $z_1 + z_2 = -8 - 10i$, $z_1z_2 = 21 - 24i$; г) $z_1 + z_2 = 10$, $z_1z_2 = 28$.

2. а) $z_2 - z_1 = -2i$, $\frac{z_2}{z_1} = -i$; б) $z_2 - z_1 = 4 - 2i$, $\frac{z_2}{z_1} = 1 - 2i$;

в) $z_2 - z_1 = 1 - \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{3})i$, $\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}$; г) $z_2 - z_1 = 2\sqrt{b}\,i$,

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a^2 - b}{a^2 + b} + \frac{2a\sqrt{b}}{a^2 + b}i.$

3. а) $\frac{13}{20} - \frac{7}{4}i$; б) 0; в) $-2i$; г) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; д) 0.

4. а) -2; б) 0. **5.** а) 0; б) $-\frac{11}{17}$.

6. а) $-\frac{41}{50} + \frac{63}{50}i$; б) $\frac{22}{159} - \frac{5}{318}i$; в) $-38 + 41i$; г) $-\frac{18}{25} + \frac{173}{50}i$.

7. а) $-1 - i$; б) 0, -1, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **8.** (3; 4), (3; 5) (4; 4) (4; 5).

9. $(-2; -2)$, $(-2; 2)$. **11.** $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$.

8-§. **2.** $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$

3. $t(7+i)$, t — ихтиёрий мусбат сон.

4. а) 3; б) 1; в) 7; г) $\sqrt{2}$; д) 1; е) 7.

5. а) $2 - \frac{3}{2}i$; б) $0{,}3i, -3i$; в) bi, $b \in R$.

6. $\frac{7}{6} + \frac{5}{6}i$.

7. а) Маркази $z=0$ нуқтада, радиуси $R=1$ бўлган доира (чегараси билан биргаликда); б) маркази $z=0$ нуқтада, радиуси $R=2$ бўлган айлана; в) $z=i$ нуқта; г) мавҳум ўқ билан чегараланган чап ярим текислик; д) иккинчи ва тўртинчи координата бурчакларининг биссектрисалари билан чегараланган ва $z=-1$ нуқтага эга бўлган ярим текислик; е) маркази $z=1-2i$ нуқтада ва радиуси $R=2$ бўлган доира (чегараси билан биргаликда); ж) тўплам радиуси $R=3$ ва маркази $z=1-2i$ нуқтада бўлган айлана ичида ётувчи нуқталардан ва радиуси $R=2$ нуқтада, маркази $z=1-2i$ нуқтада бўлган айланадан ташқарида ёки унда ётган нуқталардан иборат; з) тўплам маркази $z=0$ нуқтада бўлган концентрик ҳалқаларнинг чексиз системасидан иборат, бу тўпламга ҳақиқий ўқнинг $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, $k\in Z$ интервалларига эга бўлган ҳалқалар киради; и) тўпламга радиуси $R=10$ га тенг ва маркази $z=10i$ нуқтада бўлган доиранинг унинг марказидан бошқа ҳамма нуқталари киради; к) радиуси $R=3$ га тенг ва маркази $z=-3$ нуқтада бўлган айлана.

8. $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i \quad -\frac{3}{2}-2i$.

9. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; в) $\pi+2\pi k$, $k\in Z$;

г) $2\pi k$, $k\in Z$; д) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $k\in Z$; е) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

10. а) Ҳақиқий мусбат $z=x>0$ ярим ўқ; б) мавҳум $z=iy$, $y>0$ ярим ўқ; в) $z=iy$, $y>0$ мавҳум ярим ўқ; г) $z=x+iy$, $y>0$, юқориги ярим текислик; д) $z=0$ нуқтадан ташқари бутун комплекс текислик.

11. Ҳақиқий манфий $z=x$, $x<0$ ярим ўқ.

12. i. 13. $\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$.

9-§. 1. а) $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$; б) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$;

в) $\cos 0+i\sin 0$; г) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; д) $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$;

е) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; ж) $-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

2. а) $z=1=\cos 0+i\sin 0$; б) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+$ $+i\sin\frac{4\pi}{3}$; в) $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$; г) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=$ $=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; д) $z=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$.

3. а) $\frac{5}{3}(\cos 230^\circ + i\sin 230^\circ)$; б) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$.

4. $-10+4i$. 5. $3-\frac{9}{2}i$.

6. а) $-\frac{\sqrt{2}}{16}+i\frac{\sqrt{2}}{16}$; б) 1; в) $\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ$; г) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; д) -2; е) 2.

7. а) $2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $2(\cos 0 + i\sin 0)$, n—жуфт; $2(\cos\pi+i\sin\pi)$, n—ток; г) $\frac{1}{\cos^4 1}(\cos 4+i\sin 4)$; д) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\sin 8)$; е) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\times$ $\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. 8. $n=4k$, $k\in Z$.

9. а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$; г) 1, $\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$, $\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ$, $\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ$, $\cos 288^\circ+i\sin 288^\circ$.

10. а) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$, б) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$; в) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $-2i$, $\sqrt{3}-i$.

11. а) $1+2i$, $1-2i$; б) $2+i$, $-2+i$; в) $3+5i$, $2-3i$; г) $5+i$; $3+2i$.

12. $-\frac{3}{2}i$.

13. $2(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ)$, $2(\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ)$, $\sqrt[5]{31}(\cos 108^\circ+$ $+i\sin 108^\circ)$, $-\sqrt[5]{31}$, $\sqrt[5]{31}(\cos 252^\circ+i\sin 252^\circ)$.

14. а) $e^2\cos 1-e^2\sin 1$; б) i; в) $-e^7\sin 3+i\,e^7\cos 3$.

15. а) $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$; б) $e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

16. а) $e^{2\pi i}=1$; б) $8e^{-i\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$; в) $64e^{i\pi}=-64$; г) $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2^7e^{\frac{3}{2}\pi i}=-2^7i$.

17. а) $1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $2e^{\frac{2\pi i}{9}}, 2e^{\frac{8\pi i}{9}}, 2e^{\frac{14\pi i}{9}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}+i\sqrt[4]{\frac{9}{8}}, -\sqrt[4]{\frac{9}{8}}+i\sqrt[4]{\frac{1}{8}}, -\sqrt[4]{\frac{1}{8}}-i\sqrt[4]{\frac{9}{8}}, \sqrt[4]{\frac{9}{8}}-i\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$.

III боб

10-§. 2. а) 3,003; б) 1,4435; в) 2,89; г) 3,11; д) 1, 316; е) 3,083.

3. а) 4,0208: б) 1,995; в) 5,00177; г) 0,484; д) 0,05; е) $-0{,}0175$; ж) 0, 965; з) 1,037; и) $-0{,}03$.

12-§. 1. $\frac{x^5}{5}+C$. 2. $\frac{5}{8}x^8+C$.

3. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$. 4. $\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}+C$.

5. $\frac{ax^2}{2}+bx+C$. 6. $7t-\frac{3}{2}t^2-\frac{t^4}{4}+C$.

7. $\frac{1}{2}u^4-\frac{5}{3}u^3-\frac{7}{2}u^2-3u+C$.

8. $-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x^4}+C$. 9. $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$.

10. $\frac{a}{8}x^8+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{2}x^2+\frac{2}{3}ex\sqrt{x}+fx+C$.

11. $\frac{x^6}{6}-x^3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$. 12. $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

13. $\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{t^2}{2}+6\sqrt{t}+C$. 14. $\frac{4^x}{\ln 4}+C$.

15. $\frac{b^x}{\ln b}+C$. 16. $\frac{t^8}{8}+\frac{7^t}{\ln 7}+C$. 17. $\frac{2250^x}{\ln 2250}+C$.

18. $3x-5\ln|x+2|+C$. 19. $\frac{t^2}{2}+2t+\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C$.

20. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$. 21. $\arcsin\frac{x}{5}+C$.

22. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$.

23. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-13}\right|+C.$

24. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{3}+C.$ 25. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{5}{2}}}{x-\sqrt{\frac{5}{2}}}\right|+C.$

26. $3e^x-5\cos x+3\sin x+4x+C.$ 27. $2\sin x+C.$

28. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$ 29. $\frac{1}{14}\sin 7x-\frac{1}{26}\sin 13x+C.$

30. $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C.$ 31. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

32. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{22}\sin 11x+C.$ 33. $-\frac{1}{7}\cos 7x+C.$

34. $-\frac{5}{3}\cos\frac{3}{5}x+C.$ 35. $\frac{1}{10}\sin 10x+C.$ 36. $9\sin\frac{x}{9}+C.$

37. $-\frac{1}{11}\cos 11x+\frac{1}{6}\sin 6x-7\cos\frac{x}{7}+\frac{4}{3}\sin\frac{3x}{4}+C.$

38. $e^x-e^{-x}+C.$ 39. $\frac{1}{3}e^{3x+5}+C.$ 40. $\frac{1}{18}(3x-1)^6+C.$

41. $\frac{5}{32}(1+4x)^{8/5}+C.$ 42. $\ln(3x^2+7x+4)+C.$

43. $\frac{1}{42}\ln(7x^6+1)+C.$ 44. $-\frac{1}{90}(3+5x^3)^{-6}+C.$

45. $\frac{1}{9}\sqrt{(3x^2-1)^3}+C.$ 46. $-\frac{1}{6}\cos^6 x+C.$

47. $-\frac{3}{4}(1+\cos x)^{\frac{4}{3}}+C.$ 48. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

49. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$ 50. $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

51. $\frac{1}{4}e^{x^4}+C.$ 52. $-e^{\cos x}+C.$ 53. $3\ln|\operatorname{arctg}x|+C.$

54. $\frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}2x)^3}+C.$ 55. $\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{2x+3}+C.$

56. $\arcsin\frac{x-3}{6}+C.$ 57. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{4}+C.$ 58. $\arcsin(2x-1)+C.$

59. $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}|+C.$ 60. $\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C.$

61. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C$. 62. $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C$.

63. $\frac{x^3}{4}(2\ln x-1)+C$. 64. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$.

65. $\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\frac{3}{4}x^2+4x+C$. 66. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$.

67. $\frac{13-6x}{9}e^{-3x}+C$. 68. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

69. $2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$. 70. $(6-4x)\mathrm{co}x\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}+C$;

71. $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$.

72. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C$.

73 $x\arcsin x+\sqrt{1-x^3}+C$. 74. $\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$.

75. $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$. 76. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}+C$.

77. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{4}+C$. 78. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+8}\right|+C$.

79. $\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$.

80. $\frac{1}{2}\ln(x^3+x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

81. $-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{13}{12}\ln|x+4|+\frac{1}{6}\ln|x-2|+C$.

82. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

83. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$.

84. $\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{1}{x+2}+2\ln|x+2|+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{5}{4(x+3)}-$
$-\frac{17}{8}\ln|x+3|+C$.

IV боб

13-§. 1. 4,5. 2. b^2-a^2. 3. $e-1$.

19-§. 1. а) 20; б) $\frac{21}{8}$; в) $\frac{14}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 0.

2. а) 4; б) 1; в) 1,5. 3. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1)$.

4. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}(e^2-1)$; в) $\frac{10}{3}$; г) $\ln(1+e)$; д) 2; е) $\frac{\pi}{2}$.

5. а) $\frac{23}{3}$; б) 12; в) $\frac{1}{5}(e-1)^5$; г) $\frac{1}{4}$.

20-§. 1. а) $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$; б) $\frac{\pi a^4}{16}$; в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; г) $4-2\ln 3$; д) $\frac{\pi}{3}$.

3. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$.

21-§. 1. а) 1; б) 1; в) $\pi-2$; г) 2; д) $\ln 2-\frac{1}{2}$; е) $\frac{\pi a^2}{4}$; ж) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

22-§ 2. 0,7462. 4. 1,12.

V боб

23-§. 1. а) 36 (кв. бир.); б) $\frac{2}{3}$ (кв. бир.); в) $\frac{32}{3}$ (кв. бир); г) 8 (кв. бир.); д) $\frac{77}{6}$ (кв. бир.); е) $\frac{8}{3}$ (кв. бир.); ж) $\frac{ab}{3}$ (кв. бир.); з) $\frac{4}{3}$ (кв. бир.); и) (22 ln 2—6) (кв. бир); к) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ (кв. бир.); л) $\frac{3}{4}$ (кв. бир.); м) ln 2 (кв. бир.); н) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ (кв. бир.).

24-§. 1. а) $\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; в) $\sqrt{1+e^2}+\sqrt{2}-1-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$; г) $\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$; д) $2\pi^2 a$; е) $\sqrt{2}(\pi-1)$; ж) 12; з) $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$; и) $\frac{1}{2}\ln 3$, к) $6a$.

25-§. 1. $\frac{265}{3}$ м. 2. 42 м. 3. 32 м. 4. 5с.

5 $a=20$. 6. 19 м 7. 122,375 м. 8. $\left(8R+\frac{16a}{3}\right)$м.

9. 2,45 (МН). 10. $\frac{H^2}{6}(a+2b)$, 523 (МН).

11. 1,4 (МН). **12.** 1,8 (МН), 1,35 (МН), **13.** 161 700 π (Н).

14. $\frac{aH^2}{2}$. **15.** 1724,8 (Н). **16.** 739,9 (кН).

17. 17863,2 (Н). **18.** 39 (Ж). **19.** 900 (Ж). **20.** 12,5 (Ж). **21.** 0,288 (Ж).

22. 11,25 (Ж), **23.** 2452,5 (Ж). **24.** 3,1392 (Ж). **25.** 0,16 (Ж).

26. 0,54 (Ж). **27.** 5 (Ж). **28.** $\frac{a^2}{8}(e^2-e^{-2}+4)$.

29. $M_x=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$, $M_y=\frac{9}{8}\sqrt{5}+\frac{1}{16}\ln(2+\sqrt{5})$.

30. $M_x=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **31.** $C\left(\frac{3}{5};\ \frac{3}{4}\right)$. **32.** $C(9;\ 9)$.

33. $C\left(\pi a;\frac{4}{3}a\right)$. **34.** $C\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4b}{3\pi}\right)$.

35. $C\left(0;\frac{8}{5}\right)$. **36.** $C\left(0;\frac{4a}{3\pi}\right)$.

37. $\pi Rl,\ \frac{1}{3}\pi R^2H$. **38.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$.

VI боб

26-§. 1. а) 5; б) 969; в) 256; г) $k(k+1)$; д) n.
2. а) 9; 10; б) 7; в) 10; г) 11.
3. {3; 4; 5} ва {1; 3; 2}. **4.** 12. **5.** 16. **6.** 18; 10.
7. а) 120; б) 60; в) 420; г) 83 160.
8. 72. **9.** 15. **10.** 43 200. **11.** $\frac{1}{15}$.
12. а) 8; б) 8; в) 27; г) 2.
13. {4; 5; 6; 7; 8; 9} ва {1; 15; 35; 14; 9; 1}.
14. а) {8; 9; 10}; б) {0; 1; 2; . . .; 27}.
15. а) 60; б) 10. **16.** а) 870; б) 435.
17. 8436. **18.** 18. **19.** 15. **20.** 35. **21.** 210.
22. 4060. **23.** а) 30; б) 62. **24.** 5040.
25. 15 625.
26. Етмаслиги мумкин. **27.** 27 · 10⁷ тадан ортиқ бўлмаган.

27-§. 1. а) $(x^2-y)^6=\sum\limits_{k=0}^{6}C_6^k(x^2)^{6-k}\ (-y)^k=x^{12}-6x^{10}y+$ $+15x^8y^2-20x^6y^3+15x^4y^4-6x^2y^5+y^6$; б) $(3a^2-2b)^5=$ $=\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^k(3a^2)^{5-k}(-2b)^k=243a^{10}-810a^8b+1080a^6b^2-$ $-720a^4b^3+240a^2b^4-32b^5$.

2. а) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^7+7\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^5+21\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3+35\sqrt{\frac{a}{b}}+$ $+35\sqrt{\frac{b}{a}}+21\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3+7\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; б) $x^{16}-$ $-16x^{13}+112x^{10}-448x^7+1120x^4-1792x+\frac{1792}{x^2}-\frac{1024}{x^5}+\frac{256}{x^8}$.

3. а) $109\sqrt{2}-89\sqrt{3}$; б) 64.

4. а) $-2\,099\,520x^3$; б) $126\sqrt[3]{a}$.

5. а) $252\sqrt[3]{x^2}$; б) $1716a^3\sqrt{a}\,b^2, -1716a^3b^2\sqrt[3]{b}$.

6. а) 15; б) 495. **7.** а) 5280; б) 5005.

8. 10. **9.** 1120.

10. а) 2772; б) 625; 7000; 7000; 1120; 16.

11. а) $\frac{1}{2^{100}}C_{100}^{50}$; б) $\frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$; в) $\frac{2^{21}}{3^{77}}C_{105}^{28}$; г) $\sqrt{10}\cdot 50^3C_{20}^{7}$.

12. а) 378; б) 17 550.

13. а) $2^n-2(n+1)$; б) 0; в) 2^{2n-1}; г) 2^{2^n-1}.

14. а) 1; б) -1.

VII боб

28-§. 1. а) Ҳеч бўлмаганда битта ўқ нишонга теккан; б) учала ўқ нишонга теккан; в) нишонга битта ва фақат битта ўқ теккан.

2. $B=A_1\cup(A_2\cap A_3)$, $\overline{B}=\overline{A}_1\cap(\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)$.

3. $A\cup B=U$, яъни A ва B ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ системасини ташкил этади. A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар эмас.

5. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 0; г) $\frac{5}{12}$.

6. $\frac{5}{36}$. **7.** $\frac{164}{1081}$. **8.** а) $\frac{9}{17}$; б) $\frac{8}{17}$.

29-§. 3. а) 0,94; б) 0,38. **4.** $\frac{19}{30}$.

5. Бўлмайди. **6.** Бўлмайди.

7. A ва B боғлиқ, B ва C боғлиқ, A ва C эркли.

8. Ҳар иккитаси эркли, лекин биргаликда эркли эмас.

9. 0,976. **10.** 0,819. **11.** $P_1=p^3(2-p^3)$, $P_2=p^3(2-p)^3$, агар $0<p<1$ бўлса, $P_2>P_1$.

12. $1-(1-p)^{12}$. **13.** Ҳеч бўлмаганда 13 марта.

14. $\frac{3}{5}$ ва $\frac{2}{5}$. **15.** 0,78. **16.** 0,014. **17.** 0,775. **18.** $\frac{10}{17}$. **19.** 0,998.

20. $\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$. **21.** $\frac{2}{3}$. **22.** $\frac{2}{3}$.

30-§. 1. $\approx 0{,}04$. **2.** $\approx 0{,}02$. **3.** $\frac{13}{16}$.

4. а) Тўртта партиядан учтасини ютиш эҳтимоли саккизта партиядан бештасини ютиш эҳтимолидан катта; б) саккизта партиядан ҳеч бўлмаганда бештасини ютиш эҳтимоли тўртта партиядан ҳеч бўлмаганда учтасини ютиш эҳтимолидан катта.

5. $P_5(5) \approx 0{,}132$; $P_5(4) = P_5(3) \approx 0{,}329$; $P_5(2) \approx 0{,}165$; $P_5(1) \approx$ $\approx 0{,}041$; $P_5(0) \approx 0{,}004$.

7. Эҳтимол иккала ҳолда ҳам бир хилдир, чунки

$$C_{50}^{17}\left(\frac{1}{3}\right)^{17}\left(\frac{2}{3}\right)^{33}=C_{50}^{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{34}.$$

8. 0,026.

31-§. 1. а) Мумкин; б) мумкин эмас. 2. 1-мисолда биномиал эмас, 2-мисолда биномиал.

3.

0	1	2	3
0,125	0,375	0,375	0,125

4.

1	4	9	16	25	36
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

5.

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0,216	0,432	0,288	0,064

6. $MX = 2{,}2, DX = 0{,}76$, 7. $MX = 6, DX = 9$.

8. а) $MX = \frac{3}{2}$. $DX = \frac{3}{4}$; б) $MX = \frac{2}{5}$, $DX = \frac{2}{25}$.

9. $MX = \frac{91}{6}$. 10. $MX = \frac{4}{5}$, $DX = \frac{9}{25}$.

11. $MX = 100, DX = 8$. 12. $MX = 4900$, $DX = 98$.

13.

1	2	3	4
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

$MX = \frac{40}{27}$, $DX = \frac{452}{729}$.

14. Билетнинг нархи 11 тийиндан ошиши керак эмас, чунки ютуқнинг математик кутилиши $\approx 11{,}6$ тийин.

15. а) Фойдали эмас; б) фойдали; в) фойда ҳам зарар ҳам йўқ, чунки ютуқнинг математик кутилиши нолга тенг.

VIII боб

32-§. 1. $x' = x \ln 2$; $x = C \cdot 2^t$. 2. $x' = x \ln 0{,}99$; $x = C \cdot 0{,}99^t$.

3. $T = -\dfrac{\ln 2}{\ln 0{,}99}$. 4. 3,9кг. 5. 56,5 г.

6. $y = 4e^x$. 7. $\omega = \omega_0 e^{-kt}$. 8. $T = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/20}$; 60 мин.

33-§. 1. а) Ҳа; б) йўқ; в) йўқ. 2. а) Ҳа; б) ҳа; в) ҳа.

3. а) $\alpha = -2$; б) $\alpha = \dfrac{1}{2}$; в) $\alpha = 2, \alpha = -3$.

4. $A = 0, \alpha$ — ихтиёрий; $\alpha = -1, A$ ихтиёрий.

34-§. 1. $y = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$. 2. $y = \ln(1 - C_e{}^{-x})$.

3. $y = C(x - 1) - 1$. 4. $y = Ce^{\sqrt{1 - x^2}}$.

5. $y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$. 6. $y = -\ln(C - e^x), C > 0$. 7. $y = C \cos x$.
8. $y = \ln(Cx^2 + C - 1)$. 9. $y = C(1 + x)^2$.

10. $y = C(1 + x)e^{-x}$.

11. $y = \operatorname{tg} \ln Cx$. 12. $y = \dfrac{1}{27}(x + C)^3, y = 0$.

13. $y = \sin(x + C)$, $y = 1, y = -1$.
14. $y = (x^2 + C)^2 + 1$, $y = 1$.

15. $y = \dfrac{1}{1 + Cx}$, $y = 0$. 16. $y = \dfrac{2}{Ce^{-x^2} - 1}$, $y = 0$.

17. $y = \left(C + \dfrac{\sin 2x}{8} - \dfrac{x}{4}\right)^2$, $y = 0$. 18. $x = \dfrac{3}{4} t^2$.

19. $x = \dfrac{1}{1 - t}$. 20. $x = -\sqrt{\dfrac{6 + t^2}{1 + t^2}}$.

21. а) $y = x$; б) $y = 0$. 22. $y = \arcsin x - \dfrac{\pi}{4}$.

23. $y = Cx^2$; $y^2 = Cx$. 24. $s = 25 \cdot 2^{t/5}$.

25. $(1 + y)e^{-y} = \ln \dfrac{1 + e^x}{2} + 1 - x$.

26. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1$, $y = 1$.

35-§. 1. $x = Ct^{-2} + \dfrac{1}{5} t^3$. 2. $x = Ce^{-t^2} + 1$.

3. $x = C \cos t + \sin t$. 4. $x = \left(C + \dfrac{1}{2} t^2 - \dfrac{1}{4} t^4\right)e^{t^2}$.

5. $x = \frac{Ct}{t^3+1} + \frac{1}{t}$. 6. $x = t$. 7. $x = \frac{t}{\cos t}$.

8. $x = 8 \sin^2 \frac{t}{2} + e^{1-\cos t}$. 9. $x = \frac{3(t+1)^2 + (t+1)^4}{2}$.

10. $I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Кўрсатма. Масала $L\frac{dI}{dt} + RI = V$ тенгламани $I(0) = 0$ бошланғич шартда интеграллашга келтирилади.

11. $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}\right)$. Кўрсатма. Масала $L\frac{dI}{dt} + RI = V \sin \omega t$ тенгламанинг даврий ечимини топишга келтирилади.

36-§. 1. $x = 600(1 - e^{-0,01\,t})$. Кўрсатма. Масала $mx'' = -kx'$ тенгламани $x(0) = 0$, $x'(0) = 6$ бошланғич шартларда интеграллашга келтирилади.

2. $x = \frac{2kv_0 + g}{4k^2}(1 - e^{-2kt}) - \frac{gt}{2k}$. Кўрсатма. Масала $mx'' + 2kmx' = -mg$ тенгламанинг $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топишга келтирилади.

3. $t = \frac{h(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln \frac{v_1}{v_0}}$ с.

4. $mx'' = t^2$; $x = \frac{1}{12m}t^4 + C_1 t + C_2$.

5. $x = -\frac{1}{40}t^5 + \frac{1}{4}t^2 + C_1 t + C_2$. 6. $x = \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{20}t^2 + 1$.

37-§. 1. $x'' + x = 0$. 2. а) Тавсифлайди; б), в), г) тавсифламайди.

3. $x = a\left(1 = \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$. Кўрсатма. Масала $lx'' + gx = ag$ тенгламани $x(0) = x'(0) = 0$ бошланғич шартларда интеграллашга келтирилади.

4. $x = \frac{l}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{2l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{2l}}t}\right)$, $T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Кўрсатма. Координаталар бошини бошланғич моментда занжирнинг ўртаси турган нуқтада олиш қулайдир; у ҳолда x ўзгарувчи $2lx'' = gx$ тенгламанинг $x(0) = l$, $x'(0) = 0$ шартлардаги ечими бўлади.

38-§. 1. $x = C_1 + C_2 e^{2t}$. 2. $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$.

3. $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-\frac{4}{3}t}$. 4. $x = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$.

5. $x=e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. 6. $x=e^{3t}(C_1+C_2t)$.

7. $x=C_1e^{-t}+C_2e^t-2$. 8. $x=C_1+C_2e^{-2t}+t$.

9. $x=C_1\sin 3t+C_2\cos 3t+1$. 10. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+\frac{1}{5}e^{4t}$.

11. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{10}(\sin t+3\cos t)$.

12. $x=C_1\sin t+C_2\cos t-2t\cos t$. 13. $x=e^t+e^{2t}$.

14. $x=e^{-t}(\sin 2t+\cos 2t)$. 15. $x=e^{-3t}(2+7t)$.

16. $x=ae^{-t}\cos t+(a+b)e^{-t}\sin t$.

17. $x=\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}-\frac{1}{3}$.

18. $x=\frac{7}{27}e^{3t}-\frac{1}{27}e^{-3t}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{9}$.

19. $x=2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$. 20. $\alpha=0,\ \beta>0$.

21. $\alpha=k^2$, k—бутун сон; $x=C\sin kt$, C—ихтиёрий ўзгармас.

IX боб

39-§. **1.** а) -1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{5}{9}$; г) $-\frac{1}{8}$; д) $\frac{7}{99}$.

2. а) Узоқлашади; б) узоқлашади; в) узоқлашади.

3. а) Яқинлашади; б) узоқлашади; в) узоқлашади; г) яқинлашади; д) яқинлашади: е) узоқлашади.

4. а) Яқинлашади; б) яқинлашади; в) яқинлашади; г) яқинлашади; д) яқинлашади.

5. а) Шартли яқинлашади; б) узоқлашади; в) абсолют яқинлашади; г) шартли яқинлашади; д) шартли яқинлашади; е) абсолют яқинлашади.

40-§. **1.** а) $R=2$; б) $R=2$; в) $R=\sqrt[3]{3}$; г) $R=+\infty$; д) $R=0$.

2. а) $|z-1|<3$; б) $|z+i|<2$; в) $|z+1-i|<\sqrt{2}$; г) бутун комплекс текислик.

3. а) $[-1;1]$; б) $]-1;1[$; в) $[-2;2[$; г) $]-e;e[$; д) $[-1;1[$; е) R.

41-§. **1.** а) $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\dots$; б) $\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+\dots$; в) $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\dots$.

2. а) 0,006; б) 0,07.

3. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $R=+\infty$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{2^n n!}x^n$, $R=+\infty$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n2^{4n-1}}$, $R=4$; г) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=+\infty$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n$, $R=1$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^{3n}$, $R=1$;

ж) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$, $R=1$; з) $-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right)x^n$,

$R=1$; и) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)x^n$, $R=2$.

4. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$; б) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$,

$R=1$; в) $\frac{\pi}{2}-x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=1$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$, $R=1$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$;

е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}x^n$,
$R=1$.

Грек алфавити

Α α	Β β	Γ γ	Δ δ
Альфа	Бета	Гамма	Дельта
Ε ε	Ζ ζ	Η η	Θ θ
Эпсилон	Дзета	Эта	Тэта
Ι ι	Κ ϰ	Λ λ	Μ μ
Йота	Каппа	Лямбда	Мю
Ν ν	Ξ ξ	Ο ο	Π π
Ню	Кси	Омикрон	Пи
Ρ ρ	Σ σ	Τ τ	Υ υ
Ро	Сигма	Тау	Ипсилон
Φ φ	Χ χ	Ψ ψ	Ω ω
Фи	Хи	Пси	Омега

На узбекском языке

Мечислав Игнатьевич Каченовский,
Юрий Михайлович Колягин,
Александр Дмитриевич Кутасов,
Геннадий Лаврович Луканкин,
Вачаган Арташесович Оганесян,
Геннадий Николаевич Яковлев.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

часть II

Учебник для средних специальных
учебных заведений

Перевод с русского издания изд-во „Наука“, М., 1978.

Ташкент—„Ўқитувчи“—1982

Таржимон *Х. Алимов*
Редакторлар: *Ў. Ҳусанов, Р. Каримов*
Бадиий редактор *С. Соин*
Техредактор *О. Леготина*
Корректор *П. Аъзамова*

ИБ № 2284

Теришга берилди 23. 09. 1981й. Босишга рухсат этилди 12.07.1982й. Формат $84\times108^1/_{3}$
Қоғози №3. Кегли 10 шпонсиз. Гарнитура „Литературная“. Юқори босма усулида
босилди. Шартли б. л. 18,06. Нашр. л. 16,28. Тиражи 10000. Зак. № 5340. Баҳоси 65т.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 9-79-81.

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари область бошқармасининг
Морозов номли босмахонаси. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1982 й.

Типография имени Морозова областного управления по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ 1982/83 ЙИЛЛАРДА МАХСУС ЎРТА ЎҚУВ ЮРТЛАРИ ЎҚУВЧИЛАРИ УЧУН ФИЗИКА ВА МАТЕМАТИКАГА ДОИР ҚУЙИДАГИ ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМАЛАРНИ НАШР ЭТАДИ:

Яковлев Г. Н. таҳрири остида. **Геометрия,** II қ. 8,0 нашр. л.

Китоб ўрта махсус ўқув юртларининг математикадан янги программасига мувофиқ ёзилган дарсликнинг иккинчи қисмидир. Биринчи боб фазодаги аналитик геометрия: фазода тўғри чизиқлар ва текисликлар ҳамда уларнинг ўзаро жойлашишлари ҳақидаги масалани ўз ичига олади. Иккинчи ва учинчи бобларда кўпёқлар, доиравий жисмлар ва уларнинг сиртларининг хоссалари ўрганилади. Сўнгги бобда ҳажмлар назарияси ва юзлар назарияси элементлари баён қилинади.

Назарий материал масалаларни таҳлил қилиш билан бирга баён этилади.

Ҳар бир бобнинг охирида ўқувчиларнинг мустақил ишлашлари учун масалалар келтирилади.

Шахмаев Н. М. **Физика,** I қ. 15,0 нашр. л.

Қўлланмада молекуляр физика, термодинамика ва электромагнит ҳодисалар асосларининг баёни берилган. Ҳар қайси боб охирида қисқача хулосалар келтирилган. Ўқув физика экспериментига катта эътибор берилган. Қўлланмада материални яхшироқ ўзлаштиришга ёрдам берувчи расмлар кўп.

Қўлланма техникумларнинг сиртқи бўлими студентларига мўлжалланган. Ўрта мактаб ўқувчиларига ҳам фойдали бўлиши мумкин.

Гладкова Р. А. таҳрири остида. **Физикадан савол ва масалалар тўплами.** 22,0 нашр. л.

Материалнинг мазмуни ва жойлаштирилиши ўрта мактабнинг 8-синф базасидаги техникумлар учун мўлжалланган физика курси бўйича 1977 йилда тасдиқланган программага мос келади. Материалнинг баёни Халқаро бирликлар системаси (СИ) асосида олиб борилади. Масалалар тўплами Л. С. Ждановнинг „Физика дарслиги“ китобига тўла мослаб тузилган.

Китоб ўрта махсус ўқув юртларининг ўқувчилари учун мўлжалланган; ундан ўрта умумий таълим мактаб ўқувчилари, олий ўқув юртларининг тайёрлов бўлими тингловчилари, шунингдек, мустақил ўқиб тайёрланаётганлар ҳам фойдаланишлари мумкин.