ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

А. А. БОРОВКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. А. БОРОВКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.171
Б 83
УДК 519.2

Асимптотические методы в теории массового обслуживания. Боровков А. А. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Книга в известном смысле представляет собой продолжение монографии того же автора «Вероятностные процессы в теории массового обслуживания», вышедшей в 1972 г., но может читаться и независимо от нее.

Основной целью этой книги является разработка таких методов асимптотического анализа различных процессов обслуживания, которые были бы по возможности более едиными и общими и давали бы эффективное средство исследования достаточно сложных систем.

В книге излагаются общие теоремы о сходимости случайных процессов, асимптотический анализ систем, предельное поведение которых может быть описано различными диффузионными процессами, асимптотический анализ систем с интенсивным входным потоком, теоремы устойчивости.

Илл. 4. Библ. 114 назв.

Б $\frac{20203-011}{053(02)-80}$ 77-79. 1702060000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга посвящена изложению общих асимптотических методов теории массового обслуживания. Она в известном смысле представляет собой продолжение монографии автора [18], но может читаться и независимо от нее. Основным объектом этой книги являются методы асимптотического анализа процессов обслуживания. Мы стремились сделать эти методы по возможности более общими и дающими эффективное средство исследования достаточно сложных систем. При этом автор не старался рассмотреть максимально широкий круг различных типов систем, поскольку главной своей целью считал само обсуждение общих методов, которое помогло бы читателю самостоятельно ориентироваться в разного рода конкретных ситуациях.

Что мы понимаем под асимптотическими методами теории массового обслуживания? Этот вопрос требует некоторого уточнения, поскольку при достаточно широком толковании понятия «асимптотические методы» к ним можно отнести почти все содержание теории, во всяком случае такие ее основные разделы, как эргодические теоремы, отыскание стационарных распределений и изучение сходимости к ним. Отнесение этих разделов к асимптотическим вполне естественно, если учесть, что в них изучается предельное поведение процессов, рассчитанное на использование в «допредельных» условиях.

В этой книге мы будем понимать асимптотические методы не столь широко. Мы будем иметь в виду следующие три направления исследований (выделение этих направлений весьма условно), основная цель которых — изучение процессов обслуживания (в том числе стационарных) путем отыскания для них подходящих приближений.

1. Асимптотический анализ явных формул или уравнений, описывающих распределение (обычно

стационарное) той или иной характеристики системы. Для осуществления такого анализа предполагается, конечно, само наличие таких явных формул или уравнений и, кроме того, неограниченное сближение системы с каким-нибудь своим критическим состоянием. Именно на этом пути Кингманом в 1961 г. были получены первые результаты о поведении одноканальных систем в нагруженном состоянии (см. [94], [95], а также [39], [18], [96], [103]). Можно назвать целый ряд других работ, принадлежащих тому же направлению, например, работы, где изучено поведение систем с отказами при большом числе каналов обслуживания ([34], [18]) и др. Закономерности, подмеченные при этом на сравнительно простых примерах, оказывались затем справедливыми в значительно более общих условиях, в которых явные формулы уже отсутствуют. Поскольку на сегодня теория массового облсуживания, по-видимому, исчерпала почти все случаи «явной разрешимости» систем обслуживания, то актуальными становятся поиски иных путей асимптотического анализа.

2. Второе направление значительно более широкое и связано с изучением предельного поведения самих случайных процессов, характеризующих систему (опять-таки при сближении системы с каким-нибудь ее критическим состоянием). В работе Прохорова [64] (1963 г.) выяснено, что в основе явлений, возникающих в уже упомянутых нагруженных системах лежит хорошо известный принцип инвариантности Донскера — Прохорова. Этот принцип является весьма эффективным и позволяет с помощью винеровского процесса приближенно описывать довольно сложные процессы, порожденные суммами случайных величин.

Основной целью второго направления является установление так называемых «собирательных» предельных теорем и выяснение максимально широких и общих условий, при которых действуют эти собирательные асимптотические законы (например, закон о сходимости нормированной длины очереди к диффузионному процессу). Методы этого направления, очевидно, существенно отличаются от методов п. 1 и основаны, как правило, на использовании общих теорем сходимости для процессов.

3. Третье направление носит несколько специальный характер и связано с так называемыми теоремами устойчивости (или непрерывности). По существу здесь также рассматриваются предельные теоремы для процессов, но уже не «собирательные», а «индивидуальные». Именно, выясняются условия, при которых системы обслуживания будут близки (в смысле распределения того или иного процесса, характеризующего систему) к данной конкретной системе. Термин «устойчивость» связан с тем, что такого рода теоремы позволяют делать заключения о малых изменениях стационарных характеристик при малых отклонениях, испытываемых параметрами системы.

В предлагаемой книге рассматриваются главным образом последние два направления. Первое направление, по-видимому, достаточно полно представлено в уже имеющейся журнальной и монографической литературе.

Книга состоит из четырех глав. Первая глава имеет предварительный характер. В ней собраны понятия и теоремы, которые используются в дальнейшем. В частности, в §§ 4—10 доказаны теоремы о сходимости к вырожденным процессам и к процессам диффузии (с границами и без них). В отдельный параграф главы I выделены примеры, на которых иллюстрируются полученные в главе результаты. Эти примеры охватывают, в частности, основные типы входных потоков и показывают, что условия сходимости, которые накладываются на них в дальнейшем (главы II, III), будут в очень широких предположениях выполнены.

Сведения, сообщаемые в главе I, в некоторых ее разделах, возможно, несколько шире, чем это требуется непосредственно для понимания глав II—IV и для ссылок. Это сделано в расчете на не совсем подготовленного читателя, а также для связности изложения материала в главе I.

Глава II посвящена изучению класса многоканальных систем, когда число каналов велико, а входной поток является интенсивным. В зависимости от соотношения между интенсивностью входного потока и числом каналов возможны три режима работы — «надкритический» (когда число каналов асимптотически эквивалентно бесконечности), «докритический» (постоянно загружены почти все каналы) и «критический» — промежуточный между ними. Изучено асимптотическое поведение числа занятых линий во всех трех режимах. Как и следовало ожидать, закономерности, полученные при этом, качественно различны. В качестве предельных процессов получаются процессы довольно сложной природы. Сходимость к марковским процессам диффузии (в критическом и надкритическом режимах) наблюдается только в простейших случаях, когда время обслуживания имеет экспоненциальное распределение. Во второй главе рассмотрены также связи, возникающие с задачами ветвящихся процессов с интенсивной иммиграцией. Некоторые результаты этой главы опубликованы в работах [29], [16], [10].

В качестве предельных процессов в теории обслуживания, по-видимому, чаще других возникают диффузионные марковские процессы. В 50-х годах А. Н. Колмогоровым высказывалась гипотеза о приближенном описании числа занятых каналов в системах с отказами с помощью процесса диффузии с отражением от верхней границы. В уже упомянутой работе Прохорова [64], а также в работах [12], [39], [66], [77], [78], [86]—[89], [98], [100], [111] и ряде других изучалась задача об аппроксимации с помощью диффузионных процессов нагруженных систем с очередью (более подробную библиографию см. в обзорных статьях Иглехарта [90], Витта [113] и Коэна [79]). Установлено, в частности, что для простейших систем нормированная длина очереди (или времени ожидания) как процесс сближается с диффузионным процессом с отражением от нижней границы в точке нуль.

В главе II выясняются максимально широкие (в естественных границах) условия, при которых длина очереди (или «занятость») системы описывается с помощью диффузионных процессов.

Полученные результаты применяются к разного рода конкретным ситуациям: к так называемым нагруженным системам, системам со стохастическими отказами, к многоканальным системам и др.

Как во второй, так и в третьей главах мы используем более общее, чем обычно, определение процесса обслуживания, как трехмерного вероятностного процесса

$$S(t) = (e(t), r(t), s(t); t \geqslant 0),$$

где все компоненты неотрицательны, монотонны и обладают свойством $q(t) = e(t) - r(t) - s(t) \geqslant 0$.

Компонента $e(t)$ имеет смысл числа вызовов, поступивших в систему к моменту t, компонента $r(t)$ — числа вызовов, получивших отказ, и компонента $s(t)$ — числа вызовов, обслуженных системой. В качестве характеристик системы, которые обычно изучаются, можно указать процесс «очереди» $q(t)$ и «процесс отказов» $\pi(t) = r(t)/e(t)$.

В реальных системах совместное распределение компонент e, r и s задается обычно путем указания их «локальных» свойств (распределение времени обслуживания и др.), а также некоторых алгоритмов, которые и определяют природу процессов обслуживания.

Однако с точки зрения асимптотического подхода часто оказывается достаточным характеризовать процесс $S(t)$ с помощью свойств приращений компонент e, r, s за сравнительно большие промежутки времени (это тоже есть задание «локальных» свойств, но уже как временно́го процесса). Условия, налагаемые на эти приращения, имеют обычно весьма простую и доступную проверке форму. Достигаемая при этом общность результатов составляет несомненное преимущество асимптотического подхода.

Четвертая глава содержит изложение теорем устойчивости. В настоящее время исследования по устойчивости (мы имеем в виду прежде всего устойчивость стационарных характеристик) ведутся с помощью нескольких существенно разных подходов. Основы этих подходов изложены в работах Франкена ([83]; применяется теория точечных процессов), Золотарева ([45]; общий метрический подход), Калашникова ([50]—[52]; метод пробных функций). В предлагаемой книге излагается иной метод, который представляется нам весьма естественным и который назван в книге «методом обновлений». Этот метод использовался ранее в работах автора [18], [22]. Его преимущество состоит в том, что он позволяет с единых позиций получить теоремы устойчивости и эргодичности (они тесно связаны) для всех основных типов систем обслуживания. Для простейших систем этот метод позволяет получать теоремы устойчивости при минимальных предположениях. Кроме того, метод обновлений позволяет получить оценки скорости сходимости также для всех основных типов систем обслуживания. Это проиллюстрировано в § 4 гл. IV.

Более подробный обзор содержания глав II—IV можно найти во введениях к этим главам.

Разумеется, книга не претендует на освещение всех сторон предмета, который можно назвать «асимптотические методы в теории массового обслуживания». Например, вне нашего поля зрения остается такой важный раздел, как собирательные предельные теоремы для входного процесса (или входного потока вызовов). Этот раздел можно отнести ко второму направлению исследований, упомянутому выше. Он опущен нами, поскольку основное внимание в книге уделено асимптотическим методам и приближениям, связанным с *«решениями»* систем обслуживания, т. е. связанным с процессами, которые описывают интересующие нас характеристики системы, если входной процесс и другие процессы, определяющие работу системы, уже *заданы*. В какой-то мере мы касаемся предельных теорем для входного процесса лишь в главе I, в §§ 5, 11, 12.

Почти все результаты книги публикуются в монографической литературе впервые.

При подборке ссылок, помещенных в тексте книги, автор везде, где это было возможно, монографические источники предпочитал оригинальным статьям, считая, что читателю при работе с книгой удобнее пользоваться первыми. В связи с этим следует отметить, что список цитированной в монографии литературы на полноту не претендует. Однако объединение библиографий всех цитированных работ, по-видимому, будет уже достаточно полным.

Предполагается, что читатель знаком с основами теории вероятностей и теории случайных процессов. Вполне достаточным является знакомство с этим предметом, например, по книге А. А. Боровкова «Теория вероятностей» и по книге И. И. Гихмана и А. В. Скорохода «Введение в теорию случайных процессов» (см. [28], [35]).

А. Боровков

ГЛАВА I

О СХОДИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В этой главе излагаются основные понятия и те общие результаты, относящиеся к сходимости случайных процессов, которые понадобятся нам в последующих главах. В этом изложении мы придерживаемся следующего правила. Те результаты, которые можно найти в известных монографиях по теории случайных процессов, таких как книги Дуба [42], Гихмана и Скорохода [35], [36], Биллингсли [9], не доказываются, а лишь сопровождаются соответствующей ссылкой. Остальные результаты приводятся с доказательствами или с пояснениями, позволяющими эти доказательства без труда восстановить. Такой путь изложения нельзя назвать единообразным, но, по-видимому, в рамках этой книги он наиболее подходящий.

§ 1. Общие определения и теоремы

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — вероятностное пространство. *Случайным процессом* (или *вероятностным процессом*) называется семейство случайных величин $\{\xi(u) = \xi(u, \omega);\ u \in U\}$, зависящих от параметра $u \in U$. Другими словами, $\xi(u, \omega)$ есть вещественнозначная функция на $U \times \Omega$, $\mathfrak{A}$-измеримая по $\omega \in \Omega$. В качестве параметрического множества U чаще всего рассматривают либо последовательности вида $(0, 1, 2, \ldots)$, $(\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots)$, либо вещественную прямую $(-\infty, \infty)$ или ее часть. В первом случае случайный процесс называют *случайной последовательностью*, во втором — *процессом с непрерывным временем*.

Пусть $R(U)$ — некоторое пространство функций $r(u)$ на множестве U и $\mathfrak{A}_{R(U)}$ — σ-алгебра подмножеств из

$R(U)$, которая содержит в себе множества вида

$$\{r(u): \quad r(u_1) \in B_1, \ \ldots, \ r(u_k) \in B_k\}, \tag{1}$$

называемые *цилиндрическими*, где $u_j \in U$, B_j — борелевские множества на прямой, $j = 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно, любое измеримое отображение $(\Omega, \mathfrak{A})$ на $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$ определяет случайный процесс (ведь каждому ω поставлена в соответствие функция $\xi(u, \omega) \in R(U)$, при этом $\{\omega: \xi(u, \omega) \in B\} \in \mathfrak{A}$). Мера P на $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$, в которую перейдет мера μ, называется также *распределением процесса* $\xi(u)$, а все вероятностное пространство $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)}, \mathsf{P})$ — *выборочным пространством* для процесса $\xi(u)$.

Часто при изучении случайных процессов в качестве исходного вероятностного пространства бывает удобным сразу рассматривать выборочное пространство

$$(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)}, \mathsf{P}).$$

В качестве множества U чаще других мы будем рассматривать отрезок вещественной прямой $[0, U], U > 0$. Как видно из этой записи, мы в этом случае под U будем понимать также число. В дальнейшем это нигде не приводит к недоразумениям.

Для множеств U вида $[0, U]$ в теории вероятностей часто рассматриваются следующие пространства функций $R(U)$:

1. $R(U) = R^U = \prod\limits_{u \in U} R^u$, где $R^u = (-\infty, \infty)$ есть множество значений $\xi(u, \omega)$. R^U есть пространство всех вещественных функций на множестве U. Это пространство удобно рассматривать в паре с σ-алгеброй $\mathfrak{C}_U$, порожденной цилиндрическими множествами (т. е. множествами вида (1)). Задание согласованных конечномерных распределений (вероятностей множеств (1)) по теореме Колмогорова однозначно определяет вероятностный процесс в $(R^U, \mathfrak{C}_U)$ (распределение P на $(R^U, \mathfrak{C}_U)$) (см., например, [35]).

2. $R(U) = C(0, U)$ — пространство всех непрерывных на $[0, U]$ функций. В этом пространстве распределение иногда задают также на так называемой *борелевской* σ-алгебре $\mathfrak{B}_{C(0, U)}$, порожденной множествами, открытыми

относительно равномерной метрики

$$\rho(r_1, r_2) = \sup_u |r_1(u) - r_2(u)|. \tag{2}$$

В связи с предыдущим следует отметить, что мера на $\mathfrak{B}_{C(0,U)}$ определяет процесс, так как условие $\mathfrak{C}_{C(0,U)} \subset \subset \mathfrak{B}_{C(0,U)}$, где $\mathfrak{C}_{C(0,U)}$ есть σ-алгебра, порожденная множествами (1) из $C(0, U)$, здесь всегда выполнено. Более того, оказывается, что $\mathfrak{C}_{C(0,U)} = \mathfrak{B}_{C(0,U)}$ ([35], [36]).

3. $R(U) = D(0, U)$ — пространство всех функций на $[0, U]$, не имеющих разрывов второго рода. Для определенности, говоря о пространстве D, мы обычно будем иметь в виду множество функций, для которых при каждом u существуют пределы $r(u-0)$ и $r(u+0)$ и, кроме того, значение $r(u)$ совпадает либо с $r(u-0)$, либо с $r(u+0)$; $r(0) = r(+0)$, $r(U) = r(U-0)$. Пространство D, обладающее свойством $r(u) = r(u+0)$, $0 \leqslant u < U$, мы будем обозначать $D^+ = D^+(0, U)$.

Как и в пространстве C, здесь распределение процесса иногда задают на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}_{D(0,U)}$, порожденной множествами, открытыми относительно метрики Скорохода — Прохорова

$$\rho(r_1, r_2) = \inf_\lambda \left[\sup_{u \in [0, U]} |r_1(u) - r_2(\lambda(u))| + \sup_{u \in [0, U]} |u - \lambda(u)| \right], \tag{3}$$

где inf берется по всем непрерывным монотонным функциям $\lambda(u)$, для которых $\lambda(0) = 0$, $\lambda(U) = U$ (функции r_1 и r_2 близки в смысле расстояния (3), если после малых «шевелений» вдоль оси u эти функции будут близки в равномерной метрике).

Для пространства D также оказывается, что $\mathfrak{B}_{D(0,U)}$ совпадает с σ-аглеброй $\mathfrak{C}_{D(0,U)}$ цилиндрических подмножеств *) из D (см. [9]).

Таким образом, если $\xi(u)$ — процесс в пространствах C или D, то, например, функции

$$f_1(\xi) = \sup_{u \in U} \xi(u) \quad \text{или} \quad f_2(\xi) = \int_0^U \varphi(\xi(u))\, du, \tag{4}$$

*) Вместо слов «σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами» мы будем иногда для сокращения писать просто «σ-алгебра цилиндрических множеств» или «цилиндрическая σ-алгебра».

где φ непрерывна, являются случайными величинами, поскольку множества

$$f_1(r) < a, \qquad f_2(r) < a$$

будут открытыми и, следовательно, будут принадлежать цилиндрической σ-алгебре.

Однако для процессов, заданных в произвольном пространстве $R(U)$, такие важные в приложениях функционалы, как функции (4) и другие, уже не будут, вообще говоря, измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_{R(U)}$, содержащей цилиндрические множества или порожденной ими.

Чтобы избежать в общем случае такого рода затруднений и расширить класс функций, являющихся случайными величинами (или класс событий), мы везде в дальнейшем будем предполагать, что *мера* P *процесса* $\xi(u)$ *является полной, а сам процесс* $\xi(u)$ *является сепарабельным.*

Первое означает, что наряду с множеством $A \in \mathfrak{A}_{R(U)}$ к σ-алгебре $\mathfrak{A}_{R(U)}$ присоединяются и все множества A', отличающиеся от A на подмножество множества меры 0. При этом, естественно, надо считать, что $\mathsf{P}(A') = \mathsf{P}(A)$.

Сепарабельность $\xi(u)$ означает, что на U существует счетное всюду плотное множество S такое, что для любого интервала $I \subset U$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{\substack{u \in I \\ u \in S}} \xi(t) = \sup_{u \in I} \xi(u);\ \inf_{\substack{u \in I \\ u \in S}} \xi(u) = \inf_{u \in I} \xi(u)\right) = 1.$$

Это определение сепарабельности можно эквивалентным образом записать в виде

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{\substack{t \to u \\ t \in S}} \xi(t) \geqslant \xi(u) \geqslant \liminf_{\substack{t \to u \\ t \in S}} \xi(t) \quad \text{для всех} \quad u \in U\right) = 1.$$

Два процесса $\xi(u, \omega)$ и $\xi^*(u, \omega)$ называются *стохастически эквивалентными*, если при всех $u \in U$

$$\mathsf{P}(\xi(u, \omega) = \xi^*(u, \omega)) = 1.$$

Очевидно, что если $\xi(u)$ и $\xi^*(u)$ стохастически эквивалентны, то их распределения на σ-алгебре цилиндрических множеств из $R(U)$ совпадают.

По теореме Дуба [42] для любого процесса $\xi(u, \omega)$ существует процесс $\xi^*(u, \omega)$, сепарабельный и стохастически эквивалентный процессу $\xi(u, \omega)$. Такой процесс $\xi^*(u)$ называют *сепарабельной модификацией* $\xi(u)$.

Например, процесс $\xi(u) \equiv \xi$, где ξ есть случайная величина, не зависящая от u, является непрерывным и, следовательно, сепарабельным. Наряду с пространством $(\Omega, \mathfrak{A})$, на котором задана ξ, рассмотрим пространство $(\Omega \times \Omega_1, \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}_1)$, где $\Omega_1 = [0, U]$, а $\mathfrak{A}_1$ есть σ-алгебра борелевских множеств на $[0, U]$. На этом новом пространстве мы можем определить случайную величину η, не зависящую от ξ и равномерно распределенную на $[0, U]$. Положим $\xi_1(u) = \begin{cases} 0, & u \neq \eta, \\ 1, & u = \eta. \end{cases}$ Тогда случайный процесс $\zeta(u) = \xi(u) + \xi_1(u)$, как нетрудно видеть, не будет сепарабельным (этого не было бы при неслучайном η). Сепарабельная модификация процесса $\zeta(u)$, очевидно, совпадает с $\xi(u)$.

Сепарабелизация процесса $\xi(u; \omega)$ (т. е. переход от $\xi(u, \omega)$ к сепарабельному процессу $\xi^*(u, \omega)$) также означает расширение σ-алгебры $\mathfrak{A}_{R(U)}$, куда присоединяются несчетные пересечения вида

$$A = \bigcap_{u \in [u_1, u_2] \subset U} \{\xi(u) \in [a, b]\} = \\ = \{\sup_{u \in [u_1, u_2]} \xi(u) \leqslant b, \inf_{u \in [u_1, u_2]} \xi(u) \geqslant a\},$$

и продолжение на это расширение меры P с помощью равенств

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\Bigl(\bigcap_{\substack{u \in [u_1, u_2] \\ u \in S}} \{\xi(u) \in [a, b]\}\Bigr),$$

где под знаком вероятности в правой части стоит уже элемент исходной σ-алгебры $\mathfrak{A}_{R(U)}$.

Можно отметить, что для сепарабельных процессов такие множества, как множество всех неубывающих функций, множество всех непрерывных функций, множество всех функций из D и другие являются *событиями*, т. е. элементами σ-алгебры $\mathfrak{A}_{R(U)}$. Напомним также, что процессы, заданные в пространствах C или D, автоматически будут сепарабельными и, следовательно. в сепарабелизации не нуждаются.

Далее, если траектории сепарабельного процесса ξ, определенного, скажем, в $(R^U, \mathfrak{C}_U)$, с вероятностью 1 принадлежат пространствам C или D, то мы можем построить процессы ξ^*, грубо говоря, с «теми же распределениями», но уже в пространствах $(C(0, U), \mathfrak{B}_{C(0,U)})$ и $(D(0, U), \mathfrak{B}_{D(0,U)})$ соответственно. Пусть, например $P(C) = 1$, и пусть $A \in \mathfrak{C}_U$ — произвольное цилиндрическое множество. Тогда определяемое теми же соотношениями на проекции $\xi(u)$ множество A_C функций из C равно $A_C = A \cap C$. Мы получим требуемое распределение P^* в $(C(0, U), \mathfrak{B}_{C(0,U)})$, если для любого цилиндрического множества A_C из $\mathfrak{B}_{C(0,U)}$ или $\mathfrak{C}_{C(0,U)}$ положим

$$\mathsf{P}^*(A_C) = \mathsf{P}(A \cap C) = \mathsf{P}(A).$$

После этого нам останется воспользоваться теоремой о продолжении меры.

Существуют простые достаточные условия для того, чтобы траектории процесса с вероятностью 1 принадлежали пространствам C и D соответственно.

Теорема 1 (Колмогоров). *Выборочные траектории сепарабельного процесса $\xi(u, \omega)$ на $[0, U]$ с вероятностью 1 непрерывны, если для некоторых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < c < \infty$ и всех u, $u + h$ из отрезка $[0, U]$*

$$\mathsf{M}\,|\xi(u+h) - \xi(u)|^\alpha < c\,|h|^{1+\varepsilon}. \tag{5}$$

Теорема 2 (Колмогоров — Ченцов). *Выборочные траектории сепарабельного процесса $\xi(u, \omega)$ на $[0, U]$ с вероятностью 1 принадлежат $D(0, U)$, если для некоторых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < c < \infty$ и всех $u_3 \geqslant u_2 \geqslant$ $\geqslant u_1$ из отрезка $[0, U]$*

$$\mathsf{M}\,|\xi(u_3) - \xi(u_2)|^\alpha\,|\xi(u_2) - \xi(u_1)|^\beta < c\,|u_3 - u_1|^{1+\varepsilon}. \tag{6}$$

В [9], [56], [59] приведены следующие обобщения условий (5) и (6).

Теорема 1А. *Предположим, что для всех u, $u + h$ из отрезка $[0, U]$*

$$\mathsf{P}(|\xi(u+h) - \xi(u)| \geqslant g(h)) \leqslant q(h), \tag{7}$$

где g и q — четные функции от h, невозрастающие при $h \downarrow 0$ и такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty.$$

Тогда для $\xi(n)$ существует стохастически эквивалентный случайный процесс $\xi^*(u)$, траектории которого с вероятностью 1 непрерывны на $[0, U]$.

Теорема 1В. *Если вместо (7) потребовать, чтобы существовала неубывающая непрерывная функция $F(t)$ на $[0, U]$ такая, что*

$$\mathsf{P}(\xi(u+h) - \xi(u) > \lambda) \leqslant \lambda^{-\alpha} |F(u+h) - F(u)|^{1+\beta}$$

при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то утверждение теоремы 1А также будет иметь место.

Теорема 2А. *Предположим, что при всех $0 \leqslant u_1 < u_2 < u_3 \leqslant U$, $u_3 - u_1 = h$ выполняется соотношение*

$$\mathsf{P}(|\xi(u_3) - \xi(u_2)| |\xi(u_2) - \xi(u_1)| \geqslant g^2(u)) \leqslant q(h), \tag{8}$$

где g и q — функции, определенные в теореме 1А. Тогда для $\xi(u)$ существует стохастически эквивалентный случайный процесс $\xi^*(t)$, выборочные траектории которого с вероятностью 1 принадлежат $D(0, U)$.

Теорема 2В. *Утверждение теоремы 2А останется в силе, если (8) заменить условием*

$$\mathsf{P}(|\xi(u_3) - \xi(u_2)| \geqslant \lambda; \quad |\xi(u_2) - \xi(u_1)| \geqslant \lambda) \leqslant \\ \leqslant \lambda^{-2\alpha} |F(u_3) - F(u_1)|^{1+\beta}$$

при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, где $F(u)$, как и раньше, непрерывная неубывающая функция.

§ 2. Основные виды сходимости процессов

Основные проблемы, которые рассматриваются в настоящей книге, связаны с аппроксимацией одних случайных процессов, возникающих в теории массового обслуживания, с помощью других — более простых и хорошо изученных. При этом с самого начала следует выяснить, какие процессы нам нужно считать близкими и какие — нет. Естественно, что в разных задачах требования к близости могут быть разными.

Итак, обратимся к различным понятиям сходимости случайных процессов. Пусть дана последовательность процессов $\xi_n(u, \omega)$ и процесс $\xi(u,\omega)$ (мы будем считать, что каждый из этих процессов задан на $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$).

Одним из наиболее широких понятий сходимости процессов является *слабая сходимость конечномерных распределений* $\xi_n(u,\omega)$ к соответствующим распределениям $\xi(u, \omega)$:

$$\mathsf{P}(\xi_n(u_j, \omega) < x_j;\ j=1, \ldots, k) \to \\ \to \mathsf{P}(\xi(u_j, \omega) < x_j;\ j=1, \ldots, k)$$

для всех k, $u_1, \ldots, u_k$ и $x_1, \ldots, x_k$ таких, что

$$\mathsf{P}(\xi(u_j, \omega) = x_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Такую сходимость мы будем обозначать

$$\xi_n \Rightarrow \xi$$

или

$$\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P},$$

если речь будет идти о распределениях P_n и P соответственно процессов ξ_n и ξ. Символ $\Rightarrow$ мы сохраним также для обозначения обычной слабой сходимости распределений случайных величин (сходимости в точках непрерывности).

Если, например, $\xi_n(u)$ описывает поведение длины очереди в момент времени u для некоторой системы обслуживания и нас интересует лишь распределение ξ_n в момент u_0, то, очевидно, мы сможем аппроксимировать это распределение при большом n распределением $\xi(u_0)$, если будет установлена сходимость ξ_n и ξ в этом широком смысле.

Однако, если нас будет интересовать поведение некоторого функционала $f(\xi_n)$ от процесса ξ_n, скажем, средней длины очереди

$$\frac{1}{U}\int_0^U \xi_n(u)\,du \tag{1}$$

или размер максимальной очереди

$$\sup_{u \leqslant U} \xi_n(u), \tag{2}$$

то сходимость конечномерных распределений уже окажется недостаточной. Примеры, указывающие на это, привести нетрудно. Пусть, например,

$$\xi_n(u) = \xi(u) + \alpha_n(u),$$

где $\alpha_n(u)$ не зависит от $\xi(u)$ и представляет из себя случайный процесс, устроенный следующим образом: $\alpha_n(u) = 0$ вне интервала $\left[\eta - \frac{1}{n},\ \eta + \frac{1}{n}\right]$, где η равномерно распределена на $[0, U]$. На интервале $\left[\eta - \frac{1}{n},\ \eta + \frac{1}{n}\right]$ мы полагаем $\alpha_n(u) = n$. Тогда очевидно, что распределения функционалов (1), (2) сходиться не будут и в то же время сходимость конечномерных распределений ($\xi_n \Rightarrow \xi$) будет иметь место, так как вероятность того, что интервал $\left[\eta - \frac{1}{n},\ \eta + \frac{1}{n}\right]$ заденет хотя бы одну точку из фиксированного набора $(u_1, \ldots, u_k)$, сходится к 0 при $n \to \infty$.

С другой стороны, несомненно, что, например, требование вида

$$\sup_u |\xi_n(u) - \xi(u)| \to 0$$

для почти всех ω (если ξ_n и ξ заданы на одном вероятностном пространстве) является слишком жестким, хотя при этом будет обеспечена близость $f(\xi_n)$ и $f(\xi)$ для широкого класса функционалов f.

Определение сходимости процессов целиком зависит от того, *распределение каких функционалов* $f(\xi_n)$ *мы хотим приближать распределениями* $f(\xi)$.

Для нужд этой книги мы ограничимся следующими двумя (помимо сходимости $\Rightarrow$) видами сходимости процессов, которые, по-видимому, полностью обеспечивают запросы, возникающие в реальных задачах теории массового обслуживания.

I. *С-сходимость* — используется в случаях, когда предельный процесс ξ непрерывен с вероятностью 1 ($P(\xi \in C) = 1$). Рассмотрим сепарабельные процессы $\xi(u)$ и $\xi_n(u)$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$, $R(U) \supset C(0, U)$. Мы скажем, что последовательность ξ_n

C-сходится к ξ:

$$\xi_n \underset{C}{\Rightarrow} \xi$$

(или последовательность распределений P_n процессов ξ_n C-сходится

$$\mathsf{P}_n \underset{C}{\Rightarrow} \mathsf{P}$$

к распределению P процесса ξ), если для любого $\mathfrak{A}_{R(U)}$-измеримого функционала f, непрерывного в «точках» пространства C относительно равномерной метрики (2) § 1, имеет место слабая сходимость распределений

$$\mathsf{P}(f(\xi_n) < x) \Rightarrow \mathsf{P}(f(\xi) < x).$$

Нетрудно видеть, что C-сходимость $\xi_n \underset{C}{\Rightarrow} \xi$ влечет за собой сходимость конечномерных распределений ($\Rightarrow$), сходимость распределений функционалов

$$\sup_{u \in [u_1, u_2]} \xi_n(u), \qquad \int_{u_1}^{u_2} \varphi(\xi_n(u))\, du, \tag{3}$$

где φ непрерывна и др.

II. *D-сходимость* определяется вполне аналогично C-сходимости и используется в тех случаях, когда предельный процесс с вероятностью 1 принадлежит $D(0, U)$. Пусть опять $\xi_n(u)$ и $\xi(u)$ — сепарабельные процессы в $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$, $R(U) \supset D(0, U)$. Мы будем говорить, что последовательность ξ_n (или P_n) D-сходится к ξ (к P):

$$\xi_n \underset{D}{\Rightarrow} \xi \qquad \left(\text{или } \mathsf{P}_n \underset{D}{\Rightarrow} \mathsf{P}\right),$$

если для любого $\mathfrak{A}_{R(U)}$-измеримого функционала f, непрерывного в «точках» D в метрике (3) § 1, имеет место сходимость

$$\mathsf{P}(f(\xi_n) < x) \Rightarrow \mathsf{P}(f(\xi) < x).$$

Ясно, что класс функционалов, непрерывных относительно метрики (3) § 1, у́же, чем класс функционалов, непрерывных относительно равномерной метрики. Поэтому, из C-сходимости следует D-сходимость, но не наоборот. Из D-сходимости уже не вытекает сходимость $\Rightarrow$ и сходимость распределений первого функционала в (3). Однако будет иметь место сходимость для функционала $\sup\limits_{u\in[0,U]}\xi_n(t)$ и сходимость конечномерных распределений для некоторого всюду плотного множества $S\subset U$ значений u (см. теорему 2).

Условия C- и D-сходимости выясняются в следующих двух теоремах (см. [9], [35], [20], [27]).

Теорема 1. *Для того чтобы* $\mathsf{P}_n\underset{C}{\Rightarrow}\mathsf{P}$, $\mathsf{P}(C)=1$, *необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) *существует всюду плотное на* U *множество* S *такое, что конечномерные распределения* $\{\xi_n(u);\ u\in S\}$ *слабо сходятся к распределениям* $\{\xi(u);u\in S\}$;

2) *для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n}\mathsf{P}\left(\omega_\Delta^C(\xi_n)>\varepsilon\right)=0,$$

где

$$\omega_\Delta^C(r)=\sup_{|u'-u''|\leqslant\Delta}|r(u')-r(u'')|$$

есть «модуль непрерывности» в C.

В силу сепарабельности процессов функции $\omega_\Delta^C(\xi_n)$ будут случайными величинами. Множество S в первом условии можно заменить на $[0, U]$.

Точно так же формулируется теорема о D-сходимости.

Теорема 2. *Для того чтобы* $\mathsf{P}_n\underset{D}{\Rightarrow}\mathsf{P}$, $\mathsf{P}(D)=1$, *необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) *существует всюду плотное на* U *множество* S *такое, что конечномерные распределения* $\{\xi_n(u);u\in S\}$ *слабо сходятся к распределениям* $\{\xi(u);u\in S\}$;

2) *для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n}\mathsf{P}\left(\omega_\Delta^D(\xi_n)>\varepsilon\right)=0,$$

где

$$\omega_\Delta^D(r)=\sup_{u\in U}\min\left[\omega^+(u,\Delta),\omega^-(u,\Delta)\right]+\omega^+(0,\Delta)+\omega^-(U,\Delta),$$

$$\omega^\pm(u,\Delta)=\sup_{\substack{0<t<\Delta\\ u\pm t\in[0,U]}}|r(u\pm t)-r(u)|.$$

Если в условиях теоремы 1 $R(U)=C(0, U)$, а в условиях теоремы 2 $R(U)=D(0, U)$, то доказательства приведенных утверждений можно найти в [9], [35].

Можно строить различные условия, достаточные для выполнения вторых условий в теоремах 1, 2. Мы приведем здесь условия, связанные с теоремами 1В, 2В § 1 о принадлежности траекторий процессов, соответственно пространствам C и D.

Предположим, что существует непрерывная, неубывающая функция $F(u)$ и положительные числа α и β такие, что имеют место неравенства

$$\sup_n \mathsf{P}(|\xi_n(u+\Delta)-\xi_n(u)|\geqslant\lambda)\leqslant\lambda^{-\alpha}|F(u+\Delta)-F(u)|^{1+\beta} \tag{4}$$

или при $\delta>0$, $\Delta>0$

$$\sup_n \mathsf{P}(|\xi_n(u-\delta)-\xi_n(u)|\geqslant\lambda,\ |\xi_n(u+\Delta)-\xi_n(u)|\geqslant\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\lambda^{-2\alpha}|F(u+\Delta)-F(u-\delta)|^{1+\beta}. \tag{5}$$

Тогда неравенство (4) влечет за собой выполнение условия 2) теоремы 1, а неравенство (5) — выполнение условия 2) теоремы 2 (см. [9], [36]).

Примером, иллюстрирующим C-сходимость процессов, может служить хорошо известный *принцип инвариантности* Донскера — Прохорова. Мы приведем его в упрощенном виде для случая одинаково распределенных случайных величин. Пусть $\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{n,n}, n=1,2,\ldots,$ — двойная последовательность (схема серий) независимых и одинаково распределенных в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условиях Линдберга:

$$\mathsf{M}(|\xi_{1,n}|^2;\ |\xi_{1,n}|>\varepsilon\sqrt{n})\to 0$$

для любого $\varepsilon>0$, где мы приняли, не ограничивая общности $\mathsf{M}\xi_{1,n}=0$, $\mathsf{M}\xi_{1,n}^2=1$. Образуем непрерывную ломаную $\xi_n(t)$ на отрезке $[0,1]$ с узлами в точках $\left(\frac{k}{n}, \frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)$, $k=0,1,\ldots,n$, где $X_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_{j,n}$. Тогда случайные процессы $\xi_n(t)$ на отрезке $[0, 1]$ C-сходятся при $n\to\infty$ к винеровскому процессу $w(t)$. Это есть следствие того, что процессы $\xi_n(t)$, построенные как ломаные, удовлетворяют условиям теоремы 1 (см. [9], [63]).

Условиям этой теоремы будет удовлетворять и разрывная ступенчатая (кусочно-постоянная) случайная функция, построенная по точкам $\left(\frac{k}{n}, \frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$.

§ 3. Основные типы предельных процессов

Мы рассмотрим здесь 3 класса процессов, которые особенно часто выступают в самых различных задачах в роли предельных.

I. *Однородные процессы с независимыми приращениями.*

II. *Диффузионные процессы.*

III. *Гауссовские процессы.*

I. Процесс $\xi(u)$, $u \in [0, U]$, называется *однородным процессом с независимыми приращениями*, если для любого набора $0 \leqslant u_0 \leqslant \ldots \leqslant u_k \leqslant U$ случайные величины $\xi(u_{j+1}) - \xi(u_j)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, независимы и распределение $\xi(u'') - \xi(u')$ зависит только от разности $u'' - u'$. Если $\xi(0) = 0$, то для таких процессов

$$\mathsf{M} \exp\{i\lambda\xi(u)\} = e^{u\psi(\lambda)}, \tag{1}$$

где

$$\psi(\lambda) = i\lambda\gamma - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2}\right)\Phi(dx) \tag{2}$$

(формула Леви [35]). Здесь Φ — так называемая *спектральная мера*, обладающая свойствами $\Phi(\{0\}) = 0$, $\int \frac{x^2}{1+x^2}\Phi(dx) < \infty$. Эти формулы определяют, очевидно, любые конечномерные распределения $\xi(u)$. В правой части (2) можно выделить три компоненты:

Слагаемое $i\lambda\gamma$ определяет *снос* процесса (на величину γt за время t). Слагаемое $-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}$ определяет *диффузионную* или *винеровскую компоненту.* Наконец, последнее слагаемое в (2) определяет, грубо говоря, *скачкообразную компоненту.* Если мера Φ такова, что $\int_{-1}^{1} |x|\Phi(dx) < \infty$, то последнее слагаемое можно записать в виде

$$i\lambda\gamma_1 + \int (e^{i\lambda x} - 1)\,\Phi(dx). \tag{3}$$

Если Φ — конечная мера, то, очевидно, такая запись возможна и второе слагаемое в (3) определяет так называемый *сложный пуассоновский процесс*, имеющий на $[0, 1]$ с вероятностью 1 конечное число скачков, каждый из которых имеет функцию распределения $\frac{\Phi(-\infty, x)}{\Phi(-\infty, \infty)}$.

Траектории сепарабельного процесса с независимыми приращениями с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода ([36]). Таким образом, если мы введем стохастически эквивалентный процесс, непрерывный справа (и слева в точке U), то его траектории будут принадлежать с вероятностью 1 пространству D. Это означает, что процесс с независимыми приращениями можно рассмотреть как процесс в $(D(0, U), \mathfrak{C}_{D(0, U)})$.

Если рассмотреть сепарабельный процесс, для которого $\Phi(-\infty, \infty) = 0$, то мы получим винеровский процесс, траектории которого непрерывны с вероятностью 1. Такой процесс можно рассмотреть как процесс в $(C(0, U), \mathfrak{C}_{C(0, U)})$. Если же $\Phi(-\infty, \infty) > 0$, то траектории $\xi(u)$ с положительной вероятностью не будут принадлежать $C(0, U)$ (подробнее см., например, [35], [36]).

II. *Однородные диффузионные процессы*, как и всякие *марковские* процессы, могут быть заданы с помощью переходных функций. Функция $P(z, t, A) \leqslant 1$ ($z \in R$, $t \leqslant U$, $A \in \mathfrak{B}$ есть борелевское множество на прямой) называется *переходной функцией*, если:

1) при фиксированных z и t $P(z, t, A)$ есть вероятностная мера на $(R, \mathfrak{B})$; $P(z, 0, A) = I(A)$ — индикатор множества A;

2) при фиксированных t и A $P(z, t, A)$ есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция;

3) для любых z, $u \leqslant t$ и A удовлетворяется уравнение Колмогорова — Чепмена

$$\mathrm{P}(z, t, A) = \int \mathrm{P}(z, u, dy)\,\mathrm{P}(y, t-u, A).$$

Пусть задано некоторое начальное распределение $\mathrm{P}_0(A)$. *Однородным марковским процессом*, соответствующим переходной функции $\mathrm{P}(\circ, \circ, \circ)$ и начальному распределению P_0, мы называем процесс $\xi(u, \omega)$, согласованные конечномерные распределения которого (вероятности цилиндрических множеств) определяются соотношением

$$\mathsf{P}(\xi(0) \in A_0, \quad \xi(u_1) \in A_1, \ldots, \xi(u_k) \in A_k) =$$
$$= \int\limits_{A_0} \mathsf{P}_0(dz_0) \int\limits_{A_1} \mathsf{P}(z_0, u_1, dz_1) \ldots \int\limits_{A_k} \mathsf{P}(z_{k-1}, u_k - u_{k-1}, dz_k).$$

Процесс $\xi(u)$, для которого мера P_0, соответствующая $\xi(0)$, сосредоточена в точке a (т. е. для которого $\xi(0) = a$ с вероятностью 1), мы будем обозначать $\xi^{(a)}(u)$.

Наиболее существенным свойством введенных процессов является свойство *марковости*. Пусть $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)}, \mathsf{P})$ — выборочное пространство и $\mathfrak{M}(u) \subset \mathfrak{A}_{R(U)}$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все ω-множества вида $\{\xi(t, \omega) \in B\}$ при $t \leqslant u$, $B \in \mathfrak{B}$.

Обозначим через $\sigma(\xi)$ σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ, и через $\mathsf{P}_{\mathfrak{F}}$ условную относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$ вероятность. Свойство марковости состоит в том, что условная относительно $\mathfrak{M}(u)$ вероятность

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(\xi(u+t) \in B) = \mathsf{P}_{\sigma(\xi(u))}(\xi(u+t) \in B) = \mathsf{P}(\xi(u), t, B),$$

т. е. если состояние системы в момент времени u фиксировано $\xi(u) = a$, то дальнейшее ее развитие происходит так же, как процесса $\xi^{(a)}(t)$, и не зависит от других событий из $\mathfrak{M}(u)$.

Каковы свойства траекторий марковского процесса? (В дальнейшем под марковскими процессами мы везде будем понимать *однородные* марковские процессы, определенные выше.)

Мы предположим, что выполнены следующие естественные условия на переходную функцию.

I. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $t \to 0$

$$\mathsf{P}(z, t, R - V_\varepsilon(z)) \to 0,$$

где $V_\varepsilon(z)$ — *ε-окрестность точки* z.

II. *Для всякого компакта* K

$$\lim_{y \to \infty} \sup_{t \leqslant u} P(y, t, K) = 0.$$

Тогда существует марковский процесс $\xi(u)$ *с переходной функцией* $P(z, t, B)$, *траектории которого с вероятностью* 1 *принадлежат пространству* D^+ (ограничены, не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа [36], [43]). *При этом для каждого отдельного и*

$$\mathsf{P}(\xi(u-0)=\xi(u+0))=1.$$

Если же потребовать, чтобы вместо условия I *выполнялось*

III. $\frac{1}{t} P(z, t, R - V_\varepsilon(z)) \to 0$

при $t \to 0$, *то будет существовать марковский процесс* $\xi(u)$ *с переходной функцией* $P(z, t, B)$ *и непрерывными траекториями* ([36], [43], [73]).

Вернемся к свойству марковости, которое утверждает, что при любом фиксированном t

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(t)}(\xi(t+u) \in B) = P(\xi(t), u, B). \tag{4}$$

Будет ли верным это свойство, если t случайно? Для произвольных случайных моментов времени ответ на этот вопрос, очевидно, будет отрицательным. Однако можно указать важный класс случайных величин $\tau = \tau(\omega)$, для которых свойство (4) сохранится для широкого класса процессов.

Случайную величину $\tau = \tau(\omega) \geqslant 0$ мы назовем *марковским моментом относительно семейства* σ-*алгебр* $\{\mathfrak{M}(t)\}$ (или в нашем случае просто *марковским моментом*), если для всякого $t \geqslant 0$

$$\{\tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathfrak{M}(t).$$

Это соотношение означает, что тот факт, больше τ, чем t, или нет, зависит лишь от траектории процесса на интервале времени $[0, t]$.

Рассмотрим множества $A \in R(U)$ такие, что при любом $t \geqslant 0$

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{M}(t), \tag{5}$$

и обозначим $\mathfrak{M}(\tau)$ σ-алгебру, порожденную этими множествами.

Марковский процесс $\xi(u)$ называется *строго марковским*, если для любого марковского момента τ и любого $u \geqslant 0$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(\xi(\tau+u) \in B) = \mathsf{P}_{\sigma(\xi(\tau))}(\xi(\tau+u) \in B) = \\ = P(\xi(\tau), u, B). \quad (6)$$

Отметим, что если марковский момент τ принимает не более чем счетное число значений, то соотношение (6) всегда выполняется. Действительно, пусть $t_1, t_2, \ldots$ — множество возможных значений τ. Тогда

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(\xi(\tau+u) \in B) = \sum_k I(\tau = t_k)\, \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(\xi(t_k+u) \in B),$$

где $I(A)$ означает индикатор события A. Но пересечения σ-алгебр $\mathfrak{M}(\tau)$ и $\mathfrak{M}(t_k)$ с событием $\{\tau = t_k\}$ совпадают. Поэтому

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(\xi(\tau+u) \in B) = \sum_k I(\tau = t_k)\, \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(t_k)}(\xi(t_k+u) \in B) = \\ = \sum_k I(\tau = t_k)\, P(\xi(t_k), u, B) = P(\xi(\tau), u, B).$$

В общем случае требуются дополнительные предположения. Пусть процесс $\xi(u)$ удовлетворяет одному из условий

IVа. *Для любой непрерывной и ограниченной функции* φ *и для любого* $t > 0$ *функция*

$$\mathsf{M}\varphi(\xi^{(a)}(t)) = \int \varphi(y)\, P(a, t, dy)$$

непрерывна по a.

Это свойство процесса часто называют *феллеровским*.

IVв. *Множество возможных значений* $\xi(u)$ (фазовое пространство процесса) *дискретно, т. е. представляет из себя конечное или счетное множество.*

Условия IVа и IVв можно и не различать (обозначая их объединение как условие IV), так как в случае IVв $\mathsf{M}\varphi(\xi^{(a)}(t))$ непрерывна относительно дискретной топологии.

Справедливо следующее утверждение. *Всякий непрерывный справа* ($\mathsf{P}(\xi(u+0) = \xi(u)) = 1$) *марковский процесс, удовлетворяющий условию* IV, *является строго марковским* ([43]).

Можно добавить также, что для этого класса процессов ([43])

$$\mathfrak{M}(u) = \mathfrak{M}(u+0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}\left(u + \frac{1}{n}\right).$$

Марковский процесс $\xi(u)$ называется *процессом неограниченной диффузии*, если его переходная функция удовлетворяет условиям:

1°) *Для всякого* $z \in R$ *и* $\varepsilon > 0$ *при* $t \to 0$

$$\int\limits_{|z-y|>\varepsilon} P(z, t, dy) = o(t).$$

2°) *Существуют функции* $a(z)$ *и* $b(z)$ *такие, что для всяких* z *и* $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{|z-y|\leqslant\varepsilon} (y-z) P(z, t, dy) = ta(z) + o(t),$$

$$\int\limits_{|z-y|\leqslant\varepsilon} (y-z)^2 P(z, t, dy) = tb(z) + o(t).$$

Функция $a(z)$ называется *коэффициентом сноса*, $b(z)$ — *коэффициентом диффузии*. Их физический смысл ясен из определения.

Если функции a и b удовлетворяют условию Липшица, то диффузионный процесс $\xi(u)$ является строго марковским, а его траектории с вероятностью 1 *непрерывны* ([43], [36]).

Таким образом, марковский процесс, удовлетворяющий условиям I, II, можно рассматривать как процесс в пространстве D^+, а диффузионный процесс (для него, очевидно, условия I—II также выполнены) можно рассматривать как процесс в пространстве C.

Важно отметить, что коэффициенты a, b в широком классе случаев однозначно определяют переходную функцию $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ и, стало быть, и само распределение марковского процесса. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (Колмогоров, [35], [55], [70]). *Пусть ограниченная функция* $\varphi \in C(-\infty, \infty)$ *такова, что*

$$v(t, x) = \int \varphi(y) P(x, t, dy)$$

имеет непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. *Тогда существует* $\frac{\partial v}{\partial t}$, *а функция* v *удовлетворяет так называемому обратному уравнению Колмогорова*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{b}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{7}$$

и условию

$$\lim_{t\to 0} v(t, x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Таким образом, если решение уравнения (7) единственно, то мы можем определить функцию

$$\int \varphi(y)\, P(x, t, dy),$$

которая в свою очередь определяет переходную функцию $P(\cdot, \cdot, \cdot)$, если φ пробегает некоторый класс, всюду плотный в $C(-\infty, \infty)$ в смысле равномерной метрики на каждом конечном интервале.

Мы будем обозначать C_k класс k раз дифференцируемых, ограниченных функций, k-я производная которых удовлетворяет равномерному условию Гёльдера. Очевидно, что, например, C_2 плотно в C.

Если переходная функция $P(x, t, dy)$ при любом y представима в виде $p(x, t, y)\,dy$, то мы будем говорить, что существует *переходная плотность*.

Теорема 2 ([75], [49]). *Пусть* $a(x)$ *и* $b(x)$ — *две произвольные функции такие, что* $b(x) > b_0 > 0$, *и выполнено одно из двух условий.*

А. *Функции* a *и* b *принадлежат* C_0 (это означает, в частности, что a и b не могут расти быстрее, чем $|x|^\alpha$, $\alpha \leqslant 1$) *или*

В. *Функции* a', b', a'', b'' *принадлежат* C_0 *и ограничены* (в этом случае a и b могут расти как $c|x|$).

Тогда существует единственная переходная плотность $p(x, t, y)$ (а, следовательно, и единственный процесс), *для которой функции* a *и* b *будут соответственно коэффициентами сноса и диффузии. Эта плотность при каждом* $t > 0$ *как функция от* x *будет принадлежать классу* C_2, *а как функция* t — *классу* C_1. *При этом*

$$\frac{\partial^k p}{\partial x^k} \leqslant c_k t^{-\frac{1+k}{2}} \exp\left\{-\frac{c(x-y)^2}{t}\right\}.$$

Кроме того, для любой ограниченной функции $\varphi \in C$ *функция*

$$v(t, x) = \int \varphi(y)\, p(x, t, y)\, dy$$

будет единственным решением задачи Коши (7), (8) ($v(t, \cdot) \in C_1$, $v(\cdot, x) \in C_2$ *при* $t > 0$). *Если* $\varphi \in C_2$, *то* $v(t, x)$ *обладает свойствами*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi', \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varphi''.$$

Из теоремы следует, что сами коэффициенты a, b будут обладать свойством

$$a(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathsf{M} (\xi^{(x)}(t) - x),$$

$$b(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathsf{M} (\xi^{(x)}(t) - x)^2,$$

где $\xi^{(x)}(t)$ — процесс со сносом $a(x)$ и диффузией $b(x)$.

Из этой теоремы следует также, что при выполнении условий А или В функции $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ равномерно непрерывны в области $0 \leqslant t \leqslant U$, $x \in R$.

Диффузионные процессы можно характеризовать также с помощью *инфинитезимального оператора* $\mathcal{A}$, порожденного переходной функцией. Оператор $\mathcal{A}$ определяем с помощью равенства

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int (\varphi(y) - \varphi(x))\, P(x, t, dy) \tag{9}$$

на соответствующем множестве функций φ. Если φ дважды непрерывно дифференцируема, а функции a и b в условии 2°) определения диффузионного процесса непрерывны, то

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \left(a(x) \frac{d}{dx} + \frac{b(x)}{2} \frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi(x). \tag{10}$$

Это равенство есть не что иное, как другая запись обратного уравнения (7). Действительно, применим $\mathcal{A}$ к функции $v(t, x) = \mathcal{A}_t \varphi(x)$, где $\mathcal{A}_t$ — операторы

$$\mathcal{A}_t \varphi(x) = \int \varphi(y)\, P(x, t, dy),$$

образующие полугруппу $\mathcal{A}_t\mathcal{A}_u\varphi(x) = \mathcal{A}_{t+u}\varphi(x)$. Мы получим тогда

$$\mathcal{A}v(t, x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(v(t+\Delta, x) - v(t, x)) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t}.$$

Чтобы получить уравнение (7), нам остается применить (10) к функции $v(t, x)$.

Простейшим диффузионным процессом является *процесс броуновского движения* (*винеровский процесс*), являющийся одновременно процессом с независимыми приращениями. Для него $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 1$. Переходная плотность этого процесса равна

$$p(x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\} \tag{11}$$

и удовлетворяет (вместе с функциями $v(t, x) = \mathcal{A}_t\varphi(x) \to \varphi(x)$ при $t\to 0$) уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{12}$$

Нетрудно выписать также переходную плотность для диффузионного процесса с коэффициентами $a(x) = a = \mathrm{const}$, $b(x) = \sigma^2 = \mathrm{const} > 0$. Этот процесс можно представить в виде

$$\xi(t) = at + \sigma w(t),$$

где $w(t)$ — винеровский процесс. Для приращений $\xi(t)$ будет справедливо равенство

$$d\xi(t) = a\,dt + \sigma\,dw(t),$$

которое допускает обобщение на случай произвольных $a(x)$ и $b(x)$. Именно, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс с коэффициентами a и $b = \sigma^2$, то справедливо представление ([35])

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \sigma(\xi(t))\,dw(t).$$

Это равенство хорошо поясняет смысл коэффициентов a и b. Оно означает по определению другую запись

[73]). Уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+ax\frac{\partial v}{\partial x},$$

соответствующее этим коэффициентам, также разрешимо в явном виде (см. [73]) и имеет фундаментальное решение (переходную плотность)

$$p(x, t, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)}\exp\left\{-\frac{(y-xe^{at})^2}{2\sigma^2(t)}\right\},$$

$$\sigma^2(t)=\frac{\sigma^2}{2a}(e^{2at}-1).$$

Сам процесс $\xi^{(x)}(t)$ (с начальным значением x при $t=0$) может быть представлен в виде

$$\xi^{(x)}(t)=xe^{at}+\sigma\int_0^t e^{a(t-v)}\,dw(v)=$$

$$=e^{at}\left(x+\sigma\int_0^t e^{-av}\,dw(v)\right) \qquad (13)$$

или, что то же, в виде

$$\xi^{(x)}(t)=xe^{at}+\sigma e^{at}w\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right).$$

Непосредственным подсчетом устанавливается, что это есть однородные марковские диффузионные процессы с коэффициентами $a(x)=ax$, $b(x)=\sigma^2$. Отсюда уже в качестве следствия можно получить, что переходная плотность $p(x, t, y)$ этого процесса имеет вид, приведенный выше.

При $a<0$ существует *стационарный* процесс $\xi(t)$ с коэффициентами ax и σ^2, представимый в форме

$$\xi(t)=\sigma\int_{-\infty}^t e^{a(t-v)}\,dw(v)$$

или

$$\xi(t)=\sigma e^{at}\,w\left(-\frac{e^{-2at}}{2a}\right).$$

Рассмотрим теперь при $a \neq 0$ наряду с (13) процесс

$$\tilde{\xi}^{(x)}(t) = \xi^{\left(x+\frac{A}{a}\right)}(t) - \frac{A}{a}, \tag{13'}$$

который, очевидно, также будет диффузионным с постоянным коэффициентом диффузии σ^2. Коэффициент сноса этого процесса равен

$$\lim_{t\to 0} \mathsf{M} \frac{1}{t} (\tilde{\xi}^{(x)}(t) - x) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \mathsf{M} \frac{1}{t} \left(\xi^{\left(x+\frac{A}{a}\right)}(t) - x - \frac{A}{a}\right) = \left(x + \frac{A}{a}\right) a.$$

Таким образом, формула (13′) вместе с (13) дает нам диффузионный процесс с коэффициентами $a(x) = ax + A$, $b(x) = \sigma^2$.

Рассмотрим теперь *диффузионные процессы с отражением.*

Марковский процесс $\xi(u)$ называется *однородным диффузионным процессом с отражением от границы $x = 0$, если*

1R) $\xi(u) \geq 0$ *и для всякого $x > 0$ выполнены условия* 1°), 2°), *где a и b определены на* $[0, \infty]$.

2R) $$\int\limits_{0 \leq y \leq \varepsilon} y^2 P(0, t, dy) = tb(0) + o(t), \quad 0 < b(0) < \infty.$$

Если, например, $\xi^{(x)}(u)$ — винеровский процесс:

$$\mathsf{P}(\xi^{(x)}(t) < y) = P(x, t, (-\infty, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-x)^2}{2t}} du,$$

то процесс $\eta(u) = |\xi(u)|$ является, очевидно, диффузионным процессом с отражением. Для него переходная функция $Q(x, t, B)$, $B \subset [0, \infty)$ имеет вид

$$Q(x, t, B) = P(x, t, B) + P(x, t, -B).$$

Изучение процессов диффузии с отражением в значительной мере сводится к изучению процессов обычной диффузии. Здесь, как и для обычной диффузии, коэффициенты a, b в широком классе случаев однозначно определяют переходную функцию.

Теорема 3. *Пусть $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ — переходная функция процесса с отражением, и пусть ограниченная функция $\varphi \in C(0, \infty)$ такова, что*

$$v(t, x) = \int \varphi(y) P(x, t, dy)$$

имеет непрерывные и ограниченные на $[0, \infty)$ производные $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Тогда в области $x > 0, t \geqslant 0$ существует $\frac{\partial v}{\partial t}$, а функция v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{14}$$

и условию

$$\lim_{t \to 0} v(t, x) = \varphi(x), \qquad x \geqslant 0. \tag{15}$$

Кроме того, если $b(0) > 0$ и при $x = 0$ существует и конечна $\frac{\partial v}{\partial t}$, то

$$\frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = 0. \tag{16}$$

Это так называемая вторая граничная задача для уравнения (14).

Доказательство. Равенство $v(+0, x) = \varphi(x)$ вытекает из соотношений

$$v(t, x) = \varphi(x) + \int [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, t, dy) = \varphi(x) + \\ + \int_{|y-x| \leqslant \varepsilon} [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, t, dy) + o(t)$$

и непрерывности функции $\varphi(x)$. Доказательство утверждения теоремы в области $x > 0$ повторяет доказательство теоремы Колмогорова ([35], [55]): имеем в силу свойств переходной функции

$$v(t, x) = \int P(x, \Delta, dy) \; v(t - \Delta, y), \quad t > \Delta > 0.$$

Поэтому

$$v(t, x) - v(t - \Delta, x) =$$
$$= \int [v(t-\Delta, y) - v(t-\Delta, x)] P(x, \Delta, dy) =$$
$$= \int\limits_{|x-y| \leqslant \varepsilon} + o(\Delta) = \int\limits_{|x-y| \leqslant \varepsilon} \Big[(y-x)\frac{\partial v(t-\Delta, x)}{\partial x} +$$
$$+ (y-x)^2 \frac{\partial^2 v(t-\Delta, x)}{2\partial x^2} + \frac{\beta}{2}(y-x)^2 \Big] P(x, \Delta, dy) + o(\Delta),$$

где

$$|\beta| \leqslant \sup_{\substack{u,\, z \\ |z-x| \leqslant \varepsilon, \\ 0 \leqslant t-u \leqslant 1}} \left| \frac{\partial^2 v(u, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v(u, x)}{\partial x^2} \right| \equiv \beta_\varepsilon.$$

Отсюда находим в силу непрерывности v'_x, v''_x

$$\frac{v(t, x) - v(t-\Delta, x)}{\Delta} =$$
$$= o(1) + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} ax + \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \frac{b(x)}{2} + \frac{b(x)}{2} \beta'_\varepsilon,$$

где $|\beta'_\varepsilon| \leqslant \beta_\varepsilon$. После перехода к пределу при $\Delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ мы получим уравнение (14).

Далее,

$$v(t, 0) - v(t-\Delta, 0) = \int\limits_{y \leqslant \varepsilon} \Big[y \frac{\partial v(t-\Delta, 0)}{\partial x} +$$
$$+ \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v(t-\Delta, 0)}{\partial x^2} + \beta \right) \Big] P(0, \Delta, dy) + o(\Delta).$$

Если предположить, что $\frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} \neq 0$, то полученное равенство и конечность $\frac{\partial v(t, 0)}{\partial t}$ будут означать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{y \leqslant \varepsilon} y P(0, \Delta, dy) \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x},$$

не зависящий от ε.

Но

$$\int\limits_{y\leqslant\varepsilon} yP(0,\ \Delta,\ dy)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{y\leqslant\varepsilon} y^2P(0,\ \Delta,\ dy)=\frac{1}{\varepsilon}(\Delta b(0)+o(\Delta)).$$

Стало быть, указанный предел превосходит или равен

$$\frac{\partial v(t,\,0)}{\partial x}\frac{b(0)}{\varepsilon}.$$

Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Таким образом, если коэффициенты a и b таковы, что они гарантируют единственность задачи (14), (15), (16) и необходимую гладкость производных функции v, полученной с помощью фундаментального решения уравнения (14), то мы можем по этим коэффициентам восстановить переходную функцию диффузионного процесса о отражением.

Теорема 4. *Пусть функции a и b на $[0, \infty]$ удовлетворяют условиям А или В теоремы 2. Тогда справедливо утверждение теоремы 2, если всюду в ее формулировке переходная плотность $p(x, t, y)$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, отвечает диффузионному процессу с отражением.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функции a и b удовлетворяют условию А и $a(0)=0$. Тогда мы доопределим функции a, b и $\varphi\in C_2(0,\infty)$ на полуоси $[-\infty, 0]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &a(-x)=-a(x),\\ &b(-x)=b(x),\\ &\varphi(-x)=\varphi(x),\qquad x\geqslant 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Эти новые функции будут удовлетворять условиям теоремы 2.

Значит, будет существовать переходная плотность $p(x, t, y)$ процесса неограниченной диффузии, которая помимо прочих свойств будет обладать также свойством $p(-x, t, -y)=p(x, t, y)$. Функция $v(t, x)=\mathscr{A}_t\varphi(x)$, построенная по этой плотности и функции φ из (17), будет симметричной функцией x. Это означает (гладкость функции v обеспечивается теоремой 2), что $\frac{\partial v(t,\,0)}{\partial x}=0$. Сказанное вместе с теоремой 2 означает, что построенная нами функция v будет единственным решением второй смешанной задачи (14)—(16).

Отметим также, что если мы рассматриваем процесс неограниченной диффузии $\xi(u)$ с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (17), то процесс $\eta(u)$ диффузии с отражением от границы $x=0$ можно записать в виде

$$\eta(t)=|\xi(t)|.$$

Это значит, что если $P_\xi(x, t, B)$ — переходная функция процесса ξ, то переходная функция $P_\eta(x, t, B)$ для процесса η равна

$$P_\eta(x, t, B)=P_\xi(x, t, B)+P_\xi(x, t, -B),$$

где $B\subset(0, \infty)$.

Если функции a и b удовлетворяют условию B, то мы, чтобы обеспечить сохранение свойств гладкости B при продолжении (17) функций a и b на всю ось, должны предположить, что

$$a(0)=0, \quad a''(0)=0, \quad b'(0)=0. \tag{18}$$

При выполнении этих соотношений построение процесса с отражением происходит совершенно аналогично.

Пусть теперь функции a и b удовлетворяют условию A и $a(0)\neq 0$. Заметим сначала, что если $\xi(u)$ — диффузионный процесс с коэффициентами a_ξ и b_ξ, то, как легко проверить, процесс

$$\eta(t)=\psi(\xi(t)) \tag{19}$$

также будет диффузионным, если только ψ — достаточно гладкая монотонная функция. При этом его коэффициентами будут функции

$$\begin{aligned} a_\eta &= a\psi'+\frac{b}{2}\psi'', \\ b_\eta &= b(\psi')^2 \end{aligned} \tag{20}$$

(это легко установить также, сделав в уравнении (14) замену $y=\psi(x)$).

Мы рассмотрим аналитическое преобразование ψ, обладающее свойствами

$$\psi(0)=0, \quad \psi'(x)\geqslant\psi_0>0, \quad \psi''(0)=-\frac{2a(0)\psi'(0)}{b(0)}. \tag{21}$$

В этом случае, процесс с отражением ξ будет порождать процесс с отражением η, а функцию ψ всегда можно выбрать так, чтобы условия А и В сохранялись и для коэффициентов a_η и b_η.

Таким образом, если мы над процессом с отражением $\xi(u)$ сделаем преобразование (19), то получим процесс с отражением $\eta(u)$, для которого

$$a_\eta(0)=0, \quad b_\eta=b(\psi')^2>b_0\psi_0^2>0.$$

Рассмотрим теперь функции a_η и b_η. В силу предыдущего существует единственный диффузионный процесс с отражением $\eta^*(u)$, обладающий такими коэффициентами. Так как отображение $y=\psi(x)$ взаимно однозначно и аналитично, то мы можем построить теперь процесс $\xi^*(u)=\psi^{-1}(\eta^*(u))$, который будет в силу сделанных замечаний единственным процессом с отражением, отвечающим коэффициентам a, b. Выполнение остальных утверждений теоремы 2 очевидно.

Пусть, наконец, a и b удовлетворяют условию В, но хотя бы одно из равенств (18) не выполнено. Сделаем опять преобразование (19). Чтобы для процесса $\psi(\xi)$ выполнялись равенства (18), необходимо и достаточно, чтобы

$$\left[a\psi'+\frac{b}{2}\psi''\right]_{x=0}=0,$$

$$[b(\psi')^2]'_{x=0}=0,$$

$$\left[a\psi'+\frac{b}{2}\psi''\right]''_{x=0}=0.$$

Последнее равенство можно обеспечить всегда за счет выбора третьей и четвертой производных ψ. Однако первые два неравенства могут быть выполнены одновременно, если только

$$b'(0)=4a(0).$$

Если это условие не выполнено, то преобразованием $\eta=\psi(\xi)$ нельзя свести нашу задачу к задаче о непрерывной диффузии с коэффициентами, обладающими свойствами гладкости *B*. В этом случае для требуемого сведе́ния нужно ввести *неоднородный* процесс

$$\eta(u)=\psi(\xi(u), u),$$

где

$$\psi(0, u) = 0, \qquad \psi'_x(x, u) \geqslant \psi_0 > 0.$$

В этом случае коэффициенты сноса и диффузии процесса η будут зависеть от u (неоднородность процесса). При этом

$$a_\eta(x, u) = a\psi'_x + \psi'_u + \psi''_x \frac{b}{2},$$

$$b_\eta(x, u) = b\left(\psi'_x\right)^2,$$

и всегда можно подобрать аналитическую функцию ψ так, чтобы

$$a_\eta(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 a_\eta(0, t)}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial b_\eta(0, t)}{\partial x} = 0.$$

Однако дальнейшее доказательство мы вынуждены опустить, поскольку ради простоты мы формулировали и доказывали теоремы, которые должны были бы здесь использовать, лишь в однородном случае. Само же существо доказательства совершенно аналогично предыдущему, так как обобщение указанных теорем на неоднородный случай не представляет собой качественно новой задачи и не требует введения новых ограничений на функции a и b, как функции от x. Нужно потребовать лишь гладкость этих функций по t ([75], [49]). ◀

Диффузионный процесс с двумя отражающими границами (скажем, в точках $x = 0$ и $x = R$) определяется как процесс $0 \leqslant \xi(u) \leqslant R$, переходная функция которого удовлетворяет условию 1R) в области $x \in (0, R)$ и условию 2R) в точках $x = 0$ и $x = R$. Функция

$$v(t, x) = \mathscr{A}_t \varphi(x)$$

для такого процесса удовлетворяет (при выполнении условий теоремы 3) уравнениям (14) и (15) при $x \in [0, R]$ и условиям

$$\frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial v(t, R)}{\partial x} = 0.$$

III. *Гауссовские процессы* определяются как процессы, конечномерные распределения которых нормальны. Нормальное многомерное распределение полностью определяется вектором средних и матрицей вторых моментов. Поэтому распределение гауссовского процесса $\xi(u)$ полностью определяется двумя функциями

$$m(u) = \mathsf{M}\xi(u),$$
$$R(u, t) = \mathsf{M}(\xi(u) - m(u))(\xi(t) - m(t)) = R(t, u).$$

Функция $R(u, t)$ называется *корреляционной* функцией. Если никакая линейная комбинация значений 1, $\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)$ не равна 0 с вероятностью 1, то функция $R(u, t)$ с необходимостью является положительно определенной (квадратичная форма $\sum R(u_i, u_j) x_i x_j$ положительно определена при любых $u_1, \ldots, u_k$). Если $A = M^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $M = \|R(u_i, u_j)\|$, то совместное распределение $\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)$ определяется k-мерной плотностью

$$p_{u_1, \ldots, u_k}(x_1, \ldots, x_k) = \\ = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sqrt{|A|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m) A (x - m)^{\mathsf{T}}\right\},$$

где $(x - m)$ — вектор-строка $(x_1 - m(u_1), \ldots, x_k - m(u_k))$, $(x - m)^{\mathsf{T}}$ — вектор-столбец.

Если

$$R(u, t) = R(u - t), \tag{22}$$

то процесс называется *стационарным* или *однородным*. (Произвольный процесс $\xi(u, \omega)$ называется *стационарным в узком смысле*, если совместное распределение величин $\xi(u_1 + t, \omega), \xi(u_2 + t, \omega), \ldots, \xi(u_k + t, \omega)$ не зависит от t. Стационарность *в широком смысле* означает (22). Для гауссовских процессов оба эти понятия стационарности совпадают.)

Функция $R(t)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\int_0^\infty \cos(\lambda t) F(d\lambda)$$

(или $\int e^{i\lambda t} F(d\lambda)$ для комплекснозначных процессов), где $F(B)$ конечная мера на прямой. Функция $F(B)$ называется *спектральной функцией*.

Если процесс $\xi(u)$ стохастически непрерывен в среднеквадратичном, т. е.

$$\mathsf{M}[\xi(u)-\xi(t)]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad u \to t,$$

то функция $R(u, t)$ непрерывна. Действительно, предположив, не ограничивая общности, $m(u) \equiv 0$, получим

$$R(u, t) - R(u, t+\Delta) = \mathsf{M}\xi(u)[\xi(t)-\xi(t+\Delta)] \leqslant \leqslant \sqrt{R(u, u)\,\mathsf{M}(\xi(t)-\xi(t+\Delta))^2}.$$

И наоборот, если $R(u, t)$ непрерывна, то

$$\mathsf{M}(\xi(u)-\xi(t))^2 = = R(u, u) + R(t, t) - 2R(u, t) \equiv D(u, t) \to 0 \quad \text{при} \quad u \to t.$$

Если $R(u, t)$ по каждому из переменных равномерно удовлетворяет условию Гёльдера, то $D(t, t+\Delta) < H|\Delta|^\alpha$ при некоторых $H > 0$, $1 \geqslant \alpha > 0$. В этом случае траектории сепарабельного гауссовского процесса $\xi(u)$ будут непрерывны с вероятностью 1. По теореме Колмогорова для этого достаточно показать, что при некоторых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $c < \infty$

$$\mathsf{M}|\xi(u)-\xi(u+\Delta)|^\alpha \leqslant c|\Delta|^{1+\varepsilon}.$$

Но

$$\mathsf{M}|\xi(u)-\xi(u+\Delta)|^{2k} \leqslant c_k D^k(u, u+\Delta) \leqslant c_k H^k |\Delta|^{\alpha k}.$$

Стало быть, достаточно выбрать $k > 1/\alpha$.

С помощью теоремы 1А § 1 нетрудно убедиться, что достаточным для непрерывности $\xi(u)$ может являться и более слабое условие

$$D(t, t+\Delta) \leqslant H\left(\log\frac{1}{\Delta}\right)^a, \quad a > 3,$$

которое, очевидно, обеспечивается такого же вида неравенством для функции $R(t, t+\Delta) - R(t, t)$ ([56]).

Дальнейшее повышение гладкости $R(u, t)$ влечет за собой увеличение гладкости $\xi(u)$. Например, если R дважды непрерывно дифференцируема, то существует (в среднеквадратичном) производная $\xi'(u)$ ([56]).

Если же процесс $\xi(u)$ стационарен и функция $R(t) = R(u, u+t)$ обладает свойством

$$\left|R(\Delta) - R(0) - \frac{R''(0)}{2}\Delta^2\right| \leqslant H\Delta^2\left(\log\frac{1}{\Delta}\right)^a, \quad a > 3,$$

то траектории $\xi(u)$ с вероятностью 1 будут иметь производную в обычном смысле, и эта производная будет непрерывной [56].

§ 4. Условия сходимости к вырожденным процессам

Пусть в соответствии с принятыми обозначениями $\{\xi(u);\ 0 \leqslant u \leqslant U\}$ — произвольный сепарабельный процесс, заданный в некотором пространстве $(R(U),\ \mathfrak{A}_{R(U)})$ вещественных функций на $[0, U]$ с σ-алгеброй $\mathfrak{A}_{R(U)}$, содержащей цилиндрические множества. Мы будем рассматривать последовательность таких процессов $\xi_T(u)$, зависящих от параметра $T \to \infty$ и заданных на удлиняющихся интервалах времени $U = vT$, где $v > 0$ фиксировано. (Не ограничивая общности, мы могли бы в качестве параметра рассматривать саму длину интервала U.) Нас будут интересовать условия C-сходимости последовательности процессов

$$y_T(t) = \frac{\xi_T(tT)}{B(T)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant v,$$

где $B(T)$ — нормирующий множитель, к некоторому детерминированному процессу $d(t) \in C(0, v)$. Другими словами, нас будут интересовать условия, при которых

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \leqslant v} |y_T(t) - d(t)| > \gamma\right) \to 0$$

при $T \to \infty$ и любом $\gamma > 0$. Это будет соответствовать сходимости распределений измеримых функционалов $f(y_T)$, непрерывных в равномерной метрике в точке d, к распределению $f(d)$, сосредоточенному в одной точке.

Такого рода задачи возникают, например, при изучении эргодических теорем для многоканальных нагруженных систем массового обслуживания.

Отметим, что если процесс $\xi(t)$ задан на всей оси и таков, что $\frac{\xi(t)}{t} \to d$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1, то процесс

$$y_T(t) = \frac{\xi(tT)}{T}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant v,$$

будет C-сходиться к функции $d(t) = td$. Действительно, мы должны оценить

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant v}\left|\frac{\xi(tT)}{T} - td\right| > \gamma\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{0 \leqslant u \leqslant N}\left|\frac{\xi(u) - ud}{T}\right| > \gamma\right) +$$
$$+ \mathsf{P}\left(\sup_{N \leqslant u \leqslant vT}\left|\frac{\xi(u) - ud}{T}\right| > \gamma\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{0 \leqslant u \leqslant N} |\xi(u) - ud| > \gamma T\right) + \mathsf{P}\left(\sup_{u \geqslant N}\left|\frac{\xi(u)}{u} - d\right| > \frac{\gamma}{v}\right).$$

Здесь второе слагаемое в силу эргодичности $\xi(u)$ выбором N может быть сделано сколь угодно малым; первое слагаемое при каждом N сходится к 0 при $T \to \infty$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant v}\left|\frac{\xi(tT)}{T} - td\right| > \gamma\right) \to 0$$

при $T \to \infty$, что и означает C-сходимость $y_T(t)$ к функции td.

Вернемся к общему случаю. Для простоты мы будем считать в дальнейшем, что $d(t) \equiv 0$, $B(T) = T$. Мы будем предполагать также, что существует непрерывная справа модификация процессов $\xi_T(u)$, и будем называть *скачком процесса в точке* u величину

$$\mathrm{Jp}(u) = \lim_{\delta \to +0} \sup |\xi_T(u) - \xi_T(u - \delta)|$$

и обозначать через H_δ событие

$$H_\delta = \{\mathrm{Jp}(u) < \delta T \quad \textit{при всех} \quad 0 \leqslant u \leqslant U\}.$$

Сделанные предположения не являются принципиальными и в значительной мере носят технический характер.

Положим далее

$$z_{u,t} = \xi_T(u + t) - \xi_T(u)$$

и рассмотрим совокупность $\mathfrak{M}(u), 0 \leqslant u \leqslant U$, вложенных σ-алгебр $\mathfrak{M}(u_1) \subset \mathfrak{M}(u_2) \subset \mathfrak{A}_{R(U)}$ при $u_1 \leqslant u_2$ таких, что $\xi_T(t)$ измерима относительно $\mathfrak{M}(u)$ при любом $t \leqslant u$.

Буквой θ мы будем обозначать функцию от T такую, что $\theta \to \infty$, $\theta = o(T)$ при $T \to \infty$. В этом смысле θ (как и другие функции от T) мы часто будем называть *последовательностью*, поскольку будем считать, что возрастающие значения T (а следовательно, и θ) образуют последовательность.

Символы ε и c (с индексами или без) будут означать соответственно произвольно малые числа и постоянные. Наконец, Γ_u будет обозначать событие

$$\Gamma_u = \{\varepsilon_1 T < |\xi_T(u)| < c_1 T\}.$$

Теорема 1. *Предположим, что существуют последовательность θ и система множеств $\Omega_{u,\theta} \in \mathfrak{M}(u)$ такие, что*

$$\Omega(u) = \bigcap_{s \leqslant u} \Omega_{s,\theta} \in \mathfrak{M}(u), \quad \mathsf{P}(\Omega(U)) \to 1$$

и на множествах $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u \in \mathfrak{M}(u)$ при всех $t \leqslant \theta$ и каждых фиксированных ε, ε_1, c_1 выполнены условия:

(I) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} z_{u,t} \leqslant \varepsilon\theta(u)$, *если* $\xi_T(u) > \varepsilon_1 T$,

$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} z_{u,t} \geqslant -\varepsilon\theta(u)$, *если* $\xi_T(u) < -\varepsilon_1 T$;

(II) *при любом фиксированном* $\delta > 0$ *и* $T \to \infty$

$$\mathsf{P}(H_\delta) \to 1, \quad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(|z_{u,t}|;\ |z_{u,t}| > \delta\sqrt{\theta T}\right) < \varepsilon\theta(u),$$

где $\theta(u)$ таковы, что

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant T/\theta} \theta(k\theta) \leqslant T.$$

Если помимо сделанных предположений последовательность $y_T(t) = \dfrac{\xi_T(tT)}{T}$ обладает свойством: $\mathsf{P}(|y_T(0)| > \delta) \to 0$ при $T \to \infty$ и любом $\delta > 0$, то

$$y_T(t) \underset{C}{\Rightarrow} 0.$$

Сформулированные условия будут носить более однородный характер, если в них положить $\theta(u) = \theta$.

Доказательству теоремы мы предпошлем две леммы.

Пусть $\tau = \tau(\omega)$ есть марковский момент относительно семейства σ-алгебр $\{\mathfrak{M}(u)\}$, т. е. такая случайная величина, что $\{\tau \leqslant u\} \in \mathfrak{M}(u)$, и пусть $\mathfrak{M}(\tau)$ — σ-алгебра, определенная соотношениями (см. (5) § 3)

$$A \in \mathfrak{M}(\tau), \quad \text{если} \quad A \cap \{\tau \leqslant u\} \in \mathfrak{M}(u) \tag{1}$$

при любом $u \geqslant 0$. Нетрудно проверить, что если $A \in \mathfrak{M}(\tau)$, то $A \cap \{\tau < s\} \in \mathfrak{M}(u)$, $A \cap \{\tau = s\} \in \mathfrak{M}(u)$ для любого $s \leqslant u$ ([58]). Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & \text{если} \quad \frac{k-1}{n} < t \leqslant \frac{k}{n}, \\ 0, & \text{если} \quad t = 0, \end{cases}$$

и обозначим через τ_n случайную величину $\tau_n = \varphi_n(\tau)$. Очевидно, что $\tau_n \downarrow \tau$ при $n \to \infty$ и τ_n есть марковский момент, поскольку

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \{\varphi_n(\tau) \leqslant t\} = \begin{cases} \{\tau \leqslant t\}, & \text{если} \quad t = k/n, \\ \{\tau \leqslant [tn]/n\}, & \text{если} \quad t \neq k/n. \end{cases}$$

Оба события в правой части, очевидно, принадлежат $\mathfrak{M}(t)$.

Пусть, далее, $\eta(u) = \eta(u, \omega)$, $u \geqslant 0$, есть произвольный вещественный случайный процесс, заданный на исходном вероятностном пространстве и имеющий траектории с вероятностью 1, непрерывные справа.

Лемма 1. *Предположим, что* $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t)}\eta(t) \leqslant c$ *при всех* t *и* $\eta(\tau_n) < \eta$, $\mathsf{M}|\eta| < \infty$. *Тогда* $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(\tau)}\eta(\tau) \leqslant c$.

Условие об интегрируемой мажоранте для $\eta(\tau_n)$, присутствующее в теореме, очевидно, будет выполнено, если $\eta(t)$ ограничены некоторой постоянной.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $\eta(\tau) = \eta(\tau(\omega), \omega)$ есть случайная величина. Действительно, так как траектории $\eta(t)$ непрерывны справа почти наверное, то при почти каждом ω

$$\eta(\tau) = \lim_{n \to \infty} \eta_n, \quad \eta_n = \eta(\tau_n) = \sum_k I\left(\tau_n = \frac{k}{n}\right) \xi\left(\frac{k}{n}\right),$$

где $I(A)$ есть индикатор события A. Таким образом, $\eta(\tau)$ есть предел (почти наверное) последовательности случайных величин η_n и, стало быть, сама является случайной величиной.

Мы должны убедиться, что для любого $B \in \mathfrak{M}(\tau)$

$$\mathsf{M}(\eta(\tau);\ B) \leqslant c\mathsf{P}(B). \tag{2}$$

Заметим сначала, что для любого $B \in \mathfrak{M}(\tau_n)$

$$\mathsf{M}(\eta_n;\ B) \leqslant c\mathsf{P}(B).$$

Действительно, по условию леммы $\mathsf{M}(\eta(u);\ A) \leqslant c\mathsf{P}(A)$ для любого $A \in \mathfrak{M}(u)$. Так как $\left\{\tau_n = \frac{k}{n}\right\} B \in \mathfrak{M}\left(\frac{k}{n}\right)$, если $B \in \mathfrak{M}(\tau_n)$, то для любого $B \in \mathfrak{M}(\tau_n)$ имеем

$$\mathsf{M}(\eta_n;\ B) = \sum_k \mathsf{M}\eta\left(\frac{k}{n}\right) I\left(\tau = \frac{k}{n}\right) I(B) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k c\mathsf{P}\left(\tau_n = \frac{k}{n};\ B\right) = c\mathsf{P}(B).$$

Чтобы получить теперь (2) для любого $B \in \mathfrak{M}(\tau)$, надо воспользоваться тем, что $\mathfrak{M}(\tau) \subset \mathfrak{M}(\tau_n)$ ([35]), сходимостью $\eta_n \to \eta$ п. н. и теоремой Фату. Последнее возможно в силу равномерной интегрируемости η_n, обусловленной в лемме.

Лемма 2. *Пусть*

$$z_{u,t} = \xi(u+t) - \xi(u)$$

есть приращения случайного процесса $\xi(u)$, непрерывного справа и $\xi(u)$ измеримо относительно $\mathfrak{M}(u)$. Пусть $\Omega(u)$ — совокупность вложенных множеств

$$\Omega(u) = \bigcap_{s \leqslant u} \Omega(s) \in \mathfrak{M}(u)$$

таких, что при всех $0 \leqslant u \leqslant U - t$ и $t \leqslant \theta$

$$I(\Omega(u))\, \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(z_{u,t} \leqslant -x) < 1/2.$$

Тогда при всех s, $0 \leqslant s \leqslant U - \theta$,

$$\mathsf{P}(\sup_{t \leqslant \theta} z_{s,t} > 2x;\ \Omega(s+\theta)) \leqslant 2\mathsf{P}(z_{s,\theta} > x;\ \Omega(s)).$$

Доказательство. Пусть τ — время первого прохождения процессом $\{z_{s,t},\ t \geqslant 0\}$ уровня $2x$:

$$\tau = \inf\{t > 0:\ z_{s,t} \geqslant 2x\}.$$

Так как

$$\{\tau \leqslant t\} = \{\sup_{v \leqslant t} z_{s,v} \geqslant 2x\} \in \mathfrak{M}(s+t),$$

то это есть марковский момент относительно семейства σ-алгебр $\mathfrak{N}(t) = \mathfrak{M}(s+t)$, $t \geqslant 0$. Семейства случайных величин

$$\eta_1(u) = I(\Omega(u)), \qquad \eta_2(u) = I(z_{s+u,\,\theta-u} \leqslant -x),$$

когда u пробегает значения от 0 до θ, представляют собой случайные процессы, непрерывные справа. Поэтому $\eta(u) = \eta_1(u)\eta_2(u)$ удовлетворяет условиям леммы 1 при $c = 1/2$, если в качестве семейства σ-алгебр взять $\mathfrak{N}(u)$. Используя эту лемму, получим

$$\begin{gathered}
\mathsf{P}(z_{s,\theta} > x;\ \Omega(s)) \geqslant \mathsf{M}\mathsf{M}_{\mathfrak{N}(\tau)} I(\tau \leqslant \theta)\, I(\Omega(s+\tau))\, I(z_{s,\theta} > x) \geqslant \\
\geqslant \mathsf{M} I(\tau \leqslant \theta)\, I(\Omega(s+\tau))\,[1 - \mathsf{M}_{\mathfrak{N}(\tau)} I(z_{s+\tau,\,\theta-\tau} \leqslant -x)] \geqslant \\
\geqslant \mathsf{M} I(\tau \leqslant \theta)\Big[I(\Omega(s+\tau)) - \frac{1}{2} I(\Omega(s+\tau))\Big] \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\tau \leqslant \theta;\ \Omega(s+\tau)) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\sup_{t \leqslant \theta} z_{s,t} > 2x;\ \Omega(s+\theta)).
\end{gathered}$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Заметим сначала, что при выполнении условий (I), (II) существуют последовательности $\varepsilon = \varepsilon(T)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(T)$ и $\delta = \delta(T)$, сходящиеся к 0 при $T \to \infty$ и такие, что для них соотношения (I), (II) будут по-прежнему справедливы. Так как последовательность ε_1 может быть выбрана сколь угодно медленно сходящейся к 0, то мы можем считать, что $\delta \leqslant \varepsilon_1$. Кроме того, мы, не ограничивая общности, можем считать, что $\xi_T(0) = 0$, $\xi_T(u) \geqslant 0$, и рассматривать лишь первое из условий (I).

Разобьем отрезок $[0, U]$ на интервалы длины θ и предположим для простоты, что θ делит U нацело. Наряду с приращениями $z_{k\theta,\,\theta}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где $n = U/\theta$, рассмотрим случайные величины z_k, z_k^* и z_k^0, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, построенные следующим образом. Пусть

$$\tau_k = \begin{cases} \theta, & \text{если} \quad \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant \theta} \xi_T(k\theta + u) \leqslant \varepsilon_1, \\ \inf\{u \geqslant 0\colon\ \xi_T(k\theta + u) > \varepsilon_1\} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Положим

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(k\theta),$$
$$z_k = \min[cT,\ \xi_T((k+1)\theta) - \xi_T(k\theta + \tau_k)],$$
$$z_k^* = I(\Omega(k\theta))\, z_k,$$
$$z_k^0 = z_k^* - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} z_k^*, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Случайные величины z_k^0 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} z_k^0 = 0; \\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^0|;\ |z_k^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right) \leqslant 4\left(\varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k\right), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varkappa_k = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}(\Omega(k\theta)\,\overline{\Omega}((k+1)\theta))$. Чтобы доказать приведенное неравенство, заметим, что в силу леммы 1 (случайные величины, к которым применяется лемма, ограничены уровнем cT)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^*|;\ |z_k^*| > \delta\sqrt{\theta T}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(k\theta+\tau_k)}\left[I(\Omega(k\theta+\tau_k))\,|z_k|;\ |z_k| > \delta\sqrt{\theta T}\right] +$$
$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(k\theta+\tau_k)}\left[I(\Omega(k\theta)\,\overline{\Omega}(k\theta+\tau_k))\,|z_k|;\ |z_k| > \delta\sqrt{\theta T}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}|z_k^*| \leqslant \delta\sqrt{\theta T} + \varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k$$

и при $\varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k < \delta\sqrt{\theta T}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^0|;\ |z_k^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right) \leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^*|;\ |z_k^*| > \delta\sqrt{\theta T}\right) +$$
$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}|z_k^*| \cdot \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k + 2\delta\sqrt{\theta T}\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right) \equiv A_k. \tag{4}$$

Так как по неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right) \leqslant \frac{A_k}{3\delta\sqrt{\theta T}},$$

то

$$\frac{1}{3}\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_k^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right) \leqslant \frac{\varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k}{3\delta\sqrt{\theta T}}.$$

Подставляя эту оценку в (4), мы получим (3). Если же $\varepsilon\theta(k\theta)+cT\varkappa_k \geqslant \delta\sqrt{\theta T}$, то

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}|z_k^0| \leqslant 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}|z_k^*| \leqslant 4(\varepsilon\theta(k\theta)+cT\varkappa_k),$$

что также влечет за собой (3).

С помощью соотношений (3) мы можем показать теперь, что равномерно по k и l, $0 \leqslant k < n$, $0 \leqslant l \leqslant n-k-1$,

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}\left(\left|\sum_{j=k}^{k=l} z_j^0\right| > \alpha T\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \tag{5}$$

при любом $a>0$ при $T\to\infty$. Для этого рассмотрим характеристическую функцию

$$M_{k,l} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\exp\left\{i\lambda\sum_{j=k}^{k+l} z_j^0\right\} =$$
$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\exp\left\{i\lambda\sum_{j=k}^{k+l-1} z_j^0\right\}\cdot \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{k+l}}\exp\{i\lambda z_{k+l}^0\}.$$

Последний множитель может быть представлен в виде

$$1+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{k+l}}\left(e^{i\lambda z_{k+l}^0}-1-i\lambda z_{k+l}^0\right),$$

где второе слагаемое не превосходит по абсолютной величине

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{k+l}}\left[\frac{(\lambda z_{k+l}^0)^2}{2};\ |z_{k+l}^0| < 3\delta\sqrt{\theta T}\right] +$$
$$+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{k+l}}\left[2|\lambda z_{k+l}^0|;\ |z_{k+l}^0| > 3\delta\sqrt{\theta T}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda^2}{2}9\delta^2\theta T + 8\lambda(\varepsilon\theta((k+l)\theta)+cT\varkappa_{k+l}).$$

Полагая $\lambda=\mu/T$, получаем отсюда

$$\ln M_{k,l} \leqslant \frac{9l\mu^2}{2}\frac{\delta^2\theta}{T} + \frac{8\mu}{T}\sum_{j=0}^{l}(\varepsilon\theta((k+j)\theta)+cT\varkappa_{k+j}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_2 + c\mu\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\sum_{j=0}^{l}\varkappa_{k+j},$$

что влечет за собой (5).

Мы докажем утверждение теоремы, если убедимся, что при любом $\gamma > 0$ и $T \to \infty$ сходится к нулю вероятность

$$\mathsf{P}(\sup_{0 \leqslant k \leqslant U} \xi_T(u) \geqslant 2\gamma T) \leqslant \mathsf{P}(\overline{H}_\delta) + \mathsf{P}(\overline{\Omega}(U)) + \mathsf{P}(\overline{C}) + \\ + \mathsf{P}(\max_{k \leqslant n} \xi_T(k\theta) > \gamma T;\ H_\delta,\ \Omega(U),\ C) + \\ + \mathsf{P}(\sup_{0 \leqslant u \leqslant U} \xi_T(u) \geqslant 2\gamma T;\ \max_{k \leqslant n} \xi_T(k\theta) < \gamma T,\ H_\delta,\ \Omega(U),\ C), \tag{6}$$

где $C = \{\max_{0 \leqslant k < n} |z_{k\theta, \theta}| < cT\}$. Оценка первых трех слагаемых в правой части очевидна, так как по условию (II)

$$\mathsf{P}(\overline{C}) \leqslant \sum_k \frac{\varepsilon\theta(k\theta)}{cT} \leqslant \frac{\varepsilon}{c}.$$

Для оценки четвертого слагаемого построим траекторию

$$\tilde{\xi}_k = \delta_1 T + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{z}_j,$$

где $\delta_1 > 0$ будет выбрано позже,

$$\tilde{z}_k = z_k^* - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} z_k^* + \varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k.$$

Здесь $\tilde{z}_k \geqslant z_k^*$, так как по лемме 1

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} z_k^* = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(k\theta + \tau_k)} [I(\Omega(k\theta + \tau_k)) z_k + \\ + I(\Omega(k\theta)\,\overline{\Omega}(k\theta + \tau_k)) z_k] \leqslant \varepsilon\theta(k\theta) + cT\varkappa_k.$$

Обозначив $A = \{\min \tilde{\xi}_k > (\varepsilon_1 + \delta) T\}$, получим

$$\mathsf{P}(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \xi_T(k\theta) > \gamma T;\ H_\delta,\ \Omega(U),\ C) \leqslant \\ \leqslant P(\overline{A}) + \mathsf{P}(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \xi_T(k\theta) > \gamma T;\ H_\delta,\ \Omega(U),\ C,\ A). \tag{7}$$

Но на множестве $H_\delta \Omega(U) C A$ выполняется неравенство $\xi_T(k\theta) \leqslant \tilde{\xi}_k$ при всех k. Действительно, если $\xi_T(k\theta) \leqslant \varepsilon_1$, то это очевидно. Если же $\xi_T(k\theta) > \varepsilon_1$, то рассмотрим момент $j \leqslant k$, ближайший к k, для которого $\xi_T(j\theta) > \varepsilon_1$, $\xi_T((j-1)\theta) \leqslant \varepsilon_1$. Тогда

$$\xi_T(j\theta) \leqslant \varepsilon_1 + \delta + z_{j-1} = \varepsilon_1 + \delta + z_{j-1}^* \leqslant \tilde{\xi}_{j-1} + \tilde{z}_{j-1} = \tilde{\xi}_j.$$

Но приращения $z_j, \ldots, z_{k-1}$ совпадают на указанном множестве с приращениями $\xi_T((j+1)\theta)-\xi_T(j\theta), \ldots$ $\ldots, \xi_T(k\theta)-\xi_T(k-1)\theta$. Стало быть,

$$\xi_T(k\theta)=\xi_T(j\theta)+z_j+\ldots+z_{k-1}\leqslant$$
$$\leqslant\tilde{\xi}_j+\tilde{z}_j+\ldots+\tilde{z}_{k-1}=\tilde{\xi}_k.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}(\max_{0\leqslant k<n}\xi_T(k\theta)>\gamma T;\ H_\delta, \Omega(U), C, A)\leqslant\mathsf{P}(\max_{0\leqslant k<n}\tilde{\xi}_k>\gamma T)\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k<n}\left(\delta_1 T+\sum_{j=0}^{k}z_j^0+\varepsilon\sum_{j=0}^{k}\theta(j\theta)+cT\sum_{j=0}^{k}\varkappa_j\right)>\gamma T\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k<n}\sum_{j=0}^{k}z_j^0>(\gamma-\delta_1)T-\varepsilon\sum_{j=0}^{k}\theta(j\theta)-cT\sum_{j=0}^{k}\varkappa_j\right).$$

Так как $\mathsf{M}\sum_{j=0}^{k}\varkappa_j=\mathsf{P}(\overline{\Omega}(U))\to 0$ при $T\to\infty$, то при $\delta_1=\gamma/2$ полученное выражение не превосходит

$$\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k<n}\sum_{j=0}^{k}z_j^0>\frac{\gamma}{3}T\right)+o(1).$$

С другой стороны, аналогичным образом находим

$$\mathsf{P}(A)=P(\min_{0\leqslant k<n}\tilde{\xi}_k\leqslant(\varepsilon_1+\delta)T)=$$
$$=\mathsf{P}\left(\min_{0\leqslant k<n}\left(\delta_1 T+\sum_{j=0}^{k}z_j^0+\varepsilon\sum_{j=0}^{k}\theta(j\theta)+cT\sum_{j=0}^{k}\varkappa_j\right)\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant(\varepsilon_1+\delta)T\right)\leqslant\mathsf{P}\left(\min_{0\leqslant k<n}\sum_{j=0}^{k}z_j^0\leqslant-\frac{\gamma}{3}T\right)+o(1).$$

Таким образом, требуемая оценка для (7) будет получена, если окажется, что при $T\to\infty$

$$\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k<n}\left|\sum_{j=0}^{k}z_j^0\right|>\frac{\gamma}{3}T\right)\to 0. \qquad (8)$$

Но, как мы видели, при любых k, l и $\alpha > 0$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(k\theta)}\left(\left|\sum_{j=k}^{k+l} z_j^0\right| > \alpha T\right) \xrightarrow{P} 0$$

при $T \to \infty$ равномерно по k и l. Поэтому, полагая $\tau = \min\left\{k: \sum_{j=0}^{k} z_j^0 > 2\alpha T\right\}$, получим при достаточно больших T

$$o(1) = \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j^0 > \alpha T\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}(\tau = k)\,\mathsf{P}\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} z_j^0 > -\alpha T \,\middle|\, \tau = k\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum \mathsf{P}(\tau = k) = \frac{1}{2}\mathsf{P}\left(\max_k \sum_{j=0}^{k} z_j^0 > 2\alpha T\right).$$

Отсюда следует, что при $T \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\max_k \sum_{j=0}^{k} z_j^0 > \frac{\gamma}{3} T\right) \to 0.$$

Аналогичная оценка для $\min\limits_k \sum z_j^0$ заканчивает доказательство (8).

Обратимся, наконец, к последнему слагаемому в (6). Оно не превосходит в силу условия (II) и леммы 2 (при $x = \frac{\gamma T}{2}$)

$$\mathsf{P}\left(\sup_{u \leqslant U} \xi_T(u) > 2\gamma T;\ \max_{k \leqslant n} \xi_T(k\theta) < \gamma T,\ \Omega(U)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}\left(\sup_{t \leqslant 0} z_{k\theta,\,t} > \gamma T,\ \Omega((k+1)\theta)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}\left(z_{k\theta,\,0} > \frac{\gamma T}{2};\ \Omega(k\theta)\right) \leqslant 2\sum_{k=0}^{n} \frac{2\varepsilon\theta(k\theta)}{\gamma T} \leqslant \frac{4\varepsilon}{\gamma}.$$

Сходимость к 0 вероятности в левой части (6), а вместе с ней и утверждение теоремы доказаны.

§ 5. Условия сходимости к процессам неограниченной диффузии

В этом и следующих параграфах мы рассмотрим условия сходимости последовательности произвольных *) процессов к марковским процессам диффузии. Так как наиболее удобным и эффективным способом задания диффузионных процессов является «инфинитезимальный» способ, то естественно нужные условия сходимости связывать с приращениями процесса за относительно малые промежутки времени, точнее — с правильным асимптотическим поведением (таким же, как у диффузионного процесса) первых двух моментов этих приращений. Имеются в виду моменты, условные относительно σ-алгебр, порожденных предисториями. Стало быть, речь идет об асимптотическом поведении последовательностей случайных величин. Но существует несколько способов характеризации асимптотических свойств случайных последовательностей, что порождает различные условия сходимости. Чтобы сделать эти условия по возможности более общими, мы будем накладывать ограничения на моменты приращений не на всем пространстве элементарных событий — это слишком жестко, а лишь на некоторых ω-множествах достаточно высокой вероятности. Мы выделим здесь два способа конструирования условий сходимости **).

1. Условия «по вероятности», в которых упомянутые ω-множества высокой вероятности выделяются в явном виде.

2. Условия «в среднем», в которых нужная асимптотическая правильность требуется в «усредненном» виде.

1. *Условия «по вероятности»*.

Пусть, как и прежде, $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)}, \mathsf{P})$ — выборочное вероятностное пространство. Для простоты мы будем

*) О сходимости марковских процессов к процессам диффузии см. работы А. Я. Хинчина [72], А. В. Скорохода [71], И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [35], [36] и др.

**) Возможны, разумеется, и другие способы. В [15], [17], например, используются множества состояний, попадания в которые ослабляет «немарковскую» зависимость моментов приращений от предыстории. Весьма общий подход изложен в работах И. И. Гихмана [37].

считать, что $C(0, U) \subset R(U)$ и что преобразование сжатия аргумента в α раз переводит $R(U)$ в пространство $R(\alpha U)$.

Мы рассматриваем схему серий, т. е. последовательность процессов $\{\xi_T(u);\ 0 \leqslant u \leqslant U\}$, зависящих от параметра $T \to \infty$ и заданных на удлиняющихся интервалах времени $U = vT$, где $v > 0$ фиксировано. Мы будем изучать условия C-сходимости к процессам диффузии процессов

$$y(u) = y_T(u) = \frac{\xi_T(uT)}{B(T)}$$

($B(T)$ — нормирующий множитель), каждый из которых задан в $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$.

Предположим, что в $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)})$ существует совокупность вложенных σ-алгебр $\mathfrak{M}(u)$: $\mathfrak{M}(u_1) \subset \mathfrak{M}(u_2)$ при $u_1 \leqslant u_2$ такая, что любое событие, относящееся к траектории процесса $\xi(s)$ на отрезке $[0, u]$, принадлежит $\mathfrak{M}(u)$. В ряде случаев удобно рассматривать $\mathfrak{M}(u)$ просто как σ-алгебры, порожденные течением процесса $\xi(s)$ на $[0, u]$, т. е. порожденные событиями

$$\{\xi(s) \in B_s\}, \qquad s \leqslant u,$$

где B_s — борелевские множества на прямой.

Итак, пусть задана последовательность $\xi_T(u)$. Положим

$$z_{u,t} = \xi_T(u+t) - \xi_T(u), \qquad \zeta(u) = \frac{\xi_T(u)}{\sqrt{T}}.$$

В дальнейшем буквой t мы будем обозначать последовательности $t = t(T) \to \infty$, $t = o(T)$ при $T \to \infty$.

Пусть, наконец, $\Gamma_u^N \in \mathfrak{M}(u)$ означает событие

$$\Gamma_u^N = \{\, |\zeta(u)| < N\}.$$

Условия PI — PIII. *Пусть существуют последовательность $t = t(T)$ и система множеств $\Omega_{u,t} \in \mathfrak{M}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant U$, такая, что при $T \to \infty$*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{[U/t]} \Omega_{kt,\,t}\right) \to 1.$$

При каждых фиксированных $N>0$, $\varepsilon>0$ *и* $u\leqslant U-t$ *на множестве* $\Omega_{u,t}\cap\Gamma_u^N$ *выполняются*

PI) $$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}z_{u,t}=\frac{t}{\sqrt{T}}[a(\zeta(u))+r_1(\omega)],$$

PII) $$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}z_{u,t}^2=t\left[b(\zeta(u))+r_2(\omega)\right],$$

где $|r_1(\omega)|<\varepsilon$, $|r_2(\omega)|<\varepsilon$ *при всех достаточно больших* T; a *и* b *есть функции, свойства которых будут описаны позже.*

PIII) *Для любых фиксированных* $\varepsilon>0$, $\delta>0$ *и всех достаточно больших* T

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(z_{u,t}^2;\ |z_{u,t}|>\delta\sqrt{T}\right)<\varepsilon t.$$

Относительно соотношений PI—PIII *мы предположим также, что они, будучи выполненными, останутся справедливыми и для последовательностей* t_1 *вида* $t_1=ct$, $1/2\leqslant c\leqslant 2$.

Иногда в последующем тексте вместо фразы «$\psi(T)<\varepsilon$ при всех достаточно больших T» мы будем использовать более короткую запись: $\psi(T)<\varepsilon$ при $T\to\infty$.

Мы видим, что в приведенных условиях асимптотическая правильность моментов (характер роста по t и характер зависимости от ω) требуется не всюду, а лишь на множествах $\Omega_{u,t}\cap\Gamma_u^N$, где $\overline{\Omega}_{kt,t}=R(U)-\Omega_{kt,t}$ — любая система множества, в которую мы редко попадаем.

Если условия PI — PIII выполнены при любых N и ε, то можно считать, что существуют некоторые последовательности $N=N(T)\to\infty$ и $\varepsilon=\varepsilon(T)\to 0$ при $T\to\infty$ такие, что условия PI — PIII по-прежнему остаются справедливыми. В дальнейшем везде, где это потребуется, мы под N и ε будем понимать именно такие последовательности (не всегда одни и те же), оставляя эти числа фиксированными в условиях теорем.

Отметим, что для выполнения условия PIII достаточно, чтобы на $\Omega_{u,t}\cap\Gamma_u^N$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}|z_{u,t}|^{2+2\gamma}<ct^{1+\gamma}$$

при некоторых $\gamma>0$, $c>0$.

Введем теперь условие PIV, которое относится к функциям a, b. Пусть, как и прежде, C_k обозначает пространство ограниченных k раз дифференцируемых функций, k-я производная которых удовлетворяет равномерному условию Гёльдера.

PIV) *Существует переходная функция* $P(x, u, B)$ *некоторого марковского процесса такая, что функция*

$$V(x, u) = \int \varphi(y) P(x, u, dy), \qquad \varphi \in C_2,$$

имеет непрерывные и ограниченные в области $0 \leqslant u \leqslant v$, $-\infty < x < \infty$ *производные* $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *и является решением задачи Коши*

$$V(x, 0) = \varphi(x)$$

уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial u} = a \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Кроме того, при некотором $c > 0$

$$|a(x)| < c(1 + |x|), \qquad b(x) < c.$$

При выполнении этих условий существует диффузионный процесс w, для которого a и b будут соответственно коэффициентами сноса и диффузии.

Достаточными для выполнения PIV могут служить условия (см. п. II § 3):

A. *Функции* a *и* $b > b_0 > 0$ *принадлежат классу* C_0. Или

B. *Производные* a', b', a'', b'' *ограничены и принадлежат* C_0.

В сделанных предположениях справедливо следующее утверждение. Пусть

$$y_T(u) = \frac{\xi_T(uT)}{\sqrt{T}} = \zeta(uT), \qquad 0 \leqslant u \leqslant v,$$

и существует предельное распределение $y_T(0)$, которое мы обозначим p_0. Пусть, кроме того, $\{w(u), 0 \leqslant u \leqslant v\}$ — диффузионный процесс в пространстве $C(0, v)$ с σ-алгеброй борелевских множеств, построенный по переходной функции $P(x, u, B)$ и начальному распределению p_0.

Теорема 1. *При выполнении условий* PI — PIV *конечномерные распределения* $y_T(u)$ *сходятся к конечномерным распределениям* $w(u)$.

Отметим, что в условиях PI — PIII без ограничения общности можно считать, что t делит U. Тогда для теоремы 1 достаточно требовать их выполнения только для

$$u = 0,\ t,\ 2t,\ \ldots,\ (n-1)t; \qquad a = U/t,$$

а под $\mathfrak{M}(kt)$ понимать σ-алгебры, порожденные $\xi(0), \ldots$ $\ldots, \xi(kt)$.

Следует отметить также, что условиям PI — PIV, представляющим собой условия «однородной» сходимости к однородной диффузии, можно придать и более общую форму, потребовав, например, вместо PI, PII, чтобы существовало разбиение $0 = t_0 < t_1, \ldots, < t_n = U$ отрезка U такое, что $\max\limits_{k<n}(t_{k+1} - t_k) = o(U)$, и для которого выполнялось бы на $\Omega_{t_k, t} \cap \Gamma^N_{t_k}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t_k)} \frac{z_{t_k, t}}{\sqrt{T}} = \frac{t}{T} a(t_k\ \zeta(t_k)) + r_{1, k},$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t_k)} \frac{z^2_{t_k, t}}{\sqrt{T}} = \frac{t}{T} b(t_k, \zeta(t_k)) + r_{2, k},$$

где $t = t_{k+1} - t_k$, $\sum\limits_{k<n} |r_{i, k}| < \varepsilon$, а $a(u, x)$, $b(u, x)$ есть функции, обладающие свойствами вида PIV. Введение такого рода условий несколько усложняет формулировки и доказательства, не внося принципиальных трудностей. Поэтому мы в этой и последующих теоремах ограничиваемся для простоты однородным случаем.

Утверждение теоремы 1 можно усилить до C-сходимости, введя некоторые дополнительные условия. Прежде всего нам будет удобно считать, что процесс $\xi(u)$ является непрерывным справа, т. е. что для всех u с вероятностью 1 существует

$$\lim_{\delta \to +0} \xi(u + \delta) = \xi(u).$$

Это соглашение является существенным только с технической стороны. В соответствии с ним мы назовем величиной скачка функции $\xi_T(u)$ в точке u значение

$$\mathrm{Jp}_{\xi}(u)=\lim_{\delta\to+0}\sup|\xi_T(u)-\xi_T(u-\delta)|.$$

Обозначим H_u^δ событие

$$H_u^\delta=\{\mathrm{Jp}_{\xi}(u)<\delta\sqrt{T}\}$$

и введем условие

PV) *Система множеств $\Omega_{u,t}$, фигурирующая в условиях* PI — PIII, *и множества H_u^δ таковы, что* *)

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{u\leqslant U}\Omega_{u,t}\Big)\to 1,\qquad \mathsf{P}\Big(\bigcap_{u\leqslant U}H_u^\delta\Big)\to 1$$

при $T\to\infty$ для любого $\delta>0$.

Теорема 2. *При выполнении условий* PI — PV *распределение y_T C-сходится к распределению w.*

По поводу второго условия PV следует заметить, что оно является необходимым для утверждения теоремы 2 и не вытекает из условий PI — PIII. Это легко обнаружить с помощью следующего примера. Пусть $\xi_T(u)=w(u)+\pi(u)-\pi(u-e^{-T})$, где $w(u)$ — стандартный винеровский процесс, $\pi(u)$ — не зависящий от него пуассоновский процесс с параметром T^{-1} и скачком величина T. Если положить

$$\Omega_{u,t}=\{\sup_{s\leqslant u}|w(s)|<T^{3/4}\},$$

то условия PI — PIII будут выполнены при $N<T^{3/4}$, а условие PV вместе с утверждением теоремы 2 выполняться не будет.

Отметим также как очевидное обстоятельство тот факт, что теоремы 1, 2 останутся справедливыми, если

---

*) Здесь и в дальнейшем простоты ради мы будем предполагать, что произведения

$$\omega(r,s)=\bigcap_{r<u\leqslant s}\Omega_{u,t},\qquad h(r,s)=\bigcap_{r<u\leqslant s}H_u^\delta \tag{1}$$

являются событиями. Точная формулировка условия PV требует существования измеримых множеств из $\mathfrak{M}(s)$, вложенных в эти произведения и имеющих вероятности, сходящиеся к 1. Изменения, которые придется ввести в текст, пользуясь такой уточненной формулировкой, тривиальны.

их условия выполнены на вероятностном пространстве $(R(U), \mathfrak{A}_{R(U)}, \mathsf{P}^*)$, где $\mathsf{P}^*(d\omega) = \mathsf{P}(dw/\Omega^*)$ для любого множества Ω^* со свойством $\mathsf{P}(\Omega^*) \to 1$ при $T \to 1$.

В конце § 9 этой главы имеется замечание, в силу которого утверждения теорем 1, 2 сохранятся, если допустить нарушение условий PI—PIII в окрестности $|\zeta(u) - D| < \delta$ некоторой точки D, где фиксированное $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Эти нарушения состоят в замене PI—PIII в области $|\zeta(u) - D| \leqslant \delta$ на условия достаточно быстрого выхода процесса $\zeta(u)$ из окрестности точки D, близкие к условиям отражения PRIV § 9.

§ 6. Доказательство теоремы 1 § 5

1. Не ограничивая общности, мы можем считать, что t нацело делит U и что распределение $y_T(0) = \dfrac{\xi_T(0)}{\sqrt{T}}$ целиком сосредоточено на некотором конечном интервале $[-r, r]$. Положим

$$n = U/t; \qquad \xi_k = \xi_T(kt), \qquad k = \overline{0, n};$$

$$z_k = \xi_k - \xi_{k-1} = z_{(k-1)t,\, t}, \qquad k = \overline{1, n}.$$

Лемма 1. *При* $T \to \infty$, $x \to \infty$

$$P\left(\max_{k \leqslant n} |\xi_k| > x\sqrt{T}\right) \to 0.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения введем ряд вспомогательных последовательностей. Так как поведение z_k в области $|\xi_{k-1}| > N\sqrt{T}$ не известно, то введем последовательность

$$z_k^* = \begin{cases} (z_k)_{2N\sqrt{T}}, & \text{если} \ \max\limits_{l<k} |\xi_l| < N\sqrt{T}, \\ 0, & \text{если} \ \max\limits_{l<k} |\xi_l| \geqslant N\sqrt{T}, \end{cases}$$

где $(\xi)_N$ означает срезку величины ξ на уровне N:

$$(\xi)_N = \begin{cases} \xi, & \text{если} \ |\xi| \leqslant N, \\ 0, & \text{если} \ |\xi| > N. \end{cases}$$

Обозначим

$$\xi_k^* = \xi_0 + \sum_{i=1}^{k} z_i^*, \qquad \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(kt).$$

Так как по условию PIII на $\Omega_{kt,\,t} \cap \Gamma_{kt}^N$

$$\left| \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} (z_{k+1} \colon |z_{k+1}| > N\sqrt{T}) \right| = \frac{o(t)}{N\sqrt{T}} = o\left(\frac{t}{\sqrt{T}}\right),$$

то всюду на $\Omega_{kt,\,t}$

$$\left| \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} z_{k+1}^* \right| < \left(1 + \frac{|\xi_k^*|}{\sqrt{T}}\right) \cdot \frac{ct}{\sqrt{T}}, \qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} (z_{k+1}^*)^2 < ct. \tag{1}$$

Кроме того, с вероятностью 1 все $|\xi_k^*| < 3N\sqrt{T}$.

Образуем теперь новую последовательность X_k, $k = \overline{0,\, n}$, следующим образом:

$$X_0 = \xi_0^*, \qquad X_{k+1} = X_k + x_{k+1},$$
$$x_{k+1} = z_{k+1}^* + \Delta_{k+1},$$

где

$$\Delta_{k+1} = \frac{ct}{\sqrt{T}} \left(1 + \frac{|\xi_k^*|}{\sqrt{T}}\right) - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} z_{k+1}^*.$$

Так что на $\Omega_{kt,\,t}$

$$\frac{2ct}{\sqrt{T}} \left(1 + \frac{|\xi_k^*|}{\sqrt{T}}\right) \geqslant \Delta_{k+1} \geqslant 0. \tag{2}$$

Это означает, что на множестве $\omega_k = \bigcap_{j=0}^{k} \Omega_{jt,\,t}$

$$X_{k+1} \geqslant \xi_{k+1}^*, \qquad \Delta_{k+1} \leqslant \frac{2ct}{\sqrt{T}} (1 + 3N) \tag{3}$$

и что всюду

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} x_{k+1} = \frac{ct}{\sqrt{T}} \left(1 + \frac{|\xi_k^*|}{\sqrt{T}}\right) > 0. \tag{4}$$

Наша цель теперь состоит в том, чтобы оценить

$$\mathsf{P}\left(\max_{k \leqslant n} X_k > x\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\right). \tag{5}$$

Для этого сначала найдем оценку для $\mathsf{P}(X_n > x\sqrt{T}, \omega_{n-1})$. Это легко будет сделать, если оценить

$$d_{k+1} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}(X_{k+1}^2;\ \omega_k), \qquad d_0 \leqslant X_0^2.$$

Находим в силу (1)—(4) ($I(A)$ есть индикатор события A)

$$d_{k+1} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}[(X_k + x_{k+1})^2,\ \omega_k] \leqslant$$
$$\leqslant d_k + 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}X_k I(\omega_k)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}x_{k+1} +$$
$$+ 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}I(\omega_k)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left((z_{k+1}^*)^2 + \Delta_{k+1}^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant d_k + \frac{2ct}{\sqrt{T}}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}|X_k|\left(1 + \frac{|X_k|}{\sqrt{T}}\right)I(\omega_k) + 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}I(\omega_k)\times$$
$$\times\left[ct + \frac{4c^2t^2}{T}\left(1 + \frac{|X_k|}{\sqrt{T}}\right)^2\right].$$

Учитывая, что $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}|X_k|I(\omega_k) \leqslant \sqrt{d_k}$, мы получим в итоге

$$d_{k+1} \leqslant d_k\left(1 + \frac{2ct}{T} + \frac{8c^2t^2}{T^2}\right) +$$
$$+ \sqrt{d_k}\,\frac{2ct}{\sqrt{T}}\left(1 + \frac{8ct}{T}\right) + 2ct\left(1 + \frac{4ct}{T}\right).$$

Так как $t/T = o(1)$, то при достаточно больших T мы получим

$$d_{k+1} \leqslant d_k + 3ct\left(\frac{d_k}{T} + \sqrt{\frac{d_k}{T}} + 1\right).$$

Покажем теперь, что отсюда следуют неравенства

$$d_k \leqslant 3(T + X_0^2)(1+\alpha)^{2k} \equiv f_k, \qquad k = \overline{0,\ n}, \tag{6}$$

где $\alpha = \frac{3ct}{T}$. Так как $f_0 = 3(T + X_0^2) \geqslant d_0$, то достаточно проверить, что

$$f_{k+1} \geqslant (1+\alpha)f_k + 3ct\left(\sqrt{\frac{f_k}{T}} + 1\right).$$

То есть мы должны показать, что

$$3(1+\alpha)^{2k+2}(T + X_0^2) \geqslant$$
$$\geqslant 3(T + X_0^2)(1+\alpha)^{2k+1} + 3ct + \frac{3ct}{\sqrt{T}}(1+\alpha)^k\sqrt{3(T + X_0^2)}$$

или, что то же,

$$3(1+\alpha)^{2k+1}\left(1+\frac{X_0^2}{T}\right) \geqslant 1+(1+\alpha)^k \sqrt{3\left(1+\frac{X_0^2}{T}\right)}.$$

Последнее неравенство справедливо, так как оно справедливо при $k=0$, $X_0=0$.

Полагая $k=n$, мы получим в итоге, что при достаточно больших T

$$d_n = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}(X_n^2, \omega_{n-1}) \leqslant 3e^{3c}(T+X_0^2) \leqslant 3e^{3c}T(1+r^2). \quad (7)$$

Обратимся теперь к оценке вероятности (5). Она производится примерно так же, как доказательство леммы 2 § 4. Обозначим

$$\tau_{x\sqrt{T}} = \min\left\{k\colon X_k \geqslant x\sqrt{T}\right\},$$

$$B_l = \left\{\tau_{x\sqrt{T}} = l\right\}, \qquad A = \left\{X_n > (x-h)\sqrt{T}\right\}.$$

Тогда при $x>0$, $h>0$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(X_n > (x-h)\sqrt{T}) \geqslant \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcup_{l=0}^{n} AB_l\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(AB_l) = \sum_{l=0}^{n} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(B_l - B_l\bar{A}).$$

Но $B_l\bar{A} \subset B_l\left\{X_n - X_l \leqslant -h\sqrt{T}\right\}$, поэтому последняя сумма превосходит

$$\sum_{l=0}^{n} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} I(B_l)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_l}\left(1 - I\left(X_n - X_l \leqslant -h\sqrt{T}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{l=0}^{n} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} I(B_l)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_l}\left(1 - I\left(X_n - X_l \leqslant -h\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\right) - \right.$$

$$\left. - \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcup_{0}^{n} B_l;\ \bar{\omega}_{n-1}\right)\right). \quad (8)$$

Здесь следует оценить сверху

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_l}\left(X_n - X_l \leqslant -h\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\right). \quad (9)$$

Сделать это с помощью формул типа (6), (7) для дисперсии $X_n - X_l$ не удается, т. к. на множестве B_l начальное значение $X_l > x\sqrt{T}$. Поэтому мы поступим следующим образом. Мы только увеличим эту вероятность, если слагаемые $x_{l+1}, \ldots, x_n$ уменьшим, заменив их (см. (4)) на

$$x_j^* = x_j - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{j-1}} x_j.$$

А сумма таких слагаемых уже допускает нужную оценку для дисперсии. Положим

$$d_{l,s} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_l}[(x_{l+1}^* + \ldots + x_{l+s}^*)^2,\ \omega_{l+s+1}].$$

Тогда

$$d_{l,s+1} \leqslant d_{l,s} + 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_l}(x_{l+1}^* + \ldots + x_{l+s}^*) I(\omega_{l+s}) \times \\ \times \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{l+s}} x_{l+s+1}^* + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_l} I(\omega_{l+s}) \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{l+s}} (x_{l+s+1}^*)^2.$$

Здесь второе слагаемое равно 0. В последнем слагаемом x_{l+s+1}^* отличается от z_{l+s+1}^* $\mathfrak{M}_{l+s}$-измеримым добавком, который в силу (4) на ω_{l+s} не превосходит

$$\frac{ct}{\sqrt{T}}(1 + 3N).$$

Следовательно, если мы выберем N так, чтобы $1 + 3N \leqslant \sqrt{\frac{T}{ct}}$, то квадрат этого добавка не будет превосходить ct. Стало быть, в силу (1)

$$d_{l,s+1} \leqslant d_{l,s} + 4ct, \qquad d_{l,s} \leqslant 4sct.$$

Поэтому для (9) находим

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_l}(X_n - X_l \leqslant -h\sqrt{T};\ \omega_{n-1}) \leqslant \frac{d_{l,n-l}}{h^2 T} \leqslant \frac{4cU}{h^2 T} = \frac{4cv}{h^2} = \frac{1}{2}$$

при $h = \sqrt{8cv}$. Следовательно, при таком выборе h из неравенств (8) мы получим

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(X_n > (x-h)\sqrt{T}) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(\max_{k \leqslant n} X_k \geqslant x\sqrt{T}) - \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(\max_{k \leqslant n} X_k \geqslant x\sqrt{T};\ \bar{\omega}_{n-1}).$$

И далее в силу (7)

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(\max_{k \leqslant n} X_k \geqslant x\sqrt{T};\ \omega_{n-1}) \leqslant \\ \leqslant 2\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(X_n > (x-h)\sqrt{T};\ \omega_{n-1}) + 3\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(\bar{\omega}_{n-1}) \leqslant \\ \leqslant \frac{6e^{3c}(1+r^2)}{(x-h)^2} + 3\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(\bar{\omega}_{n-1}).$$

Но по (3)

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\max_{k\leqslant h}\xi_k^* > x\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\right)\leqslant \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\max_{k\leqslant n}X_k > x\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\right).$$

Так как, кроме того, аналогичные неравенства справедливы и для $\min\limits_{k\leqslant n}\xi_k^*$, то мы получаем

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\max_{k\leqslant n}|\xi_k^*| > x\sqrt{T},\ \omega_{n-1}\right)\leqslant \frac{a(c, r, v)}{x^2}+6\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}(\bar{\omega}_{n-1}),$$

где $a(c, r, v)$ есть известная функция своих аргументов. Наконец, замечая, что траектории $\{\xi_k\}$ и $\{\xi_k^*\}$ совпадают в области $|z| < N\sqrt{T}$, мы при $x\leqslant N$ такую же оценку получим и для $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\max\limits_{k\leqslant n}|\xi_k| > x\sqrt{T},\ \omega_{n-1}\right)$. Тем самым лемма 1 доказана.

2. Мы можем перейти теперь к доказательству сходимости конечномерных распределений $y(t)=y_T(t)$. Нам достаточно убедиться, что для любого набора $t_1, \ldots, t_k$ из $[0, v]$ и ограниченных функций $\varphi_1 \ldots \varphi_k$ из $C(-\infty, \infty)$

$$\mathsf{M}\varphi_1(y(t_1)) \ldots \varphi_k(y(t_k))\to \mathsf{M}\varphi_1(w(t_1)) \ldots \varphi_k(w(t_k)) \tag{10}$$

при $T\to\infty$. Это следует из того, что (10) влечет за собой сходимость характеристических функций вектора $\{y(t_j)\}_{j=1}^k$. Легко убедиться далее, что для выполнения (10) в свою очередь достаточно, чтобы для любых u, s и ограниченных $\varphi\in C$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(uT)}\varphi(y(u+s))-\mathsf{M}\varphi(w^{(y)}(s))\big|_{y=y(u)}\underset{P}{\to} 0, \tag{11}$$

где

$$\mathsf{M}\varphi(w^{(y)}(s))=\int\varphi(x)P(y, s, dz),$$

а $w^{(y)}(s)$ есть диффузионный процесс с начальным значением $w^{(y)}(0)=y$.

Действительно,

$$\mathsf{M}\prod_{j=1}^{k}\varphi_j(y(t_j))=$$

$$=\mathsf{M}\varphi_1(y(t_1))\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t_1)}\varphi_2(y(t_2))\ldots \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t_{k-1})}\varphi_k(y(t_k)).$$

Но

$$\varphi_{k-1}(y(t_{k-1}))\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t_{k-1})}\varphi(y(t_k)) - \\ - \varphi_{k-1}(y)\,\mathsf{M}\varphi_k(w^{(y)}(t_k - t_{k-1})) \underset{P}{\rightarrow} 0$$

при $y = y(t_{k-1})$, а функция

$$\varphi^*_{k-1}(x) = \varphi_{k-1}(x)\,\mathsf{M}\varphi_k(w^{(x)}(t_k - t_{k-1}))$$

в силу свойств диффузионного процесса снова принадлежит $C(-\infty, \infty)$.

Поэтому мы аналогичным образом можем найти выражение, асимптотически эквивалентное

$$\varphi_{k-2}(y(t_{k-2}))\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(t_{k-2})}\varphi^*_{k-1}(y(t_{k-1})),$$

и т. д. В результате мы получим (10).

Таким образом, нам достаточно доказать (11). При этом ясно, что мы можем ограничиться рассмотрением функций φ из какого-нибудь подкласса функций, плотного в C. Например, из C_2.

Чтобы избежать введения и использования новых обозначений, нам будет удобно, считая момент времени uT начальным (процесс $\xi^*_T(s) = \xi_T(uT + s)$ обладает всеми свойствами $\xi_T(s)$), свести задачу (11) к доказательству сходимости

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\varphi(y(v)) - \mathsf{M}\varphi(w^{(y)}(v))\,|_{y=y(0)} \rightarrow 0, \qquad \varphi \in C_2, \tag{12}$$

для исходного процесса $y(u) = y_T(u)$.

3. Обозначим

$$s_k = z_k/\sqrt{T}, \qquad \zeta_k = y(0) + s_1 + \ldots + s_k, \qquad \Delta = t/T.$$

Тогда для значений t, выбранных нами в лемме 1,

$$n = U/t = v/\Delta; \qquad y(v) = y(0) + s_1 + \ldots + s_n = \zeta_n.$$

Здесь в силу условий PI—PIII на множестве $\Omega_{kt,\,t} \cap \Gamma^N_{kt} \equiv \equiv \Omega^N_k$

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} s_{k+1} = \Delta(a(\zeta_k) + r_1(\omega)), \\ &\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} s^2_{k+2} = \Delta(b(\zeta_k) + r_2(\omega)), \\ &\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}(s^2_{k+1}, |s_{k+1}| > \delta) = \Delta r_3(\omega), \end{aligned} \tag{13}$$

где $|r_i(\omega)| < \varepsilon$.

Обозначим

$$V(x, u) = \mathsf{M}\varphi(w^{(x)}(u))$$

и покажем, что при любом $M > 0$ на Ω_k^M

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} V(\zeta_{k+1}, u) - V(\zeta_k, u+\Delta)\right| \leqslant \varepsilon^* \Delta, \tag{14}$$

где $\varepsilon^* \to 0$ при $T \to \infty$ и не зависит от k, u, ω. Действительно, по условию PIV производные $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ равномерно непрерывны и ограничены в прямоугольнике $0 \leqslant u \leqslant v$, $|x| < 2M$. Поэтому при $u < v$

$$V(\zeta_k, u+\Delta) = V(\zeta_k, u) + \Delta \frac{\partial V(\zeta_k, u)}{\partial u} + o(\Delta),$$

где оценка является равномерной в Γ_{kt}^M по ω и u. С другой стороны,

$$V(\zeta_{k+1} u) = V(\zeta_k + s_{k+1}, u) =$$
$$= V(\zeta_k, u) + s_{k+1} \frac{\partial V(\zeta_k, u)}{\partial x} + \frac{s_{k+1}^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V(\zeta_k, u)}{\partial x^2} + \rho\right).$$

Здесь

$$\rho = \rho(\zeta_k, s_{k+1}, u) = \frac{\partial^2 V(\zeta_k + \beta s_{k+1} u)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V(\zeta_k, u)}{\partial x^2},$$
$$0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Отсюда в силу (13) находим, что на Ω_k^M

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} V(\zeta_{k+1}, u) = V(\zeta_k, u) + \Delta \frac{\partial V(\zeta_k, u)}{\partial x}(a(\zeta_k) + r_1) +$$
$$+ \Delta \frac{\partial^2 V(\zeta_k, u)}{2\partial x^2}(b(\zeta_k) + r_2) + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} \frac{s_{k+1}^2 \rho}{2},$$

где $|r_i(\omega)| < \varepsilon$,

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} s_{k+1}^2 \rho\right| \leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} s_{k+1}^2 \sup_{|x| < \delta_T} \left|\rho(\zeta_k, x, t)\right| +$$
$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left(s_{k+1}^2 |\rho| I\left(|s_{k+1}| > \delta_T\right)\right). \tag{15}$$

Из ограниченности производной $\partial^2 V/\partial x^2$ следует $|\rho| < c$, а из ее равномерной непрерывности в области $0 \leqslant u \leqslant v$,

$|x| < 2M$ равномерная сходимость

$$\sup_{|x|<\delta_T} |\rho(\zeta_k, x, t)| < \varepsilon_1 \to 0$$

при $\delta_T = o(1)$. Заметим теперь, что так как условие PIII справедливо при любом $\delta > 0$, то оно будет справедливым и для некоторой последовательности $\delta_T = o(1)$. Выбирая в (15) именно такое δ_T, мы получим, что на Ω_k^M

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left(s_{k+1}^2 I\left(|s_{k+1}| > \delta_T\right)\right) \leqslant \varepsilon_2\Delta,$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\left|s_{k+1}^2\rho\right| \leqslant c\left(\varepsilon_1\Delta + \varepsilon_2\Delta\right) = o(\Delta).$$

Так как $V(x, u)$ является решением (1) § 5, то сказанное дает для разности (14) требуемую оценку.

4. Докажем теперь (12). Имеем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(y(v)) = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(\zeta_n) =$$

$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} V(\zeta_n, 0)\, I\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \Omega_k^M\right) + c(\omega)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} I\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \bar{\Omega}_k^M\right),$$

где $|c(\omega)| < c$ в силу ограниченности V. Далее, в силу (14)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} V(\zeta_n, 0)\, I\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \Omega_k^M\right) = I(\Omega_0^M)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_1} I(\Omega_1^M) \ldots$$

$$\ldots I(\Omega_{n-1}^M)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{n-1}} V(\zeta_n, 0) = I(\Omega_0^M)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} I(\Omega_1^M) \ldots$$

$$\ldots \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{n-2}} I(\Omega_{n-1}^M)\, V(\zeta_{n-1}, \Delta) + \varepsilon_{n-1}(\omega)\Delta =$$

$$= \left(\text{так как } I(\Omega_k^M)\, V(\zeta_k, u) = V(\zeta_k, u) - I(\bar{\Omega}_k^M)\, V(\zeta_k, u),\right.$$

$$\left.\text{то мы можем продолжить:}\right) =$$

$$= I(\Omega_0^M)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} I(\Omega_1^M) \ldots \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{n-3}} I(\Omega_{n-2}^M)\, V(\zeta_{n-2}, 2\Delta) -$$

$$- c_{n-1}(\omega)\cdot \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcap_{k=0}^{n-2} \Omega_k^M \bar{\Omega}_{n-1}^M\right) + \varepsilon_{n-2}(\omega)\Delta + \varepsilon_{n-1}(\omega)\Delta = \ldots$$

$$\ldots = I(\Omega_0^M)\, V(\zeta_0, n\Delta) - \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}(\omega)\, \mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcap_{l=0}^{n-k-1} \Omega_l^M \bar{\Omega}_{n-k}^M\right) +$$

$$+ \Delta \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega),$$

где $|c_k(\omega)| < c$, $|\varepsilon_k(\omega)| < \varepsilon^*$. Это значит, что

$$|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(y_T(v)) - I(\Omega_0^M)V(y_T(0), v)| <$$
$$< 2c\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}\overline{\Omega}_k^M\right) + v\varepsilon^* \leqslant 2c\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}\overline{\Omega}_{kt,\,t}\right) +$$
$$+ 2c\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\max_{k\leqslant n-1}|y_T(k\Delta)| > M\sqrt{T}\right) + v\varepsilon^*.$$

Правая часть этого неравенства по лемме 1 при $T\to\infty$ выбором числа M может быть сделана сколь угодно малой. Так как $I(\Omega_c^M)\underset{P}{\to} 1$ при $T\to\infty$, $M\geqslant r$ и $V(y(0), v) = \mathsf{M}\varphi(w^{(y)}(v))|_{y=y(0)}$, то соотношение (123), а вместе с ним и сходимость конечномерных распределений $y(u)$ доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 2 § 5

В силу теоремы 1 § 5, теоремы 1 § 2 нам осталось убедиться, что для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{T\to\infty}\mathsf{P}_T(\omega_\delta(y_T) > \alpha) = 0, \tag{1}$$

где

$$\omega_\delta(y) = \sup_{|u'-u''|\leqslant\delta}|y(u') - y(u'')|.$$

1. Мы начинаем с доказательства леммы.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{y}(u)$—ломаная, построенная по точкам* $(k\Delta; y(k\Delta))$, $k=\overline{0, n}$. Тогда

$$\rho_C(y, \tilde{y})\underset{P}{\to} 0.$$

Доказательство. Напомним обозначения § 5

$$\omega(r, s) = \bigcap_{r<u\leqslant s}\Omega_{u,\,t};\quad h(r, s) = \bigcap_{r<u\leqslant s}H_u^\delta$$

(см. (1) § 5) и положим для краткости $\Gamma_k = \Gamma_{kt}^M = \{|\xi(kt)| < M\sqrt{T}\}$. При произвольном $\alpha > 0$

$$\mathsf{P}(\rho_c(y, \tilde{y}) > 4\alpha) \leqslant \mathsf{P}(\overline{\omega(0, U)}) + \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\overline{\Gamma}_k\right) + \mathsf{P}(\bar{h}(0, U)) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{P}\left(|z_{kt,\,t}| > 2\alpha\sqrt{T};\ \Omega_k^M\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{P}\left(\sup_{u\leqslant t}|z_{kt,\,u}| >\right.$$
$$\left.> 2\alpha\sqrt{T};\ \omega(kt, t)h(kt, t)\Gamma_k\right). \tag{2}$$

Так как в первой сумме по условию

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_k}\left(|z_{kt,\,t}| > 2\alpha\sqrt{T};\ \Omega_k^M\right) \leqslant \frac{\varepsilon t}{4\alpha^2 T},$$

то здесь затруднения может вызвать только оценка последней суммы.

Обозначим $\omega(s)=\omega(kt,\ s)h(kt,\ s)\Gamma_k$, $\mathfrak{N}(s)=\mathfrak{M}(kt+s)$. Тогда на множестве $\omega(s)$ при $t \leqslant u \leqslant 2t$ в силу условия PIII

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{N}(s)}\left(z_{kt+s,\,u} \leqslant -\alpha\sqrt{T}\right) \leqslant \frac{\varepsilon u}{\alpha^2 T} < \frac{1}{2} \tag{3}$$

при достаточно больших T. Так как $\xi(u)$ (а следовательно, и $z_{kt+s,\,u}$) непрерывны по u справа, то мы можем, пользуясь незначительной модификацией леммы 2 § 4, записать

$$\mathsf{P}\left(\sup_{u \leqslant t} z_{kt,\,u} > 2\alpha\sqrt{T};\ \omega(t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{P}\left(z_{kt,\,2t} > \alpha\sqrt{T};\ \omega(0)\right). \tag{4}$$

(Модификация состоит лишь в том, что первую строчку доказательства леммы 2 надо заменить неравенством $P\left(z_{kt,\,2t} > x;\ \omega(0)\right) \geqslant \mathsf{M}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(\tau)} I(\tau \leqslant t)\, I(\omega(\tau))\, I\left(z_{kt,\,2t} > x\right)$. Далее доказательство полностью сохраняется и использует неравенство (3) лишь при $t \leqslant u < 2t$.)

Неравенство (4) позволяет последнюю сумму в (2) оценивать так же, как предыдущую. Лемма доказана.

2. Заметим теперь, что

$$\omega_\delta(y) \leqslant \omega_\delta(\tilde{y}) + 2\rho_c(y,\ \tilde{y})$$

и, стало быть, условие (1) достаточно проверить лишь для процесса $\tilde{y}$. Так как

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\ \mathsf{P}(\omega_{n-1}) = 0,\quad \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left\{|z_k| > \sqrt{\delta T}\right\}\right) = 0$$

и выбором уровня M вероятность события $\gamma_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma_{kt}^M$ может быть сделана сколь угодно близкой к 1, то нам достаточно убедиться, что при любом $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\ \mathsf{P}\left(\omega_\delta(\tilde{y}) > 3\alpha;\ \omega_{n-1}\gamma_{n-1}b_n\right) \to 0$$

при $\delta \to 0$, где $b_k = \prod_{j=1}^{k} \{|z_j| < \sqrt{\delta T}\}$. При этом в силу леммы 1 мы можем рассматривать лишь δ, кратные $\Delta = t/T$. Имеем ($L = \delta/\Delta$)

$$\mathsf{P}(\omega_\delta(\tilde{y}) > 3\alpha;\ \omega_{n-1}\gamma_{n-1}b_n) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{[v/\delta]} \mathsf{P}\left(\max_{l \leqslant L} |\xi_{kL+l} - \xi_{kL}| > \alpha\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\gamma_{n-1}b_n\right).$$

Оценка этой суммы с помощью тех же приемов, которые мы использовали в лемме 1 и лемме 2 § 4 (и восходящих к неравенству Колмогорова), без труда сводится к оценке

$$\sum_{k \leqslant v/\delta} \mathsf{P}\left(|\xi_{kL+L} - \xi_{kL}| > \frac{\alpha}{2}\sqrt{T};\ \omega_{n-1}\gamma_{n-1}b_n\right). \tag{5}$$

3. Обозначив

$$\omega_{k-1}\gamma_{k-1}b_k = e_k, \quad x_j = \frac{z_{kL+j}}{\sqrt{\beta}\, t},$$

где β мы выберем позднее, мы можем слагаемое в (5) записать в виде

$$\mathsf{P}\left(|x_1 + \ldots + x_L| > \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{T}{\beta t}};\ e_n\right), \tag{6}$$

где

$$|x_l| < \sqrt{\frac{\delta T}{\beta t}}$$

на множестве $b_l \subset e_n$.

Воспользуемся теперь следующим предложением (некоторое обобщение неравенства Бернштейна — Колмогорова).

Лемма 2. *Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_L$ — случайные величины и $\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_L$ — последовательность вложенных σ-алгебр $\mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{N}_{k+1}$ такие, что $\mu_1 \ldots \mu_k$ измеримы относительно $\mathfrak{N}_k$ и на некоторых ω-множествах $e_l \in \mathfrak{N}_l$, $e_{l-1} \subset e_l$* имеем

$$|\mu_l| \leqslant Q;\ l = \overline{1, L}.$$

Пусть, кроме того,

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{l-1}}(\mu_l;\ e_l) = 0,\ \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{l-1}}(\mu_l^2;\ e_l) \leqslant 1.$$

Тогда при $x > L/Q$

$$\mathsf{P}(|\mu_1 + \ldots + \mu_L| > x;\ e_n) \leqslant 2e^{-\frac{x}{4Q}}. \tag{7}$$

Доказательство леммы основано на полном повторении рассуждений доказательства в случае $\mathsf{P}(e_l) = 1$ и независимых μ_l (см., например, [72]). Именно, надо использовать неравенства

$$\mathsf{M}(e^{\lambda\mu_l};\ e_l) < \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\left(1 + \frac{\lambda Q}{2}\right)\right\},$$

$$\mathsf{M}(e^{\lambda(\mu_1 + \ldots + \mu_L)};\ e_n) < \exp\left\{\frac{\lambda^2 L}{2}\left(1 + \frac{\lambda Q}{2}\right)\right\},$$

$$\mathsf{P}(\mu_1 + \ldots + \mu_L > x;\ e_n) \leqslant e^{-\lambda x}\mathsf{M}(e^{\lambda(\mu_1 + \ldots + \mu_L)};\ e_n),$$

в которых следует положить $\lambda = 1/Q$, а L заменить на бо́льшую величину xQ.

Чтобы воспользоваться теперь утверждением леммы 2, положим $\mathfrak{N}_l = \mathfrak{M}_{kL+l}$ и введем случайные величины

$$x_l^* = x_l - \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{l-1}}(x_l;\ e_l), \qquad l = \overline{1, n}.$$

Так как по условиям PI, PIII и свойству функции a

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{l-1}}(x_l;\ e_l)\right| < \frac{ct}{\sqrt{T\beta t}}(1 + M),$$

то на e_l при достаточно большом T

$$|x_l^*| \leqslant \sqrt{\frac{\delta T}{\beta t}} + \frac{ct(1 + M)}{\sqrt{\beta t T}} \leqslant \sqrt{\frac{\delta T}{2\beta t}} = Q.$$

Кроме того, по условию PII и свойству функции b

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{l-1}}[(x_l^*)^2;\ e_l] \leqslant \frac{c}{\beta}.$$

Выбирая $\beta = c$, мы сможем (6) записать в виде

$$\mathsf{P}\left(|x_1 + \ldots + x_L| > \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{T}{ct}};\ e_n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(|x_1^* + \ldots + x_L^*| > \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{T}{ct}} - \frac{cLt(1 + M)}{\sqrt{Tct}};\ e_n\right), \tag{8}$$

где x_k^* удовлетворяет условиям леммы 2. Выберем теперь δ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{cLt(1+M)}{\sqrt{Tct}} = \sqrt{\frac{cT}{t}}\,\delta(1+M) < \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{T}{ct}}$$

и

$$x \equiv \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{T}{ct}} > \frac{L}{Q} = \frac{\delta T}{t}\sqrt{\frac{2ct}{\delta T}} = \sqrt{\frac{2c\delta T}{t}}.$$

Тогда по лемме 2 правая часть (8) не превосходит

$$\mathsf{P}\left(|x_1^* + \ldots + x_L^*| > \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{T}{ct}};\ e_n\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{T}{ct}}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2ct}{\delta T}}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{\alpha}{8\sqrt{2\delta}}\right\}.$$

Возвращаясь к оценке $\omega_\delta(\tilde{y})$, мы видим, что сумма (5) оценивается при всех достаточно малых δ значением

$$\frac{2}{\delta}e^{-\frac{\alpha}{8\sqrt{2\delta}}} \to 0$$

при $\delta \to 0$. Это значит, что

$$\varlimsup_{T\to\infty} \mathsf{P}(\omega_\delta(\tilde{y}) > 3\alpha) \to 0 \tag{9}$$

при $\delta \to 0$ и любом $\alpha > 0$. Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что условия PV мы использовали лишь в лемме 2. Это означает, что в условиях теоремы 1 будет иметь место (9) и, стало быть, C-сходимость распределений $\tilde{y}_T$ к распределению w.

§ 8. Условия «в среднем» сходимости к неограниченной диффузии

Пусть существует последовательность $t = o(T)$ такая, что при $T \to \infty$ и при всех*) u, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ выпол-

*) Как и в формулировке теоремы 1 § 5, здесь достаточно требовать выполнения условий MI—MIII для $u = kt$, $k = 0, \ldots, U/t = n$, а под $\mathfrak{M}(kt)$ понимать σ-алгебры, порожденные $\xi(0)$, $\xi(t)$, ..., $\xi(kt)$. Эти условия легко переформулировать и для неоднородного случая (ср. с замечаниями по этому поводу в § 5).

няются следующие условия:

MI. $\mathsf{M}\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} z_{u,t} - \frac{t}{\sqrt{T}} a(\zeta(u))\right| < \varepsilon \frac{t}{\sqrt{T}}$.

MII. $\mathsf{M}\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} z_{u,t}^2 - tb(\zeta(u))\right| < \varepsilon t$.

MIII. $\mathsf{M}\left(z_{u,t}^2;\ |z_{u,t}| > \delta\sqrt{T}\right) < \varepsilon t$.

Условие MIV *совпадает с* PIV, *но требуется дополнительно, чтобы производные* $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *были равномерно непрерывны в области* $0 \leqslant u \leqslant v$, $-\infty < x < \infty$.

Для выполнения MIV, так же как и PIV, будут достаточными условия A, B, приведенные в § 5.

Теорема 1. *При выполнении условий* MI — MIV *конечномерные распределения* y_T *сходятся к распределениям* w.

Отметим, что если условия MI — MIII остаются справедливыми при $\varepsilon = o(t/T)$, то они сразу влекут за собой PI—PIII. Для $u = 0, t, \ldots, (n-1)t$ (см. замечания к теореме 1 § 5) достаточно в качестве $\Omega_{kt,t}$ взять пересечения множеств

$$\Omega_k^{(1)} = \left\{\omega:\ \left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(kt)} z_{kt,t} - \frac{t}{\sqrt{T}} a(\zeta(kt))\right| < \frac{\varepsilon_1 t}{\sqrt{T}}\right\},$$

$$\Omega_k^{(2)} = \left\{\omega:\ \left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(kt)} z_{kt,t}^2 - tb(\zeta(kt))\right| < \varepsilon_1 t\right\},$$

$$\Omega_k^{(3)} = \left\{\omega:\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(kt)}\left(z_{kt,t}^2;\ |z_{kt,t}| > \delta\sqrt{T}\right) < \varepsilon_1 t\right\},$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{T\varepsilon}{t}}$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_k \bar{\Omega}_{kt,t}\right) \leqslant \frac{3\varepsilon T}{\varepsilon_1 t} = o(1).$$

Доказательство теоремы 1. Как мы видели в п. 2 доказательства теоремы 1 § 5, для доказательства сходимости конечномерных распределений достаточно убедиться, что для любой функции $\varphi \in C_2$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\varphi(y(v)) = \mathsf{M}\varphi(w^{(y)}(v))\big|_{y=y(0)} + r(\omega), \tag{1}$$

где $r(\omega) \xrightarrow[P]{} 0$.

В обозначениях пп. 3, 4 доказательства теоремы 1 § 5 имеем

$$V(\zeta,\ u+\Delta)=V(\zeta_k,\ u)+\Delta V'_t(\zeta_k,\ u)+r_0(\omega)\Delta,$$

где $|r_0(\omega)|<\varepsilon_0=o(1)$, ε_0 не зависит от u и ω,

$$V(\zeta_{k+1},\ u)=V(\zeta_k,\ u)+\xi_{k+1}V'_x(\zeta_k,\ u)+\\+\frac{\xi_{k+1}^2}{2}\left(V''_{xx}(\zeta_k,\ u)+\rho(\zeta_k,\ \xi_{k+1},\ u)\right),$$

$$\rho(\zeta_k,\ \xi_{k+1},\ u)=V''_{xx}(\zeta_k+\beta\xi_{k+1},\ u)-V''_{xx}(\zeta_k,\ u),\ |\beta|<1.$$

И, далее (см. (13) § 6),

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}V(\zeta_{k+1},\ u)-V(\zeta_k,\ u+\Delta)=-r_0(\omega)\Delta+\Delta V'_x(\zeta_k,\ u)r_1(\omega)+\\+\frac{1}{2}\Delta V''_{xx}(\zeta_k,\ u)r_2(\omega)+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}\frac{\xi_{k+1}^2\rho}{2},$$

где по условиям MI — MII

$$\mathsf{M}\,|r_i(\omega)|<\varepsilon,\qquad i=1,\ 2.$$

Так как V''_{xx} равномерно непрерывна и ограничена, то

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}|\xi_{k+1}^2\rho|=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}(\xi_{k+1}^2|\rho|I(|\xi_{k+1}|\leqslant\delta_T))+\\+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}(\xi_{k+1}^2|\rho|I(|\xi_{k+1}|>\delta_T))\leqslant\\\leqslant\varepsilon^*\Delta(b(\zeta_k)+r_2(\omega))+\Delta r_3(\omega),$$

где $\varepsilon^*=o(1)$, $\mathsf{M}r_3(\omega)<\varepsilon^{**}=o(1)$, а $\delta_T\to 0$ есть некоторая последовательность, при которой остается выполненным условие MIII. Отсюда получаем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}V(\zeta_{k+1},\ u)-V(\zeta_k,\ u+\Delta)=\Delta r(\omega).$$

Здесь $\mathsf{M}|r(\omega)|<\varepsilon_4=o(1)$ и ε_4 не зависит от u и k. Поэтому при очевидном соглашении относительно обозначений $r^{(k)}(\omega)$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(y(v)) = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_1}\,\ldots\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{n-1}}V(\zeta_n,\,0) =$$
$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\,\ldots\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{n-2}}V(\zeta_{n-1},\,\Delta) + \Delta\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}r^{(n)}(\omega) = \ldots$$
$$\ldots = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}V(\zeta_1,\,(n-1)\Delta) + \Delta\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\sum_{k=2}^{n} r^{(k)}(\omega) =$$
$$= V(y(0),\,v) + \Delta\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\sum_{k=1}^{n} r^{(k)}(\omega).$$

Так как

$$V(y(0),\,v) = \mathsf{M}\varphi(w^{(y)}(v))\,|_{y=y(0)}$$

и $\mathsf{M}\left|\Delta\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\sum\limits_{k=1}^{n} r^{(k)}(\omega)\right| \leqslant v\varepsilon_4 = o(1)$, то соотношение (1), а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

§ 9. Сходимость к диффузионным процессам с отражением на границе

Формулируемые ниже утверждения, так же как и теоремы 1, 2 § 5, используют условия «по вероятности»:

Условия PRI — PRIII. *Пусть процесс $\xi_T(u)$ неотрицателен, а условия* PI — PIII *выполнены лишь в области* $\omega \in \left\{\zeta(u) = \dfrac{\xi_T(u)}{\sqrt{T}} > \varepsilon^* \text{ при любом } \varepsilon^* > 0\right\}$ *).

PRIV. *Существует переходная функция $P(x,\,t,\,E)$ некоторого марковского процесса $w_R(t) \geqslant 0$ такая, что функция*

$$V(x,\,u) = \int \varphi(y)\,P(x,\,t,\,dy) = \mathsf{M}\varphi\left(w_R^{(x)}(t)\right),\quad \varphi \in C_2,$$

имеет в области $0 \leqslant u \leqslant v$, $0 \leqslant x < \infty$ непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V}{\partial u}$ и является решением второй граничной задачи уравнения (2) § 5 *с условиями*

$$V(x,\,0) = \varphi(x),\quad x \geqslant 0,\quad \frac{\partial V(0,\,t)}{\partial x} = 0.$$

---

*) В дальнейшем мы будем считать, так же как это делали раньше, что $\varepsilon^* = o(1)$ при $T \to \infty$.

Кроме того, при некотором $c > 0$

$$|a(x)| < c(1 + |x|), \quad b(x) < c.$$

Процесс w_R, определяемый условием PRIV, является, как известно, диффузионным процессом на полупрямой, с отражением от границы $\zeta = 0$ с коэффициентом диффузии b и коэффициентом сноса a. Как и прежде, $w_R^{(x)}(u)$ означает процесс с начальным значением $w_R^{(x)}(0) = x$.

Можно показать, что условия A и B §§ 5 и 3 на функции a и b (определенные на $[0, \infty)$) являются достаточными для выполнения PRIV.

Условие PRV *совпадает с* PV.

Нам осталось сформулировать условие отражения, определяющее поведение ξ в области, близкой к началу координат.

PRVI. *Для любого достаточно малого* $\varepsilon^{**} > 0$ (*или для любой достаточно медленно убывающей последовательности* ε^{**}) *существуют* $p > 0$, $Q > 0$ *такие, что для* $t_1 \sim (\varepsilon^{**})^2 TQ$ *в области* $\Omega_{u,t} \cap \{|\zeta(u)| < \varepsilon^{**}\}$ *выполняется*

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(z_{u,t_1} > \varepsilon^{**}\sqrt{T}\right) > p.$$

Теорема 1. *Пусть* $y_T(0)$ *имеет собственное предельное распределение* p_0. *Тогда при выполнении условий* PRI — PRVI *имеет место С-сходимость процессов* $y_T(u) = \frac{\xi(uT)}{\sqrt{T}}$ *к процессу* w_R *с начальным распределением* p_0.

Смысл условий PRI — PRV достаточно ясен. Условие PRVI обеспечивает отсутствие поглощения в области $\zeta(u) < \varepsilon^{**}$ (в которой условия PI — PIII, вообще говоря, не выполняются). Попав в эту область, частица с положительной вероятностью через время $o(T)$ выходит оттуда.

Нетрудно понять, что все условия PRI — PRVI существенны для утверждения теоремы.

Доказательство. Как мы уже отмечали, везде в условиях PRI — PRIII, PRV, PRVI мы можем произвольно малые числа ε, δ, ε^*, ε^{**} считать последовательностями, сходящимися к 0, при $T \to \infty$. При этом, чтобы в дальнейшем несколько упростить обозначения, мы будем вместо нескольких последовательностей ε, δ, ε^*,

$\varepsilon^{**}/2$ рассматривать лишь одну $\delta = \delta_T$, определенную, например, равенством

$$\delta_T = \max(\varepsilon, \delta, \varepsilon^*, \varepsilon^{**}/2).$$

Общая схема доказательства остается прежней. Мы будем использовать обозначения §§ 6, 7 и считать, что $h = U/t$ целое.

1. Лемма 1. *При выполнении условий* PRI — PRVI

$$\mathsf{P}\left(\max_{k \leqslant n} \xi_k > x\sqrt{T}\right) \to 0 \textit{ при } x \to \infty,\ T \to \infty.$$

Доказательство. С помощью некоторых преобразований над процессом мы сведем задачу к лемме 1 § 6. Сначала тем же способом, что и в лемме 1 § 6 по последовательности $z_k = \xi_k - \xi_{k-1}$, построим последовательность z_k^*. Элементы этой последовательности будут на множестве $\Omega_{kt,\,t} \cap \{\zeta(kt) > \delta_T\}$ удовлетворять соотношениям (1) § 6. Кроме того, в силу замечания в § 7 $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}}\left(\inf_{k \leqslant n} \xi_k^* > \gamma\sqrt{T}\right)$ при фиксированном $\gamma > 0$ будет сходиться к $P\left(\inf_{u \leqslant v} w(u) > \gamma\right)$, где w — соответствующий диффузионный процесс.

Нам достаточно показать, что

$$P\left(\sup_{k \leqslant n} \xi_k^* > x\sqrt{T}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,\ T \to \infty. \tag{1}$$

Введем последовательность X_k следующим образом. Пусть $\gamma > 0$. Мы положим

$$X_k = \xi_k^*,\ k = \overline{0, n}, \text{ если } \inf_{k \leqslant n} \xi_k^* \geqslant \gamma\sqrt{T}.$$

Если

$$k_1 = \min\left\{k : \xi_k^* < \gamma\sqrt{T}\right\} \leqslant n,$$

то мы полагаем

$$X_k = \begin{cases} \xi_k^* & \text{при} \quad k \leqslant k_1, \\ \xi_{k_1}^* & \text{при} \quad k_1 \leqslant k \leqslant l_1, \end{cases}$$

где $l_1 = \min\left\{k > k_1 : \xi_k^* \geqslant (1+\gamma)\sqrt{T}\right\}$. Мы будем говорить при $l_1 \leqslant n$, что в точке l_1 закончился первый период, и называть $D_1 = \xi_{l_1}^* - \xi_{k_1}^*$ *дефектом первого периода*, Далее,

$$X_k = \xi_k^* - D_1 \text{ при } k \geqslant l_1, \text{ если } \inf_{l_1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k^* \geqslant \gamma \sqrt{T}.$$

Если же

$$k_2 = \min\{k \geqslant l_1 : \xi_k^* < \gamma \sqrt{T}\} \leqslant n,$$

то мы полагаем опять

$$X_k = \xi_{k_2}^* - D_1, \qquad k = k_2, \ldots, l_2,$$

где $l_2 = \min\{k > k_2 : \xi_k^* \geqslant (1+\gamma)\sqrt{T}\}$. В точке l_2 закончился второй период. Дефект второго периода $\xi_{l_2}^* - \xi_{k_2}^*$ обозначим D_2. При $k \geqslant l_2$ и до начала третьего периода полагаем

$$X_k = \xi_k^* - D_1 - D_2 \text{ и т. д.}$$

Выберем теперь некоторое целое K. Если начало $(K+1)$-го периода наступит раньше момента $U : k_{K+1} < n$, то мы полагаем

$$X_k = \xi_k^* - \sum_{j=1}^{K} D_j, \qquad k = k_{K+1}, \ldots, n.$$

Пусть $x_k = X_k - X_{n-1}$, $m_k = \max_{i \leqslant k} |z_i^*|$. Тогда ясно, что

$$X_k \geqslant \xi_k^* - K(\sqrt{T} + 2m_k), \qquad k = 0, \ldots, n,$$

и всюду на $\Omega_{kt,t}$

$$
\begin{gathered}
|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} x_{k+1}| \leqslant \frac{ct}{\sqrt{T}}\left(1 + \frac{X_k + K(\sqrt{T} + 2m_k)}{\sqrt{T}}\right), \\
\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} x_{k+1}^2 < ct, \quad c = \text{const}, \\
\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k}(x_{k+1}^2, |x_{k+1}| > \delta_T \sqrt{T}) = r_3(\omega) < \varepsilon.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Если вместо $\Omega_{kt,t}$ ввести множества $\Omega_{kt,t}^* = \Omega_{kt,t} \cap \cap \{m_k < \delta\sqrt{T}\} \in \mathfrak{M}_k$, относительно которых, очевидно, также можно считать, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \Omega_{kt,t}^*\right) \to 1,$$

то на них первые неравенства в (2) можно записать в виде

$$\left| \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_k} x_{k+1} \right| < \frac{ct}{\sqrt{T}} \left(1 + \frac{X_k + K(1 + 2\delta_T)}{\sqrt{T}} \right). \tag{3}$$

Мы можем перейти теперь к оценке (1). Обозначим ν_n — число полных периодов, помещающихся на интервале $[0, n]$, и заметим, что при некотором $q < 1$

$$\mathsf{P}(\nu_n > k) < q^k. \tag{4}$$

Действительно, как уже отмечалось, $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\inf\limits_{k \leqslant n} \xi_k^* > \gamma \sqrt{T}\right)$ при $\xi_0^* \geqslant (1 + \gamma)\sqrt{T}$ сходится при $T \to \infty$ к некоторому положительному пределу. Поэтому после окончания каждого периода существует равномерно положительная вероятность того, что этот период был последним. Это и влечет за собой (4).

Пусть задано $\alpha > 0$. Выберем K так, чтобы $\mathsf{P}(\nu_n > K) < \alpha/3$. Тогда при достаточно большом T $\left(\omega_{n-1}^* = \bigcap\limits_{k=0}^{n-1} \Omega_{kt,\,t}^*\right)$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \leqslant n} \xi_k^* > x\sqrt{T}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(\nu_n > K) + \mathsf{P}(\bar{\omega}_{n-1}^*) + \mathsf{P}\left(\sup \xi_k^* > x\sqrt{T};\right.$$
$$\left.\nu_n \leqslant K,\ \omega_{n-1}^*\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\alpha}{3} + \mathsf{P}\left(\sup_{k \leqslant n} X_k > x\sqrt{T} - K(1 + 2\delta)\sqrt{T}\right).$$

В силу (2), (3) при оценке последнего слагаемого мы находимся в условиях леммы 1 § 6 (сравни с (1) § 6). Пользуясь этой леммой, мы сможем выбором x при выбранном нами K добиться, чтобы оцениваемое слагаемое не превосходило $\alpha/3$. Лемма доказана.

По существу утверждение леммы 1 представляется ясным: в область $\zeta > x$, $x \to \infty$ мы попадаем, как правило, из области $\delta < \zeta < x$ (значимые скачки маловероятны), где действуют те же законы, что и для процессов в условиях теорем 1, 2 § 5. Столь же естественным является и другое предложение,

2. Лемма 2. *Пусть* $\nu=\min\{k\geqslant 0\colon \xi_k\leqslant\delta_T\sqrt{T}\}$, $l\leqslant A\frac{\delta_T^2T}{t}$, $A=\mathrm{const}>0$. *Тогда на множестве* $\{\nu=k-l\}\in\mathfrak{M}_{k-l}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{k-l}}(\xi_k^2;\ h((k-l)t,\ kt))<c\delta_T^2T,\quad c=\mathrm{const},$$

где событие $h(u,s)$ *определено в* (1) § 5.

Доказательство этой леммы использует преобразования процесса, применявшиеся в лемме 1 (но на уровнях $\delta_T\sqrt{T}$ и $3\delta_T\sqrt{T}$ вместо γ и $1+\gamma$) и оценки дисперсии в лемме 1 § 6. Так как это доказательство не выходит за рамки уже использовавшихся приемов, то мы его опускаем.

3. Перейдем к сходимости распределений. Пусть, как и прежде,

$$y_T(v)=\zeta_n=y_T(0)+s_1+\ldots+s_n,\quad s_k=z_k/\sqrt{T}. \tag{5}$$

Нашей целью является доказательство сходимости (см. (12) § 6)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(\zeta_n)-\mathsf{M}\varphi(w_R^{(x)}(v))\big|_{x=\zeta_0}\to 0,\qquad \varphi\in C_2. \tag{6}$$

Слагаемые s_k в сумме (5) по-прежнему удовлетворяют соотношениям (13) § 6, но лишь на множестве $\Omega_k\cap\{\zeta_k>\delta_T\}$. Поэтому в неравенствах (14) § 6, приводивших нас прежде к (12) § 6, вблизи границы $\zeta=0$ могут возникать «невязки». Чтобы их компенсировать, следует несколько изменить последовательность $\zeta_0\ldots\zeta_n$ и функцию V.

Пусть $\nu=\min\{k\colon \zeta_k\leqslant\delta_T\}$, $L=\frac{4\delta_T^2TQ}{t}$. Число L, не ограничивая общности, можно считать целым. Построим последовательность $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ следующим образом (ниже индекс T у δ_T для краткости опущен):

$$\lambda_0=\zeta_0,\ \ldots,\ \lambda_{\nu-1}=\zeta_{\nu-1},\ \lambda_\nu=\delta,$$
$$\lambda_{\nu+1}=\delta-\delta_1,\ \ldots,\ \lambda_{\nu+L}=\delta-\delta_1L=0,$$
$$\lambda_{\nu+L+1}=\max(\delta,\ \zeta_{\nu+L+1}).$$

Здесь $\delta_1=\delta/L$. Последующие значения $\lambda_{\nu+L+2}\ldots$ определяются по тому же правилу — так, как если бы $\zeta_{\nu+L+1}$ была первым элементом последовательности $\zeta_0,\zeta_1,\ldots$

Пусть $\mathfrak{N}_k$ — σ-алгебра, порожденная событиями

$$\{\mu_k=j,\ B\},\ j=k,\ k-1,\ \ldots,\ \max(0,\ k-L);\ B\in\mathfrak{M}_j,$$

где μ_k есть случайная величина

$$\mu_k=\begin{cases} k, & \text{если}\quad \lambda_k\geqslant\delta, \\ k-l, & \text{если}\quad \lambda_k=\delta-l\delta_1,\qquad l=0,\ \ldots,\ L. \end{cases}$$

Ясно, что λ_k измерима относительно $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{N}_0=\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}(0)$, $\mathfrak{N}_k\subset\mathfrak{N}_{k+1}$. σ-алгебру $\mathfrak{N}_k$ можно представлять себе как порожденную событиями, относящимися к траектории процесса $\xi(u)$ вплоть до момента первого попадания последовательности λ_j, $j=\max(0,k-L)$, ..., k, в область $\lambda_j\leqslant\delta$.

Прежде чем переходить к доказательству (6), нам нужно вычислить условные относительно $\mathfrak{N}_k$ моменты приращений

$$\varkappa_{k+1}=\lambda_{k+1}-\lambda_k.$$

4. На разных ω-множествах эти моменты ведут себя по-разному. Поэтому мы рассмотрим отдельно случаи:

a) Если $\omega\in\Omega_k\cap\{\lambda_k>2\delta\}$, то в силу условия PRIII поведение первых двух моментов $\varkappa_{k+1}$ не отличается от поведения моментов ξ_{k+1} и определяется формулами (13) § 6.

b) Если $\omega\in\Omega_k\cap\{\delta<\lambda_k\leqslant2\delta\}$, то $M_{\mathfrak{N}_k}\varkappa_{k+1}^2<ct$.

c) Если $\omega\in\Omega_k\cap\{\lambda_k=\delta-l\delta_1\}$, $l=0,\ 1,\ \ldots,\ L-1$,

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}f(\varkappa_{k+1})=f(-\delta_1)$$

для любой измеримой функции f.

d) Если $\omega\in\Omega_k\cap\{\lambda_k=0\}$, то по условию PRVI

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\varkappa_{k+L}\geqslant2\delta p+\delta(1-p)=\delta(1+p).$$

По лемме 2 на множестве $\{\lambda_k=0\}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}(\varkappa_{k+1}^2;\ h((k-L)t,\ kt))<c\delta^2.$$

5. Вместо функции $V(x,\ u)$, являющейся решением второй граничной задачи для (1) § 5, мы рассмотрим функцию

$$V_\alpha(x,\ u)=V(x,\ u)+\alpha u+g(x),$$

где $g(x)$ обладает свойствами

$$g(0)=0,$$
$$g'(x)=g_1\delta>0 \quad \text{при} \quad x\in(0,\ \delta),$$
$$g'(x)=-g_2\delta<0 \quad \text{при} \quad x\in(\delta,\ 3\delta).$$

На $[\delta,\ \infty]$ функция $g(x)$ выбирается так, чтобы она была дважды непрерывно дифференцируема,

$$|g(x)|<g_2\delta, \qquad |g'(x)|<g_2\delta, \qquad |g''(x)|<g_2\delta.$$

Нетрудно убедиться, что такой выбор g всегда возможен. Значения g_1 и g_2 мы выберем позже.

Чтобы доказать теперь (6), следуя схеме § 6, нам было бы желательно установить, что для любых $\alpha>0$, $M>0$ при достаточно большом T на $\Omega_k^M=\Omega_{kt}\ {}_t\Gamma_{kt}^M$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k} V_\alpha(\lambda_{k+1},\ u)-V_\alpha(\lambda_k,\ u+\Delta)\leqslant 0 \tag{7}$$

при всех k, u.

6. а) На множестве $A_a=\Omega_k^M\{\lambda_k\geqslant 2\delta\}$ проверка этого неравенства (см. п. 4а) происходит так же, как доказательство (14) в § 6. Дополнительно к разности (14) § 6 здесь появится слагаемое

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}(g(\lambda_k+\varkappa_{k+1})-g(\lambda_k))-\alpha\Delta=$$
$$=g'(\lambda_k)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\varkappa_{k+1}+g''(\lambda_k+\beta\varkappa_{k+1})\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\varkappa_{k+1}^2-\alpha\Delta=$$
$$=O(\delta\Delta)-\alpha\Delta, \qquad |\beta|\leqslant 1,$$

которое, очевидно, будет главной частью разности (7) и будет отрицательной.

b) На множестве $A_b=\Omega_k^M\{\delta<\lambda_k\leqslant 2\delta\}$ имеем

$$V_\alpha(\lambda_k,\ u+\Delta)=$$
$$=V(\lambda_k,\ u)+\alpha u+\alpha\Delta+g(\lambda_k)+\Delta V'_u(\lambda_k,\ u)+\Delta r_0(\omega),$$
$$V_\alpha(\lambda_k+\varkappa_{k+1},\ u)=V(\lambda_k,\ u)+\alpha u+V'_x(\lambda_k,\ u)\varkappa_{k+1}+$$
$$+\frac{1}{2}V''_{xx}(\lambda_k+\beta\varkappa_{k+1},\ u)\varkappa_{k+1}^2+g(\lambda_k+\varkappa_{k+1}),$$

где $|r_0(\omega)|<\varepsilon=o(1)$, $|\beta|<1$.

Так как на ω-множестве A_b

$$\varkappa_{k+1}=\begin{cases} s_{k+1}, & \text{если} \quad s_{k+1}\geqslant \delta-\lambda_k,\\ \delta-\lambda_k, & \text{если} \quad s_{k+1}<\delta-\lambda_k,\end{cases}$$

и $\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\left(\varkappa_{k+1}^2;\ |\varkappa_{k+1}|>\delta_T\right)=o(\Delta)$, то

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}V_\alpha(\lambda_{k+1},u)-V_\alpha(\lambda_k,u+\Delta)=-\alpha\Delta+o(\Delta)+$$
$$+V'_x(\lambda_k,u)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\left[(\delta-\lambda_k-s_{k+1})\,I\,(s_{k+1}<\delta-\lambda_k)\right]+$$
$$+V''_{xx}(\lambda_k,u)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\left[\left((\delta-\lambda_k)^2-s_{k+1}^2\right)I\,(s_{k+1}<\delta-\lambda_k)\right]+$$
$$+\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}(g(\lambda_{k+1})-g(\lambda_k)).$$

Но на A_b выполняются соотношения

$$|V'_x(\lambda_k,u)|<2\delta V'',\quad \text{где}\quad V''=\sup_{\substack{x\leqslant 1\\ u\leqslant v}}|V''(x,u)|,$$

$$3\delta\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}(\delta-\lambda_k-s_{k+1})\,I\,(s_{k+1}<\delta-\lambda_k)\geqslant$$
$$\geqslant-\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\left[\left((\delta-\lambda_k)^2-s_{k+1}^2\right)I\,(s_{k+1}<\delta-\lambda_k)\right]\geqslant 0,$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}g(\lambda_k+\varkappa_{k+1})-g(\lambda_k)=g_2\delta\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\varkappa_{k+1}+o(\Delta)=$$
$$=o(\Delta)-g_2\delta\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\left((\delta-\lambda_k-s_{k+1})\,I\,(s_{k+1}<\delta-\lambda_k)\right).$$

Здесь оценка, так же как и в (8), равномерна по ω, u, k. Видим теперь, что разность (8) не превосходит

$$-\alpha\Delta+o(\Delta)+\delta\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}\left((\delta-\lambda_k+s_{k+1})\,I\,(s_{k+1}<\delta-\lambda_k)\right)\times$$
$$\times[V''+3V''-g_2]\leqslant 0,$$

если только положить

$$g_2\geqslant 4V''.$$

c) На множестве $A_c=\Omega_k^M\{\lambda_k=\delta-l\delta_1\}$, $l=\overline{0,\ L-1}$,

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}V_\alpha(\lambda_{k+1},u)-V_\alpha(\lambda_k,u+\Delta)=$$
$$=-\delta_1V'_x(\lambda_k,u)+o(\delta_1^2)-\Delta V'_u(\lambda_k,u)-\alpha\Delta+o(\Delta)-\delta_1g_1\delta.$$

Так как

$$\delta_1\delta=\frac{\delta^2}{L}=\frac{\Delta}{4Q},$$

то полученное значение также может быть сделано отрицательным при

$$g_1 > V'' + 4QV',$$

где $V' = \sup\limits_{u \leqslant v} |V'_u(0, u)|$.

d) Наконец, на множестве $A_d = \Omega_k^M \{\lambda_k = 0\}$, обозначив временно для краткости $h((k-L)t, kt) = h$, получим

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}[V_\alpha(\varkappa_{k+1}, u); h] - V_\alpha(0, u+\Delta) =$$
$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{k-L}}[V''_{xx}(\beta\varkappa_{k+1}, u)\varkappa^2_{k+1}; h] - V'_u(0, u)\Delta + o(\Delta) -$$
$$- \alpha\Delta + \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}[g(\varkappa_{k+1}); h].$$

В силу п. 4d это выражение не превосходит

$$V''c\delta^2 + o(\delta^2) + g(\delta) + g'(\delta)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}[(\varkappa_{k+1} - \delta); h] +$$
$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}[g''(\delta + \beta(\varkappa_{k+1} - \delta))(\varkappa_{k+1} - \delta)^2; h] \leqslant$$
$$\leqslant V''c\delta^2 + o(\delta^2) + g_1\delta^2 - g_2\delta^2 p \leqslant 0$$

при $g_2 > \dfrac{cV'' + g_1}{p}$ и достаточно большом T. Через β мы обозначали здесь числа из $[0, 1]$.

Таким образом, мы установили, что имеет место несколько иное, чем (7), соотношение. Именно, если обозначить

$$B_k = h((k-L)t, kt) \cup \{\lambda_k \neq 0\}\, \bar{h}((k-L)t, kt),$$

то

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}(V_\alpha(\lambda_{k+1}, u), B_k) \leqslant V_\alpha(\lambda_k, u+\Delta).$$

Рассуждая совершенно аналогичным образом, мы получим для функции $V^*_\alpha = V - \alpha u - g(x)$ обратные неравенства при любом $\alpha > 0$.

7. Мы можем перейти теперь к заключительной части доказательства сходимости (8). Имеем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(\lambda_n) = \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_0} V_\alpha(\lambda_n, 0) - \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_0} g(\lambda_n),$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_0} V_\alpha(\lambda_n, 0) = \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_0} V_\alpha(\lambda_n, 0)\, I\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \Omega_k^M\right) I\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) - \rho_0(\omega),$$

где

$$|\rho_0(\omega)| < c\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcup_0^{n-1} \overline{\Omega}_k^M\right) + c\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_0}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}_k\right).$$

Так как

$$I(\Omega_k^M)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_k}[V_\alpha(\lambda_{k+1}, u)\,I(B_k)] \leqslant I(\Omega_k^M)\,V_\alpha(\lambda_k, u+\Delta) = \\ = V_\alpha(\lambda_k, u+\Delta)\left(1 - I(\overline{\Omega}_k^M)\right),$$

то

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_0} V_\alpha(\lambda_n, 0)\, I\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \Omega_k^M\right) I\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \\ = I(\Omega_0^M)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_0} I(\Omega_1^M)\,I(B_1)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_1}\ldots \\ \ldots I(\Omega_{n-1}^M)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{n-1}} V_\alpha(\lambda_n, 0)\,I(B_n) \leqslant \\ \leqslant I(\Omega_0^M)\,M_{\mathfrak{N}_0} I(\Omega_1^M)\,I(B_1)\,M_{\mathfrak{N}_1}\ldots \\ \ldots I(\Omega_{n-2}^M)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{N}_{n-2}} V_\alpha(\lambda_{n-1}, \Delta)\,I(B_{n-1}) - \rho_n(\omega) \leqslant \ldots \\ \ldots \leqslant V_\alpha(\lambda_0, v) - \sum_{k=1}^{n} \rho_k(\omega).$$

Здесь

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \rho_k(\omega)\right| \leqslant c\mathsf{P}_{\mathfrak{N}_0}\left(\bigcup_0^{n-1} \overline{\Omega}_k^M\right).$$

Резюмируя сказанное, мы находим, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(\lambda_n) \leqslant V_\alpha(\lambda_0, v) + \rho^M = V(\lambda_0, v) + \alpha v + g(v) + \rho^M,$$

где $g(v) \xrightarrow[P]{} 0$ при $T \to \infty$, а ρ^M по лемме 1 и условию теоремы может быть выбором M сделано сколь угодно малым. Если воспользоваться аналогичным обратным неравенством и произвольностью α и M, то можно заключить, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(\lambda_n) \xrightarrow[P]{} V(\lambda_0, v) = \mathsf{M}\varphi\left(w_R^{(y)}(v)\right)\Big|_{y=y(0)}.$$

К этому же пределу сходится и $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}\varphi(\zeta_n)$, так как

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}|\varphi(\zeta_n) - \varphi(\lambda_n)| < c\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}|\zeta_n - \lambda_n|,$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0}|\zeta_n - \lambda_n| \leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} \sum_{l=0}^{L} \mathsf{M}_{\mathfrak{N}_n} I(\lambda_n = \delta - l\delta_1)\,|\zeta_n - \lambda_n| \leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}_0} \sum_{l=0}^{L} I(\lambda_n = \delta - l\delta_1)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}_{n-l}}(\delta + |\zeta_n|),$$

В силу леммы 2 эта сумма не превосходит $c\delta$ при некотором $c > 0$. Сходимость конечномерных распределений доказана.

8. Схема доказательства C-сходимости (проверка второго условия теоремы 1 § 2) также остается прежней. В п. 1 § 7 достаточно рассматривать процесс $\xi^* = \max(\delta_T, \xi)$. В п. 3 следует использовать конструкции леммы 1. Более подробные рассмотрения здесь излишни, так как все необходимые элементы доказательств этого пункта содержатся в изложенных параграфах.

Замечание. Прием, использованный нами при доказательстве теоремы в этом параграфе и состоящий в замене функции $V(x, u)$ на $V_\alpha(x, u)$ (см. п. 5), можно с успехом применять также для модификации теорем 1, 2 § 5 и теорем §§ 9, 10 в следующем направлении. Может оказаться, что проверка условий I—III этих теорем в δ-окрестности некоторой точки D затруднительна или вовсе невозможна. Модификация состоит в том, что если фиксированное $\delta > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то в области $|\zeta(u) - D| \leqslant \delta$ достаточно вместо I—III требовать, чтобы выполнялось условие «отражения» PRVI в обе стороны: для достаточно малого $\varepsilon^{**} > 0$ существуют $p > 0$, $Q > 0$ такие, что для $t_1 \sim (\varepsilon^{**})^2 TQ$ в области $\Omega_{u,t} \cap \{|\zeta(u) - D| < \varepsilon^*\}$ выполняется

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(z_{u,\,t_1} > \varepsilon^{**}\sqrt{T}\right) > p,$$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(z_{u,\,t_1} < -\varepsilon^{**}\sqrt{T}\right) > p.$$

При этом предполагается, что выполнено условие PV об отсутствии больших скачков.

Следуя рассуждениям п. 5 приведенного выше доказательства (разумеется, следует выбирать другую функцию $g(x)$), можно убедиться, что такое нарушение условий I—III в малой области $|\zeta(u) - D| \leqslant \delta = \varepsilon^{**}$ не повлияет ни на сходимость процессов, ни на характер предельного распределения. Ясно также, что все сказанное останется справедливым в том случае, если подобное нарушение условий I—III имеет место не в одной, а в нескольких точках.

§ 10. Условия сходимости к диффузии с двумя отражающими границами

1. Знакомство с доказательством теоремы 1 § 9 делает совершенно ясной как конструкцию условий «по вероятности» для сходимости к диффузионному процессу с двумя отражающими границами, так и доказательство приводимой ниже теоремы.

Теорема 1. *Пусть значения процесса* $\zeta(u)=\dfrac{\xi_T(u)}{\sqrt{T}}$ *заключены в полосе* $0\leqslant\zeta(u)\leqslant R$, *и пусть выполнены условия* PRRI — PRRIII, *которые состоят в предположении, что в области* $\omega\in\{R-\varepsilon^*\geqslant\zeta(u)\geqslant\varepsilon^*\}$ *при любом* $\varepsilon^*>0$ *справедливы соотношения* PI — PIII.

Пусть выполнены также следующие условия:

PRRIV. *Существует переходная функция* $P(x, t, E)$ *некоторого марковского процесса на* $[0, R]$ *такая, что функция*

$$V(x, u)=\int_0^R\varphi(y)\,P(x, u, dy),\qquad \varphi\in C_2,$$

имеет непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial u}$ *при* $0\leqslant u\leqslant 1$, $0<x<R$ *и является решением граничной задачи*

$$V(x, 0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial V(0, u)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial V(R, u)}{\partial x}=0$$

уравнения (1) § 5. *Функции* a *и* b *ограничены на* $[0, R]$.

Процесс w_{RR}, определяемый этим условием, является диффузионным процессом с отражением от границ 0 и R. Для него a и b являются соответственно коэффициентами сноса и диффузии.

Условие PRRV *совпадает с* PV.

Мы будем считать выполненным также условие PRRVI, *которое состоит в том, что процессы* ζ *и* $R-\zeta$ *удовлетворяют условию* PRVI.

При выполнении этих условий распределения $y_T(u)=\dfrac{\xi_T(uT)}{\sqrt{T}}$ *C-сходятся к распределению* w_{RR}.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 1 § 9 и отличается от него только упрощениями, поскольку в условиях этого параграфа $\sup\limits_{u \leqslant v} y_T(u) \leqslant R$.

Отметим еще раз, что использованные выше методы без значительных изменений могут быть применены к изучению сходимости к диффузионным процессам, неоднородным во времени, и к процессам с отражением от гладких криволинейных границ. Случай криволинейных границ сводится к случаю прямолинейных заменой переменных.

§ 11. Примеры

Основные примеры использования в теории массового обслуживания изложенных в этой главе результатов содержатся в главах II, III. В этом параграфе мы рассмотрим лишь несколько простых задач, иллюстрирующих проверку условий в теоремах о сходимости к вырожденному процессу и процессам диффузии.

1. *Обобщенный процесс восстановления.* Пусть $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0, \ldots$; $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — две независимые между собой стационарные последовательности независимых, случайных величин. Блуждающая частица перемещается скачкообразно в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_1 + \tau_2, \ldots$ соответственно на расстояния $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Нас интересует положение $X(t)$ частицы в момент времени t, $t \in [0, U]$. Если

$$\eta(t) = \min\{k:\ t_k = \tau_k + \ldots + \tau_k > t\},$$

то

$$X(t) = \nu_1 + \ldots + \nu_{\eta(t)}.$$

Для схемы серий распределения τ_j и ν_j, а следовательно, и распределение $X(t)$ зависят от параметра T. Обозначим

$$A = \frac{\mathsf{M}\nu}{\mathsf{M}\tau}$$

(индекс j у величин ν_j и τ_j мы для краткости иногда будем опускать) и найдем условия, при которых процесс

$$\xi(t) = \xi_T(t) = X(t) - At$$

будет сходиться при соответствующих нормировках к вырожденному и диффузионному процессам.

Мы воспользуемся следующими хорошо известными фактами из теории восстановления и теории суммирования случайного числа случайных величин.

1. Пусть

$$\mathsf{M}\tau > c > 0, \tag{1}$$

$$\mathsf{M}(\tau\colon \tau > N) \to 0, \qquad \mathsf{M}(|\nu|\colon |\nu| > N) \to 0 \tag{2}$$

при $N \to \infty$ равномерно по T. (Условия (2), очевидно, всегда будут выполнены, если $\mathsf{M}\tau^{1+\gamma} < \mathrm{const}$, $\mathsf{M}|\nu|^{1+\gamma} < \mathrm{const}$ при некотором $\gamma > 0$.) Тогда имеет место сходимость

$$\left|\frac{\eta(t)}{t} - a\right| \xrightarrow[P]{} 0, \qquad \left|\frac{\xi(t)}{t}\right| \xrightarrow[P]{} 0 \tag{3}$$

вместе с первыми моментами:

$$\mathsf{M}\left|\frac{\eta(t)}{t} - a\right| \to 0, \qquad \mathsf{M}\frac{|\xi(t)|}{t} \to 0 \tag{4}$$

при $t = t(T) \to \infty$, где $a = (\mathsf{M}\tau)^{-1}$.

2. Пусть выполнено (1) и

$$\sigma_\tau^2 = \mathsf{D}\tau \geqslant c > 0, \qquad \mathsf{M}(\tau^2;\ \tau \geqslant N) \to 0 \tag{5}$$

при $N \to \infty$ равномерно по T (для выполнения последнего условия достаточно, чтобы $\mathsf{M}\tau^{2+\gamma} < \mathrm{const}$ при некотором $\gamma > 0$). Тогда распределение

$$\eta^* = \frac{\eta(t) - at}{\sigma_\tau \sqrt{ta^3}}$$

сходится к нормальному вместе со вторыми моментами:

$$\mathsf{M}(\eta^*)^2 \to 1.$$

Отсюда в свою очередь следует такое же утверждение о сходимости распределений

$$\xi^* = \frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{6}$$

если только

$$\sup_T \mathsf{M}(\nu^2\colon |\nu| > N) \to 0 \tag{7}$$

при $N \to \infty$ и

$$\sigma^2 = a\mathsf{D}\nu + a^3\mathsf{D}\tau(\mathsf{M}\nu)^2 \geqslant c > 0. \tag{8}$$

Мы можем доказать теперь следующие два основных утверждения.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1), (2), *то* $\frac{\xi(tT)}{T} \underset{C}{\Rightarrow} 0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1), (5), (7), (8), *то процесс*

$$\frac{\xi(tT)}{\sigma\sqrt{T}}$$

С-сходится к стандартному винеровскому процессу на $[0, v]$ $(U = Tv)$.

Доказательство теоремы 1 использует теорему 1 § 4. В качестве σ-алгебр $\mathfrak{M}(u)$, фигурирующих в этой теореме, мы рассмотрим σ-алгебры, порожденные случайными величинами

$$\eta(u); \qquad \tau_1, \ldots, \tau_{\eta(u)}; \qquad \nu_1, \ldots, \nu_{\eta(u)-1},$$

а в качестве $\Omega_{u,\theta}$ рассмотрим множества

$$\Omega_{u,\theta} = \{\chi(u) \leqslant s\}, \qquad \chi(u) = t_{\eta(u)} - u.$$

Приращения

$$z_{u,t} = \xi(t+u) - \xi(u)$$

распределены, очевидно, так же, как

$$-A\chi(u) + \xi^*(t - \chi(u)),$$

где $\xi^*(\cdot)$ не зависит от $\chi(u)$ и имеет то же распределение, что и процесс $\xi(\cdot)$. Но при каждых v и t таких, что

$$0 \leqslant v \leqslant s, \qquad s = o(\theta), \qquad t \leqslant \theta,$$

случайная величина

$$z^* = -Av + \xi^*(t - v) \quad (\xi^*(t-v) = 0 \text{ при } t - v \leqslant 0) \tag{9}$$

обладает в силу (3), (4) свойствами

$$\frac{z^*}{\theta} \underset{P}{\rightarrow} 0, \qquad \mathsf{M}\left|\frac{z^*}{\theta}\right| \rightarrow 0 \tag{10}$$

при $\theta \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что на множестве $\Omega_{u,\theta}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} |z_{u,t}| < \theta\varepsilon(\theta), \qquad \varepsilon(\theta) = o(1).$$

Так как в силу слабой сходимости распределений z^*/θ

$$\mathsf{M}\left(\left|\frac{z^*}{\theta}\right|;\ |z^*|\leqslant\varepsilon\theta\right)\to 0,$$

то из (10) следует также, что на множестве $\Omega_{u,\theta}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(|z_{u,t}|;\ |z_{u,t}|>\varepsilon\theta)<\theta\varepsilon_1(\theta),\qquad \varepsilon_1(\theta)=o(1).$$

Чтобы закончить проверку условий теоремы 1 § 4, нам остается показать, что

$$\mathsf{P}\left(\max_{j\leqslant\eta(T)}|\nu_j|>\delta T\right)\to 0$$

и что s и θ можно выбрать так, чтобы

$$\begin{gathered} s=o(\theta),\qquad \theta=o(T),\\ \mathsf{P}\left(\bigcap_k\Omega_{k\theta,\theta}\right)\geqslant\mathsf{P}\left(\bigcap_u\Omega_{u,\theta}\right)\geqslant\mathsf{P}\left(\max_{j\leqslant\eta(T)}\tau_j\leqslant s\right)\to 1\end{gathered}\tag{11}$$

при $T\to\infty$. Поскольку $\eta(T)$ с вероятностью, близкой к 1, не превосходит cT при некотором c, то нам достаточно добиться, чтобы

$$cT\mathsf{P}(\tau_1>s)\to 0,\qquad cT\mathsf{P}(|\nu_1|>\delta T)\to 0.\tag{12}$$

Так как

$$T\mathsf{P}(\tau_1>s)\leqslant\frac{T}{s}\cdot\gamma^2(s,T),\quad\text{где}\quad\gamma^2(s,T)=\mathsf{M}(\tau;\ \tau\geqslant s),$$

$$T\mathsf{P}(|\nu_1|>\delta T)\leqslant\frac{1}{\delta}\mathsf{M}(|\nu_1|;\ |\nu|>\delta T)\to 0,$$

то мы получим требуемые соотношения (11) и (12), если

$$\theta=T\sqrt{\gamma(s,T)},$$

а s равно решению s_0 уравнения

$$s=T\gamma(s,T)$$

(чтобы избежать тривиальных затруднений, мы можем считать, что $\gamma(s,T)$ непрерывно по s и что $s_0\to\infty$ при $T\to\infty$. Решение $s_0=o(T)$ существует и единственно, поскольку $\gamma(s,T)\downarrow 0$ при $s\to\infty$).

Таким образом, условия теоремы 1 § 4 выполнены и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 основано на теореме 2 § 5. Здесь σ-алгебра $\mathfrak{M}(u)$ и множество $\Omega_{u,\theta}$ будут иметь прежний смысл. В силу тождества Вальда

$$\mathsf{M}\eta(t)=\frac{t+\mathsf{M}\chi(t)}{\mathsf{M}\tau},\quad \mathsf{M}\xi(t)=\mathsf{M}\nu\mathsf{M}\eta(t)-At=A\mathsf{M}\chi(t),$$

где при всех t (см. [60])

$$\mathsf{M}\chi(t)\leqslant\frac{3}{2}\frac{\mathsf{M}\tau^2}{\mathsf{M}\tau}\leqslant c.$$

Отсюда и из (9) следует, что на множестве $\Omega_{u,\theta}$

$$|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}z_{u,\theta}|=O(s).$$

Из слабой сходимости распределений (6) (вместе со вторыми моментами) и из представления (9) следует, что на множестве $\Omega_{u,\theta}$ при $N=N(T)\to\infty$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}z^2_{u,\theta}=O(s^2)+\theta,$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(z^2_{u,\theta};\ |z_{u,\theta}|>N\sqrt{\theta}\right)=O(s^2)+o(\theta).$$

Таким образом, чтобы обеспечить выполнение условий теоремы 2 § 5, s и θ должны удовлетворять соотношениям

$$s=o\left(\frac{\theta}{\sqrt{T}}\right),\qquad \theta=o(T). \tag{13}$$

Кроме того, должно выполняться

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_u\Omega_{u,\theta}\right)\geqslant\mathsf{P}\left(\max_{j\leqslant\eta(T)}\tau_j\leqslant s\right)\to 1,$$

$$\mathsf{P}\left(\max_{j\leqslant\eta(T)}|\nu_j|<\delta\sqrt{T}\right)\to 1.$$

Аналогично предыдущему, дополнительные вероятности здесь оцениваются с помощью выражений

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left(\max_{j\leqslant cT}\tau_j>s\right)\leqslant cT\mathsf{P}(\tau_1>s)\leqslant\frac{cT}{s^2}\mathsf{M}(\tau^2;\ \tau>s),\\ &\mathsf{P}\left(\max_{j\leqslant cT}|\nu_j|>\delta\sqrt{T}\right)\leqslant\frac{c}{\delta^2}\mathsf{M}\left(|\nu^2|;\ |\nu|>\delta\sqrt{T}\right)\to 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Чтобы обеспечить сходимость к 0 (14) и выполнение (13), положим s равным решению уравнения

$$s=\sqrt{T}\,\gamma(s,T),\quad\text{где}\quad \gamma^3(s,T)=\mathsf{M}(\tau^2;\ \tau\geqslant s)$$

(при тех же, что и раньше упрощающих предположениях, которые избавляют от тривиальных затруднений). Тогда при $\theta = T\sqrt{\gamma(s, T)}$ соотношение (13) очевидно, а правая часть (14) не превосходит $\gamma(s, T) \to 0$ при $s = s(T) \to \infty$. Теорема доказана.

2. *Сумма обобщенных процессов восстановления.* В задачах массового обслуживания часто приходится иметь дело с «суммой» некоторого числа m независимых процессов восстановления $\xi^{(i)}(t)$, $i = 1, \ldots, m$, описанного выше вида (скажем, для описания суммарной работы m каналов обслуживания, каждый из которых управляется последовательностями независимых величин и не имеет остановок).

Нетрудно установить, что процесс

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{m} \xi^{(i)}(t), \qquad \xi^{(i)}(t) = X^{(i)}(t) - A^{(i)}t,$$

$$A^{(i)} = \frac{\mathsf{M}\nu^{(i)}}{\mathsf{M}\tau^{(i)}},$$

где $X^{(i)}(t)$ означает i-й процесс восстановления, будет удовлетворять теоремам 1, 2 предыдущего пункта, если случайные величины $\tau^{(i)}$, $\nu^{(i)}$, описывающие i-й процесс, будут удовлетворять условиям этих теорем и если под значением σ^2 в теореме 2 понимать

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\mathsf{D}\nu^{(i)}}{\mathsf{M}\tau^{(i)}} + \frac{\mathsf{M}^2\nu^{(i)}\mathsf{D}\tau^{(i)}}{\mathsf{M}^3\tau^{(i)}} \right] \geqslant c > 0. \tag{15}$$

При этом первые из условий (5) будут излишними.

Доказательство этого факта не вызывает затруднений и полностью следует пути, по которому шло доказательство теорем 1, 2. Надо лишь в качестве $\mathfrak{M}(u)$ рассмотреть произведение σ-алгебр $\mathfrak{M}^{(i)}(u)$, отвечающих слагаемым $\xi^{(i)}(t)$, и положить

$$\Omega_{u,\theta} = \prod_{i=1}^{m} \{\chi^{(i)}(u) \leqslant s\},$$

где $\chi^{(i)}(u)$ есть величина $\chi(u)$ для процесса $\xi^{(i)}(t)$.

3. *Нагруженные автономные системы обслуживания.* Утверждения предыдущих двух пунктов позволяют нам

уже сейчас описать поведение длины очереди для нагруженных систем с так называемым автономным обслуживанием (см. [18]).

Мы будем предполагать, что вызовы поступают в систему по m_1 независимым каналам, в каждом из которых через интервалы времени $\tau_j^{(i)}$ проходят вызовы группами объемов $\nu_j^{(i)}$, $i=1, \ldots, m_1$; $j=1, 2, \ldots$ Обслуживание ведется в m_2 каналах, при этом в i-м канале (для удобства обозначений будем считать, что i пробегает значения $m_1+1, \ldots, m_1+m_2=m$) обслуживание начинается только в моменты $0, \tau_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}+\tau_2^{(i)}, \ldots$ независимо от входного потока и на обслуживание принимается соответственно $\nu_1^{(i)}, \nu_2^{(i)}, \ldots$ вызовов (или меньше, если очередь оказалась недостаточно велика; считается, что поступившие вызовы образуют очередь в ожидании обслуживания). Если $\{\tau_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\nu_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$, $i=1, \ldots, m$, образованы независимыми величинами и независимы между собой, то процесс восстановления

$$X(t)=\sum_{i=1}^{m_1} X^{(i)}(t)-\sum_{i=m_1+1}^{m} X^{(i)}(t),$$

где $X^{(i)}(t)$ порожден последовательностью $\{\tau_j^{(i)}, \nu_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$, будет процессом того типа, который был рассмотрен в п. 2.

Если предположить для простоты, что начальное значение очереди $q(0)$ в момент $t=0$ равно 0, то, как показано в [18], значение очереди $q(t)$ в момент t будет равно

$$q(t)=X(t)-\inf_{[0,\, t]} X(u).$$

Нагрузка системы характеризуется числом

$$A=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\mathsf{M}\nu^{(i)}}{\mathsf{M}\tau^{(i)}}-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\mathsf{M}\nu^{(i)}}{\mathsf{M}\tau^{(i)}},$$

которое при больших t и u равно приближенно

$$\frac{1}{u}\left[\mathsf{M}\left(X(t+u)-X(t)\right)\right].$$

Это есть, очевидно, разность между средним количеством вызовов, поступающих в систему за время u, и средним количеством вызовов, которые система может обслужить за это время при бесконечной очереди.

Мы будем говорить, что система находится в *нагруженном состоянии*, если в схеме серий (когда все управляющие последовательности $\{\tau_j^{(i)}\}$, $\{\nu_j^{(i)}\}$ зависят от параметра $T \to \infty$)

$$A = A(T) \to 0.$$

Рассмотрим интервал времени $[0, U]$, $U = vT$ и предположим, что $\{\tau_j^{(i)}, \nu_j^{(i)}\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 п. 1 (с заменой первого условия (5) на (15)). Тогда процесс

$$y(t) = \frac{X(tT) - AtT}{\sigma\sqrt{T}}$$

будет C-сходиться к стандартному винеровскому процессу. Но

$$\frac{q(tT)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[X(tT) - \inf_{[0,\, t]} X(uT)\right] =$$
$$= y(t) + \frac{At\sqrt{T}}{\sigma} - \inf_{[0,\, t]}\left(y(u) - \frac{Au\sqrt{T}}{\sigma}\right).$$

Предположим теперь, что при $T \to \infty$

$$A\sqrt{T} \to \alpha, \qquad |\alpha| < \infty.$$

Тогда, так как функционал $x(t) + at - \inf\limits_{[0,\, t]}(x(u) + au)$ является непрерывным в C и измеримым, то мы получаем, что распределение $\dfrac{q(tC)}{\sigma\sqrt{T}}$ сходится при $T \to \infty$ к распределению

$$w(t) + \frac{at}{\sigma} - \inf_{[0,\, t]}\left(w(u) - \frac{au}{\sigma}\right) \tag{16}$$

(или, что то же, к распределению $\sup\limits_{[0,\, t]}\left(w(u) + \dfrac{au}{\sigma}\right)$, если речь идет только об одномерных распределениях). Отсюда уже легко получить явные формулы для распределения $q(u)$ при больших u (см. [18], [70]). В частности, если $A \to 0$, а $\alpha < 0$ и велико по абсолютному значению, то, пользуясь тем, что $\mathsf{P}(w(u) < x + u,\ 0 < u < \infty) = 1 - e^{-2x}$, получаем

$$\mathsf{P}\left(q(T) > \frac{\sigma x}{|A|}\right) \approx \mathsf{P}\left(\frac{q(T)}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{x}{\alpha}\right) \approx$$
$$\approx \mathsf{P}\left(\sup_{[0,\,1]}\left(w(u) + \frac{\alpha u}{\sigma}\right) > \frac{x}{\alpha}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\sup_{\left[0,\,\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right]}(w(t) + t) > \frac{x}{\sigma}\right) \approx e^{-\frac{2x}{\sigma}}.$$

Утверждение (16) сохранится и для систем с обычным (не автономным) обслуживанием. Однако проверка условий теоремы 1 § 5 в этом случае занимает несколько больше места (см. пример в § 6 гл. III).

4. *Сумма процессов восстановления с приращениями, зависящими от времен восстановления.* Допустим, что в примере п. 2 в i-м процессе восстановления $\nu_j^{(i)}$ линейно зависят от промежутков $\tau_j^{(i)}$. Точнее, пусть процесс с номером i управляется последовательностью независимых векторов $(\tau_1^{(i)}, \nu_1^{(i)}), (\tau_2^{(i)}, \nu_2^{(i)}), \ldots$, где

$$\nu_j^{(i)} = b^{(i)}\tau_j^{(i)} + \Delta_j^{(i)},$$

$\Delta_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены и не зависят от $\tau_j^{(i)}$. Процессы восстановления $X^{(i)}(t)$ по-прежнему предполагаются независимыми между собой. Так как

$$X^{(i)}(t) = \nu_1^{(i)} + \ldots + \nu_{\eta(t)}^{(i)} =$$
$$= b^{(i)}(t + \chi(t)) + \Delta_1^{(i)} + \ldots + \Delta_{\eta(t)}^{(i)}$$

(здесь $\eta(t) = \min(k\colon \tau_1^{(i)} + \ldots + \tau_k^{(i)} > t)$, $\chi(t) = \tau_1^{(i)} + \ldots$ $\ldots + \tau_{\eta(t)}^{(i)} - t)$, то легко видеть, что здесь сохранятся аналоги теорем 1, 2 п. 1 о C-сходимости к 0 или к процессу диффузии при выполнении соответствующих условий на $\{\tau_j^{(i)}\}$ и $\{\Delta_j^{(i)}\}$ (условия на $\nu_j^{(i)}$ надо заменить такими же условиями на $\Delta_j^{(i)}$ и считать вместо (15), что

$$\sum\left[\frac{\mathsf{D}\Delta^{(i)}}{\mathsf{M}\tau^{(i)}} + \frac{\mathsf{M}^2\Delta^{(i)}\mathsf{D}\tau^{(i)}}{\mathsf{M}^3\tau^{(i)}}\right] \geqslant c > 0\Big).$$

§ 12. Связь условий теоремы 1 § 5 с условиями сильного перемешивания

1. *Стационарные последовательности.* Пусть $\{\zeta_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — стационарная в узком смысле последовательность*), $\mathsf{M}\zeta_k = 0$, удовлетворяющая условиям *равномерно сильного перемешивания* (р. с. п.)

$$\sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{k} \\ B \in \mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}}} |\mathsf{P}(B/A) - \mathsf{P}(B)| \leqslant \psi(n) \to 0 \tag{1}$$

при $n \to \infty$, где $\mathfrak{M}_k^l$, $l \geqslant k$, есть σ-алгебра, порожденная $\zeta_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_l$. Это условие можно записать также в виде

$$\left|\mathsf{P}_{\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}}(B) - P(B)\right| \leqslant \psi(n)$$

п. в. и для всех $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$.

Мы хотим показать, что р. с. п. вместе с условиями

$$\mathsf{M}|\zeta_k|^{2+\delta} \leqslant c < \infty, \qquad \delta > 0 \tag{2}$$

(мы завышаем здесь несколько требования на моменты, чтобы упростить выкладки), и условием

$$\mathsf{M}Z_n^2 = n\sigma^2 + o(n), \qquad 0 < \sigma < \infty, \qquad Z_n = \zeta_1 + \ldots + \zeta_n, \tag{3}$$

влекут за собой выполнение условий теоремы 1 § 5 для процесса $\xi(t) = Z_{[t]}$. Обратное, разумеется, не верно, поскольку из условий теоремы 1 § 5 вообще не следует существования моментов ζ_k и их сумм. Слабая же зависимость требуется лишь в весьма специальной форме — для первых двух моментов приращений. Таким образом, условия р. с. п. вместе с (2), (3) являются более сильными, чем условия слабой зависимости в теореме 1 § 5.

Аналогичная картина имеет место, очевидно, и для процессов $\zeta(t)$ с непрерывным временем.

Пусть ξ измерима относительно $\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}$, а величина η измерима относительно $\mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$. Тогда, если

$$\mathsf{M}|\xi|^p < \infty, \quad \mathsf{M}|\eta|^q < \infty; \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*) Все рассмотрение сохраняется для последовательности $\{\zeta_k\}_0^{\infty}$.

то из (1) следует, что (см. [48])

$$|\mathsf{M}\xi\eta - \mathsf{M}\xi\cdot\mathsf{M}\eta| \leqslant 2\psi^{1/p}(n)\,\mathsf{M}^{1/p}|\xi|^p\,\mathsf{M}^{1/q}|\eta|^q. \qquad (4)$$

Отсюда находим, в частности, следующую оценку для корреляционной функции $R(k) = \mathsf{M}\zeta_j\zeta_{j+k}$:

если $\mathsf{M}|\zeta_j|^2 < \infty$, то $|R(k)| \leqslant 2\sqrt{\psi(k)}\,\mathsf{M}|\zeta_j|^2$.

В силу того, что (см. [48])

$$\mathsf{M}Z_n^2 = nR(0) + 2\sum_{j=1}^{n}(n-j)R(j) = \sigma^2 n(1 + o(1)),$$

где

$$\sigma^2 = R(0) + 2\sum_{j=1}^{\infty} R(j),$$

мы получаем, что для выполнения (3) достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{1/2}(k) < \infty$$

и σ было положительным.

Если же выполнено (2), то, полагая в (4) $q = 2+\delta$, $\xi = \zeta_j$, $\eta = \zeta_{j+k}$, мы получим в качестве достаточного условия для (3) сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}(k) < \infty.$$

В приводимом ниже утверждении о достаточности условий (1)—(3) для выполнения условий слабой зависимости теоремы 1 § 5 мы можем считать также, что рассматривается *схема серий*, когда распределения $\{\zeta_k\}_{-\infty}^{\infty}$ зависят от некоторого параметра (например, от n в формулируемой ниже теореме). Переход к схеме серий мы должны сопровождать требованием *равномерности* в условиях (1)—(3).

Обозначим

$$z_{k,m} = Z_{k+m} - Z_k, \qquad \mathfrak{M}_{-\infty}^{k} = \mathfrak{M}(k).$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1)—(3), *то существуют последовательность* $m = o(n)$ *и множества*

$\Omega_k \in \mathfrak{M}(k)$, *удовлетворяющие условию*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{0\leqslant jm\leqslant n}\Omega_{jm}\right)\to 1$$

при $n\to\infty$, *на которых*

I) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(k)} z_{k,m} = \dfrac{m}{\sqrt{n}}\, r_1(\omega)$,

II) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(k)} z_{k,m}^2 = m\sigma^2(1+r_2(\omega))$,

III) *при любом* $N=N(n)\to\infty$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(k)}\left(z_{k,m}^2;\ |z_{k,m}|>N\sqrt{m}\right)<\varepsilon m,$$

где $|r_1(\omega)|<\varepsilon$, $|r_2(\omega)|<\varepsilon$, ε — *произвольное фиксированное число.*

Очевидно, что выполнение этих условий будет означать выполнение условий теоремы 1 § 5 при $a=0$, $b=\sigma^2$.

Нетрудно видеть, что в нашем случае стационарность $\{\zeta_k\}$ и возможность выбирать m так, что $M=n/m$ растет сколь угодно медленно, позволяют несколько упростить вид условий I—III, избавившись в них от наличия двух параметров m и n. Именно, сформулированные условия будут выполнены, если найдется множество $\Omega=\Omega(n)$, обладающее свойством $\mathsf{P}(\Omega)\to 1$, на котором

I′) $|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)} Z_n| < \sqrt{n}\, r_1(\omega)$,

II′) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)} Z_n^2 = n\sigma^2(1+r_2(\omega))$,

III′) при любом $N=N(n)\to\infty$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\left(Z_n^2;\ |Z_n|>N\sqrt{n}\right)<\varepsilon n,$$

где $r_i(\omega)$ и ε имеют прежний смысл.

Чтобы получить из I′—III′ условия I—III, мы разделим отрезок $[1, n]$ на конечное число $M=n/m$ одинаковых отрезков $[1, m]$, $[m+1, 2m]$, ... (считая для простоты, что M целое). Построим на каждом из этих отрезков свое множество Ω, на котором справедливы I′—III′ (с заменой начала отсчета и числа n на m). Мы получим тогда, что условия I—III будут выполнены для любого конечного $M=n/m$, а следовательно, и для достаточно медленно растущих $n/m\to\infty$.

Для доказательства I′—III′ мы будем пользоваться следующим утверждением ([48]).

Теорема 2. *При выполнении условий* (1)—(3) *к последовательности* Z_n *применима центральная предельная теорема*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{Z_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

При этом существует постоянная c, *для которой*

$$\mathsf{M}\,|\,z_n\,|^{2+\delta} < c\sigma^{2+\delta} n^{1+\delta/2}. \tag{5}$$

Нам понадобится также следующее неравенство, вытекающее из (4). Если η измерима относительно $\mathfrak{M}_k^{\infty}$, $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$, $\mathsf{P}(A) > 0$, то

$$|\,\mathsf{M}(\eta/A) - \mathsf{M}\eta\,| \leqslant 2\mathsf{P}(A)^{-1/q}(\mathsf{M}\,|\,\eta\,|^{q})^{1/q}\,\psi(k)^{1/p}. \tag{6}$$

Мы сразу получим это соотношение, если положим в (4) $\xi = I(A)$ и разделим обе части в (4) на $\mathsf{P}(A)$.

Докажем сначала выполнение I′. Имеем при $m < n$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)} Z_n = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)} Z_m + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)} z_{m,\,n-m}. \tag{7}$$

Здесь первое слагаемое, которое мы обозначим через ξ_1, имеет момент порядка $2+\delta$:

$$\mathsf{M}\,|\,\xi_1\,|^{2+\delta} \leqslant \mathsf{M}\,|\,Z_m\,|^{2+\delta} \leqslant c\sigma^{2+\sigma} m^{1+\delta/2},$$

поэтому

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \geqslant \sqrt{n}\cdot\varepsilon(n)\right) \leqslant c\sigma^{2+\delta}\left(\frac{m}{n}\right)^{1+\delta/2}\varepsilon(n)^{-2-\delta}. \tag{8}$$

Функцию $\varepsilon(m) = o(1)$ мы выберем позднее.

Для оценки второго слагаемого в (7), которое мы обозначим через η_1, воспользуемся (6) при $q = 2 + \delta$.

При любом $A \in \mathfrak{M}(0)$, $\mathsf{P}(A) > 0$ получаем

$$\left|\frac{1}{\mathsf{P}(A)}\int_A \eta_1\,d\mathsf{P}(\omega)\right| = |\,\mathsf{M}(\eta_1/A)\,| \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{P}(A)^{-\frac{1}{2+\delta}}\left(\mathsf{M}\,|\,Z_{n-m}^{2+\delta}\,|\right)^{\frac{1}{2+\delta}}\psi(m)^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} \leqslant$$
$$\leqslant 2c^{\frac{1}{2+\delta}}\sigma\mathsf{P}(A)^{-\frac{1}{2+\delta}}\sqrt{n}\,\psi(m)^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}. \tag{9}$$

Возьмем в качестве A какое-нибудь множество A_1, для которого

$$P(A_1) = \psi(m)^{\delta/2}$$

и на котором значения η_1 превосходят или равны значениям η_1 на дополнении $\bar{A}_1$ (не ограничивая общности, можно считать, что такое множество всегда существует). Поскольку из (9) следует, что среднее значение η_1 на $\bar{A}_1$ не превосходит

$$2c^{\frac{1}{2+\delta}}\sigma\sqrt{n\psi(m)} \equiv \gamma(n),$$

то это означает, что $\eta_1 \leqslant \gamma(n)$ на $\bar{A}_1$.

Выберем теперь в качестве $\Omega \in \mathfrak{M}(0)$ множество $\Omega_1 = \bar{A}_1 \cap \{\xi_1 < \sqrt{n}\,\varepsilon(n)\}$. Тогда в силу (8)

$$P(\bar{\Omega}_1) \leqslant \psi(m)^{\delta/2} + c\sigma^{2+\delta}\left(\frac{m}{n}\right)^{1+\delta/2}\varepsilon(n)^{-2-\delta} \qquad (10)$$

и для доказательства I′ (т. е. того, что $\xi_1 + \eta_1 = o(\sqrt{n})$ на Ω и $\mathsf{P}(\bar{\Omega}) \to 0$) нам нужно добиться, чтобы правая часть в (10) сходилась к 0, $\varepsilon(n) \to 0$, $m \to \infty$ при $n \to \infty$. Этого можно достичь при любой последовательности $m = m(n) \to \infty$, $m = o(n)$, положив

$$\varepsilon(n) = \left(\frac{m}{n}\right)^{1/4}.$$

Обратимся теперь к условию II′. Имеем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}Z_n^2 = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}Z_m^2 + 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}z_{m,\,n-m}Z_m + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}z_{m,\,n-m}^2. \qquad (11)$$

Здесь аналогично предыдущему для первого слагаемого, которое мы обозначим ξ_2, получаем

$$\mathsf{M}\xi_2^{1+\delta/2} \leqslant \mathsf{M}\,|Z_m|^{2+\delta},$$

$$\mathsf{P}(\xi_2 > n\varepsilon(n)) \leqslant c\sigma^{2+\delta}\left(\frac{m}{n}\right)^{1+\delta/2}\varepsilon(n)^{-1-\delta/2}. \qquad (12)$$

Чтобы оценить последнее слагаемое в (11), обозначим его η_2 и рассмотрим неравенство (см. (6) при $q = 1 + \delta/2$)

$$|\,\mathsf{M}(\eta_2/A) - \mathsf{M}\eta_2\,| \leqslant 2\mathsf{P}(A)^{-\frac{2}{2+\delta}}c^{\frac{2}{2+\delta}}\sigma^2 n\psi(m)^{\frac{\delta}{2+\delta}}.$$

Принцип выбора множества A здесь остается прежним, а вероятность его можно положить равной

$$\mathsf{P}(A) = \psi(m)^{\delta/4}. \tag{13}$$

Выбранное множество обозначим A_2. Сказанное будет означать, что на множестве $\bar{A}_2$ величина η_2 отличается от $\mathsf{M}\eta_2 = \mathsf{M}z^2_{m,\,n-m} = \sigma^2(n-m)(1+o(1))$ не более чем на

$$2c^{\frac{2}{2+\delta}}\sigma^2 n\psi(m)^{\frac{\delta}{2(2+\delta)}}.$$

Положим $\Omega_2 = \bar{A}_2 \cap \{\xi_2 < n\varepsilon(u)\}$, мы построим требуемое множество, поскольку на нем $\xi_2 + 2\sqrt{\xi_2\eta_2} = o(n)$, $\eta_2 = \sigma^2 n + o(n)$ и, следовательно,

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)} Z_n^2 = \sigma^2 n(1+o(1)).$$

Надо лишь $m \to \infty$, $m = o(n)$ и $\varepsilon(n) = o(1)$ выбрать так, чтобы оценка сверху для $\mathsf{P}(\bar{\Omega}_2)$ (см. (12), (13))

$$\psi(m)^{\delta/4} + c\sigma^{2+\delta}\left(\frac{m}{n}\right)^{1+\delta/2}\varepsilon(n)^{-1-\delta/2} \to 0.$$

Для этого достаточно положить

$$\varepsilon(n) = \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2}.$$

Нам осталось проверить условие III′. Оно будет легко следовать из II′ и существования множества Ω_3, $\mathsf{P}(\Omega_3) \to 1$, на котором

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(0)}\left(\frac{Z_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du \tag{14}$$

(тогда, очевидно, при любом N на множестве Ω_3

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\left(\frac{Z_n^2}{\sigma^2 n};\ |Z_n| < \sigma N\sqrt{n}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} u^2 e^{-u^2/2}\,du\Bigg).$$

Вместе с условием II′ это будет означать выполнение III′ на множестве $\Omega_3' = \Omega_2 \cap \Omega_3$.

Доказательство (14) проводится совершенно аналогично предыдущему (с некоторыми упрощениями), и мы предоставляем его читателю.

Если рассмотреть теперь в качестве Ω множество

$$\Omega=\prod_{j=1}^{3}\Omega_j,$$

то $\mathsf{P}(\Omega)\to 1$ и на нем будут выполнены все условия I′—III′. Теорема доказана.

Замечание 1. Более слабое, чем (1), условие *сильного перемешивания*

$$\sup_{\substack{A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}\\ B\in\mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}}}|\mathsf{P}(AB)-\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)|\leqslant\psi(n)\to 0$$

при $n\to\infty$ также влечет за собой выполнение условий теоремы 1 § 5, если дополнительно к (2), (3) потребовать (или доказать) соотношение (5) и неравенство $\psi(u)\leqslant cn^{-\gamma}$ при подходящем $\gamma>0$ (см. [48]).

Замечание 2. Утверждение о C-сходимости процессов $\frac{\xi(tn)}{\sigma\sqrt{n}}$ к винеровскому при выполнении условий (1)—(3) по-видимому, проще доказывать не с помощью теоремы 2 § 5, а путем проверки достаточного условия типа Колмогорова — Прохорова (см. (4) § 2). Действительно, на основании неравенства Чебышева нам достаточно убедиться, что при всех $k\gg 1$

$$\mathsf{M}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k\right|^{\alpha}\leqslant c\left(\frac{k}{n}\right)^{1+\beta}$$

при некоторых $\alpha>0$, $\beta>0$ (мы положили $F(t)=t$). Это неравенство в силу (5) будет выполнено, если положить $\alpha=2+\delta$. Тогда

$$\mathsf{M}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k\right|^{2+\delta}\leqslant n^{-1-\delta/2}c\delta^{2+\delta}k^{1+\delta/2}=c\sigma^{2+\gamma}\left(\frac{k}{n}\right)^{1+\delta/2}.$$

Такого же рода замечание можно было бы сделать и относительно доказательства сходимости конечномерных распределений (исследовать эту сходимость с помощью теоремы 2 было бы проще непосредственно, чем доказывая теорему 1). Однако нашей целью являлось выяснение соотношений между условиями р. с. п. и условиями § 5.

2. *Процесс восстановления, порожденный последовательностью, удовлетворяющей условиям равномерно сильного перемешивания.* Предыдущий пример можно рассматривать как обобщенный процесс восстановления (см. пример 1 § 11), у которого $\tau_k = 1$, а ν_k зависимы. Пусть теперь $\nu_k = 1$, а τ_k зависимы и удовлетворяют условиям р. с. п.

Именно, мы рассмотрим ступенчатый процесс $\eta(u)$ со стационарными приращениями такой, что интервалы постоянства (или интервалы между скачками $\eta(u)$) имеют те же распределения, что и величины τ_j из последовательности $\{\tau_j\}$, удовлетворяющей условиям р. с. п. Чтобы придать сказанному точный смысл, мы введем в рассмотрение величину перескока $\chi(t)$, равную расстоянию от точки t до момента первого после t скачка $\eta(u)$ (если в момент t был скачок, то мы полагаем $\chi(t) = 0$). Последующие после $t + \chi(t)$ интервалы постоянства мы обозначим τ_1^*, τ_2^*, ... Мы *будем предполагать* *), *что при любом t последовательность $\{\tau_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ распределена так же, как $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$.*

Интересно отметить, что приращения так определенного процесса $\eta(u)$ уже не будут, вообще говоря, удовлетворять условиям р. с. п. Это будет так даже в том случае, когда τ_k независимы. Действительно, пусть, например, $\mathsf{P}(\tau_k > x) = (1 + x)^{-\alpha}$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 1$. Тогда, $\chi(t)$ при любом t имеет распределение

$$\mathsf{P}(\chi(t) > x) = \int_x^{\infty} \frac{\mathsf{P}(\tau_1 > u)}{\mathsf{M}\tau_1}\, du = (1 + x)^{-\alpha+1},$$

и процесс $\eta(u)$ при $u > 0$ можно записать в виде

$$\eta(u) = \min\{k\colon \chi(0) + \tau_1 + \ldots + \tau_k > u\}, \qquad u \geqslant 0,$$

где $\chi(0)$ и $\{\tau_j\}$ независимы. Положим $A = \{\chi(0) > n\}$, $B = \{\eta(3n) - \eta(2n) = 0\}$ и обозначим, как и в предыдущем пункте $\mathfrak{M}_a^l$, σ-алгебру, порожденную величинами

*) Остается невыясненным, для каких стационарных последовательностей $\{\tau_j\}$ с конечным $\mathsf{M}\tau_j$ (помимо последовательностей с независимыми элементами) существует процесс $\eta(u)$ с таким свойством.

$\eta(u)$ при $u \in [a, b]$. Тогда

$$A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{n}, \qquad B \in \mathfrak{M}_{2n}^{\infty}, \qquad \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\eta(n) = 0) \to 0$$

при $n \to \infty$, в то время как

$$\mathsf{P}(B/A) \geqslant \mathsf{P}(\chi(0) > 3n/\chi(0) > n) =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(\chi(0) > 3n)}{\mathsf{P}(\chi(0) > n)} = \left(\frac{1+3n}{1+n}\right)^{-\alpha+1} \to 3^{-\alpha+1}.$$

Это означает, что разность $\mathsf{P}(B/A) - \mathsf{P}(B)$ не сходится к нулю при $n \to \infty$ и условия (1) для процесса $\eta(u)$ не выполнены. Таким образом, мы не можем здесь воспользоваться результатами п. 1 для того, чтобы установить выполнение условий теоремы 1 § 5 для процессов восстановления, указанных в заголовке этого раздела.

Мы покажем, что эти условия тем не менее здесь будут выполнены.

Чтобы характеризовать с помощью последовательности $\{\tau_j\}$ слабую зависимость $\eta(u)$, мы преобразуем условия (1) следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}^*(t)$ — σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{M}_{-\infty}^{t}$ и величиной $\chi(t)$, а $\mathfrak{M}_n^*$ — σ-алгебра, порожденная $\tau_n^*, \tau_{n+1}^*, \ldots$; тогда при $n \to \infty$

$$\sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}^*(t) \\ B \in \mathfrak{M}_n^*}} |\mathsf{P}(B/A) - \mathsf{P}(B)| \leqslant \psi(n) \to 0. \tag{15}$$

Кроме того, мы будем считать по-прежнему, что τ_j (или τ_j^*) удовлетворяют условиям

$$\mathsf{M}\tau_j^{2+\delta} \leqslant c < \infty, \qquad \mathsf{D}(\tau_1 + \ldots + \tau_n) = n\sigma^2(1 + o(1)), \tag{16}$$

где $0 < \sigma < \infty$.

Теорема 3. *При выполнении условий* (15), (16) *процесс* $\eta(u)$ *будет удовлетворять условиям теоремы* 1 § 5.

Это означает, что процесс $\eta(u)$ на большом интервале времени будет сходиться после нормировки к винеровскому процессу.

Замечание. Если рассматривать схему серий, то на последовательность $\{\tau_j\}$ должны быть наложены дополнительные условия, гарантирующие равномерную сходимость к 0 при $N \to \infty$ вероятности

$$\mathsf{P}(\chi(t) > N).$$

Можно указать, например, следующие условия (см. [14]), гарантирующие такое убывание.

1. Существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta < 1$ такие, что почти всюду

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(0)}(\tau_1 < \alpha) < \beta.$$

2. Существует не зависящая от номера серии функция $P(x)$, для которой

$$\int_0^\infty P(x)\,dx < \infty, \qquad \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(0)}(\tau_1 > x) \leqslant P(x).$$

Здесь $\mathfrak{M}(0)$ — σ-алгебра, порожденная $\tau_0, \tau_{-1}, \ldots$

Доказательство теоремы 3. В силу стационарности приращений процесса $\eta(u)$ и замечаний сделанных в п. 1 (см. условия I′—III′) нам достаточно убедиться, что найдется множество $\Omega = \Omega(n)$, $\mathsf{P}(\Omega) \to 1$, на котором

$$\text{I}'') \quad \left| \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a}\right) \right| < \sqrt{t}\, r_1(\omega),$$

$$\text{II}'') \quad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a}\right)^2 = \frac{t\sigma^2}{a^3}(1 + r_2(\omega)),$$

$$\text{III}'') \quad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a}\right)^{2+\delta'} < ct^{1+\delta'/2}, \quad \delta' > 0,$$

где $a = \mathsf{M}\tau_l$, $c = \text{const}$, $|r_i(\omega)| < \varepsilon$ при $t \to \infty$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Но, как нетрудно обнаружить, повторяя рассуждения п. 1, в $\mathfrak{M}^*(0)$ найдется множество Ω^*, $\mathsf{P}(\Omega^*) \to 1$, на котором условное распределение $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Z_n$ для $Z_n = \tau_1^* + \ldots + \tau_n^* - an$ будет сходиться при $n \to \infty$ к нормальному вместе с моментом порядка $2 + \delta'$, $\delta' < \delta$, $\delta' > 0$, (см. п. 1 и теорему 2).

Воспользуемся теперь следующим хорошо известным приемом исследования распределения $\eta(u)$: рассмотрим равенство

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a} < \frac{x\sigma\sqrt{t}}{a^{3/2}}\right) = \\ = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}(\chi(0) + Z_n + an > t), \qquad (17)$$

где $n = \left[\frac{t}{a} + \frac{x\sigma\sqrt{t}}{a^{3/2}}\right]$, $[\alpha]$ означает здесь целую часть α. Выберем $\Omega' = \{\omega: \chi(0) \leqslant y(n)\} \in \mathfrak{M}^*(0)$, где $y(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $y(n) = o(\sqrt{n})$. Тогда, очевидно, $\mathsf{P}(\Omega') \to 1$ и на пересечении $\Omega^* \cap \Omega'$ вероятность (17) равна

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(Z_n > -x\sigma\sqrt{n} + o(\sqrt{n})\right) \to 1 - \Phi(-x) =$$
$$= \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Кроме того, сходимость левой части (17) к нормальному закону на $\Omega^* \cap \Omega'$ будет иметь место вместе с моментом порядка $2 + \delta'$ при некотором $\delta' > 0$, $\delta' < \delta$. Действительно, рассмотрим суммы

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{1+\delta'} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a} > k\right),$$
$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{t}{a}} k^{1+\delta'} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a} < -k\right), \tag{18}$$

оценивающие вместе условный момент порядка $2 + \delta'$. В силу соотношений вида (17)

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{1+\delta'} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t) - \frac{t}{a} > k\right) =$$
$$= \sum_{k \geqslant 1} k^{1+\delta'} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(Z_n < -ak + o(\sqrt{n})\right),$$

где $n = \left[\frac{t}{a} + k\right]$. В силу неравенства Чебышева часть этой суммы по значениям $k \leqslant c_1 t$ не превосходит при достаточно больших t

$$2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant c_1 t} k^{1+\delta'} \frac{\sigma^{2+\delta}\left(\frac{t}{a} + k\right)^{1+\delta/2}}{(ak)^{2+\delta}} \leqslant c t^{1+\delta/2}. \tag{19}$$

Чтобы оценить $\sum\limits_{k > c_1 t}$, построим новый процесс восстановления $\tilde{\eta}(u)$, у которого интервалы $\tilde{\tau}_j$ между скачками равны $\min(A, \tau_j^*)$. Ясно, что $\tilde{\eta}(u) \geqslant \eta(u)$ и что

$\tilde{\tau}_j$ имеют конечные моменты любого порядка, в частности, порядка $4+2\delta$. Поэтому, поступая так же, как и в (19), мы для остальной части оцениваемой суммы получим мажоранту

$$c_2 \sum_{k>c_1 t} k^{1+\delta'} \frac{(t+k)^{2+\delta}}{k^{4+2\delta}} \leqslant c_3.$$

Аналогично, но несколько проще оценивается вторая сумма в (18). Таким образом, условие III″ доказано.

Условия I″ и II″ доказываются теперь весьма просто с помощью III″ и сходимости (17) на множестве $\Omega = \Omega^* \cap \Omega'$ к нормальному закону. Действительно, на построенном множестве

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t)-\frac{t}{a}\right)^2 =$$
$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left[\left(\eta(t)-\frac{t}{a}\right)^2;\ \left|\eta(t)-\frac{t}{a}\right| < N\sqrt{t}\right] +$$
$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left[\left(\eta(t)-\frac{t}{a}\right)^2;\ \left|\eta(t)-\frac{t}{a}\right| \geqslant N\sqrt{t}\right].$$

Первое слагаемое здесь имеет вид $\frac{t\sigma^2}{a^3}(1+r(\omega))$, где $|r(\omega)|$ может быть сделано выбором N меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Второе слагаемое не превосходит

$$\frac{1}{(N\sqrt{t})^{\delta'}} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(0)}\left(\eta(t)-\frac{t}{a}\right)^{2+\delta'} \leqslant \frac{ct}{N^{\delta'}}$$

и также выбором N может быть сделано меньше εt.

Условие I″ проверяется так же. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что утверждение теоремы 3 сохранится и для *нестационарного* процесса восстановления, определенного равенством

$$\eta(u) = \min\{k\colon \tau_1 + \ldots + \tau_k > u\}.$$

3. В предыдущих двух разделах мы рассматривали стационарные процессы с условиями р. с. п. и процессы восстановления, порожденные последовательностями с условиями р. с. п. Однако можно указать и другие условия, связанные, скажем, лишь с моментами исходных случайных величин, достаточные для выполнения условий теоремы 1 § 5.

Нетрудно видеть, например, что если последовательность случайных величин $\{\zeta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ стационарна и обладает свойствами

$$\text{I)}\ |\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\zeta_k| < \varphi_1(k), \quad \sum_{j=1}^{n} \varphi_1(k) = o(\sqrt{n}),$$

$$\text{II)}\ |\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\zeta_k\zeta_{k+j}| < \varphi_2(j), \quad \varphi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_2(j) < \infty,$$

$$\text{III)}\ |\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}\zeta_{j-l}\zeta_j\zeta_k\zeta_{k+m}| \leqslant c\min(\varphi_3(l),\ \varphi_3(m)),$$

$$\varphi_3 = \sum_{l=1}^{\infty} l\varphi_3(l) < \infty,$$

то условия теоремы 1 § 5 будут выполнены (из условий II, III с помощью непосредственного подсчета можно извлечь (ср. с [18]), что для $Z_n = \zeta_1 + \ldots + \zeta_n$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}Z_n^2 \sim n(\varphi_2(0) + 2\varphi_2),$$
$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(0)}Z_n^4 \leqslant 3cn^2(8\varphi_3 + 1)).$$

Во всех приведенных выше примерах мы имели дело со сходимостью к однородной в пространстве диффузии (коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ постоянны). Примеры сходимости к неоднородной диффузии мы получим в §§ 4—6 гл. III.

В этом параграфе мы не рассматриваем связи условий р. с. п. с условиями теоремы 1 § 4 о C-сходимости к вырожденным процессам. Мы предоставляем это читателю, который может получить нужные условия в терминах р. с. п., сравнив рассмотрения §§ 4 и 12.

Однако следует отметить, что для сумм стационарно связанных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$; $\mathsf{M}\zeta_n = a$, C-сходимость процессов

$$y_n(t) = \frac{Z[nt]}{n}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant v, \qquad Z_k = \zeta_1 + \ldots + \zeta_k$$

к функции at следует непосредственно из эргодичности последовательности $[\zeta_j]$ (см. замечание в начале § 4).

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМ С ИНТЕНСИВНЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ И БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ КАНАЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Мы перейдем теперь непосредственно к изучению процессов обслуживания. Как мы уже отмечали во введении, возможны два подхода к определению процессов обслуживания, каждый из которых связан со своим направлением исследований. Первый из них основан на традиционных представлениях, он явно или неявно используется почти во всех статьях и монографиях по теории массового обслуживания (некоторые замечания по этому поводу см. в [18]). В определении процесса обслуживания при этом фигурируют так называемые управляющие последовательности (или процессы), составленные из случайных величин, а также алгоритмы обслуживания. Такое определение в значительной своей части неизбежно становится описательным, так как в этих условиях полное формальное построение случайного процесса, однозначно описывающего эволюцию системы, потребовало бы введения сложного фазового пространства, не говоря уже о трудностях эффективного задания в этом пространстве распределения самого процесса.

Тем не менее такой подход к определению и изучению систем массового обслуживания следует признать основным, и мы будем использовать его при описании различных реальных систем обслуживания.

Однако к определению процесса обслуживания возможен и другой подход, который оказывается значительно более удобным при выяснении общих предельных законов, присущих системам обслуживания. Следуя этому подходу, процесс обслуживания надо рассматривать как векторный вероятностный процесс со ступенчатыми неубывающими компонентами

$$S(t) = (e(t),\ r(t),\ s(t)),$$

которые характеризуют соответственно *входной процесс, число вызовов, получивших отказ, и число обслуженных вызовов к моменту времени t*. Оказывается, что если компоненты процесса $S(t)$ удовлетворяют весьма широким предположениям, которые достаточно просты для проверки в конкретных задачах, то для систем обслуживания можно установить существование интересных асимптотических закономерностей. Это оказывается возможным в тех случаях, когда какие-нибудь характеристики системы (длина очереди, число занятых линий, интенсивность входного потока и т. д.) неограниченно возрастают. Полученные в этих условиях предельные законы могут быть эффективно использованы при изучении весьма сложных систем обслуживания, включая системы с управлением. Например, для так называемых нагруженных систем (см. [13], [15], [22], [23], [33], [34], [57], [70], [71], [77—79], [86], [88—91]) распределение нормированной определенным образом длины очереди, при очень широких предположениях хорошо аппроксимируется распределением диффузионного процесса.

В последующих разделах нам часто будет удобнее использовать именно такое, более простое и более общее определение процессов обслуживания, не связанное с большим количеством традиционных предположений и представлений, носящих, как правило, частный характер. При этом мы ограничимся рассмотрением только «одноактовых» систем, когда вызовы неразличимы и каждый из них обслуживается один раз.

Итак, *под процессом обслуживания на интервале времени* $[0, U]$ *мы будем понимать произвольный трехмерный ступенчатый процесс*

$$S(t) = \{e(t),\ r(t),\ s(t);\ 0 \leqslant t \leqslant U\}; \qquad r(0) = s(0) = 0,$$

все компоненты которого не убывают и обладают свойством

$$q(t) = e(t) - r(t) - s(t) \geqslant 0.$$

Компонента $e(t)$ описывает входной поток так, что разность $e(t)-e(u)$ равна числу вызовов, поступивших в систему между моментами времени t и u. Компонента $r(t)$ таким же образом описывает число вызовов, получивших отказ, и компонента $s(t)$ — число вызовов, обслуженных системой к моменту времени t. $q(t)$ есть «*занятость*» или «*очередь*» системы. Обозначения e, r, s, q образованы первыми буквами английских слов *entrance*, *refusal*, *service*, *queue*. Очевидно, что для обычных систем с очередью $r(t)\equiv 0$, для систем с отказами $q(t)=e(t)-r(t)-s(t)$ есть число занятых линий обслуживания.

Процесс $S(t)$ можно рассматривать как заданный в пространств $D^3(0, U)$ с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами. Там, где это потребуется, мы будем предполагать, что компоненты $S(t)$ непрерывны справа. Все характеристики системы, которые принято изучать, можно рассматривать как измеримые функционалы от $S(t)$. Отметим основные из них — это процесс очереди $\{q(t)\}$ и «процесс отказов» $\{p(t)=r(t)/e(t)\}$.

В реальных системах совместное распределение компонент e, r и s задается обычно путем указания их локальных свойств (распределения времени обслуживания, времени между приходами вызовов и др.), а также некоторых алгоритмов, которые и определяют природу процессов обслуживания.

Мы уже отмечали, что асимптотические закономерности носят, как правило, собирательный характер. Это относится не только к природе управляющих процессов, но и к некоторым алгоритмам, определяющим тип системы. В качестве иллюстрации заметим следующее. Хорошо известно, что одним из источников многообразия систем обслуживания и сложностей, возникающих при их изучении, является наличие большого числа различных алгоритмов, определяющих поведение систем вблизи «границы» $e-r-s=0$. Но именно к этому поведению «вблизи нуля», как мы увидим в главах II, III, асимптотические результаты оказываются нечувствительными и от него почти не зависят. Это одно из существенных обстоятельств, которое позволяет на пути асимптотического анализа развивать *общие* методы теории обслуживания, т. е. методы, применимые для самых различных типов систем и управляющих последовательностей.

Итак, мы будем изучать *асимптотические законы* для процессов обслуживания. Поэтому везде в дальнейшем, рассматривая процесс $S(t)$, мы будем иметь в виду *схему серий*, т. е. совокупность (последовательность) процессов $\{S_T(t)\}$, зависящих от параметра T, который можно считать неограниченно возрастающим и отождествлять с какой-нибудь исходной характеристикой системы (например, с интенсивностью входного потока в условиях § 1 этой главы). Иногда вместо параметра T бывает удобнее рассматривать малый параметр δ, характеризующий, скажем, загруженность системы, как это было в примере § 11 главы I.

Содержание главы II составляет изучение многоканальных систем с интенсивным входным потоком. В § 1 найден вид предельного процесса для числа занятых линий на фиксированном интервале времени. В § 2 аналогичные результаты получены для сходимости к стационарному процессу, что связано с рассмотрением процессов на удаляющихся интервалах времени. В § 3 устанавливаются связи, существующие между многоканальными системами с интенсивным входным потоком и ветвящимися процессами с интенсивной иммиграцией. Эти связи позволяют описать предельные процессы для числа частиц докритического процесса с интенсивной иммиграцией. § 4 посвящен обсуждению задач, связанных с изучением числа занятых линий, когда число каналов обслуживания является «переходным». В § 5 основные утверждения §§ 1, 2 обобщаются на случай зависимых времен ожидания. § 6 также содержит теоремы о поведении числа занятых линий, однако более грубых (типа законов больших чисел) и при использовании более слабых, чем в §§ 1, 2, 5 условий. Наконец, в § 7 получено собственное предельное распределение для ненормированного числа свободных каналов в «перегруженных» системах с отказами (т. е. для систем, у которых интенсивность входного потока выше, чем средняя пропускная способность системы).

Содержание этой главы следует работам автора [16], [29]. Результаты § 7 существенно обобщены в [10].

§ 1. Предельные процессы для числа занятых линий, когда число каналов обслуживания асимптотически эквивалентно бесконечному

В этой главе мы будем рассматривать системы с так называемым интенсивным входным потоком, когда число вызовов, поступающих в систему за единицу времени, велико. Предположения о природе входного потока будут весьма общими — они выполняются практически во всех сколько-нибудь интересных реальных задачах. Система обслуживания будет предполагаться весьма определенного вида: она состоит из конечного или бесконечного числа n каналов обслуживания, при этом времена обслуживания $\tau_j = \tau_j^s$ (τ_j^s равно времени обслуживания вызова с номером j, индекс s мы будем опускать) образуют стационарную последовательность $\{\tau_j\}$, удовлетворяющую тем или иным условиям слабой зависимости. Поступившие вызовы направляются в любой из свободных каналов. Для определенности можно считать, что каналы занумерованы и в первую очередь занимаются каналы с меньшими номерами. Если все каналы заняты, то вызов получает отказ или становится в очередь в зависимости от типа рассматриваемых систем.

Интенсивность входного потока будет означать, что в схеме серий приращение

$$e(1) - e(0) = e_T(1) - e_T(0)$$

неограниченно растет при $T \to \infty$. Мы можем считать, например, что

$$\mathsf{M}(e(t) - e(0)) = Tm(t),$$

где $m(t)$ — некоторая неубывающая функция, не зависящая от T. Ясно, что интенсивный поток $e_T(t)$ можно получить из обычного путем сжатия времени в T раз.

Обозначим через $q(t) = q_T(t)$ число занятых линий в системе в момент времени t и положим $e(0) = 0$, $q(0) = 0$,

$$F(t) = \mathsf{P}(\tau_j \leqslant t), \qquad G(t) = 1 - F(t),$$

$$P(t) = \int_0^t F(t-u)\,dm(u), \qquad Q(t) = \int_0^t G(t-u)\,dm(u).$$

(В этой главе нам будет удобнее функцию распределения τ_j определить как функцию, непрерывную справа.)

Мы рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{\tau_j\}$ образована независимыми случайными величинами.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. *Существуют* $t_0 > 0$, *неубывающая функция* $m(t)$ *и функция* $B(T) \to \infty$ *при* $T \to \infty$ *такие, что последовательность процессов*

$$x(t) = \frac{e(t) - Tm(t)}{B(T)} \tag{1}$$

С-сходится) на* $[0, t_0]$ *к некоторому процессу* $\{\xi(t);\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

2. *Случайные величины* τ_j *независимы, а функция* $P(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера (для этого достаточно, чтобы хотя бы одна из функций* F *и* m *удовлетворяла этому условию).*

3. *Число* $n = n_T$ *таково, что*

$$\frac{n - TQ(t_0)}{A(T)} \to \infty$$

при $T \to \infty$, *где* $A(T) = \max(B(T), \sqrt{T})$. *Кроме того**),* $\frac{B(T)}{A(T)} \to B \geqslant 0$, $\frac{\sqrt{T}}{A(T)} \to K \geqslant 0$ *при* $T \to \infty$ *(так что* $\max(B, K) = 1$). *При выполнении этих условий процессы*

$$z(t) = \frac{q(t) - TQ(t)}{A(T)}$$

С-сходятся на $[0, t_0]$ *к процессу*

$$\zeta(t) = B \int_0^t G(t-u)\, d\xi(u) + K\theta(t), \tag{2}$$

---

*) Определение *С*-сходимости см. в § 2 гл. I.

**) На самом деле можно было бы рассматривать лишь три пары значений параметров B и K: (1,1), (0,1), (1,0). Однако отдельное рассмотрение этих трех случаев заняло бы больше места.

где $\theta(t)$ — центрированный гауссовский процесс, не зависящий от $\xi(t)$, с ковариационной функцией

$$R(t, t+u) = \mathrm{M}\theta(t)\theta(t+u) = \int_0^t G(t+u-v)F(t-v)\,dm(v), \qquad u \geqslant 0.$$

Под значением стохастического интеграла в (2) мы понимаем величину (результат интегрирования по частям; траектория $\xi(t)$ п. н. непрерывна)

$$\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u) = \xi(t) - \int_0^t \xi(t-u)\,dF(u).$$

Некоторые замечания к этой теореме мы сделаем после ее доказательства.

Доказательство. Предположим сначала, что $n = \infty$. Найдем вид процесса $q(t)$ (как и прежде, индекс T мы для краткости часто будем опускать). Обозначим $v_1 < v_2 < \ldots$ точки скачков входного процесса $e(t)$, который мы будем считать непрерывным справа, и $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — величины этих скачков. Пусть, кроме того,

$$\nu(t) = \min\{k \geqslant 1:\ v_{k+1} > t\}$$

есть номер последнего на $[0, t]$ скачка функции $e(t)$. Тогда

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \sum_{j=1}^{\nu_k} \chi_k^j(t), \tag{3}$$

где

$$\chi_k^j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad v_k + \tau > t, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$k = 1, \ldots, \nu(t)$; τ есть время обслуживания вызова с номером $\nu_1 + \ldots + \nu_{k-1} + j$. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с представлением для $q(t)$ вида (3). Чтобы сделать запись этого представления короче, мы будем считать, что $\nu_k \equiv 1$ (вызовы поступают по одному) и, следовательно, $\nu(t) = e(t)$. Это предположение, как читатель может легко потом проверить (см. замечание к (5)), не влияет на доказательство теоремы —

никак не упрощает его и не усложняет. Однако краткость записи несомненно облегчает чтение, и поэтому указанным предположением мы воспользуемся, т. е. будем считать, что

$$q(t)=\sum_{k=1}^{e(t)}\chi_k(t),$$

$$\chi_k(t)=\begin{cases}1, & \text{если } v_k+\tau_k>t,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Обозначим $\mathfrak{E}$ алгебру, порожденную входным потоком, т. е. событиями вида $\{e(u)=l\}$, $u\leqslant t_0$, и рассмотрим характеристическую функцию совместного распределения $q(t)$ и $q(t+u)$, $u\geqslant 0$:

$$\mathsf{M}\exp\{i\lambda q(t)+i\mu q(t+u)\}=$$

$$=\mathsf{M}\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}\exp i\left\{\sum_{k=1}^{e(t)}(\lambda\chi_k(t)+\mu\chi_k(t+u))+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=e(t)+1}^{e(t+u)}\mu\chi_k(t+u)\right\}. \qquad (4)$$

Но $e(t)$ и $e(t+u)$ измеримы относительно $\mathfrak{E}$, а случайные величины τ в (3), отвечающие разным вызовам, независимы. Поэтому, обозначив условное математическое ожидание в (4) через $\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}$, мы получим

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}=\prod_{k=1}^{e(t)}\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}\exp i(\lambda\chi_k(t)+\mu\chi_k(t+u))\times$$

$$\times\prod_{k=e(t)+1}^{e(t+u)}\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}\exp i\mu\chi_k(t+u).$$

Случайные величины $\lambda\chi_k(t)+\mu\chi_k(t+u)$ принимают значения $\lambda+\mu$, λ, 0 соответственно на множествах $\tau_k>$ $>t+u-v_k$, $t+u-v_k\geqslant\tau_k>t-v_k$, $\tau_k\leqslant t-v_k$. Поэтому, обозначив для краткости вероятности этих множеств

$$G_k=G(t+u-v_k),\qquad f_k=F(t+u-v_k)-F(t-v_k),$$

$$F_k=F(t-v_k),$$

мы получим

$$\ln \mathsf{M}\mathfrak{S} = \sum_{k=1}^{e(t)} \ln\left[F_k + f_k e^{i\lambda} + G_k e^{i(\lambda+\mu)}\right] + \sum_{k=e(t)+1}^{e(t+u)} \ln\left[1 - G_k(1 - e^{i\mu})\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{e(t)} \ln\left[1 + f_k\left(i\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) + G_k\left(i(\lambda+\mu) - \frac{(\lambda+\mu)^2}{2}\right) + (f_k + G_k)\, O(|\lambda|^3 + |\mu|^3)\right] + \sum_{k=e(t)+1}^{e(t+u)} \ln\left[1 + G_k\left(i\mu - \frac{\mu^2}{2}\right) + G_k O(|\mu|^3)\right].$$

Здесь оценки равномерны по T, t, u и пространству элементарных событий. Пользуясь при достаточно малых λ и μ разложением $\ln$ в ряд, после элементарных преобразований получим

$$\ln \mathsf{M}\mathfrak{S} = i\lambda \sum_{k=1}^{e(t)} G(t - v_k) + i\mu \sum_{k=1}^{e(t+u)} G(t + u - v_k) - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{e(t)} G(t - v_k)\, F(t - v_k) + \frac{\mu^2}{2} \sum_{k=1}^{e(t+u)} G(t + u - v_k) \times$$

$$\times F(t + u - v_k) - \lambda\mu \sum_{k=1}^{e(t)} G(t + u - v_k)\, F(t - v_k) + O\left(\sum_{k=1}^{e(t)} G(t - v_k)(|\lambda|^3 + |\mu|^3)\right) + O\left(\sum_{k=e(t)+1}^{e(t+u)} G(t + u - v_k)\, |\mu|^3\right),$$

где оценка по-прежнему является равномерной. Нетрудно заметить, что полученное выражение можно записать в виде

$$\ln M_{\mathfrak{S}} = i\lambda \int_0^t G(t-v)\,de(v) + i\mu \int_0^{t+u} G(t+u-v)\,de(v) - \\ - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t G(t-v)\,F(t-v)\,de(v) - \\ - \frac{\mu^2}{2} \int_0^{t+u} G(t+u-v)\,F(t+u-v)\,de(v) - \\ - \lambda\mu \int_0^t G(t+u-v)\,F(t-v)\,de(v) + \\ + \left(\int_0^t G(t-v)\,de(v) + \int_t^{t+u} G(t+u-v)\,de(v)\right) O(|\lambda|^3 + |\mu|^3). \quad (5)$$

Заметим, что мы получили представление для $M_{\mathfrak{S}}$ лишь в терминах процесса $e(t)$. Легко видеть, что оно будет точно таким же, если не использовать предположение $\nu_k \equiv 1$.

Вспомним теперь, что в силу (1)

$$e(t) = Tm(t) + B(T)\,x(t), \quad (6)$$

где $x(t)$ C-сходится к $\xi(t)$. Если подставить (6) в (5) и использовать введенные ранее обозначения $Q(t)$ и $R(t, t+u)$, то мы получим

$$\ln M_{\mathfrak{S}} = i\lambda TQ(t) + i\mu TQ(t+u) + i\lambda B(T)\,X(t) + \\ + i\mu B(T)\,X(t+u) - \frac{\lambda^2 T}{2} R(t, t) - \frac{\mu^2 T}{2} R(t+u, t+u) - \\ - \lambda\mu TR(t, t+u) + T(Q(t) + Q(t+u))\,O(|\lambda|^3 + |\mu|^3) + \\ + B(T)(|X(t)| + |X(t+u)| + X(t, u))\,O(\lambda^2 + \mu^2), \quad (7)$$

где оценки O равномерны по всем переменным,

$$X(t)=\int_0^t G(t-v)\,dx(v),$$

$$X(t, u)=\left|\int_0^t G(t-v)F(t-v)\,dx(v)\right|+\\ +\left|\int_0^t G(t+u-v)F(t-v)\,dx(v)\right|+\\ +\left|\int_0^{t+u} G(t+u-v)F(t+u-v)\,dx(v)\right|.$$

Полученное равенство для $\mathsf{M}_{\mathfrak{S}}$ показывает каким образом надо нормировать $q(t)$, чтобы получить собственное предельное распределение. Именно, следует рассматривать совместные распределения процесса

$$\frac{q(t)-TQ(t)}{A(T)}.$$

Тогда на основании (7) мы находим

$$\ln \mathsf{M}_{\mathfrak{S}} \exp\left\{i\lambda\frac{q(t)-TQ(t)}{AT}+i\mu\frac{q(t+u)-TQ(t+u)}{A(T)}\right\}=\\ =i\lambda\frac{B(T)}{A(T)}X(t)+i\mu\frac{B(T)}{A(T)}X(t+u)-\frac{\lambda^2}{2}\frac{T}{A^2(T)}R(t, t)-\\ -\frac{\mu^2}{2}\frac{T}{A^2(T)}R(t+u, t+u)-\lambda\mu\frac{T}{A^2(T)}R(t, t+u)+\\ +[TA^{-3}(T)(Q(t)+Q(t+u))+B(T)A^{-2}(T)(|X(t)|+\\ +|X(t+u)|+X(t, u))]\,O(1),$$

где оценка O равномерна по T и t, u, ω при фиксированных λ и μ. Но функционалы

$$X(t)=x(t)-\int_0^t x(t-v)\,dF(v),$$

как и $X(t, u)$, являются непрерывными в равномерной метрике. Следовательно, по условию теоремы распределение случайной величины

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{G}} \exp\left\{ i\lambda \frac{q(t) - TQ(t)}{A(T)} + i\mu \frac{q(t+u) - TQ(t+u)}{A(T)} \right\} \tag{8}$$

сходится при $T \to \infty$ к распределению *)

$$\exp\left\{ i\lambda B\Xi(t) + i\mu B\Xi(t+u) - \frac{K^2}{2} r(\lambda, \mu) \right\}, \tag{9}$$

где

$$\Xi(t) = \int_0^t G(t-v)\, d\xi(v),$$

$$r(\lambda, \mu) = \lambda^2 R(t, t) + 2\lambda\mu R(t, t+u) + \mu^2 R(t+u, t+u).$$

Величины (8) равномерно ограничены при вещественных λ и μ. Поэтому сказанное означает также сходимость математических ожиданий (8) и (9). Значит, при $T \to \infty$

$$\mathrm{M} \exp\{i\lambda z(t) + i\mu z(t+u)\} \to$$

$$\to \exp\left\{ -\frac{K^2}{2} r(\lambda, \mu) \right\} \mathrm{M} \exp\{i\lambda B\Xi(t) + i\mu B\Xi(t+u)\}.$$

Но такую же характеристическую функцию имеет совместное распределение значений $\zeta(t)$ и $\zeta(t+u)$ (см. (2)).

Переход к рассмотрению произвольных конечномерных распределений, очевидно, не внесет в приведенные рассуждения никаких существенных изменений.

Сходимость конечномерных распределений для случая $n = \infty$ доказана. Докажем теперь C-сходимость распределений $z(t)$ и $\xi(t)$ на $[0, t_0]$. Имеем

$$z(t) = \frac{q(t) - TQ(t)}{A(T)} = z_2(t) - z_1(t),$$

*) Это единственное место, где для доказательства сходимости конечномерных распределений используется C-сходимость процессов x. Очевидно, здесь достаточно требовать сходимость распределений $X(t)$, $X(t, u)$.

где

$$z_1(t) = A^{-1}(T)\sum_{k=1}^{e(t)} (G(t-v_k) - \chi_k(t)),$$

$$z_2(t) = A^{-1}(T)\left[\sum_{k=1}^{e(t)} G(t-v_k) - TQ(t)\right] =$$

$$= A^{-1}(T)\left[\int_0^t G(t-v)\,de(v) - TQ(t)\right] = A^{-1}(T)\,B(T)\,X(t). \quad (10)$$

Пусть

$$\omega_\Delta^C(z) = \sup_{\substack{|t-u|\leqslant\Delta\\ 0\leqslant t,\ u\leqslant t}} |z(t) - z(u)|$$

есть «модуль» непрерывности в пространстве $C(0, t_0)$. Очевидно,

$$\omega_\Delta^C(z) \leqslant \omega_\Delta^C(z_1) + \omega_\Delta^C(z_2).$$

Поэтому, если нам удастся доказать условие компактности распределений процессов z_i в $C(0, t_0)$:

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left(\omega_\Delta^C(z_i) > \delta\right) = 0 \quad (11)$$

для компонент z_i, то мы получим требуемую C-сходимость процессов z (см. теорему 1 § 2 гл. I). Для компоненты z_2 это условие выполнено. Действительно,

$$\Delta X(t) = \Delta x(t) - \int_{-\Delta}^{t} \Delta x(v)\,dG(t-v)$$

(здесь мы приняли $\Delta y(t) = y(t+\Delta) - y(t)$ и $x(v) = 0$ при $v < 0$). Отсюда следует, что

$$\omega_\Delta^C(X) \leqslant 2\omega_\Delta^C(x) \quad (12)$$

и в силу условий теоремы о C-сходимости процессов x условие (11) для z_2 выполнено.

Рассмотрим теперь компоненту $z_1(t)$. Имеем

$$\Delta z_1(t) = A^{-1}(T)\left[\sum_{k=1}^{e(t+\Delta)} (\chi_k(t) - G(t-v_k)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{e(t+\Delta)} (\chi_k(t+\Delta) - G(t+\Delta-v_k))\right].$$

Здесь в первой сумме $\chi_k(t) = G(t - v_k) = 1$ при $k > e(t)$, поэтому мы можем записать

$$\Delta z_1(t) = A^{-1}(T) \sum_{k=1}^{e(t+\Delta)} (\xi_k - p_k), \tag{13}$$

где $\xi_k = \chi_k(t) - \chi_k(t + \Delta)$ есть независимые при данной $\mathfrak{E}$ случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью

$$p_k = -\Delta G(t - v_k) = \Delta F(t - v_k)$$

и значение 0 с дополнительной вероятностью $q_k = 1 - p_k$. Если обозначить

$$E(t) = \int_0^t F(t - v)\, de(v), \tag{14}$$

то

$$\sum_{k=1}^{e(t+\Delta)} p_k = \Delta \sum_{k=1}^{e(t)} F(t - v_k) = \Delta E(t).$$

Заметим теперь, что

$$A^4(T)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} (\Delta z_1(t))^4 \leqslant \Delta E(t) + 3(\Delta E(t))^2. \tag{15}$$

Действительно,

$$A^4(T)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} (\Delta z_1(t))^4 = \sum_k \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} (\xi_k - p_k)^4 + \\ + 6 \sum_{k<l} \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} (\xi_k - p_k)^2 (\xi_l - p_l)^2 = \sum_k p_k q_k (p_k^3 + q_k^3) + \\ + 6 \sum_{k<l} p_k q_k p_l q_l \leqslant \sum_k p_k q_k + 3 \left(\sum_k p_k q_k\right)^2.$$

Отсюда следует (15).

Итак, вернемся к доказательству (11).

Примем (не ограничивая общности) $t_0 = 1$, $\Delta = 2^{-l}$ и положим

$$\omega(t, t + \Delta) = \sup_{u \in [t, t+\Delta]} |z_1(t) - z_1(u)|,$$

$$\omega_\Delta^{[N]} = \max_{\left|\frac{k}{2^N} - \frac{j}{2^N}\right| \leqslant \Delta} \left| z_1\left(\frac{k}{2^N}\right) - z_1\left(\frac{j}{2^N}\right) \right|.$$

Тогда, считая, что $N > l$, мы получим

$$\omega_\Delta^C(z_1) \leqslant \omega_\Delta^{[N]} + 2 \max_{0 \leqslant k < 2^N} \omega\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right),$$

$$\mathsf{P}\left(\omega_\Delta^C(z_1) \geqslant 3\delta\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\omega_\Delta^{[N]} \geqslant \delta\right) + \\ + \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{2^N-1}\left\{\omega\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) \geqslant \delta\right\}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим здесь первое слагаемое. Нетрудно видеть, что событие $\bigcap_{r=l}^{N} \bigcap_{k=1}^{2^N}\left\{\left|z_1\left(\frac{k}{2^r}\right) - z_1\left(\frac{k-1}{2^r}\right)\right| < \frac{\delta}{r^2}\right\}$ влечет за собой $\left\{\omega_\Delta^{[N]} < \delta\right\}$. Так как для дополнительных событий имеет место обратное включение, то мы находим (при $l \geqslant 3$)

$$\mathsf{P}\left(\omega_\Delta^{[N]} \geqslant \delta\right) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{r=l}^{N} \bigcup_{k=1}^{2^r}\left\{\left|z_1\left(\frac{k}{2^r}\right) - z_1\left(\frac{k-1}{2^r}\right)\right| \geqslant \frac{\delta}{r^2}\right\}\right). \tag{17}$$

Используя неравенства типа Чебышева для условных вероятностей ([42], стр. 35) и обозначая

$$\Delta_k^r y = y\left(\frac{k}{2^r}\right) - y\left(\frac{k-1}{2^r}\right),$$

мы на основании (15) получаем

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}\left(\left|\Delta_k^r z_1\right| \geqslant \frac{\delta}{r^2}\right) \leqslant \left[\Delta_k^r E + 3\left(\Delta_k^r E\right)^2\right] A^{-4}(T)\,\delta^{-4} r^8,$$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}\left(\bigcup_{k=1}^{2^r}\left\{\left|\Delta_k^r z_1\right| \geqslant \frac{\delta}{r^2}\right\}\right) \leqslant \\ \leqslant \left[E(1)\left(1 + 3\max_{k \leqslant 2^r} \Delta_k^r E\right)\right] A^{-4}(T)\,\delta^{-4} r^8. \tag{18}$$

Но из определения функции $E(t)$ (см. (14)) следует, что

$$\begin{aligned} E(t) &= TP(t) + B(T)\left(x(t) - X(t)\right), \\ \Delta_k^r E &= T\Delta_k^r P + B(T)\,\Delta_k^r (x - X). \end{aligned} \tag{19}$$

Так как в силу условия Гёльдера на функцию P

$$\Delta_k^r P \leqslant c 2^{-r\alpha} \tag{20}$$

при некотором $\alpha > 0$ и так как

$$\Delta_k^r (x - X) \leqslant \omega_{2^{-r}}^C (x) \leqslant \omega_{2^{-l}}^C (x), \tag{21}$$

то на множестве

$$A = \left\{\omega_{2^{-l}}^C (x) < 1, \ |x(1) - X(1)| < B(T)\right\}$$

правая часть в (18) не превосходит

$$[TP(1) + B^2(T)][1 + 3Tc2^{-r\alpha} + 3B(T)]A^{-4}(T)\delta^{-4}r^8 \leqslant$$
$$\leqslant c\delta^{-4}r^8\left(2^{-r\alpha} + A^{-1}(T)\right).$$

Следовательно, из (17) вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(\omega_\Delta^{[N]} \geqslant \delta\right) \leqslant 1 - \mathsf{P}(A) + \sum_{r=l}^{N} c\delta^{-4}r^8\left(2^{-r\alpha} + A^{-1}(T)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \mathsf{P}(A) + c\delta^{-4}\left(l^8 2^{-l\alpha} + N^9 A^{-1}(T)\right).$$

Если выбрать $N \leqslant T^{1/20}$, то мы получим, очевидно,

$$\lim_{l\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left(\omega_\Delta^{[N]} \geqslant \delta\right) = 0.$$

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого в (16). Имеем в силу (13)

$$\omega(t, t + \Delta) \leqslant A^{-1}(T) \max\left(\sum_{k=1}^{e(t+\Delta)} \xi_k, \ \Delta E(t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2A^{-1}(T) \max\left(\sum_{k=1}^{e(t+\Delta)} \xi_k - \Delta E(t), \ \Delta E(t)\right) =$$
$$= 2\max\left(\Delta z_1(t), \ A^{-1}(T)\Delta E(t)\right).$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^N}\left\{\omega\left(\frac{k-1}{2^N}, \frac{k}{2^N}\right) \geqslant \delta\right\}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^N}\left\{|\Delta_k^N z_1| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\}\right) +$$
$$+ \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^N}\left\{|\Delta_k^N E| \geqslant \frac{\delta A(T)}{2}\right\}\right). \tag{22}$$

Первую вероятность здесь мы можем не оценивать, т. к. только что в (17), (18) нами оценены вероятности более широких событий. Во второй вероятности в силу (19)—(21) выполняется

$$\Delta_k^N E \leqslant cT2^{-N\alpha} + B(T)\,\omega_{2^{-N}}^C(x).$$

Поэтому при достаточно больших T и при $N \geqslant \frac{2}{\alpha}\ln T$ (напомним, что на N было наложено нами лишь одно ограничение $N \leqslant T^{1/20}$) оцениваемая вероятность в (22) не превосходит

$$\mathsf{P}\left(\omega_{2^{-N}}^C(x) \geqslant \frac{\delta}{4}\right) \to 0$$

при $T \to \infty$. Таким образом, соотношение (11), а вместе с ним C-сходимость процессов $z(t)$ при $n = \infty$ нами доказаны.

Справедливость утверждения для конечных значений n, указанных в формулировке теоремы, следует из того, что вероятность достижения процессом z, построенным для $n = \infty$, уровней, соответствующих этим конечным значениям n, сходится к 0 при $T \to \infty$. Но ниже этих уровней процессы z для конечных и бесконечных n ведут себя одинаково. Поэтому системы для рассматриваемых конечных значений n ведут себя асимптотически так же, как при $n = \infty$.

В последующих замечаниях для простоты мы будем рассматривать лишь наиболее интересный случай, соответствующий однородному входному потоку, когда функция $m(t)$ линейна:

$$m(t) = mu, \qquad m > 0.$$

Замечание 1. Происхождение двух компонент в представлении предельного процесса для

$$\frac{q(t) - TQ(t)}{A(T)}, \qquad Q(t) = m\int_0^t G(u)\,du$$

нетрудно объяснить. Из числа вызовов $\Delta e(u) = Tm\Delta + B(T)\Delta x(u)$, пришедших за интервал времени $(u, u + \Delta)$, по теореме Муавра — Лапласа останется в системе к моменту времени t примерно

$$\Delta e(u)\, G(t-u) + \sqrt{\Delta e(u)\, G(t-u)\, F(t-u)}\; w \qquad (23)$$

вызовов, где w — некоторая нормально распределенная величина. Так как для разных Δu величины w независимы, то $\sqrt{\Delta}\, w$ можно представить как приращения $\Delta w(u)$ некоторого винеровского процесса, и для (23) мы получим выражение

$$TmG(t-u)\,\Delta + B(T)\, G(t-u)\,\Delta x(u) + \\ + \sqrt{TmG(t-u)\, F(t-u)}\;\Delta w(u). \qquad (24)$$

Суммируя по всем Δu, мы придем к следующему приближенному представлению для $q(t)$:

$$Tm\int_0^t G(t-u)\,du + B(T)\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u) + \\ + \sqrt{Tm}\int_0^t \sqrt{G(t-u)\,F(t-u)}\;dw(u).$$

Если вычесть отсюда $Tm\int_0^t G(t-u)\,du$ и поделить все на $A(T)$, то при $T\to\infty$ мы получим выражение

$$B\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u) + K\int_0^t \sqrt{mG(t-u)\,F(t-u)}\;dw(u). \qquad (25)$$

Следует отметить, однако, что найденное представление справедливо лишь для *одномерных* распределений $q(t)$. Представление для $q(t)$ как для *процесса* не допускает таких простых выражений и требует более тонких рассмотрений. Чтобы понять это, достаточно заметить, что первые компоненты в (2) и (25) совпадают, а корреляционные функции вторых (гауссовских) компонент, вообще говоря, различны.

Замечание 2. Теорема 1, как и последующие утверждения, дает возможность изучать и совместное предельное распределение $e(t)$ и $q(t)$. В частности, нетрудно выписать вид предельного распределения для числа обслуженных вызовов.

§ 2. Сходимость к стационарному процессу

Ясно, что для сходимости распределений $z(t) = \frac{q(t) - TQ(t)}{AT}$ при $T \to \infty$, $t \to \infty$ к стационарному нужно на характеристики системы налагать дополнительные условия.

Нужно требовать, например, чтобы существовал

$$\int_0^\infty G(t)\,dt = \mathrm{M}\tau_j < \infty.$$

(См. общие теоремы о существовании стационарных распределений для $q(t)$ при $t \to \infty$ ([18], [102]). Необходимость этого условия будет ясной и непосредственно из дальнейшего.)

Кроме того, нужно требовать, чтобы входной поток $e(t)$ становился при больших t все более однородным.

Например, если $m(t) = mt$, случайные величины τ_j ограничены некоторой постоянной c, а процесс $\xi(t)$ в условии теоремы 1 § 1 есть процесс со стационарными приращениями, то стационарность предельного распределения $\zeta(t)$ наступит уже при $t > c$. Это следует непосредственно из теоремы 1 § 1.

В случае неограниченных τ_j или $m(t) \neq mt$ справедливо следующее утверждение.

Пусть, как и прежде,

$$x(t) = \frac{e(t) - Tm(t)}{B(T)}, \qquad G(t) = P(\tau_j > t),$$

$$Q(t) = \int_0^t G(t - v)\,dm(v).$$

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия.*

1. *Процессы $x(t_0 + t) - x(t_0)$ на каждом конечном интервале значений t C-сходятся при $T \to \infty$, $t_0 = t_0(T) \to \infty$ к процессу $\xi(t)$ со стационарными в узком смысле приращениями. Процесс $\xi(t)$ можно считать заданным на всей оси.*

Кроме того), равномерно по T, и*

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\,|\,x(u+t)-x(u)\,|\leqslant c\max(1,\,|\,t\,|), \\ \mathsf{M}\,|\,\xi(u+t)-\xi(u)\,|\leqslant c\max(1,\,|\,t\,|). \end{gathered} \tag{1}$$

Функция $m(t)$ представима в виде

$$m(t)=\int_0^t (m+\varepsilon(u))\,du, \qquad |\,\varepsilon(u)\,|<cu^{-\alpha} \tag{2}$$

при некотором $\alpha>0$.

2. *Случайные величины τ_j независимы**)*

$$G(t)\leqslant ct^{-\alpha-1}. \tag{3}$$

3. *Число каналов n таково, что*

$$\frac{n-Tm\mathsf{M}\tau_j}{A(T)}\to\infty$$

при $T\to\infty$, где, как и прежде, $A(T)=\max\left(B(T),\,\sqrt{T}\right)$,

$$\frac{B(T)}{A(T)}\to B\geqslant 0, \quad \frac{\sqrt{T}}{A(T)}\to K\geqslant 0.$$

При выполнении этих условий при t_0 настолько больших, что $t_0^{2\alpha}T^{-1}\to\infty$, процессы

$$z(t)=\frac{q(t_0+t)-Tm\mathsf{M}\tau_j}{A(T)}$$

---

*) Вместо условия (1) можно было бы также требовать, чтобы

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{|t|>N}\{|\,x(u+t)-x(u)\,|>c\,|\,t\,|\}\Big)\to 0,$$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{|t|>N}\{|\,\xi(u+t)-\xi(u)\,|>c\,|\,t\,|\}\Big)\to 0$$

при $N\to\infty$ равномерно по T. Это условие или условие (1) вместе с C-сходимостью на конечных интервалах обеспечивают определенный вид сходимости процессов, заданных на всей оси, рассмотренный в [21], [67] (см. сходимость так называемых Λ-непрерывных функционалов).

**) Вместо условий (2), (3), по-видимому, достаточно требовать, чтобы

$$Q(t)=m\mathsf{M}\tau_j+\int_0^t \varepsilon(v)\,dv, \quad |\,\varepsilon(v)\,|<cv^{-\alpha-1}.$$

С-сходятся на каждом конечном интервале значений t к стационарному процессу

$$\zeta(t) = K\theta(t) + B\int_{-\infty}^{t} G(t-v)\,d\xi(v),$$

где $\theta(t)$ — стационарный центрированный гауссовский процесс, не зависящий от $\xi(t)$, с ковариационной функцией

$$R(u) = M\theta(t)\,\theta(t+u) = m\int_{0}^{\infty} F(v)\,G(v+u)\,dv.$$

Таким образом, вхождение в стационарный режим происходит, начиная со значений $t > T^{1/(2\alpha)}$. Как это будет видно из доказательства, при меньших значениях t распределение $z(t)$, вообще говоря, сходиться к стационарному не будет.

Доказательство. Мы ограничимся для простоты рассмотрением случая $n = \infty$. Как и в теореме § 1, мы начнем с доказательства сходимости конечномерных распределений. Поскольку представление (3) § 1 по-прежнему справедливо, то мы можем воспользоваться готовой формулой (7) § 1 для условной относительно $\mathfrak{E} = \sigma(e(t),\ t \geqslant 0)$ характеристической функции $\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}$ совместного распределения $q(t_0+t)$ и $q(t_0+t+u)$:

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{E}} = \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} e^{i\lambda q(t_0+t) + i\mu q(t_0+t+u)}.$$

По этой формуле (мы полагаем для краткости $t_0+t=s$)

$$\ln \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} = i\lambda TQ(s) + i\mu TQ(s+u) + i\lambda B(T)X(s) + i\mu B(T)X(s+u) - \frac{\lambda^2 T}{2}R(s,\ s) - \frac{\mu^2 T}{2}R(s+u,\ s+u) - \lambda\mu TR(s,\ s+u) + T(Q(s)+Q(s+u))\,O(|\lambda|^3+|\mu|^3) + B(T)(|X(s)|+|X(s+u)|+X(s,\ s+u))\,O(\lambda^2+\mu^2), \quad (4)$$

где оценки O равномерны по всем переменным.

Рассмотрим слагаемые в формуле (4). Имеем

$$Q(s) = m\int_0^s G(s-v)\,dv + \int_0^s G(s-v)\,\varepsilon(v)\,dv =$$
$$= m\mathsf{M}\tau_j - m\int_s^\infty G(v)\,dv + \int_0^s G(s-v)\,\varepsilon(v)\,dv.$$

Разбивая последний интеграл на две части $\int_0^{s/2} + \int_{s/2}^s$, мы без труда получим для него (см. условия (2), (3)) оценку $O(s^{-\alpha})$. Так как, кроме того, очевидно, $\int_s^\infty G(v)\,dv = O(s^{-\alpha})$, то при фиксированных t и u мы находим

$$Q(s) = m\mathsf{M}\tau_j + O\left(t_0^{-\alpha}\right), \quad Q(s+u) = m\mathsf{M}\tau_j + O\left(t_0^{-\alpha}\right).$$

Рассмотрим теперь процессы

$$X(s) = \int_0^s G(s-v)\,dx(v) = \int_0^{s-N} + \int_{s-N}^s. \tag{5}$$

Здесь второй интеграл, равный $\int_0^N G(u)\,dx(s-u)$, сходится при фиксированном N в силу C-сходимости процессов $x(t_0+v) - x(t_0)$ к

$$\int_0^N G(u)\,d\xi(t-u) = \int_{t-N}^t G(t-v)\,d\xi(v).$$

Первый интеграл в (5) выбором N может быть сделан сколь угодно малым (по вероятности). Действительно,

$$\int_0^{s-N} G(s-v)\,dx(v) =$$
$$= x(s-N)\,G(s) + \int_0^{s-N} (x(s-N) - x(v))\,dG(s-v).$$

В силу условия (1) при $s \to \infty$

$$\mathsf{M}\left|\int\limits_0^{s-N} G(s-v)\,dx(v)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c(s-N)\,G(s) + c\int\limits_0^{s-N} \max(1,\ s-N-v)\,dG(s-v) =$$

$$= o(1) + cNG(N) + c\mathsf{M}(\tau_j;\ |\tau_j| \geqslant N).$$

Это выражение выбором N можно сделать сколь угодно малым равномерно по всем достаточно большим T.

Так как аналогичное заключение справедливо относительно

$$\mathsf{M}\left|\int\limits_{-\infty}^{t-N} G(t-v)\,d\xi(v)\right|,$$

то мы получили, что распределение $X(s)$ сходится к распределению

$$\Xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-v)\,d\xi(v).$$

Совершенно так же убеждаемся в сходимости распределений $i\lambda X(s) + i\mu X(s+u)$ и $X(s, u)$.

Обратимся, наконец, к функции $R(s, s+u)$, присутствующей в (4). Имеем (ср. с оценкой $Q(s)$)

$$R(s,\ s+u) = m\int\limits_0^{s} G(s+u-v)\,F(s-v)\,dv + O(s^{-\alpha}) =$$

$$= m\int\limits_0^{\infty} G(v+u)\,F(v)\,dv + O\left(t_0^{-\alpha}\right).$$

Подставляя теперь полученные результаты в (4), мы обнаруживаем, что распределение случайной величины

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{G}} \exp\{i\lambda z(t) + i\mu z(t+u)\}$$

сходится при $T \to \infty$ к распределению

$$\exp\left\{i\lambda B\Xi(t) + i\mu B\Xi(t+u) - \right.$$
$$\left. - \frac{K^2}{2}\left[\lambda^2 R(0) + 2\lambda\mu R(u) + \mu^2 R(0)\right]\right\},$$

если только $t_0^{-\alpha}T = o(A(T))$. Так как при $t_0^{2\alpha} \gg T$ последнее соотношение выполнено, то, рассуждая точно так же, как в доказательстве теоремы § 1, мы придем к сходимости двумерных распределений процессов $z(t)$. Сходимость произвольных конечномерных распределений, очевидно, может быть доказана точно так же.

Докажем теперь C-сходимость. Здесь, как и в теореме § 1, процесс*) $z(t)$ можно представить (с точностью до величины $TA^{-1}(T)(Q(s) - m\mathsf{M}\tau_j) = o(1)$, $s = t_0 + t$) в виде суммы двух компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$, определенных в (10) § 1 (с заменой в правых частях t на $s = t_0 + t$). Компонента $z_2(t)$ равна

$$z_2(t) = \frac{B(T)}{A(T)} X(s).$$

Приращение $\Delta z_2(t)$ представим в виде

$$\Delta z_2(t) = \frac{B(T)}{A(T)}\left[\Delta x(s) - \int_{-\Delta}^{s} \Delta x(v)\, dG(s-v)\right].$$

Так как

$$\mathsf{M}\left|\int_{-\Delta}^{s-N} \Delta x(v)\, dG(s-v)\right| \leqslant c \int_{-\Delta}^{s-N} dG(s-v) \leqslant cG(N)$$

может быть выбором N сделано сколь угодно малым, а $\left|\int_{s-N}^{s} \Delta x(v)\, dG(s-v)\right| \leqslant \omega_\Delta^{C,N}(x_0)$, где $\omega_\Delta^{C,N}(x_0)$ — модуль непрерывности $x_0(t) = x(t_0 + t) - x(t_0)$ на отрезке длины N, то

$$\limsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left(\omega_\Delta^C(z_2) > \delta\right) \leqslant \limsup_{T\to\infty}\left[\mathsf{P}\left(\omega_\Delta^{C,N}(x_0) > \delta/2\right) + \right.$$
$$\left. + \mathsf{P}\left(\left|\int_{-\Delta}^{s-N} \Delta x(v)\, dG(s-v)\right| > \delta/2\right)\right]. \quad (6)$$

*) Обозначения $z(t)$ здесь и в § 1 имеют разный смысл.

Для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать сначала N так, чтобы второе слагаемое было меньше $\varepsilon/2$, а затем Δ — так, чтобы и первое слагаемое стало меньше $\varepsilon/2$. Так как левая часть в (6) от N не зависит, то это будет означать компактность в C распределений $z_2(t)$.

Рассмотрим теперь компоненту

$$z_1(t) = A^{-1}(T) \sum_{k=1}^{e(s)} (\chi_k(s) - G(s - v_k))$$

и будем следовать тому же пути доказательства, который был использован в § 1. Не ограничивая общности, мы и здесь можем оценивать лишь модуль непрерывности $\omega_\Delta^C(z_1)$ на единичном отрезке $t \in [0, 1]$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t_0 + 1)$. Вводя опять обозначения $\omega(t, t+\Delta)$, $\omega_\Delta^{[N]}$, мы получим для них неравенства (16)—(18) § 1, где, однако, функцию E следует заменить на функцию $E_0(t) = E(t_0 + t) - E(t_0)$. Прежде чем использовать соотношение (19) § 1, заметим, что по условию функция $m(v)$ имеет производную $m'(v) = m + \varepsilon(v) \to m$ при $v \to \infty$. Следовательно, и $P(v)$ имеет производную

$$P'(v) = \int_0^v (m + \varepsilon(u))\, dF(v-u) \to m$$

при $v \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших t_0

$$\Delta P_0(t) \leqslant 2m\Delta,$$

где индекс 0 у некоторой функции $y(t)$ означает, что рассматривается разность $y_0(t) = y(t_0 + t) - y(t_0)$.

Поэтому в силу (21) § 1 мы получим с точностью до очевидных изменений все те же неравенства, которые имели место в § 1 (все изменения связаны с заменой функций E, P, x, X на функции E_0, P_0, x_0, X_0). В результате при $N \leqslant T^{1/20}$ будет справедливо соотношение

$$\lim_{l \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \mathsf{P}\left(\omega_\Delta^{[N]} \geqslant \delta\right) = 0$$

и нам остается такое же соотношение получить для $\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^N} \left\{\omega\left(\frac{k-1}{2^N}, \frac{k}{2^N}\right) \geqslant \delta\right)\right.$. Но и здесь рассуждения ничем не отличаются от доказательства в § 1. Это завершает доказательство C-сходимости к стационарному процессу и доказательство теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы легко видеть, что при экспоненциальном убывании функций $G(t)$ и $\varepsilon(t)$ вхождение системы в стационарный режим начиналось бы со значений t_0 порядка $\ln T$.

Если $\xi(t)$ — винеровский процесс, то стационарный процесс

$$\zeta(t) = K\theta(t) + B\int_{-\infty}^{t} G(t-u)\,d\xi(u)$$

вместе с $\theta(t)$ будет гауссовским. Его корреляционная функция равна

$$R(u) = mK^2\int_0^\infty G(v+u)F(v)\,dv + B^2\int_0^\infty G(v)G(v+u)\,dv =$$

$$= \int_0^\infty [K^2mF(v) + B^2G(v)]\,G(u+v)\,dv.$$

В частном случае, когда τ_j распределено показательно

$$G(t) = e^{-\beta t}, \quad \beta > 0,$$

мы получим

$$R(u) = \frac{K^2m + B^2}{2\beta}e^{-\beta u}.$$

Это означает, что $\zeta(t)$ является марковским стационарным гауссовским процессом, представимым в виде

$$\zeta(t) = \sqrt{K^2m + B^2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-v)}\,dw(v),$$

где $w(v)$ — стационарный винеровский процесс. Такого же рода процессы мы будем получать в качестве предельных в главе III и будем описывать их как диффузионные процессы с постоянным коэффициентом диффузии и коэффициентом сноса $a(x) = -ax$, $a > 0$ (см. § 3 гл. I).

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание. Рассмотрим предельное распределение числа обслуженных вызовов $s(t)=e(t)-q(t)$ (мы предполагаем, что $n=\infty$). Так как

$$y(t)=\frac{s(t)-TP(t)}{A(T)}=\frac{B(T)}{A(T)}x(t)-\frac{q(t)-TQ(t)}{A(T)},$$

то из приведенного выше доказательства теоремы нетрудно получить утверждение о сходимости процессов $y(t_0+t)$ к процессу

$$-K\theta(t)+B\left(\xi(t)-\int_{-\infty}^{t}G(t-v)\,d\xi(v)\right)=$$

$$=-K\theta(t)+B\int_{-\infty}^{t}\xi(v)\,dG(t-v) \qquad (7)$$

со стационарными приращениями (здесь вместо $-K\theta(t)$ можно писать $K\theta(t)$, т. е. распределения этих процессов совпадают).

Кроме того, процесс $s(t)$, рассматриваемый как некоторый новый входной поток, будет удовлетворять всем условиям, наложенным на процесс $e(t)$ в доказанной в этом параграфе теореме. Центрирующая функция процесса $s(t)$ равна

$$P(t)=\int_0^t F(t-v)\,dm(v)=\int_0^t (1-G(t-v))(m+\varepsilon(v))\,dv=$$

$$=\int_0^t (m+\varepsilon_P(v))\,dv, \text{ где } |\varepsilon_P(v)|<cv^{-\alpha}.$$

Нормирующий множитель равен $A(T)$, а предельный процесс записан в (7). Легко проверить, что оставшееся неравенство (3) в условии 1 теоремы также выполнено. Сами процессы $q(t)$ и $s(t)$ в условиях как § 1, так и § 2 можно записать в форме

$$q(t)=\int_0^t G(t-v)\,de(v)+\sqrt{T}\,\theta_T(t),$$

$$s(t)=\int_0^t F(t-v)\,de(v)-\sqrt{T}\,\theta_T(t),$$

где $\theta_T(t)$ от $e(t)$ не зависят и C-сходятся к гауссовскому процессу $\theta(t)$, определенному в формулировках теорем. Эти равенства справедливы во всяком случае как равенства *по распределению.*

Сделанные замечания будут использованы нами в следующем параграфе.

§ 3. Связь с ветвящимися процессами с интенсивной иммиграцией

Рассмотрим теперь с несколько иной точки зрения задачу о распределении $q(t)$, обсуждавшуюся в предыдущих двух параграфах. Представим себе $e(t)$ как процесс, описывающий рождение некоторых частиц ($e(t)$ равно числу частиц, родившихся за время t). Частица с номером j живет время τ_j, затем умирает. Тогда, очевидно, $q(t)$ может быть интерпретировано (см. индикаторное представление (3) § 1 для $q(t)$) как число живых частиц в момент времени t, а $s(t)$ — как число погибших частиц.

Предположим теперь, что частицы по истечении времени жизни не гибнут, а делятся, производя на свет случайное число частиц такого же типа. То есть частица с номером k спустя время τ_k после рождения делится на μ_k новых частиц, где случайные величины μ_k независимы от $\{\tau_j\}$ и между собой,

$$\mathbf{M}\mu_k = \mu < 1, \quad \mathbf{D}\mu_k = \sigma^2 < \infty.$$

Мы получаем, таким образом, поток частиц $e_2(t)$ второго поколения. Каждая из частиц второго поколения снова живет случайное время, распределенное как τ_1, и делится по тому же закону, что и частицы первого поколения, и независимо от судьбы других частиц. Частицы третьего и всех последующих поколений ведут себя точно таким же образом.

Мы получили в результате ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста и с иммиграцией (см. [68]). Иммиграция описывается процессом $e(t)$. Если этот процесс удовлетворяет условиям теорем §§ 1, 2, то мы будем говорить об *интенсивной* иммиграции.

Так как $\mu = M\mu_k < 1$, то рассматриваемые процессы являются *докритическими*. При этом рассматривается схема серий ($e(t)$ зависит от растущего параметра T), в которой, однако, распределение $F(t)$ времени жизни частицы и распределение числа потомков (распределение μ_k) остаются фиксированными.

Итак, пусть дан процесс иммиграции $e(t)$, удовлетворяющий условиям §§ 1, 2. Тогда, как отмечалось в конце § 2, процесс $s(t)$ можно представить в виде

$$s(t) = \int_0^t F(t-v)\,de(v) - \sqrt{T}\,\theta(t) = F * e(t) - \sqrt{T}\,\theta(t),$$

где $\theta(t)$ (индекс T мы для краткости опускаем) на каждом фиксированном интервале C-сходится к гауссовскому процессу с ковариационной функцией

$$R(t, t+u) = \int_0^t G(t+u-v)\,F(t-v)\,dm(v) = H_u * m(t), \qquad (1)$$

где $H_u(t) = F(t)\,G(t+u)$.

Рассмотрим приращение $\Delta s(t) = \Delta E(t) - \sqrt{T}\,\Delta\theta(t)$ процесса $s(t)$ на интервале времени $[t, t+\Delta]$. При малом, но фиксированном Δ это число неограниченно растет при $T \to \infty$ и представляет собой число частиц первого поколения, у которых в этом интервале времени кончилось время жизни. Число частиц второго поколения, появившихся за этот интервал, можно представить (по распределению) в виде

$$\mu\,\Delta s(t) - \sigma w(\Delta s(t)), \qquad (2)$$

где w — процесс, C-сходящийся к стандартному винеровскому процессу.

Учитывая, что для непересекающихся интервалов времени и фиксированной траектории $s(t)$ количества родившихся частиц второго поколения независимы, мы можем (2) приближенно (с тем же предельным распределением) записать также в виде

$$\mu\,\Delta F * e(t) - \mu\sqrt{T}\,\Delta\theta(t) - \sigma\sqrt{T}\,\Delta w(F * m(t)).$$

Это означает, что суммарное число частиц второго поколения, появившихся до момента времени t, можно (по распределению) представить в виде

$$e_2(t) = \mu F * e_1(t) - \sqrt{T}\,[\mu\theta_1(t) + \sigma w_1(F * m_1(t))], \qquad (3)$$

где $e_1 = e$, $\theta_1 = \theta$, $w_1 = w$, $m_1 = m$ — процессы, соответствующие потоку частиц первого поколения. Мы снабдили их индексом 1, чтобы отличать в будущем от аналогичных процессов для потоков частиц второго, третьего и т. д. поколений. Из замечаний в конце § 2 следует, что процесс $e_2(t)$ вместе с $e_1(t) = e(t)$ удовлетворяет условиям теорем в §§ 1, 2.

Формула (3) выясняет правило, по которому процесс появления частиц второго поколения образуется из процесса $e_1(t)$ частиц первого поколения. Но совершенно очевидно, что таким же образом число частиц k-го поколения будет связано с числом частиц $(k-1)$-го поколения. При этом каждый раз будет появляться новая пара процессов θ_{k-1}, w_{k-1}, которая не будет зависеть от всех предыдущих.

Так как процессу $e_2(t)$ (см. (3)) соответствует функция $m_2(t) = \mu F * m_1(t)$, то мы получаем для частиц третьего поколения

$$\begin{aligned} e_3(t) &= \mu F * e_2(t) - \sqrt{T}\,[\mu\theta_2(t) + \sigma w_2(F * m_2(t))] = \\ &= \mu^2 F^{(2)} * e_1(t) - \sqrt{T}\,[\mu^2 F * \theta_1(t) + \sigma\mu F * w_1(F * m_1)(t)] - \\ &\qquad - \sqrt{T}\,[\mu\theta_2(t) + \sigma w_2(\mu F^{(2)} * m_1(t))], \end{aligned}$$

где $F^{(k)}$ — k-кратная свертка F, равная функции распределения $\tau_1 + \ldots + \tau_k$. Для четвертого поколения

$$\begin{aligned} e_4(t) = \mu^3 F^{(3)} * e(t) &- \sqrt{T}\,[\mu^3 F^{(2)} * \theta_1(t) + \\ &+ \sigma\mu^2 F^{(2)} * w_1(F * m)(t)] - \sqrt{T}\,[\mu^2 F * \theta_2(t) + \\ &+ \sigma\mu F * w_2(\mu F^{(2)} * m)(t)] - \sqrt{T}\,[\mu\theta_3(t) + \\ &\qquad + \sigma w_3(\mu^2 F^{(3)} * m(t))] \end{aligned}$$

и т. д. Производя формальное суммирование, мы получим представление для процесса $\mathscr{E}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(t)$, описывающего суммарное появление частиц всех поколений.

Именно, если обозначить $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F^{(k)}$, то

$$\mathscr{E}(t) = \Phi * e(t) - \sqrt{T}\,\mu\Phi * (\theta_1 + \theta_2 + \ldots)(t) - \\ - \sqrt{T}\,\sigma\Phi * (w_1(F * m) + w_2(\mu F^{(2)} * m) + \ldots)(t) = \\ = \Phi * e(t) - \sqrt{T}\,[\mu\Phi * \theta(t) + \sigma\Phi * w(F * \Phi * m)(t)],$$

где в силу независимости θ_j и w_j предельные процессы для θ и w являются снова соответственно гауссовским и винеровским процессами ($w_1(g(t)) + w_2(h(t))$ распределено в пределе так же как $w_1(g(t) + h(t))$), при этом корреляционная функция $R(t, t+u)$, соответствующая $\theta(t)$, равна сумме корреляционных функций (1), где вместо m следует подставлять последовательно $m_1 = m$, $m_2 = \mu F * m$, $m_3 = \mu^2 F^{(2)} * m$ и т. д.:

$$R(t,\ t+u) = H_u * \Phi * m(t).$$

Функция

$$(1-\mu)\,\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (1-\mu) F^{(k)}(t)$$

представляет из себя функцию распределения суммы

$$S_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \tau_j \tag{4}$$

случайного числа величин τ_j, $j = 1, 2, \ldots$, где ν не зависит от $\{\tau_j\}$ и имеет показательное распределение

$$\mathsf{P}(\nu = k) = (1-\mu)\,\mu^k, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

(мы принимаем $S_0 = 0$).

Из сказанного следует, что процессы

$$\mu\Phi * \theta(t) + \sigma\Phi * w(F * \Phi * m)(t)$$

также будут сходиться к гауссовскому процессу, корреляционную функцию которого легко выписать на основании предыдущего в явном виде.

Таким образом, мы нашли предельное представление для суммарного числа всех частиц, появившихся в системе до момента t.

Найдем теперь аналогичное представление для основной характеристики рассматриваемых процессов — числа живых частиц в момент времени t.

Как мы уже знаем, число частиц первого поколения, не доживших до момента t, равно

$$s_1(t) = s(t) = F * e_1(t) - \sqrt{T}\,\theta_1(t).$$

Число частиц второго поколения, не доживших до момента t, равно

$$\begin{aligned} s_2(t) &= F * e_2(t) - \sqrt{T}\,\theta_2(t) = \\ &= \mu F^{(2)} * e(t) - \sqrt{T}\,[\mu F * \theta_1(t) + \sigma F * w_1(F * m)(t)] - \\ &\qquad\qquad - \sqrt{T}\,\theta_2(t) \end{aligned}$$

и т. д. Суммируя эти представления, мы аналогично предыдущему получим процесс $\mathscr{S}(t)$, выражающий суммарное число частиц всех поколений, не доживших до момента t:

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(t) &= F * \Phi * e(t) - \\ &\qquad - \sqrt{T}\,[\Phi * \theta(t) + \sigma F * \Phi * w(F * \Phi * m)(t)]. \end{aligned}$$

Отсюда находим искомое выражение для числа частиц $\mathscr{Q}(t) = \mathscr{E}(t) - \mathscr{S}(t)$ в момент t:

$$\begin{aligned} \mathscr{Q}(t) &= G * \Phi * e(t) + \\ &\qquad + \sqrt{T}\,[(1-\mu)\,\Phi * \theta(t) - \sigma G * \Phi * w(F * \Phi * m)(t)]. \end{aligned}$$

Полученное соотношение дает возможность в условиях §§ 1, 2 получить вид предельных процессов для $\mathscr{Q}(t)$.

Например, в условиях теоремы 1 § 1 процессы

$$\frac{\mathscr{Q}(t) - TG * \Phi * m(t)}{A(T)}$$

будут C-сходиться к процессу

$$BG * \Phi * \xi(t) + K\,[(1-\mu)\,\Phi * \theta(t) - \sigma G * \Phi * w(F * \Phi * m)(t)]$$

(здесь мы, чтобы не вводить новых обозначений, теми же буквами θ и w обозначили предельные процессы).

В условиях § 2 при $T\to\infty$, $t\to\infty$ будут иметь место соотношения

$$
\begin{aligned}
(1-\mu)\,\Phi * m(t) &= \int_0^t (m+\varepsilon_1(v))\,dv,\\
F*(1-\mu)\,\Phi * m(t) &= \int_0^t (m+\varepsilon_2(v))\,dv,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\varepsilon_1(v)$, $\varepsilon_2(v)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функция $\varepsilon(v)$ в теореме § 2;

$$
\begin{aligned}
R(t,\ t+u) = H_u * \Phi * m(t) \to R(u) &= \\
= \frac{m}{1-\mu}\int_0^\infty G(u+v)\,F(v)\,dv &= \frac{m}{1-\mu}R(u),
\end{aligned}
$$

где $R(u)$ определена в теореме § 2. Корреляционная функция процесса $(1-\mu)\Phi * \theta(t)$ при больших t будет сходиться к

$$
\begin{aligned}
R^*(u) = (1-\mu)^2\int_0^\infty\int_0^\infty R(u+v-z)\,d\Phi(v)\,d\Phi(z) &= \\
&= \mathrm{M}R(u+S_\nu-S'_\nu),
\end{aligned}
$$

где S'_ν распределено так же, как S_ν, и не зависит от S_ν.

Так как в силу (6)

$$
G * \Phi * m(t) = \frac{m\mathrm{M}\tau_j}{1-\mu} + O\left(t^{-\alpha}\right),
$$

то при $T\to\infty$ и $t_0^{2\alpha}\gg T$. Процессы

$$
\frac{Q(t_0+t) - T\dfrac{m\mathrm{M}\tau_j}{1-\mu}}{A(T)}
$$

будут C-сходиться на каждом конечном интервале значений t к стационарному процессу

$$
\begin{aligned}
B\int_{-\infty}^t (G*\Phi)(t-v)\,d\xi(v) &+ \\
&+ K\left[\theta^*(t) - \sigma\sqrt{\frac{m}{1-\mu}}\int_{-\infty}^t G*\Phi(t-v)\,dw(v)\right].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, $\theta^*(t)$ — стационарный гауссовский процесс с корреляционной функцией

$$R^*(u) = \frac{m}{1-\mu} \mathsf{M} R(u + S_\nu - S'_\nu).$$

Функция R определена в теореме § 2, S_ν и S'_ν независимы и одинаково распределены (см. (4), (5)). Все три процесса $\xi(t)$, $\theta^*(t)$, $w(t)$ в (7), возникающие соответственно за счет случайности входного потока, случайности длительности жизни и случайности в числе потомков, независимы.

Можно заметить также, что здесь $G * \Phi$ можно представить в виде разности

$$G * \Phi(t) = \mathsf{P}(S_\nu > t) - \mathsf{P}(S_{\nu+1} > t).$$

Рассуждения, приведенные в этом параграфе, хотя и были весьма прозрачными, носили нестрогий характер. Обусловлено это тем, что отсутствующее обоснование предельных переходов (задача в основном техническая) значительно увеличило бы размер параграфа. Поэтому мы укажем лишь основное место, где требуются некоторые усилия, чтобы сделать рассуждения точными — это обоснование формального суммирования процессов $e_k(t)$ и $s_k(t)$. Однако задача здесь существенно облегчается экспоненциальным убыванием слагаемых.

§ 4. О предельных процессах для систем с отказами и с очередью, когда число каналов является переходным

Мы видели (см. §§ 1, 2), что если число каналов обслуживания $n = n_T$ таково, что

$$\frac{n - TQ(t_0)}{A(T)} \to \infty \tag{1}$$

при $T \to \infty$, то вид системы обслуживания (наличие отказов или очереди) не влияет на предельное распределение числа занятых линий $q(t)$. Однако, если

$$n = TQ(t_0) + DA(T), \tag{2}$$

где D конечно и от T не зависит, то положение станет существенно иным.

Случай (2) естественно называть *переходным* между задачей, рассмотренной в параграфах 1, 2, и случаем, когда число каналов существенно меньше критического значения $TQ(t_0)$ (об этом см. § 7).

Здесь уже становится существенным тип системы обслуживания, а ее поведение будет различным в зависимости от того, как ведут себя вызовы, заставшие систему занятой.

Мы будем здесь предполагать для простоты, что $m(t)=t$, $B(T)=A(T)=\sqrt{T}$.

Если речь идет о *существенно нестационарном режиме* (t_0 фиксировано, $Q(t_0)<\mathsf{M}\tau_j$) и при этом существует $Q'(t_0)>0$, то переход к случаю (2) представляет собой малосодержательную задачу. Действительно, в этих условиях для $t<t_0-\delta_T$, где δ_T убывает чуть медленнее $A(T)T^{-1}$, мы можем считать выполненным условие (1). Отсюда уже нетрудно получить, что распределение $\frac{q(t_0)-TQ(t_0)}{\sqrt{T}}$ будет по-прежнему (как и в теореме § 1) описываться с помощью распределения

$$\zeta(t_0)=\theta(t_0)+\int_0^{t_0} G(t_0-u)\,d\xi(u)$$

для систем с очередью и с помощью распределения

$$\min(D,\ \zeta(t_0))$$

для систем с отказами.

Значительно сложнее обстоит дело с описанием *стационарных* распределений $q(t)$ в случае (2). Мы предположим для простоты, что τ_j ограничены с вероятностью 1 некоторой постоянной c, и будем рассматривать значения $t>c$,

$$n=T\mathsf{M}\tau_j+D\sqrt{T}.$$

Мы приведем здесь лишь некоторые соображения и нестрогие рассуждения с целью охарактеризовать вид предельных распределений $q(t)$ в случае (2) для систем с отказами и систем с очередью, Рассмотрим сначала системы с отказами и изложим один из возможных путей построения предельных процессов. Для этого предположим, что $n=\infty$, и введем «рандомизированные» отказы, представляющие и самостоятельный интерес. Именно, мы будем предполагать, что каждый вызов, пришедший в систему, получает отказ с вероятностью φ независимо (при фиксированном значении q в момент прихода вызова) от поведения других вызовов. Вероятность φ мы будем предполагать непрерывно зависящей от нормированного числа занятых линий $z=\dfrac{q-TM\tau_j}{\sqrt{T}}$. Тогда из числа вызовов $\Delta e(u)= =e(u+\Delta)-e(u)=T\Delta+\sqrt{T}\Delta x(u)$, пришедших за интервал времени $(u, u+\Delta)$ по теореме Муавра — Лапласа к моменту t, останется в системе примерно

$$\Delta e(u)\, G(t-u)[1-\varphi(z(u))]+$$
$$+\sqrt{\Delta e(u)\, G(t-u)[1-\varphi(z(u))][1-G(t-u)(1-\varphi(z(u)))]}\,w \tag{3}$$

вызовов, где величина w распределена нормально с параметрами $(0, 1)$. Так как для разных Δu величины w независимы, то $\sqrt{\Delta}\, w$ можно представить как приращения $\Delta w(u)$ некоторого винеровского процесса. Суммируя по всем Δu, мы придем к следующему приближенному представлению для $q(t)$:

$$T\int_0^t G(t-u)[1-\varphi(z(u))]\,du+$$
$$+\sqrt{T}\int_0^t G(t-u)[1-\varphi(z(u))]\,d\xi(u)+\sqrt{T}\times$$
$$\times\int_0^t \sqrt{G(t-u)[1-\varphi(z(u))][1-G(t-u)(1-\varphi(z(u)))]}\,dw(u).$$

Предположив теперь, что

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_0(z),$$

где φ_0 от T не зависит, мы получим для предела $\zeta(t)$ нормированного процесса $z(t)=\dfrac{q(t)-TM\tau_i}{\sqrt{T}}$ уравнение

$$\zeta(t)=-\int_0^t G(t-u)\,\varphi_0(\zeta(u))\,du+\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u)+\theta(t), \qquad (4)$$

где $\theta(t)$ — тот же гауссовский процесс, что и в §§ 1, 2.

Допустим, что решение этого уравнения для любой гладкой неубывающей функции φ_0 существует. Тогда процесс $\zeta^*(t)$ для систем с отказами можно строить как предел решений $\zeta_N(t)$ уравнения (4) при $N\to\infty$ для функций $\varphi_0^N(z)=0$ при $z\leqslant D$ и $\varphi_0^N(z)=N$ при $z>D+1/N$.

Таким образом, здесь задача состоит в установлении близости распределения процессов $z(t)$ для систем с отказами и процессов $\zeta_N(t)$ при больших T и N (что интуитивно достаточно ясно) и в доказательстве существования решения уравнения (4).

Все рассмотрения можно значительно упростить, если

$$G(t)=e^{-\alpha t}.$$

В этом случае для систем с отказами предельный процесс $\zeta(t)$ будет представлять собой диффузионный марковский процесс с известными коэффициентами и с отражением от границы D (см. гл. III).

В общем случае искомый процесс $\zeta(t)$ может иметь весьма сложную природу.

Не менее трудным оказывается описание предельного процесса $\zeta(t)$ для *систем с очередью* в случае (2). Здесь наряду с процессами

$$e(t)=Tt+\sqrt{T}\,x(t), \qquad x\underset{C}{\Rightarrow}\xi,$$

$$q(t)=n+\sqrt{T}\,y(t) \qquad (y(t)=z(t)-D)$$

введем в рассмотрение также процессы $H(t)$ интенсивности занятия каналов и $L(t)$ — интенсивности освобождения каналов. $H(t)$ равно числу вызовов, которое было принято на обслуживание за время t (в случае $n=\infty$ $H(t)=e(t)$). Для простоты мы считаем $H(0)=0$. $L(t)$ определяется аналогично — это есть число вызовов, покинувших систему после обслуживания к моменту времени t. Процессы H, L, y и e связаны между собой соотношениями

$$H(t)=\int_0^t \delta(y(u))\,de(u)+\int_0^t [1-\delta(y(u))]\,dL(u), \tag{5}$$

где

$$\delta(y)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad y<0, \\ 0 & \text{при} \quad y\geqslant 0. \end{cases}$$

Смысл этого равенства весьма прост: интенсивность H на малом интервале времени Δ совпадает с интенсивностью e, когда не все каналы заняты, и совпадает с интенсивностью освобождения каналов, когда имеется очередь.

Обозначим

$$\frac{H(t)-Tt}{\sqrt{T}}=h(t), \quad \frac{n+L(t)-Tt}{\sqrt{T}}=l(t).$$

Рассматривая процесс $l(t)$, мы можем ограничиться лишь полуосью (l_0, ∞), где $l_0=\inf(u: q(u)\geqslant n)$. (При $t<l_0$ значения $l(t)$ могут неограниченно возрастать.)

Тогда соотношение (5) в терминах процессов h и l запишется в виде

$$h(t)=\int_0^t \delta(y(u))\,dx(u)+\int_0^t [1-\delta(y(u))\,dl(u). \tag{6}$$

Кроме того, так как $q(t)=e(t)-L(t)$, то $y(t)=x(t)-l(t)$.

Наконец, мы можем получить третье соотношение между y, x, l и h (где y, l и h неизвестны), если рассмотрим, из чего складывается величина $L(t)$. Как и для систем с отказами рассмотрим интервалы $(u, u+\Delta)$ на отрезке $[0, t]$. Из числа

$$\Delta H(u)=\Delta T+\sqrt{T}\,\Delta h(u)$$

занятых в этом интервале каналов к моменту t по теореме Муавра — Лапласа освободится примерно

$$F(t-u)\,\Delta H(u)+\sqrt{F(t-u)\,G(t-u)\,\Delta H(u)}\;\omega$$

каналов, где w нормально распределена с параметрами $(0, 1)$. Как и прежде, это выражение можно записать в виде

$$TF(t-u)\Delta + \sqrt{T}\,F(t-u)\,\Delta h(u) + \\ + \sqrt{TF(t-u)\,G(t-u)}\,\Delta w(u),$$

где $w(u)$ — некоторый винеровский процесс. Суммируя по всем Δu, мы придем к следующему приближенному соотношению:

$$L(t) = Th - T\mathsf{M}\tau_j + \sqrt{T}\left[\int_0^t F(t-u)\,dh(u) + \theta(t)\right]. \qquad (7)$$

Здесь $\theta(t)$ есть гауссовский процесс, не зависящий от $x(t)$, корреляционная функция которого, как нетрудно убедиться, та же, что и корреляционная функция процесса $\theta(t)$, фигурирующего в § 1. Так как

$$n = T\mathsf{M}\tau_j + D\sqrt{T},$$

то из (7) следует, что

$$l(t) = D + \int_0^t F(t-u)\,dh(u) + \theta(t). \qquad (8)$$

Предполагая, что процессы $y(t)$, $h(t)$ и $l(t)$ сходятся в нужном смысле (так, чтобы сходились распределения интегралов в (6) и (8)) соответственно к некоторым процессам $\varkappa(t)$, $\eta(t)$ и $\lambda(t)$, мы получим для этих предельных процессов уравнения

$$\varkappa(t) = \xi(t) - \lambda(t),$$

$$\lambda(t) = D + \int_0^t F(t-u)\,d\eta(u) + \theta(t), \qquad (9)$$

$$\eta(t) = \int_0^t \delta(\varkappa(u))\,d\xi(u) + \int_0^t [1-\delta(\varkappa(u))]\,d\lambda(u).$$

Ясно, что ответить на вопрос о свойствах и существовании решений этих уравнений весьма трудно.

Существенное упрощение наступает лишь в случае

$$G(t) = e^{-\alpha t}.$$

Тогда процесс $\zeta = \varkappa + D$ оказывается диффузионным с постоянной диффузией и с коэффициентом сноса (см. гл. III)

$$a(x) = \max(-ax, -aD), \qquad a > 0.$$

Поскольку вряд ли можно надеяться на простое решение уравнений (4), (9), то этот параграф показывает нам, что исследование асимптотического поведения систем с очередью или с отказами в случае (2) и для произвольной функции распределения F связано с весьма существенными трудностями.

Если число каналов n таково, что

$$\frac{n - T\mathsf{M}\tau_j}{\sqrt{T}} \to -\infty,$$

то для систем с очередью последняя будет неограниченно возрастать с ростом t. Изучение предельного распределения $q(t)$ в этом случае больших трудностей не составляет. Для систем с отказами при $n < rT\,\mathsf{M}\tau_j$, $r < 1$ число свободных каналов будет иметь в широких предположениях собственное предельное распределение, которое можно найти в явном виде (см. § 7 этой главы). Упоминавшееся выше описание систем с очередью и с отказами с помощью диффузионных процессов содержится в главе III.

§ 5. Обобщение основной теоремы для числа занятых линий на случай зависимых времен обслуживания

В этом параграфе мы будем рассматривать задачу об асимптотическом поведении числа занятых линий $q(t) = q_T(t)$ в условиях § 1, с той, однако, существенной разницей, что теперь времена обслуживания τ_j будут зависимыми величинами. Именно, мы будем предполагать, что последовательность $\{\tau_j\}$ не зависит от входного процесса $\{e(t)\}$ и является *стационарной* последовательностью, удовлетворяющей условиям *равномерно сильного перемешивания* (р. с. п)

$$\sup_{A \in \mathfrak{S}_1^k,\, B \in \mathfrak{S}_{k+s}^\infty} |\mathsf{P}(B/A) - \mathsf{P}(B)| = \varphi(s) \to 0 \qquad (1)$$

при $s \to \infty$, где $\mathfrak{S}_k^l$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\tau_k, \ldots, \tau_l$. Условие (1) можно эквивалентным образом записать также в виде (см. [48])

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega} \left| \mathsf{P}_{\mathfrak{S}_1^k}(B) - \mathsf{P}(B) \right| \leqslant \varphi(s) \to 0,$$

где $B \in \mathfrak{S}_{k+s}^\infty$, или в виде

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega} \left| \mathsf{M}_{\mathfrak{S}_1^k}\xi - \mathsf{M}\xi \right| \leqslant \varphi(s) \to 0, \tag{2}$$

где ξ измерима относительно $\mathfrak{S}_{k+s}^\infty$, $\mathsf{P}(|\xi| \leqslant 1) = 1$. Как и прежде, мы будем обозначать

$$G(t) = \mathsf{P}(\tau_j > t), \quad Q(t) = \int_0^t G(t-u)\,dm(u).$$

Кроме того, положим

$$G_k(u, v) = \mathsf{P}(\tau_1 > u, \tau_{k+1} > v), \qquad -\infty < k < \infty,$$

где $\ldots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, \tau_0, \ldots$ есть распространение последовательности $\{\tau_j\}_{j=0}^\infty$ до последовательности $\{\tau_j\}_{j=-\infty}^\infty$, заданной «на всей оси».

Теорема 1. *Предположим, что функция $G(t)$ непрерывна и что последовательность $\varphi(s)$ в условии р. с. п. удовлетворяет соотношению*

$$\varphi = \sum_{s=1}^\infty \varphi(s) < \infty.$$

Пусть, далее, последовательность процессов

$$x(u) = \frac{e(u) - Tm(u)}{B(T)},$$

где $m(u)$ — некоторая монотонно возрастающая функция, C-сходится на $[0, t_0]$ к процессу $\{\xi(u), 0 \leqslant u \leqslant t_0\}$.

Обозначим, как и прежде, $A(T) = \max(B(T), \sqrt{T})$ и допустим, что $\frac{B(T)}{A(T)} \to B \geqslant 0$, $\frac{\sqrt{T}}{A(T)} \to K \geqslant 0$. Тогда, если число каналов обслуживания $n = \infty$, то конечномерные распределения процесса

$$z(t) = \frac{q(t) - TQ(t)}{A(T)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

слабо сходятся к распределениям

$$\zeta(t) = K\theta(t) + B\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u), \tag{3}$$

где $\theta(t)$ — *центрированный гауссовский процесс, не зависящий от* $\{\xi(t)\}$, *с ковариационной функцией*

$$\mathsf{M}\theta(t)\,\theta(t+u) =$$
$$= \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} [G_k(t-v,\ t+u-v) - G(t-v)\,G(t+u-v)]\,dm(v). \tag{4}$$

Из приведенных формул следует, что дисперсия $\theta(t)$ равна

$$\mathsf{D}\theta(t) = \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} [G_k(t-v,\ t-v) - G^2(t-v)]\,dm(v). \tag{5}$$

Замечание 1. Утверждение теоремы показывает, что характер предельного распределения $q(t)$ для зависимых τ_j остается прежним — таким же, как и для независимых τ_j. Изменится лишь ковариационная функция процесса $\theta(t)$.

Вопрос о C-сходимости распределений $z(t)$ мы оставляем в стороне, поскольку ее доказательство в условиях сформулированной теоремы заняло бы много места. Это доказательство, по-видимому, можно осуществить, следуя рассуждениям § 2.

Распространение утверждения теоремы на конечное число каналов, удовлетворяющее условию $[n - TQ(t_0)]A^{-1}(T) \to \infty$, происходит так же, как в § 1.

Некоторые дополнительные замечания в теореме мы сделаем после ее доказательства.

Доказательство. Воспользуемся, как и прежде, представлением

$$q(t) = \sum_{k=1}^{e(t)} \chi_k(t),$$

$$\chi_k(t) = \chi(\tau_k + v_k > t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_k + v_k > t, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где v_k — момент появления вызова с номером k. Чтобы избежать громоздких в случае зависимых τ_j формальных операций с условными математичскими ожиданиями относительно σ-алгебры $\mathfrak{E}$, порожденной процессом $e(t)$, мы часто будем фиксировать (на некоторое время) траекторию $e(u)$, $0 \leqslant u \leqslant t_0$, и считать ее неслучайной.

Обозначим

$$e(t) = N, \quad b_k = t - v_k,$$
$$x_k = \chi(\tau_k > b_k) - \mathsf{P}_{\mathfrak{E}}(\tau_k > b_k) = \chi(\tau_k > b_k) - G(b_k).$$

Тогда

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{E}} q(t) = \sum_{k=1}^{N} G(b_k) = \int_0^t G(t-u)\, de(u),$$

а центрированное число занятых линий

$$V = V(t) = q(t) - \mathsf{M}_{\mathfrak{E}} q(t) = q(t) - \int_0^t G(t-u)\, de(u) \tag{6}$$

будет представимо в виде

$$V = \sum_{k=1}^{N} x_k. \tag{7}$$

Мы разобьем эту сумму на m сумм

$$V = \sum_{j=1}^{m} z_j^*, \quad z_j^* = \sum_{k=N_{j-1}+1}^{N_j} x_k,$$

где $N_0 = 0$, $N_m = N$, а значения $n_j = N_j - N_{j-1}$ отличаются друг от друга не более чем на 1, так что $\min_j n_j \leqslant N/m \leqslant \min_j n_j + 1$ (для простоты в дальнейшем можно считать, что $n_1 = \ldots = n_m = N/m$).

Мы будем предполагать, что зафиксированная нами траектория $e(u)$, $u \leqslant t_0$, обладает свойствами $\sup_{u \leqslant t_0} |x(u)| \leqslant T^{1/4}$, $\max_j |v_{j+1} - v_j| \to 0$ при $T \to \infty$. Множество B таких траекторий (разумеется, множество B, как и σ-алгебра $\mathfrak{E}$, в схеме серий зависят от T) будет иметь вероятность $\mathsf{P}(B) \to 1$ при $T \to \infty$. Это легко извлечь из C-сходимости процессов $x(t)$.

Нетрудно видеть далее, что для $e(u) \in B$ число слагаемых $N = e(t)$ в сумме (7) неограниченно возрастает и имеет тот же порядок роста, что и T. Для изучения распределения (7) мы можем воспользоваться следующей леммой, принадлежащей С. Н. Бернштейну [8].

Лемма 1. *Пусть* $z_1, \ldots, z_m$ — *случайные величины,*

$$Z_m = \sum_{k=1}^{m} z_k, \quad \mathsf{M}z_k = 0, \quad \mathsf{M}Z_m^2 = B_m^2.$$

Обозначим

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega} \left| \mathsf{M}_{\sigma_k} z_{k+1} \right| = \alpha_k,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega} \left| \mathsf{M}_{\sigma_k} z_{k+1}^2 - \mathsf{M}z_{k+1}^2 \right| = \beta_k,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega} \mathsf{M}_{\sigma_k} \left| z_{k+1}^3 \right| = \gamma_k,$$

где σ_k — σ-*алгебра, порожденная* $z_1, \ldots, z_k$.

Тогда, если при $m \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = o(B_m), \quad \sum_{k=1}^{m} \beta_k = o(B_m^2), \quad \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = o(B_m^3),$$

то Z_m/B_m *имеет нормальное* (0, 1) *предельное распределение*

Чтобы обеспечить непосредственное применение сформулированной леммы, мы воспользуемся приемом, также принадлежащим С. Н. Бернштейну и состоящим в «прореживании» суммы (7). Именно, наряду с суммами z_j^* мы рассмотрим суммы z_j объема $n_j - L$:

$$z_j = \sum_{K=N_{j-1}+L+1}^{N_j} x_k = z_j^* - \sum_{k=N_{j-1}+1}^{N_{j-1}+L} x_k \tag{8}$$

и обозначим

$$V' = \sum_{j=1}^{m} z_j.$$

Мы покажем, что L здесь можно выбрать так, чтобы *)

$$\mathsf{D}(V - V') = o(\mathsf{D}V), \tag{9}$$

*) Индекс $\mathfrak{E}$ у условных моментов мы здесь для простоты опускаем, считая траекторию $e(u)$, $u \leqslant t_0$, фиксированной.

а величины z_j удовлетворяли условиям леммы. Тогда отсюда будет следовать, что $\frac{V}{\sqrt{\mathrm{D}V}}$ будет распределено так же, как $\frac{V'}{\sqrt{\mathrm{D}V}}$, т. е. асимптотически нормально с параметрами (0, 1).

Вычислим сначала дисперсию $\mathrm{D}(V)$. Так как $\mathrm{M}x_j = 0$, то

$$\mathrm{D}V = \mathrm{M}V^2 = \mathrm{M}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{M}x_j^2 + 2\sum_{i<j}^{N} \mathrm{M}x_i x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} [G(b_j) - G^2(b_j)] + 2\sum_{i<j} r_{ij}, \quad (10)$$

где

$$r_{ij} = \mathrm{P}(\tau_i > b_i,\ \tau_j > b_j) - \mathrm{P}(\tau_i > b_i)\,\mathrm{P}(\tau_j > b_j). \quad (11)$$

Рассмотрим при фиксированном k величину

$$R_k = \sum_{i=1}^{N-k} r_{i,\,i+k} = \sum_{i=1}^{N-k} [\mathrm{P}(\tau_1 > b_i,\ \tau_{k+1} > b_i) -$$

$$- \mathrm{P}^2(\tau_1 > b_i)] + \sum_{i=1}^{N-k} \delta_i'(b_i,\ b_{i+k}) + \sum_{i=1}^{N-k} \delta_i''(b_i,\ b_{i+k}).$$

Здесь функции δ_i' и δ_i'' определяются естественным образом как соответствующие разности. В силу непрерывности по u функций $G_k(t, u) = \mathrm{P}(\tau_1 > t, \tau_{k+1} > u)$ и принадлежности $e(u)$ множеству B

$$\max_i \delta_i'(b_i;\ b_{i+k}) \to 0, \quad \max_i \delta_i''(b_i,\ b_{i+k}) \to 0$$

при $T \to \infty$.

Поэтому

$$R_k = \int_0^t [G_k(t - v,\ t - v) - G^2(t - v)]\, de(v) + o(N). \quad (12)$$

В силу того, что $e(u) \in B$, мы получаем

$$R_k = T\int_0^t [G_k(t - v,\ t - v) - G^2(t - v)]\, dm(v) + o(T).$$

Заметим, далее, что $|r_{i,j}| \leqslant \varphi(j-i)$ и, следовательно,

$$R_k \leqslant (N-k)\,\varphi(k),$$

$$\sum_{k=s}^{N-1} R_k \leqslant N \sum_{k=s}^{N-1} \varphi(k) + \sum_{k=s}^{N-1} k\varphi(k). \tag{13}$$

Так как $\sum\limits_{k=s}^{\infty} \varphi(k) \to 0$ при $s \to \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{N-1} k\varphi(k) = o(N)$ при $N \to \infty$, то отсюда следует, что выбором s и N величина $\frac{1}{T}\sum\limits_{k=s}^{N-1} R_k$ может быть сделана сколь угодно малой. Это означает, что существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i<j} r_{ij} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} R_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t [G_k(t-v,\ t-v) - G^2(t-v)]\,dm(v).$$

Таким образом, мы нашли, что

$$\mathsf{D}V = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^t [G_k(t-v,\ t-v) - G^2(t-v)]\,dm(v) + o(T), \tag{14}$$

где $G_0(u,\ u) = G(u)$, $G_{-k}(u,\ u) = G_k(u,\ u)$.

Перейдем теперь к доказательству (9) и к проверке условий леммы.

Имеем

$$\mathsf{D}(V-V') = \mathsf{M}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=N_j+1}^{N_j+L} x_k\right)^2.$$

Пусть Λ означает набор индексов $(1, \ldots, L, N_1+1, \ldots$ $\ldots, N_1+L, N_2+1, \ldots)$, который пробегает индекс у x_k из суммы $V-V'$. Число индексов в этом наборе равно Lm. Имеем (см. (10), (11))

$$\mathsf{D}(V-V') = \sum_{k\in\Lambda} \mathsf{M}x_k^2 + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i\in\Lambda \\ j\in\Lambda}} r_{ij}.$$

Мы только что видели, что вклад, даваемый суммой слагаемых r_{ij}, даже в том случае, когда величины x_j *суммируются подряд* (без пропусков), оценивается количеством слагаемых в сумме $\sum x_j$. Очевидно, что это положение в еще большей степени сохранится, когда сумма величин x_k прореживается и, следовательно, связи между слагаемыми ослабевают. Поэтому, опуская выкладки, идентичные тем, которые использовались при оценке $\mathsf{D}V$, мы получим

$$\mathsf{D}(V-V')\leqslant cLm=o(\mathsf{D}V),$$

если

$$Lm=o(T) \tag{15}$$

или, что то же, если $L=o(n_1)$.

Мы положим

$$n_1=\sqrt{T}\,\alpha(T)\to\infty,\quad \alpha(T)\to 0, \tag{16}$$

где величину $\alpha(t)$ мы выберем позднее. Проверим в этих условиях выполнение условий леммы. Из сказанного выше вытекает, что $B_m^2=\mathsf{D}V'\sim\mathsf{D}V=O(T)$. Для оценки $\mathsf{M}_{\sigma_k}z_{k+1}$ нам достаточно рассмотреть поведение $\left(\sigma_k\subset\mathfrak{S}_{N_k},\text{ где }\mathfrak{S}_k=\mathfrak{S}_{-\infty}^k\right)$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l}\sum_{j=l+L}^{l+n_1}x_j=\sum_{j=l+L}^{l+n_1}\mathsf{M}x_j+\sum_{j=l+L}^{l+n_1}r(\omega,l,j),$$

где $\mathsf{M}x_j=0$ и в силу р. с. п. $|r(\omega,l,j)|\leqslant\varphi(j-l)$. Следовательно, в обозначениях леммы

$$\alpha_k\leqslant\sum_{j=l+L}^{\infty}\varphi(j-l)=\psi(L)\to 0$$

при $L\to\infty$.

Пусть $L=L(T)=[T^{1/4}]$. Мы выберем

$$\alpha(T)=\sqrt{\psi(L)}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\leqslant\psi(L)\,m=\frac{\psi(L)\,N}{n_1}=O\left(\frac{\psi(L)\,T}{\sqrt{T}\,\alpha(T)}\right)=$$

$$=O\left(\sqrt{T\psi(L)}\right)=o\left(\sqrt{T}\right)=o(B_m).$$

Далее, отклонение $\mathsf{M}_{\sigma_k} z_{k+1}^2$ от $\mathsf{M} z_{k+1}^2$ мы оценим с помощью выражений ($\Lambda = (l+L, \ldots, l+n_1)$)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l}\Big(\sum_{j\in\Lambda} x_j\Big)^2 = \sum_{j\in\Lambda} \mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l} x_j^2 + 2\sum_{\substack{i<j\\ i\in\Lambda\\ j\in\Lambda}} \mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l} x_i x_j.$$

Так как

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l} x_j^2 - \mathsf{M} x_j^2\right| < \varphi(j-l),$$

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l} x_i x_j - \mathsf{M} x_i x_j\right| < \varphi(i-l) \text{ при } i<j,$$

то

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l}\Big(\sum_{j\in\Lambda} x_j\Big)^2 - \mathsf{M}\Big(\sum_{j\in\Lambda} x_j\Big)^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=L}^{\infty} \varphi(s) + \sum_{s=L}^{n} (n_1 - L - s)\,\varphi(s).$$

Отсюда следует, что в обозначениях леммы

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k \leqslant m n_1 \psi(L) = o(T) = o(B_m^2).$$

Рассмотрим, наконец, поведение условных относительно $\mathfrak{S}_l$ третьих моментов величин

$$\Big|\sum_{j\in\Lambda} x_j\Big|^3 \leqslant \Big(\sum_{s\in\Lambda} |x_s|\Big)\Big(\sum_{i\in\Lambda} x_i^2 + 2\sum_{i\in\Lambda} x_i \sum_{\substack{j>i\\ j\in\Lambda}} x_j\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{s\in\Lambda\\ i\in\Lambda}} |x_s|\, x_i^2 + 2\sum_{s=l+L}^{l+n_1} |x_s| \sum_{i=s}^{l+n_1} x_i \sum_{j=i+1}^{l+n_1} x_j +$$

$$+ 2\sum_{i=l+L}^{l+n_1} x_i \Big(\sum_{j=i+1}^{l+n_1} x_j\Big)\Big(\sum_{l=i+1}^{l+n_1} |x_l|\Big). \qquad (17)$$

В силу условий р. с. п. условное математическое ожидание $\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l}$ последних двух сумм в (17) отличается от безусловного не более чем на величину

$$n_1^2 \sum_{s=l+L}^{l+n_1} \varphi(s-k) + n_1^2 \sum_{i=l+L}^{l+n_1} \varphi(i-l) \leqslant 2n_1^2 \sum_{s=L}^{\infty} \varphi(s) = 2n_1^2 \psi(L).$$

Условное математическое ожидание первой суммы в (17) оценивается величиной n_1^2. Нам осталось рассмотреть безусловные математические ожидания

$$\left|\mathsf{M}\sum_{s=l+L}^{l+n_1}|x_s|\sum_{i=s}^{l+n_1}x_i\sum_{j=i+1}^{l+n_1}x_j\right|\leqslant\sum_{s=l+L}^{l+n_1}\sum_{i=s}^{l+n_1}\sum_{j=i+1}^{l+n_1}\varphi(j-i)\leqslant\varphi n_1^2$$

и

$$\left|\mathsf{M}\sum_{i=l+L}^{l+n_1}x_i\left(\sum_{j=i+1}^{l+n_1}x_j\right)\left(\sum_{s=i+1}^{l+n_1}|x_s|\right)\right|.$$

В последнем содержится $2(l+n_1-i-t)+1$ произведений $x_j|x_s$, у которых $\min[(j-i),\ (l-i)]=t$. Поэтому оно не превосходит

$$2\sum_{i=l+L}^{l+n_1}\sum_{t=1}^{l+n_1-i}(l+n_1-i-t)\,\varphi(t)\leqslant 2n_1^2\varphi.$$

Итак, мы установили в результате, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}_l}\left|\sum_{j\in\Lambda}x_j\right|^3\leqslant cn_1^2$$

и, стало быть, в обозначениях леммы

$$\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\leqslant cn_1^2m=cn_1N=O\left(T^{3/2}\alpha(T)\right)=o\left(T^{3/2}\right)=o\left(B_m^3\right).$$

Таким образом, установлено, что сумма $V'=\sum_{j=1}^{m}z_j$ (см. (8)) удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, асимптотически нормальна с параметрами $(0, B_m)$. Как уже отмечалось, отсюда следует, что и сумма V из (7) асимптотически нормальна с теми же параметрами. Другими словами, условное относительно $\mathfrak{S}$ распределение величины

$$\frac{V}{A(T)}=\frac{q(t)-TQ(t)}{A(T)}-\frac{B(T)}{A(T)}\int_0^t G(t-u)\,dx(u)$$

на множестве B, $\mathsf{P}(B)\to 1$, асимптотически нормально с параметрами $(0, K^2\mathsf{D}\,\theta(t))$, где $\mathsf{D}\,\theta(t)$ определено в (5) (см. (14)). Отсюда следует, что безусловное распределение $z(t)$ совпадает с распределением $\zeta(t)$ в (3), где $\theta(t)$ — процесс с нормальными одномерными распределениями и дисперсией, определенной в (5).

Нам осталось доказать, что не только одномерные, но и произвольные конечномерные распределения предельного процесса $\theta(t)$ также нормальны и имеют ковариационную функцию (4). Поскольку установление этих фактов идейно повторяет предыдущее доказательство, то мы изложим его вкратце.

Вычислим сначала

$$\mathsf{M}V(t)\,V(t+u),$$

где $V(t)$ определено в (6). Используя для $V(t+u)$ представление вида (7), мы получим

$$\mathsf{M}V(t)\,V(t+u)=\mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{e(t)} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{e(t+u)} y_j\right), \tag{18}$$

где

$$y_j=\chi(\tau_j>b_j+u)-G(b_j+u), \quad b_j=t-v_j.$$

Так как

$$\mathsf{M}x_i y_{i+k}=\mathsf{P}(\tau_i>b_i,\ \tau_{i+k}>b_{i+k}+u)-\\ -\mathsf{P}(\tau_i>b_i)\,\mathsf{P}(\tau_{i+k}>b_{i+k}+u),$$

то в силу непрерывности $G(v)$, так же как в (12), мы находим

$$\sum \mathsf{M}x_i y_{i+k}=\\ =\int_0^t [G_k(t-v,\ t-v+u)-G(t-v)\,G(t-v+u)]\,de(v)+o(T).$$

Наконец, производя суммирование по k и пользуясь оценками, аналогичными (13), мы получим

$$\mathsf{M}V(t)\,V(t+u)=T\int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} [G_k(t-v,\ t-v+u)-\\ -G(t-v)\,G(t-v+u)]\,dm(v)+o(T).$$

Для доказательства нормальности конечномерных распределений $\theta(t)$ мы рассмотрим сначала двумерные распределения $V(t)$. Для них достаточно установить, что асимптотически нормальной будет любая линейная комбинация

$$V_{a_1, a_2} = a_1 V(t) + a_2 V(t+u).$$

Но V_{a_1, a_2} представима в виде суммы

$$V_{a_1, a_2} = \sum_{i=1}^{e(t+u)} y_i^*,$$

где

$$y_i^* = \begin{cases} a_1 x_i + a_2 y_i & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant e(t), \\ a_2 y_i & \text{при} \quad e(t) < i \leqslant e(t+u). \end{cases}$$

При фиксированной $\mathfrak{E}$ значения y_i^* будут функциями только от τ_i. Это означает, что зависимость между y_i^* будет вести себя так же, как зависимость между x_i. Это в свою очередь позволяет нам получить доказательство асимптотической нормальности V_{a_1, a_2}, повторив с очевидными изменениями доказательство нормальности для $V(t)$.

Поскольку к сумме

$$\sum_{j=1}^{k} a_j V(t+u_j)$$

при любом фиксированном k применимы те же рассуждения, то мы можем считать, что теорема полностью доказана.

Следствие. *Пусть $m(v) = v$, а $\xi(u)$ есть процесс со стационарными в узком смысле приращениями. Тогда, если при некотором $c_\tau = \text{const}$*

$$\mathsf{P}(\tau_j \leqslant c_\tau) = 1,$$

то при $t > c_\tau$ мы получим предельное стационарное распределение процесса

$$z(t) = \frac{q(t) - T\mathsf{M}\tau}{A(T)},$$

совпадающее с распределением

$$\zeta(t) = K\theta(t) + B \int_{-\infty}^{t} G(t-v)\, d\xi(v), \tag{19}$$

где $\theta(t)$ — центрированный стационарный гауссовский процесс, не зависящий от $\{\xi(u)\}$ и имеющий ковариа-

ционную функцию

$$\mathsf{M}\theta(t)\,\theta(t+u) = \\ = \int\limits_0^\infty \sum_{k=-\infty}^{\infty} [G_k(v,\ v+u) - G(v)\,G(v+u)]\,dv. \qquad (20)$$

Нетрудно понять, что такое представление предельного стационарного процесса (см. (19), (20)) сохранится и в общем случае, когда τ_j не ограничены.

Замечание 1. Требование непрерывности $G(u)$, содержащееся в условиях теоремы, не существенно и включено нами для упрощения рассуждений. Читатель может без труда убедиться, что приведенное доказательство теоремы полностью сохранится, если $G(u)$ разрывна и множество ее точек разрыва можно погрузить в конечное число интервалов сколь угодно малой суммарной длины. Тогда, например, в первой части доказательства при изучении суммы $\sum\limits_{i=1}^{e(t)} x_i$ достаточно просто выбросить из этой суммы те x_i, для которых b_i попадает в выделенные интервалы. Как мы уже видели, предельное распределение $\sum\limits_{i=1}^{e(t)} x_i$ от этого не изменится.

Замечание 2. Теорема была доказана в предположении, что последовательность $\{\tau_j\}$ удовлетворяет условиям р. с. п. Однако есть основание считать, что утверждение теоремы сохранится и при более слабых условиях сильного перемешивания (с. п.), когда вместо (1) требуется, чтобы

$$\sup_{A \in \mathfrak{S}_1^k,\, B \in \mathfrak{S}_{k+s}^\infty} |\,\mathsf{P}(AB) - \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)\,| = \varphi(s) \to 0 \qquad (21)$$

при $s \to \infty$. (Условие $\sum \varphi(s) < \infty$ мы по-прежнему будем предполагать выполненным.) В самом деле, выкладки, где производятся оценки $\mathsf{D}\,V$, $\mathsf{D}\,(V - V')$, останутся без изменений. Такого же рода выкладки показывают, что величины z_j, определенные в (8), будут асимптотически некоррелированными. С другой стороны, для гладких (например, липшицевых) функций $G(u)$ и для выбранных значений n_j слагаемые x_k в сумме

$$z_j = \sum_{k=N_{j-1}+L+1}^{N_j} x_k$$

можно заменить стационарными слагаемыми $x_k^* = \chi(\tau_k > b_{k_0}) - G(b_{k_0})$, где k_0 можно положить равным, например, $k_0 = N_{j-1} + L + 1$. Тогда, используя известные теоремы об асимптотической нормальности сумм стационарно связанных величин (см., например, [48]), мы можем установить, что z_j будут асимптотически нормальными. Но асимптотическая некоррелированность и нормальность z_j и асимптотическая независимость z_j и z_k при больших $|k-j|$, по-видимому, влекут за собой асимптотическую нормальность для $V' = \sum z_j$ и, следовательно, для V.

§ 6. Эргодические теоремы для числа занятых каналов и для вероятности отказа

Мы рассмотрим теперь задачи об асимптотическом поведении числа занятых линий $q(t)$ и «вероятности отказа» $p(t)$ (второе, разумеется, лишь для систем с отказами) в случае, когда входной процесс $e(t)$ и последовательность $\{\tau_j\}$ удовлетворяют более слабым условиям, чем те, которые использовались в предыдущих параграфах. При этом речь будет идти о более грубых утверждениях типа законов больших чисел.

Мы будем предполагать в первой части параграфа, что выполнены следующие два условия.

I. Последовательность процессов $\frac{e(u)}{T}$ C-сходится к функции u на $[0, t_0]$.

II. Последовательность $\{\tau_j\}$ стационарна и удовлетворяет условиям сильного перемешивания (с. п.) (см. (21) § 5, функция $\varphi(s)$ может сходиться к 0 сколь угодно медленно).

Рассмотрим сначала случай, когда число каналов n эквивалентно бесконечному, и положим

$$G(u) = \mathsf{P}(\tau_j > u), \quad Q(t) = \int_0^t G(u)\,du.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\frac{n}{TQ(t_0)} \to r > 1. \tag{1}$$

Тогда при выполнении условий I, II

$$\frac{q(u)}{T} \underset{C}{\to} Q(u), \qquad u \in [0, t_0].$$

Заметим прежде всего, что для независимых τ_j утверждение теоремы по существу следует из теоремы § 1. Достаточно положить $m(t) \equiv 0$, $B(T) = T$, $\xi(t) = t$ и модифицировать условие 3 теоремы § 1 на случай $A(T) = T$ и сходимость к вырожденному процессу (т. е. заменить это условие на (1)).

Рассмотрим общий случай.

Доказательство. Как и прежде, обозначим, считая $n = \infty$,

$$V(t) = q(t) - \mathsf{M}_{\mathfrak{S}} q(t) = q(t) - \int_0^t G(t-v)\, de(v) = \sum_{k=t}^{e(t)} x_k,$$

$$x_k = \chi(\tau_j > b_j) - G(b_j), \quad b_j = t - v_j.$$

Поскольку

$$\frac{1}{T} \mathsf{M}_{\mathfrak{S}} q(t) = \frac{1}{T} \int_0^t G(t-v)\, de(v) =$$

$$= \frac{1}{T}\left[e(t) - \int_0^t e(v)\, dG(t-v)\right] \underset{C}{\to} Q(t), \tag{2}$$

то нам достаточно убедиться, что на $[0, t_0]$

$$\frac{1}{T} V(u) \underset{C}{\to} 0.$$

Мы зафиксируем, как и раньше, траекторию $e(u)$, $u \leqslant t_0$, считая, что она принадлежит множеству

$$B_e = \left\{ \sup_{u \leqslant t} \left| \frac{e(u)}{T} - u \right| \leqslant \varepsilon_e(T), \right.$$

$$\left. \sup_{u \leqslant t_0} \left| \frac{1}{T} \int_0^u G(u-v)\, de(v) - Q(u) \right| \leqslant \varepsilon_e(T) \right\}. \tag{3}$$

где $\varepsilon_e(T)\to 0$ выбрано так, что $\mathsf{P}(B_e)\to 1$. В силу (2) и условия I такая функция ε_e существует. Далее,

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}} x_k = 0, \quad \left|\mathsf{M}_{\mathfrak{S}} x_k x_j\right| \leqslant \varphi(|j-k|)\to 0$$

при $|j-k|\to\infty$. Отсюда легко следует, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}} V(u) = 0,$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}} V^2(u) \leqslant e(u) + 2\sum_{k=1}^{e(u)} (e(u)-k)\varphi(k) = o(e^2(u)).$$

Это означает, что на множестве B_e $\mathsf{M}_{\mathfrak{S}} V^2(u) = o(T^2)$. Поэтому при $T\to\infty$, $e\in B_e$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}(|V(u)| > \varepsilon T) \leqslant \frac{o(T^2)}{\varepsilon^2 T^2}\to 0. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь разбиение отрезка $[0, t_0]$ на интервалы длины Δ. Так как ($\Delta y(u) = y(u+\Delta) - y(u)$; $e\in B_e$)

$$\Delta V(u) \leqslant \Delta q(u) + \Delta Q(u) + 2\varepsilon_e(T) \leqslant$$
$$\leqslant \Delta e(u) + \Delta + 2\varepsilon_e(T) \leqslant 2\Delta + 4\varepsilon_e(T),$$

то при произвольном $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}(\sup_{u\leqslant t_0} |V(u)| > 2\varepsilon T) \leqslant \mathsf{P}_{\mathfrak{S}}(\max_k |V(k\Delta)| > \varepsilon T) +$$
$$+ \mathsf{P}_{\mathfrak{S}}(2\Delta + 4\varepsilon_e(T) > \varepsilon). \tag{5}$$

Второе слагаемое здесь равно нулю при $\Delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ и достаточно больших T. Первое слагаемое в (5) при выбранном и зафиксированном Δ сходится к 0 в силу (4).

Таким образом, на множестве B_e, $\mathsf{P}(B_e)\to 1$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}(\sup_{u\leqslant t_0} |V(u)| > 2\varepsilon T)\to 0$$

при $T\to\infty$. Распространение доказанного утверждения на случай, когда n конечно и удовлетворяет (1), происходит очевидным образом. Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению *систем с отказами*, для которых число каналов n таково, что

$$\frac{n}{TQ(t_0)}\to r > 1. \tag{6}$$

Обозначим $Q_1(u) = \min[Q(u), rQ(t_0)]$, $u\in[0, t_0]$.

Теорема 2. *При выполнении условий* I, II *и* (6)

$$\frac{q(u)}{T} \xrightarrow[C]{} Q_1(u), \quad u \in [0, t_0].$$

Другими словами, с точностью до величин порядка $o(T)$ траектория $q(u)$ совпадает с кривой $\min(TQ(u), n)$.

Доказательство. Пусть t_1 есть решение уравнения

$$Q(u) = rQ(t_0).$$

Тогда в силу теоремы 1 нам достаточно доказать C-сходимость

$$\frac{q(u)}{T} \to rQ(t_0)$$

на отрезке $t \in [t_1, t_0]$. (C-сходимость к функции $Q(u)$ на $[0, t_1 - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$ следует непосредственно из теоремы 1.)

Предположим, что одновременно с рассматриваемой системой действует другая система, управляемая теми же процессами $\{e(u)\}$ и $\{\tau_j\}$, но с бесконечным числом каналов. Обозначим для этой системы число занятых линий через $\tilde{q}(u)$ и введем событие

$$B_\Delta = \left\{ \frac{1}{T} \sup_{u \leqslant t_0} |\Delta\tilde{q}(u) - T\Delta Q(u)| \leqslant \Delta\varepsilon_\Delta(T) \right\},$$

где $\varepsilon_\Delta(T) \to 0$ при $T \to \infty$, а Δ фиксировано. В силу теоремы 1 $\varepsilon_\Delta(T)$ можно выбрать так, чтобы $\mathsf{P}(B_\Delta) \to 1$.

Воспользуемся теперь следующей теоремой о C-сходимости к вырожденным процессам (см. § 4 гл. I). Пусть дана последовательность неотрицательных процессов $\{\xi(u) = \xi_T(u) \geqslant 0;\ t_1 \leqslant u \leqslant t_0\}$, непрерывных справа и зависящих от параметра T. Пусть, далее, $\mathfrak{M}(u)$, $u \in [t_1, t_0]$, обозначают совокупность вложенных σ-алгебр $\mathfrak{M}(u_1) \subset \mathfrak{M}(u_2)$ при $u_1 \leqslant u_2$ таких, что $\xi(t)$ измерима относительно $\mathfrak{M}(u)$ *при* $t \leqslant u$. Символом Δ_T мы будем обозначать последовательность $\Delta_T \to 0$ при $T \to \infty$, символами ε и c (с индексами или без) — соответственно произвольно малые числа и постоянные. Наконец, положим

$$\Gamma_u = \{\varepsilon_1 \leqslant \xi(u) < c_1\}.$$

Теорема А. *Предположим, что существуют последовательность Δ_T и система множеств $\Omega_{u,T} \in \mathfrak{M}(u)$ такие, что*

$$\Omega(u) = \bigcap_{t_1 \leqslant s \leqslant u} \Omega_{s,T} \in \mathfrak{M}(u), \quad \mathsf{P}(\Omega(t_0)) \to 1,$$

и на множествах $\Omega_{u,T} \cap \Gamma_u$ при всех $\Delta \leqslant \Delta_T$ и каждых фиксированных ε, ε_1, c_1 выполнены условия:

(I) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \Delta\xi(u) \leqslant \varepsilon\Delta_T$,

где $\Delta\xi(u)$ означает приращение $\Delta\xi(u) = \xi(u+\Delta) - \xi(u)$.

(II) *При любом фиксированном $\delta > 0$ и $T \to \infty$*

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(|\Delta\xi(u)|;\ |\Delta\xi(u)| > \delta\sqrt{\Delta_T}\right) < \varepsilon\Delta_T.$$

(III) *Вероятность того, что величина хотя бы одного скачка процесса $\xi(u)$ на $[t_1, t_2]$ превысит δ, сходится к 0 при $T \to \infty$.*

Если, кроме того, $\mathsf{P}(\xi(t_1) > \delta) \to 0$ *при* $T \to \infty$, *то*

$$\xi(u) \xrightarrow[C]{} 0, \quad u \in [t_1, t_0].$$

Вернемся к вопросу о C-сходимости к 0 процессов

$$\frac{1}{T}[q(u) - rQ(t_0)], \quad u \in [t_1, t_0].$$

Пользуясь (6), мы можем рассмотреть эквивалентную задачу о C-сходимости к 0 процессов

$$\frac{1}{T}[q(u) - n] \leqslant 0, \quad u \in [t_1, t_0].$$

При фиксированных траекториях $e(u)$ и $\{\tau_j\}$ на множестве $B_e \cap B_\Delta \cap \{q(u) \leqslant n - \varepsilon_1 T\}$ мы будем иметь (по определению $\delta(s) = 1$ при $s < n$ и $\delta(s) = 0$ при $s = n$)

$$\Delta q(u) = q(u+\Delta) - q(u) = -\sum_{j=1}^{e(u)} \chi(u < \tau_j + v_j \leqslant$$
$$\leqslant u + \Delta)\,\delta(q(v_j)) + \sum_{j=e(u)+1}^{e(u+\Delta)} \chi(\tau_j + v_j \leqslant u + \Delta), \tag{7}$$

если только $\Delta \leqslant \varepsilon_1/2$, поскольку в этом случае за интервал $(u, u+\Delta)$ в систему поступит не более $\varepsilon_1 T$ вызовов, и следовательно, отказы будут отсутствовать

$(\delta(q(v_j))=1$ при $j\in[e(u)+1,\ e(u+\Delta)])$. Значит,

$$\Delta q(u)\geqslant-\sum_{j=1}^{e(u)}\chi(u<\tau_j+v_j\leqslant u+\Delta)+$$
$$+\sum_{j=e(u)+1}^{e(u+\Delta)}\chi(\tau_j+v_j\leqslant u+\Delta)=\tilde q(u+\Delta)-\tilde q(u)\geqslant$$
$$\geqslant T\,\Delta Q(u)-T\varepsilon_\Delta(T)\geqslant-T\varepsilon_\Delta(T). \qquad (8)$$

Полученное неравенство, смысл которого весьма прост, означает, что условие (I) теоремы А выполнено (при $\mathfrak{M}(u)=\mathfrak{E}\times\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{S}$ порождены соответственно процессами $\{e(u)\}$ и $\{\tau_j\}$ и при $\Omega_{u,T}=B_eB_\Delta\in\mathfrak{M}(u)$. Поскольку приращения $q(u)$ измеримы относительно $\mathfrak{E}\times\mathfrak{S}$, то в нашем случае символы условных математических ожиданий $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}$ в условиях теоремы А становятся излишними).

Условие (II) вытекает из того, что на множестве B_eB_Δ

$$\frac{1}{T}|\Delta q(u)|\leqslant\frac{1}{T}(\Delta e(u)+|\Delta\tilde q(u)|)\leqslant 2\Delta+\Delta Q(u), \qquad (9)$$

и, стало быть, условное математическое ожидание, фигурирующее в условии II, равно 0. Из неравенства (9) следует также, что значение $\frac{1}{T}q(t_1)$ располагается вблизи точки $Q(t_1)=rQ(t_0)$.

Выполнение условия (III) теоремы А относительно скачков следует из C-сходимости процессов $e(u)$ и $\tilde q(u)$.

Таким образом, в силу цитированной теоремы

$$\frac{1}{T}[q(u)-n]\underset{C}{\rightarrow}0, \quad u\in[t_1,\ t_0].$$

Теорема доказана.

Пусть теперь задана система обслуживания с отказами, для которой

$$\frac{n}{TQ(t_0)}\rightarrow r=1. \qquad (10)$$

Для таких систем мы можем очевидным образом построить процессы $q_1(u)$ и $q_2(u)$, соответствующие системам с тем же управлением, но с числом каналов соответственно n_1 и n_2, $n_1 < n < n_2$, для которых будет выполняться

$$q_1(u) < q(u) < q_2(u).$$

Используя такие мажоранты, из теорем 1, 2 легко получить

Следствие 1. *При выполнении условий* I, II, (10) *утверждение теоремы* 2 *сохраняется.*

Аналогичное утверждение для систем с очередью в случае $r = 1$ будет вытекать из сравнения теорем 1, 2 и 3.

Следствие 2. *Пусть* $f(u) = \max\limits_{v \leqslant u} q(v)$ *есть число когда-либо на отрезке времени* $[0, u]$ *«задействованных» линий и* $y(u) = f(u) - q(u)$ — *число свободных линий из числа задействованных. Тогда из монотонности* $Q_1(u)$ *и теорем* 1, 2 *следует, что на* $[0, t_0]$

$$\frac{q(u)}{f(u)} \underset{C}{\rightarrow} 1, \quad \frac{y(u)}{f(u)} \underset{C}{\rightarrow} 0.$$

Мы видели здесь, что при всей естественности и прозрачности утверждения теоремы 2 ее доказательство требует все же некоторых усилий. В еще большей степени это замечание относится к следующему утверждению.

Пусть $\tilde{s}(u)$ означает число вызовов, принятых системой на обслуживание за время u. *«Вероятностью отказа»* мы назовем здесь величину

$$p(u) = \frac{e(u) - \tilde{s}(u)}{e(u)}.$$

Заметим, что если $s(u)$ означает число вызовов, обслуженных системой к моменту времени u, то очевидно

$$\tilde{s}(u) = s(u) + q(u)$$

и, стало быть, $p(u) = 1 - \dfrac{s(u) + q(u)}{e(u)}$.

Теорема 3. *Пусть* $r \leqslant 1$, *последовательность* $\{\tau_j\}$ *удовлетворяет условиям р. с. п. и выполнено* I. *Тогда* *на* $[0, t_0]$

$$\frac{s(u)}{T} \underset{C}{\to} \sigma(u) = \int_0^{rQ(t_0)} H\left(u - Q^{-1}(v)\right) dv,$$

$$p(u) \underset{C}{\to} \pi(u) = 1 - \frac{1}{u}\left[Q_1(u) + \int_0^{rQ(t_0)} H\left(u - Q^{-1}(v)\right) dv\right],$$

где $Q^{-1}(v)$ — *функция, обратная к* $Q(v)$, $H(v)$ — *функция восстановления случайной величины* τ_1: $H(v) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau^1 + \ldots + \tau^k \leqslant v)$, τ^j *распределены как* τ_1 *и независимы.*

Чтобы упростить рассуждения, мы докажем эту теорему при дополнительном предположении, что

$$\mathsf{P}(\tau_j \geqslant h) = 1$$

при некотором $h > 0$. Замечания, связанные с этим допущением, мы изложим после доказательства теоремы.

Кроме того, чтобы не усложнять формулировки и обозначения, мы будем считать, где это потребуется, что условие I о C-сходимости процессов $\frac{e(u)}{T}$ выполнено на отрезке $[0, t_0 + 1]$. Отметим, что условие I вообще естественно считать выполненным при любом фиксированном t_0. Так как в условии II задана «вся» стационарная последовательность $\{\tau_j\}$, то это позволяет процессы $q(u)$, $s(u)$ и другие рассматривать также на любом фиксированном отрезке $[0, t_0]$.

Доказательство. Очевидно, что нам достаточно установить C-сходимость процессов

$$\frac{s(u)}{T}, \quad u \leqslant t_0.$$

Пусть $\lambda_{n,i}$ означает суммарное время простоя i-го канала на $[0, t_0]$ с момента u_i задействования этого канала (u_i есть решение уравнения $f(u) = i$), и пусть

$$\lambda_E = \max_{i \in E} \lambda_{n,i},$$

где E обозначает множество целых чисел.

Лемма 1. *При выполнении условий* I, II *для любых* $p > 0$ *и* $\Delta > 0$ *найдется множество* E *номеров ка-*

налов обслуживания, содержащее не менее $n(1-p)$ элементов, для которого

$$\mathsf{P}(\lambda_E > \Delta) \to 0$$

при $T \to \infty$.

Доказательство. Предположим что существует np каналов, в каждом из которых величина простоев на $[0, t_0]$ с момента задействования больше Δ. Это будет означать, что найдется $t^* \leqslant t_0$ такое, что число свободных каналов $z(t^*)$ в этот момент времени будет больше чем $\frac{np\Delta}{t_0}$. Но вероятность такого события в силу следствия 2 теоремы 2 сходится к нулю. Лемма доказана.

Лемма 2. *При любом $p > 0$ из n каналов можно так удалить np каналов, что для любого канала j из оставшегося множества E_p при любом $\Delta > 0$*

$$p_j = \mathsf{P}(\mathscr{E}_\Delta \text{ содержит } j) \to 1, \tag{11}$$

где $\mathscr{E}_\Delta$ — случайное множество, состоящее из каналов, для которых $\lambda_{n,j} \leqslant \Delta$.

Доказательство. Упорядочим каналы по величине вероятности $\mathsf{P}(j \in \mathscr{E}_\Delta)$ и образуем множество E_p из $n(1-p)$ каналов, для которых эта вероятность максимальна.

Допустив, что не для всех $j \in E_p$ выполняется (11), мы сможем указать $\varepsilon > 0$ такое, что для числа $N(\mathscr{E}_\Delta)$ элементов в $\mathscr{E}_\Delta$ будет справедливо неравенство

$$\mathsf{M}N(\mathscr{E}_\Delta) = \sum_{j=1}^{n} p_j < n(1-p) + np(1-\varepsilon) = n - np\varepsilon. \tag{12}$$

Применим теперь лемму 1, в которой в качестве p возьмем число $p_1 = \frac{\varepsilon p}{2}$, где p есть число, выбранное нами в лемме 2. Мы получим тогда, что $\mathsf{P}(N(\mathscr{E}_\Delta) > n(1-p_1)) \to 1$ и, следовательно, $\mathsf{M}N(\mathscr{E}_\Delta) > n(1-p_1)(1+o(1)) > n - np\varepsilon$. Это противоречит (12). Лемма доказана.

Мы можем построить теперь оценки для процесса $s(u)$. Поскольку процессы $\{e(u)\}$ и $\{\tau_j\}$ заданы при всех $u \geqslant 0$ и $j \geqslant 1$, то процесс $s(u)$ определен на всей полуоси $u \geqslant 0$. Очевидно, что

$$s(u) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(u),$$

где $\nu_i(u)$ — число вызовов, обслуженных в i-м канале к моменту времени u.

Пусть $i_1, i_2, \ldots$ — номера вызовов, которые обслуживались в i-м канале, и u_i — время начала работы i-го канала, так что i_k и u_i есть случайные величины. Тогда, если $\eta_i(v)$ означает процесс восстановления для последовательности $\{\tau_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\{\eta_i(v) = l\} = \{\tau_{i_1} + \ldots + \tau_{i_l} \leqslant v,\ \tau_{i_1} + \ldots + \tau_{i_{l+1}} > v\},$$

то

$$\nu_i(u) \leqslant \eta_i(u - u_i), \tag{13}$$

и для $i \in \mathscr{E}_\Delta$

$$\nu_i(u) \geqslant \eta_i(u - u_i - \Delta). \tag{14}$$

Чтобы воспользоваться этими неравенствами нам потребуется

Лемма 3. *Пусть $\mathsf{P}(\tau_j \geqslant h) = 1$, $h > 0$ и последовательность $\{\tau_j\}$ удовлетворяет условиям р. с. п. Тогда при любом фиксированном L элементы совокупности $\{\tau_{i_l}\}_{l=1}^{L}$ асимптотически независимы и распределены как τ_1. Точнее, для произвольного набора борелевских множеств $\{A_l\}_{l=1}^{L}$, обладающих свойством $Q^{-1}(\alpha_l) + \sum_{l=1}^{L-1} x_l < t_0$ при любых $x_l \in A_l$, выполняется*

$$\mathsf{P}\left(\prod_{l=1}^{L}\{\tau_{i_l} \in A_l\}\right) - \prod_{l=1}^{L} P(A_l) \to 0, \tag{15}$$

где $\alpha_l = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{l}{T}$, $P(A) = \mathsf{P}(\tau_1 \in A)$.

Пусть $p > 0$ — произвольное число. Если $i \in E_p$, $j \in E_p$ (множество E_p определено в лемме 2) и j не принадлежит некоторому множеству $E(i)$, зависящему только от i и p и содержащему не более np элементов, то последовательности $\{\tau_{i_l}\}_{l=1}^{L}$ и $\{\tau_{j_l}\}_{l=1}^{M}$ (j_l — номер вы-

зова, который l-м обслуживался в j-м канале) асимптотически независимы на множестве

$$Q^{-1}(\alpha_i)+\sum_{l=1}^{L-1}\tau_{i_l}<t_0,\quad Q^{-1}(\alpha_j)+\sum_{l=1}^{M-1}\tau_{j_l}<t_0,$$

т. е. для произвольных $A_1, \ldots, A_L$; $C_1, \ldots, C_M$, обладающих свойством $Q^{-1}(\alpha_i)+\sum_{l=1}^{L-1} x_l<t_0$, $Q^{-1}(\alpha_j)+\sum_{l=1}^{M-1} y_l<t_0$ при любых $x_l\in A_l$, $y_l\in C_l$, выполняется

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{l=1}^{L}\{\tau_{i_l}\in A_l\}\bigcap_{l=1}^{M}\{\tau_{j_l}\in C_l\}\right)-\prod_{l=1}^{L}P(A_l)\prod_{l=1}^{M}P(C_l)\to 0.$$

Отметим, что если не требовать существования $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{i}{T}$ и $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{j}{T}$, то, как это будет видно из доказательства, утверждение леммы полностью сохранится. В этом случае условие, например, на совокупность $\{A_l\}_{l=1}^{L}$ надо было бы записывать в виде $Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right)+\sum\limits_{l=1}^{L-1}x_l<t_0$ для любых $x\in A_l$. Но так как, вообще говоря, i зависит от T, то множества A_l также следовало бы считать зависящими от T.

Доказательство. Фиксируем опять траекторию $e(t)$ из множества B_e, определенного в (3). Тогда за интервал времени h при достаточно больших T в систему будет поступать не меньше чем $\frac{hT}{2}$ вызовов.

Далее, так как $\tau_j\geqslant h$, то значение τ_j никак не влияет на траектории процессов $q(u)$ и $s(u)$ с момента v_j появления j-го вызова до момента v_j+h. Отсюда и из сделанных выше замечаний следует, что событие

$$\{i_k=l\}\in\mathscr{F}_{l-\frac{hT}{2}},\tag{16}$$

где $\mathscr{F}_k=\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ есть σ-алгебра, порожденная $\tau_1, \ldots, \tau_k$; число $\frac{hT}{2}$ мы для простоты считаем целым.

Рассмотрим теперь вероятность

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{L}\{\tau_{i_k}\in A_k\}\right)=$$
$$=\sum_l \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{L-1}\{\tau_{i_k}\in A_k\},\ i_L=l\right)\mathsf{P}\left(\tau_l\in A_L/D_l\right),$$

где

$$D_l=\bigcap_{k=1}^{L-1}\{\tau_{i_k}\in A_k\}\{i_L=l\}.$$

Так как $i_k\leqslant i_L-\frac{hT}{2}$ при $k\leqslant L-1$, то наряду с (16) $D_l\in\mathcal{F}_{l-\frac{hT}{2}}$. Отсюда следует, что

$$|\,\mathsf{P}(\tau_l\in A_L/D_l)-\mathsf{P}(\tau_l\in A_L)\,|<\varphi\left(\frac{hT}{2}\right)\to 0,$$
$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{L}\{\tau_{i_k}\in A_k\}\right)-\mathsf{P}(A_L)\,\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{L-1}\{\tau_{i_k}\in A_k\}\right)\to 0,$$
$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{L}\{\tau_{i_k}\in A_k\}\right)-\prod_{k=1}^{L}\mathsf{P}(A_k)\to 0.$$

Так как $\mathsf{P}(B_\varepsilon)\to 1$, то соотношение (15) доказано.

Докажем теперь вторую часть леммы. Рассмотрим событие

$$B_q=\left\{\sup_{u\leqslant t_0}\left|\frac{\tilde q(u)}{T}-Q(u)\right|\leqslant\varepsilon_q(T)\right\},$$
$$\varepsilon_q(T)=o(1),\quad P(B_q)\to 1.$$

Так как время u_i первого занятия канала с номером i есть наименьшее решение уравнения

$$f(u)=i$$

(мы считаем, что i-й канал занимается, только если заняты все предыдущие $i-1$ каналов), то в силу следствия 2 теоремы 2 на B_q

$$u_i\in\left[Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right)-c\varepsilon_q,\ Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right)+c\varepsilon_q\right],\qquad c=\mathrm{const}.\quad (17)$$

Так как $i_1 = e(u_l)$, то на B_q

$$i_1 \in \left[TQ^{-1}\left(\frac{i}{T}\right) - T\varepsilon^*,\ TQ^{-1}\left(\frac{i}{T}\right) + T\varepsilon^*\right], \tag{18}$$

где $\varepsilon^* = \varepsilon_e + c\varepsilon_q = o(1)$.

Рассмотрим для простоты сначала трехмерные распределения

$$\mathsf{P}\left(\tau_{i_1} \in A_1,\ \tau_{i_2} \in A_2,\ \tau_{j_1} \in C_1\right)$$

и возьмем в качестве множества $E(i)$, фигурирующего в формулировке леммы, множество чисел j, для которых $|j - i| > \Delta T$.

Основное обстоятельство, используемое в дальнейшем, состоит в том, что в сделанных предположениях индексы i_1, i_2, j_1 с вероятностью, близкой к 1, будут разделены большими интервалами времени.

Обозначим через D событие

$$\{\mathscr{E}_\Delta \ni i,\ \mathscr{E}_\Delta \ni j\},$$

где $\mathscr{E}_\Delta$ соответствуют интервалу $[0, t_0 + 1]$, и предположим, что распределение τ_1 непрерывно, $j > i$.

Так как $i \in E_p$, $j \in E_p$, то в силу леммы 2 $\mathsf{P}(D) \to 1$,

$$\mathsf{P}\left(\tau_{i_1} \in A_1,\ \tau_{i_2} \in A_2,\ \tau_{j_1} \in C_1\right) = o(1) + \varepsilon(\Delta) + \\ + \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{k,\,l,\,s} \mathsf{P}\left(D,\ B_q;\ i_1 = k,\ \tau_k \in A_1^\lambda;\right. \\ \left. i_2 = l,\ \tau_l \in A_2;\ j_1 = s,\ \tau_s \in C_1\right), \tag{19}$$

где $\varepsilon(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$, суммирование по k и s ограничено в силу (18) соответственно пределами $TQ^{-1}\left(\frac{i}{T}\right) \pm T\varepsilon^*$ и $TQ^{-1}\left(\frac{j}{T}\right) \pm T\varepsilon^*$. Множества A_1^λ, $\lambda = 1, 2$, определяются соотношениями

$$A_1^1 = A_1 \cap \left[0,\ Q^{-1}(\alpha_j) - Q^{-1}(\alpha_i) - 2\Delta\right],$$
$$A_1^2 = A_1 \cap \left[Q^{-1}(\alpha_j) - Q^{-1}(\alpha_i) + 2\Delta,\ \infty\right].$$

Рассмотрим сумму в (19) при $\lambda = 1$. Так как $i \in \mathscr{E}_\Delta$ и $\tau_{i_1} \in A_1^1$, то обслуживание вызова i_2 начнется раньше момента $u^* = TQ^{-1}\left(\frac{j}{T}\right) - \Delta T + o(T)$. Это означает, что суммирование по i_2 будет происходить в области

$$i_2 < e(u^*) < TQ^{-1}\left(\frac{j}{T}\right) - \frac{\Delta T}{2}. \qquad (20)$$

В то же время, как уже отмечалось,

$$j_1 > TQ^{-1}\left(\frac{j}{T}\right) - \varepsilon^* T,$$

и эта область отделена от (20) по крайней мере на расстояние $\frac{\Delta T}{3}$. Следовательно, если $\frac{\Delta}{3} < \frac{h}{2}$ (см. доказательство первой части леммы), то в первой сумме событие

$$A = \{i_1 = k,\ \tau_k \in A_1^1;\ \tau_2 = l,\ \tau_l \in A_2;\ j_1 = s\} \in \mathscr{F}_{s - \frac{\Delta T}{3}}$$

и, стало быть,

$$|\mathsf{P}(\tau_s \in C_1/A) - \mathsf{P}(\tau_1 \in C_1)| < \varphi\left(\frac{\Delta T}{3}\right) \to 0.$$

Отсюда и из первой части леммы уже нетрудно получить, что сумма в (19), соответствующая $\lambda = 1$, сближается с

$$P(A_1^1)\,P(A_2)\,P(C_1)$$

(событие D и B_q после проведенного выделения индексов суммирования следует убрать из-под знака вероятности. Это изменит общую сумму не более чем на $o(1)$).

Рассмотрим теперь сумму для $\lambda = 2$. Здесь максимальным индексом будет i_2, что позволяет, так же как в первой части леммы, выделить множитель $\mathsf{P}(A_2)$. В оставшейся сумме области суммирования по i_1 и j_1 разделены по крайней мере интервалом длины $\frac{\Delta T}{2}$. Поэтому аналогично предыдущему получаем

$$\mathsf{P}\left(\tau_{i_1} \in A_1^2,\ \tau_{j_1} \in C_1\right) - P\left(A_1^2\right)P(C_1) \to 0.$$

Так как Δ произвольно, то мы установили, что левая часть в (19) сходится к $P(A_1)P(A_2)P(C_1)$.

Если распределение τ_1 имеет дискретную компоненту, например, скачок в точке a, то в множестве $E(i)$

надо добавить также ΔT-окрестность значения x, для которого

$$Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right)+a=Q^{-1}\left(\frac{x}{T}\right).$$

Это исключит близкое расположение (со значимой вероятностью) точки u_j и момента начала облсуживания вызова i_2 (а значит, и близость j_1 и i_2). Таким же образом мы можем, расширяя множество $E(i)$, устранить другие возможности для близости j_1 и i_2 (со значимой вероятностью), связанные с существованием других точек разрыва у распределения τ_1. Так как число точек разрыва, которые надо учитывать, конечно, то, очевидно, число точек $N(E(i))$ может быть сделано меньше np.

Совместные распределения $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \ldots$ и $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \ldots$ бо́льшей размерности рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Вернемся теперь к неравенствам (13), (14). Из леммы 3 мы немедленно получаем, что если $\eta(v)$ — процесс восстановления для случайной величины τ_1 ($\eta(v)=k$, если $\tau^1+\ldots+\tau^k\leqslant v$, $\tau^1+\ldots+\tau^{k+1}>v$, где τ^j распределены как τ_1 и независимы), то

$$\mathsf{P}(\eta_i(v)=k)\to\mathsf{P}(\eta(v)=k). \tag{21}$$

Кроме того, если $i\in E_p$, $j\in E_pE(i)$, то

$$\mathsf{P}(\eta_i(v)=k,\ \eta_j(u)=l)\to\mathsf{P}(\eta(v)=k)\,\mathsf{P}(\eta(u)=l). \tag{22}$$

В силу первого из неравенств (13) на множестве B_q (см. (17))

$$s(u)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\eta_i(u-u_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left(u-Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right)+c\varepsilon_q\right).$$

Слагаемые $\eta_i^*=\eta_i(b_i)$, где $b_i=u-Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right)+c\varepsilon_q$ в силу (21), (22) и того, что $\eta_i(v)\leqslant v/h$, обладают при $u<t_0$ свойствами ($H(v)=\mathsf{M}\eta(v)$, $H(v)=0$ при $v<h$)

$$\mathsf{M}\eta_i^*-H(b_i)\to 0$$

и для $i\in E_p$, $j\in E_pE(i)$

$$\mathsf{M}\eta_i^*\eta_j^*-H(b_i)H(b_j)\to 0, \tag{23}$$

Так как доля индексов i и j, для которых справедливо (23) (и для которых, следовательно, η_i^* и η_j^* асимптотически некоррелированы), может быть сделана сколь угодно близкой к 1, то отсюда следует, что

$$\mathsf{M}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^* = \sum_{i=1}^{n} H(b_i) + o(n),$$

$$\mathsf{D}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^* = \sum_{i,\,j=1}^{n}\mathsf{M}(\eta_i^*-\mathsf{M}\eta_i^*)(\eta_j^*-\mathsf{M}\eta_j^*) = o(n^2).$$

Поэтому в силу неравенства Чебышева с вероятностью, сходящейся к 1,

$$s(u) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\eta_i(b_i) = \sum_{i=1}^{n} H\left(u - Q^{-1}\left(\frac{i}{T}\right) + c\varepsilon_q\right) + o(T) =$$

$$= T\int\limits_0^{rQ(t_0)} H\left(u - Q^{-1}\,|\,v\right)dv + o(T).$$

Аналогично с помощью неравенства (14) получаем, что с вероятностью, сходящейся к 1, при произвольных $\Delta > 0$ и $p > 0$

$$s(u) \geqslant T\int\limits_0^{rQ(t_0)} H\left(u - Q^{-1}(v) - \Delta\right)dv - cT(\Delta + p),\quad c = \mathrm{const}.$$

Из доказанных неравенств следует, что

$$\frac{s(u)}{T} \xrightarrow[P]{} \int\limits_0^{rQ(t_0)} H\left(u - Q^{-1}(v)\right)dv.$$

Вместе с монотонностью $s(u)$ это означает, что на $[0, t_0]$

$$\frac{s(u)}{T} \xrightarrow[C]{} \int\limits_0^{rQ(t_0)} H\left(u - Q^{-1}(v)\right)dv.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Предельная «вероятность отказа»* $\pi(u) \equiv 0$ *при* $r = 1$.

Действительно, в силу тождества

$$\int_0^u (1 + H(u - z))\, G(z)\, dz = u,$$

вытекающего из свойств функции восстановления, с помощью замены $z = Q^{-1}(v)$ получаем

$$\int_0^{Q(u)} H(u - Q^{-1}(v))\, dv = u - Q(u).$$

Отсюда и из утверждения теоремы 3 следует, что $\pi(u) \equiv 0$.

Нетрудно видеть, что формула для $\pi(u)$ в теореме 3 дает нам $\pi(u) = 0$ и при $r > 1$. Это означает, что утверждение теоремы 3 справедливо при любых r.

Следствие 2. *Если* $t \to \infty$ *и* $\frac{n}{T\mathrm{M}\tau_1} \to r_1 \leqslant 1$, *то*

$$p(t) \underset{P}{\to} 1 - r_1.$$

Действительно, в силу теорем восстановления $H(t - Q^{-1}(v)) \to \frac{t}{\mathrm{M}\tau_1}$ при $t \to \infty$, поскольку $Q^{-1}(v)$ ограничено при всех $v < \mathrm{M}\tau_1$. Следовательно, при больших t ($t_0 = t$, $rQ(t_0) = r_1\mathrm{M}\tau_1$)

$$\int_0^{r_1\mathrm{M}\tau_1} H(t - Q^{-1}(v))\, dv = \frac{t}{\mathrm{M}\tau_1} r_1\mathrm{M}\tau_1 + o(t) = tr_1 + o(t).$$

Остается воспользоваться утверждением теоремы 3 и тем, что $Q_1(t) \leqslant \mathrm{M}\tau_1$.

Следствие 3. *Если* $r_1 < 1$ *и распределение* τ_1 *нерешетчато, то «вероятность отказа»* $\pi_\Delta(t)$ *за интервал времени* $[t, t + \Delta]$, $\Delta > 0$ *при* $t \to \infty$ *сходится к* $1 - r_1$.

Имеем при $t \to \infty$

$$\frac{\bar{s}(t + \Delta) - \bar{s}(t)}{e(t + \Delta) - e(t)} \underset{P}{\to} \frac{1}{\Delta} \int_0^{r_1\mathrm{M}\tau_1} [H(t + \Delta - Q^{-1}(v)) - \\ - H(t - Q^{-1}(v))]\, dv \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \pi_\Delta(t).$$

В силу локальной теоремы восстановления при $t \to \infty$

$$\pi_\Delta(t) = 1 - \frac{1}{\Delta} r_1 \mathsf{M}\tau_1 \frac{\Delta}{\mathsf{M}\tau_1} + o(1) = 1 - r_1 + o(1).$$

Замечание 1. Условие $\mathsf{P}(\tau_1 \geqslant h) = 1$ было введено нами для уменьшения технических сложностей. Утверждение леммы 3 для общего случая читатель сможет получить, если в выкладках наряду с множествами D, B_e и B_q использовать также множество B_τ, которое ограничивает снизу значения τ_{i_k}, τ_{j_k}, $k \leqslant L$, величиной Δ. Так как $\mathsf{P}(B_\tau)$ выбором $\Delta > 0$ может быть сделано сколь угодно близкой к 1, то доказательство леммы сохранится, если h заменить на Δ, а множество B_τ ввести в нужных местах под знак вероятности так же, как это делалось в (19) с множествами D и B_q.

Замечание 2. Условия р.с.п. в доказательстве леммы 3, по-видимому, также не по существу и могут быть заменены на условия с.п. Однако осуществление такой замены вызывает технические трудности.

Замечание 3. Правильное поведение процессов $s(u)$ и «вероятности отказа» $p(u)$ обусловлено в значительной мере регулярным способом заполнения каналов, который обеспечивается C-сходимостью процесса $\frac{e(u)}{T} \xrightarrow[C]{} u$. При другом режиме занятия каналов или при произвольном наборе начальных условий $(v_1, \ldots$ $\ldots, v_n)$, где v_i — время, начиная с которого i-канал может обслуживать вызовы, поведение рассматриваемых процессов может быть существенно иным. Если, например, v_i есть независимые случайные величины с плотностью $\frac{G(v)}{\mathsf{M}\tau_1}$, то распределение $q(u)$ сразу будет близко к стационарному.

Замечание 4. Процесс $\sigma(u)$ (предельный для $\frac{s(u)}{T}$) нетрудно описать с помощью интегрального уравнения. Действительно, за интервал времени $\Delta v =$ $= [v, v + \Delta]$ при $v < t_1$ в систему поступило примерно $T\Delta$ вызовов и из них к моменту t будет обслужено примерно $F(t - v) T\Delta$ $(F(u) = \mathsf{P}(\tau_1 \leqslant u))$. При $r < 1$ и $v > t_1$ за интервал времени Δv поступит примерно столько же вызовов, сколько каналов за это время освободится (т. е. $\Delta s(v)$), и из них будет обслужено к моменту t примерно $F(t-v)\Delta s(v)$. Следовательно, для предельного процесса $\sigma(t)$ мы можем записать

$$\sigma(t)=\int_0^t F(t-v)\,d\sigma \quad \text{при} \quad t\leqslant t_1,$$

$$\sigma(t)=\int_0^{t_1} F(t-v)\,dv+\int_{t_1}^{t} F(t-v)\,d\sigma(v) \quad \text{при} \quad t\geqslant t_1.$$

Это уравнение нетрудно переписать в виде

$$\sigma(t)=\int_0^t F(t-v)\,d\sigma(v)+c(t),$$

где

$$c(t)=\int_0^{\min(t_1,\,t)} F(t-v)\,d(v-\sigma(v))=\int_0^{\min(t_1,\,t)} F(t-v)\,G(v)\,dv$$

есть известная функция.

Переходя к преобразованиям Фурье — Стилтьеса

$$\tilde{\sigma}(\lambda)=\int e^{i\lambda t}\,d\sigma(t),\qquad \tilde{c}(\lambda)=\int e^{i\lambda t}\,dc(t),$$

мы получим

$$\tilde{\sigma}(\lambda)=\frac{\tilde{c}(\lambda)}{1-f(\lambda)},\qquad \sigma(t)=\int_0^t H(t-v)\,dc(v),$$

где

$$f(\lambda)=\mathsf{M}e^{i\lambda\tau_1}.$$

Замечание 5. Результат, аналогичный теореме 3, может быть получен также в случае, когда в каждом из n каналов обслуживание происходит с помощью «своей» стационарной последовательности, не зависящей от других (см. [10]).

§ 7. Распределение числа свободных каналов, когда интенсивность входного потока больше интенсивности обслуживания

В заключение этой главы мы рассмотрим распределение числа свободных каналов в «перегруженных» системах с отказами. В условиях предыдущего параграфа это будут системы, у которых число каналов обслуживания n удовлетворяет условию

$$\frac{n}{T\mathsf{M}\tau_j} \to r < 1.$$

Оказывается, при весьма широких предположениях существует собственное предельное распределение ненормированного числа свободных каналов $Z(t)$ в момент времени t и это распределение может быть полностью охарактеризовано.

Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия.

I. *Процессы $e(u) = e_T(u)$ имеют стационарные приращения, $\frac{e(u)}{T} \underset{C}{\to} u$ на $[0, t_0]$, а процессы $e\left(v + \frac{u}{T}\right) - e(v)$ при каждом фиксированном $v < t_0$ имеют конечномерные распределения, слабо сходящиеся к распределениям некоторого собственного процесса $E(u)$, со стационарными приращениями,* $\mathsf{M}(E(1) - E(0)) = 1$.

Это условие, очевидно, всегда будет выполнено, если процесс $e(u)$ получен из некоторого процесса со стационарными приращениями путем сжатия времени.

II. *В качестве последовательности $\{\tau_j\}$, управляющей обслуживанием вызовов, мы рассмотрим сначала последовательность независимых одинаково распределенных величин с показательным распределением*

$$\mathsf{P}(\tau_j > x) = G(x) = e^{-\alpha x}.$$

Теорема 1. *Пусть $\{\Pi(u)\}$ — пуассоновский процесс с параметром $r < 1$, не зависящий от $\{E(u)\}$. Тогда при любых $v > 0$ и $Z(0) = o(T)$ конечномерные распределения числа свободных каналов $Z\left(v + \frac{u}{T}\right)$ при $T \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса*

$$Y(u) = \sup_{s \leqslant u} (X(u) - X(s)), \quad u \geqslant 0,$$

где $X(u) = \Pi(u) - E(u)$.

Сформулированное утверждение относительно предельного распределения числа свободных каналов на самом деле справедливо в значительно более общих условиях, когда вместо условия II мы будем предполагать лишь *стационарность последовательности* $\{\tau_j\}$ и выполнение для нее условий р. с. п. (см. предыдущие параграфы) или *стационарную связанность времен обслуживания в каждом канале.* Обсуждение этого факта мы продолжим в конце параграфа.

Доказательство. Число вновь освободившихся каналов на интервале времени $(v, v+u)$ при условии $Z(v)=k$ ведет себя локально как пуассоновский процесс с параметром $(n-k)\alpha$. Точнее, если $s(v+u)-s(v)$, $u \geqslant 0$ означает «процесс освобождения каналов» (число каналов, освободившихся за интервал $(v, v+u)$ без учета вызовов, поступивших после момента v), то его можно записать как сумму убывающего числа независимых пуассоновских процессов $\eta_j(u)$ с параметром α:

$$s(v+u)-s(v)=\sum_{j=1}^{q_v^*(u)} \eta_j(u),$$

где

$$q_v^*(0)=q(v)=n-Z(v)=n-k, \quad q_v^*(u)= = q_v^*(0)-[s(v+u)-s(v)].$$

Имеем при $\Delta \to 0$, $n\Delta \to 0$

$$\mathsf{P}(s(v+u)-s(v)=j/Z(v)=k)= \begin{cases} 1-(n-k)\alpha\Delta+o(\Delta n) & \text{при } j=0, \\ (n-k)\alpha\Delta+o(n\Delta) & \text{при } j=1, \\ o(n\Delta) & \text{при } j \geqslant 2. \end{cases}$$

Этот процесс будет наиболее интенсивным при $k=0$. Поэтому на том же вероятностном пространстве можно построить процесс Z^* такой, что

$$Z^*(0)=Z(0), \quad Z^*(v) \geqslant Z(v), \tag{1}$$

где

$$Z^*(v+dv)=\max[0, Z^*(v)-de(v)+d\Pi^*(v)],$$

а $\Pi^*(v)$ есть пуассоновский процесс с параметром $n\alpha$, не зависящий от $\{e(v)\}$. Аналогично [18] (гл. I) без труда устанавливается, что решение этого уравнения есть

$$Z^*(v)=\sup_{0 \leqslant s \leqslant v}[y(v), y(v)-y(s)],$$

где
$$y(v) = Z^*(0) + [\Pi^*(v) - \Pi^*(0)] - [e(v) - e(0)].$$

Так как при $Z^*(0) = o(T)$ выполняется $\frac{y(v)}{T} \underset{C}{\to} (r - 1)v < 0$, то на ω-множестве вероятности, близкой к 1, $Z^*(v)$ совпадает (см. [18]) со значением
$$\sup_{s \leqslant v} ([\Pi^*(v) - \Pi^*(s)] - [e(v) - e(s)]). \tag{2}$$

Теперь произведем растяжение времени в T раз (заменив в (2) v и s соответственно на $v + \frac{u}{T}$ и $v + \frac{w}{T}$). Тогда процесс $\Pi^*\left(v + \frac{u}{T}\right) - \Pi^*\left(v + \frac{w}{T}\right)$ будет сходиться к процессу $\Pi(u) - \Pi(w)$, где $\Pi(u)$ — пуассоновский процесс с параметром $r < 1$ (здесь мы везде имеем в виду сходимость конечномерных распределений). Процесс $e(v) - e(s)$ будет сходиться к процессу $E(u) - E(w)$. Так как сходимость процессов Π^* происходит вместе со сходимостью математических ожиданий $\left(\frac{n\alpha}{T} \to r\right)$, то в силу теорем устойчивости (см. § 1 гл. IV) конечномерные распределения процесса (2) (где v и s заменены на $v + \frac{u}{T}$ и $v + \frac{w}{T}$) будут сходиться к распределениям процесса
$$\sup_{w \leqslant u} ([\Pi(u) - \Pi(w)] - [E(u) - E(w)]). \tag{3}$$

Аналогичным образом можно построить процесс $Z^{**}(v)$, оценивающий $Z(v)$ снизу. Из результатов предыдущего параграфа следует, что событие
$$B_T = \left\{ \sup_{0 \leqslant v \leqslant t_0} Z(v) < \varepsilon_T T \right\}$$
при некотором $\varepsilon_T = o(1)$ имеет вероятность $\mathsf{P}(B_T) \to 1$ (этот факт можно извлечь и из оценки $Z(v) \leqslant Z^*(v)$). Но на множестве B_T при $v + \frac{u}{T} \leqslant t_0$
$$Z\left(v + \frac{u}{T}\right) \geqslant Z^{**}\left(v + \frac{u}{T}\right), \tag{4}$$

где Z^{**} строится точно так же, как процесс Z^*, но с помощью пуассоновского процесса Π^{**} с параметром

$(n-\varepsilon_T T)\alpha$, $\varepsilon_T = o(1)$. Повторяя уже приведенные рассуждения применительно к процессу Z^{**}, мы получим, что конечномерные распределения $Z^{**}\left(v+\frac{u}{T}\right)$ сходятся при $T\to\infty$ к распределениям (3). В силу (1), (4) это заканчивает доказательство теоремы.

Мы отмечали в начале параграфа, что утверждение теоремы сохранится и в более общем случае, когда τ_j имеют произвольное распределение, а независимость элементов $\{\tau_j\}$ заменена стационарной связностью с условиями р. с. п. Более того, утверждение сохранится и в другой весьма общей ситуации, когда обслуживанием в каждом канале управляет своя стационарная последовательность $\{\tau_j^{(l)}\}_{j=1}^{\infty}$ (l — номер канала). Возможность такого существенного обобщения вытекает из теоремы Григолиониса о том, что сумма редеющих точечных процессов при широких условиях на эти процессы сходится к процессу Пуассона (см., например, [39]).

Доказательство приведенных фактов в рамках этой книги потребовало бы непропорционально много места. Поэтому мы ограничимся здесь ссылкой на работу [10].

В заключение рассмотрим один важный частный случай, когда $E(u)$ есть процесс с независимыми приращениями. Здесь стационарное распределение числа свободных каналов $Z(u)$ будет совпадать с распределением максимума на $[0,\infty)$ траектории обобщенного пуассоновского процесса $\Pi(u)-E(u)$, который является непрерывным сверху. Если

$$\mathsf{M}e^{i\lambda E(u)} = \exp\left\{u\sum_{k=0}^{\infty}(e^{i\lambda k}-1)p_k\right\},\quad \sum_{k=0}^{\infty}p_k=1,$$

то

$$\mathsf{M}e^{i\lambda(\Pi(u)-E(u))} = \exp\left\{(e^{i\lambda}-1)ru+u\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-i\lambda k}-1)p_k\right\}$$

и предельное распределение $Z(t)$ будет таким же, как распределение величины

$$Y=\max_{k\geqslant 0}\sum_{j=0}^{k}\xi_j,$$

где ξ_j независимы, $\mathsf{P}(\xi_j=1)=\frac{r}{r+1}$, $\mathsf{P}(\xi_j=-j)=$ $=\frac{p_j}{r+1}$, $j=0,1,\ldots$ Известно (см. [18]), что в этом случае

$$\mathsf{P}(Y\geqslant x)=d^{-x}\qquad (x \text{ целое}),$$

где d — есть наибольший корень уравнения $p(d)=1$, $p(y)=\sum\limits_k y^k\mathsf{P}(\xi_1=k)$.

Если $E(u)$ — также пуассоновский процесс ($p_1=1$), то $d=r^{-1}$, $\mathsf{P}(Z(u)\geqslant x)=r^x$, $r<1$.

Еще раз отметим, что указанные простые формулы будут справедливыми для широкого класса стационарных управлений процессом обслуживания.

ГЛАВА III

ОПИСАНИЕ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ

Простейшей ситуацией, в которой совершенно естественным образом появляется аппроксимация с помощью диффузионного процесса, является изучение достационарной очереди нагруженной одноканальной системы. Действительно, как хорошо известно, для таких систем распределение времени ожидания w_n вызова с номером n при нулевом начальном условии $w_0=0$ имеет такое же распределение, как $\max\limits_{k\leqslant n} X_k$, где $X_k=\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j$, ξ_j есть независимые разности $\xi_j=\tau_j^s-\tau_j^e$ между интервалами τ_j^e, отделяющими моменты появления вызовов и временами обслуживания τ_j^s (подробнее см., например, в [18]). Условие критической загрузки означает, что $\mathsf{M}\tau_j^s=\mathsf{M}\tau_j^e$ или, что то же, $\mathsf{M}\xi_j=0$. Но в силу принципа инвариантности Донскера — Прохорова (§ 2 гл. I) распределение $\max\limits_{k\leqslant n}\dfrac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}$ будет сближаться при $n\to\infty$ с распределением $\sup\limits_{t\leqslant 1} w(t)$, где $\sigma^2=\mathsf{D}\,\xi_j$, $w(t)$ есть стандартный винеровский процесс. Следовательно, примерно таким же будет и распределение $\dfrac{w_n}{\sigma\sqrt{n}}$.

Несколько сложнее обстоит дело в случае, когда $\mathsf{M}\xi_j$ отлично от 0, но все же мало. Здесь необходимо рассматривать уже два одновременно меняющихся параметра: n и $\mathsf{M}\xi_j$. Предельный переход при этом можно осуществлять различными способами. Если $\mathsf{M}\xi_j<0$, то можно сначала устремить n к бесконечности (т. е. рассматривать стационарные распределения), а затем $\mathsf{M}\xi_j$ — к 0. Можно рассматривать и одновременное изменение n и $M\xi_j$. Наиболее важным при этом оказывается направление $M\xi_{1,n} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $\delta = \mathrm{const}$, $n \to \infty$. В этих условиях (мы рассматриваем теперь схему серий, когда распределение $\xi_j = \xi_{j,n}$ зависит от n) распределение $\frac{w_n}{\sigma\sqrt{n}}$ или, что то же, распределение

$$\max_{k \leqslant n} \frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}} = \max_{k \leqslant n} \left[\frac{X_k - kM\xi_{1,n}}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{k\delta}{n\sigma}\right]$$

в силу принципа инвариантности будет сближаться с распределением $\max\limits_{t \leqslant 1}\left[w(t) + \frac{t\delta}{\sigma}\right]$.

Подобный анализ в несколько иной форме был осуществлен в работе Прохорова [64].

После появления этой работы было довольно быстро осознано, что можно найти приближение с помощью процессов диффузии для всей последовательности $w_1, \ldots, w_n$ как процесса, рассматривая, например, ломаную, построенную по точкам $\left(\frac{k}{n}, \frac{w_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$. При этом аналогичная картина сохранится и для многоканальных систем (см. [12], [39], [66], [77—79], [86—90], [98], [100], [111], [113]). Однако во всех этих рассмотрениях существенную роль играли как независимость элементов управляющей последовательности, так и знание конкретного и достаточно простого алгоритма обслуживания. Продвижение в этой области для более сложных систем методами цитированных выше работ или весьма затруднительно, или невозможно.

В третьей главе мы рассмотрим более общий подход к задаче диффузионной аппроксимации, который будет включать в себя наряду со всеми уже известными результатами целый ряд новых возможностей.

Мы уже видели в предыдущей главе, что можно получать весьма содержательные и полезные теоремы об асимптотическом поведении систем обслуживания, не фиксируя конкретной природы входного потока вызовов. Достаточно было предположить, что этот поток как случайный процесс удовлетворяет некоторым весьма широким условиям, которые нетрудно проверяются и которые бывают выполненными в большинстве интересных случаев.

Оказывается, что подобная картина в общих чертах сохранится, если мы, идя дальше по этому пути, откажемся также от рассмотрения конкретной природы механизма (алгоритма) обслуживания. В этом случае полезность и предпочтительность общего определения процессов обслуживания, которое обсуждалось нами в начале второй главы, станет намного заметнее.

В то же время отсутствие перед глазами конкретной системы обслуживания создает известные трудности и заставляет особо оговаривать некоторые особенности во взаимоотношениях между компонентами $e(t)$, $r(t)$, $s(t)$ процесса обслуживания $S(t)$ (см. введение к главе II). Например, мы приходим к необходимости формализовать такие понятия, как «независимость входа», «независимость выхода» и др., присутствие которых прежде вытекало (обычно, неявно) из той конкретной конструкции системы обслуживания, которая была нам задана. Эти понятия вместе с понятием стохастического управления вводятся и обсуждаются в § 1.

В § 2 описываются условия, которым в рамках этой главы (т. е. для диффузионной аппроксимации) должны удовлетворять процессы обслуживания, а также обсуждаются различные возможности, возникающие в задаче диффузионной аппроксимации.

§ 3 содержит общие теоремы о сходимости процессов «занятости» к процессам диффузии, которые затем в §§ 4—6 конкретизируются для различных типов процессов обслуживания. Рассмотрены, в частности, многоканальные системы с интенсивным входом, стохастическое управление отказами, нагруженные системы. Заканчивает эту главу § 7, в котором рассмотрен числовой пример.

Прежде чем переходить к основному изложению, в котором будет изучаться асимптотическое поведение «длины очереди» или «занятости» $q(t) = e(t) - r(t) - s(t)$, мы рассмотрим два примера систем обслуживания, которые затем будем часто использовать для иллюстраций.

Пример 1. Системы $\langle G_I, G_I, G_I, G_I \rangle$ (в обозначениях монографии [18]). Это есть одноканальные системы с очередью, управляемые последовательностью независимых величин

$$\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s, \nu_j^s\}_{j=1}^{\infty}.$$

На вход этой системы через интервалы времени $\tau_1^e, \tau_2^e, \ldots$ $\ldots; \mathsf{P}(\tau_j^e < x) = F_e(x)$ подаются группы вызовов объемов $\nu_1^e, \nu_2^e, \ldots; \mathsf{P}(\nu_j^e < x) = H_e(x)$. Обслуживаются вызовы также группами объемов $\nu_1^s, \nu_2^s, \ldots; \mathsf{P}(\nu_j^s < x) = H_s(x)$ (или меньшими партиями, если в очереди оказалось недостаточное количество вызовов). На обслуживание j-й группы тратится время τ_j^s, $\mathsf{P}(\tau_j^s < x) = F_s(x)$. Если очередь отсутствует, то система начинает работать при поступлении хотя бы одного вызова. Если есть очередь, то обслуживающий прибор работает бесперебойно, обслуживая по ν_j^s вызовов за время τ_j^s до тех пор, пока очередь не исчезнет. Для этой системы процесс отказов $r(t) \equiv 0$, входной процесс

$$e(t) = \sum_{j=1}^{\eta_e(t)-1} \nu_j^e, \quad \eta_e(t) = \min\{k: \tau_1^e + \ldots + \tau_k^e > t\}.$$

Эволюцию процесса обслуживания $S(t)$ здесь удобно характеризовать, построив марковский процесс

$$X(t) = \{S(t), \gamma^e(t), \gamma^s(t)\},$$

где

$$\gamma^e(t) = \inf\{s \geqslant 0:\ e(t-s+0) - e(t-s-0) > 0\} \tag{1}$$

есть время до последнего перед моментом t скачка процесса $e(t)$ (или, что то же, есть величина «дефекта» или «недоскока» до уровня t в блуждании со скачками $\tau_1^e, \tau_2^e, \ldots$). Процесс $\gamma^s(t)$ определяется аналогично (1), как расстояние от точки t до ближайшей точки $s < t$, в которой произошло начало обслуживания очередного вызова.

Другой вариант дополнения процесса $S(t)$ до марковского состоит в добавлении к $S(t)$ процессов $\chi^e(t)$ и $\chi^s(t)$, где $\chi^e(t)$ есть величина «эксцесса» или «перескока» уровня t в блуждании со скачками $\tau_1^e, \tau_2^e, \ldots$:

$$\chi^e(t) = \inf\{s > 0:\ e(t+s+0) - e(t+s-0) > 0\}.$$

Величина $\chi^s(t)$ определяется аналогично по процессу $s(t)$.

Укажем также следующие два видоизменения систем, описанных в примере 1.

Пример 1а. Системы с автономным обслуживанием. Единственное отличие их от систем примера 1 состоит в том, что обслуживание в них начинается только в моменты времени 0, τ_1^s, $\tau_1^s+\tau_2^s$, $\tau_1^s+\tau_2^s+\tau_3^s, \ldots$ независимо от наличия очереди.

Пример 1в. Системы с ограниченной очередью. Это есть системы, описанные в примере 1, в которых, однако, вызовы, заставшие в момент своего прихода очередь размера N (N есть максимальная допустимая длина очереди), получают отказ и выбывают из рассмотрения.

Рассмотрим теперь

Пример 2. Системы $\langle G_I, G_I, E/m, 1\rangle$ (см. [18]) представляют собой системы с очередью с тем же, что и в примере 1, входным потоком вызовов и с m независимыми каналами обслуживания, в каждом из которых вызовы обслуживаются по одному $\left(\nu_j^s \equiv 1\right)$, а время обслуживания распределено по показательному закону

$$F_s(x) = \mathsf{P}\left(\tau_j^s < x\right) = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Здесь эволюцию процесса можно описывать с помощью марковских процессов

$$X(t) = \{S(t),\ \gamma^e(t)\} \quad \text{или} \quad Y(t) = \{S(t),\ \chi^e(t)\},$$

где $\gamma^e(t)$, $\chi^e(t)$ определяются по входному процессу так же, как в примере 1.

В следующем параграфе мы введем некоторые полезные понятия, которые будут использоваться ниже.

§ 1. Понятия независимости входного и выходного потоков и стохастического управления

Нам будет проще в дальнейшем считать, что процесс

$$S(t) = (e(t),\ r(t),\ s(t))$$

определен на всей полуоси $t \geqslant 0$ $(U = \infty)$. Напомним также, что мы считаем траектории $S(t)$ непрерывными справа.

Предположим, что заданы совокупности вложенных σ-алгебр

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{M}(u) & (\mathfrak{M}(u_1) \subset \mathfrak{M}(u_2) & \text{при} & u_1 \leqslant u_2), \\ \mathfrak{E}(u) \subset \mathfrak{M}(u) & (\mathfrak{E}(u_1) \subset \mathfrak{E}(u_2) & \text{при} & u_1 \leqslant u_2), \\ \mathfrak{S}(u) \subset \mathfrak{M}(u) & (\mathfrak{S}(u_1) \subset \mathfrak{S}(u_2) & \text{при} & u_1 \leqslant u_2), \\ \mathfrak{R}(u) \subset \mathfrak{M}(u) & (\mathfrak{R}(u_1) \subset \mathfrak{R}(u_2) & \text{при} & u_1 \leqslant u_2), \end{array}$$

обладающие тем свойством, что значения процесса $S(t)$ при $t \in [0, u]$ измеримы относительно $\mathfrak{M}(u)$, а значения процессов $e(t)$, $s(t)$ и $r(t)$ на $[0, u]$ измеримы соответственно относительно $\mathfrak{E}(u)$, $\mathfrak{S}(u)$, $\mathfrak{R}(u)$.

Часто в качестве σ-алгебр $\mathfrak{M}(u)$, $\mathfrak{E}(u)$, $\mathfrak{S}(u)$, $\mathfrak{R}(u)$ бывает удобно рассматривать σ-алгебры, порожденные событиями, относящимися к соответствующим процессам на отрезке времени $[0, u]$, например, событиями вида $\{e(v) < x\}$, $v \leqslant u$ для σ-алгебры $\mathfrak{E}(u)$.

В этом случае непрерывность справа $S(t)$ будет означать непрерывность справа соответствующих потоков σ-алгебр (ср. с § 3 гл. I):

$$\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}(t+0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}\left(t + \frac{1}{k}\right).$$

Действительно, рассмотрим, например, процесс $e(t)$. Его траектории не убывают, кусочно-постоянны и непрерывны справа. Следовательно, для данных t и n найдется $\varepsilon = \varepsilon(t, n)$ такое, что

$$\mathsf{P}(e(t+\varepsilon) \neq e(t)) < n^{-2}.$$

Возьмем теперь любое $A \in \mathfrak{E}(t+0) \subset \mathfrak{E}(t+\varepsilon)$. Так как $\mathfrak{E}(t+\varepsilon)$ порождена алгеброй «цилиндрических» множеств вида

$$\tilde{A} = \{(e(t_1), \ldots, e(t_N)) \in B_N\}, \quad B_N \subset R^N; \quad 0 \leqslant t_l \leqslant t + \varepsilon,$$

то найдется множество $\tilde{A}_n$ такого вида, для которого вероятность симметрической разности между A и $\tilde{A}_n$ удовлетворяет неравенству

$$\mathsf{P}(A - \tilde{A}_n) + \mathsf{P}(\tilde{A}_n - A) < n^{-2}$$

(см., например, [28]). Положим $t_l^* = \min(t, t_l)$ и рассмотрим множество A_n^*, равное множеству $\tilde{A}_n$, в котором значения t_j заменены на t_j^*. Тогда $\tilde{A}_n\{e(t+\varepsilon)=e(t)\} = A_n^*\{e(t+\varepsilon)=e(t)\}$ и стало быть,

$$\mathsf{P}(\tilde{A}_n - A_n^*) + \mathsf{P}(A_n^* - \tilde{A}_n) < 2n^{-2},$$
$$\mathsf{P}(A - A_n^*) + \mathsf{P}(A_n^* - A) < 3n^{-2}.$$

Но $A_n^* \in \mathfrak{E}(t)$ и любое из множеств

$$A_* = \liminf A_n^* = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A^* \in \mathfrak{E}(t)$$

или

$$A^* = \limsup A_n^* = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n^* \subset \mathfrak{E}(t)$$

будет отличаться от A на множество меры 0. Например

$$\mathsf{P}(A^* - A) = \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n^* - A\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mathsf{P}(A_n^* - A) \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} 3n^{-2} = 0,$$

$$\mathsf{P}(A - A^*) \leqslant \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(A - \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n^*\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mathsf{P}(A - A_n^*) \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} 3n^{-2} = 0.$$

Таким образом, для любого множества A из $\mathfrak{E}(t+0)$ найдется множество A^* из $\mathfrak{E}(t)$, отличающееся от A на множество меры 0. Так как мы договорились считать рассматриваемые σ-алгебры пополненными, то требуемое соотношение $\mathfrak{E}(t+0) = \mathfrak{E}(t)$ доказано *).

В дальнейшем мы будем предполагать везде, где это потребуется, что σ-алгебры $\mathfrak{M}(t)$, $\mathfrak{E}(t)$, $\mathfrak{S}(t)$, $\mathfrak{R}(t)$ вместе с траекториями рассматриваемых процессов *непрерывны справа.*

---

*) Было приведено доказательство, предложенное В. В. Юринским. Без предположения о том, что σ-алгебры $\mathfrak{M}(t)$ пополнены, равенство $\mathfrak{M}(t+0) = \mathfrak{M}(t)$, вообще говоря, неверно, так же, впрочем, как и без предположения о том, что множество значений $S(t)$ дискретно.

Определение 1. *Мы будем говорить, что входной процесс (или поток) $\{e(t)\}$ системы является независимым, если при любом $t > 0$ σ-алгебры $\mathfrak{E}(\infty)$ и $\mathfrak{M}(t)$ условно независимы*) при данной $\mathfrak{E}(t)$. То есть, если для любого $M \in \mathfrak{M}(t)$*

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{E}(\infty)}(M) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(t)}(M) \tag{1}$$

или, что то же, для любого $E \in \mathfrak{E}(\infty)$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(t)}(E) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(t)}(E).$$

Сформулированные равенства можно записать также в виде: если $E \in \mathfrak{E}(\infty)$, $M \in \mathfrak{M}(t)$, то

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{E}(t)}(EM) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(t)}(E)\,\mathsf{P}_{\mathfrak{E}(t)}(M).$$

Эквивалентным образом это определение может быть сформулировано в терминах случайных величин. Если ξ_1 измерима относительно $\mathfrak{E}(\infty)$, ξ_2 — относительно $\mathfrak{M}(t)$, то

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{E}(t)}\xi_1\xi_2 = \mathsf{M}_{\mathfrak{E}(t)}\xi_1\mathsf{M}_{\mathfrak{E}(t)}\xi_2.$$

Отметим, что это определение, как и ряд последующих, относящихся к системам обслуживания, существенным образом связано с введенными совокупностями σ-алгебр, так что, скажем, одна и та же система может иметь или не иметь независимый вход в зависимости от введенных σ-алгебр. Чтобы избежать этого неудобства, мы под процессом обслуживания впредь будем понимать наряду с $S(t)$ задание также нужных совокупностей σ-алгебр $\mathfrak{M}(t)$, $\mathfrak{E}(t)$, $\mathfrak{S}(t)$, $\mathfrak{R}(t)$, которые, как уже отмечалось, мы будем предполагать непрерывными справа.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{M}'$ — любая σ-алгебра такая, что

$$\mathfrak{E}(t) \subset \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}(t).$$

Тогда для систем с независимым входом $\mathfrak{M}(t)$ и $\mathfrak{E}(\infty)$ условно независимы при данной $\mathfrak{M}'$. Это следует из того,

*) *σ-алгебры $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ условно независимы при данной $\mathfrak{B}$, если $\mathsf{P}_{(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_1)}(A) = \mathsf{P}_{\mathfrak{B}}(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}_2$.* Здесь индексы 1 и 2 можно поменять местами (подробнее см. [59]). Через $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1)$ мы обозначаем здесь σ-алгебру, порожденную событиями из $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$.

что для $E \in \mathfrak{E}(\infty)$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(t)}(E) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(t)}(E) = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}'}(E).$$

Эту независимость, как и (1), иногда удобно формулировать как условную независимость $\mathfrak{M}(t)$ и σ-алгебры $\mathfrak{E}(t, \infty)$, порожденной случайными величинами $e(t + u) - e(t)$, $u \geqslant 0$.

Смысл условий независимости состоит в том, что дальнейшее течение процесса $e(u)$ на $[t, \infty)$ не зависит от прошлого процесса $S(t)$ на $[0, t]$, если только зафиксирована предыстория $e(u)$ на $[0, t]$. Другими словами, важно знать лишь *собственную* предысторию процесса $e(u)$ на $[0, t]$.

Очевидно, что системы в примерах 1, 2 имеют независимые входы. Независимым входом обладают также системы, изучавшиеся нами в главе II, и большинство других систем, представляющих практический интерес.

Пусть теперь τ — марковский момент входного процесса: $\{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{E}(t)$. Введем в рассмотрение σ-алгебры «случайного прошлого и настоящего» $\mathfrak{E}(\tau)$ и $\mathfrak{M}(\tau)$. Как это обычно принято, *мы будем говорить, что $A \in \mathfrak{M}(\tau)$, если и только если $A \in \mathfrak{M}(\infty)$ и*

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{M}(\tau).$$

Мы будем говорить, что $B \in \mathfrak{E}(\tau)$, если и только если $B \in \mathfrak{E}(\infty)$,

$$B \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{E}(t).$$

Поскольку последнее соотношение выполнено для $B = \{\tau \leqslant t\}$, то τ измерима относительно $\mathfrak{E}(\tau)$.

Определение 2. *Вход $e(t)$ системы назовем строго независимым, если σ-алгебры $\mathfrak{E}(\infty)$ и $\mathfrak{M}(\tau)$ условно независимы при данной $\mathfrak{E}(\tau)$ для любого марковского момента τ входного процесса.*

Как и раньше, свойство строгой независимости можно записать следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}'$ — любая σ-алгебра такая, что

$$\mathfrak{E}(\tau) \subset \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}(\tau).$$

Тогда для любых $E \in \mathfrak{E}(\infty)$, $M \in \mathfrak{M}(\tau)$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(E) = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}'}(E), \tag{2}$$

$$\mathsf{P}_{(\mathfrak{M}', \mathfrak{E}(\infty))}(M) = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}'}(M) \tag{3}$$

(символ $(\mathfrak{M}', \mathfrak{E}(\infty))$ обозначает σ-алгебру $\sigma(\mathfrak{M}', \mathfrak{E}(\infty))$, порожденную $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{E}(\infty)$), или, что то же,

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}'}(EM) = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}'}(E)\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}'}(M).$$

Эквивалентные формулировки можно привести и в терминах случайных величин.

Заметим, что так как процесс $e(t)$ непрерывен справа, то $e(\tau + t)$ при всех t есть случайные величины. Действительно, в этом случае $e(\tau + t)$ можно представить как предел при $n \to \infty$ последовательности случайных величин

$$e_n(\tau + t) = \sum_{k=0}^{\infty} e\left(\frac{k}{2^n} + t\right) I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{2^n}\right). \tag{4}$$

Пользуясь этим замечанием мы можем определить σ-алгебру *«случайного будущего»* $\mathfrak{E}(\tau, \infty)$, как порожденную семейством случайных величин τ и $e(\tau + t) - e(\tau)$ при $t \geqslant 0$. Тогда *)

$$\mathfrak{E}(\infty) = (\mathfrak{E}(\tau), \mathfrak{E}(\tau, \infty)),$$

---

*) Для доказательства равенства $\mathfrak{E}(\infty) = (\mathfrak{E}(\tau), \mathfrak{E}(\tau, \infty))$ надо заметить, что при любых t и x

$$\{e(t) < x\} = \{\tau > t\}\{e(t) < x\} \cup$$
$$\cup \{\tau \leqslant t\}\left[\bigcup_j \{e(\tau) = j\}\{e(\tau + (t - \tau)) - e(\tau) < x - j\}\right].$$

Здесь

$$\{\tau > t\}\{e(t) < x\} \in \mathfrak{E}(\tau), \quad \{\tau \leqslant t\}\{e(\tau) = j\} \in \mathfrak{E}(\tau),$$

$$I(\tau \leqslant t)\,[e(\tau + (t - \tau)) - e(\tau)] =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{\infty} I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant t - \tau < \frac{k+1}{2^n}\right)\left(e\left(\tau + \frac{k}{2^n}\right) - e(\tau)\right).$$

Последнее равенство, справедливое в силу непрерывности $e(u)$ справа, показывает, что случайная величина $I(\tau \leqslant t)\ [e(\tau + (t - \tau)) - e(\tau)]$ измерима относительно $\mathfrak{E}(\tau, \infty)$. Сказанное означает, что

$$\{e(t) < x\} \in (\mathfrak{E}(\tau), \mathfrak{E}(\tau, \infty)), \quad \mathfrak{E}(\infty) \subset (\mathfrak{E}(\tau), \mathfrak{E}(\tau, \infty)).$$

Поскольку включение в обратную сторону очевидно, то

$$\mathfrak{E}(\infty) = (\mathfrak{E}(\tau), \mathfrak{E}(\tau, \infty)).$$

и строгую независимость входа можно определить также, как условную независимость $\mathfrak{E}(\tau, \infty)$ и $\mathfrak{M}(\tau)$ при данной $\mathfrak{E}(\tau)$. Такой вариант определения, как нам кажется, лучше отражает существо введенного понятия. («Случайное будущее» $e(t)$ не зависит от «случайного прошлого» процесса $S(t)$ на $[0, \tau]$, если зафиксирована предыстория $e(t)$ на $[0, \tau]$.)

Возникает естественный вопрос, будет ли независимость входа означать его строгую независимость. Утвердительный ответ на этот вопрос содержится в следующем предложении.

Теорема. *Если потоки σ-алгебр $\mathfrak{E}(u)$ и $\mathfrak{M}(u)$ непрерывны справа и для любого $E \in \mathfrak{E}(\infty)$*

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(E) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(u)}(E),$$

то для всякого марковского момента τ (относительно $\{\mathfrak{E}(u)\}$)

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(E) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(\tau)}(E).$$

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь $E \in \mathfrak{E}(\infty)$ и рассмотрим мартингалы

$$\xi(u) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(u)}(E) = \mathsf{M}_{\mathfrak{E}(u)} I(E),$$
$$\zeta(u) = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(E) = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} I(E),$$

которые будут по условию стохастически эквивалентными

$$\mathsf{P}(\xi(u) = \zeta(u)) = 1$$

и непрерывными справа. Для таких процессов значения $\xi(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ в случайные моменты времени равны

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{2^n}\right), \\ \zeta(\tau) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta\left(\frac{k}{2^n}\right) I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{2^n}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Известно (см. [58], стр. 69, теорема 3.6), что эти значения совпадают соответственно с

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{E}(\tau)}\xi(\infty) = \mathsf{P}_{\mathfrak{E}(\tau)}(E) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}\zeta(\infty) = \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(\tau)}(E).$$

Следовательно, нам достаточно доказать, что $\xi(\tau) = \zeta(\tau)$ п. н. Но это непосредственно следует из совпадения допредельных выражений в (5). ◀

Перейдем теперь к определению *независимого выхода* системы. Оно будет несколько иным, поскольку даже в простейших примерах σ-алгебры $\mathfrak{M}(t)$ и $\mathfrak{S}(t, \infty)$ не будут условно независимы при данной $\mathfrak{S}(t)$. Так, в примере 1 с редким входным потоком $e(u)$ простои в обслуживании на интервале $[t, t+v]$ будут велики, если очередь $q(t)$ в момент t равна 0, и малы, если $q(t)$ велико. Стало быть, значение $s(t+u)-s(t)$ при фиксированной предыстории процесса $s(v)$ при $v \in [0, t]$ будет существенно зависеть от предыстории $e(v)$ (т. е. от значений $e(v)$ при $0 \leqslant v \leqslant t$).

Однако, если в течение некоторого периода времени $(t, t+u)$ система будет загружена и будут отсутствовать простои, то количество обслуженных вызовов за этот период уже не будет зависеть от $\mathfrak{M}(t)$ и $\mathfrak{E}(t+u)$ при фиксированной $\mathfrak{S}(t)$ (мы снова имеем в виду системы примера 1 и близкие к ним). Именно это обстоятельство положено в основу приводимого ниже определения.

Пусть $\mathfrak{E}^*(t) = (\mathfrak{E}(t), \mathfrak{R}(t))$, так что «приведенный» входной поток

$$e^*(u) = e(u) - r(u)$$

на $[0, t]$ измерим относительно $\mathfrak{E}^*(t)$.

Обозначим Γ_t событие вида

$$\Gamma_t = \{q(t) \in K\}, \tag{6}$$

где K — некоторое множество целых чисел, расположенное выше данного фиксированного числа $d \geqslant 0$, а

$$q(t) = e(t) - r(t) - s(t)$$

есть величина «очереди» в момент времени t. Рассмотрим такие множество K и два события

$$V_{e^*} \in \mathfrak{E}^*(t+u) \quad \text{и} \quad V_s \in \mathfrak{S}(t+u)$$

(зависящие от K), что произведение $\Gamma_t V_{e^*} V_s$ влечет за собой событие

$$\Gamma_t V_{e^*} V_s \subset \{\inf_{t \leqslant v \leqslant t+u} q(v) \geqslant d\}. \tag{7}$$

Определение 3. *«Выход» системы $\{S(t),\ t \in T\}$ называется независимым в области $q \geqslant d$, если при любых $u \geqslant 0$, $t \leqslant 0$, $S \in \mathfrak{S}(t+u)$ и при любых K, V_{e^*}, V_s, удовлетворяющих условию* (7), *выполняется*

$$I(\Gamma_t V_{e^*})\, \mathsf{P}_{(\mathfrak{M}(t),\ \mathfrak{E}^*(t+u))} V_s S = I(\Gamma_t V_{e^*})\, \mathsf{P}_{\mathfrak{S}(t)} V_s S. \tag{8}$$

Эти соотношения можно назвать *условной независимостью в области* $\{q \geqslant d\}$ *σ-алгебр* $\mathfrak{S}(t+u)$ *и* $\mathfrak{M}(t)\mathfrak{E}^*(t+u)$ *при данной* $\mathfrak{S}(t)$. Его можно эквивалентным образом записать также в виде равенства

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}(t)} \Gamma_t V_{e^*} V_s B S = \mathsf{P}_{\mathfrak{S}(t)} V_s S\, \mathsf{P}_{\mathfrak{S}(t)} \Gamma_t V_{e^*} B \tag{9}$$

при любых $S \in \mathfrak{S}(t+u)$, $B \in (\mathfrak{M}(t)\mathfrak{E}^*(t+u))$. Чтобы установить (9), достаточно левую часть этого равенства записать в виде

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(t)} I(\Gamma_t V_{e^*} B)\, \mathsf{P}_{(\mathfrak{M}(t)\ \mathfrak{E}^*(t+u))} V_s S$$

и воспользоваться (8). Наоборот, если верно (9), то, поделив обе части в (9) на $\mathsf{P}_{\mathfrak{S}(t)} B$ и переходя к условным вероятностям, получим в силу произвольности $B \in \in \mathfrak{M}(t)\mathfrak{E}^*(t+u)$

$$\mathsf{P}_{(\mathfrak{M}(t)\ \mathfrak{E}^*(t+u))} \Gamma_t V_{e^*} V_s S = \mathsf{P}_{(\mathfrak{M}(t)\ \mathfrak{E}^*(t+u))} \Gamma_t V_{e^*} \mathsf{P}_{\mathfrak{S}(t)} V_s S, \tag{10}$$

что совпадает с (8).

Грубо говоря, независимость выхода означает, что если известно «прошлое» процесса обслуживания $s(v)$ на $[0, t]$, то его «будущее» в интервале времени $[t, t+ + u]$ не зависит ни от каких событий из $\mathfrak{M}(t)\mathfrak{E}^*(t+u)$, если только очередь $q(v)$ за время $(t, t+u)$ ни разу не задела область $q < d$.

Замечание 2. В определении 3, как и в предыдущих определениях, можно использовать формулировки, эквивалентные (8) в терминах случайных величин. Кроме того, здесь также справедлив аналог к замечанию 1, с той лишь разницей, что здесь в качестве промежуточной σ-алгебры можно взять любую σ-алгебру $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{S}(t) \subset \mathfrak{M}' \subset (\mathfrak{M}(t)\mathfrak{E}^*(t+u))$.

Определение 3А. *Выход системы называется независимым в области $D \geqslant q \geqslant d$, если выполнены условия определения 3 при произвольных K и событиях $V_{e^*} \in \mathfrak{E}^*(t+u)$ и $V_s \in \mathfrak{S}(t+u)$ таких, что $\Gamma_t V_{e^*} V_s$ вле-*

чет за собой событие $\Gamma_t V_e \cdot V_s \subset \{d \leqslant q(v) \leqslant D\}$ *при всех* $v \in [t, t+u]$.

Здесь независимость сохраняется до первого выхода очереди q из интервала $[d, D]$.

Рассмотрим теперь в качестве иллюстрации пример 1, в котором для простоты положим $\nu_j^s \equiv 1$.

После пояснений, данных к определению 3, должно быть ясно, что в этом примере система имеет независимый выход в области $q \geqslant 1$. Посмотрим, однако, как выглядит в этом случае более формальная проверка. σ-алгебра $\mathfrak{S}(u)$ здесь совпадает с σ-алгеброй, порожденной случайными величинами $\eta_e(u)$, $\gamma^e(u)$; $\tau_1^e, \ldots$ $\ldots, \tau^e_{\eta_e(u)}$; $\nu_1^e, \ldots, \nu^e_{\eta_e(u)}$. Случайные величины $s(u)$, $\gamma^s(u)$, $\tau_1^s, \ldots, \tau^s_{s(u)}$ будут измеримы относительно $\mathfrak{S}(u)$. Ясно, что в этом примере $\mathfrak{M}(u) = (\mathfrak{E}(u)\mathfrak{S}(u))$, $\mathfrak{E}^*(u) = \mathfrak{E}(u)$.

Возьмем «элементарное» событие из $(\mathfrak{M}(u)\mathfrak{E}(t+u))$. Это есть «траектория» $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где ω_1 образовано траекторией процесса $e(v)$ при $0 \leqslant v \leqslant t+u$, а ω_2 — траекторией процесса $s(v)$ при $0 \leqslant v \leqslant t$ и величинами $\tau_1^s, \ldots, \tau^s_{s(u)}$. Пусть Γ_t, V_e и V_s любые события, определенные в (6), (7) при $d = 1$. Тогда условная вероятность события $V_s S$ при условии $\omega \in \Gamma_t V_e$ (на пересечении $V_s S$ и ω обслуживание на $[u, u+t]$ ни разу не прервется) в силу независимости $\{\tau_j^e, \nu_j^e\}$ и $\{\tau_j^s\}$ будет определяться лишь значением ω_2 (т. е. оставаться неизменной при разных ω_1, удовлетворяющих условию $\omega \in \Gamma_t V_e$). Ясно, что этот факт и означает выполнение (10).

Точно так же обстоит дело для систем в примере 1а.

Аналогичным образом убеждаемся, что система в примере 2 будет иметь независимый выход лишь в области $q \geqslant n$. Если $n = \infty$, то система не будет иметь независимого выхода ни в какой области.

Системы в примере 1в будут иметь независимый выход в области $1 \leqslant q \leqslant N-1$.

В заключение этого параграфа рассмотрим так называемую *стохастическую зависимость процесса отказов* $r(t)$ *от длины очереди.*

Определения 2, 3 выделяют важные для дальнейшего и весьма распространенные в приложениях классы систем обслуживания, у которых либо вход, либо выход независимы. Такие системы более доступны изучению.

В то же время в разного рода задачах о системах с управлением распространены входные потоки, интенсивность которых зависит от длины очереди. Мы выделим один важный класс реализации такого управления с помощью процесса отказов, когда каждый пришедший в систему вызов получает отказ с вероятностью, зависящей от длины очереди в момент его прихода. Ясно, что если при этом входной поток $e(t)$ был независимым, то «приведенный» входной поток $e^* = e - r$ уже не будет обладать этим свойством.

В дальнейшем мы будем придерживаться следующей естественной терминологии. Моменты скачков процесса $e(t)$ будет называть *моментами появления вызовов*, а величину каждого скачка — *количеством вызовов, пришедших в данный момент*. Другими словами, каждому единичному приращению $e(t)$ мы ставим в соответствие некий объект, называемый «вызовом», и рассматриваем $\{e(u)\}$ как процесс, описывающий появление вызовов во времени, так что время появления вызова с номером k равно $\min\{t\colon e(t) \geqslant k\}$. Аналогичные термины будут употребляться при рассмотрении скачков процесса $s(t)$.

Пусть τ — марковский момент относительно $\{\mathfrak{S}(t)\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\tau -)$ σ-алгебру, порожденную событиями вида

$$A \cap \{\tau > t\}, \quad A \in \mathfrak{M}(t).$$

Это есть σ-алгебра событий, *строго предшествующих моменту* τ. σ-алгебры $\mathfrak{M}(\tau)$ и $\mathfrak{M}(\tau -)$, вообще говоря, не совпадают, $\mathfrak{M}(\tau -) \subset \mathfrak{M}(\tau)$ (см. [41]); случайная величина $S(\tau - 0)$ измерима относительно $\mathfrak{M}(\tau -)$. Последнее вытекает из представления

$$S(\tau - 0) = \lim_{n \to \infty} \sum_k S\left(\frac{k-1}{n}\right) I\left(\frac{k-1}{n} < \tau \leqslant \frac{k}{n}\right).$$

где, очевидно, случайные величины

$$S\left(\frac{k-1}{n}\right) I\left(\frac{k-1}{n} < \tau \leqslant \frac{k}{n}\right) = S\left(\frac{k-1}{n}\right) I\left(\tau > \frac{k-1}{n}\right) - \\ - S\left(\frac{k-1}{n}\right) I\left(\tau > \frac{k}{n}\right)$$

измеримы относительно $\mathfrak{M}(\tau -)$.

Определение 4. *Пусть ν — случайный номер вызова такой, что время $\mu = \mu(\nu)$ его появления является марковским моментом относительно $\{\mathfrak{E}(t)\}$. Обозначим $\mathfrak{M}^*(\mu)$ σ-алгебру, порожденную событиями из $\mathfrak{M}(\mu -)$ и случайными величинами $e(\mu) - e(\mu - 0)$ и $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu-1})$, где $\Delta_k = 0$ или 1 в зависимости от того, получил k-й вызов отказ или нет. Мы будем говорить, что процесс отказов $r(t)$ стохастически зависит от очереди $q(t)$, если*

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(\mu)}(\textit{вызов с номером } \nu \textit{ получил отказ}) = \\ = 1 - p(q(\mu - 0)). \quad (11)$$

Функция $p(x)$, $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$, считается данной. Мы будем называть разность $1 - p(x)$ вероятностью отказов.

Почему условная вероятность в (11) берется относительно $\mathfrak{M}^*(\mu)$, а не относительно $\mathfrak{M}(\mu)$? Дело в том, что событие {*вызов с номером ν получил отказ*} принадлежит $\mathfrak{M}(\mu)$ (процесс S непрерывен справа), а σ-алгебра $\mathfrak{M}^*(\mu)$ «отделяет» как раз всю предысторию, предшествующую появлению ν-го вызова. Сущность определения 4 в том, что вероятность отказа при стохастическом управлении не зависит от этой предыстории, если зафиксирована длина очереди в момент прихода вызова.

Если скачки процесса $e(t)$ могут быть больше 1, то возможно также управление, когда первая часть в (11) равна

$$1 - p(q(\mu - 0) + \Delta_{l+1} + \ldots + \Delta_{\nu-1}), \quad (12)$$

где $l+1, \ldots, l + e(\mu + 0) - e(\mu - 0)$ — номера вызовов, пришедших вместе с ν-м вызовом. Однако с точки зрения асимптотических методов способы управления (11) и (12) неразличимы.

§ 2. Предварительные замечания об аппроксимации диффузионными процессами

В предыдущем параграфе рассматривались некоторые виды взаимосвязи между компонентами процесса обслуживания; последние сами по себе могли быть устроены произвольным образом. Мы рассмотрим теперь условия на процессы $e(t)$, $r(t)$, $s(t)$, которые позволят нам приближенно описывать поведение процесса $q(t)$.

Асимптотический анализ явных формул для систем с отказами и с большим числом каналов обслуживания, известные предельные теоремы для нагруженных систем и целый ряд других фактов и соображений показывают, что наиболее распространенным видом процессов, с помощью которых можно приближать допредельные процессы обслуживания*), являются процессы диффузии. Дальнейшее изложение этой главы посвящено отысканию наиболее широких и общих условий на системы обслуживания, при которых нормированный соответствующим образом процесс $q(t)$ будет сходиться к тому или иному процессу диффузии.

Мы будем изучать поведение процесса $\{q(t)\}$ на больших интервалах времени $[0, vT]$ при $T \to \infty$. При этом мы будем рассматривать схему серий, т. е. последовательность процессов $S_T(t)$, зависящих от параметра T (индекс T мы часто будем опускать) и определенных на $[0, \infty)$.

В основе дальнейших рассмотрений этой главы лежат теоремы о сходимости к диффузии, изложенные в §§ 5—10 гл. I. Под сходимостью процессов мы будем понимать здесь C-сходимость их распределений. (Напомним, что последовательность процессов $y_T(u)$ C-сходится к процессу $w(u)$ на $[0, v]$, если для любого измеримого функционала f, непрерывного в равномерной

---

*) Имеются в виду системы, в том или ином смысле близкие к критическим. Мы относим сюда системы с очередью и нагрузкой, близкой к 1, системы с интенсивным входным потоком и большим числом каналов обслуживания (как системы с очередью, так и с отказами) и целый ряд других. Примеры таких систем рассмотрены в §§ 4—7.

метрике в точках пространства C, имеет место $\mathsf{P}(f(y_T)<y) \Rightarrow \mathsf{P}(f(w)<y)$.)

Условия сходимости, о которых пойдет речь, относятся главным образом к первым двум моментам приращений процессов $e(u)$, $s(u)$, $r(u)$ за большие интервалы времени t. Приращения процесса $x(u)$ на интервале $(u, u+t)$ мы будем обозначать

$$x_{u,t} = x(t+u) - x(u),$$

где символ x мы будем заменять на e, s, r и другие, так что, например,

$$e_{u,t} = e(t+u) - e(u).$$

Для того чтобы пояснить здесь (до того как будут рассмотрены примеры в §§ 4—7) естественность постановки задачи, используемой в дальнейшем, мы рассмотрим следующую ситуацию. Допустим, что на некотором ω-множестве высокой вероятности условное математическое ожидание $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,t}$ растет вместе с t асимптотически линейно. Тогда при некоторых весьма широких условиях на $s(u)$ очередь $q(t)$ за время T может достигнуть значений порядка T. Допустим далее, что управление системой (т. е. процессы $e(u)$, $s(u)$, $r(u)$) зависит от длины очереди, так сказать, в масштабе всей шкалы возможных значений $q(t)$ (т. е. в масштабе значений, сравнимых по величине с T). Именно, мы допустим, что заданы функции $a_e(q)$, $a_r(q)$, $a_s(q)$ такие, что с вероятностью, близкой к 1,

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x_{u,t} = t a_x\left(\frac{q(u)}{T}\right) + o\left(\frac{t}{\sqrt{T}}\right) \tag{1}$$

при $t \to \infty$, $t = o(T)$. Здесь x принимает значение e, r, s.

Если функции a_e, a_s, a_r непрерывны, то это означает, что интенсивность входного и выходного потоков будет существенно меняться лишь при изменении длины очереди на величину порядка T. Такую зависимость управляющих потоков от $q(t)$ можно назвать *«грубой»*.

В качестве основного здесь естественно рассматривать случай, когда *функция* $A(q) = a_e(q) - a_r(q) - a_s(q)$ *является невозрастающей* (чем больше очередь, тем вероятнее отказы и интенсивнее обслуживание). Тогда, если $A(0) \geqslant 0$, то через некоторое время значение $\frac{q(u)}{T}$ будет располагаться вблизи *точки равновесия* Q, являющейся решением уравнения

$$A(Q)=0. \tag{2}$$

В общем случае мы будем предполагать, что существует по крайней мере одно решение уравнения (2), и различать 2 случая «грубой» зависимости:

1) $Q>0$,

2) $A(0)$ *мало и зависит от* T *так, что* $A(0)\sqrt{T}\to A_0$. Этот случай мы условимся классифицировать как случай «$Q=0$».

Рассмотрим сначала первый вариант, когда $Q>0$, и обозначим

$$Q(u)=\frac{q(u)}{T}.$$

Потребуем, чтобы наряду с (1) при значениях $Q(u)$, близких к Q, вторые моменты процессов

$$x_{u,t}-ta_x(Q(u))$$

($x=e, r, s$) вели себя также асимптотически правильно (росли линейно вместе с t):

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[x_{u,t}-ta_x(Q(u))\right]\left[y_{u,t}-ta_y(Q(u))\right]=$$
$$=tb_{xy}(Q(u))+o(t),\quad x,\ y=e,\ r,\ s. \tag{3}$$

Тогда процесс

$$z(u)=\frac{q(uT)-QT}{\sqrt{T}}$$

при некоторых других, менее существенных условиях будет C-сходиться к диффузионному процессу $w(t)$ на $[0, v]$ с коэффициентом сноса $xA'(Q)$ и постоянной диффузией $B(Q)$, где $B=b_{ee}+b_{ss}+b_{rr}-2b_{es}-2b_{er}-2b_{rs}$.

Этот процесс может быть описан в явном виде с помощью стандартного винеровского процесса (см. § 3). Соответствующее точное утверждение приведено в теореме 4 § 3, а примеры систем, удовлетворяющих условиям этой теоремы, рассмотрены в § 4. К ним относятся, например, системы с интенсивным входным потоком и с показательным временем обслуживания в n каналах обслуживания, где $n-QT\gg\sqrt{T}$.

Во втором случае, когда $Q=0$, мы при выполнении аналогичных условий получим сходимость к диффузии с отражением от нулевой границы. Этот процесс также может быть описан в явном виде с помощью винеровского процесса. Точное утверждение приведено в теореме 5 § 3. Примером систем, удовлетворяющих условиям этой теоремы, могут служить системы с тяжелой нагрузкой (см. § 6). При этом, как мы увидим ниже, практическое вычисление коэффициентов a_x, $b_{x,y}$ в условиях (1), (3) (как и в случае $Q>0$) большого труда не составляет.

Можно было бы указать также примеры систем (см. §§ 5—7), предельные процессы для которых представляют из себя диффузионные процессы с отражением от двух границ.

Во всех этих примерах мы имеем дело с зависимостью управления системой от длины очереди *«в масштабе всей шкалы»* возможных значений $q(t)$ за время T (т. е. шкалы, длины которой сравнимы с T). Эта зависимость осуществляется заданием функций a_x, b_{xy}, x, $y=e$, r, s, так что, например, $a_e\left(\frac{q(u)}{T}\right)$ описывает главную часть приращения входного процесса $e(t)$ на интервале $(u, u+t)$. При этом оказалось, что существенным является лишь поведение указанных функций в окрестности точки равновесия Q, в которой

$$A(Q)=a_e(Q)-a_r(q)-a_s(q)=0,$$

а параметры предельного процесса $w(t)$ полностью определяются значениями $A'(Q)$ и $B(Q)$.

Однако даже среди систем с грубой зависимостью управления от длины очереди встречаются системы, у которых производная A' имеет в окрестности точки Q излом (к ним относятся, например, многоканальные системы с очередью, у которых число каналов n таково, что величина $\frac{n-QT}{\sqrt{T}}$ ограничена (см. § 4, а также § 4 гл. II)). К тому же сама зависимость управления от $q(t)$ не обязательно должна иметь форму (1), (3).

Поэтому естественно рассматривать следующую несколько более общую постановку задачи.

Пусть начальное значение $q(0)/T$ располагается в окрестности некоторой точки Q. Мы предположим, что в окрестности этой точки управление системой зависит от длины очереди $q(t)$, так же как в равенствах (1), (3), в которых, однако, функции a_x и b_{xy} заменены на функции

$$\begin{aligned} a_x(Q(u)) &= a_x^0 + \frac{\alpha_x(\zeta(u))}{\sqrt{T}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \\ b_{xy}(Q(u)) &= \beta_{xy}(\zeta(u)) + o(1), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\zeta(u) = \frac{q(u) - QT}{\sqrt{T}}$, $a_e^0 - a_r^0 - a_s^0 = 0$, а α_x, β_{xy} — произвольные функции.

Ясно, что в условиях (1), (3) при непрерывных функциях a_x' и b_{xy} мы имеем дело с частным случаем (4), поскольку для грубой зависимости управления от $q(u)$

$$\begin{aligned} a_x(Q(u)) &= a_x(Q) + (Q(u) - Q)\,a_x'(Q) + o(|Q(u) - Q|) = \\ &= a_x(Q) + \frac{a_x'(Q)\,\zeta(u)}{\sqrt{T}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \\ b_{xy}(Q(u)) &= b_{xy}(Q) + o(1), \end{aligned} \tag{5}$$

что соответствует значениям $\alpha_x(\zeta) = \zeta a_x'(Q)$, $\beta_{xy}(\zeta) = b_{xy}(Q)$.

Ясно, что формулы (4) определяют зависимость управления от $q(u)$ лишь в масштабе $\sqrt{T}$ — окрестности точки TQ. Этого оказывается достаточно для определения и описания предельного процесса.

В следующем параграфе излагается точная постановка задачи и доказываются теоремы о сходимости к процессам диффузии.

§ 3. Общие теоремы сходимости нормированной «занятости» $q(t)$ к процессам диффузии

Рассмотрим сначала условия сходимости к неограниченной диффузии.

Как и прежде, мы будем обозначать

$$Q(u) = \frac{q(u)}{T}, \quad \zeta(u) = \frac{q(u) - TQ}{\sqrt{T}} \tag{1}$$

и будем понимать под $\theta = \theta(T)$ последовательность

$$\theta \to \infty, \quad \theta = o(T)$$

при $T \to \infty$.

Через $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ будем обозначать произвольные (соответственно большое и малое) числа. Событие $\Gamma_u^N \in \mathfrak{M}(u)$ будет определяться равенством

$$\Gamma_u^N = \{ |q(u) - QT| < N\sqrt{T} \} = \{ |\zeta(u)| < N \}. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Пусть существуют последовательность* θ *и система множеств* $\Omega_{u,\theta} \in \mathfrak{M}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant vT$, *такие, что* *)

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{u \leqslant vT} \Omega_{u,\theta}\right) \to 1, \qquad (3)$$

и при каждом $u \leqslant vT - \theta$ *на множестве* $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u^N$ *выполняется:*

I) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x_{u,\theta} = \theta \cdot \left(a_x^0 + \dfrac{\alpha_x(\zeta(u))}{\sqrt{T}} + \dfrac{r_x(\omega)}{\sqrt{T}}\right)$,

II) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x_{u,\theta}^0 y_{u,\theta}^0 = \theta \cdot (\beta_{xy}(\zeta(u)) + r_{xy}(\omega))$,

III) $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} [(x_{u,\theta}^0)^2; |x_{u,\theta}^0| > \delta\sqrt{T}] < \varepsilon\theta$

для любого $\delta > 0$. *Здесь*

$$x_{u,\theta}^0 = x_{u,\theta} - \theta \cdot \left(a_x^0 + \frac{\alpha_x(\zeta(u))}{\sqrt{T}}\right),$$

x *и* y *принимают значения* e, r, s *и для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$

$$|r_x(\omega)| < \varepsilon \quad |r_{xy}(\omega)| < \varepsilon.$$

При этом мы предполагаем, что условия I—III, *будучи выполненными для последовательности* θ, *останутся справедливыми также для последовательности* $\theta_1 = c\theta$, $1/2 \leqslant c \leqslant 2$.

Пусть, кроме того, выполнены условия

IV) $a_e^0 - a_s^0 - a_r^0 = 0$,

---

*) Здесь предполагается, что $\bigcap_{u \leqslant s} \Omega_{u,\theta}$ есть событие. Точная формулировка условия требует существования события, вложенного в это произведение и имеющего вероятность, сходящуюся к 1.

а функции $\alpha = \alpha_e - \alpha_r - \alpha_s$ *и* $\beta = \beta_{ee} + \beta_{rr} + \beta_{ss} - 2\beta_{es} - 2\beta_{er} - 2\beta_{sr}$ *удовлетворяют условию* IV *теоремы* 1 § 5 *гл.* I (*о существовании диффузионного процесса* $w(t)$ *с коэффициентом сноса* α *и коэффициентом диффузии* β).

V) *Вероятность того, что непрерывные справа процессы* e, r, s *имеют на* $[0, vT]$ *хотя бы один скачок, превосходящий* $\delta\sqrt{T}$, *сходится к* 0 *при* $T\to\infty$ *для любого* $\delta > 0$.

Тогда, если

$$q_T(0) = QT + z_0\sqrt{T} \tag{4}$$

и распределение z_0 *сходится при* $T\to\infty$ *к* p_0, *то при выполнении* I—V *процесс*

$$z(t) = \frac{q_T(tT) - QT}{\sqrt{T}} = \zeta(tT), \quad t \in [0, v], \tag{5}$$

C-сходится на $[0, v]$ *к диффузионному процессу* $w(t)$ (*упомянутому в условии* IV) *с начальным распределением* p_0.

Замечание 1. При изучении очереди $q(t)$ может оказаться удобным рассматривать «приведенный» процесс обслуживания

$$S^*(t) = (e^*(t)) \equiv e(t) - r(t),\ 0,\ s(t))$$

с тем, чтобы условия сходимости накладывать на компоненты приведенного процесса. Вид этих условий легко получить из теоремы 1, при этом функция β будет равна $\beta = \beta_{ee^*} - 2\beta_{e^*s} + \beta_{ss}$.

Замечание 2. Условие $a_e^0 - a_r^0 - a_s^0 = 0$ в теореме 1 можно заменить, очевидно, следующим условием: в области Γ_u^N

$$a_e^0 - a_r^0 - a_s^0 = o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

Если же

$$a_e^0 - a_r^0 - a_s^0 = \frac{A^0}{\sqrt{T}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right),$$

то, как нетрудно проверить, просматривая доказательство теоремы 1 (см. также доказательство теоремы 5), предельный процесс для $z(t)$ также будет процессом диффузии, но с коэффициентами $(\alpha+A^0, \beta)$.

Доказательство теоремы 1 полностью основано на использовании теорем 1, 2 § 5 гл. I. Мы рекомендуем читателю в этом месте заново просмотреть формулировки этих теорем и условий к ним. Последние как по своей форме, так и по содержанию весьма близки к условиям теоремы 1.

Итак, для доказательства теоремы 1 нам достаточно убедиться, что процесс $q(t)$ и его приращения

$$q_{u,\theta}=e_{u,\theta}-s_{u,\theta}-r_{u,\theta}$$

удовлетворяют условиям теорем 1, 2 § 5 гл. I.

При выполнении условий теоремы 1 мы будем иметь на множестве $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q_{u,\theta}=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-r_{u,\theta}-s_{u,\theta})=$$
$$=\frac{\theta\alpha(\zeta(u))}{\sqrt{T}}+\frac{\theta}{\sqrt{T}}(r_e(\omega)-r_r(\omega)-r_s(\omega))=$$
$$=\frac{\theta}{\sqrt{T}}(\alpha(\zeta(u))+r_1(\omega));$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q^2_{u,\theta}=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(e_{u,\theta}-s_{u,\theta}-r_{u,\theta}-\frac{\theta\alpha(\zeta(u))}{\sqrt{T}}\right)^2-$$
$$-\frac{\theta^2\alpha^2(\zeta(u))}{T}+2\frac{\theta^2\alpha(\zeta(u))}{T}(\alpha(\zeta(u))+r_r(\omega)). \quad (6)$$

Так как $|\alpha(z)|<c(1+|z|)$ (см. условие IV), то в области $|\zeta(u)|<N$ последние два слагаемых в (6) не превосходят

$$c_1\frac{\theta^2N^2}{T}=o(\theta).$$

Поскольку первое слагаемое в (6) равно

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e^0_{u,\theta}-s^0_{u,\theta}-r^0_{u,\theta})^2,$$

то из условия II теоремы 1 следует, что условие PII теорем 1, 2 § 5 гл. II, так же как и условие PI, будет выполнено. При этом роль коэффициентов, зависящих от $\zeta(u)$, в этих условиях играют функции α и β, определенные в условии IV теоремы 1.

Для доказательства условия PIII теорем 1, 2 § 5 гл. II заметим сначала, что при любых X и Y $X^2\leqslant$

$\leqslant 2(X-Y)^2+2Y^2$ и, следовательно, в области Γ_u^N

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta}^2;\ |q_{u,\theta}|>\delta\sqrt{T}\right)\leqslant 2\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[\left(q_{u,\theta}-\frac{\theta\alpha(\zeta(u))}{\sqrt{T}}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{c^2\theta^2(1+N^2)}{T};\ \left|q_{u,\theta}-\frac{\theta\alpha(\zeta(u))}{\sqrt{T}}\right|>\frac{\delta}{2}\sqrt{T}\right]$$

при достаточно больших T. Если обозначить

$$D_x=\left\{|x_{u,\theta}^0|>\frac{\delta}{6}\sqrt{T}\right\},$$

то

$$\left\{\left|q_{u,\theta}-\frac{\theta\alpha(\zeta(u))}{\sqrt{T}}\right|>\frac{\delta}{2}\sqrt{T}\right\}\subset D_e+D_r+D_s.$$

Кроме того, из условий III теоремы 1 и неравенств Чебышева вытекает, что на множестве $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}D_x\leqslant\varepsilon\frac{\theta}{T}. \tag{7}$$

Таким образом, на множестве $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta}^2;\ |q_{u,\theta}|>\delta\sqrt{T}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 6\sum_{x,\,y=e,\,r,\,s}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left((x_{u,\theta}^0)^2;\ D_y\right)+6\,\frac{c^2\theta^2(1+N^2)}{T}\,\frac{\varepsilon\theta}{T}. \tag{8}$$

Второе слагаемое здесь есть, очевидно, $o(\theta)$.

Для оценки слагаемых в сумме правой части (8) нам остается воспользоваться следующей простой леммой.

Лемма 1. *Если на некотором ω-множестве Ω' $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\xi^2;\ |\xi|>\delta\sqrt{T}\right)<\varepsilon\theta$, а событие D таково, что $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(D)\leqslant\frac{\varepsilon\theta}{T}$, то на Ω'*

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(\xi^2;\ D)\leqslant\varepsilon\theta(1+\delta^2).$$

Доказательство.

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(\xi^2;\ D)=\mathsf{M}\left(\xi^2;\ D\cap\{|\xi|<\delta\sqrt{T}\}\right)+$$
$$+\mathsf{M}\left(\xi^2;\ D\cap\{|\xi|\leqslant\delta\sqrt{T}\}\right)\leqslant\varepsilon\theta+\frac{\delta^2T\varepsilon\theta}{T}=\varepsilon\theta+\delta^2\varepsilon\theta. \blacktriangleleft$$

Из этой леммы, неравенств (7) и условий III теоремы 1 следует, что на $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[(x_{u,\theta}^0)^2;\ D_y\right]\leqslant\varepsilon\theta\left[1+\left(\frac{\delta}{6}\right)^2\right].$$

Вместе с неравенством (8) это доказывает требуемое условие PIII для приращений $q_{u,\theta}$.

Условия PIV, PV выполнены очевидным образом. Теорема 1 доказана. ◀

Таким же образом из теорем § 9, 10 гл. I можно получить утверждения о сходимости к диффузии с отражением. Отражающей границей может служить любой уровень. Однако для упрощения формулировок мы рассмотрим случай, когда предельный процесс неотрицателен и отражается от нулевой границы (это соответствует примеру грубой зависимости управления от $q(u)$ в случае $Q=0$).

В двух последующих теоремах мы будем считать $Q=0$, так что

$$\Gamma_u^N = \{\, |q(u)| < N\sqrt{T}\} \doteq \{|\zeta(u)| < N\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I—III *теоремы* 1, *но лишь в области*

$$\{\zeta(u) \geqslant \varepsilon^*\} = \{q_T(u) \geqslant \varepsilon^* \sqrt{T}\}$$

при любом $\varepsilon^* > 0$.

Пусть, кроме того, выполнено условие V *теоремы* 1 *и условия*

IV) $a_e^0 - a_s^0 - a_r^0 = 0$, *а функции* α *и* β (*см. условие* IV *теоремы* 1) *удовлетворяют условию* PRIV § 9 *гл.* I (*о существовании диффузионного процесса* $w_R(t)$ *с коэффициентами* α *и* β *и с отражением от границы* $\zeta=0$).

VI) *Для любого достаточно малого* $\varepsilon^{**} > 0$ *существуют* $p > 0$, $c > 0$ *такие, что для* $\theta_1 \sim (\varepsilon^{**})^2 Tc$ *в области* $\Omega_{u,\theta} \cap \{\zeta(u) < \varepsilon^{**}\}$ *выполняется*

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u\,\theta_1} > \varepsilon^{**}\sqrt{T}\right) > p.$$

Тогда, если распределение $\zeta(0) = q_T(0)/\sqrt{T}$ *сходится к распределению* p_0, *то при выполнении условий* I—VI *процесс*

$$z(t) = \frac{q(tT)}{\sqrt{T}} = \zeta(tT)$$

C-сходится на $[0, v]$ *к процессу диффузии* w_R *с отражением от границы* $\zeta = 0$, *с коэффициентами сноса и* *диффузии соответственно α и β и с начальным распределением p_0.*

Аналогичным образом выглядит теорема о сходимости к диффузии с двумя отражающими границами. В качестве таких границ мы рассмотрим уровни $\zeta = 0$ и $\zeta = R > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* I—III *теоремы* 1, *но лишь в области*

$$\{R - \varepsilon^* \geqslant \zeta(u) \geqslant \varepsilon^*\} = \{(R - \varepsilon^*)\sqrt{T} \geqslant q_T(u) \geqslant \varepsilon^* \sqrt{T}\}$$

при любом $\varepsilon^* > 0$.

Пусть, кроме того, выполнено условие V *теоремы* 1, *а также условия*

IV) $a_e^0 - a_s^0 - a_r^0 = 0$, *а функции* α *и* β (*см. условие* IV *теоремы* 1) *удовлетворяют условию* PRRIV § 10 *гл.* I (*о существовании диффузионного процесса* $w_{RR}(t)$ *с коэффициентами* α *и* β *и с отражением от границ* 0 *и* R).

VI) *Процессы* $q_T(t)$ *и* $R\sqrt{T} - q_T(t)$ *удовлетворяют условию* VI *теоремы* 2.

Тогда, если распределение $\zeta(0) = \dfrac{q_T(0)}{\sqrt{T}}$ *сходится к распределению* p_0, *то при выполнении условий* I—VI *процесс*

$$z(t) = \frac{q(tT)}{\sqrt{T}} = \zeta(tT)$$

С-сходится на $[0, v]$ *к процессу диффузии* w_{RR} *с отражением от уровней* 0 *и* R *начальным распределением* p_0.

Доказательства теорем 2, 3 полностью основано на использовании теорем §§ 9 и 10 гл. I. Поскольку условия IV—VI перенесены из последних теорем в теоремы 2, 3 без каких-либо изменений, то нам достаточно проверить, что условия I—III в теоремах 2, 3 влекут за собой выполнение условий I—III в теоремах §§ 9, 10. Но эта проверка происходит точно так же, как в доказательстве теоремы 1. Таким образом, можно считать, что теоремы 2, 3 доказаны. ◀

Приведем теперь аналоги теорем 1—3 для важного частного случая грубой зависимости управления системой от длины очереди. Этот случай был описан нами в

§ 2, для него диффузионные процессы, которые фигурировали в теоремах 1—3, могут быть найдены в явном виде.

Мы рассмотрим сначала сходимость к неограниченной диффузии, когда «точка равновесия» Q (определенная как решение уравнения $A(Q)=a_e(Q)-a_r(Q)-a_s(Q)=0$ (см. § 2)) положительна. Пусть, как и прежде,

$$Q(u)=\frac{q(u)}{T},\quad \Gamma_u^N=\left\{|Q(u)-Q|<\frac{N}{\sqrt{T}}\right\}.$$

Теорема 4. *Пусть существуют последовательность* θ *и система множеств* $\Omega_{u,\theta}\in\mathfrak{M}(u)$ *такие, что*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{u\leqslant vT}\Omega_{u,\theta}\right)\to 1,$$

и на множестве $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$ *выполняются*

I) $$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}x_{u,\theta}=\theta a_x(Q(u))+\frac{\theta}{\sqrt{T}}r_x(\omega),$$

II) $$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}x_{u,\theta}^0y_{u,\theta}^0=\theta b_{xy}(Q(u))+\theta r_{xy}(\omega),$$

III) $$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[(x_{u,\theta}^0)^2;\ |x_{u,\theta}^0|>\delta\sqrt{T}\right]<\varepsilon\theta$$

для любого $\delta>0$. *Здесь*

$$x_{u,\theta}^0=x_{u,\theta}-\theta a_x(Q(u)),$$

x *и* y *принимают значения* e, r, s; r_x, r_{xy} *и* ε *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

IV) *Функция* $A=a_e-a_s-a_r$ *непрерывно дифференцируема в точке* Q, *а функция*

$$B=b_{ee}+b_{rr}+b_{ss}-2b_{er}-2b_{es}-2b_{rs}$$

непрерывна в этой точке, $B(Q)>0$.

Тогда, если $z(0)=\dfrac{q_T(0)-QT}{\sqrt{T}}$ *имеет предельное распределение* p_0, *то процесс*

$$z(t)=\frac{q_T(0)-QT}{\sqrt{T}},\quad t\in[0,v],$$

С-сходится к диффузионному процессу $w(t)$ *с коэффициентом сноса* $A'(Q)x$, *коэффициентом диффузии*

$B(Q)$ $(B = b_{ee} + b_{rr} + b_{ss} - 2b_{er} - 2b_{es} - 2b_{rs})$ и с начальным распределением p_0.

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 1 *). Несущественные изменения произойдут лишь при подсчете моментов $q_{u,\theta}$:

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta} = \theta A(Q(u)) + \frac{\theta}{\sqrt{T}}(r_e - r_s - r_r) =$$
$$= \frac{\theta\zeta(u)}{\sqrt{T}} A'(Q) + \theta(Q(u) - Q)(A'(\tilde{Q}) - A'(Q)) +$$
$$+ \frac{\theta}{\sqrt{T}}(r_e - r_s - r_r). \quad (9)$$

Так как A' непрерывна, то $\tilde{Q} \in [Q(u), Q]$ и, стало быть, в области $|Q(u) - Q| \leqslant N/\sqrt{T}$ последние два слагаемых в (9) будут равномерно малы относительно $\theta/\sqrt{T}$.

Аналогичным образом подсчитывается $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q^2_{u,\theta}$ (ср. с (6)) и оценивается $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(q^2_{u,\theta}; |q_{u,\theta}| > \delta\sqrt{T})$. Таким образом, условия PI — PIII теоремы 2 § 5 гл. I будут выполнены. Поскольку в нашем случае коэффициенты сноса и диффузии равны соответственно $\alpha(x) = xA'(Q)$ и $\beta(x) = B(Q)$, то условие PIV также будет выполнено (хотя бы в силу достаточных условий, сформулированных в § 5 гл. I). Кроме того, выполнение PIV легко извлечь также из вида переходной функции предельного процесса $w(t)$, которая приведена ниже.

Таким образом, условия теоремы 2 § 5 гл. I выполнены и теорема 4 доказана. ◀

Предельный процесс $w(t)$ может быть записан в следующем явном виде (см. (13) § 3 гл. I):

$$\left.\begin{aligned} w(t) &= w(0)e^{at} + \sigma e^{at}\int_0^t e^{-av}\,dw_0(v), \\ w(t) &= w(0)e^{at} + \sigma e^{at} w_0\left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где $w_0(t)$ — стандартный винеровский процесс, $a = A'(Q)$, $\sigma^2 = B(Q)$.

---

*) Однако теорема 4 не является частным случаем теоремы 1, поскольку в теореме 4, например, не требуется гладкости компонент $a_x(Q)$, необходимой для выполнения условия I теоремы 1.

Этот факт легко проверить непосредственно, вычислив инфинитезимальный оператор процессов (10). Переходная функция этого процесса имеет (см. (13) § 3 гл. I) вид

$$\mathsf{P}(z, t, dy) = \mathsf{P}(w^{(z)}(t) \in dy) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(y - ze^{at})^2\right\} dy, \quad \sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(e^{2at} - 1), \tag{11}$$

где, как и прежде $w^{(z)}$, означает процесс w с начальным значением z. Правая часть в (11) есть фундаментальное решение уравнения теплопроводности с коэффициентами ax и σ^2.

Процесс (10) при $t \to \infty$ и при $a < 0$ сближается со стационарным процессом

$$w_c(t) = \sigma \int_{-\infty}^{t} e^{a(t-v)}\, dw_0(v) \quad \left(w_c(t) = \sigma e^{at} w_0\left(-\frac{e^{-2at}}{2a}\right)\right),$$

одномерные распределения которых, очевидно, нормальны с параметрами $\left(0, -\frac{\sigma}{2a}\right)$.

Явный вид (10) предельного процесса $w(t)$ в теореме 4 позволяет ответить на многие вопросы, касающиеся поведения траектории длины очереди $q(t)$. Например, при изучении безотказной работы системы часто возникает задача о распределении $\sup\limits_{t \leqslant vT} q(t)$. В силу теоремы 1

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \leqslant vT} q(t) \leqslant QT + c\sqrt{T}\right) \xrightarrow[T \to \infty]{} \mathsf{P}\left(\sup_{t \leqslant v} w(t) < c\right).$$

Мы можем указать также асимптотический (при больших v) вид верхней и нижней функций для процесса $z(t) = \frac{q(tT) - QT}{\sqrt{T}}$, $z(0) = \text{const}$. Действительно, по теореме 4 для гладких функций $g_1(u)$ и $g_2(u)$ таких, что

$z(0) \in (g_1(0),\ g_2(0))$, имеем

$$\mathsf{P}(g_2(u) < z(u) < g_1(u),\ 0 \leqslant u \leqslant v) \xrightarrow[T \to \infty]{} G(g_1, g_2, v) \equiv$$
$$\equiv \mathsf{P}(g_2(u) < w(u) < g_1(u),\ 0 \leqslant u \leqslant v) =$$
$$= \mathsf{P}\left((g_2(u)\, e^{-au} - z(0)) < \sigma w_0\left(\frac{1 - e^{-2au}}{2a}\right) < \right.$$
$$\left. < (g_1(u)\, e^{-au} - z(0)),\quad 0 \leqslant u \leqslant v\right).$$

Полагая, $u = -\frac{1}{2a}\ln(1 - 2at)$, мы можем полученное выражение записать в виде

$$G(g_1, g_2, v) = \mathsf{P}\left(f_2(t) < w_0(t) < f_1(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1 - e^{-2av}}{2a}\right),$$

где

$$f_j(t) = \frac{1}{\sigma}\left[g_j\left(-\frac{1}{2a}\ln(1 - 2at)\right)\sqrt{1 - 2at} - z(0)\right],\quad j = 1, 2.$$

Отсюда видно, что при $a < 0$ можно говорить о верхних и нижних функциях для $w(u)$ при $u \to \infty$. Пользуясь законом повторного логарифма для w_0, нетрудно угадать характер этих функций. Приравнивая

$$f_j(t) = (-1)^j \sqrt{2t \ln\ln t},$$

находим, что такими функциями могут служить функции

$$g_j(t) = (-1)^j \sigma \sqrt{\frac{\ln t}{-a}}.$$

Замечание 1. Условие I теоремы 4 можно заменить следующим условием: на $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u^N$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x_{u,\theta} = \theta a_x(Q(u)) + a_x^*(Q(u), T) + \frac{\theta}{\sqrt{T}} r_x(\omega),$$

где функция $a_e^* - a_s^* - a_r^* = A^*(Q, T)$ в области Γ_u^N при достаточно больших T удовлетворяет соотношению $|A^*(Q, T)| < \theta\varepsilon/\sqrt{T}$.

Совершенно аналогично теореме 4 и теоремам 2, 3 получаются следующие два утверждения о сходимости к диффузии с отражением в случае грубой зависимости управления от $q(u)$. Здесь мы считаем

$$Q = 0,\quad \Gamma_u^N = \left\{|Q(u)| < \frac{N}{\sqrt{T}}\right\} = \{|\zeta(u)| < N\}.$$

Кроме того, нам будет удобнее считать, что здесь функции a_x и $b_{x,y}$ в условиях I—III теоремы 4 зависят также от T (такую же модификацию можно ввести в теоремы 1—4, но там в этом меньше необходимости).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* I—III *теоремы* 4, *но лишь в области*

$$\{\zeta(u) \geqslant \varepsilon^*\}$$

при любом $\varepsilon^* > 0$.

Пусть, кроме того, выполнены условия V *теоремы* 1, *условие* VI *теоремы* 2 *и условие*

IV′) *Коэффициенты* a_x, $b_{x,y}$ *таковы, что существуют*

$$\lim_{T\to\infty} A(0)\sqrt{T} = A_0, \quad \lim_{T\to\infty} A'(0) = A_0', \quad \lim_{T\to\infty} B(0) = B_0 > 0,$$

а функции $A'(x)$ *и* $B(x)$ *равностепенно непрерывны справа в точке* $x = 0$.

Тогда, если распределение $\zeta(0) = \dfrac{q_T(0)}{\sqrt{T}}$ *сходится к распределению* p_0, *то процесс* $z(t) = \dfrac{q(tT)}{\sqrt{T}}$ *C-сходится к диффузионному процессу* $w_R(t)$ *с коэффициентом сноса* $A_0 + xA_0'$, *коэффициентом диффузии* B_0, *с отражением от границы* $z = 0$ *и с начальным распределением* *) p_0.

В § 3 гл. I в случае $A_0' \neq 0$ мы получили для процесса $w^{(z)}(t)$ неограниченной диффузии с такими коэффициентами и начальным значением z представление

$$w^{(z)}(t) = -\frac{A_0}{a} + \sigma e^{at} w_0^{(z_1)}\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right),$$

где

$$z_1 = \frac{z}{\sigma} + \frac{A_0}{a\sigma}, \quad a = A_0', \quad \sigma^2 = B_0,$$

$w_0^{(z)}$ — стандартный винеровский процесс. с начальным значением z. Это позволяет нам записать искомый процесс $w_R^{(z)}(t)$ (процесс $w_R(t)$ с начальным условием $z \geqslant 0$) в виде

$$w_R^{(z)}(t) = -\frac{A_0}{a} + \sigma e^{at} w_{0R}^{(z_1)}\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right), \tag{12}$$

*) В последующих теоремах упоминание о начальном распределении мы будем для краткости опускать как само собой разумеющееся.

где $w_{0R}^{(z_1)}$ — стандартный винеровский процесс с начальным значением $z_1 = \frac{z}{\sigma} + \frac{A_0}{a\sigma}$ и с отражением вверх от границы

$$g(u) = \frac{A_0}{a\sigma}\sqrt{1 - 2au}. \tag{13}$$

При $a = A_0' = 0$ процесс $w_R(t)$, фигурирующий в теореме 5, будет винеровским процессом с коэффициентами (A_0, σ^2) и с отражением от нулевой границы, так что процесс

$$w_{0R}(t) = \frac{1}{\sigma} w_R(t) \tag{14}$$

будет иметь коэффициенты $(A_0/\sigma, 1)$ и также отражение от нулевой границы.

Из приведенных высказываний видно, что в случае, когда либо $a = A_0' = 0$, либо $A_0 = 0$, мы получаем в качестве $w_{0R}(u)$ винеровский процесс с отражением от нулевой границы (в случае (14) это процесс со сносом).

Переходную функцию $\mathsf{P}\left(w_{0R}(t) \in E / w_{0R}(0) = x\right) = \mathsf{P}\left(w_{0R}^{(x)}(t) \in E\right)$ такого процесса $w_{0R}(u)$ можно найти, например, с помощью предельного перехода в задаче о блуждании со скачками ± 1 и с отражающим экраном в нуле (см. [73], стр. 421, вероятности скачков подбираются соответствующим образом). Мы получим тогда $\mathsf{P}(x, t, dy) = \mathsf{P}\left(w_{0R}^{(x)}(t) \in dy\right) =$

$$= \left\{2h^- e^{2h^- y} + \frac{2}{\pi}\exp\left[-\frac{h^2 t}{2} + h(y - x)\right] \times \right.$$
$$\times \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 z^2}{2}} (z\cos zx + h\sin zx) \times$$
$$\left. \times (z\cos zy + h\sin zy)\frac{dz}{h^2 + z^2}\right\} dy, \tag{15}$$

где $h^- = \min(0, h)$, h — коэффициент сноса $w_{0R}(u)$ ($h = 0$ в случае (12), $h = A_0/\sigma$ в случае (14)).

Из этих равенств легко получить вид стационарного распределения в случае $h < 0$ (т. е. в случае $a = A_0' = 0$, $A_0 < 0$). Устремляя t к бесконечности, находим

$$\begin{gathered} \mathsf{P}\left(w_{0R}^{(z)}(\infty) \in dy\right) = -2he^{2hy}\,dy, \\ \mathsf{P}\left(w_R(\infty) \in dy\right) = -2\frac{A_0}{\sigma^2} e^{\frac{2A_0 y}{\sigma^2}}\,dy. \end{gathered} \tag{16}$$

Если коэффициент сноса $h = A_0 = 0$, $a \neq 0$, то можно привести более простые выражения для переходной функции процесса $w_R(t)$, чем те, которые основаны на (15). Достаточно, например, вспомнить, что в этом случае (см. § 3 гл. I) распределение $w_R^{(z)}(t)$ совпадает с распределением $|w^{(z)}(t)|$, где $w^{(z)}$ — процесс неограниченной диффузии с коэффициентами (ax, σ^2). Так что в силу (10)

$$w_R^{(z)}(t) = \left| ze^{at} + \sigma e^{at} w_0\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right)\right| = \left|\sigma e^{at} w_0^{\left(\frac{z}{\sigma}\right)}\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right)\right|.$$

Отсюда и из (11) получаем для переходной функции процесса $w_R(t)$ равенство

$$\mathsf{P}\left(w_R^{(z)}(t) \in dy\right) = \frac{dy}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(y - ze^{at})^2\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(y + ze^{at})^2\right\}\right],$$

где

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(e^{2at} - 1).$$

При $a < 0$ существует *стационарный* процесс $w_R(t)$ с коэффициентами (ax, σ^2), представимый в виде

$$\sigma e^{at}\left| w_0\left(-\frac{e^{-2at}}{2a}\right)\right|.$$

Приведем теперь утверждение о сходимости к диффузии с двумя отражающими уровнями 0 и R в случае грубой зависимости управления от $q(u)$.

Теорема 6. *Пусть* $0 \leqslant q(t) \leqslant R\sqrt{T}$ *и выполнены условия* I—III *теоремы* 4, *но лишь в области*

$$\{R - \varepsilon^* \geqslant \zeta(u) \geqslant \varepsilon^*\}$$

при любом $\varepsilon^* > 0$.

Пусть, кроме того, выполнены условие IV *теоремы* 5, *условие* V *теоремы* 1 *и условие*

VI) *процессы* $q(t)$ *и* $R\sqrt{T} - q(t)$ *удовлетворяют условию* VI *теоремы* 2.

Тогда процесс $z(t)=\frac{q(tT)}{\sqrt{T}}$ *C-сходится к диффузионному процессу* $w_{RR}(t)$ *с отражением от уровней* 0 *и* R *и с коэффициентами сноса и диффузии, равными соответственно* $A_0+A_0'x$ *и* B_0.

Как и в условиях теоремы 5, процесс $w_{RR}^{(z)}$ с начальным значением z, $0\leqslant z\leqslant R$, допускает при $a=A_0'=0$ представление (12), где вместо $w_{0R}^{(z_1)}(u)$ следует подставить $w_{0RR}^{(z_1)}(u)$ — стандартный винеровский процесс с начальным значением $z_1=\frac{z}{\sigma}+\frac{A_0}{a\sigma}$ и с отражением от границ

$$g_1(u)=\frac{A_0}{a\sigma}\sqrt{1-2au},\quad g_2(u)=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{A_0}{a}+R\right)\sqrt{1-2au}.$$

При $a=0$ мы можем, как и для процесса w_R, найти явный вид переходной функции процесса w_{RR}, пользуясь предельным переходом в задаче о блуждании со скачками ± 1 и с двумя отражающими границами (см. [73], стр. 421, в приведенной ниже формуле $\alpha=\frac{A_0}{\sigma^2}$)

$$\mathsf{P}\left(w_{RR}^{(x)}(t)\in dy\right)=$$
$$=\left[\frac{2\alpha e^{2\alpha y}}{e^{2\alpha R}-1}+\frac{2}{R}\exp\left\{-\frac{\alpha^2t\sigma^2}{2}+\alpha(y-x)\right\}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\frac{t\sigma^2}{2}\left(\frac{\pi r}{R}\right)^2}\times\right.$$
$$\times\frac{1}{\alpha^2+\left(\frac{\pi r}{R}\right)^2}\left(\frac{\pi r}{R}\cos\frac{\pi rx}{R}+\alpha\sin\frac{\pi rx}{R}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{\pi r}{R}\cos\frac{\pi ry}{R}+\alpha\sin\frac{\pi ry}{R}\right)\right]dy.$$

Отсюда видно, в частности, что при $t\to\infty$ распределение $w_{RR}(t)$ сходится к стационарному, совпадающему с усеченным показательным распределением

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left(w_{RR}^{(x)}(t)\in dy\right)=\frac{2\alpha e^{2\alpha y}}{e^{2\alpha R}-1}dy,\quad y\in[0,R],$$

с показателем $2\alpha=\frac{2A_0}{\sigma^2}$ (ср. с (16)).

Отметим, что утверждения теорем 1—6 носят «собирательный» характер. Это означает, что для вычисления предельных распределений, фигурирующих в этих теоремах, мы можем пользоваться *«принципом инвариантности»* в следующем смысле. Пусть наряду с исследуемой системой условиям какой-нибудь теоремы удовлетворяет также другая, очень простая система (скажем, с пуассоновскими входным и выходным потоками), которая допускает явные формулы для распределения $q(t)$. Тогда эти явные формулы могут быть использованы для получения предельного распределения исходной исследуемой системы.

Прежде чем переходить к применениям теорем 1—6 в различных более конкретных задачах, мы приведем здесь также одно вспомогательное утверждение, которое по существу повторяет лемму 2 § 4 гл. I и которое поможет нам проверять условия I, II приведенных выше теорем в конкретных примерах.

Существо этого утверждения состоит в том, чтобы на основании неравенства

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[x^2_{u,t};\ |x_{u,t}| > \delta\sqrt{T}\right] < \varepsilon\theta, \tag{17}$$

выполненного на $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u^N$ при $\theta \leqslant t \leqslant 2\theta$ и вытекающего для $x = q$, e^0, s^0, r^0 из условий IV теорем 1—6, установить нужную оценку для вероятности

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{s\leqslant\theta}|x_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right).$$

Здесь $\Gamma_u^N = \{|x(u)| < N\sqrt{T}\}$.

Положим для краткости

$$\Omega(u) = \Omega_{u,0} \cap h(u, \delta),$$

где

$$h(u, \delta) = \bigcap_{v\leqslant u}\{|x(v+0) - x(v-0)| \leqslant \delta\sqrt{T}\},$$

а множества $\Omega_{u,\theta}$ мы, не ограничивая общности, считаем вложенными: $\Omega_{u,\theta} = \bigcap_{v\leqslant u}\Omega_{v,\theta}$.

Для удобства вместо $\Omega_{u,\theta}$ с самого начала можно рассматривать множества $\Omega(u)$, поскольку $\mathsf{P}(\Omega(T)) \to 1$.

Лемма 2. *Если выполнено* (17), *то на множестве* $\Omega(u) \cap \Gamma_u^{N-1}$ *при любых* $\varepsilon > 0$, $1/2 > \delta > 0$ *и достаточно* *больших* T

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{s\leqslant\theta}|x_{u,s}|>\delta\sqrt{T};\ \Omega(u+\theta)\right)\leqslant\frac{\varepsilon\theta}{T},\tag{18}$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(x^2_{u,\theta};\ \sup_{s\leqslant\theta}|x_{u,s}|>\delta\sqrt{T};\ \Omega(u+\theta)\right)\leqslant\varepsilon\theta.\tag{19}$$

Доказательство этой леммы основано на следующем неравенстве:

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{s\leqslant\theta}|x_{u,s}|\geqslant 2\delta\sqrt{T};\ \Omega(u+\theta)\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(|x_{u,2\theta}|\geqslant\delta\sqrt{T};\ \Omega(u)\right),\tag{20}$$

которое по существу вытекает из леммы 2 § 4 гл. I. Действительно, из (17) следует, что на Γ^N_u

$$I(\Omega(u))\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(|x_{u,t}|>\delta\sqrt{T}\right)\leqslant\frac{\varepsilon\theta}{\delta^2 T}<\frac{1}{2}\tag{21}$$

при $\theta\leqslant t\leqslant 2\theta$ и достаточно больших T. Это позволяет повторить выкладки упомянутой леммы главы I, заменив в них безусловное математическое ожидание на условное.

Для этого обозначим через τ время первого прохождения процессом $\{x_{u,t},\ t\geqslant 0\}$ уровня $2\delta\sqrt{T}$. Тогда по лемме 1 § 4 гл. I

$$I(\Gamma^{N-1}_u)\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(x_{u,2\theta}>\delta\sqrt{T};\ \Omega(u))\geqslant I(\Gamma^{N-1}_u)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}I(\tau\leqslant\theta)\times$$
$$\times I(\Omega(u+\tau))\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u+\tau)}I\left(x_{u+\tau,\,2\theta-\tau}\geqslant-\delta\sqrt{T}\right)\geqslant$$
$$\geqslant I(\Gamma^{N-1}_u)\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}I(\tau\leqslant\theta)\,I(\Omega(u+\tau))\,\frac{1}{2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}I(\Gamma^{N-1}_u)\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\theta}x_{u,t}>2\delta\sqrt{T};\ \Omega(u+\theta)\right).$$

Мы смогли здесь воспользоваться леммой 1 § 4 гл. I, поскольку $2\delta<1$, $\Gamma^{N-1}_u\,\Omega(u+\tau)\subset\Gamma^N_{u+\tau}\,\Omega(u+\tau)$, и, следовательно, из (21) вытекает, что на множестве $\Gamma^{N-1}_u\,\Omega(u+\tau)$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u+1)}\left(x_{u+\tau,\,2\theta-\tau}\geqslant-\delta\sqrt{T}\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом оценив

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(x_{u,2\theta} < -\delta\sqrt{T};\ \Omega(u)\right),$$

мы получим неравенство (20).

Чтобы теперь из (20) получить утверждение леммы 2, надо заметить, что (19) следует из (18) и леммы 1 этого параграфа. Неравенство (18) следует из (20) и (21). Лемма доказана.

Сделаем теперь еще одно замечание. В условиях теорем 1—6 мы требовали, чтобы при достаточно больших T выполнялось

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{u\leqslant T}\overline{\Omega(u)}\right) < \varepsilon. \tag{22}$$

Поскольку во всех последующих рассматриваемых задачах процессы обслуживания обладают известной *однородностью* во времени, то мы можем, не ограничивая общности, а также простоты ради, предполагать, что условие (22) выполняется однородно в следующем смысле: вероятность того, что впервые условия $\Omega(u)$ будут нарушены в течение интервала времени $[t, t+\theta]$ длины θ, при всех t не превосходит $\frac{\varepsilon\theta}{T}$. Точнее, при всех u

$$I(\Omega(u))\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\overline{\Omega(u+\theta)}\right) < \frac{\varepsilon\theta}{T}. \tag{23}$$

Отметим, что мы могли бы вместо (23) пользоваться более общим условием

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{u\leqslant T}\{\Omega(u)\,\overline{\Omega}(u+\theta)\}\right) < \varepsilon,$$

эквивалентным (22). Однако при этом усложнились бы выкладки, а достигнутая общность имела бы весьма сомнительную ценность (как с точки зрения реальных задач, так и с точки зрения формы теорем 1—6, где условия I—III носят явно однородный характер).

Если выполнено (23), то из леммы 2 вытекает

Следствие 1. *На множестве* $\gamma(u) = \Omega(u) \cap \Gamma_u^{N-1}$ *выполняется*

$$\begin{gathered}\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{s\leqslant\theta}|x_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right) < \frac{\varepsilon\theta}{T},\\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(x_{u,\theta}^2;\ \sup_{s\leqslant\theta}|x_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right) < \varepsilon\theta.\end{gathered} \tag{24}$$

Применительно к условиям теорем 1—6 это следствие означает, что неравенства (24) будут выполнены при $x = e^0, r^0, s^0, q$, если выполнены условия III, V названных теорем.

Из условий I, II теорем 1—6 и условия однородности (23) вытекает также такое

Следствие 2. *Если*

$$|I(\gamma(u))\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x_{u,\theta}| \leqslant \varepsilon\sqrt{\theta} \quad \left(\frac{\theta}{\sqrt{T}} = o\left(\sqrt{\theta}\right)\right),$$

$$I(\gamma(u))\, |\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x^2_{u,\theta} - b\theta| \leqslant \varepsilon\theta$$

и выполнено (23), *то при любых* $v, \theta \geqslant v \geqslant 0$ *и* $\omega \in \gamma(u)$

$$|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x^2_{u+v,\theta} - b\theta| \leqslant \varepsilon\theta,$$

$$|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x^2_{u,v} - bv| \leqslant \varepsilon\theta.$$

Действительно, оценим сначала $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x^2_{u+v,\theta}$. Обозначим для краткости $\gamma(u) = I(\gamma(u))$. Тогда $I(\bar{\gamma}(u)) = 1 - \gamma(u)$,

$$\gamma(u)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x^2_{u+v,\theta} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \gamma(u)\, \gamma(u+v)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u+v)} x^2_{u+v,\theta} + \\ + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \gamma(u)\,(1 - \gamma(u+v))\, x^2_{u+v,\theta}.$$

Первое слагаемое здесь имеет вид $b\theta + r\theta$, $|r| < \varepsilon$; второе — в силу леммы 1 и условия (23) оценивается величиной $\varepsilon\theta$.

Чтобы доказать второе неравенство следствия, заметим, что

$$x^2_{u,\theta+v} = x^2_{u,v} + x^2_{u+v,\theta} + 2x_{u,v}x_{u+v,\theta}. \tag{25}$$

Так как

$$|\gamma(u)\, \gamma(u+v)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u+v)} x_{u+v,\theta}| < \varepsilon\sqrt{\theta}$$

и в силу предыдущего

$$|\gamma(u)\,(1 - \gamma(u+v))\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u+v)} x_{u+v,\theta}| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\gamma(u)\,(1 - \gamma(u+v))\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u+v)} x^2_{u+v,\theta}} \leqslant \varepsilon\sqrt{\theta},$$

то, обозначив

$$y^2 = \gamma(u)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x^2_{u,v},$$

получим

$$|\gamma(u)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} x_{u,v} x_{u+v,\theta}| \leqslant \varepsilon\sqrt{\theta}\, y$$

и, далее, из (25) (после умножения на $\gamma(u)$)

$$b(\theta+v)=y^2+b\theta+r_1\theta+r_2\sqrt{\theta}\,y, \quad \text{где} \quad |r_i|<\varepsilon.$$

Очевидно, что решение этого уравнения имеет вид

$$y^2=bv+r_3\theta, \quad |r_3|<\varepsilon. \blacktriangleleft$$

Если при доказательстве леммы 2 опираться не на (17), а на неравенство вида

$$I(\Omega(u))\,\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}x_{u,t}^2<c\theta, \tag{26}$$

выполненное при $\theta\leqslant t\leqslant 2\theta$ и $\omega\in\Gamma_u^N$, то совершенно аналогично предыдущему легко установить, что справедлива

Лемма 3. *Если выполнено* (26), *то на множестве* $\Omega(u)\cap\Gamma_u^{N-1}$ *при достаточно большом* N_1

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\Big(\sup_{s\leqslant\theta}x_{u,s}^2,\ \Omega(u+\theta)\Big)\leqslant N_1\theta.$$

Для доказательства этой леммы надо заметить, что из (26) при $\omega\in\Gamma_u^N$ следует

$$I(\Omega(u))\,\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\big(|x_{u,t}|>z\sqrt{\theta}\big)\leqslant\frac{c\theta}{z\theta}<\frac{1}{2}$$

при достаточно большом z ($z\geqslant N_2$). Это неравенство заменит нам (21). После этого, как и прежде, убеждаемся, что на $\Omega(u)\cap\Gamma_u^{N-1}$ при $z\geqslant N_2$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\big(\sup|x_{u,t}|>2z\sqrt{\theta};\ \Omega(u+\theta)\big)\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\big(|x_{u,2\theta}|>z\sqrt{\theta}\big).$$

Это доказывает утверждение леммы. $\blacktriangleleft$

§ 4. Многоканальные системы с интенсивным входным потоком

В качестве первой иллюстрации к теоремам 1—6 предыдущего параграфа мы рассмотрим здесь системы, описанные в § 1 гл. II, в предположении, что время обслуживания в каждом из каналов обслуживания показательно.

К таким системам относятся, например, системы примера 2 (системы $\langle G_I, G_I, E/n, 1\rangle$ в обозначениях

[18]), когда

$$M\tau_j^e = 1/T, \quad P(\tau_j^s > t) = e^{-\lambda t}, \quad n = \infty.$$

Относительно более общих систем мы предположим, что их входной поток после изменения масштаба времени (растяжения) в T раз будет удовлетворять условиям типа I—III и V теоремы 1 § 3.

Точнее, имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть входной процесс $e(t)$ удовлетворяет условиям: существуют θ и система множеств $\Omega_{u,0}^e \in \mathfrak{E}(u)$ такие, что*

$$P\Big(\bigcap_{u \leqslant T} \Omega_{u,\theta}^e\Big) \to 1 \tag{1}$$

и при $\omega \in \Omega_{u,\theta}^e$

I) $Me_{u,\theta} = \theta a_e + \frac{\theta}{\sqrt{T}} r_e(\omega), \qquad |r_e| < \varepsilon,$

II) $M(e_{u,\theta} - \theta a_e)^2 = \theta b_{ee} + \theta r_{ee}(\omega), \qquad |r_e| < \varepsilon,$

III) $M\big((e_{u,\theta} - \theta a_e)^2;\ |e_{u,\theta} - \theta a_e| > \delta\sqrt{T}\big) < \varepsilon\theta$

для любых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$.

IV) *Система обслуживания представляет собой совокупность n каналов обслуживания, в каждом из которых времена обслуживания независимы и распределены по показательному закону*

$$P(\tau_j^s > t) = e^{-\frac{\lambda}{T}t}.$$

V) *Наряду с* (1) *выполнено условие однородности в убывании вероятности того, что наступит хотя бы одно событие $\overline{\Omega}_{u,\theta}^e$ или $\overline{h^e}(u, \delta) = \bigcup_{v \leqslant u} \{|e(v+0) - e(v-0)| > \delta\sqrt{T}\}$* (ср. с (23) § 3). *Именно, если обозначить $\Omega^e(u) = \Omega_{u,0}^e h^e(u, \delta)$ (события $\Omega_{u,\theta}^e$ мы также считаем вложенными: $\Omega_{u,\theta}^e = \bigcap_{v \leqslant u} \Omega_{v,\theta}^e$), то*

$$P_{\mathfrak{M}(u)}\big(\Omega^e(u)\,\overline{\Omega}^e(u+\theta)\big) < \frac{\varepsilon\theta}{T}.$$

Тогда если

$$\frac{n - \frac{Ta_e}{\lambda}}{\sqrt{T}} \to \infty, \tag{2}$$

то нормированный процесс числа занятых линий

$$z(t) = \frac{q(tT) - \frac{a_e T}{\lambda}}{\sqrt{T}}$$

C-сходится к процессу неограниченной диффузии с коэффициентами $(-\lambda x, b_{ee} + a_e)$.

Этот процесс и его явные представления были подробно обсуждены в замечаниях к теореме 4 § 3.

Как показано в § 11 гл. I, пример 2, рассмотренный в начале главы (т. е. системы $\langle G_I, G_I, E/n, 1\rangle$), будет удовлетворять условиям этой теоремы, если

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\tau^e \geqslant c > 0, \quad \mathsf{D}\tau^e \geqslant c > 0, \\ \mathsf{M}[(\tau^e)^2, \ \tau^e \geqslant N] \to 0, \quad \mathsf{M}((\nu^e)^2; \ |\nu^e| \geqslant N) \to 0 \end{gathered} \tag{3}$$

равномерно по T, при $N \to \infty$ (распределения τ^e, ν^e, τ^s могут зависеть от T). Кроме того, должно выполняться

$$\frac{\mathsf{M}\nu^e}{\mathsf{M}\tau^e} = a_e + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \quad \frac{\mathsf{D}\nu^e}{\mathsf{D}\tau^e} + \frac{\mathsf{M}^2\nu^2 D\tau^e}{(\mathsf{M}\tau^e)^3} \to \sigma_e^2 > 0. \tag{4}$$

В качестве множеств $\Omega^e_{u,\theta}$ (см. формулировки теоремы 2 § 11 гл. I и теоремы 1 § 3) можно рассмотреть множества $\Omega^e_{u,\theta} = \{\chi^e(u) < s\}$ при надлежащем выборе s, а в качестве $\mathfrak{M}(u)$ следует взять σ-алгебру, порожденную значениями $Y(t)$ при $t \leqslant u$ (см. пример 2 в начале главы III).

Условия (3), (4), очевидно, всегда будут выполнены, если τ^e, ν^e от T не зависят.

В § 11 гл. I можно найти также и другие примеры входных потоков, удовлетворяющих условию 1 этого параграфа.

Поскольку нормированный входной процесс $\frac{e(tT) - a_e tT}{\sqrt{b_{ee}T}}$ C-сходится к стандартному винеровскому процессу, то утверждение этой теоремы мы могли бы получить также из теоремы 2 § 2 гл. II. Однако там предельный процесс для $z(t)$ описывался нами с помощью интегрального представления, которое эквивалентно, как мы видели в § 3, описанию этого процесса как диффузионного.

Из сопоставления теоремы 1 с результатами § 2 гл. II следует одно важное замечание. *Если распределение* τ_j^s *(или* τ_j^s/T*) не является экспоненциальным, то* *предельный процесс для $z(t)$ не будет марковским (и, стало быть, диффузионным марковским) процессом.*

Доказательство теоремы 1. Наша цель — показать, что система, описанная в теореме 1, относится к системам с грубой зависимостью управления от числа занятых линий $q(t)$, и проверить, что для нее выполнены условия теоремы 4 предыдущего параграфа.

Пусть сначала для простоты число каналов $n=\infty$.

Рассмотрим приращение $s_{u,\theta}$ и представим его в виде

$$s_{u,\theta}=\sum_{i=1}^{q(u)}\delta_i+\sum_{i=1}^{e_{u,\theta}}\delta_i^*, \tag{5}$$

где $\delta_i=1$ или 0 в зависимости от того, закончилось ли к моменту $u+\theta$ обслуживание i-го вызова из очереди $q(u)$ или нет. Случайные величины δ_i^* определяются аналогичным образом. Если $n+\theta_j$ есть момент прихода j-го вызова за интервал $(u, u+\theta)$, то, очевидно,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta))}(\delta_j^*=0)&=e^{-\frac{\lambda}{T}(\theta-\theta_j)},\\ \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(\delta_j=0)&=e^{-\frac{\lambda\theta}{T}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Имеем $\left(Q(u)=\frac{q(u)}{T}\right)$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}s_{u,\theta}&=\left(1-e^{-\frac{\lambda\theta}{T}}\right)q(u)+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\int_0^\theta\left(1-e^{-\frac{\lambda}{T}(\theta-v)}\right)d_ve_{u,v}=\\ &=\lambda\theta Q(u)-Q(u)T\left(e^{-\frac{\lambda\theta}{T}}-1+\frac{\lambda\theta}{T}\right)+\\ &+\int_0^\theta\left(1-e^{-\frac{\lambda}{T}(\theta-v)}\right)a_e\,dv+\\ &+\frac{\lambda}{T}\int_0^\theta e^{-\frac{\lambda(\theta-v)}{T}}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,v}-a_ev)\,dv. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь второе и третье слагаемые в последней сумме преобразуются к виду

$$T\left(\frac{a_e}{\lambda}-Q(u)\right)\left(e^{-\frac{\lambda\theta}{T}}-1+\frac{\lambda\theta}{T}\right).$$

Поэтому, полагая $Q = a_e/\lambda$, мы получим, что в области $|Q(u) - Q| < N/\sqrt{T}$ эти слагаемые не превосходят по абсолютной величине

$$T \frac{N}{\sqrt{T}} \frac{\lambda^2\theta^2}{T^2} = \frac{\theta}{\sqrt{T}} \cdot \frac{\lambda^2 N\theta}{T} = o\left(\frac{\theta}{\sqrt{T}}\right).$$

В последнем слагаемом (7) в силу следствия 2 предыдущего параграфа получаем, что под знаком интеграла при $\omega \in \Omega^e_{u,\theta}$

$$|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \overset{0}{e}_{u,v}| \leqslant \sqrt{\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (\overset{0}{e}_{u,v})^2} \leqslant 2\sqrt{b_{ee}\theta}$$

и

$$\left| \frac{\lambda}{T} \int_0^\theta e^{-\frac{\lambda(\theta - v)}{T}} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e_{u,v} - a_e v)\, dv \right| \leqslant \frac{2\lambda\theta^{3/2}\sqrt{b_{ee}}}{T} = o\left(\frac{\theta}{\sqrt{T}}\right).$$

Таким образом, на $\Omega^e_{u,\theta} \cap \Gamma^N_u$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s_{u,\theta} = \lambda\theta Q(u) + \frac{\theta}{\sqrt{T}} r_s(\omega), \quad r_s(\omega) < \varepsilon.$$

Мы видим, что по поведению моментов первого порядка $\left(\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,\theta} = a_e\theta + o\left(\frac{\theta}{\sqrt{T}}\right)\right)$ наша система относится к системам с грубой зависимостью управления от длины очереди. Точкой «равновесия» Q здесь является решение $Q = \frac{a_e}{\lambda}$ уравнения $a_e - \lambda Q = 0$.

Рассмотрим вторые моменты. Для процесса $e(u)$ они нам известны. Далее, в силу (6)

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (s_{u,\theta} - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s_{u,\theta})^2 = \\
&\quad = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\, \mathfrak{S}(u+\theta))} (s_{u,\theta} - \mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\, \mathfrak{S}(u+\theta))} s_{u,\theta})^2 + \\
&\quad + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\, \mathfrak{S}(u+\theta))} s_{u,\theta} - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s_{u,\theta})^2 = \\
&\quad = e^{-\frac{\lambda\theta}{T}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda\theta}{T}}\right) q(u) + \\
&\quad + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \int_0^\theta e^{-\frac{\lambda(\theta - v)}{T}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda(\theta - v)}{T}}\right) d_v e_{u,v} + \\
&\quad + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \left[\frac{\lambda}{T} \int_0^\theta e^{-\frac{\lambda(\theta - v)}{T}} (e_{u,v} - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,v})\, dv\right]^2. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое в области Γ_u^N равно $\lambda\theta Q(u) + r_1\theta$, $|r_1| < \varepsilon$. Второе слагаемое в области $\Omega_{u,\theta}^e$ не превосходит

$$\frac{\lambda\theta}{T} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,\theta} = r_2\theta, \quad |r_2| < \varepsilon.$$

Наконец, для последнего слагаемого в (8) при $\omega \in \Omega_{u,\theta}^e$ имеем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u) \mathfrak{S}(u+\theta))} s_{u,\theta} - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s_{u,\theta})^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda^2\theta}{T^2} \int_0^\theta \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e_{u,v} - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,v})^2\, dv \leqslant \frac{\lambda^2\theta}{T^2} b_{ee}\theta^2 = o(\theta). \quad (9)$$

Здесь для оценки подынтегрального выражения мы воспользовались следствием 2 предыдущего параграфа. Мы получили в результате, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (s_{u,\theta} - \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s_{u,\theta})^2 = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (s_{u,\theta} - \lambda\theta Q(u))^2 + r_1(\omega)\theta =$$
$$= \lambda\theta Q(u) + r_2(\omega)\theta, \quad |r_i(\omega)| < \varepsilon.$$

Нам осталось рассмотреть смешанный момент

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (s_{u,\theta} - \theta\lambda Q(u))(e_{u,\theta} - a_e\theta) =$$
$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e_{u,\theta} - a_e\theta)\, \mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u) \mathfrak{S}(u+\theta))} (s_{u,\theta} - \theta\lambda Q(u)). \quad (10)$$

Так же как в (7), получаем, что последний множитель здесь равен

$$\frac{\lambda}{T} \int_0^\theta e^{-\frac{\lambda(\theta - v)}{T}} (e_{u,v} - a_e v)\, dv + \frac{\theta r}{\sqrt{T}}, \quad |r| < \varepsilon.$$

Поэтому (10) не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{\theta\varepsilon}{\sqrt{T}} \sqrt{b_{ee}\theta + \theta r_{ee}(\omega)} +$$
$$+ \frac{\lambda}{T} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} |e_{u,\theta} - a_e\theta| \int_0^\theta |e_{u,v} - a_e v|\, dv \leqslant o(\theta) +$$
$$+ \frac{\lambda}{T} \left[\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e_{u,\theta} - a_e\theta)^2 \cdot \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \left(\int_0^\theta |e_{u,v} - a_e v|\, dv \right)^2 \right]^{1/2} =$$
$$= o(\theta) + \frac{\lambda\sqrt{b_{ee}\theta}}{T} \left[\theta \int_0^\theta \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e_{u,v} - a_e v)^2\, dv \right]^{1/2},$$

Воспользовавшись следствием 2 предыдущего параграфа, получим в результате

$$o(\theta)+\frac{\lambda\sqrt{b_{ee}\theta}}{T}(b_{ee}\theta^3)^{1/2}=o(\theta).$$

Таким образом, условия I, II теоремы 4 § 3 выполнены. При этом $a_e(z)=a_e=\mathrm{const}$, $a_s(z)=\lambda z$, $b_{ee}(z)=b_{ee}=\mathrm{const}$, $b_{ss}=\lambda z$, $b_{es}=0$. (Процесс отказов $r(u)$ тождественно равен нулю.) Проверим условие III теоремы 4 § 3. Имеем

$$s_{u,\,\theta}-\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}s_{u,\,\theta}=$$
$$=(s_{u,\,\theta}-\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta))}s_{u,\,\theta})+(\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta)}s_{u,\,\theta}-\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}s_{u,\,\theta}).$$

В силу (9) нам достаточно проверить условие III лишь для первой разности

$$s_{u,\,\theta}-\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta))}s_{u,\,\theta}=\sum_{j=1}^{q(u)}(\delta_j-p)+\sum_{j=1}^{e_{u,\,\theta}}(\delta_j^*-p_j^*) \qquad (11)$$

(см. (5), (6); числа p и p_j^*, равные вероятности единичного исхода в схеме Бернулли, определяются из (6)). Условие III для (11) будет заведомо выполнено, если мы покажем, что четвертый момент (11) ограничен сверху величиной $c\theta^2$. Далее, если ξ_j независимы, $\mathsf{P}(\xi_j=1)=p_j=1-\mathsf{P}(\xi_j=0)=1-q_j$, то

$$\mathsf{M}\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-p_j)\right]^4=\sum_{j=1}^{n}p_jq_j(p_j^3+q_j^3)+6\sum_{i<j}p_iq_ip_jq_j\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}p_j+3\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)^2\leqslant 4\left(\sum p_j\right)^2,$$

если $\sum p_j\geqslant 1$. Применительно к (11)

$$\sum p_j=pq(u)+\sum_{j=1}^{e_{u,\,\theta}}p_j^*=\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta))}s_{u,\,\theta}.$$

Поэтому в области $\Omega^e_{u,\,\theta}\cap T^N_u$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(s_{u,\,\theta}-\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta)}s_{u,\,\theta})^4\leqslant 4\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}[\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}(u+\theta)}s_{u,\,\theta}]^2\leqslant$$
$$\leqslant 4\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}s^2_{u,\,\theta}\leqslant 8(\lambda\theta Q(u))^2+8\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(s_{u,\,\theta}-\lambda\theta Q(u))^2\leqslant c\theta^2,$$

Условие III доказано.

Так как условия IV и V теоремы 4 § 3 выполнены очевидным образом (при $\Omega_{u,\theta}=\Omega^{e}_{u,\theta}$), то теорема доказана.

Справедливость теоремы для конечных n, удовлетворяющих условию (2), очевидна.

Замечание. Аналогичным образом мы могли бы рассмотреть и «зависимый» входной поток e, когда коэффициенты a_e и b_{ee} зависят от числа занятых линий $q(u)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I—V *теоремы* 1. *Тогда, если число каналов обслуживания n равно*

$$n=\frac{Ta_e}{\lambda}+D\sqrt{T},\quad |D|<\infty,$$

а вызовы, заставшие в момент своего прихода все n каналов занятыми, получают отказ (выбывают из системы), то нормированный процесс числа занятых линий

$$z(t)=\frac{q(tT)-\frac{a_eT}{\lambda}}{\sqrt{T}}$$

С-сходится к процессу диффузии с коэффициентами $(-\lambda x, b_{ee}+a_e)$ и с отражением вниз от границы $z=D$.

Диффузионные процессы такого вида подробно обсуждались нами в замечаниях к теореме 5 предыдущего параграфа.

Примеры входных процессов $e(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, мы приводили выше.

Доказательство. Покажем, что процесс

$$\bar{q}(u)=\max\left(q(u),\, n-2\bar{N}\sqrt{T}\right) \tag{12}$$

удовлетворяет условиям теоремы 5 (с отражающим экраном в точке D, а не в 0). Число $\bar{N}\to\infty$ мы выберем позже.

Мы видели в предыдущей теореме, что при $n=\infty$ приращения $q_{u,\theta}$ удовлетворяют соотношениям $\left(\zeta(u)= \right.$
$\left. =\dfrac{q(u)-\frac{a_e}{\lambda_*}T}{\sqrt{T}},\quad \omega\in\Omega_{u,\theta}\Gamma_u^N\right)$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q_{u,\theta} &= -\lambda\zeta(u)\frac{\theta}{\sqrt{T}}+r_1\frac{\theta}{\sqrt{T}},\\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q_{u,\theta}^2 &= \theta\left(b_{ee}+a_e\right)+r_2\theta, \qquad (13)\\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta}^2;\ |q_{u,\theta}|>\delta\sqrt{T}\right) &< \varepsilon\theta, \end{aligned}$$

$|r_i|<\varepsilon$. Кроме того, из следствия 1 леммы 2 § 4 вытекает также, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{s\leqslant\theta}|q_{u,s}|>\delta\sqrt{T}\right)<\frac{\varepsilon\theta}{T}. \qquad (14)$$

Мы убедимся прежде всего, что все эти соотношения останутся в силе и для приращений $\bar{q}_{u,\theta}$ процесса $\bar{q}(u)$, однако лишь в области

$$\Omega_{u,\theta}\cap\{-N<\zeta(u)<D-\delta\} \qquad (15)$$

при любом $\delta>0$. В этой области, очевидно,

$$\left\{\sup_{s\leqslant\theta}|\bar{q}_{u,s}|<\delta\sqrt{T}\right\}=\left\{\sup_{s\leqslant\theta}|q_{u,s}|<\delta\sqrt{T}\right\}$$

(в ближайших выкладках мы под $q_{u,s}$ понимаем приращение процесса $q(u)$ в случае $n=\infty$). Поэтому в силу (14)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\bar{q}_{u,\theta}^2;\ |\bar{q}_{u,\theta}|>\delta\sqrt{T}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\bar{q}_{u,\theta}^2;\ \sup_{s\leqslant\theta}|\bar{q}_{u,s}|\geqslant\delta\sqrt{T}\right)\leqslant\left(2\bar{N}\sqrt{T}\right)^2\frac{\varepsilon\theta}{T}\leqslant\varepsilon_1\theta \qquad (16)$$

при $\varepsilon_1=\varepsilon^{1/3}$, $2\bar{N}=\varepsilon^{-1/3}$ (поскольку в наших рассмотрениях ε — сколь угодно малое число, то мы можем считать, что $\varepsilon\to 0$, $\bar{N}\to\infty$ при $T\to\infty$). Далее, в той же области (15)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\bar{q}_{u,\theta}^2=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\bar{q}_{u,\theta}^2;\ \sup_{s\leqslant\theta}|\bar{q}_{u,s}|\geqslant\delta\sqrt{T}\right)+$$
$$+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta}^2;\ \sup_{s\leqslant\theta}|q_{u,s}|<\delta\sqrt{T}\right).$$

Из (14), (16) и (13) следует, что это есть

$$\theta(b_{ee}+a_e)+\bar r_2\theta, \quad |r_2|<\varepsilon_1.$$

Точно так же оценивается и $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\bar q_{u,\theta}$. Таким образом, соотношения (13), (14) для приращений $\bar q_{u,\theta}$ доказаны.

Проверим теперь условие отражения. Нам надо для любых достаточно малых ε^* оценить в области $\Omega_{u,\theta}\cap$ $\cap\{\zeta(u)>D-\varepsilon^*\}$ поведение

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta_1}<-\varepsilon^*\sqrt{T}\right)$$

для $\theta_1=(\varepsilon^*)^2T$.

Для тех вызовов, которые в интервале $(u, u+\theta)$ получили отказ, мы введем специальные дополнительные каналы обслуживания с теми же свойствами, которыми обладают основные n каналов.

Очевидно, что если теперь мы образуем новую очередь $q^*(u)$, где вместе с $q(u)$ будем учитывать вновь введенные каналы, то получим

$$q^*_{u,\theta_1}\geqslant q_{u,\theta_1}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta_1}<-\varepsilon^*\sqrt{T}\right)=\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta_1}<-\sqrt{\theta_1}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^*_{u,\theta_1}<-\sqrt{\theta_1}\right).$$

Но приращение q^*_{u,θ_1} ведет себя, очевидно, точно так же, как для систем с $n=\infty$. Поэтому, если положить $\tilde T=\theta_1$ и рассмотреть процесс

$$\tilde q(t)=q^*_{u,t}, \quad t\in[0,,\tilde T] \qquad (\tilde q(0)=0),$$

то мы можем применить к этому процессу теорему 1 этого параграфа. В силу этой теоремы процесс $\dfrac{\tilde q(t\theta_1)}{\sqrt{\theta_1}}$ C-сходится к некоторому диффузионному процессу. Следовательно, $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^*_{u,\theta_1}<-\sqrt{\theta_1}\right)=\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\dfrac{\tilde q(t\theta_1)}{\sqrt{\theta_1}}<-1\right)$ сходится к некоторому положительному пределу.

Условия теоремы 5 § 3 выполнены и, следовательно, теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* I—V *теоремы* 1. *Тогда, если число каналов обслуживания равно*

$$n=\frac{Ta_e}{\lambda}+D\sqrt{T}, \quad |D|<\infty,$$

а вызовы, заставшие все каналы занятыми, образуют очередь (которая обслуживается по мере освобождения каналов), то нормированный процесс «очереди»

$$z(t)=\frac{q(tT)-\frac{a_eT}{\lambda}}{\sqrt{T}}$$

С-сходится к диффузионному процессу с коэффициентом сноса, равным $\max(-\lambda x, -\lambda D)$, *и коэффициентом диффузии* $b_{ee}+a_e$.

Доказательство. Проверка равенств (13), (14) в области $\omega\in\Omega_{u,\theta}\cap\{-N<\zeta(u)<D-\delta\}$ происходит точно так же, как в теореме 2.

Пусть теперь $\omega\in\Omega_{u,\theta}\cap\{D+\delta<\zeta(u)<N\}$. На этом множестве процесс $\{s_{u,t},\ t\geqslant 0\}$ тождествен пуассоновскому процессу $\{\Pi(t), t\geqslant 0\}$ с параметром

$$\frac{\lambda n}{T}=a_e+\frac{\lambda D}{\sqrt{T}}$$

до тех пор, пока траектория $q(u+t)=q(u)+q_{u,t}$ не попадает в область $q<n$, т. е. по крайней мере до тех пор, пока

$$\sup_t|q_{u,t}|<\delta\sqrt{T}.$$

Если бы последнего ограничения не было (т. е. если $s_{u,t}$ при всех t был не зависящим от $\{e_{u,t}\}$ пуассоновским процессом), то мы имели бы, очевидно,

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q_{u,\theta}&=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}e_{u,\theta}-\theta\left(a_e+\frac{\lambda D}{\sqrt{T}}\right),\\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q^2_{u,\theta}&=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}e_{u,\theta})^2+\theta\left(a_e+\frac{\lambda D}{\sqrt{T}}\right).\end{aligned}\tag{17}$$

Покажем, что эти равенства асимптотически сохранятся и при наличии упомянутого ограничения. Действительно, в силу хорошо известных свойств пуассоновского процесса будет заведомо выполнено неравенство

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\leqslant\theta}\left|\Pi(t)-t\left(a_e+\frac{\lambda D}{\sqrt{T}}\right)\right|>\delta\sqrt{T}\right)<\frac{\varepsilon\theta}{T}.$$

Отсюда и из аналогичных свойств процесса $e_{u,t}$ (см. следствие 1 леммы 2 § 3) мы получаем, что в области $\Omega^e_{u,\theta}\cap\{\zeta(u)>D+\delta\}$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{t\leqslant\theta}|q_{u,\theta}|>\delta\sqrt{T}\right)=$$
$$=\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{t\leqslant\theta}|e_{u,t}-\Pi(t)|>\delta\sqrt{T}\right)<\frac{\varepsilon\theta}{T}.$$

Ограничивая, как и в теореме 2, процесс $q(u)$ достаточно медленно растущей последовательностью $\bar{N}$ (ср. с (12)), мы находим аналогично (16), что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^2_{u,\theta};\ \sup_{t\leqslant\theta}|q_{u,t}|>\delta\sqrt{T}\right)\leqslant\varepsilon\theta.$$

Отсюда уже без труда получается сохранение (с точностью до членов $o\left(\frac{\theta}{\sqrt{T}}\right)$ и $o(\theta)$ соответственно) равенств (17) для реального процесса $q_{u,t}$. Таким образом, в области

$$\Omega^e_{u,\theta}\cap\{N>\zeta(u)>D+\delta\}$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q_{u,\theta}=-\frac{\lambda D\theta}{\sqrt{T}}+\frac{r_1\theta}{\sqrt{T}},$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q^2_{u,\theta}=(b_{ee}+a_e)\theta+r_2\theta,\quad |r_i|<\varepsilon.$$

Нам осталось рассмотреть «переходную» область $|\zeta(u)-D|\leqslant\delta$.

На одном вероятностном пространстве с $q_{u,t}$ можно построить пуассоновские процессы*) $\Pi^{\pm}(t)$ с параметрами $\frac{\lambda}{T}(n\pm 2\delta\sqrt{T})$ такие, что

$$\Pi^-(t)\leqslant s_{u,t}\leqslant\Pi^+(t),$$

---

*) Полезно отметить, что условное относительно $\mathfrak{M}(u)$ распределение $s_{u,t}$ в точке $t=0$ локально (т. е. в смысле инфинитезимальных характеристик) ведет себя как распределение пуассоновского процесса с параметром, равным $\min\left(\frac{\lambda n}{T},\ \frac{\lambda}{T}q(u)\right)$.

где правое неравенство верно всегда, а левое выполняется пока

$$\inf_t q(u+t) > n - 2\delta\sqrt{T}.$$

(Это можно сделать, например, с помощью введения новых искусственных линий обслуживания или выбрасывания старых.)

В области $\{\zeta(u) > D-\delta\}$ имеем

$$\left\{\inf_{t\le\theta}\left(e_{u,t} - \Pi^+(t)\right) > -\delta\sqrt{T}\right\} \subset \left\{\inf_{t\le\theta} q_{u,t} > -\delta\sqrt{T}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\inf_{t\le\theta} q(u+t) > n - 2\delta\sqrt{T}\right\},$$

$$\left\{\sup_{t\le\theta}|q_{u,t}| > \delta\sqrt{T}\right\} \subset \left\{\inf_{t\le\theta}\left(e_{u,t} - \Pi^+(t)\right) < -\delta\sqrt{T}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\sup_{t\le\theta}\left(e_{u,t} - \Pi^-(t)\right) > \delta\sqrt{T}\right\}.$$

Поэтому в области $\Omega^e_{u,\theta} \cap \{N \geqslant \zeta(u) > D-\delta\}$ мы аналогично предыдущему получаем

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{t\le\theta}|q_{u,t}| > \delta\sqrt{T}\right) < \frac{\varepsilon\theta}{T}.$$

Отсюда, как и прежде, находим

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^2_{u,\theta};\ \sup_{t\le\theta}|q_{u,t}| > \delta\sqrt{T}\right) < \varepsilon\theta, \tag{18}$$

что влечет за собой, в частности, выполнение условия типа IV.

Далее, мы имеем при $\omega \in \Omega^e_{u,\theta} \cap \{N \geqslant \zeta(u) > D-\delta\}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta} \geqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(e_{u,\theta} - \Pi^+(\theta)\right) = -\frac{\lambda D\theta}{\sqrt{T}} - \frac{2\lambda\delta\theta}{\sqrt{T}} + \frac{r_1\theta}{\sqrt{T}},$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta} \leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(e_{u,\theta} - \Pi^-(\theta);\ \sup_{t\le\theta}|q_{u,t}| < \delta\sqrt{T}\right) +$$

$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\theta};\ \sup_{t\le\theta}|q_{u,t}| > \delta\sqrt{T}\right).$$

Последнее слагаемое здесь в силу (18) оценивается значением $\frac{\varepsilon\theta}{\delta\sqrt{T}}$. Оценивая аналогично $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(e_{u,\theta} - \Pi^-(\theta);\ \sup_{t\le\theta}|q_{u,t}| \geqslant \delta\sqrt{T}\right)$ и выбирая $\varepsilon < \delta^2$, мы получим

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta} \leqslant -\frac{\lambda D\theta}{\sqrt{T}} + \frac{4\lambda\delta\theta}{\sqrt{T}}.$$

Поскольку в полученных неравенствах для $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta}$ число δ произвольно, то, сравнивая эти неравенства с полученными ранее асимптотическими представлениями $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta}$ в областях $\{\zeta(u) > D+\delta\}$ и $\{\zeta(u) < D-\delta\}$, мы можем заключить, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta} = \frac{\lambda\theta}{\sqrt{T}} \max(-\zeta(u), -D) + \frac{r_1\theta}{\sqrt{T}}, \quad |r_1| < \varepsilon.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что в соответствующей области

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta}^2 = \theta(b_{ee} + a_e) + r_2\theta, \quad |r_2| < \varepsilon.$$

(Это следует, например, из равенства $q_{u,\theta} = e_{u,\theta} - s_{u,\theta} = e_{u,\theta} - \Pi(\theta) + p$, где легко устанавливается, что $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} p^2 < \varepsilon\theta$.)

Нам остается лишь воспользоваться теоремой 1 § 3 *). ◁

В заключение этого параграфа еще раз отметим, что экспоненциальный характер времени обслуживания существен для сходимости к марковским процессам диффузии. Для неэкспоненциальных распределений такая сходимость не будет иметь места (см. теоремы главы II).

§ 5. Независимый входной поток и стохастическое управление отказами

В этом параграфе мы выясним, во что превращаются условия теорем 1—6 § 3, когда входной поток $e(u)$ независим и вместе с процессом обслуживания $s(u)$ удовлетворяет условиям этих теорем, а процесс отказов стохастически зависит от длины очереди (определение см. в § 1). В предыдущем параграфе был в «явной форме» известен процесс $s(u)$; в этом параграфе явно задан процесс отказов $r(u)$.

---

*) В доказательстве теоремы 3 не обязательно было оценивать моменты $q_{u,\theta}$ в области $|\zeta(u) - D| \leqslant \delta$. Если следовать пути, отмеченному в замечании в конце § 9 гл. I, то достаточно было бы в области $\Omega_{u,\theta} \cap \{|\zeta(u) - D| \leqslant \delta\}$ оценить вероятность выхода из окрестности точки D, проверив в точке D условия отражения PRVI.

Отметим прежде всего, что, поскольку для независимого входного потока функция

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,\theta} = \mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)} e_{u,\theta}$$

$\mathfrak{S}(u)$-измерима, то она может зависеть от $q(u)$, если только $q(u)$ есть детерминированный функционал от траектории $e(t)$ на $[0, u]$. Следовательно, если процесс $s(u) + r(u)$ не является детерминированным функционалом от $e(t)$, $0 \leqslant t \leqslant u$ (или, что почти то же, если σ-алгебры $\mathfrak{M}(u)$ и $\mathfrak{S}(u)$ не совпадают), то $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,\theta}$ не может при фиксированной $\mathfrak{S}(u)$ зависеть от $q(u)$. Это означает, в частности, что при этих условиях коэффициент $a_e(z)$ (или $\alpha_e(z)$ в теоремах 1—3 § 3) в условии I с необходимостью постоянен:

$$a_e(z) = a_e = \mathrm{const} \qquad (\alpha_e(z) = \alpha_e = \mathrm{const}).$$

Такое же заключение, очевидно, справедливо относительно

$$b_{ee}(z) = b_{ee} = \mathrm{const} \qquad (\beta_{ee}(z) = \beta_{ee} = \mathrm{const}).$$

Итак, рассмотрим систему с независимым входом, у которой процесс отказов $r(u)$ стохастически зависит от $q(u)$. Функция $1 - p(z)$ вероятности отказов предполагается известной.

Чтобы избежать здесь длительных рассмотрений, мы ограничимся лишь случаем «грубой» зависимости вероятности отказом от длины очереди. Более общие теоремы (типа теорем 1—3 § 3) о системах, у которых стохастическая зависимость $r(u)$ от $q(u)$ «более чувствительна» к отклонениям $q(u)$, могут быть получены совершенно аналогично, и читатель без труда восстановит их доказательства и формулировки.

Предположим сначала, что для «точки равновесия» Q (см. § 2), определяемой как решение уравнения

$$A(Q) = a_e p(Q) - a_s(Q) = 0,$$

выполняется строгое неравенство $Q > 0$. Пусть, как и прежде,

$$Q(u) = \frac{q(u)}{T}, \qquad \Gamma_u^N = \left\{ |Q(u) - Q| < \frac{N}{\sqrt{T}} \right\}.$$

Теорема 1. 1. *Пусть каждый из процессов* $e(u)$ *и* $s(u)$ *удовлетворяет в области* $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$ *условиям* I—III *и* V *теоремы* 4 § 3.

2. *В области* $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$ *«приведенный входной процесс»* $e^*(u)=e(u)-r(u)$ *и процесс* $s(u)$ *обладают свойством* *)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e^*_{u,\theta}-\theta a_e p(Q(u)))(s_{u,\theta}-\theta a_s(Q(u)))=r_{e^*,s}\theta,$$
$$|r_{e^*,s}|<\varepsilon. \qquad (1)$$

3. *Выполнено условие однородности (ср. с условием* V *теоремы* 1 § 4)

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(\Omega(u)\overline{\Omega}(u+\theta))<\frac{\varepsilon\theta}{T},$$

где

$$\Omega(u)=$$
$$=\bigcap_{t\leqslant u}\Omega_{t,\theta}\{e(t)-e(t-0)<\delta\sqrt{T}\}\{s(t)-s(t-0)<\delta\sqrt{T}\}$$

(эти множества можно с самого начала рассматривать в качестве $\Omega_{u,\theta}$*).*

Тогда, если функция $p(z)$ *удовлетворяет условию Липшица, то приращения* $e^*_{u,\theta}=e_{u,\theta}-r_{u,\theta}$ *наряду с* $e_{u,\theta}$ *и* $s_{u,\theta}$ *также удовлетворяют условиям* I—III *и* V *(теоремы* 4 § 3*), в которых следует положить*

$$a_{e^*}(z)=a_e p(z) \qquad (=a_e-a_r(z)), \qquad (2)$$
$$b_{e^*e^*}(z)=b_{ee}p^2(z)+a_e p(z)(1-p(z))$$
$$(=b_{ee}-2b_{er}(z)-b_{rr}(z)).$$

Если функция $A(z)=a_e p(z)-a_s(z)$ *непрерывно дифференцируема в точке* Q, *а функция* $B(z)=b_{e^*e^*}(z)+b_{ss}(z)>0$ *непрерывна, то справедливо утверждение теоремы* 4 § 3.

---

*) Здесь в правой части (1) мы могли бы поставить также $\theta b_{e^*,s}(Q(u))+r_{e^*,s}\theta$ при $b_{e^*,s}\neq 0$. Доказательство теоремы и ее утверждение от этого не изменились бы (надо лишь в $B(z)$ добавить $-2b_{e^*,s}(z)$). Но поскольку во всех реальных задачах такого типа $b_{e^*,s}=0$, то мы ограничились для простоты лишь этим частным случаем.

По-видимому, (1) может быть получено как следствие равенства

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-a_e\theta)(s_{u,\theta}-a_s(Q(u))\theta)=r_{es}\theta, \quad |r_{es}|<\varepsilon.$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сделаем одно замечание. Функция $p(z)$ входит в описание процесса обслуживания $S(u)$ лишь через компоненту $r(u)$ и играет роль параметра, который при «одних и тех же» компонентах $e(u)$ и $s(u)$ может быть различным. Во всяком случае описание нужных нам свойств I—III процессов $e(u)$ и $s(u)$ с функцией p никак не связано, так же как и правая часть в (1). В этих условиях естественно предполагать (и мы в какой-то мере этим предположением будем пользоваться), что условия 1—3 теоремы 1 выполнены при различных $p(z)$, скажем, из класса функций, равномерно удовлетворяющих условию Липшица. Такое предположение (по крайней мере в той форме, в какой оно используется в доказательстве) не является ограничением общности и введено нами ради естественности и сокращения выкладок.

Доказательство. Последнее утверждение теоремы будет непосредственно вытекать из теоремы 4 § 3, если будут доказаны требуемые свойства e^*. Поэтому наша задача будет состоять в доказательстве равенств

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e^*_{u,\theta} = \theta a_e p(Q(u)) + r_{e^*} \frac{\theta}{\sqrt{T}},$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e^*_{u,\theta} - \theta a_e p(Q(u)))^2 =$$
$$= \theta \left[b_{ee} p^2(Q(u)) + a_e p(Q(u))(1 - p(Q(u))) \right] + r_{e^*e^*}\theta$$
$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \left[(e^*_{u,\theta} - \theta a_e p(Q(u)))^2;\ |e^*_{u,\theta} - \theta a_e p(Q(u))| > \delta\sqrt{T} \right] < \varepsilon\theta,$$
$$|r_{e^*}| < \varepsilon, \quad |r_{e^*e^*}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Относительно функции $p(z)$ мы можем, не ограничивая общности, считать, что $p(z)$ сохраняет постоянные значения вне $\overline{N}/\sqrt{T}$ — окрестности точки Q: $p(z) = p\left(Q \pm \frac{\overline{N}}{\sqrt{T}}\right)$ при $z \gtrless Q \pm \frac{\overline{N}}{\sqrt{T}}$, где $\overline{N}$ есть некоторая растущая последовательность, которую мы выберем позже. Это предположение не есть ограничение общности, поскольку вероятность того, что $Q(u)$ хоть раз достигнет границ этой области, будет, как потом окажется, сходиться к нулю. Положим, как и в предыдущем параграфе,

$$\bar{q}(u) = QT + \min\left[\max\left(q(u) - QT, -\overline{N}\sqrt{T}\right), \overline{N}\sqrt{T}\right].$$

Имеем

$$e^*_{u,\theta} = \sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} \delta_j, \tag{4}$$

где $\delta_j = 0$, если вызов с номером j (отсчет ведется от момента u) получит отказ и $\delta_j = 1$ в противном случае. Пусть $u + \mu_i$ — момент появления j-го вызова. Тогда в силу определения стохастической зависимости $r(u)$ от очереди (см. § 1, там же см. определение σ-алгебры $\mathfrak{M}^*(\mu_i)$)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e^*_{u,\theta} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_1)} \left(\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} \delta_j \right) (I(\mu_1 \leqslant \theta) + I(\mu_1 > \theta)) =$$

$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_1)} \delta_1 I(\mu_1 \leqslant \theta) + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_2)} I(\mu_1 \leqslant \theta) \sum_{j=2}^{e_{u,\theta}} \delta_j =$$

$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} I(\mu_1 \leqslant \theta)\, p(Q(u + \mu_1 - 0)) +$$

$$+ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} I(\mu_2 \leqslant \theta)\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_2)} \delta_2 + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_3)} I(\mu_2 \leqslant \theta) \sum_{j=3}^{e_{u,\theta}} \delta_j = \ldots$$

$$\ldots = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \sum_{j=1}^{\infty} I(\mu_j \leqslant \theta)\, p(Q(u + \mu_j - 0)) =$$

$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} p(Q(u + \mu_j - 0)).$$

Далее,

$$|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e^*_{u,\theta} - a_e p(Q(u))\,\theta| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} [p(Q(u + \mu_j - 0)) - p(Q(u))] \right| +$$

$$+ p(Q(u))\, |\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,\theta} - a_e \theta|.$$

Если L — постоянная условия Липшица для функции p, то первая сумма в этом неравенстве не превосходит $\left(\overline{Q}(u) = \frac{\bar{q}(u)}{T}\right)$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} L \sup_{i \leqslant e_{u,\theta}} |\overline{Q}(u + \mu_i - 0) - \overline{Q}(u)|\, e_{u,\theta} \leqslant$$

$$\leqslant L \sqrt{\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (e_{u,\theta})^2\, \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \sup_{v \leqslant \theta} |\overline{Q}(u + v) - \overline{Q}(u)|^2}.$$

Мы видим, таким образом, что в соответствующей области

$$|\,\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}e^{*}_{u,\theta}-a_e p(Q(u))\,\theta\,|\leqslant\frac{\varepsilon\theta}{\sqrt{T}}+\frac{c\theta}{T}\sqrt{\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sup_{v\leqslant\theta}(\bar q_{u,v})^2},$$

где $\overline{Q}(u)=\frac{\bar q(u)}{T}$, $\bar q_{u,v}=\bar q(u+v)-\bar q(u)$. Если допустить, что в нужной нам области

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sup_{v\leqslant\theta}(\bar q_{u,v})^2<\varepsilon T, \tag{5}$$

то первое из соотношений (3) будет доказано.

Далее, положим для краткости

$$p_l=p(Q(u+\mu_l-0)),\quad p_0=p(Q(u)).$$

Тогда

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e^{*}_{u,\theta}-a_e p(Q(u))\,\theta)^2=$$

$$=\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}(\delta_j-p_j)+\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}(p_j-p_0)+p_0(e_{u,\theta}-a_e\theta)\right)^2.$$

Здесь аналогично предыдущему находим

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}(\delta_j-p_j)^2=\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}\mathrm{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_j)}(\delta_j-p_j)^2=$$

$$=\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}p_j(1-p_j);$$

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{l<j}^{e_{u,\theta}}(\delta_l-p_l)(\delta_j-p_j)=$$

$$=\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{l<j}^{e_{u,\theta}}\mathrm{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_j)}(\delta_l-p_l)(\delta_j-p_j)=0;$$

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-a_e\theta)\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}(\delta_j-p_j)=$$

$$=\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-a_e\theta)\,\mathrm{M}_{(\mathfrak{M}(u),\,\mathfrak{C}(u+\theta))}\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}(\delta_j-p_j)=$$

$$=\mathrm{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-a_e\theta)\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}\mathrm{M}_{(\mathfrak{M}(u),\,\mathfrak{C}(u+\theta))}\mathrm{M}_{(\mathfrak{M}^*(\mu_j),\,\mathfrak{C}(u+\theta))}(\delta_j-p_j).$$

Так как $\mathfrak{C}(\mu_i)\subset\mathfrak{M}^*(\mu_i)\subset\mathfrak{M}(\mu_i)$, то в силу строгой независимости входа (см. (3) § 1 δ_j-p_j измеримы относительно $\mathfrak{M}(\mu_j)$)

$$\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}^*(\mu_j),\ \mathfrak{S}(u+\theta))}(\delta_j - p_j) = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_j)}(\delta_j - p_j) = 0.$$

Здесь мы использовали теорему § 1 о том, что независимость входа влечет его строгую независимость.

В результате получаем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e^*_{u,\theta} - a_e p(Q(u))\theta)^2 =$$

$$= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[\sum_{i=1}^{e_{u,\theta}} p_i(1-p_i) + p_0^2(e_{u,\theta} - a_e\theta)^2 + \sum_{i=1}^{e_{u,\theta}}(p_i - p_0)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}}(\delta_j - p_j)\sum_{i=1}^{e_{u,\theta}}(p_i - p_0) + 2p_0(e_{u,\theta} - a_e\theta)\sum_{i=1}^{e_{u,\theta}}(p_i - p_0)\right].$$

Так как при $\bar{N}^2 = o(T/\theta)$

$$\left|\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{i=1}^{e_{u,\theta}}(p_i(1-p_i) - p_0(1-p_0))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{T}\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} e_{u,\theta}\sup_{v\leqslant\theta}|\bar{q}_{u,v}| \leqslant \frac{c\theta\bar{N}}{\sqrt{T}} < \varepsilon\theta,$$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\sum_{i=1}^{e_{u,\theta}}(p_i - p_0)^2 \leqslant \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\frac{L^2}{T^2}e^2_{u,\theta}\sup_{v\leqslant\theta}|\bar{q}_{u,v}|^2 \leqslant \frac{c\theta^2\bar{N}^2}{T} \leqslant \varepsilon\theta,$$

то мы получим на $\Omega_{u,\theta}\cap\Gamma_u^N$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e^*_{u,\theta} - a_e p(Q(u))\theta)^2 =$$

$$= a_e\theta p_0(1-p_0) + p_0^2 b_{ee}\theta + r_{e^*}(\omega),\quad |r_{e^*}| < \varepsilon.$$

Это означает, очевидно, выполнение второго равенства в (3), а также равенства

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q^2_{u,\theta} = \theta B(Q(u)) + r_q\theta,\quad |r_q| < \varepsilon$$

(здесь мы использовали соотношение (1)).

Воспользуемся теперь леммой 3 § 3, в силу которой в наших условиях

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{t\leqslant\theta} q^2_{u,t};\ \Omega(u+\theta)\right) \leqslant N_1\theta$$

при $\omega\in\Omega(u)\cap\Gamma_u^{N-1}$ и при достаточно большом N_1.

Отсюда находим, что при $\omega \in \Omega(u)\Gamma_u^{N-1}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \sup_{t\leqslant\theta} \bar{q}^2_{u,t} \leqslant$$

$$\leqslant \bar{N}^2 T \frac{\varepsilon\theta}{T} + \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} \left(\sup_{t\leqslant\theta} \bar{q}^2_{u,t};\ \Omega(u+\theta)\right) \leqslant \bar{N}^2\varepsilon\theta + N_1\theta \leqslant \varepsilon T.$$

Это доказывает неравенство (5), а вместе с ним и первое равенство в (3).

Нам осталось проверить условие типа III, т. е. оценить

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[(e^*_{u,\theta} - \theta a_e p(Q(u)))^2;\ |e^*_{u,\theta} - \theta a_e p(Q(u))| > \delta\sqrt{T}\right].$$

В силу (4)

$$e^*_{u,\theta} = \sum_{j=1}^{a_e\theta} \delta_j + \left(\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} \delta_j - \sum_{j=1}^{a_e\theta} \delta_j\right).$$

Нам достаточно убедиться, что каждое из двух слагаемых в правой части этого равенства удовлетворяет условию III (ср., например, с доказательством теоремы 1 § 3). Но для второго слагаемого это очевидно, поскольку оно не превосходит по абсолютной величине $|e_{u,\theta} - \theta a_e|$. В первом слагаемом в силу свойств функции p можно записать

$$\sum_{j=1}^{a_e\theta} \delta_j^- < \sum_{j=1}^{a_e\theta} \delta_j < \sum_{j=1}^{a_e\theta} \delta_j^+, \tag{6}$$

где $\delta_j^\pm$ при фиксированной $\mathfrak{M}(u)$ независимы при разных j,

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(\delta_j^\pm = 1) = p^\pm = p_0 \pm L\frac{\bar{N}+N}{\sqrt{T}}$$

(соотношение (6) предполагает задание δ_j, $\delta_j^\pm$ на одном вероятностном пространстве. Это сделать нетрудно. Но можно этого и не предполагать, считая неравенства (6) выполненными «по распределению»).

Поэтому для уклонений первого слагаемого будем иметь

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sum_{j=1}^{a_e\theta}\delta_j - \theta a_e p_0 > z\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sum_{j=1}^{a_e\theta}(\delta_j^+ - p^+) + a_e\theta\,\frac{L(\overline{N}+N)}{\sqrt{T}} > z\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sum_{j=1}^{a_e\theta}(\delta_j^+ - p^+) > z - \sqrt{\theta}\right)$$

при достаточно большом T. Но, как хорошо известно из свойств схемы Бернулли, полученная вероятность не превосходит

$$e^{-2\frac{(z-\sqrt{\theta})^2}{a_e\theta}}.$$

Аналогичное неравенство легко получить для отрицательных уклонений z. Из этих неравенств вытекает, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[\left(\sum_{j=1}^{a_e\theta}\delta_j - \theta a_e p_0\right)^2;\ \left|\sum_{j=1}^{a_e\theta}\delta_j - \theta a_e p_0\right| > k\sqrt{\theta}\right] < \varepsilon\theta$$

при достаточно больших k и что, следовательно, условие типа III выполнено.

Теорема для «подправленной» функции p доказана. Но в силу этой теоремы вероятность того, что траектория $Q(u) - Q$ хоть раз достигнет границ $\pm\frac{N}{\sqrt{T}}$, где начинается «подправление» p, сходится к 0. Поэтому теорема доказана и для исходной функции p. ◁

В случае $Q = 0$ утверждение теоремы о сходимости к процессу диффузии с отражением отличается от предыдущей теоремы в той же мере, в какой в § 3 теорема 5 отличается от теоремы 4. Именно, справедлива следующая теорема, доказательство которой читатель без труда может получить самостоятельно, сравнивая доказательства теоремы 1 и теорем 4, 5 § 3.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I—III *теоремы* 1, *при этом условия* I, II *справедливы лишь в области* $\left\{\zeta(u)=\frac{q(u)}{\sqrt{T}}\geqslant\varepsilon^*\right\}$ *при любом фиксированном* $\varepsilon^*>0$.

Пусть, далее, выполнено условие отражения (см., например, условие IV *теоремы* 2 § 3). *И пусть, кроме того, функции* a_e, $p(z)$, $a_s(z)$, $b_{ss}(z)$ *(при* $Q=0$ *эти функции естественно считать зависящими также от* T) *таковы, что для* $A(z)=a_e p(z)-e_s(z)$ *и* $B(z)=b_{e^*e^*}(z)$ (*см.* (2)) *существуют*

$$\lim_{T\to\infty}A(0)\sqrt{T}=A_0,\quad \lim_{T\to\infty}A'(0)=A_0',\quad \lim_{T\to\infty}B(0)=B_0>0,$$

и функции $A'(x)$ *и* $B(x)$ *равностепенно непрерывны справа в точке* $x=0$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 5 § 3.

Рассмотрим теперь важный в приложениях случай, когда функция $p(z)$ имеет вблизи точки Q разрыв. Пусть, например, $p_1(z)$ и $p_2(z)$ — две дифференцируемые функции,

$$p_2(Q)<p_1(Q)-\alpha,\quad \alpha>0,$$

а функция $p(z)=p_T(z)$ определяется с помощью равенства

$$p(z)=\begin{cases}p_1(z), & z\leqslant Q+\dfrac{R}{\sqrt{T}},\\ p_2(z), & z>Q+\dfrac{R}{\sqrt{T}}.\end{cases}\tag{7}$$

К системам с такой функцией p относятся, очевидно, системы с отказами при $p_1=1$, $p_2=0$. Как и для систем с отказами, нормированные процессы $q(u)$ в системах, рассматриваемых в этом параграфе и имеющих функции $p(z)$ вида (7), будут сходиться к процессам диффузии с отражением от верхней границы R.

Мы рассмотрим здесь случай, когда $p_2(u)=0$, т. е. когда вызовы, заставшие очередь $q>QT+R\sqrt{T}$, получают отказ с вероятностью 1. Общий случай (7) мы предоставляем читателю*).

Итак, пусть

$$p(u)=\begin{cases} p_1(u), & u\leqslant Q+\dfrac{R}{\sqrt{T}},\\ 0, & u>Q+\dfrac{R}{\sqrt{T}}.\end{cases} \tag{8}$$

Теорема 3. *Предположим, что система удовлетворяет условиям* I—III *теоремы* 1 *как при функции отказов* (8), *так и при функции* $p(u)\equiv p_1(u)$. *Тогда, если* $p_1'(u)$ *непрерывна в точке* Q *и выполнено* (8), *то процесс* $\dfrac{q(tT)-QT}{\sqrt{T}}$ *будет C-сходиться к процессу диффузии с коэффициентами*

$$zA'(Q)=z(a_ep_1(Q)-a_s(Q))',$$
$$B(Q)=b_{ee}p_1^2(Q)+a_ep_1(Q)(1-p_1(Q))+b_{ss}(Q)$$

и с отражением от верхней границы R.

Из замечаний, сделанных в сноске, можно заключить, что такое же утверждение будет иметь место и в случае (7).

Аналогично теореме 3 формулируется теорема о сходимости к диффузии с двумя отражающими границами (0 и R) в том случае, когда мы находимся в условиях теоремы 2 и выполнено (8).

---

*) Тут возможны разные подходы. Один из них состоит в выборе гладкой мажоранты для функции $p(u)$ с помощью подобранной нужным образом функции вида $p_1(Q)+\dfrac{1}{\sqrt{T}}f^*((u-Q)\sqrt{T})$, где $f(z)$ не зависит от T и есть достаточно гладкая убывающая при $z>R$ функция. Для систем с такой функцией $p(u)$ нужны будут, разумеется, аналоги (или обобщения) теоремы 1 на случай «тонкой» зависимости управления от процесса $\zeta(u)=\dfrac{q(u)-QT}{\sqrt{T}}$ (ср. с теоремами 1—3 § 3). Как мы уже отмечали, такие теоремы получаются, если просто повторить в новых условиях доказательство теоремы 1.

Кроме того, при таком подходе нужны также теоремы о сходимости процессов неограниченной диффузии с сильным отрицательным сносом в области $z>R$ (скажем, с коэффициентом сноса $a_N(z)<N(z-R)$ и $N\to\infty$) к процессу диффузии с отражением от границы $z=R$. Такого рода теоремы можно получить из теоремы 1 § 1 гл. I.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим другой процесс обслуживания $S^1(u)$, который получится, если в качестве $p(u)$ взять гладкую функцию $p_1(u)$ $(p(u) \equiv p_1(u))$. Из теоремы 1 следует тогда, что процесс $q^1(u)$, соответствующий $S^1(u)$, удовлетворяет условиям теоремы 4 § 3. Значит, в силу следствия 1 леммы 2 § 3 на $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u^{N-1}$ будет выполняться

$$\begin{gathered} \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sup_{s \leqslant \theta} |q^1_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right) < \frac{\varepsilon\theta}{T}, \\ \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left((q^1_{u,\theta})^2;\ \sup_{s \leqslant \theta} |q^1_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right) < \varepsilon\theta. \end{gathered} \tag{9}$$

Но отсюда сразу следует, что условиям I—III будут удовлетворять наряду с $q^1_{u,\theta}$ и приращения $q_{u,\theta}$ исходного процесса, если только $q(u) < QT + (R - \delta)\sqrt{T}$. Установить это нетрудно с помощью стандартных приемов, которые уже не раз нами использовались: будем считать процесс $q(u)$ «срезанным», так что $\frac{q(t) - TQ}{\sqrt{T}}$ не превосходит некоторого высокого уровня $\bar{N}$, и заметим, что в области $\{q(u) < QT + (R - \delta)\sqrt{T}\}$ выполняется

$$\left\{\sup_{s \leqslant \theta} |q^1_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right\} = \left\{\sup_{s \leqslant \theta} |q_{u,s}| > \delta\sqrt{T}\right\}.$$

Отсюда и из (9) следует тогда, что

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^2_{u,\theta};\ |q_{u,\theta}| > \delta\sqrt{T}\right) \leqslant \bar{N}^2 T \frac{\varepsilon\theta}{T} = \varepsilon_1\theta \text{ при } \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\bar{N}^2},$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q^2_{u,\theta} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left((q^1_{u,\theta})^2;\ \left|\sup_{s \leqslant \theta} q_{u,s}\right| < \delta\sqrt{T}\right) + \varepsilon_1\theta = \\ = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(q^1_{u,\theta})^2 + \varepsilon_2\theta. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается нужное соотношение для первых моментов $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} q_{u,\theta}$. Таким образом, $q_{u,\theta}$ удовлетворяет в области $\{\zeta(u) < R - \delta\}$ условиям I—III с теми же коэффициентами, что и $q^1_{u,\theta}$.

Чтобы доказать утверждение теоремы, нам осталось проверить условие отражения в теореме 1 § 9. Это можно сделать, используя опять сравнение $q_{u,t}$ с некоторым другим процессом.

Положим $q^+_{u,t} = e^+_{u,t} - s_{u,t}$, где $e^+_{u,t} = \sum_{j=1}^{e_{u,t}} \delta^+_j$, δ^+_j при фиксированной $\mathfrak{M}(u)$ независимы,

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}(\delta^+_j = 1) = p^+ = p_1(Q) + L\frac{\delta}{\sqrt{T}} \geqslant p_1(Q(u))$$

при

$$|Q(u) - Q| < \frac{\delta}{\sqrt{T}}.$$

Случайные величины δ^+_j можно определить на одном вероятностном пространстве с величинами δ_j, для которых

$$\sum_{j=1}^{e_{u,t}} \delta_j = \overset{\bullet}{e}_{u,t}$$

(например, можно считать, что $\delta_j = \delta^+_j - \delta'_j$, где $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(\mu_j)}(\delta'_j = 0/\delta^+_j = 1) = p_1(Q(u))(p^+)^{-1}$,

$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}^*(\mu_j)}(\delta'_j = 1/\delta^+_j = 1) =$

$$= \frac{L\dfrac{\delta}{\sqrt{T}} + p_1(Q) - p_1(Q(u))}{p^+} < \frac{2L\delta}{p^+\sqrt{T}};$$

определение $\mathfrak{M}^*(\mu_j)$ см. в § 1).

Тогда, очевидно, $\delta_j \leqslant \delta^+_j$, $q_{u,t} \leqslant q^+_{u,t}$. В то же время для процесса $q^+_{u,t}$ в области $\{\zeta(u) > R - \delta\}$ выполняется

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\{q^+_{u,\delta^2T} < \delta\sqrt{T}\} \geqslant \gamma > 0. \qquad (10)$$

Отсюда будет следовать требуемое условие отражения для $q(u)$. Таким образом, нам нужно доказать (10). Это соотношение следует из сходимости процесса $q^+_{u,t}$, $0 \leqslant t \leqslant \delta^2 T$, после соответствующей нормировки (деления на $\delta\sqrt{T}$) к винеровскому процессу, поскольку $q^+_{u,t}$ удовлетворяет условиям I—III с постоянными коэффициентами.

Проверка этих условий не вызывает затруднений (им удовлетворяют $e^+_{u,\theta}$ и $s_{u,\theta}$). Среди них может нуждаться в пояснениях, пожалуй, лишь вычисление смешанного момента

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(s_{u,\theta} - a_s(Q)\,\theta\right)\left(e^{+}_{u,\theta} - a_e p^{+}\theta\right). \tag{11}$$

Но здесь

$$e^{+}_{u,\theta} - a_e p^{+}\theta = \left(e^{*}_{u,\theta} - a_e p_1(Q)\,\theta\right) + \left(\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} \delta'_j - a_e\theta\frac{L\delta}{\sqrt{T}}\right).$$

Следовательно, по условию теоремы и по неравенству Коши — Буняковского (11) не превосходит

$$\varepsilon\theta + \left[\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(s_{u,\theta} - a_s(Q)\,\theta\right)^2 \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} \delta'_j - a_e\theta\frac{L\delta}{\sqrt{T}}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Так как $\mathsf{P}_{\mathfrak{M}^*(\mu_j)}(\delta'_j = 1) \leqslant \frac{2L\delta}{\sqrt{T}}$, то, пользуясь теми же рассуждениями, которые мы использовали при оценке $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(e^{*}_{u,\theta} - a_e p(Q(u))\,\theta\right)^2$ в теореме 1, получаем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\sum_{j=1}^{e_{u,\theta}} \delta'_j - a_e\theta\frac{L\delta}{\sqrt{T}}\right)^2 < \varepsilon\theta.$$

то означает, что и (11) не превосходит $\varepsilon\theta$. Теорема оказана. ◀

Мы могли бы теперь получить теорему 2 предыдуего параграфа (о системах с отказами и с $n = \frac{Ta_e}{\lambda} + D\sqrt{T}$ экспоненциальными каналами обслуживания) качестве следствия теоремы 3.

§ 6. Свойства систем с независимым выходом. Нагруженные системы

Мы будем предполагать, что выполнены условия одюй из теорем § 3 вместе с условием однородности на $_{u,\theta}$ (см. (23) § 3). Пусть для определенности это будут условия теоремы 1. Предположим, кроме того, что ассматриваемые системы обладают *независимым выодом* (определение см. в § 1) в области $q \geqslant d$, где $\leqslant QT - N\sqrt{T}$ при $Q > 0$, любом фиксированном > 0 и всех достаточно больших T. Мы покажем тогда, что в этих условиях можно считать

$$\alpha_s(z) = \mathrm{const}, \quad \beta_{ss}(z) = \mathrm{const}, \quad \beta_{e^*s}(z) = 0.$$

Точно так же будет обстоять дело и в условиях других теорем § 3.

Обратимся к определению независимости выхода и возьмем в качестве Γ_u множество Γ_u^{N-1}, а в качестве V_{e^*} и V_s множества

$$\begin{aligned} V_{e^*} &= \{\sup_{v\leqslant\theta} |e^*_{u,v} - va_{e^*}(Q(u))| \leqslant \delta\sqrt{T}\} \in \mathfrak{E}^*(u+\theta), \\ V_s &= \{\sup_{v\leqslant\theta} |s_{u,v} - va_s(Q(u))| \leqslant \delta\sqrt{T}\} \in \mathfrak{S}(u+\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

Для таких множеств Γ_u, V_{e^*}, V_s будет выполнено условие (7) § 1:

$$\begin{aligned} \Gamma_u V_{e^*} V_s \subset \Gamma_u^{N-1} &\{\sup_{v\leqslant\theta} |q_{u,v} - vA(Q(u))| \leqslant 2\delta\sqrt{T}\} \subset \\ &\subset \{\inf_{u\leqslant v\leqslant u+\theta} q(v) > QT - (N-1)\sqrt{T} - 2\delta\sqrt{T}\} \subset \\ &\subset \{\inf_{u\leqslant v\leqslant u+\theta} q(v) > QT - N\sqrt{T}\} \subset \{\inf_{u\leqslant v\leqslant u+\theta} q(v) > d\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь моменты $s_{u,\theta}$, например, $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s^2_{u,\theta}$ На множестве $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u^{N-1}$ будем иметь в силу следствия 1 леммы 2 § 3

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s^2_{u,\theta} = \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} (s^2_{u,\theta};\ V_{e^*}V_s) + \varepsilon\theta.$$

Но здесь

$$\begin{aligned} I(\Gamma_u^{N-1}) \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} &(s^2_{u,\theta};\ V_{e^*}V_s) = \\ &= \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} I(\Gamma_u V_{e^*}) \mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{E}^*(u+\theta))} (s^2_{u,\theta};\ V_s). \end{aligned} \tag{2}$$

Используя независимость выхода в форме (8) § 1 применительно к случайным величинам, мы получим что правая часть в (2) равна

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} I(\Gamma_u V_{e^*}) \mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)} (s^2_{u,\theta};\ V_s)$$

и, следовательно, на $\Omega_{u,\theta} \cap \Gamma_u^{N-1}$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s^2_{u,\theta} &= r_s\theta + \mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)} (s^2_{u,\theta};\ V_s) \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)} V_{e^*} = \\ &= r_{ss}\theta + \mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)} s^2_{u,\theta}; \quad |r_s| < \varepsilon, \quad |r_{ss}| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, главная часть $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s^2_{u,\theta}$ является $\mathfrak{S}(u)$-измеримой функцией. Если $q(u)$ (или $\zeta(u) = \frac{q(u) - QT}{\sqrt{T}}$) не измерима относительно $\mathfrak{S}(u)$ (измеримость имеет место, например, при детерминированном процессе $e^*(u)$), то это возможно лишь в том случае, когда в условии II $\beta_{ss}(z) = \beta_{s\dot{s}} = \mathrm{const}$.

Эти не совсем строгие рассуждения можно сделать точными и сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4 § 3, *за исключением, быть может, условия* II *на смешанные моменты. Мы предположим, что для каждых двух точек* z_1, z_2 *из интервала* $(-N+1, N-1)$ *найдутся* $\mu = o(1)$ *и множество* $U_s \in \mathfrak{S}(u)$ *положительной вероятности такие, что на* U_s

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{S}(u)}([z_l] V_{e^*}) > 0,$$

где

$$[z_l] = \{z_l - \mu \leqslant \zeta(u) \leqslant z_l + \mu\}\, \Omega_{u,\theta} \in \mathfrak{M}(u).$$

Тогда, если выход системы независим в области $q \geqslant d$, $d \leqslant QT - N\sqrt{T}$, *а функции* $\alpha_s(z)$ *и* $\beta_{ss}(z)$ *непрерывны, то можно считать*

$$\alpha_s(z) = \mathrm{const}, \quad \beta_{ss}(z) = \mathrm{const}, \quad \beta_{e^*s} = 0.$$

Доказательство. В силу независимости выхода

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}(s^2_{u,\theta};\ [z_l] V_{e^*} V_s) = \mathsf{P}_{\mathfrak{S}(u)}[z_l] V_{e^*} \cdot \mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}(s^2_{u,\theta};\ V_s).$$

Стало быть, на U_s отношение

$$\frac{\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}(s^2_{u,\theta};\ [z_l] V_{e^*} V_s)}{\mathsf{P}_{\mathfrak{S}(u)}[z_l] V_{e^*}} \tag{4}$$

от l не зависит.

Рассмотрим числитель в (4), т. е.

$$\begin{gathered}\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}(s^2_{u,\theta};\ [z_l] V_{e^*} V_s) = \mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)} I([z_l] V_{e^*}),\\ \mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}^*(u+\theta))}[s^2_{u,\theta} - \theta\beta_{ss}(\zeta(u));\ V_s] + \\ + \theta\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)} I([z_l] V_{e^*} V_s)\, \beta_{ss}(\zeta(u)).\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь в первом слагаемом в силу независимости знак условного математического ожидания $\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}^*(u+\theta))}$ можно заменить на $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}$ (на самом деле даже на $\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}$).

Используя затем следствие 1 леммы 2 § 3, мы получим для этого условного математического ожидания равномерную оценку $o(\theta)$. Это означает, что первое слагаемое в (5) равно

$$o(\theta)\,\mathsf{P}_{\mathfrak{S}(u)}[z_i]\,V_{e^*}.$$

Так как на множестве $[z_i]$ выполняется $1-\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}V_s \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon\theta}{T}$, то в силу непрерывности функции β_{ss} второе слагаемое в (5) будет равно

$$\theta\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}I([z_i]\,V_{e^*})\,\beta_{ss}(\zeta(u))\,V_s=$$
$$=\theta\mathsf{M}_{\mathfrak{S}(u)}I([z_i]\,V_{e^*})\,\beta_{ss}(\zeta(u))(1+o(1))=$$
$$=\theta\beta_{ss}(z_i)\,\mathsf{P}_{\mathfrak{S}(u)}[z_i]\,V_{e^*}(1+o(1)),$$

где оценка $o(1)$ равномерна по ω.

Образуем из полученных выражений сумму (5) и подставим ее в отношение (4). Тогда это отношение примет вид

$$o(\theta)+\theta\beta_{ss}(z_i), \tag{6}$$

где оценка $o(\theta)$ равномерна по ω.

Допустим теперь, что утверждение теоремы относительно β_{ss} неверно. То есть найдутся z_1, z_2 из интервала $(-N+1,\ N-1)$ и $c>0$ такие, что

$$|\beta_{ss}(z_1)-\beta_{ss}(z_2)|>c.$$

Мы получим тогда, очевидно, противоречие тому, что (4) (или (6)) не зависит от i.

Совершенно аналогично доказывается постоянство $\alpha_s(z)$.

Далее, для смешанного момента имеем на $\Omega_{u,\theta}\Gamma_u^{N-1}$ (см. опять следствие 1 леммы 2 § 3; в последующих формулах $x_{u,\theta}^0=x_{u,\theta}-\theta\alpha_x(\zeta(u))$)

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}s_{u,\theta}^0e_{u,\theta}^0=$$
$$=o(\theta)+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}e_{u,\theta}^{*0}I\left(\Gamma_u^{N-1}V_{e^*}\right)\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}^*(u+\theta))}s_{u,\theta}^0I\left(V_s\right), \tag{7}$$

где символ $\mathsf{M}_{(\mathfrak{M}(u)\,\mathfrak{S}^*(u+\theta))}$, в силу независимости выхода можно заменить на $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}$. Но на множестве $\Omega_{u,\theta}\Gamma_u^{N-1}$ это вновь полученное математическое ожидание есть равномерно $o\left(\frac{\theta}{\sqrt{T}}\right)$; подставляя это в (7), мы получим

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{M}(u)} s^0_{u,\theta} e^{*0}_{u,\theta} = o(\theta) + o\left(\frac{\theta^2}{T}\right) = o(\theta). \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Если, например, в условиях теоремы 4 функция $a_s(z)$ дифференцируема, то мы получим ту же ситуацию, что и в теореме 1 при $\alpha_x(z) = a'_s(Q)\,z$. Из независимости выхода будет следовать тогда, что

$$\alpha_x(z) = a'_s(Q) = 0.$$

Замечание 2. Так как $\zeta(u)$, как и $q(u)$, есть дискретная случайная величина, то мы можем в качестве множеств $[z_i]$ в теореме 1 брать множества, образованные одной точкой (т. е. считать $\mu = 0$). Тогда условие непрерывности α_s и β_{ss} становится ненужным. Некоторое неудобство такого подхода состоит лишь в том, что точки z_i при этом получаются «шевелящимися», т. е. зависящими от T.

Рассмотрим теперь так называемые *нагруженные системы*. Под таковыми понимают обычно системы обслуживания с очередью и с однородными входным и выходным потоками (т. е. с независимыми входом и выходом), у которых $r(t) \equiv 0$, а интенсивность входного потока близка к интенсивности выходного. На языке условий I теорем § 3 это означает, что коэффициенты α_e и α_s (или a_e и a_s; в нашем случае эти коэффициенты с необходимостью постоянны) мало отличаются друг от друга. Таким образом, чтобы применить к изучению нагруженных систем теоремы § 3, мы должны считать, что функция $A(Q) = a_e(Q) - a_s(Q)$ (см. § 2) от Q не зависит:

$$A(Q) = A \to 0$$

при $T \to \infty$.

Тот факт, что определена функция $A(Q)$, дает нам возможность рассматривать систему как систему с грубой зависимостью управления от длины очереди. Если начальное значение $q(0)$ находится в пределах $\sqrt{T}$-окрестности точки 0, то мы можем использовать теорему 5 § 3. Если же $q(0)$ сравнимо с T, то лучше применить теорему 1 § 3 (вместе с замечанием 2). При этом, естественно, предельные распределения длины очереди для нагруженных систем будут различными в зависимости от того, где располагается $q(0)$.

Ниже мы приводим два следствия теорем § 3, описывающие поведение нагруженных систем.

Пусть

$$\zeta(u)=\frac{q(u)}{\sqrt{T}}, \quad r(u)\equiv 0.$$

Теорема 2. *Рассмотрим систему с независимым выходом в области $q\geqslant d=o(\sqrt{T})$, для которой выполнены условия I—III в следующей форме: на множестве $\Omega_{u,\theta}\cap\{\varepsilon^*<\zeta(u)<N\}$ (определения $\Omega_{u,\theta}$, N, ε^* (см., например, в § 3)*

$$\text{I)}\qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}x_{u,\theta}=\theta a_x+\frac{\theta}{\sqrt{T}}r_x(\omega),$$

$$\text{II)}\qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(x_{u,\theta}-\theta a_x)^2=\theta b_{xx}+\theta r_{xx},$$

$$\text{III)}\qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left[(x_{u,\theta}-\theta a_x)^2;\ |x_{u,\theta}-\theta a_x|>\delta\sqrt{T}\right]<\varepsilon\theta$$

для любого $\delta>0$. Здесь $|r_x|<\varepsilon$, $|r_{xx}|<\varepsilon$, x принимает значения e, s, а числа a_x и b_{xx}, вообще говоря, зависят от T.

Пусть, кроме того, выполнено условие V теоремы 1 § 3 об отсутствии больших скачков и условие VI теоремы 2 § 3 о положительности вероятности отражения из области $\{\zeta\leqslant\varepsilon^*\}$.

Тогда, если

$$A\sqrt{T}=(a_e-a_s)\sqrt{T}\to A_0,\quad b_{ee}+b_{ss}\to B_0>0, \tag{8}$$

а распределение $\zeta(0)=\dfrac{q(0)}{\sqrt{T}}$ сходится к распределению p_0, то процесс $z(t)=\dfrac{q(tT)}{\sqrt{T}}$ C-ходится к диффузионному процессу $w_R(t)$ с коэффициентами (A_0, B_0) и с отражением от нулевой границы.

Если в условиях этой теоремы ограничить длину очереди значением $R\sqrt{T}$ (вызовы, заставшие такую очередь, получают отказ), то мы получим, очевидно, сходимость $\dfrac{q(tT)}{\sqrt{T}}$ к диффузионному процессу с коэффициентами (A_0, B_0) и с двумя отражающими границами 0 и R.

Теорема 3. *Рассмотрим систему с независимым выходом в области $q \geqslant d = Q_0 T - N_0\sqrt{T}$ при любом фиксированном $N_0 > 0$ и при некотором $Q_0 > 0$. Пусть, далее, условия I—III теоремы 2 выполнены в области $\Omega_{u,\theta} \cap \{|\zeta(u)| < N\}$, где $\zeta(u)$ означает*

$$\zeta(u) = \frac{q(u) - Q_0 T}{\sqrt{T}}.$$

Пусть, кроме того, выполнено условие V теоремы 1 § 3 об отсутствии больших скачков.

Тогда, если выполнено (8), а распределение $\zeta(0) = \frac{q(0) - Q_0 T}{\sqrt{T}}$ при некотором $Q_0 > 0$ сходится к распределению p_0, то процесс $z(t) = \frac{q(tT) - Q_0 T}{\sqrt{T}}$ С-сходится к процессу неограниченной диффузии с коэффициентами (A_0, B_0).

В § 3 приведены явные формулы для распределений предельных процессов, возникающих в условиях теорем 2, 3. Из этих формул явствует, что стационарное распределение для предельного процесса существует лишь в теореме 2 при $A_0 < 0$. Именно, из (16) § 3 следует, что

$$\lim_{v \to \infty} \mathbf{P}(w_R(v) > y) = e^{\frac{2A_0 y}{B_0}}. \tag{9}$$

Таким образом, при больших v и T распределение $z(v) = \frac{q(vT)}{\sqrt{T}}$ близко к (9). Так как $A = a_e - a_s$ и $T^{-1/2}$ имеют один порядок малости, то этот факт часто используется также в следующей форме: при значениях $t \gg A^{-2}$

$$\mathbf{P}\left(q(t) > \frac{y}{|A|}\right) \approx e^{-\frac{2y}{B_0}}, \quad A < 0.$$

Рассмотрим теперь примеры нагруженных систем. Наиболее наглядным и распространенным является, по-видимому, пример системы $\langle G_I, G_I, G_I, G_I \rangle$ в обозначениях [18]. Описанию этой системы посвящен пример 1 вводной части этой главы. Мы рекомендуем читателю вновь просмотреть этот пример с тем, чтобы мы могли воспользоваться присутствующими там обозначениями без дополнительных пояснений. Как мы уже отмечали, рассматриваемая система имеет независимый выход в области $q \geqslant 1$.

Входной поток $e(t)$ этой системы представляет собой обобщенный процесс восстановления. Как мы видели в § 11 гл. I, $\mathsf{M}e(t) \sim a_e(t)$ при $t \to \infty$, где $a_e = \frac{\mathsf{M}\nu^e}{\mathsf{M}\tau^e}$.

Обслуживание в системах $\langle G_l, G_l, G_l, G_l \rangle$ происходит также с помощью обобщенного процесса восстановления

$$s^0(t) = \sum_{j=1}^{\eta_s(t)} \nu_j^s$$

(точнее, с помощью «кусков» этого процесса), так что $\mathsf{M}s^0(t) \sim a_s t$ при $t \to \infty$, где $a_s = \frac{\mathsf{M}\nu^s}{\mathsf{M}\tau^s}$.

Если бы в течение времени t обслуживание не прерывалось (система оставалась занятой), то мы имели бы также $\mathsf{M}s(t) \sim a_s t$. Таким образом, в нашем случае

$$A = a_e - a_s = \frac{\mathsf{M}\nu^e}{\mathsf{M}\tau^e} - \frac{\mathsf{M}\nu^s}{\mathsf{M}\tau^s}.$$

Это равенство означает, что для применения теорем 2, 3 мы должны управляющие последовательности $\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s, \nu_j^s\}$ для наших систем рассматривать в схеме серий, т. е. зависящими от параметра T.

Итак, пусть распределения

$$\mathsf{P}(\tau_j^x < z) = F_x(z), \quad \mathsf{P}(\nu_j^x < z) = H_x(z)$$

(здесь и в дальнейшем x принимает значения e, s) зависят от T так, что

$$A = \frac{\mathsf{M}\nu^e}{\mathsf{M}\tau^e} - \frac{\mathsf{M}\nu^s}{\mathsf{M}\tau^s} \sim \frac{A_0}{\sqrt{T}}.$$

(Индекс T, указывающий на эту зависимость, мы будем опускать.)

Предположим, что выполнены следующие условия $(x = e, s)$:

$$\mathsf{M}\tau^x \geqslant c_x > 0, \tag{10}$$

$$\mathsf{D}\tau^x \geqslant c_x > 0, \quad \mathsf{M}\left[(\tau^x)^2;\ \tau^x \geqslant N\right] \leqslant \varepsilon_x(N), \tag{11}$$

$$\mathsf{M}\left[(\nu^x)^2;\ |\nu^x| \geqslant N\right] < \varepsilon_x(N), \tag{12}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\mathsf{D}\nu^x}{\mathsf{M}\tau^x} + \frac{\mathsf{D}\tau^x\,(\mathsf{M}\nu^x)^2}{(\mathsf{M}\tau^x)^3} \geqslant c_x > 0, \tag{13}$$

$$\sigma_e^2 + \sigma_s^2 \to \sigma^2 > 0, \tag{14}$$

где c_x и $\varepsilon_x(N)$ от T не зависят, $\varepsilon_x(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Ясно, что для выполнения, скажем, второго неравенства в (11) достаточно потребовать, чтобы $\sup\limits_T \mathsf{M}|\tau^x|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$ или (это более общий случай) чтобы существовала функция $\psi(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$ такая, что $\sup\limits_T \mathsf{M}\,(\tau^x)^2\,\psi(\tau^x) < \infty$.

В теореме 2 § 11 гл. I показано, что при выполнении (10)—(13) каждый из процессов $e(t)$ и $s^0(t)$ удовлетворяет условиям I—III теоремы 2 с множествами $\Omega^x_{u,\theta} = \{\chi^x(u) \leqslant g\}$, где $\chi^x(u)$ есть величина «перескока» (или «эксцесса») через уровень u в блуждании со скачками $\tau_1^x, \tau_2^x, \ldots$:

$$\chi^x(u) = t^x_{\eta_x(u)} - u, \quad \eta_x(u) = \min\{k:\ \tau_1^x + \ldots + \tau_k^x > u\}.$$

Число g можно выбрать как решение уравнения $g = \sqrt{T}\,\{\mathsf{M}\left[(\tau^x)^2;\ \tau^x > g\right]\}^{1/3}$. σ-алгебры $\mathfrak{E}(u)$ и $\mathfrak{S}(u)$ будут совпадать соответственно с σ-алгебрами, порожденными величинами $\gamma^e(u)$, $\tilde{\gamma}^s(u) = \inf\{v \geqslant 0:\ s(u - v + 0) - s(u - v - 0) > 0\}$;

$$\mathfrak{M}(u) = (\mathfrak{E}(u)\,\mathfrak{S}(u)).$$

Кроме того, там же показано, что $e(t)$ и $s^0(t)$ удовлетворяют условию об отсутствии больших скачков (условие V теоремы 1 § 3. См. формулировку теоремы 2). При этом из доказательства теоремы 2 § 11 гл. I следует, что упомянутое условие V и выбранные множества $\Omega^x_{u,\theta}$ будут обладать свойством однородности (см. (23) § 3).

Покажем теперь, что условиям I—III удовлетворяет и процесс $q(t)=e(t)-s(t)$. Под этим процессом мы, как и прежде, не ограничивая общности, можем понимать «срезанный» процесс, для которого значения большие, чем $\bar{N}\sqrt{T}$, заменяют на $\bar{N}\sqrt{T}$, где $\bar{N}\to\infty$ при $T\to\infty$. Установив для такого процесса сходимость $\frac{q(tT)}{\sqrt{T}}$ к процессу диффузии, мы получим, что траектории исходного и срезанного процессов совпадают с вероятностью, сходящейся к 1.

Рассмотрим, например, условие II для срезанного процесса $q(t)$. На множестве $\Omega_{v,\theta}\cap\{2\delta\sqrt{T}<q(u)<(N-1)\sqrt{T}\}$

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q^2_{u,\theta}=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^2_{u,\theta};\ V_eV_s\right)+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q^2_{u,\theta};\ (\overline{V_eV_s})\right)=$$
$$=\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}\left((e_{u,\theta}-s^0_{u,\theta})^2;\ V_eV_s\right)+\bar{N}^2T\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(\bar{V}_e+\bar{V}_s\right).$$

В силу следствия 1 леммы 2 § 3 это выражение равно $o(\theta)+\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-s^0_{u,\theta})^2+\bar{N}^2To\left(\frac{\theta}{T}\right)$, где оценки равномерны по ω. Отсюда в силу независимости $e_{u,\theta}$ и $s^0_{u,\theta}$ и при надлежащем выборе $\bar{N}$ получаем

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}q^2_{u,\theta}=\theta\left(\sigma_e^2+\sigma_s^2\right)+o(\theta).$$

Условия I, III проверяются совершенно аналогично.

Отметим, что здесь мы несколько уклоняемся от прямой проверки условий I—III теоремы 2, поскольку в нашем случае эти условия проще сразу проверить для процесса $q(t)$, чем для процессов $e(t)$ и $s(t)$ (трудности представляет проверка этих условий для процесса $s(t)$).

Нам остается проверить условие отражения, состоящее в том, что в области $\Omega_{u,\theta}\cap\{q(u)<\delta\sqrt{T}\}$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left(q_{u,\delta^2T}>\delta\sqrt{T}\right)>p>0.$$

Это условие, очевидно, выполнено, так как при $\theta_1=\delta^2T$ $s_{u,\theta_1}\leqslant s^0_{u,\theta_1}$, где s^0_{u,θ_1} получен из траектории $s_{u,t}$ выбрасыванием интервалов простоя (т. е. интервалов времени, когда система обслуживания не действует), так что s^0_{u,θ_1} есть приращение обобщенного процесса восстановления такого же, как $s^0(t)$. Но так как распределение $\frac{e_{u,\theta_1} - s^0_{u,\theta_1}}{\sqrt{\theta_1}}$ сходится к нормальному распределению с параметрами (A_0, σ^2), то

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\{q_{u,\theta_1} > \delta\sqrt{T}\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}_{\mathfrak{M}(u)}\left\{\frac{e_{u,\theta_1} - s^0_{u,\theta_1}}{\sqrt{\theta_1}} > 1\right\} \to 1 - \Phi\left(\frac{1 - A_0}{\sigma}\right) > 0.$$

Из всего сказанного следует, что система $\langle G_I, G_I, G_I, G_I\rangle$ в нагруженном состоянии удовлетворяет условиям теоремы 2, и, следовательно, применительно к ней справедливо утверждение этой теоремы. То есть процесс $\frac{q(tT)}{\sqrt{T}}$ будет C-сходиться к процессу диффузии с коэффициентами (A_0, σ^2) и с отражением от нулевой границы. ◀

Приведенный пример легко обобщается на *многоканальные* системы, когда входной поток $e(t)$ образован суммой конечного числа l обобщенных процессов восстановления (вообще говоря, различных) того же типа, что были рассмотрены выше, а обслуживание происходит в $m \geqslant 1$ каналах, каждый из которых также управляется своим обобщенным процессом восстановления. Такая система будет иметь независимый выход в области $q > m$. Роль параметра A_0 здесь будет играть величина

$$A_0 = \lim_{T\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{l} a_{ei} - \sum_{i=1}^{m} a_{si}\right)\sqrt{T},$$

где a_{ei} и a_{sj} представляют собой значения средних a_e и a_s, введенных ранее, соответственно для i-го входного и j-го выходного каналов. Параметром σ^2 будет предел суммы $\sum_{i=1}^{l}\sigma^2_{ei} + \sum_{j=1}^{m}\sigma^2_{sj}$ при аналогичном соглашении относительно обозначений. Здесь при выполнении условий (10)—(14) на входные и выходные каналы, относительно $q(tT)/\sqrt{T}$ будет справедливо то же утверждение, что и в одноканальном случае. Отметим, что для окончательного утверждения условие (13) является излишним (в том числе и для одноканальных систем). Достаточно требовать лишь положительность предельного суммарного значения σ^2 (см. (14)). Справедливость этого замечания читатель может проверить самостоятельно (ведь в § 11 гл. I, откуда мы заимствовали условие (13), доказывались сходимость к предельному процессу каждой из компонент $\frac{e(tT)-a_e tT}{\sqrt{T}}$ и $\frac{s(tT)-a_s tT}{\sqrt{T}}$).

Если в этих примерах очередь ограничена на уровне $D\sqrt{T}$ (например, вызовы, заставшие очередь бо́льшую, чем это значение, получают отказ), то в этом случае согласно теореме 3 мы получим сходимость к диффузионным процессам с теми же коэффициентами, но с отражением от границ 0 и D.

Мы можем получить большое количество различных других примеров систем обслуживания, удовлетворяющих приведенным выше теоремам, если в качестве входного процесса $e(t)$ и процесса $s^0(t)$, управляющего процессом обслуживания $s(t)$ ($s(t)$ отличается от $s^0(t)$ тем, что в его траектории содержат интервалы постоянства, соответствующие простоям системы), мы будем рассматривать различные процессы, приведенные нами в качестве примеров в §§ 11, 12 гл. I. В том числе входные и выходные процессы, построенные с помощью последовательностей зависимых стационарно связанных случайных величин и другие. Как показано в главе I, все эти процессы (см. § 11, 12 главы I) удовлетворяют условиям типа I—III и V теорем 1, 2 § 5 гл. I (и, следовательно, условиям того же типа в теоремах § 3).

Один из таких примеров рассмотрен более подробно в следующем параграфе.

§ 7. Числовой пример

Чтобы в какой-то мере проиллюстрировать использование полученных результатов и их эффективность для расчета реальных систем обслуживания, мы рассмотрим следующую конкретную задачу.

В некоторую систему связи через независимые целочисленные промежутки времени $\tau_1^e, \tau_2^e, \ldots$

$$\mathsf{P}\left(\tau_j^e=1\right)=\frac{1}{3}, \quad \mathsf{P}\left(\tau_j^e=k+1\right)=\frac{1}{3\cdot 2^{k-1}}, \quad k=1, 2, \ldots$$

$$\left(\mathsf{M}\tau^e=\frac{7}{3}, \quad \mathsf{M}(\tau^e)^2=7\right),$$

поступают сообщения (вызовы) группами, размеры которых равны

$$\nu_1^e = \tau_1^e + \nu_1, \quad \nu_2^e = \tau_2^e + \nu_2, \ \ldots,$$

где ν_j независимы (между собой и от $\{\tau_j^e\}$),

$$\mathsf{P}(\nu_j = -1) = \mathsf{P}(\nu_j = 0) = \mathsf{P}(\nu_j = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\left(\mathsf{M}\nu = 0, \ \mathsf{M}\nu^2 = \frac{2}{3}\right).$$

Обработка сообщений (обслуживание вызовов) ведется двумя одинаковыми устройствами (двумя каналами), при этом передача k-го сообщения занимает время $\tau_k^s = \frac{1}{2} + \tau_k$ (это есть длительность обслуживания, равная длине сообщения), где $\{\tau_k\}$ не зависит от $\{\tau_j^e\}$ и $\{\nu_j\}$ и составлена из независимых величин

$$\mathsf{P}(\tau_k > t) = e^{-3/4 t} \left(\mathsf{M}\tau^s = \frac{11}{6}, \ \mathsf{D}\tau^s = \frac{16}{9}\right).$$

Если число сообщений, накопившихся в очереди, достигнет 20, то вновь поступившие в этот момент сообщения направляются в другую систему (в данной системе получают отказ).

Очевидно, это есть система с независимым входом. Кроме того, она имеет независимый выход в области $q \geqslant 2$.

Допустим, что очередь в момент $t = 0$ равна $q(0) = 0$. Нас будут интересовать распределение $q(u)$ для значения $u = 600$, стационарное распределение $q(u)$, а также вероятность того, что $q(u)$ за интервал времени от 0 до 600 хоть раз достигнет уровня 20.

Входной поток $e(t)$ здесь равен (в обозначениях примера 1)

$$e(t) = \sum_{j=1}^{\eta_e(t)} \nu_j^e = t + \chi(t) + \sum_{j=1}^{\eta_e(t)} \nu_j, \tag{1}$$

где

$$\eta_e(t) = \min\left(k\colon \tau_1^e + \ldots + \tau_k^e > t\right),$$

$$\chi(t) = \tau_1^e + \ldots + \tau_{\eta(t)}^e - t$$

(чтобы суммирование в (1) велось до $\eta_e(t)$ (это удобнее), а не до $\eta_e(t) - 1$, мы будем считать, что первая партия вызовов поступает в систему в момент времени 0, а не τ_1^e). Как отмечалось в п. 4 § 11 гл. I, такой процесс $e(t)$ удовлетворяет всем нужным условиям теорем 2, 3 предыдущего параграфа, при этом a_e и σ_e^2 (коэффициенты при θ соответственно в выражениях для $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}e_{u,\theta}$ и $\mathsf{M}_{\mathfrak{M}(u)}(e_{u,\theta}-a_e\theta)^2$) будут равны

$$a_e=\frac{\mathsf{M}\tau^e+\mathsf{M}\nu}{\mathsf{M}\tau^e}=1,\quad \sigma_e^2=\frac{\mathsf{D}\nu}{\mathsf{M}\tau^e}+\frac{(\mathsf{M}\nu)^2\,\mathsf{D}\tau^e}{(\mathsf{M}\tau^e)^3}=\frac{\mathsf{D}\nu}{\mathsf{M}\tau^e}=\frac{2}{7}.$$

Процесс обслуживания здесь управляется двумя процессами восстановления $\eta_s^1(t)$ и $\eta_s^2(t)$, порожденными двумя независимыми последовательностями случайных величин, распределенных как $\{\tau_k^s\}$. Такого типа процессы обслуживания $s(t)$ были рассмотрены нами в конце предыдущего параграфа. Они также удовлетворяют всем условиям теорем 2, 3 § 6, при этом коэффициенты a_s и σ_s^2 будут равны

$$a_s=\frac{2}{\mathsf{M}\tau^s}=\frac{12}{11},\qquad \sigma_s^2=2\frac{\mathsf{D}\tau^s}{(\mathsf{M}\tau^s)^3}=\frac{2\cdot 16\,(6)^3}{9\cdot(11)^3}=\frac{32\cdot 24}{(11)^3}.$$

Мы получили, что в нашем случае число A равно

$$A=a_e-a_s=-\frac{1}{11}.$$

Попытаемся рассматривать нашу систему как элемент последовательности систем, у которых $A\to 0$. Длина очереди у нас ограничена значением 20. Поэтому мы должны использовать теорему о нагруженных системах типа теоремы 3 § 3 (о сходимости к диффузии с двумя границами) (см. также замечание к теореме 2 § 6). Поскольку в выборе параметра T имеется некоторый произвол, то мы можем, не ограничивая общности, считать, что вторая отражающая граница находится на уровне $R=1$. Тогда, поскольку $R\sqrt{T}=20$, то мы получаем $T=400$.

Следовательно, если воспользоваться указанными теоремами, то распределение процесса

$$z(t)=\frac{q(tT)}{\sqrt{T}}=\frac{q(400t)}{20} \tag{2}$$

будет близко (если число $T=400$ окажется «достаточно большим») к распределению диффузионного процесса $w_{RR}(t)$ с начальным значением $w_{RR}(0)=0$, с отражением от границ 0 и 1 и с коэффициентами

$$A_0 = A\cdot\sqrt{T} = -\frac{20}{11} \approx -1,82$$

и

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 + \sigma_s^2 = \frac{2}{7} + \frac{24\cdot 32}{11^3} \approx 0,867.$$

В § 3 в замечании к теореме 6 приведен явный вид переходной функции для такого типа процессов. Полагая $\alpha = \frac{A_0}{\sigma^2}$, мы получим следующее выражение для плотности $f_t(y)$ распределения $w_{RR}(t)$ $(w_{RR}(0)=0$, $R=1)$:

$$f_t(y) = \frac{2\alpha e^{2\alpha y}}{e^{2\alpha}-1} + 2\exp\left\{-\frac{\alpha^2\sigma^2 t}{2} + \alpha y\right\}\times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t\sigma^2}{2}(\pi k)^2}\cdot\frac{\pi k}{\alpha^2+(\pi k)^2}(\pi k\cos\pi k y + \alpha\sin\pi k y).$$

Интегрируя это выражение, мы придем к функции распределения

$$F_t(y) = \frac{e^{2\alpha y}-1}{e^{2\alpha}-1} +$$
$$+ 2\exp\left\{-\frac{\alpha^2\sigma^2 t}{2} + \alpha y\right\}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t\sigma^2}{2}(\pi k)^2}\cdot\frac{\pi k}{\alpha^2+(\pi k)^2}\sin\pi k y.$$

Отсюда видно, в частности, что $w_{RR}(t)$ при $t\to\infty$ имеет стационарное распределение

$$\frac{e^{2\alpha y}-1}{e^{2\alpha}-1}$$

(это есть усеченное показательное распределение) и что скорость сходимости к этому распределению является весьма высокой $\left(\text{поправочный член не превосходит } \exp\left\{-\frac{(\alpha^2+\pi^2)\sigma^2 t}{2}\right\}\right)$.

В нашем случае $\left(\alpha = \frac{A_0}{\sigma^2} \approx -2,10\right)$ это составит

$$\exp\left\{-\frac{14,3\cdot 0,867}{2}t\right\} = \exp\{-6,20t\}.$$

Следовательно, можно ожидать, что распределение $q(600)$, соответствующее значению $t=1{,}5$ (см. (2)), будет близко к стационарному.

Отметим далее, что предельное распределение призвано хорошо описать «регулярную» область переменной q, где действуют условия предельных теорем о правильном поведении моментов приращений. Поэтому трудно рассчитывать на то, что приближение предельным распределением будет хорошим для значений $q=0$ и $q=1$, где нарушаются законы функционирования системы, действующие в области $q\geqslant 2$. С этой точки зрения мы можем состояния $q=0$, $q=1$ и $q=2$ объединить в одно и рассмотреть новую переменную $\tilde{q}(u)=1$, если $q(u)=0$, 1 или 2, и $\tilde{q}(u)=q(u)-1$, если $q(u)>2$. И уже эту новую переменную $\tilde{q}(u)$ приближать процессом w_{RR}. Величина $\tilde{q}$ принимает значения от 1 до 19, а нормированная величина $\tilde{z}(t)=\frac{\tilde{q}(tT)}{\sqrt{T}}=\frac{\tilde{q}(400t)}{20}$ будет располагаться на отрезке [0,05; 0,95]. Следовательно, мы должны «сузить» предельное распределение с отрезка [0, 1] на эту область. Но значение $\tilde{q}(t)=1$ принимается с положительной вероятностью и ему естественно поставить в соответствие не $F_t(0)=0$, а величину $F_t(y_0)$ при некотором положительном значении аргумента y_0. При выборе y_0 имеется, конечно, небольшой произвол, который можно устранить различными способами. Этот произвол в значительной мере связан также и с тем, что нам приходится дискретное распределение, сосредоточенное в сравнительно небольшом числе точек, приближать непрерывным распределением. Мы рассмотрим здесь вариант, когда $y_0=1/19$ и функция распределения $\mathsf{P}(\tilde{z}(t)\leqslant y)$ приближается функцией *)

$$\tilde{F}_t(y)=\begin{cases} F_t\left(\frac{20y}{19}\right), & 0{,}05\leqslant y\leqslant 0{,}95,\\ 0, & y<0{,}05.\end{cases} \tag{3}$$

*) Здесь под функцией распределения величины ξ мы понимаем функцию $\mathsf{P}(\xi\leqslant y)$, включающую в себя вероятность значения y.

Ниже мы приводим таблицу, позволяющую сравнивать эмпирическое распределение $\tilde{z}(t)=\frac{\tilde{q}(400t)}{20}$ при $t=1{,}5$ (т. е. для ненормированного времени $u=600$) с распределением $\widetilde{F}_t(y)$ для значения $t=\infty$. Эмпирическая функция распределения получена по $n=400$ наблюдениям, так что максимальное стандартное уклонение эмпирической функции распределения составит $\sqrt{\frac{1}{4\cdot 400}}=\frac{1}{40}=0{,}025$.

Символ P_n будет означать эмпирическую вероятность. Например, $\mathsf{P}_n(\tilde{q}(600)\leqslant k)$ есть относительная частота события $\tilde{q}(600)<k$ в n наблюдениях.

Сравнительная таблица эмпирических значений $P_{n,k}=\mathsf{P}_n(\tilde{q}(600)\leqslant k)=\mathsf{P}_n\left(\tilde{z}(1{,}5)\leqslant\frac{k}{20}\right)$ $(n=400)$ и значений $\pi_k=\widetilde{F}_\infty\left(\frac{k}{20}\right)=F_\infty\left(\frac{k}{19}\right)$ предельной функции распределения (3).

k	$P_{n,k}$	π_k	k	$P_{n,k}$	π_k	k	$P_{n,k}$	π_k
1	0,25	0,20	8	0,80	0,84	14	0,96	0,97
2	0,37	0,36	9	0,86	0,87	15	0,98	0,98
3	0,46	0,49	10	0,88	0,90	16	0,99	0,98
4	0,54	0,59	11	0,91	0,92	17	0,99	0,99
5	0,65	0,68	12	0,93	0,94	18	1,00	1,00
6	0,68	0,74	13	0,95	0,96	19	1,00	1,00
7	0,75	0,80						

Вероятность того, что $\max\limits_{0\leqslant u\leqslant 1{,}5} q(uT)<20$, может быть найдена приближенно с помощью «принципа инвариантности» и результатов работы Каца [91], где исследованы случайные блуждания с двумя экранами, один из которых отражающий ($q=0$), другой ($q=20$) — поглощающий.

ГЛАВА IV

ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Как мы уже отмечали во введении, к асимптотическим методам теории обслуживания естественно относить также теоремы устойчивости (или непрерывности) для различных типов систем. Эти теоремы также представляют собой предельные теоремы для случайных процессов, но в отличие от результатов глав II, III они не носят «собирательный» характер. Теоремы устойчивости устанавливают условия, при которых для данной системы обслуживания малые отклонения в распределении данной конкретной управляющей последовательности влекут за собой малые отклонения в распределении тех стационарных (или достационарных) характеристик системы, которые мы рассматриваем (например, стационарного времени ожидания, вероятности отказа и т. д.). Другими словами, здесь выясняются условия, при которых близость в том или ином смысле управляющих последовательностей влечет за собой близость изучаемых характеристик. Такого рода теоремы дают возможность использовать разного рода приближения одних систем с помощью других.

К числу первых работ по устойчивости систем обслуживания, по-видимому, следует отнести работу Россберга [104] 1965 г. и работы Гнеденко [38] и Франкена [83] 1970 г. Несколько позже, в 1972 г., появились статьи Кеннеди [92], Боровкова [22], [18], Д. Стояна [107] и Калашникова и Цициашвили [52], при этом все названные работы содержали разные постановки задачи и подходы к проблеме устойчивости. К настоящему времени основные направления исследований, по-видимому, можно считать сформировавшимися, однако число работ по устойчивости стало столь значительным, что изложение их содержания в рамках одной книги стало невозможным. Мы отметим здесь лишь основные направления, в которых ведутся исследования в этой области, при этом мы будем иметь в виду прежде всего устойчивость *стационарных* характеристик систем обслуживания.

Работы Франкена [83], [85] и Арндт [76] используют теорию и технику точечных маркированных процессов.

Золотаревым в статьях [45], [46] задача устойчивости рассматривается как одна из задач непрерывности, возникающих при отображениях одних метрических пространств в другие (в нашем случае — пространств, связанных с управляющими последовательностями, в пространство, соответствующее изучаемым характеристикам системы).

Калашниковым для анализа задач устойчивости применяется так называемый метод пробных функций, тесно связанный с классическим методом Ляпунова исследований устойчивости дифференциальных уравнений. Изложению этого метода наряду со статьями [52], [51] посвящена специальная монография [50].

В работах Д. Стоян и Х. Стоян [107], [108] (см. также [80], [97]) задачи устойчивости связываются с некоторыми соотношениями порядка для управляющих последовательностей.

Можно указать также работы Кеннеди [92], Витта [114] и ряда других авторов (см. [79], [90], [113]), рассматривавших устойчивость систем лишь на конечных интервалах времени (т. е. устойчивость достационарных характеристик). Эта задача является более простой по сравнению со случаем стационарных характеристик уже потому, что в этом случае обычно известен явный вид отображений, которые определяют рассматриваемые характеристики по управляющим последовательностям. (В ряде этих работ (например, [114]) рассматривается близость процессов обслуживания в пространстве $D(0, \infty)$, но с топологией, которая соответствует сходимости в пространствах $D(0, t)$ (с обычной топологией Скорохода) для любого фиксированного t (см. [99], [106], [112]).)

Для некоторых систем обслуживания возможен также подход, использующий анализ явных формул или уравнений, описывающих поведение стационарных характеристик (см., например, [104], [18]). Однако такой анализ можно осуществить лишь для очень ограниченного круга систем обслуживания. В то же время количественные оценки скорости сходимости, получаемые на этом пути, оказываются очень точными (см. § 3).

В этой главе мы изложим подход, который представляется нам весьма естественным и который применительно ко многим типам систем можно было бы назвать «методом обновлений». Этот метод сначала иллюстрируется (иногда в неявной его форме) на ряде примеров в §§ 2—5, а затем излагается в общем виде в § 6. Следует отметить, что для систем с бесконечным числом каналов обслуживания мы пользуемся прямым анализом индикаторного представления и название «метод обновлений» не оправдано. Все же ради удобства и простоты изложения мы будем использовать этот термин для обозначения подхода, излагаемого в этой книге.

Основы этого подхода заложены в работе [21] (см. также [67]), где изучаются функционалы от процессов и последовательностей, заданных на всей оси (см. также работы автора того же времени [22], [18], [26], посвященные непосредственно теоремам устойчивости для процессов обслуживания). Эти функционалы обладают, грубо говоря, тем свойством, что на множествах A_N таких, что $\mathsf{P}(A_N)\to 1$ при $N\to\infty$, они зависят лишь от конечного числа N элементов управляющей последовательности, при этом события A_N определяются поведением «хвостов» этих последовательностей, начиная с момента времени N. Но именно такими функционалами являются стационарные характеристики систем обслуживания (при наличии «обновлений»), типичным и простейшим представителем которых может быть назван супремум $\sup\limits_{k\geqslant 0} X_k$, где X_k — накопление суммы элементов управляющей последовательности с отрицательным средним.

В § 1 излагаются вспомогательные результаты, относящиеся к устойчивости распределения супремума сумм стационарно связанных величин и супремума процесса со стационарными приращениями. Непосредственным следствием этих результатов являются теоремы об устойчивости стационарного времени ожидания для одноканальных систем с очередью и систем с автономным обслуживанием, которые излагаются в § 2. Результаты этих параграфов по существу являются окончательными.

В § 4 рассматриваются теоремы устойчивости для одноканальных систем с ограниченной очередью (с ограниченным временем ожидания).

Системам с бесконечным числом каналов обслуживания посвящен § 5.

В § 5 излагается общий метод получения эргодических теорем и теорем устойчивости, названный в книге «методом обновлений». В § 7 этот метод применяется к исследованию многоканальных систем с очередью и с ожиданием.

Сравнивать метод обновлений с другими подходами довольно трудно (иногда само противопоставление выглядит искусственно, так как по существу производятся одни и те же операции), и все же по совокупности полученных результатов он представляется нам на сегодняшний день наиболее предпочтительным. Некоторое исключение составляют, пожалуй, лишь качественные вопросы устойчивости для многоканальных систем, где в полученных условиях устойчивости не удается пока освободиться от одного дополнительного условия, явным образом связанного лишь с методом (условие о неограниченности τ_j^e в теореме 3 с § 7).

Для краткости в перечисленных выше параграфах четвертой главы мы рассматривали лишь *качественные* вопросы устойчивости *стационарных* характеристик систем обслуживания. Однако метод обновлений позволяет с тем же успехом изучать устойчивость и *достационарных* характеристик (как уже отмечалось, это заметно проще), а также получать *количественные* оценки скорости сходимости. Найденные этим путем оценки оказываются в известном смысле неулучшаемыми или близкими к ним. Оба эти обстоятельства проиллюстрированы в § 3, в котором для одноканальных систем получены оценки скорости сходимости как для стационарных, так и для достационарных характеристик.

Метод обновлений в качестве метода получения оценок использовался в работах Ахмарова [3]—[6] для других типов систем, в том числе для многоканальных систем. Оценки, полученные при этом, близки к неулучшаемым.

К достоинствам метода обновления, отмеченным выше, следует добавить также качества, связанные с методологической стороной дела, и, в частности, то обстоятельство, что он дает нам единый подход к доказательству теорем устойчивости и эргодичности, которые по существу своему тесно связаны.

Результаты §§ 1, 3, 4, 5, 6, 7 содержатся полностью или частично в работах автора [19], [21], [22], [24], [26], [30]—[32].

§ 1. Вспомогательные результаты о распределении максимума последовательных сумм стационарно связанных величин

Рассмотрим серию стационарных последовательностей $\xi^{(r)}=\{\xi_k^{(r)};\ -\infty<k<\infty\}$, $r=1, 2, \ldots$, и стационарную последовательность $\xi=\{\xi_k;\ -\infty<k<\infty\}$. Обозначим

$$Y_{m,k}^{(r)}=\sum_{l=m-k}^{m-1}\xi_l^{(r)},\quad Y_{m,k}=\sum_{l=m-k}^{m-1}\xi_l,$$

$$Y_{m,0}^{(r)}=Y_{m,0}=0,\quad Y^{(r)}(m)=\sup_{k\geqslant 0}Y_{m,k}^{(r)},\quad Y(m)=\sup_{k\geqslant 0}Y_{m,k}$$

(мы рассматриваем здесь максимумы последовательных сумм, распространенных *влево*, т. е. сумм вида $\xi_{m-1}+\xi_{m-2}+\ldots$, так как именно такого вида суммирование возникает в задачах теории обслуживания, см. [18]).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия.*

(I) *Последовательность* ξ *эргодична*, $M\xi_1<0$.

(II) *Конечномерные распределения последовательностей* $\xi^{(r)}$ *слабо сходятся при* $r\to\infty$ *к конечномерным распределениям* ξ.

(III) $\quad \mathsf{M}(\xi_1^{(r)};\ \xi_1^{(r)} \geqslant 0) \to \mathsf{M}(\xi_1;\ \xi_1 \geqslant 0) < \infty.$

Тогда конечномерные распределения для последовательностей $\{Y^{(r)}(n);\ -\infty < n < \infty\}$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям* $\{Y(n);\ -\infty < n < \infty\}$.

Замечание. Условия (I)—(III) влекут за собой сходимость при $r \to \infty$ распределений целого класса функционалов от $\{Y_{0,k}^{(r)};\ k \geqslant 0\}$ (так называемых V-непрерывных функционалов, см. [21], [67]). Условие (III) представляет собой условие компактности последовательности распределений этих функционалов.

Если условие (III) не выполнено, то утверждение теоремы, как легко проверить, будет неверным. Условие

$$\mathsf{M}\xi_1^{(r)} \to \mathsf{M}\xi_1$$

также недостаточно для сходимости распределений $Y^{(r)}(n)$. В этом нас убеждает следующий пример. Пусть последовательности $\{\xi_k^{(r)}\}$, $r = 1, 2, \ldots$, заданы на одном вероятностном пространстве и составлены из независимых величин $\xi_k^{(r)}$, принимающих четыре значения $-2r$, -1, 1, $2r$ с вероятностями соответственно $\frac{1}{r}$, $\frac{3}{4} - \frac{1}{r}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{r}$, $\frac{1}{r}$. В этом случае

$$\mathsf{M}\xi_1^{(r)} = -\frac{1}{2} = \mathsf{M}\xi_1, \quad \mathsf{P}(Y(0) < \infty) = 1.$$

В то же время $\liminf\limits_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(Y^{(r)}(0) \geqslant r\right) > 0$. В самом деле, пусть A_r — событие, состоящее в том, что среди r значений $\xi_{-1}^{(r)}, \ldots, \xi_{-r}^{(r)}$ ни разу не появится значение $-2r$ и хотя бы один раз появится $2r$. Тогда

$$A_r \subset \{Y^{(r)}(0) \geqslant r\},$$

$$\mathsf{P}(A_r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^r \left(1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^r\right) \to e^{-1}(1 - e^{-1}) > 0. \blacktriangleleft$$

Некоторые дополнительные замечания к теореме 1 помещены в конце параграфа.

Перейдем к доказательству теоремы. Для этого нам потребуются два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Пусть ξ — произвольная стационарная последовательность, $Y = Y(0)$. Тогда для любого $c > 0$*

$$\mathsf{P}(Y > 0) \leqslant \frac{1}{c} \mathsf{M}(\xi_1; \xi_1 \geqslant 0) + \mathsf{P}(\xi_1 > -c).$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством ([42], стр. 418)

$$\mathsf{M}(\xi_{-1}; Y > 0) \geqslant 0 \tag{1}$$

справедливым при выполнении условий теоремы и при $\mathsf{M}|\xi_1| < \infty$.

Рассмотрим сначала суженный класс последовательностей, для которых $\mathsf{M}|\xi_{-1}| < \infty$ и $\mathsf{P}(\xi_{-1} \in (-c, 0)) = 0$ при некотором $c > 0$. Тогда в силу (1)

$$\mathsf{M}(\xi_{-1}; \xi_{-1} \geqslant 0, Y > 0) \geqslant -\mathsf{M}(\xi_{-1}; \xi_{-1} \leqslant -c, Y > 0) \geqslant \geqslant c\mathsf{P}(\xi_{-1} \leqslant -c, Y > 0).$$

Стало быть,

$$\mathsf{P}(Y > 0) = \mathsf{P}(\xi_{-1} \geqslant 0, Y > 0) + \mathsf{P}(\xi_{-1} \leqslant -c, Y > 0) \leqslant \leqslant \mathsf{P}(\xi_{-1} \geqslant 0) + \frac{1}{c} \mathsf{M}(\xi_{-1}; \xi_{-1} \geqslant 0). \tag{2}$$

Пусть теперь вероятность попадания в интервал $(-c, 0)$ положительна. Введем случайные величины

$$\xi_j^* = \begin{cases} \xi_j, & \text{если } \xi_j \notin (-c, 0), \\ 0, & \text{если } \xi_j \in (-c, 0). \end{cases}$$

Тогда, пользуясь (2) и полагая $Y_k^* = \sum_{j=1}^{k} \xi_{-j}^*$, $Y^* = \sup_{k \geqslant 0} Y_k^*$, мы сможем записать

$$\mathsf{P}(Y > 0) \leqslant \mathsf{P}(Y^* > 0) \leqslant \mathsf{P}(\xi_{-1}^* \geqslant 0) + \frac{1}{c} \mathsf{M}(\xi_{-1}^*; \xi_{-1}^* \geqslant 0) = = \mathsf{P}(\xi_{-1} > -c) + \frac{1}{c} \mathsf{M}(\xi_{-1}; \xi_{-1} \geqslant 0).$$

Нам осталось освободиться от ограничения $\mathsf{M}\xi_{-1} > > -\infty$. Это делается с помощью приема, совершенно аналогичного тому, который только что использовался. Надо ввести случайные величины $\xi_j^{**} = \max(\xi_j, -A)$ при $A > 0$ и воспользоваться неравенством $\mathsf{P}(Y > 0) \leqslant$

$\leqslant \mathsf{P}(Y^{**} > 0)$ (при очевидном соглашении относительно обозначения Y^{**}). Лемма доказана.

Мы будем обозначать в дальнейшем

$$x^+ = (x)^+ = \max(0,\ x).$$

Лемма 2. *Если* $(\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_L^{(r)})$ — *вектор, распределение которого при* $r \to \infty$ *слабо сходится к распределению* $(\xi_1, \ldots, \xi_L)$ *и при этом*

$$\mathsf{M}\left(\xi_j^{(r)}\right)^+ \to \mathsf{M}\left(\xi_j\right)^+, \quad j = 1, \ldots, L, \tag{3}$$

то для сумм $Y_L^{(r)} = \sum_{j=1}^{L} \xi_j^{(r)}$ *справедливо соотношение*

$$\mathsf{M}\left(Y_L^{(r)}\right)^+ \to \mathsf{M}\left(Y_L\right)^+.$$

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы достаточно проверить для $L = 2$. Так как всегда

$$\liminf_{r\to\infty} \mathsf{M}\left(Y_2^{(r)}\right)^+ \geqslant \mathsf{M}\left(Y_2\right)^+,$$

то нам надо убедиться, что

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{M}\left(Y_2^{(r)}\right)^+ \leqslant \mathsf{M}\left(Y_2\right)^+. \tag{4}$$

Обозначив $F^{(r)}(x, y)$ и $F(x, y)$ функции распределения соответственно $(\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)})$ и (ξ_1, ξ_2), будем иметь

$$\mathsf{M}\left(Y_2^{(r)}\right)^+ - \mathsf{M}\left(Y_2\right)^+ = \int\limits_{x+y\geqslant 0} (x+y)\, d\left(F^{(r)}(x,\ y) - F(x,\ y)\right).$$

Используя сходимость $F^{(r)} \Rightarrow F$, получим при любом фиксированном, являющемся точкой непрерывности $F(x, \infty)$:

$$\limsup_{r\to\infty} \int\limits_{x+y\geqslant 0} x\, d\left(F^{(r)}(x,\ y) - F(x,\ y)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant M\\ x+y>0}} + \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\substack{x>M\\ x+y>0}} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{x>M} x\, dF^{(r)}(x,\ y) = \limsup_{r\to\infty} \mathsf{M}\left(\xi_1^{(r)};\ \xi_1^{(r)} > M\right) \equiv \varepsilon(M).$$

Но равномерная по r сходимость $\mathsf{M}(\xi_1^{(r)};\ \xi_1^{(r)} > M) \to 0$ при $M \to \infty$ является, как нетрудно видеть, необходимым и достаточным условием для выполнения (3). Поэтому $\varepsilon(M) \to 0$ при $M \to \infty$ и, стало быть,

$$\limsup_{r \to \infty} \int\limits_{x+y \geqslant 0} x d\left(F^{(r)}(x, y) - F(x, y)\right) \leqslant 0,$$

$$\limsup_{r \to \infty} \int\limits_{x+y \geqslant 0} y d\left(F^{(r)}(x, y) - F(x, y)\right) \leqslant 0.$$

Неравенство (4), а вместе с ним и лемма 2 доказаны.

Доказательство теоремы. Обозначим $\Psi(N) = \mathsf{P}(\sup\limits_{k>N} Y_{m,k} \geqslant 0)$ и допустим, что

$$\Phi(N) = \limsup_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{k>N} Y_{m,k}^{(r)} \geqslant 0\right) \to 0 \tag{5}$$

при $N \to \infty$ (в силу стационарности эти вероятности от m не зависят). По условию (1) и усиленному закону больших чисел $\Psi(N) \to 0$ при $N \to \infty$ и для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать N так, чтобы $\Psi(N) < \varepsilon$, $\Phi(N) < \varepsilon$. Пусть теперь $(x_1, \ldots, x_l)$ — точка непрерывности совместного распределения $\overline{Y}_{m_1, N}, \ldots, \overline{Y}_{m_l, N}$ при выбранном N, где

$$\overline{Y}_{m,N} = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} Y_{m,k}.$$

Тогда для вероятности события $A^{(r)} = \{Y^{(r)}(m_1) \geqslant x_1, \ldots \ldots, Y^{(r)}(m_l) \geqslant x_l\}$ будем иметь в силу условия (II)

$$\limsup_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(A^{(r)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant l\varepsilon + \limsup_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(A^{(r)};\ \sup_{k>N} Y_{m_1,k}^{(r)} < 0, \ldots, \sup_{k>N} Y_{m_l,k}^{(r)} < 0\right) \leqslant$$

$$\leqslant l\varepsilon + \limsup_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{m_1,N}^{(r)} \geqslant x_1, \ldots, \overline{Y}_{m_l,N}^{(r)} \geqslant x_l\right) =$$

$$= l\varepsilon + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{m_1,N} \geqslant x_1, \ldots, \overline{Y}_{m_l,N} \geqslant x_l\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2l\varepsilon + \mathsf{P}\left(Y(m_1) \geqslant x_1, \ldots, Y(m_l) \geqslant x_l\right). \tag{6}$$

Получив аналогичным образом обратное неравенство для lim inf, мы установим тем самым в силу произвольности $\varepsilon > 0$ требуемую сходимость конечномерных распределений последовательностей $\{Y^{(r)}(n);\ -\infty < n < < \infty\}$.

Таким образом, для доказательства теоремы мы должны убедиться в справедливости (5). Как мы уже отмечали, распределение $\{Y_{m,k};\ k \geqslant 0\}$ от m не зависит. Поэтому будем считать для простоты $m=0$ и обозначать

$$Y_k^{(r)} = Y_{0,k}^{(r)} = \xi_{-1}^{(r)} + \ldots + \xi_{-k}^{(r)},$$

$$Y_k = Y_{0,k} = \xi_{-1} + \ldots + \xi_{-k}, \quad Y = Y(0) = \sup_{k \geqslant 0} Y_k.$$

При произвольных $\beta > 0$ и целом $L > 0$ имеем

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant N} Y_k^{(r)} \geqslant 0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(Y_N^{(r)} \geqslant -\beta N\right) + \mathsf{P}\left(Y_N^{(r)} < \beta N,\ \sup_{k \geqslant N} Y_k^{(r)} \geqslant 0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(Y_N^{(r)} < -\beta N;\ \sup_{k \geqslant N} Y_k^{(r)} \geqslant 0;\ \bigcap_{k=0}^{\infty} \{Y_{N+kL}^{(r)} - Y_N^{(r)} \leqslant -\beta kL\}\right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y_{N+kL}^{(r)} - Y_N^{(r)} > -\beta kL\}\right) + \mathsf{P}\left(Y_N^{(r)} \geqslant -\beta N\right).$$

Обозначим слагаемое в правой части последнего неравенства в соответствии с порядком, в котором они следуют: I_1, I_2, I_3.

Тогда в силу стационарности $\xi^{(r)}$ и леммы 1 (при $c = \beta L$)

$$I_2 = \mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant 0} (Y_{kL}^{(r)} + \beta kL) > 0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\frac{Y_L^{(r)}}{L} > -2\beta\right) + \frac{1}{\beta} \mathsf{M}\left(\frac{Y_L^{(r)} + \beta L}{L}\right)^+;$$

$$I_1 \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{k=jL+1}^{(j+1)L} \left\{\xi_k^{(r)} > \frac{N\beta + jL\beta}{L}\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\xi_1^{(r)} > j\beta + \frac{N\beta}{L}\right) \leqslant \frac{L}{\beta} \int_{\frac{N\beta}{L} - \beta}^{\infty} P^{(r)}(t)\, dt,$$

где $P^{(r)}(t) = \mathsf{P}(\xi_1^{(r)} > t)$. Сходимость $\mathsf{M}(\xi_1^{(r)};\ \xi_1^{(r)} > 0) \to \to \mathsf{M}(\xi_1;\ \xi_1 > 0)$ влечет за собой равномерную по r сходимость $\varphi^{(r)}(u)=\int\limits_u^\infty P^{(r)}(t)\,dt$ при $u\to\infty$. Поэтому существует функция $\varphi(u)\to 0$ при $u\to\infty$ такая, что

$$I_1\leqslant\frac{L}{\beta}\varphi\left(\frac{N\beta}{L}\right).$$

Так как при каждом L и при $N\to\infty$ $L\varphi\left(\frac{N}{L}\right)\to 0$, то можно указать функцию $M=M(L)$, неограниченно возрастающая при $L\to\infty$ и такую, что $L\varphi\left(\frac{M(L)}{L}\right)\to 0$ при $L\to\infty$. Впредь мы будем считать числа L и N связанными соотношением $N=\frac{1}{\beta}M(L)$.

Итак, при произвольных N (или L) и β мы получили оценку

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant N}Y_k^{(r)}\geqslant 0\right)\leqslant\mathsf{P}\left(\frac{Y_N^{(r)}}{N}\geqslant-\beta\right)+\mathsf{P}\left(\frac{Y_L^{(r)}}{L}>-2\beta\right)+\\+\frac{1}{\beta}\mathsf{M}\left(\frac{Y_L^{(r)}+\beta L}{L}\right)^{+}+\frac{L}{\beta}\varphi\left(\frac{N\beta}{L}\right).$$

Следовательно, для значений β (их множество всюду плотно), являющихся точками непрерывности распределений $-\frac{Y_N}{N}$ и $-\frac{Y_L}{2L}$, мы получим в силу леммы 2

$$\limsup_{r\to\infty}\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant N}Y_k^{(r)}\geqslant 0\right)\leqslant A(N,\beta)+\frac{L}{\beta}\varphi\left(\frac{N\beta}{L}\right),\tag{7}$$

где

$$A(N,\beta)=\mathsf{P}\left(\frac{Y_N}{N}\geqslant-\beta\right)+\mathsf{P}\left(\frac{Y_L}{L}>-2\beta\right)+\\+\frac{1}{\beta}\mathsf{M}\left(\frac{Y_L+\beta L}{L}\right)^{+}.$$

Покажем, что выбором N и β правая часть в (7) может быть сделана сколь угодно малой. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим значение $A(N,\beta)$.

При $\beta=-a/3$, где $a=\mathsf{M}\xi_k<0$, слагаемые $A(N,\beta)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\beta}\mathsf{M}\left(\frac{Y_L+\beta L}{L}\right)^{+}\leqslant\frac{1}{\beta}\mathsf{M}\left(\frac{Y_L}{L}-a;\frac{Y_L}{L}>\frac{a}{2}\right),$$

$$\mathsf{P}\left(\frac{Y_L}{L}>-2\beta\right)\leqslant\mathsf{P}\left(\frac{Y_L}{L}>\frac{2}{3}a\right),$$

так что

$$A(N,\beta)\leqslant \mathsf{P}\left(\frac{Y_N}{N}\geqslant\frac{a}{3}\right)+\mathsf{P}\left(\frac{Y_L}{L}>\frac{2a}{3}\right)+\frac{1}{\beta}\mathsf{M}\left|\frac{Y_L}{L}-a\right|.$$

Так как по усиленному закону больших чисел $\mathsf{M}\left|\frac{Y_L}{L}-a\right|\to 0$ при $L\to\infty$ $\left(L_1\text{-сходимость } \frac{Y_L}{L} \text{ к } a\right)$, то мы можем теперь выбрать N (а стало быть, и L) настолько большими, что будет выполняться

$$A(N,\beta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{L}{\beta}\varphi\left(\frac{N\beta}{L}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, мы показали, что левая часть в (7) может быть выбором N сделана сколь угодно малой. Соотношение (5), а вместе с ним и теорема доказаны.

Рассмотрим теперь внимательнее условие (III). Приведем прежде всего пример, показывающий, что условие (III) не является необходимым для сходимости распределений $Y^{(r)}(n)$ (сходимость конечномерных распределений $\xi^{(r)}$ предполагается, как и условие, $\mathsf{M}\xi_1<0$). Пусть $\xi_k^{(r)}$ независимы,

$$\xi_k^{(r)}=\begin{cases} r^2-1 & \text{с вероятностью } r^{-2},\\ -1 & \text{с вероятностью } 1-r^{-2}-r^{-1},\\ -r^2-1 & \text{с вероятностью } r^{-1}.\end{cases}$$

Конечномерные распределения построенных последовательностей сходятся, очевидно, к распределениям последовательности $\xi=(-1,-1,\ldots)$. При этом сходятся также распределения $Y^{(r)}(n)$. Действительно, так как $\mathsf{P}(Y(n)=0)=1$ при любом n, то достаточно убедиться, что $\mathsf{P}(Y^{(r)}(n)>0)\to 0$ при любом n и при $r\to\infty$. Имеем

$$\mathsf{P}\left(Y^{(r)}(0)>0\right)\leqslant\mathsf{P}\left(Y_{*}^{(r)}(0)>0\right)=\mathsf{P}\left(Y_{**}^{(r)}(0)>0\right),\tag{8}$$

где $Y_{*}^{(r)}$ и $Y_{**}^{(r)}$ построены соответственно по суммам случайных величин $\xi_k^{(r)*}=\xi_k^{(r)}+1$ и

$$\xi_k^{(r)**}=\begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } \dfrac{r^{-2}}{r^{-1}+r^{-2}}=(r+1)^{-1},\\ -1 & \text{с вероятностью } \dfrac{r^{-1}}{r^{-1}+r^{-2}}=r(r+1)^{-1}\end{cases}$$

(последовательность $\xi^{(r)**}$ получается из последовательности $\xi^{(r)*}$ выбрасыванием нулевых элементов). В силу леммы 1 правая часть в (8) не превосходит

$$\mathsf{P}\left(\xi_1^{(r)**} > -1\right) + \mathsf{M}\left(\xi_1^{(r)**}\right)^+ = (r+1)^{-1} + (r+1)^{-1} \to 0$$

при $r \to \infty$. Таким образом, $\mathsf{P}(Y^{(r)}(n) = 0) \to \mathsf{P}(Y(n) = 0) = 1$. В то же время условие (III) теоремы 1 не выполнено, так как

$$\mathsf{M}\left(\xi_1^{(r)}\right)^+ = 1 - r^{-2} \to 1 \neq \mathsf{M}\left(\xi_1\right)^+ = 0. \blacktriangleleft$$

Отметим теперь, что условие (III), хотя и не является необходимым, все же в известном смысле близко к нему. Именно, мы докажем следующее утверждение.

Пусть выполнены условия (I), (II) *теоремы* 1, *в которых предполагается дополнительно, что* $\xi_j^{(r)}$ *независимы и*

$$\mathsf{M}\left(\xi_1^{(r)}\right)^- \to \mathsf{M}\xi_1^-,$$

где $x^- = (x)^- = \min(0, x)$. *Тогда слабая сходимость распределений* $Y^{(r)} = Y^{(r)}(0)$ *к распределению* $Y = Y(0)$ *влечет за собой условие* (III)*).

Доказательство. Как известно (см. [18]),

$$\mathsf{M}e^{i\lambda Y} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1) \frac{d\mathsf{P}(Y_k < x)}{k}\right\},$$

где $Y_k = Y_{0,k}$ есть сумма k независимых величин $\xi_{-1}, \ldots, \xi_{-k}$ (для краткости мы будем обозначать также $Y_k^{(r)} = Y_{0,k}^{(r)}$). Это означает, что распределения $Y^{(r)}$ и Y безгранично делимы и для сходимости их распределений необходима и достаточна слабая сходимость спектральных функций

$$\Phi^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathsf{P}\left(Y_k^{(r)} > x\right) \Rightarrow \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathsf{P}(Y_k > x), \quad x > 0.$$

Для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathsf{P}\left(Y_k^{(r)} > x\right)$ сходился равномерно по r

*) Это утверждение было доказано А. А. Могульским.

в каждой точке непрерывности $\Phi(x)$. Выберем теперь в качестве $b>0$ такое число, чтобы оно было точкой непрерывности функции $\Phi(x)$ и функций $\mathsf{P}(Y_k > kx)$, и образуем суммы величин $\xi_k^b = \xi_k - b$:

$$Y_k^b = Y_k - kb, \quad Y_k^{(r)\,b} = Y_k^{(r)} - kb.$$

Тогда, положив $Y^b = \sup\limits_{k\geqslant 0} Y_k^b$, $Y^{(r)\,b} = \sup\limits_{k\geqslant 0} Y_k^{(r)\,b}$, на основании сказанного и в силу сходимости распределений $Y^{(r)}$ и Y получим

$$\mathsf{P}\left(Y^{(r)\,b}=0\right) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathsf{P}\left(Y_k^{(r)\,b}>0\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathsf{P}\left(Y_k^{(r)}>kb\right)\right\} \to \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathsf{P}\left(Y_k>kb\right)\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left(Y^b=0\right).$$

Если обозначить через χ первую неположительную сумму среди $Y_1, Y_2, \ldots$, то при $\mathsf{M}\xi_1 < 0$ из § 16 в [18] находим

$$\mathsf{M}\chi \cdot \mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{M}\xi.$$

Поэтому при очевидных соглашениях относительно обозначений получим

$$\frac{\mathsf{M}\xi^{(r)\,b}}{\mathsf{M}\chi^{(r)\,b}} \to \frac{\mathsf{M}\xi^b}{\mathsf{M}\chi^b}.$$

Кроме того, по условию и в силу неравенства $\chi^b \leqslant 0$

$$\liminf_{r\to\infty} \mathsf{M}\xi^{(r)\,b} \geqslant \mathsf{M}\xi^b,$$
$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{M}\chi^{(r)\,b} \leqslant \mathsf{M}\chi^b,$$
$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{M}\xi^{r\,(b)} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi^b}{\mathsf{M}\chi^b} \limsup_{r\to\infty} \mathsf{M}\chi^{(r)\,b} \leqslant \mathsf{M}\xi^b.$$

Это означает, что

$$\mathsf{M}\xi^{(r)\,b} \to \mathsf{M}\xi^b, \quad \mathsf{M}\xi^{(r)} \to \mathsf{M}\xi, \quad \mathsf{M}\left(\xi^{(r)}\right)^+ \to \mathsf{M}\xi^+. \blacktriangleleft$$

Приведем теперь следствие теоремы 1 для случая, когда $\xi_k^{(r)}=\xi_{k+}^{(r)}-\xi_{k-}^{(r)}$, $\xi_k=\xi_{k+}-\xi_{k-}$, где последовательности $\{\xi_{k-}^{(r)}, \xi_{k+}^{(r)}\}$ стационарны и $\xi_{k\pm}^{(r)}\geqslant 0$.

Теорема 2. *Предположим, что*

(I) *Последовательность* $(\xi_-, \xi_+)=\{\xi_{k-}, \xi_{k+}; -\infty< k<\infty\}$ *эргодична* $\mathsf{M}\xi_1<0$.

(II) *Конечномерные распределения* $(\xi_-^{(r)}, \xi_+^{(r)})$ *сходятся при* $r\to\infty$ *к распределениям* (ξ_-, ξ_+).

(III) $\mathsf{M}\xi_{1+}^{(r)}\to\mathsf{M}\xi_{1+}<\infty$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 состоит в проверке условий теоремы 1. Условия (I), (II) теоремы 1, очевидно, выполнены. Условие (III) следует из леммы 2 и условия (III) теоремы 2.

Дальнейшее обсуждение вопросов устойчивости для случая, когда $\{\xi_k^{(r)}; -\infty<k<\infty\}$ есть последовательность независимых величин (условие равномерной сходимости распределений $Y^{(r)}(n)$, оценки скорости сходимости и др.), можно найти в монографии [18].

Докажем теперь аналог теоремы 1 для процессов с непрерывным временем.

Рассмотрим последовательность сепарабельных процессов со стационарными (в узком смысле) приращениями $\{X^{(r)}(t); -\infty<t<\infty\}$, $r=1, 2, \ldots$, и процесс такого же типа $\{X(t); -\infty<t<\infty\}$. Обозначим аналогично предыдущему

$$Y(t)=\sup_{v\leqslant t}(X(t)-X(v)),$$

$$Y^{(r)}(t)=\sup_{v\leqslant t}(X^{(r)}(t)-X^{(r)}(v))$$

и положим

$$Y(t, t-u)=\sup_{t-u\leqslant v\leqslant t}(X(t)-X(v)),$$

$$Y^{(r)}(t, t-u)=\sup_{t-u\leqslant v\leqslant t}(X^{(r)}(t)-X^{(r)}(v)),$$

так что $Y(t)=Y(t, -\infty)$.

Теорема 3. *Пусть случайные величины*

$$\xi_k=X(k)-X(k-1),\quad \xi_k^{(r)}=X^{(r)}(k)-X^{(r)}(k-1)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1. *И пусть, кроме того,*

(IV) *Для любого конечного u распределение $Y^{(r)}(0, -u)$ слабо сходится при $r\to\infty$ к распределению $Y(0, -u)$ так, что $\mathsf{M}Y^{(r)}(0, -u)\to \mathsf{M}Y(0, -u)<\infty$.*

Тогда конечномерные распределения процессов $Y^{(r)}(t)$ слабо сходятся при $r\to\infty$ к распределениям $Y(t)$.

Доказательство. Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 1, мы видим (см. (6) и условие (IV) теоремы 3), что нам достаточно убедиться в справедливости соотношения, аналогичного (5). Именно, надо установить, что

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{v\geqslant N}\left(X^{(r)}(0)-X^{(r)}(-v)\right)\geqslant 0\right)\to 0 \tag{9}$$

при $N\to\infty$. Нам уже известно, что это соотношение выполнено, если переменная $v=k$ в (9) пробегает лишь целочисленные значения (см. (5)).

Точно так же мы могли бы установить, что вероятность события

$$B_{r,N}=\left\{\sup_{k\geqslant N}\left(X^{(r)}(0)-X^{(r)}(-k)-\frac{ak}{2}\right)\geqslant 0\right\}$$
$$(a=\mathsf{M}\xi_k<0)$$

тоже сходится к 0 при $r\to\infty$, $N\to\infty$. Рассмотрим теперь оцениваемую вероятность (9):

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}\left\{\sup_{v\in[k,\,k+1]}\left(X^{(r)}(0)-X^{(r)}(-v)\right)\geqslant 0\right\}\right)\leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(B_{r,N})+\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}\left\{Y^{(r)}(-k,\,-k-1)\geqslant -\frac{ak}{2}\right\}\right)\leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(B_{r,N})+\sum_{k=N}^{\infty}\mathsf{P}\left(Y^{(r)}(0,\,-1)\geqslant -\frac{ak}{2}\right). \tag{10}$$

Но из условия (IV) следует, что ряд в правой части последнего неравенства сходится равномерно по r. Это доказывает соотношение (9), а вместе с ним и утверждение теоремы. ◄

Отметим, что условие (IV) является существенным. Нетрудно построить примеры, когда невыполнение (IV) делает утверждение теоремы неверным. Однако в целом ряде специальных случаев от него можно избавиться.

Мы рассмотрим важный частный случай, когда $X^{(r)}(t)$ представимы в виде разности

$$X^{(r)}(t) = X_{+}^{(r)} - X_{-}^{(r)},$$

где $X_{\pm}^{(r)}(t)$ есть независимые, неубывающие процессы со стационарными приращениями такие, что их конечномерные распределения сходятся к распределениям процессов $X_{\pm}(t)$, принадлежащих, очевидно, тому же типу, что и процессы $X_{\pm}^{(r)}(t)$. Обозначим

$$\xi_{k\pm}^{(r)} = X_{\pm}^{(r)}(k) - X_{\pm}^{(r)}(k-1), \quad \xi_{k\pm} = X_{\pm}(k) - X_{\pm}(k-1).$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия.*

(I) *Последовательность* $\{\xi_k = \xi_{k+} - \xi_{k-}\}$ *эргодична,* $\mathsf{M}\xi_1 < 0$.

(II) *Конечномерные распределения процессов* $X_{\pm}^{(r)}(t)$ *слабо сходятся при* $r \to \infty$ *к распределениям процессов* $X_{\pm}(t)$.

(III) $$\mathsf{M}\xi_{1+}^{(r)} \to \mathsf{M}\xi_{1+}.$$

Тогда конечномерные распределения процессов $Y^{(r)}(t)$ *слабо сходятся при* $r \to \infty$ *к распределениям* $Y(t)$.

Доказательство. Мы опять будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Однако в этом случае нам помимо (9) надо установить также (см. (6)) сходимость распределений $Y^{(r)}(0, -u)$ при любом фиксированном u. Докажем сначала (9).

В силу теоремы 2 ξ_k удовлетворяют условиям теоремы 1. Это будет означать, что в соотношении (10)

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}(B_{r,N}) \to 0$$

при $N \to \infty$,

$$\mathsf{P}\left(Y^{(r)}(0, -1) \geqslant -\frac{ak}{2}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\xi_{0+}^{(r)} \geqslant -\frac{ak}{2}\right).$$

Отсюда и из условий (II), (III) следует требуемое соотношение (9).

Установим теперь сходимость распределений $Y^{(r)}(0, -u)$. Поскольку траектории процессов $X_{\pm}^{(r)}(t)$ *монотонны*, то из сходимости конечномерных распределений будет следовать сходимость распределений функционалов от $X_{\pm}^{(r)}(t)$, непрерывных в топологии M_2 Скорохода (см. [69]) или, что то же самое, функционалов, непрерывных в метрике ρ_F, которая определяется следующим образом (см. [20]). Рассмотрим для простоты отрезок $[0, 1]$ и определим график $\mathscr{X}$ функции $x(t)$, $t \in [0, 1]$. Это есть односвязное множество в плоскости (t, x) такое, что его сечение в точке t совпадает с отрезком $[\liminf\limits_{u\to t} x(u), \limsup\limits_{u\to t} x(u)]$. В каждой точке из $\mathscr{X}$ построим открытую сферу радиуса ε. Область на плоскости, полученную пересечением полосы $0 \leqslant t \leqslant 1$ с объединением всех сфер, обозначим $G_\varepsilon(\mathscr{X})$. Мы будем говорить, что расстояние $\rho_F(x, y) < \varepsilon$, если график $\mathscr{Y}$ функции $y(t)$ принадлежит $G_\varepsilon(\mathscr{X})$, а график $\mathscr{X}$ принадлежит $G_\varepsilon(\mathscr{Y})$. Другими словами, если a и b — точки плоскости, а $R(a, b)$ — евклидово расстояние, то

$$\rho_F(x, y) = \max\left[\sup_{a\in\mathscr{X}} \inf_{b\in\mathscr{Y}} R(a, b),\ \sup_{a\in\mathscr{Y}} \inf_{b\in\mathscr{X}} R(a, b)\right].$$

Очевидно, что функционал $f(x) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} x(t)$ является непрерывным в метрике ρ_F.

Вернемся к процессам $X_{\pm}^{(r)}(t)$ на $[-u, 0]$ (пусть для простоты $X_{\pm}^{(r)}(0) = 0$). Пользуясь методом Скорохода [69], [70] и условием (II), мы можем для процессов $X_{+}^{(r)}$ и X_{+} в силу монотонности $X_{+}^{(r)}(t)$ построить стохастические эквивалентные им процессы $\widetilde{X}_{+}^{(r)}$ и $\widetilde{X}_{+}$, заданные на одном вероятностном пространстве и такие, что $\rho_F(\widetilde{X}_{+}^{(r)}, \widetilde{X}_{+}) \to 0$ почти наверное. Аналогичные построения проведем для $X_{-}^{(r)}$, X_{-}. Тогда, расширяя при необходимости вероятностное пространство (это возможно в силу независимости $X_{\pm}^{(r)}$), мы получим, что с вероятностью 1

$$\rho_F(\widetilde{X}_{+}^{(r)} - \widetilde{X}_{-}^{(r)},\ \widetilde{X}_{+} - \widetilde{X}_{-}) \to 0$$

при $r \to \infty$. Так как распределения $\widetilde{X}_{+}^{(r)} - \widetilde{X}_{-}^{(r)}$ и $X_{+}^{(r)} - X_{-}^{(r)}$ совпадают, то это, очевидно, влечет за собой слабую сходимость распределений ρ_F-непрерывных функционалов и в том числе распределений $Y^{(r)}(0, -u)$. Теорема доказана.

По-видимому, утверждение теоремы останется справедливым и в случае зависимых компонент $X_{\pm}^{(r)}(t)$, когда $\left(X_-^{(r)}(t), X_+^{(r)}(t)\right)$ образует произвольный процесс со стационарными неотрицательными приращениями.

§ 2. Теоремы устойчивости для одноканальных систем с ожиданием и систем с автономным обслуживанием

1. Как известно, широкий класс одноканальных систем с ожиданием описывается уравнениями вида

$$w_{n+1} = \max(0, w_n + \xi_n), \quad n \geqslant 1. \tag{1}$$

Рассмотрим, например, системы $\langle G, G, G, 1\rangle$ (обозначения см. в [18]). Напомним, что это системы с ожиданием, где вызовы приходят группами объемов ν_j^e через интервалы времени τ_j^e; обслуживаются вызовы по одному, время на обслуживание j-го вызова равно τ_j^s. Начальное условие w_1 и управляющие последовательности $\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s;\ j \geqslant 1\}$ заданы. Тогда, если положить

$$\xi_k = S_k - \tau_k^e,$$

где S_k — сумма времен обслуживания вызовов из k-й поступившей группы, то время ожидания w_{k+1} для первого вызова в $(k+1)$-й группе будет определяться равенством (1). Хорошо известно, (см., например, [18]), что решения уравнения (1) даются формулой

$$w_{n+1} = \max(X_n + w_1, X_n - X_1, \ldots, X_n - X_n), \quad X_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j. \tag{2}$$

Такого же вида равенство мы получим для систем $\langle E, G, G, G\}$ и $\langle G, G, E, G\rangle$, если в качестве w_k будем рассматривать длину очереди в моменты времени, выбранные подходящим образом (см. [18]).

Предположим теперь, что рассматривается последовательность систем обслуживания, управляемых стационарными последовательностями $\xi^{(r)} = \{\xi_k^{(r)};\ k \geqslant 1\}$,

$r=1, 2, \ldots$ Последовательности $\xi^{(r)}=\{\xi_k^{(r)}\}$ можно считать определенными «на всей оси», т. е. при $-\infty < k < \infty$. Мы предположим, что конечномерные распределения $\xi^{(r)}$ сходятся к распределениям стационарной последовательности $\xi=\{\xi_k\}$. Спрашивается, будут ли при этом сближаться распределения последовательностей

$$w_n^{(r)}=\{w_{n,k}^{(r)};\ k\geqslant 0\}=\{w_{n+k}^{(r)};\ k\geqslant 0\},$$

где $w_n^{(r)}$ определяются с помощью уравнения (1), начального условия $w_1^{(r)}$ и последовательности $\{\xi_k^{(r)}\}$, с распределением

$$w_n=\{w_{n,k};\ k\geqslant 0\}=\{w_{n+k};\ k\geqslant 0\}?$$

И будут ли сближаться стационарные (предельные по n) распределения этих последовательностей?

Рассмотрим пример. Длительность сообщений τ_j, передаваемых по каналам связи, часто считается распределенной по показательному закону ($\tau_j=\tau_j^s$ есть время обслуживания вызова в соответствующей системе, принимающей эти сообщения). Однако это предположение не может выполняться в окрестности 0 из-за наличия обязательной служебной группы слов (так что $\mathbf{P}(\tau_j^3 > \varepsilon)=1$ при малом ε, а не $e^{-\alpha x}$). Тем не менее это предположение, как правило, себя оправдывает.

Вопрос, очевидно, состоит в том, когда такие «идеализированные» системы будут близки в смысле рассматриваемых характеристик к реальным.

Примем основные обозначения предыдущего параграфа

$$Y_{n,k}=\sum_{l=n-k}^{n-1}\xi_l,\quad Y_{n,0}=0,\quad Y(n)=\sup_{k\geqslant 0}Y_{n,k}$$

и положим

$$X_k=\sum_{l=1}^{k}\xi_l,\quad X_0=0.$$

Верхний индекс (r) у этих обозначений, как и прежде, будет обозначать, что ξ_l в соответствующем определении заменены на $\xi_l^{(r)}$.

Обозначим, кроме того,

$$w^k = Y(k+1), \quad w = (w^0, w^1, w^2, \ldots) = (Y(1), Y(2), \ldots).$$

Тогда, как показано в [18] (стр. 25), для любого измеримого B

$$|\mathsf{P}(w_n \in B) - \mathsf{P}(w \in B)| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\min_{0<j\leqslant n} X_j > -\max(w_1, Y(1))\right). \qquad (3)$$

Отсюда должно быть ясно, что сближение стационарных и достационарных распределений по существу обеспечивается теоремой 1 § 1. В более общем виде ответ на поставленные выше вопросы содержит в себе следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть относительно последовательностей $\xi^{(r)}$ и ξ выполнены условия теоремы* 1 § 1 *(сходимость конечномерных распределений, эргодичность ξ, $\mathsf{M}\xi_1 < 0$ и сходимость математических ожиданий положительных частей $\xi_1^{(r)}$ и ξ_1). Пусть, кроме того,*

$$\mathsf{P}\left(w_1^{(r)} > c\right) \to 0 \qquad (4)$$

при $c \to \infty$ равномерно по r. Тогда конечномерные распределения $w_n^{(r)}$ слабо сходятся при $r \to \infty$, $n \to \infty$ к распределениям w.

Из замечаний, сделанных в начале параграфа, следует, что такого же рода условия должны быть выполнены для устойчивости распределений длины очереди в системах $\langle E, G, G, G\rangle$ и $\langle G, G, E, G\rangle$.

Доказательство. Для произвольного цилиндрического множества B, являющегося множеством непрерывности распределения w, разность

$$\left|\mathsf{P}\left(w_n^{(r)} \in B\right) - \mathsf{P}(w \in B)\right|$$

оценивается суммой разностей

$$\left|\mathsf{P}\left(w_n^{(r)} \in B\right) - \mathsf{P}\left(w^{(r)} \in B\right)\right|, \quad \left|\mathsf{P}\left(w^{(r)} \in B\right) - \mathsf{P}(w \in B)\right|.$$

Ясно, что сходимость к 0 второй разности обеспечивается теоремой 1 § 1. В силу (3) первая разность для заданного $\varepsilon > 0$ не превосходит

$$\varepsilon + \mathsf{P}\left(\min_{0<j\leqslant n} X_j^{(r)} > -L\right), \qquad (5)$$

где L выбрано так, что при всех r, бо́льших некоторого, выполняется

$$\mathsf{P}\left(\max\left(w_1^{(r)},\ Y^{(r)}(1)\right) > L\right) \leqslant \varepsilon.$$

В силу условий теоремы и сходимости распределений $Y^{(r)}(1)$ такое L всегда существует. Так как (5) монотонно убывает с ростом n, то нам достаточно убедиться, что существуют такие n и r_0, что

$$\mathsf{P}\left(X_n^{(r)} > -L\right) < \varepsilon$$

при всех $r \geqslant r_0$. Но это немедленно следует из эргодичности ξ $\left(\text{надо взять такое } n, \text{ чтобы } \mathsf{P}(X_n > -L-1) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и слабой сходимости распределений $X_n^{(r)}$ и X_n при $r \to \infty$. ◀

Из доказательства теоремы видно, что теорема 1 § 1 есть не что иное, как теорема устойчивости стационарных распределений времен ожидания, т. е. векторов $w^{(r)}$ и w.

Из теоремы 2 § 1 и теоремы 1 вытекает немедленно

Теорема 2. *Пусть последовательности* $\{\xi_j^{(r)} = S_j^{(r)} - \tau_j^{(r)e}\}$, *где* $S_1 = \tau_1^s + \ldots + \tau_{\nu_1^e}^s$, $S_2 = \tau_{\nu_1^e+1}^s + \ldots + \tau_{\nu_1^e+\nu_2^e}^s$, ... *и т. д., управляющие системой* $\langle G, G, G, 1\rangle$, *при каждом* r *стационарны, а последовательность* $\{\xi_j\}$, *кроме того, эргодична,*

$$\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\left(\tau_1^s + \ldots + \tau_{\nu_1^e}^s - \tau_1^e\right) < 0.$$

Тогда, если конечномерные распределения $\{\xi_j^{(r)}\}$ *слабо сходятся к соответствующим пределам и*

$$\mathsf{M}S_1^{(r)} \to \mathsf{M}S_1, \tag{6}$$

то при выполнении (4) *утверждение теоремы 1 сохраняется.*

Теорема 4 § 1 и результаты § 6 в [18] позволяют получить аналогичные утверждения для виртуального времени ожидания $w(t)$ (время ожидания вызова, пришедшего в момент t. Точное определение см. в [18]).

В заключение этого раздела приведем числовой пример, иллюстрирующий скорость сближения одномерных распределений времени ожидания в условиях теоремы 2 и существенность условия (6).

Пусть τ_j^e и τ_j^s распределены по показательному закону:

$$\mathsf{P}\left(\tau_j^e > x\right) = e^{-x}, \quad \mathsf{P}\left(\tau_j^s > x\right) = e^{-2x}.$$

Мы рассмотрим три способа построения последовательностей $\left\{\tau_j^{(r)\,e},\ \tau_j^{(r)\,s}\right\}$:

1. $\tau_j^{(r)\,e} = \tau_j^e, \quad \tau_j^{(r)\,s} = \tau_j^s + 2^{-r}, \quad r = 1, 2, \ldots$

2. $\tau_j^{(r)\,e} = \tau_j^e,$

$$\tau_j^{(r)\,s} = \begin{cases} \tau_j^s & \text{с вероятностью } 1 - 2^{-r}, \\ \tau_j^s + 2^{r-3} & \text{с вероятностью } 2^{-r}. \end{cases}$$

3. $\tau_j^{(r)\,s} = \tau_j^s,$

$$\tau_j^{(r)\,e} = \begin{cases} \tau_j^e & \text{с вероятностью } 1 - 2^{-r}, \\ \tau_j^e + 2^{r-3} & \text{с вероятностью } 2^{-r}, \end{cases}$$

где выбор с вероятностями 2^{-r} и $1 - 2^{-r}$ происходит независимым образом при каждом j.

Очевидно, что во втором случае условие (6) не выполнено, так как $\mathsf{M}\tau_j^{(r)\,s} = \mathsf{M}\tau_j^s + \frac{1}{8}$.

В силу § 10 в [18] стационарное распределение w^k и стационарное распределение для виртуального времени ожидания в нашем случае совпадают. Поэтому для отыскания распределения w^k (или, что то же, Y) можно использовать формулу Хинчина (см. следствие 3 § 8 в [18]). В силу этой формулы

$$\mathsf{M}e^{i\lambda Y} = \frac{1 - \alpha \mathsf{M}S_1}{1 - \alpha \dfrac{f(\lambda) - 1}{i\lambda}},$$

где в наших условиях $S_1 = \tau_1^s$, $\mathsf{M}S_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = \left(\mathsf{M}\tau_j^e\right)^{-1} = 1$,

$$f(\lambda) = \mathsf{M}e^{i\lambda S_1} = 2\int_0^\infty e^{i\lambda x - 2x}\,dx = \frac{2}{2 - i\lambda}.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}e^{i\lambda Y}=\frac{2-i\lambda}{2(1-i\lambda)},\quad \mathsf{P}(Y=0)=\frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(Y>x)=\frac{1}{2}e^{-x}\quad \text{при } x\geqslant 0.$$

Эти формулы немедленно следуют также из результатов глав II, IV в [18].

Чтобы получить эмпирические распределения $Y^{(r)}$ при каждом из 5 значений $r=2, 3, \ldots, 6$ и в каждом из трех рассматриваемых случаев, было проведено по 1000 опытов. Чтобы оценить $\sup\limits_x |\mathsf{P}(Y<x)-\mathsf{P}(Y^{(r)}<x)|$, были выбраны точки $x_0=0, x_1, \ldots, x_{199}, x_{200}=\infty$ так, чтобы

$$\mathsf{P}(Y\in(x_{j-1}, x_j))=\frac{1}{400},\quad j=1, \ldots, 200.$$

Для указанных значений r были получены следующие выборочные значения A_r^* величин

$$A_r=\sup_{1\leqslant i\leqslant 200}|\mathsf{P}(Y<x_i)-\mathsf{P}(Y^{(r)}<x_i)|.$$

В первом случае

r	2	3	4	5	6
A_r^*	.326	.145	.082	.026	.014

Во втором случае

r	2	3	4	5	6
A_r^*	.146	.167	.185	.200	.178

В третьем случае

r	2	3	4	5	6
A_r^*	.084	.074	.058	.050	.030

Значения $r>6$ не рассматривались, так как при выбранном способе проведения опытов в первом и третьем случаях при $r>6$ A_r^* становится неудовлетворительной оценкой для A_r. Если в первом и третьем случаях в соответствии с теоремой 2 A_r сходится к 0, то во втором A_r сохраняет с ростом r значение, близкое к 0,2, хотя $\mathsf{P}\left(\xi_i^{(r)}\neq\xi_i\right)=2^{-r}\to 0$ при $r\to\infty$.

Ниже мы приводим также полученные в описанных экспериментах графики эмпирических функций распределения $F^{(r)*}(x)$, соответствующих функциям $F^{(r)}(x) = \mathsf{P}(Y^{(r)} < x)$ при $r = 3, 6$. Значения функций $F^{(r)*}(x)$ и $F(x) = \mathsf{P}(Y < x)$ приводятся в точках x_{4k}, $k = 0, \ldots, 50$ (т. е. в логарифмической шкале) для двух последних способов построения приближающих последовательностей.

Таблица для графиков $F^{(r)*}(x_{4k})$ на страницах

	Второй способ		Третий способ			Второй способ		Третий способ	
k	$r=3$	$r=6$	$r=3$	$r=6$	k	$r=3$	$r=6$	$r=3$	$r=6$
0	0.374	0,401	0.565	0,527	0,100	0.587	0,616	0.819	0,763
4	388	413	569	533	104	597	630	824	773
8	398	424	578	546	108	606	640	832	783
12	407	432	597	554	112	615	649	837	789
16	410	439	608	567	116	624	660	841	802
20	416	445	613	576	120	633	664	849	807
24	422	453	626	584	124	649	668	862	817
28	433	461	636	592	128	663	678	875	829
32	440	472	644	605	132	678	685	883	840
36	450	484	655	620	136	694	692	891	850
40	460	493	663	624	140	701	701	894	858
44	471	504	673	633	144	715	707	899	869
48	476	515	689	638	148	729	711	906	875
52	481	522	704	651	152	737	726	910	884
56	488	532	710	663	156	754	729	919	895
60	501	541	721	668	160	763	733	933	906
64	508	545	730	681	164	780	739	939	914
68	522	552	741	692	168	793	744	948	922
72	529	557	751	701	172	814	758	956	935
76	533	566	761	712	176	827	768	967	946
80	545	572	771	720	180	849	777	975	957
84	553	585	778	729	184	869	782	984	962
88	563	593	786	738	188	888	792	989	969
92	570	603	794	745	192	911	806	996	980
96	578	612	807	756	196	945	830	999	987

2. В этом параграфе мы коснемся также вопроса об *устойчивости систем с автономным обслуживанием* (см. главу 8 в [18]). Система $\langle G, G, G, G\rangle_A$ с автономным обслуживанием, управляемая последовательностью

$$\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s, \nu_j^s;\ j \geqslant 1\}, \tag{7}$$

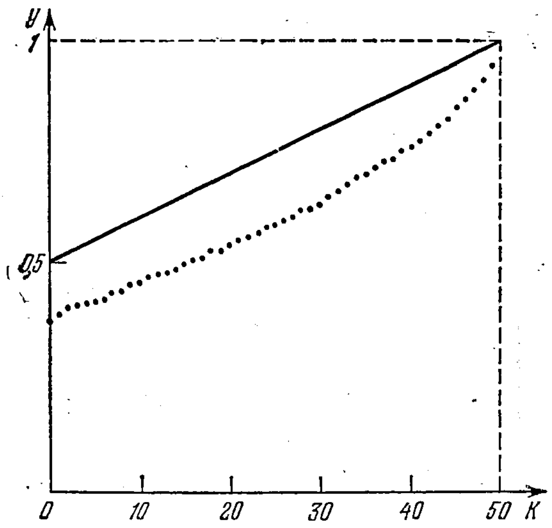

Рис. 1. Графики $F(x_{4k})$ и $F^{(3)*}(x_{4k})$ (второй способ).

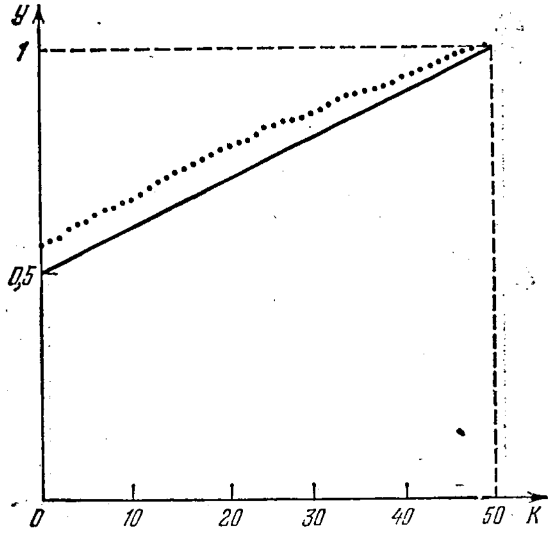

Рис. 2. Графики $F(x_{4k})$ и $F^{(3)*}(x_{4k})$ (третий способ).

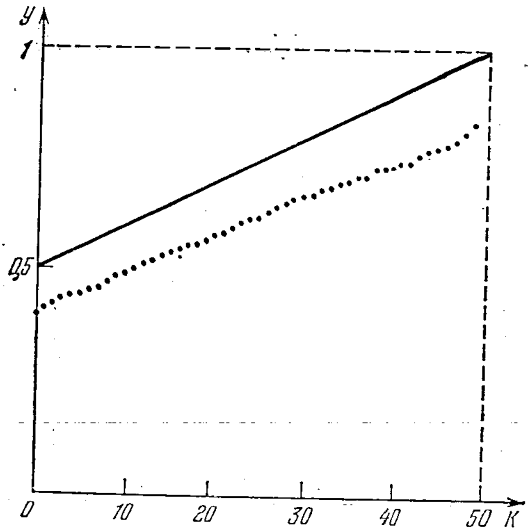

Рис. 3. Графики функций $F(x_{4k})$ и $F^{(6)*}(x_{4k})$ (второй способ).

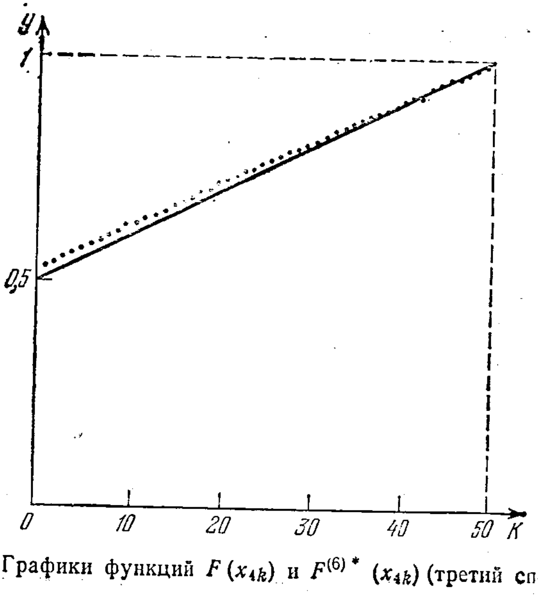

Рис. 4. Графики функций $F(x_{4k})$ и $F^{(6)*}(x_{4k})$ (третий способ).

отличается от обычных систем тем, что в них обслуживание вызовов начинается в моменты 0, τ_1^s, $\tau_1^s+\tau_2^s, \ldots$ независимо от входного потока и от наличия очереди. Обслуживание происходит группами объемов ν_1^s, $\nu_2^s, \ldots$

Введем в рассмотрение процессы $\{e(t)\}$ и $\{s(t)\}$. Процесс $e(t)$ описывает входной поток: значение $e(t)$ равно числу вызовов, поступивших в систему до момента времени t. Значение $s(t)$ определяется аналогично как сумма

$$s(t)=\nu_1^s+\ldots+\nu_{\eta(t)-1}^s,$$

где $\eta(t)$ — время первого прохождения уровня t в блуждании со скачками τ_1^s, $\tau_2^s, \ldots$ Грубо говоря, $s(t)$ есть число вызовов, которое бы приняла на обслуживание система к моменту t при бесконечной очереди.

Обозначим $X(t)=e(t)-s(t)$ и через $q(t)$ — длину очереди в момент t, не считая вызовов, уже находящихся на обслуживании (тут естественно отделять занятые каналы от «чистой» очереди, так как в каждом канале может находиться несколько вызовов). Процессы $e(t)$, $s(t)$, $q(t)$ являются скачкообразными; мы будем считать, что они непрерывны справа. Например, вызовы, обслуживание которых начинается в момент t, считаются в момент t выбывшими из очереди (к ним могут относиться и вызовы, которые в момент t поступили в систему).

Распределение процесса $\{q(t)\}$ будет полностью определено, если на том же вероятностном пространстве, на котором задана последовательность (7) (или, что то же, процессы $\{e(t), s(t)\}$), задать еще одну случайную величину $q(0)$, определяющую очередь в момент $t=0$. Тогда, как показано в [18],

$$\begin{aligned} q(t)&=q(0)+X(t)-\inf_{u\in[0,t]}(0,\ q(0)+X(u))=\\ &=\sup_{u\in[0,t]}[q(0)+X(t),\ X(t)-X(u)]. \qquad (8)\end{aligned}$$

Равенство (8) можно получить также как единственное решение уравнения

$$dq(t)=dX(t)-\min(0,\ q(t-0)+dX(t)),$$

Соотношение (8) совершенно аналогично соотношениям (2) для дискретного времени. Из (8) нетрудно получить, что в случае, когда $X(t)$ — процесс со стационарными приращениями такой, что

$$a = \mathsf{M}(X(1) - X(0)) < 0, \quad \frac{X(t)}{t} \xrightarrow[\text{п. н.}]{} a \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

распределения процессов $\{q_t(u) = q(t+u);\ u \geqslant 0\}$ сходятся к распределению процесса

$$Y(u) = \sup_{v \leqslant u} (X(u) - X(v)).$$

Чтобы получить теперь теоремы устойчивости для стационарной очереди систем с автономным облсуживанием, нам остается воспользоваться теоремами 3, 4 § 1.

§ 3. Некоторые оценки скорости сходимости

1. Теоремы устойчивости в §§ 1, 2 устанавливают сам факт сближения стационарных распределений времени ожидания при сближении распределений управляющих последовательностей. Эти утверждения носят качественный характер. Возникает вопрос, как быстро происходит это сближение, если известна скорость сближения (в той или иной форме) распределений управляющих последовательностей?

Мы рассмотрим здесь простейшие системы $\langle G_I, 1, G_I, 1\rangle$. Для этих систем случайные величины $\xi_j = \tau_j^s - \tau_j^e$ независимы. При этом мы будем рассматривать сначала лишь *одномерные стационарные* распределения времени ожидания w^k, совпадающие с распределением супремума

$$Y = Y(0) = \sup_{k \geqslant 0} Y_{0,k}, \quad Y_{0,k} = \sum_{j=-k}^{-1} \xi_j, \quad Y_{0,0} = 0.$$

Верхний индекс (r), как и прежде, будет означать соответствие управляющей последовательности $\{\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s}\}$.

Для *достационарных* распределений $w_n^{(r)}$ и w_n *при нулевых начальных условиях* $w_1^{(r)} = w_1 = 0$ оценки их близости могут быть только лучше, так что можно получать оценки, *равномерные по n*. При *ненулевых* начальных условиях порядок этих оценок сохраняется, однако равномерность по $w_1^{(r)}$ и w_1, конечно, отсутствует. Соответствующие пояснения будут сделаны в конце п. 2.

Замечания о возможности обобщения полученных результатов на более сложные системы и на случай зависимых ξ_j помещены в конце параграфа, а также в конце § 7. Оценки для разных типов многоканальных систем, близкие по своему порядку к оценкам этого параграфа, получены методом обновлений в работах Ахмарова [3]—[6].

Мы укажем здесь два пути получения оценок скорости сходимости. Один путь связан с «гладкостью» сходимости распределений $\xi_j^{(r)}$ и ξ_j (например, с требованием сходимости распределений по вариации). Второй путь — с ограниченностью моментов $\mathsf{M}\left(\xi_j^{(r)+}\right)^{\alpha}$ порядка $\alpha > 1$ (при слабой сходимости распределений $\xi_j^{(r)}$ и ξ_j; $x^+ = \max(0, x)$). Первый путь основан на факторизационных тождествах и может быть обобщен со случая независимых ξ_j разве лишь на случай цепей Маркова (см. [33]). Второй путь более универсален (ср. с [44]), однако оценки, получаемые при этом, существенно зависят от числа α, что (как показывают результаты первого направления) не всегда является существенным. Вопрос о том, насколько устранимыми являются недостатки оценок, отмеченные выше, в значительной мере остается пока открытым (некоторые результаты о неулучшаемых оценках см. в п. 3).

Приведем теперь результаты, относящиеся к первому направлению. Обозначим через W ($W^{(r)}$) функцию распределения Y ($Y^{(r)}$) и через $U(F_1, F_2)$ и $V(F_1, F_2)$ соответственно расстояния между F_1 и F_2 в равномерной метрике

$$U(F_1, F_2) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|$$

и по вариации $V(F_1, F_2) = \operatorname{Var}(F_1 - F_2) = \int |d(F_1 - F_2)|$. Очевидно, что $U(F_1, F_2) \leqslant V(F_1, F_2)$.

Теорема 1 ([18], стр. 158). *Пусть* $F(x) = \mathsf{P}(\xi_1 < x)$ *и* $F^{(r)}(x) = P\left(\xi_1^{(r)} < x\right)$ *имеют абсолютно непрерывные* *компоненты,* $-\infty < \mathsf{M}\xi_1 < 0$. *Тогда*

$$V(W^{(r)}, W) \leqslant c\,(V(F^{(r)}, F) + V(Q^{(r)}, Q)),$$

где c зависит только от распределения F; $Q^{(r)}$ и Q есть «хвосты» распределений $F^{(r)}$ и F:

$$Q^{(r)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(r)}(t)\,dt, \quad Q(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt,$$

так что $V(Q^{(r)}, Q) = \int |F^{(r)} - F|\,dx$.

Можно привести также следующую оценку, в которой участвует и расстояние по вариации между плотностями $\varphi^{(r)} = \frac{dF^{(r)}}{dx}$ и $\varphi = \frac{dF}{dx}$ (если таковые существуют).

Теорема 1А ([26], стр. 121). *Пусть существуют плотности φ и $\varphi^{(r)}$ распределений F и $F^{(r)}$ такие, что*

$$V(\varphi^{(r)}, \varphi) = \int |d(\varphi^{(r)} - \varphi)| < \infty.$$

Тогда

$$V(W^{(r)}, W) < c\left[V(Q^{(r)}, Q) + \sqrt{V(Q^{(r)}, Q)\,(V(\varphi^{(r)}, \varphi) + V(F^{(r)}, F))}\right].$$

Приведенные утверждения не содержат никаких ограничений на моменты $\xi_j^{(r)}$ порядка больше 1, но требуют малость $V(Q^{(r)}, Q)$ и существование или малость расстояний $V(F^{(r)}, F)$ и $V(\varphi^{(r)}, \varphi)$. Из теоремы 1 следует, что по крайней мере для гладких одновершинных распределений ξ_j отклонение от ξ_j на величину ε (мы может положить, например, $\xi_j^{(r)} = \xi_j + \varepsilon$) влечет за собой отклонение того же порядка ε для распределений $Y^{(r)}$ и Y. Последующие рассмотрения показывают, что *получить оценку такого порядка в общем случае не удается* (во всяком случае в условиях п. 3).

2. Пусть $L(F_1, F_2)$ означает расстояние Леви между F_1 и F_2:

$$L(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon:\ F_2(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant F_1(x) \leqslant F_2(x+\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Функцию $G(x)$ мы назовем *степенной*, если $G(x) \sim \sim x^{-\alpha}h(x)$ при $x \to \infty$, где $\alpha \geqslant 0$, $h(x)$ — медленно меняющаяся функция. Функцию $G(x)$ мы будем называть *экспоненциальной*, если $G(x) \leqslant ce^{-\beta x}$ при $x > 0$ и некотором $\beta > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. *Существует степенная или экспоненциальная функция G такая, что при достаточно больших x и при всех r*

$$1 - F(x) \leqslant G(x), \quad 1 - F^{(r)}(x) \leqslant G(x).$$

2. $$\varepsilon = \varepsilon_r = L(F^{(r)}, F) \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty.$$

3. $$a = \mathsf{M}\xi_1 < 0.$$

Тогда, если функция G степенная, то при любом $\gamma > 0$ и любом $b > 0$ и при всех достаточно больших r

$$L\left(W^{(r)}, W\right) \leqslant \varepsilon G^{-1}(\varepsilon b/d)(1+b)(1+\gamma),$$

где $G^{-1}(y)$ есть решение уравнения $G(x) = y$, $d = \dfrac{2W(+0)}{(\alpha - 1)\,|a|^{\alpha}}$.

Если функция G экспоненциальная, то при любом $\gamma > 0$ и всех достаточно больших r

$$L(W^{(r)}, W) \leqslant \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{\ln m}(1+\gamma), \tag{1}$$

где $m = \min\limits_{\mu} \mathsf{M}e^{\mu\xi_1} < 1$.

Если вместо условия 2 теоремы потребовать, чтобы выполнялось условие

2a. $$\varepsilon = U(F^{(r)}, F) \to 0,$$

то оба неравенства, устанавливаемые теоремой, будут справедливы для $U(W^{(r)}, W)$.

Из этой теоремы немедленно вытекает

Следствие. *Пусть* $\xi_1^{+} = \max(0, \xi_1)$. *Тогда, если* $\mathsf{M}\left(\xi_1^{(r)+}\right)^{\alpha} < c$ *при всех r и выполнены условия 2, 3, то*

$$L(W^{(r)}, W) \leqslant c_1 \varepsilon^{1 - \frac{1}{\alpha}}.$$

Если же $\mathsf{M}e^{\beta\xi_1^{(r)}} < c$ *при некотором $\beta > 0$ и при всех r, то справедливо (1). Такие же неравенства верны для $U(W^{(r)}, W)$ при условии 2a.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая простая лемма. В дальнейшем через F_ξ мы будем обозначать функцию распределения величины ξ.

Лемма 1. *Пусть ξ_1 и η_1 независимы, ξ_2 и η_2 независимы. Тогда*

$$L\left(F_{(\xi_1+\eta_1)^+},\ F_{(\xi_2+\eta_2)^+}\right) \leqslant L\left(F_{\xi_1},\ F_{\xi_2}\right) + L\left(F_{\eta_1},\ F_{\eta_2}\right).$$

Такое же утверждение справедливо для метрики U.

Доказательство немедленно следует из соотношений

$$L\left(F_{\xi_1+\eta_1},\ F_{\xi_2+\eta_2}\right) \leqslant L\left(F_{\xi_1},\ F_{\xi_2}\right) + L\left(F_{\eta_1},\ F_{\eta_2}\right),$$
$$L\left(F_{\xi_1^+},\ F_{\xi_2^+}\right) \leqslant L\left(F_{\xi_1},\ F_{\xi_2}\right),$$

которые проверяются непосредственным образом.

Неравенство для метрики U устанавливается столь же очевидным образом.

Из этой леммы вытекает следующее утверждение. Обозначим

$$\overline{Y}_{0,k} = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} Y_{0,j}, \quad W_k(x) = \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,k} < x\right).$$

Следствие. $L\left(W_k^{(r)},\ W_k\right) \leqslant kL\left(F^{(r)},\ F\right)$.

Это следует из леммы 1 и того, что $\overline{Y}_{0,k+1}$ и $\overline{Y}_{0,k}$ связаны соотношением

$$\overline{Y}_{0,k+1} \underset{p}{=} \overline{Y}_{1,k+1} = \left(\overline{Y}_{0,k} + \xi_0\right)^+.$$

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$W^{(r)}(x) = \mathsf{P}\left(Y^{(r)} < x\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \\ + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)} < x,\ \theta^{(r)} \leqslant N\right),$$

где θ есть наименьшее значение индекса k, при котором $\overline{Y}_{0,k} = Y$. Отсюда и из леммы 1 получаем

$$W^{(r)}(x) \leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)} < x\right) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N} < x + \varepsilon N\right) + \varepsilon N \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \mathsf{P}\left(\theta > N\right) + \mathsf{P}\left(Y < x + \varepsilon N\right) + \varepsilon N = \\ = T_{r,N} + W(x + \varepsilon N) + \varepsilon N, \quad (2)$$

где $T_{r,N} = \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \mathsf{P}\left(\theta > N\right)$.

Обратимся теперь к оценке чисел $T_{r,N}$. По первому условию теоремы мы можем для любого $\delta > 0$, $\delta < -a$ так выбрать числа M и функцию распределения $\Phi(x)$, что

1) $1 - F^{(r)}(x) \leqslant 1 - \Phi(x), \quad 1 - F(x) \leqslant 1 - \Phi(x);$

2) $1 - \Phi(x) = G(x)$ при $x \geqslant M$;

3) $\int x\,d\Phi(x) < a + \delta < 0.$

Обозначим ξ_j^* независимые случайные величины с функцией распределения Φ. Тогда при очевидных соглашениях относительно обозначенной получим

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(Y_{0,k} > 0) \leqslant \mathsf{P}(Y^*_{0,k} > 0),\\ &\mathsf{P}(Y^{(r)}_{0,k} > 0) \leqslant \mathsf{P}(Y^*_{0,k} > 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, известно ([18], стр. 121), что справедливо следующее тождество:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(\theta = k) = \mathsf{P}(\theta = 0) \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathsf{P}(Y_{0,k} > 0)\right\}.$$

В силу (3) коэффициенты $\frac{\mathsf{P}(\theta = k)}{\mathsf{P}(\theta = 0)}$ будут мажорироваться коэффициентами ряда

$$g(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathsf{P}(Y^*_{0,k} > 0)\right\}.$$

Для оценки $\mathsf{P}(Y^*_{0,k} > 0)$ воспользуемся следующим утверждением о вероятностях больших уклонений ([62]).

Пусть $G(x)$ — степенная функция, $\alpha > 1$, $\mathsf{M}|\xi_1^*| < \infty$. Тогда при $x > ck$, $c > 0$, $k \to \infty$

$$\mathsf{P}(Y^*_{0,k} - a^*k > ck) \sim kG(ck) = k\mathsf{P}(\xi_1^* > ck). \tag{4}$$

(Отметим, что на самом деле нам достаточно иметь неравенства для левой части в (4) (точнее, для $P(Y^*_{0,k} > 0)$)). С точностью до постоянной требуемые неравенства

$$\mathsf{P}(Y^*_{0,k} - a^*k > ck) < \beta k G(ck), \quad \beta > 1,$$

можно получить из работы [40]. Соотношение (4) позволяет нам считать, что при больших k коэффициент β можно выбрать сколь угодно близким к 1. При дополнительном условии $\mathsf{M}(\xi_1^*)^2 < \infty$ утверждение (4) содержится в [61].)

При $c = -a^* > 0$ из (4) получаем

$$\mathsf{P}(Y_{0,k}^* > 0) \sim kG(-a^*k).$$

Используя теоремы о поведении коэффициентов функций от степенных рядов ([18], стр. 340, см. также [65], [82]), находим

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k g_k, \quad g_k \sim \frac{\mathsf{P}(Y_{0,k}^* > 0)}{k} \sim G(-a^*k),$$

$$\mathsf{P}(\theta = k) \leqslant \mathsf{P}(\theta = 0)\, G(-a^*k)(1+\gamma), \quad \mathsf{P}(\theta^{(r)} = k) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(\theta^{(r)} = 0)\, G(-a^*k)(1+\gamma)$$

для любого $\gamma > 0$ при всех достаточно больших k равномерно по r.

Мы можем вернуться теперь к неравенствам (2), в которых, как мы выяснили,

$$T_{r,N} \leqslant 2(\alpha-1)^{-1}\mathsf{P}(\theta = 0)\, NG(-aN)(1+\gamma) =$$
$$= dNG(N)(1+\gamma)$$

при всех достаточно больших N и r для любого наперед заданного $\gamma > 0$ (число a^* может быть сделано сколь угодно близким к a. В приведенном равенстве $d = \dfrac{2\mathsf{P}(\theta = 0)}{(\alpha-1)|a|^{\alpha}}$, так как $\limsup\limits_{r\to\infty} \mathsf{P}(\theta^{(r)} = 0) \leqslant \mathsf{P}(\theta = 0)$).

Полагая N равным решению $G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)$ уравнения $dG(N) = \varepsilon b$, мы получим

$$W^{(r)}(x) \leqslant W\left(x + \varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)\right) + \varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)(1+b)(1+\gamma). \tag{5}$$

Здесь мы предположили для простоты, что ε пробегает значения, для которых $G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)$ есть целые числа.

Аналогичным образом устанавливается обратное неравенство, доказывающее вместе с (5) первое утверждение теоремы.

Чтобы перейти к произвольным последовательностям $\varepsilon \to 0$, надо взять в условии теоремы в качестве ε наименьшее из чисел, бо́льших $L(F^{(r)}, F)$, для которого $G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)$ целочисленно. Это может добавить к оценке $L(W^{(r)}, W)$ лишь множитель $1+o(1)$, который войдет в $1+\gamma$.

Пусть теперь $G(x)$ — экспоненциальная функция. В этом случае вместо (4) мы будем иметь по неравенству типа Чебышева

$$\mathsf{P}(Y^*_{0,k} > 0) \leqslant (m^*)^k,$$

где $m^* = \inf\limits_{\mu} f^*(\mu) < 1$, $f^*(\mu) = \mathsf{M}e^{\mu\xi^*_1}$. Пользуясь опять цитированными выше теоремами, мы получим

$$\mathsf{P}(\theta = k) \leqslant \frac{c\,(m^*)^k}{k}, \quad \mathsf{P}(\theta^{(r)} = k) \leqslant \frac{c\,(m^*)^k}{k}.$$

Для $\mathsf{P}(\theta \geqslant k)$ и $\mathsf{P}(\theta^{(r)} \geqslant k)$, очевидно, будут иметь место неравенства того же типа. Но m^* может быть сделано сколь угодно близким к $m = \inf\limits_{\mu} f(\mu)$, $f(\mu) = \mathsf{M}e^{\mu\xi_1}$. Поэтому для любого $\gamma > 0$ при достаточно больших k мы можем записать

$$\mathsf{P}(\theta \geqslant k) \leqslant \frac{1}{2}(m+\gamma)^k, \quad \mathsf{P}(\theta^{(r)} \geqslant k) \leqslant \frac{1}{2}(m+\gamma)^k.$$

Так как в нашем случае $T_{r,N}$ в (2) не превосходит $(m+\gamma)^N$, то мы получаем при $N = \frac{\ln\varepsilon}{\ln(m+\gamma)}$ (предполагая опять N целым)

$$W^{(r)}(x) \leqslant W\left(x + \frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{\ln(m+\gamma)}\right) + \frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{\ln(m+\gamma)} + \varepsilon.$$

Вместе с обратным неравенством это дает нам второе утверждение теоремы для метрики L. Для метрики U доказательство ничем не отличается от приведенного. ◀

Рассмотрим теперь оценки близости *достационарных* распределений времен ожиданий $w_n^{(r)}$ и w_n. Как мы знаем, последовательность w_n времен ожидания определяется начальным значением w_1 и рекуррентным соотношением $w_{n+1} = \max(0, w_n + \xi_n)$, $n \geqslant 1$. Положим $W_n(x) = \mathsf{P}(w_{n+1} < x)$, $W(x) = \mathsf{P}(Y(0) < x)$, Если $w_1 = w_1^{(r)} = 0$, то для получения оценок для $L\left(W_n^{(r)}, W_n\right)$ таких же, как оценки $L(W^{(r)}, W)$, полученные в теореме 2, следует воспользоваться без каких-либо существенных изменений выкладками теоремы 2: при $n \geqslant N$

$$W_n^{(r)}(x) = \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,n}^{(r)} < x\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)} < x\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \varepsilon N + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N} < x + \varepsilon N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\theta^{(r)} > N\right) + \mathsf{P}(\theta > N) + \varepsilon N + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,n} < x + \varepsilon N\right) =$$
$$= T_{r,N} + \varepsilon N + W_n(x + \varepsilon N).$$

Повторяя без изменений все остальные рассуждения в теореме 2, мы получим при $n \geqslant N$

$$L\left(W_n^{(r)}, W_n\right) \leqslant \varepsilon N + T_{r,N}.$$

Так как при $n \leqslant N$

$$L\left(W_n^{(r)}, W_n\right) \leqslant \varepsilon n \leqslant \varepsilon N,$$

то при $N = G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)$ мы получаем равномерную оценку

$$\sup_n L\left(W_n^{(r)}, W_n\right) \leqslant (1+b)\,\varepsilon N\,(1+\gamma) =$$
$$= \varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)(1+b)(1+\gamma).$$

Правая часть этой оценки такая же, как для оценки $L(W^{(r)}, W)$, установленной в теореме 2.

Если же $w_1 = w_1^{(r)} \neq 0$, то порядок оценки остается тем же, однако *равномерности* по значению w_1, очевидно, получить невозможно.

Пусть для простоты $w_1 = w_1^{(r)}$ не случайно. Тогда, так как

$$w_{n+1} \underset{p}{=} \max\left(\overline{Y}_{0,n}, Y_{0,n} + w_1\right),$$

то аналогично предыдущему находим при $n \leqslant N$

$$L\left(W_n^{(r)}, W_n\right) \leqslant \varepsilon n \leqslant \varepsilon N,$$

При $n \geqslant N$ имеем:

$$W_n^{(r)}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \mathsf{P}\left(\max\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)}, Y_{0,n}^{(r)} + w_1^{(r)}\right) < x;\ \theta^{(r)} \leqslant N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)} < x\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \varepsilon N + \mathsf{P}(\overline{Y}_{0,N} < x + \varepsilon N) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \varepsilon N + \mathsf{P}(\max(\overline{Y}_{0,N}, Y_{0,n} + w_1) < x + \varepsilon N) +$$
$$+ \mathsf{P}(Y_{0,n} + w_1 \geqslant x + \varepsilon N) \leqslant$$
$$\leqslant T_{r,N} + \varepsilon N + \mathsf{P}(Y_{0,n} \geqslant -w_1) + W_n(x + \varepsilon N).$$

Аналогично выписывается обратное неравенство для $W_n^{(r)}(x)$. В этих неравенствах для любого $\gamma > 0$

$$\mathsf{P}(Y_{0,n} \geqslant -w_1) \leqslant \mathsf{P}(Y_{0,n}^* \geqslant -w_1) \sim nG(-a^*n - w_1) \leqslant$$
$$\leqslant |a|^{-\alpha} nG(n)(1+\gamma) \leqslant |a|^{-\alpha} NG(N)(1+\gamma)$$

при всех достаточно больших N.

Так как $T_{r,N} \leqslant dNG(N)$, то при достаточно больших N получаем

$$\sup_n L\left(W_n^{(r)}, W_n\right) \leqslant \varepsilon N + NG(N)\left(d + |a|^{-\alpha}\right)(1+\gamma).$$

Полагая $N = G^{-1}\left(\dfrac{\varepsilon b}{d + |a|^{-\alpha}}\right)$, мы получаем аналогично предыдущему

$$\sup_n L\left(W_n^{(r)}, W_n\right) \leqslant \varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d + |a|^{-\alpha}}\right)(1+b)(1+\gamma)$$

при любых $b > 0$, $\gamma > 0$ и всех достаточно больших r.

Полученное утверждение без труда распространяется и на случайные w_1, $w_1^{(r)}$, не зависящие от $\{\xi_j\}$, $\{\xi_j^{(r)}\}$ и такие, что

$$L\left(W_0^{(r)}, W_0\right) < c\varepsilon G^{-1}(\varepsilon),\ \mathsf{P}(w_1 > x) <$$
$$< cxG(x),\ \mathsf{P}\left(w_1^{(r)} > x\right) < cxG(x).$$

Сделанные выше замечания относительно достационарных распределений сохраняются и для других (помимо теоремы 2) утверждений этого параграфа.

3. Будем считать теперь, что ξ_j *и* $\xi_j^{(r)}$ *заданы на одном вероятностном пространстве и близки между собой в смысле расстояния*

$$\rho(\xi, \eta) = \inf\{\delta\colon \mathsf{P}(|\xi - \eta| > \delta) < \delta\}.$$

Тогда Y и $Y^{(r)}$ также будут заданы на одном вероятностном пространстве. Мы получим оценку *) $\rho(Y^{(r)}, Y)$ через $\varepsilon = \varepsilon_r = \rho(\xi_1^{(r)}, \xi_1)$.

Отметим, что задания ξ_j и $\xi_j^{(r)}$ на одном вероятностном пространстве и их близость в смысле метрики ρ могут быть приняты и в общем случае, если известно, что мало расстояние $\rho(F^{(r)}, F)$ между $F^{(r)}$ и F, равное по определению

$$\rho(\Phi, F) = \inf\{\delta\colon \mathrm{mes}[x\colon |\Phi^{-1}(x) - F^{-1}(x)| > \delta] < \delta\},$$

где F^{-1}, Φ^{-1} — функции, обратные к F и Φ, определенные по непрерывности слева и в точке 0 — по непрерывности справа, так что $F^{-1}(0) = \inf\{x\colon F(x) > 0\}$. Действительно, если положить

$$\xi_j = F^{-1}(\omega_j), \quad \xi_j^{(r)} = (F^{(r)})^{-1}(\omega_j),$$

где ω_j независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$, то мы получим *) $\rho(\xi_j^{(r)}, \xi_j) = \rho(F^{(r)}, F)$.

Кроме того, если известно, что распределения $\mathsf{P}^{(r)}$ и P величин $\xi_j^{(r)}$ и ξ_j близки в смысле расстояния Леви — Прохорова $\lambda(\mathsf{P}^{(r)}, \mathsf{P})$ (определение см. ниже), то по теореме Штрассена [81], [87], [110] существуют $\tilde{\xi}_j^{(r)}$ и $\tilde{\xi}_j$, заданные на одном вероятностном пространстве, такие, что $\rho(\tilde{\xi}_j^{(r)}, \tilde{\xi}_j) \leqslant \lambda(\mathsf{P}^{(r)}, \mathsf{P})$.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 2.

---

*) Нетрудно видеть, что из неравенства $\rho(Y^{(r)}, Y) < \delta$ будет следовать $L(W^{(r)}, W) < \delta$.

**) Таким образом, $\rho(\xi_j^{(r)}, \xi_j) \leqslant \rho(F^{(r)}, F)$. Обратных неравенств не существует. Пусть, например, ξ распределена равномерно на $[0, N]$ и $\xi^{(r)} = \xi$, если $\xi \geqslant 1$; $\xi^{(r)} = \xi + N$, если $\xi < 1$. Тогда, очевидно, $\xi^{(r)}$ распределена равномерно на $[1, N+1]$, $\rho(F^{(r)}, F) = 1$ а $\rho(\xi^{(r)}, \xi) = 1/N$.

Теорема 3. *Пусть* $\{\xi_j\}$ *и* $\{\xi_j^{(r)}\}$ *заданы на одном вероятностном пространстве. Предположим, что выполнены условия* 1, 3 *теоремы* 2 *и при* $r \to \infty$

$$\varepsilon = \varepsilon_r = \rho\left(\xi_1^{(r)}, \xi_1\right) \to 0.$$

Тогда, если G — *степенная функция, то при всех* $b > 0$, $\gamma > 0$ *и при всех достаточно больших* r

$$\rho\left(Y^{(r)}, Y\right) \leqslant \varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon b}{d}\right)(1+b)(1+\gamma).$$

Если G — *экспоненциальная функция, то*

$$\rho\left(Y^{(r)}, Y\right) \leqslant \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{\ln m}(1+\gamma).$$

Здесь все обозначения имеют тот же смысл, что и в теореме 2.

Однако в этом случае в дополнение к утверждению теоремы 3 можно сказать, что полученные оценки неулучшаемы *).

Теорема 4. *Существуют распределения для* ξ_j, *удовлетворяющие условиям* 1, 3 *теоремы* 2, *такие, что, положив* $\xi_j^{(r)} = \xi_j + \varepsilon$, *мы получим для степенной функции* G *при любом* $\gamma > 0$ *и всех достаточно больших* r ($\varepsilon = \varepsilon_r \to 0$ *при* $r \to \infty$) *неравенство*

$$\rho\left(Y^{(r)}, Y\right) \geqslant \varepsilon G^{-1}\left(\frac{2\varepsilon}{d}\right)(1-\gamma).$$

Здесь d *имеет то же значение, что и в теоремах* 2, 3. *Для экспоненциальной функции* G

$$\rho\left(Y^{(r)}, Y\right) \geqslant \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{\ln m}(1-\gamma).$$

Отметим, что эти оценки могут иметь место одновременно с оценкой

$$V\left(W^{(r)}, W\right) < c_1\varepsilon.$$

Это следует из теоремы 1, условия которой легко сделать выполненными при $V(F^{(r)}, F) \sim c_2\varepsilon$, $V(Q^{(r)}, Q) \sim c_3\varepsilon$.

*) Некоторые близкие оценки скорости сходимости для распределений $w^{(r)k}$ и w^k (или $Y^{(r)}$ и Y), а также для распределений достационарных времен ожидания приведены в работах Золотарева [44], [47].

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Обозначим $\rho(\xi_1^{(r)}, \xi_1) = \varepsilon$,

$$B_N = \bigcup_{j=1}^{N} \{|Y_{0,j}^{(r)} - Y_{0,j}| > j\varepsilon\}$$

и заметим сначала, что $B_N \subset \bigcup_{j=1}^{N} \{|\xi_{-j}^{(r)} - \xi_{-j}| > \varepsilon\}$,

$$\mathsf{P}(B_N) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mathsf{P}(|\xi_{-j}^{(r)} - \xi_{-j}| > \varepsilon) \leqslant N\varepsilon.$$

Если обозначить теперь

$$A_N = \{|Y^{(r)} - Y| > N\varepsilon\},$$

то мы получим

$$\mathsf{P}(A_N) \leqslant \mathsf{P}(A_N\overline{B}_N;\ \theta^{(r)} \leqslant N,\ \theta \leqslant N) + \mathsf{P}(B_N) + \\ + \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \mathsf{P}(\theta > N).$$

Так как пересечение $A_N\overline{B}_N\{\theta^{(r)} \leqslant N, \theta \leqslant N\}$ пусто, то мы находим

$$\mathsf{P}(A_N) \leqslant N\varepsilon + \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \mathsf{P}(\theta > N).$$

Выбор N в правой части этого неравенства происходит совершенно так же, как в предыдущей теореме. В результате мы для $\rho(Y^{(r)}, Y)$ получим те же оценки, что и для $L(W^{(r)}, W)$ в теореме 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Возьмем гладкое распределение ξ_1 так, чтобы $1 - F(x) = G(x)$ при $x > 0$, и положим $\xi_j^{(r)} = \xi_j + \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_r > 0$. Тогда $\rho(\xi_j^{(r)}, \xi_j) = \varepsilon$,

$$Y_{0,k}^{(r)} = Y_{0,k} + k\varepsilon, \quad Y^{(r)} \geqslant Y + \theta\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\rho(Y^{(r)}, Y) \geqslant \rho(0, \theta\varepsilon).$$

В доказательстве теоремы 2 нами было установлено ($\xi_j^* = \xi_j$ в нашем случае), что для степенной функции G при $k \to \infty$

$$\mathsf{P}(\theta = k) \sim \mathsf{P}(\theta = 0)\, G(-ak)$$

и, стало быть, при $N \to \infty$

$$\mathsf{P}(\theta > N) \sim \frac{\mathsf{P}(\theta = 0)\, NG(-aN)}{\alpha - 1} \sim d_1 NG(N),$$

$$d_1 = \frac{\mathsf{P}(\theta = 0)}{|a|^{\alpha}(\alpha - 1)} = \frac{d}{2}.$$

Но

$$\rho(0, \theta\varepsilon) = \inf\{\delta\colon \mathsf{P}(\theta\varepsilon > \delta) < \delta\}.$$

Решая уравнение

$$\mathsf{P}(\theta\varepsilon > \delta) \sim d_1\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) G\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) = \delta$$

относительно δ, мы получим $\delta = \varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{d_1}\right)$,

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\rho(Y^{(r)}, Y)}{\varepsilon G^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{d_1}\right)} \geqslant 1.$$

Для экспоненциальной функции G имеем

$$\mathsf{P}(Y_{0,k} > 0) \sim \frac{b_1 m^k}{\sqrt{k}}, \quad m = \inf_{\mu} \mathsf{M} e^{\mu\xi_1} < 1,$$

$$\mathsf{P}(\theta = k) \sim \frac{b_2 m^k}{k^{3/2}}, \quad \mathsf{P}(\theta \geqslant k) \sim \frac{b_3 m^k}{k^{3/2}}.$$

Решая уравнение

$$\mathsf{P}(\theta\varepsilon > \delta) \sim b_3 m^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{-3/2} = \delta = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)\varepsilon$$

(или, что то же, уравнение $b_3 m^N N^{-5/2} = \varepsilon$), мы получим

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\ln\varepsilon}{\ln m} + o\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln m}\right),$$

$$\rho(Y^{(r)}, Y) \geqslant \varepsilon\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln m} + o\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln m}\right)\right]. \blacktriangleleft$$

4. Отметим теперь, что существуют возможности для получения оценок скорости сходимости для *зависимых* ξ_j и для *многомерных распределений* $\{w^k\}$. Если иметь в виду путь получения оценок, изложенный выше, то, как нетрудно заметить, эти возможности определяются следующими двумя факторами:

1) Наличием оценок для вероятностей $\mathsf{P}(\theta > N)$ и $\mathsf{P}(\theta^{(r)} > N)$.

2) Возможностью описания разностей $\mathsf{P}((Y^{(r)}_{0,0}, \ldots \ldots, Y^{(r)}_{0,N}) \in B) - \mathsf{P}((Y_{0,0}, \ldots, Y_{0,N}) \in B)$ для множеств B специального вида (ср. с доказательством теоремы 2)

Оценки для $\mathsf{P}(\theta > N)$, хотя и грубые, можно получить, пользуясь, например, соотношением

$$\{\theta > N\} \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} \{Y_{0,k} > 0\},$$

из которого следует, что

$$\mathsf{P}(\theta > N) \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathsf{P}(Y_{0,k} > 0).$$

Правую часть здесь можно оценить, пользуясь условием слабой зависимости $\{\xi_j\}$ и конечностью моментов ξ_j достаточно высокого порядка.

Например, если для $\zeta_j = \xi_j - a$

$$|\mathsf{M}\zeta_{j-b}\zeta_j\zeta_k\zeta_{k+d}| \leqslant m_4 \min[\varphi(b), \varphi(d)], \quad j \leqslant k,$$

где

$$\varphi = \sum n\varphi(n) < \infty,$$

то

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \mathsf{P}(Y_{0,k} > 0) \leqslant \frac{3m_4(8\varphi + 1)}{Na^4}$$

(см. [18], стр. 75).

Если же ξ_j есть функции на состояниях однородной цепи Маркова, то на основе факторизационных тождеств возможны значительно более точные оценки для $\mathsf{P}(\theta > N)$, аналогичные оценкам, полученным для независимых ξ_j.

Рассмотрим теперь второй из упомянутых выше факторов. Здесь, по-видимому, удобно воспользоваться расстоянием Леви — Прохорова $\lambda(\cdot, \cdot)$ между распределениями. Если P и Q — два распределения, скажем, в R^k, то по определению

$$\lambda(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) = \inf\{\varepsilon\colon \mathsf{P}(B) < \mathsf{Q}(B^\varepsilon) + \varepsilon,\ \mathsf{Q}(A) < \mathsf{P}(A^\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Здесь соотношения под знаком inf должны выполняться для всех замкнутых множеств A и B из R^k, A^ε означает ε-окрестность множества A. Очевидно, можно искать также равномерную близость P и Q на заданном классе множеств, если этот класс включает в себя нужные нам множества.

Введенная метрика λ позволяет характеризовать близость конечномерных распределений последовательностей $\{\xi_j^{(r)}\}$ и $\{\xi_j\}$. Однако в нашем случае использовать метрику λ в пространствах большой размерности, по-видимому, нецелесообразно. Нам будет удобнее пользоваться несколько иной характеристикой близости распределений. В какой-то мере это может пояснить следующее утверждение. Пусть P_N — распределение N-мерного вектора $(\xi_{j-1}, \ldots, \xi_{j-N})$ в R^N.

Лемма 2. *Пусть $\{\xi_j\}$ и $\{\xi_j^{(r)}\}$ — последовательности независимых величин, $\lambda\left(\mathsf{P}_1^{(r)}, \mathsf{P}_1\right) < \varepsilon$. Тогда для любого замкнутого $B \subset R^N$*

$$\mathsf{P}_N^{(r)}(B) \leqslant \mathsf{P}_N\left(B^{\varepsilon\sqrt{N}}\right) + \varepsilon N,$$
$$\mathsf{P}_N(B) \leqslant \mathsf{P}_N^{(r)}\left(B^{\varepsilon\sqrt{N}}\right) + \varepsilon N.$$

Доказательство*). Нам достаточно доказать, что если для независимых векторов $\zeta \in R^k$ и $\eta \in R^l$

$$\mathsf{P}(\zeta \in A) \leqslant \alpha_1 + \mathsf{P}\left(\zeta^{(r)} \in A^{\alpha}\right),$$
$$\mathsf{P}(\eta \in B) \leqslant \beta_1 + \mathsf{P}\left(\eta^{(r)} \in B^{\beta}\right)$$

при всех замкнутых $A \subset R^k$, $B \subset R^l$, то для всякого замкнутого $C \subset R^{k+l}$

$$\mathsf{P}((\zeta, \eta) \in C) \leqslant \alpha_1 + \beta_1 + \mathsf{P}\left(\left(\zeta^{(r)}, \eta^{(r)}\right) \in C^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Обозначим через $C_{\cdot y}$ и $C_{x\cdot}$ сечения множества C:

$$C_{\cdot y} = \{x\colon (x, y) \in C\}, \quad C_{x\cdot} = \{y\colon (x, y) \in C\}$$

и положим

$$C^{\cdot\beta} = \bigcup_x \{z = (x, y)\colon\ y \in (C_{x\cdot})^{\beta}\},$$
$$C^{\alpha\cdot} = \bigcup_y \{z = (x, y)\colon\ x \in (C_{\cdot y})^{\alpha}\}.$$

*) Приводимое ниже доказательство леммы было предложено В. В. Юринским.

Тогда

$$\mathsf{P}((\zeta, \eta) \in C) = \int\limits_{R^k} \mathsf{P}(\eta \in C_{x\cdot}) \mathsf{P}(\zeta \in dx) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{R^k} [\beta_1 + \mathsf{P}(\eta^{(r)} \in (C_{x\cdot})^\beta)] \mathsf{P}(\zeta \in dx) \leqslant$$
$$\leqslant \beta_1 + \mathsf{P}((\zeta, \eta^{(r)}) \in C^{\cdot\beta}) =$$
$$= \beta_1 + \int\limits_{R^l} \mathsf{P}\left(\zeta \in (C^{\cdot\beta})_{\cdot y}\right) \mathsf{P}(\eta^{(r)} \in dy) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 + \beta_1 + \int\limits_{R^l} \mathsf{P}\left(\zeta^{(r)} \in \left[(C^{\cdot\beta})_{\cdot y}\right]^\alpha\right) \mathsf{P}(\eta^{(r)} \in dy) =$$
$$= \alpha_1 + \beta_1 + \mathsf{P}\left((\zeta^{(r)}, \eta^{(r)}) \in (C^{\cdot\beta})^{\alpha\cdot}\right). \qquad (6)$$

Но $(C^{\cdot\beta})^{\alpha\cdot} \subset C^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Действительно, пусть $(x, y) \in (C^{\cdot\beta})^{\alpha\cdot}$. Тогда найдется точка $(x_0, y) \in C^{\cdot\beta}$ такая, что $|x_0 - x| < \alpha$. Это в свою очередь означает, что существует точка $(x_0, y_0) \in C$, $|y_0 - y| < \beta$. Таким образом, расстояние между (x, y) и (x_0, y_0) не превосходит

$$\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Лемма доказана.

На основании этой леммы, а также по причинам, которые станут ясными несколько позже, представляется естественным характеризовать близость распределений в R^N числами

$$\varepsilon(N) = \lambda^*(\mathsf{P}_N^{(r)}, \mathsf{P}_N) = \inf\left\{\varepsilon: \mathsf{P}_N^{(r)}(B) < \mathsf{P}_N\left(B^{\varepsilon\sqrt{N}}\right) + \varepsilon N,\right.$$
$$\left.\mathsf{P}_N(A) < \mathsf{P}_N^{(r)}\left(A^{\varepsilon\sqrt{N}}\right) + \varepsilon N\right\}.$$

Тогда, скажем, для множества $B \subset R^1$ вида $B = [b_1, b_2]$ будем иметь ($\overline{Y}_{0,N} = \max\limits_{0 \leqslant l \leqslant N} Y_{0,l}$)

$$\mathsf{P}(Y^{(r)} \in B) \leqslant \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) + \mathsf{P}(\overline{Y}_{0,N}^{(r)} \in B). \qquad (7)$$

Событию $\{\overline{Y}_{0,N} \in B\}$ соответствует область A в R^N, заключенная между двумя подобными ломаными поверхностями, такая, что $\{\overline{Y}_{0,N} \in B\} = \{(\xi_{-1}, \ldots, \xi_{-N}) \in A\}$

(напомним, что $\{\overline{Y}_{0,N}\leqslant b\}=\{\xi_{-1}\leqslant b,\ \xi_{-1}+\xi_{-2}\leqslant b,\ \ldots$ $\ldots,\ \xi_{-1}+\ldots+\xi_{-N}\leqslant b\}$). Пользуясь условием близости $\mathsf{P}_N^{(r)}$ и P_N, мы можем записать

$$\mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)}\in B\right)\leqslant\mathsf{P}\left((\xi_{-1},\ \ldots,\ \xi_{-N})\in A^{\varepsilon(N)\sqrt{N}}\right)+\varepsilon(N)N.$$

Так как

$$\{\overline{Y}_{0,N}<b\}^{\alpha}=\{\xi_{-1}<b+\alpha,\ \xi_{-1}+\xi_{-2}<b+\alpha\sqrt{2},\ \ldots,$$
$$\xi_{-1}+\ldots+\xi_{-N}<b+\alpha\sqrt{N}\}\subset\{\overline{Y}_{0,N}<b+\alpha\sqrt{N}\},$$

то нетрудно получить неравенство

$$\mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}^{(r)}\in B\right)\leqslant\mathsf{P}\left(\overline{Y}_{0,N}\in B^{\alpha N}\right)+N\varepsilon(N).$$

Вместе с (7) это дает нам

$$\mathsf{P}\left(Y^{(r)}\in B\right)\leqslant T_N+N\varepsilon(N)+\mathsf{P}\left(Y\in B^{N\varepsilon(N)}\right),$$

где T_N таково, что

$$\mathsf{P}(\theta^{(r)}>N)+\mathsf{P}(\theta>N)\leqslant T_N\to 0\quad\text{при}\quad N\to\infty.$$

Это соотношение сохранится и для произвольного замкнутого B. Считая, что $\varepsilon(N)=\varepsilon\psi(N)$, $\varepsilon=\varepsilon_r\to 0$ при $r\to\infty$ ($\psi(N)=1$ для независимых ξ_j) и решая относительно N уравнение

$$T_N=N\psi(N)\varepsilon, \tag{8}$$

мы получим, что

$$\lambda(\mathrm{Q}^{(r)},\ \mathrm{Q})<N_\varepsilon\varepsilon\psi(N_\varepsilon),$$

где N_ε — решение уравнения (8), а Q есть распределение Y. Переход к рассмотрению многомерного случая, когда Q есть распределение $(Y(m_1),\ \ldots,\ Y(m_k))$, существенных изменений в приведенную выше схему рассуждений не внесет.

5. В заключение укажем еще один класс оценок, которые подобно оценкам теоремы 1 неулучшаемы по порядку малости. Предварительно заметим, что одна из целей получения разного рода оценок между распределениями $Y^{(r)}$ и Y (или $w_n^{(r)}$ и w_n в достационарном случае) состоит в оценке близости $\mathsf{M}f(Y^{(r)})$ и $\mathsf{M}f(Y)$ для разного рода гладких функций f. Предположим, что

1) выполнены условия 1, 3 теоремы 2, при этом

$$\int_1^\infty xG(x)\,dx < \infty;$$

2) случайные величины $\xi_1^{(r)}$ и ξ_1 можно так задать на одном вероятностном пространстве, что $|\xi_1^{(r)} - \xi_1| \leqslant \varepsilon$ п. в.

При выполнении этих условий для любой функции f, удовлетворяющей условию Липшица

$$|f(x+\Delta) - f(x)| < c\Delta, \tag{9}$$

выполняется

$$|\mathsf{M}f(Y^{(r)}) - \mathsf{M}f(Y)| < c_1\varepsilon. \tag{10}$$

Доказательство немедленно следует из соотношений

$$|\mathsf{M}f(Y^{(r)}) - \mathsf{M}f(Y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{M}[\,|f(Y^{(r)}) - f(Y)|;\ \max(\theta^{(r)}, \theta) = n] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c\varepsilon n \mathsf{P}(\max(\theta^{(r)}, \theta) = n) = c\varepsilon \mathsf{M}\max(\theta^{(r)}, \theta),$$

где согласно доказательству теоремы 2

$$\mathsf{P}(\max(\theta^{(r)}, \theta) > N) \leqslant \mathsf{P}(\theta > N) + \mathsf{P}(\theta^{(r)} > N) =$$

$$= T_{r,N} \leqslant dNG(N)(1+\gamma).$$

В силу условия 1 это означает, что $\mathsf{M}\max(\theta^{(r)}, \theta) < c_2$, где c_2 от r не зависит и, стало быть, (10) доказано.

Можно отметить также, что из неравенства (10) следует, что $L(W^{(r)}, W) \leqslant c_3\sqrt{\varepsilon}$.

§ 4. Теоремы эргодичности и устойчивости для блужданий в полосе и их применения к одноканальным системам с ограничениями

В этом параграфе речь будет идти о теоремах эргодичности и устойчивости для блужданий в полосе и о приложении полученных результатов к системам типа $\langle G, 1, G, 1\rangle$ с ограниченным временем ожидания или с ограниченным временем пребывания в системе и к системам типа $\langle E, G, G, G\rangle$, $\langle G, G, E, G\rangle$ с ограниченной очередью.

1. В системах с ограниченным временем ожидания вызов получает отказ и покидает систему, если его время ожидания (первый тип систем) или время ожидания предыдущего вызова (второй тип систем) превышает некоторый заданный уровень N. В этом случае соотношения, описывающие время ожидания $(n+1)$-го вызова, будут такими (ср. с (1) § 2):

$$w_{n+1} = \max(0, w_n + y_n), \quad n \geqslant 1,$$

где для систем первого типа

$$y_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{если} \quad w_n + \xi_n \leqslant N, \\ -\tau_n^e & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

для систем второго типа

$$y_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{если} \quad w_n \leqslant N, \\ -\tau_n^e & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь обозначения w_n, τ_n^e, τ_n^s, $\xi_n = \tau_n^s - \tau_n^e$ имеют тот же смысл, что и в §§ 2, 3.

Вместо (2), (1) можно рассматривать управления

$$y_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{если} \quad w_n + \xi_n + \tau_{n+1}^s \leqslant N, \\ -\tau_n^e & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{3}$$

или

$$y_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{если} \quad w_n + \tau_n^s \leqslant N, \\ -\tau_n^e & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

означающие, что вызов с номером $n+1$ покинет систему, если его время пребывания в системе (или время пребывания предыдущего вызова в случае (4)) превысит уровень N. Иногда рассматривают также (см. [1], [2]) «непрерывное» управление системой с ограниченным временем пребывания, например, вида

$$w_{n+1} = \begin{cases} \max(0, w_n + \xi_n), & \text{если} \quad w_n + \tau_n^s \leqslant N, \\ \max(0, w_n - \tau_n^e), & \text{если} \quad w_n > N, \\ \max(0, N - \tau_n^e), & \text{если} \quad w_n \leqslant N < w_n + \tau_n^s \end{cases} \tag{5}$$

(если $w_n > N$, то n-й вызов получает отказ, если $w_n \leqslant N < w_n + \tau_n^s$, то n-й вызов ждет время w_n и обслуживается лишь «оставшееся» время $N - w_n < \tau_n^s$, после чего удаляется из системы).

Следует отметить, что во всех этих задачах w_n есть в известном смысле виртуальное время ожидания, поскольку возможно, что n-й вызов получит отказ.

Относительно последовательности (5) мы заметим здесь, что она мажорируется (при тех же начальных условиях) последовательностью, определенной управлением (2). Это позволяет свести изучение последовательности (5) к случаю (2). Сами по себе уравнения (5) в известном смысле проще, чем (1)—(4), поскольку функция $f(x, \tau_n^e, \tau_n^s)$ в равенстве $w_{n+1} = f(w_n, \tau_n^e, \tau_n^s)$ для соотношения (5) непрерывна и монотонна по x. Это дает возможность в случае (5) применять метод, предложенный Лойнесом [101] (что и сделано в [1], [2], [57]). Подход, рассматриваемый ниже, более универсален и дает возможность наряду с эргодическими теоремами получать и теоремы устойчивости.

В дальнейшем мы будем рассматривать более общую постановку задачи, когда ограничивающий уровень N зависит от n (свой для каждого вызова) и является случайной величиной. В этом случае соотношения (1)—(4) перестают быть различными и допускают единую и более общую форму записи

$$
\begin{gathered}
w_{n+1} = \max(0, w_n + y_n), \quad n \geqslant 1, \quad w_1 \leqslant N_1, \\
y_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{если } w_n \leqslant N_n, \\ -\tau_n^e & \text{в противном случае,} \end{cases}
\end{gathered} \tag{6}
$$

где $\{N_n, \tau_n^e, \tau_n^s\}$, $\xi_n = \tau_n^s - \tau_n^e$ — заданная управляющая случайная последовательность.

В этом параграфе мы рассмотрим еще один тип уравнений, которыми описывается поведение длины очереди для систем $\langle E, G, G, G \rangle$ и $\langle G, G, E, G \rangle$ в случае, когда эта длина на n-м шаге ограничена случайным уровнем N_n (ср. с [18]):

$$
w_{n+1} = \min[N_{n+1}, \max(0, w_n + \xi_n)], \quad n \geqslant 1. \tag{7}
$$

Здесь w_n, ξ_n имеют уже другой смысл, чем в §§ 2, 3, а решение уравнений (7) требует задания управляющей последовательности $\{N_n, \xi_n\}$. Если $N_n = N$ фиксировано, то мы получим уравнение, исследованное в [24], [77], где выяснены условия эргодичности.

Итак, мы будем рассматривать уравнения (6) и (7). Нетрудно видеть, что к таким уравнениям относятся и уравнения более общего вида, когда в (6) и (7) $\max(0, w_n + \xi_n)$ заменен на $\max(M_{n+1}, w_n + \xi_n)$, где $\{M_n\}$ — заданная наряду с $\{N_n\}$, $M_n < N_n$ случайная последовательность. Сведéние происходит введением новых переменных $w_n^* = w_n - M_n$, $\xi_n^* = \xi_n - M_{n+1} + M_n$, для которых, например, уравнения (7) примут вид

$$w_{n+1}^* = \min[N_{n+1} - M_{n+1}, \max(0, w_n^* + \xi_n^*)].$$

Методы исследования уравнений (6), (7) весьма близки, но все же имеют некоторые отличия. Мы рассмотрим сначала уравнения (7).

2. Прежде всего выясним *условия, при которых решения* $\{w_{n+k}; k \geqslant 0\}$ *уравнения* (7) *будут сходиться при* $n \to \infty$ *к стационарной последовательности.*

Пусть, как и прежде (см. §§ 2—3),

$$Y_{n,k} = \sum_{i=n-k}^{n-1} \xi_i, \quad \overline{Y}_{n,k} = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} Y_{n,j}, \quad X_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j.$$

Обозначим, далее,

$$Z_{n,k} = N_n - N_{n-k} - Y_{n,k}, \quad \overline{Z}_{n,k} = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} Z_{n,j}$$

и введем в расмотрение случайные величины

$$\nu_1(n) = \min\{k > 1: \min_{k-1 \geqslant j \geqslant 1} (N_{n-k+1} + X_{n-k+j} - X_{n-k}) < 0\},$$

$$\nu_2(n) = \min\{k > 1: \max_{k-1 \geqslant j \geqslant 1} (X_{n-k+j} - X_{n-k} - N_{n-k+j+1}) > 0\},$$

$$\nu(n) = \min(\nu_1(n), \nu_2(n)).$$

Для того чтобы определения имели смысл и при отрицательных n (это понадобится нам в дальнейшем), разности

$$X_{n-k+j} - X_{n-k} = \xi_{n-k+1} + \ldots + \xi_{n-k+j}$$

в формулах для $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ следует записать в виде

$$Y_{n,\,k-1}-Y_{n,\,k-j-1}.$$

Случайные величины $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$ могут быть определены не на всем пространстве элементарных исходов. Там, где они не определены, мы положим их равными ∞.

Теорема 1. *На множестве* $\{\nu(n)\leqslant n\}$ *для решения уравнения* (7) *справедливо равенство*

$$w_n=\begin{cases}\overline{Y}_{n,\,\nu(n)}, & \text{если}\quad \nu_1(n)<\nu_2(n),\\ N_n-\overline{Z}_{n,\,\nu(n)}, & \text{если}\quad \nu_2(n)<\nu_1(n).\end{cases}$$

Соотношение $\nu_1(n)=\nu_2(n)\leqslant n$ *невозможно.*

Утверждение этой теоремы дает эффективный алгоритм построения решения на множестве $\{\nu(n)\leqslant n\}$. На этом множестве решение w_n не зависит от начального условия w_1 и зависит лишь от случайного числа случайных величин $\xi_{n-1},\ \ldots,\ \xi_{n-\nu(n)}$.

Доказательство. Значение $k=\nu_1(n)$ определяет наименьший по k временный отрезок $[n-k+1,n-1]$, на котором траектория

$$N_{n-k+1}+\xi_{n-k+1}+\xi_{n-k+2}+\ldots+\xi_j,\quad j=n-k,\ \ldots,n-1,$$

стартовавшая при $j=n-k$ в точке N_{n-k+1}, достигнет до момента $j=n-1$ области отрицательных значений. Аналогичный смысл имеет и величина $\nu_2(n)$. Она определяет наименьший по k отрезок $[n-k+1,\ n-1]$, на котором траектория $\sum\limits_{l=n-k+1}^{j}\xi_l,\quad j=n-k,\ \ldots,\ n-1,$ стартовавшая при $j=n-k$ в 0, достигнет переменной границы $N_{j+1}>0$, $j=n-k,\ \ldots,\ n-1$. Из этих замечаний нетрудно видеть, что соотношение $\nu_1(n)=\nu_2(n)\leqslant \leqslant n$ невозможно.

Если $\nu_1(n)=k$, то найдется максимальный индекс $\theta_1<\nu_1(n)=k$ такой, что

$$N_{n-k+1}+X_{n-\theta_1}-X_{n-k}<0.$$

Так как $w_{n-k+1}\leqslant N_{n-k+1}$, то в силу уравнения (7) это означает, что

$$w_{n-\theta_1+1}=0. \tag{8}$$

Рассмотрим событие $\{\nu_1(n)<\nu_2(n)\}$. Для элементарных исходов из этого события траектория w_{n-j} при

$\theta_1 \geqslant j \geqslant 0$ ни разу не заденет верхней границы N_{n-j}, $j = \theta_1, \theta_1 - 1, \ldots, 0$ (см. соотношение (8) и определение $\nu_2(n)$ на множестве $\nu_2(n) > k$, из которого следует, что на этом множестве

$$\max_{\theta_1 - 1 \geqslant j \geqslant 1} (X_{n-\theta_1+j} - X_{n-\theta_1} - N_{n-\theta_1+j+1}) \leqslant 0).$$

Стало быть,

$$w_n = \max_{\theta_1 \geqslant j \geqslant 1} (X_{n-1} - X_{n-j}) = \max_{0 \leqslant k \leqslant \theta_1} Y_{n,k} = \\ = \overline{Y}_{n,\theta_1} = \overline{Y}_{n,\nu_1(n)}. \qquad (9)$$

Последнее равенство использует тот факт, что приращения $Y_{n-\theta_1, l}$ при $\theta_1 - l \geqslant \nu_1$ отрицательны.

Рассмотрим теперь множество $\{\nu_1(n) > \nu_2(n)\}$. Введем в рассмотрение последовательность $\Delta_n = N_n - w_n$, которая определяет расстояние w_n от верхней границы. Легко видеть, что Δ_n удовлетворяет уравнению, аналогичному (7):

$$\Delta_{n+1} = \min[N_{n+1}, \max(0, \Delta_n + \eta_n)],$$

где $\eta_n \doteq N_{n+1} - N_n - \xi_n$. Если обозначить

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k = -X_n + N_{n+1} - N_1$$

и рассмотреть неравенство, присутствующее в определении $\nu_1(n)$, то мы получим

$$\min_{k-1 \geqslant j \geqslant 1} (N_{n-k+1} + Z_{n-k+j} - Z_{n-k}) = \\ = -\max_{k-1 \geqslant j \geqslant 1} (X_{n-k+j} - X_{n-k} - N_{n-k+j+1}),$$

и, стало быть, величина $\nu_2(n)$ совпадает с величиной $\nu_1(n)$, определенной для новой последовательности $\{\eta_k\}$, и наоборот. Отсюда и из соотношения (9) сразу следует, что на множестве $\{\nu_1(n) > \nu_2(n)\}$

$$\Delta_n = \overline{Z}_{n,\nu_1(n)},$$

где $Z_{n,k} = \sum_{j=n-k}^{n-1} \eta_j = N_n - N_{n-k} - Y_{n,k}$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что последовательность $\{N_k, \xi_k\}$ *стационарна*. Мы будем считать ее заданной на всей оси, т. е. при $-\infty < k < \infty$. Тогда из теоремы 1 вытекает следующее утверждение. Обозначим

$$\mathbf{w}_n = (w_n, w_{n+1}, \ldots).$$

Теорема 2. *Если* $\{N_k, \xi_k\}$ *стационарна и* $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 1$, *то при* $n \to \infty$ *существует предельное стационарное распределение последовательности* $\mathbf{w}_n$, *совпадающее с распределением* $\mathbf{w} = (w^0, w^1, \ldots)$, *где*

$$w^k = \begin{cases} \overline{Y}_{k,\nu(k)}, & \textit{если} \quad \nu_1(k) < \nu_2(k), \\ N_k - \overline{Z}_{k,\nu(k)}, & \textit{если} \quad \nu_1(k) > \nu_2(k). \end{cases} \tag{10}$$

Кроме того, для любого измеримого B

$$|\mathsf{P}(\mathbf{w}_n \in B) - \mathsf{P}(\mathbf{w} \in B)| \leqslant \mathsf{P}(\nu(0) > n). \tag{11}$$

Условие $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 1$ выполнено, очевидно, если последовательность $\{\xi_k\}$ эргодична, $\mathsf{M}\xi_k \neq 0$. Если $\mathsf{M}\xi_k = 0$, то это условие будет также выполнено, если только ξ_k не представимы в виде $\xi_k = \zeta_k - \zeta_{k-1}$, где $\{\zeta_k\}$ также эргодична (ср. с [19], [26]).

Если ξ_k независимы, то это условие выполнено всегда, если только $\xi_k \not\equiv 0$.

Доказательство теоремы 2. Соотношение (11), из которого следует в сущности утверждение теоремы, получается, если заметить, что $A_n = \{\nu(n) \leqslant n\} \subset \{\nu(n+k) \leqslant n+k\}$, $k \geqslant 0$, и что, следовательно, в силу теоремы 1 на этом множестве

$$w_{n+k} = w^{n+k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Так как последовательность $\{N_k, \xi_k\}$ стационарна, то $\mathsf{P}(\nu(n) \leqslant n) = \mathsf{P}(\nu(0) \leqslant n)$,

$$\mathsf{P}(\mathbf{w}_n \in B) = \mathsf{P}(\mathbf{w}_n \in B;\ A_n) + \mathsf{P}(\mathbf{w}_n \in B;\ \overline{A}_n) =$$
$$= \mathsf{P}((w^n, w^{n+1}, \ldots) \in B;\ A_n) + \mathsf{P}(\mathbf{w}_n \in B;\ \overline{A}_n) =$$
$$= \mathsf{P}(\mathbf{w} \in B) - \mathsf{P}((w^n, w^{n+1}, \ldots) \in B;\ \overline{A}_n) + \mathsf{P}(\mathbf{w}_n \in B;\ \overline{A}_n).$$

Теорема доказана.

3. *Рассмотрим теперь уравнение* (6). Мы будем следовать по тому же пути, что и в п. 2, но здесь нам потребуются несколько иные характеристики траекторий. Заметим предварительно, что если обозначить через μ величину

$$\mu = \min\{j \geqslant 1:\ w_{n-j} \leqslant N_{n-j}\},$$

то
$$w_n \leqslant N_{n-\mu} + \xi_{n-\mu} - \tau^e_{n-\mu+1} - \ldots - \tau^e_{n-1}$$
и, следовательно ($w_1 \leqslant N_1$),
$$w_n \leqslant \max_{n > j \geqslant 1} \{N_{n-j} + \xi_{n-j} - \tau^e_{n-j+1} - \ldots - \tau^e_{n-1}\}.$$

Для простоты будем сразу предполагать, что последовательность $\{N_k, \tau^e_k, \tau^s_k\}$ стационарна и определена «на всей оси» (т. е. при $-\infty < k < \infty$). Тогда, если обозначить
$$\Delta_k = N_{k-1} - N_k + \xi_{k-1} - \xi_k - \tau^e_k, \tag{12}$$
то мы получим
$$w_n \leqslant V_n \equiv N_{n-1} + \xi_{n-1} + v_{n-1}, \tag{13}$$
где
$$v_{n-1} = \sup_{k \geqslant 0} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta_j \right).$$

Последовательности $\{v_n\}$, $\{V_n\}$, очевидно, также стационарны и являются собственными, если существует $\mathsf{M}\Delta_k < 0$, и последовательность $\{\Delta_k\}$ метрически транзитивна. Обозначим аналогично предыдущему
$$\nu(n) = \min\{k > 1: \min_{1 \leqslant j \leqslant k-1} (V_{n-k+1} + X_{n-k+j} - X_{n-k}) < 0\}. \tag{14}$$

Так как $w_n \leqslant V_n$, то путем прежних рассуждений получаем следующее утверждение.

Теорема 1А. *На множестве $\{\nu(n) \leqslant n\}$ случайная величина w_n, определяемая уравнением* (6), *может быть получена как значение w^*_ν путем применения $\nu = \nu(n)$ раз операции* (6) (*где все величины снабжены звездочками*) *с нулевым начальным условием $w^*_0 = 0$ и случайными величинами $\tau^{e*}_k = \tau^e_{n-\nu+k}$, $\tau^{s*}_k = \tau^s_{n-\nu+k}$, $\xi^*_k = \tau^{s*}_k - \tau^{e*}_k$, $N^*_k = N_{n-\nu+k}$, $k = 0, \ldots, \nu - 1$.*

Замечание 1. Существенное отличие уравнения (6) от (7) состоит в том, что для этого уравнения наличие на отрезке $[n-k, n-1]$ «перепада» траектории $\{w_k\}$ «снизу вверх» (т. е. события $\{\nu_2(n) < k\}$) не вносит «обновления» в эту траекторию, т. е. не устраняет зависимость от всей предыстории. Это связано с тем, что в случае (6) верхняя граница для блуждания не является такой «жесткой», как нижняя или как верхняя для уравнения (7). Метод «обновлений» в более общем виде будет рассмотрен нами в § 6. Результаты этого параграфа могут служить для него хорошей иллюстрацией.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 1 нетрудно видеть, что в качестве начального значения w_0^* в теореме 1А можно брать любое число из отрезка $[0, V_{n-\nu}]$ — от этого числа w_n не зависит.

Замечание 3. В отличие от уравнения (7) определение случайной величины $\nu(n)$ в условиях теоремы 1А требует, вообще говоря, знания всей последовательности $\{N_k, \tau_k^e, \tau_k^s\}$ (см. (13)). Исключение составляет, например, случай

$$N_k+\xi_k\leqslant N, \tag{15}$$

где N фиксировано (это так, например, для уравнений (1)). В этом случае $w_k\leqslant N$ и случайная величина $\nu(n)$ так же, как величина $\nu(n)$ в теореме 1, становится «марковской», т. е. событие $\{\nu(n)\leqslant k\}$ принадлежит σ-алгебре, порожденной величинами

$$(N_{n-1}, \tau_{n-1}^e, \tau_{n-1}^s), \ldots, (N_{n-k-1}, \tau_{n-k-1}^e, \tau_{n-k-1}^s).$$

Мы можем сформулировать теперь аналог теоремы 2 для случая стационарной последовательности $\{N_k, \tau_k^e, \tau_k^s\}$.

Теорема 2А. *Если* $\{N_k, \tau_k^e, \tau_k^s\}$ *стационарна и* $\mathsf{P}(\nu(0)<\infty)=1$, *то при* $n\to\infty$ *для уравнений* (6) *существует предельное стационарное распределение последовательности* w_n, *совпадающее с распределением* $w=(w^0, w^1, \ldots)$. *Алгоритм получения* w^k *описан в теореме* 1А. *При этом для любого измеримого* B

$$|\mathsf{P}(w_n\in B)-\mathsf{P}(w\in B)|\leqslant \mathsf{P}(\nu(0)>n).$$

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы 2.

Теоремы 1А, 2А, как и теоремы 1, 2, содержат конструкцию эффективного алгоритма, который позволяет строить стационарно распределенные решения w^k уравнений (6), (7), используя лишь конечное (но случайное) число элементов $(N_{k-1}, \tau^e_{k-1}, \tau^s_{k-1}) \ldots (N_{k-\nu}, \tau^e_{k-\nu}, \tau^s_{k-\nu})$ последовательности $\{N_k, \tau^e_k, \tau^s_k\}$.

Условие конечности $\nu(0)$ с вероятностью 1 в теореме 2А, очевидно, сильнее условия конечности $\nu(0)$ в теореме 2 и является существенным. Например, если $\xi_j > 0$ с вероятностью 1, то $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 1$ в условиях теоремы 2 и $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 0$ в условиях теоремы 2А, при этом утверждение теоремы 2А будет неверным, так как, например, для целочисленных и четных ξ_j, τ^e_j значение w_n в (6) (его четность) при всех n будет существенно зависеть от начального условия w_1.

Условие $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 1$ в теореме 2А будет выполнено, если $\{V_k\}$ есть собственная последовательность, а последовательность $\{\xi_k\}$ эргодична, $\mathsf{M}\xi_k < 0$. Если $\mathsf{M}\xi_k = 0$, то это условие также будет выполнено, за исключением случая, указанного в замечании к теореме 2. Если $\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots$ независимы и не зависят от V_k, $\mathsf{P}(\xi_k < 0) > 0$, то условие $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 1$ будет выполнено всегда.

Для того чтобы последовательность $\{V_k\}$ была собственной, достаточно, чтобы последовательность

$$-\Delta_k = N_k - N_{k-1} + \xi_k - \xi_{k-1} + \tau^e_k$$

была метрически транзитивной и существовало

$$\mathsf{M}(N_k - N_{k-1} + \xi_k - \xi_{k-1}).$$

4. Мы можем перейти теперь к *теоремам устойчивости*. Пусть наряду с управляющей последовательностью $S = \{N_k, \tau^e_k, \tau^s_k\}$ задана серия стационарных управляющих последовательностей $S^{(r)} = \{N^{(r)}_k, \tau^{(r)\,e}_k, \tau^{(r)\,s}_k\}$. Мы рассмотрим опять сначала уравнение (7) и соответствующие ему стационарную (см. (10)) и достационарную последовательности w и w_n. Наряду с этими последовательностями мы введем в рассмотрение последовательности $w^{(r)}$ и $w^{(r)}_n$, соответствующие управлениям $S^{(r)}$. Индекс (r) у других обозначений, введенных выше, также будет означать соответствие последовательности $S^{(r)}$.

Теорема 3. *Пусть последовательности $S^{(r)}$, S стационарны и удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Конечномерные распределения $S^{(r)}$ слабо сходятся при $r \to \infty$ к распределениям S.*

2. *Для последовательности S выполняется $\mathsf{P}(\nu(0) < \infty) = 1$, где величина $\nu(n)$ определена в теореме* 1.

Тогда конечномерные распределения $w_n^{(r)}$, $w^{(r)}$ для уравнения (7) *сходятся при $n \to \infty$, $r \to \infty$ к конечномерным распределениям w.*

Замечание. Из сравнения с теоремой 1 § 2 видно, что здесь отсутствуют какие-либо дополнительные условия на $S^{(r)}$, помимо сходимости конечномерных распределений. Это связано с тем, что величина $\nu(0)$ является «марковской» и «не зависит от будущего» в отличие от момента достижения $\sup\limits_k Y_{n,k}$, присутствующего в §§ 1, 2.

Доказательство. Как и в теореме 1 § 2, нам надо убедиться, что при $n \to \infty$, $r \to \infty$ сходятся к нулю разности

$$\begin{gathered} \left|\mathsf{P}(w_n^{(r)} \in B) - \mathsf{P}(w^{(r)} \in B)\right|, \\ \left|\mathsf{P}(w^{(r)} \in B) - \mathsf{P}(w \in B)\right| \end{gathered} \tag{16}$$

для любого цилиндрического множества B, являющегося множеством непрерывности распределения w.

Покажем сначала, что

$$\mathsf{P}(\nu^{(r)}(0) > n) \to 0 \tag{17}$$

при $n \to \infty$ равномерно по r. Обозначим (см. определение $\nu_1(n)$, $\nu_2(n)$)

$$A_1(n) = \min_{1 < k \leq n} \min_{1 \leq j \leq k-1} (N_{-k+1} + Y_{0,k-1} - Y_{0,k-j-1}),$$

$$A_2(n) = \min_{1 \leq k \leq n} \min_{1 \leq j \leq k-1} (N_{-k+j+1} - Y_{0,k-1} + Y_{0,k-j-1}),$$

$$A(n) = \min[A_1(n), A_2(n)].$$

Конечность $\nu(0)$ с вероятностью 1 означает, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $n = n(\varepsilon)$ такое, что

$$\mathsf{P}(A(n) < 0) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пользуясь свойствами вероятности и слабой сходимости, мы можем указать столь малое $\alpha > 0$, при котором $-\alpha$ есть точка непрерывности распределения $A(n)$ и

$$\mathsf{P}(A(n) < -\alpha) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но

$$\{\nu^{(r)}(0) > n\} = \{A^{(r)}(n) \geqslant 0\} \subset \{A^{(r)}(n) \geqslant -\alpha\}.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}(\nu^{(r)}(0) > n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

и, значит, $\mathsf{P}(\nu^{(r)}(0) > n) < \varepsilon$ для всех достаточно больших r и n. Соотношение (17) доказано. Так как первая разность в (16) по теореме 2 не превосходит $\mathsf{P}(\nu^{(r)}(0) > n)$, то доказана также сходимость этой разности к 0.

Рассмотрим теперь вторую разность в (16). Утверждение теоремы 2 означает, что на множестве $\{\nu^{(r)}(0) < \infty\}$ вектор $(w^{(r)0}, \ldots, w^{(r)l})$ при каждом l есть функция от $\nu^{(r)}(0) + l$ элементов управляющей последовательности. Эта функция задается правой частью в (7) и непрерывна. Отсюда и из (17) уже нетрудно извлечь утверждение теоремы (соотношение (17) означает, что по существу $(w^{(r)0}, \ldots, w^{(r)l})$ есть непрерывная функция от конечного числа элементов управляющей последовательности).

Поскольку схема доказательства теоремы 3 та же, что и теоремы 1 в § 1, то здесь, по-видимому, как и в § 3, можно получить *оценки скорости, но в более широких предположениях*. Так как убывание $\mathsf{P}(\nu(0) > n)$ при слабой зависимости между ξ_k будет экспоненциальным, то оценки будут иметь порядок $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$, если числом ε оценивается близость распределений $\xi^{(r)}$ и ξ (подробнее см. [6]).

Совершенно ясно, что переход к рассмотрению уравнений (6) не внесет существенных изменений в рассуждения теоремы 3. Надо лишь в соответствующих местах величины $A(n)$ заменить на $A_1(n)$, а N_k на V_k. Однако в отличие от (7) функция, определенная правой частью в (6), разрывна в одной точке $w_n = N_n$. Мы избежим затруднений, связанных с этим обстоятельством, если потребуем дополнительно, чтобы вероятность попадания в эту точку для предельного распределения была равна 0. Таким образом, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3А. *Пусть последовательности $S^{(r)}$ и S стационарны и удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Конечномерные распределения* $\{V_k^{(r)}, \tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s}\}$ *слабо сходятся при* $r\to\infty$ *к распределениям* $\{V_k, \tau_k^e, \tau_n^s\}$ (определение V_k см. в (12), (13)).

2. $\mathsf{P}(\nu(0)<\infty)=1$.

3. *При каждом* k *распределение* $w_k - N_k$, *где* w_k *определяется уравнением* (6) *и начальным условием* $w_1=0$, *непрерывно в точке* 0.

Тогда для уравнений (6) *конечномерные распределения* $w_n^{(r)}$, $w^{(r)}$ *сходятся при* $n\to\infty$, $r\to\infty$ *к конечномерным распределениям* w.

Требуемая в условии 1 сходимость распределений $\{V_k^{(r)}, \tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s}\}$ будет следствием сходимости распределений $\{N_k^{(r)}, \tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s}\}$, усиленной сходимостью моментов $\mathsf{M}|\xi_k^{(r)}|\to\mathsf{M}|\xi_k|$, $\mathsf{M}N_k^{(r)}\to\mathsf{M}N_k$ (см. § 1 и равенства (12), (13), определяющие V_k). В частности, для уравнений (2) достаточна сходимость распределений $\{\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s}\}$ и сходимость $\mathsf{M}\tau_k^{(r)s}\to\mathsf{M}\tau_k^s$.

§ 5. Теоремы устойчивости для систем с бесконечным числом каналов обслуживания

Напомним описание систем обслуживания, указанных в заголовке параграфа. Пусть на основном вероятностном пространстве задана управляющая последовательность

$$\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s;\ j\geqslant 1\}, \tag{1}$$

где τ_j^e, ν_j^e и координаты ν_j^e-мерного вектора $\tau_j^s = (\tau_{j,1}^s, \ldots, \tau_{j,\nu_j^e}^s)$ неотрицательны, а ν_j^e, кроме того, целочисленны. Величины τ_j^e и ν_j^e характеризуют входной поток вызовов: вызовы поступают в систему через интервалы времени τ_1^e, τ_2^e, ... группами объемов ν_1^e, ν_2^e, ..., при этом в каждой группе установлен порядок, в котором эти вызовы следуют. Вектор τ_j^s описывает времена обслуживания вызовов, пришедших в j-й группе. Числа каналов, в которых происходит обслуживание, занумерованы, число их неограничено. Если вызов поступил на обслуживание в некоторый канал, то этот канал считается занятым в течение всего времени обслуживания данного вызова. Для определенности можно считать, что в первую очередь занимаются каналы с меньшими номерами. В этих предположениях задание последовательности (1) будет полностью определять эволюцию системы, если на основном вероятностном пространстве задан также вектор начальных условий $(q_1; \rho_1, \ldots, \rho_{q_1})$, где q_1 — число занятых каналов в начальный момент времени, $\rho_1, \ldots, \rho_{q_1}$ — времена обслуживания «начальных» вызовов в этих занятых каналах.

В том случае, когда распределения последовательностей $\{\tau_j^e\}$, $\{\nu_j^e\}$, $\{\tau_j^s\}$ произвольны, для таких систем в [18] принять обозначение $\langle G, G, G/\infty, 1\rangle$. Если $\{\tau_j^e\}$ есть последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, не зависящая от остальных последовательностей, то первую букву G во введенном обозначении следует заменить символом G_I. Если, кроме того, $\mathsf{P}(\tau_j^e > x) = e^{-\alpha x}$, то мы будем писать $\langle E, G, G/\infty, 1\rangle$. Аналогичные изменения произойдут со вторым и третьим символами при введении соответствующих предположений относительно $\{\nu_j^e\}$ и $\{\tau_j^s\}$. Если $\mathsf{P}(\nu_j^e = 1) = 1$, то обозначение системы примет вид $\langle G, 1, G/\infty, 1\rangle$. Основным объектом изучения будет последовательность значений q_n, обозначающих число занятых линий в момент прихода n-й группы вызовов.

Управляющие последовательности везде в дальнейшем мы будем предполагать стационарными в узком смысле. В этом случае, не ограничивая общности, мы можем считать, что последовательность $\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s\}$ задана на всей оси, т. е. при $-\infty < j < \infty$.

Мы будем изучать условия устойчивости (или непрерывной зависимости) распределения стационарной последовательности $\{q^k\}$ (предельной для $\{q_{n,k} = q_{n+k};\ k \geqslant 0\}$, см. теорему 1) при малых изменениях распределения управляющих последовательностей.

Для иллюстрации рассматриваемой задачи в условиях этого параграфа мы можем рассмотреть следующий пример. Как известно (см., например, [18]), распределение q^k для систем $\langle E, 1, G_I/\infty, 1\rangle$ является пуассоновским. Будет ли для таких систем распределение q^k близко к распределению Пуассона, если

$$\mathsf{P}\left(\tau_j^e \geqslant x\right) = P(x, p, r) = (1-p)e^{-\alpha x} + p\delta_r(x),$$

где p мало́,

$$\delta_r(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant r, \\ 0, & x > r? \end{cases}$$

Аналогичный вопрос можно поставить для систем, «близких» к $\langle G_I, 1, E/m, 1\rangle$ (см. § 32 в [18]), когда

$$\mathsf{P}\left(\tau_j^s \geqslant x\right) = P(x, p, r).$$

В первом случае ответ на вопрос об устойчивости стационарного распределения q^k при малых p оказывается положительным; во втором случае он зависит от числа r, точнее, от величины произведения pr.

Рассмотрим сначала более простые системы, когда $\nu_j^e \equiv 1$, $q_1 = 0$. Для таких систем в [18] получена следующая эргодическая теорема.

Теорема А. *Пусть последовательность* $\{\tau_j^e, \tau_j^s; -\infty < j < \infty\}$ *является стационарной в узком смысле, а последовательность* $\{\tau_j^e\}$, *кроме того, метрически транзитивной. Тогда, если* $\mathsf{M}\tau_j^s < \infty$, *то распределение последовательности* $\{q_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ *при* $n \to \infty$ *монотонно сходится к распределению собственной стационарной последовательности*

$$q^k = I\left(\tau_k^s > \tau_k^e\right) + I\left(\tau_{k-1}^s > \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\right) + \\ + I\left(\tau_{k-2}^s > \tau_{k-2}^e + \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\right) + \ldots, \qquad (2)$$

где $I(B)$ *есть индикатор события* B.

Доказательство этой теоремы является достаточно коротким и понадобится нам в дальнейшем. Поэтому мы его здесь воспроизведем. Имеем

$$q_n = I\left(\tau_1^s > \tau_1^e + \ldots + \tau_{n-1}^e\right) + \\ + I\left(\tau_2^s > \tau_2^e + \ldots + \tau_{n-1}^e\right) + \ldots + I\left(\tau_{n-1}^s > \tau_{n-1}^e\right). \qquad (3)$$

Пользуясь стационарностью, находим *)

$$q_{n+k} \underset{p}{=} q_{n,k} \equiv I(\tau_k^s > \tau_k^e) + I(\tau_{k-1}^s > \tau_{k-1}^e + \tau_k^e) + \ldots$$
$$\ldots + I(\tau_{-n+2}^s > \tau_{-n+2}^e + \ldots + \tau_k^e),$$

так что $q_{n,k} \uparrow q^k$ при $n \to \infty$. Остается показать, что q^0 — собственная случайная величина. Действительно, при некотором $b > 0$

$$\mathsf{P}(q^0 > N) \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{I(\tau_{-j}^s > \tau_{-j}^e + \ldots + \tau_0^e) = 1\}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{\tau_0^e + \ldots + \tau_{-j}^e < b(j+1)\}\right) +$$
$$+ \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{\tau_{-j}^s > b(j+1)\}\right). \qquad (4)$$

Здесь первое слагаемое при надлежащем выборе $b > 0$ сходится к 0 при $N \to \infty$ в силу усиленного закона больших чисел. Второе мажорируется суммой $\sum\limits_{j=N}^{\infty} \mathsf{P}(\tau_0^s > b(j+1))$ и также сходится к 0, так как $\mathsf{M}\tau_0^s < \infty$. Теорема доказана.

Теорема А дает нам явное выражение стационарного распределения числа занятых линий через распределение элементов управляющих последовательностей, на основании которого можно получить, например, для систем $\langle G_I, 1, G_I/\infty, 1\rangle$ явные формулы для распределения q^k (см., например, § 30 в 18]).

Чтобы сформулировать теперь точную постановку задачи устойчивости, мы должны ввести в рассмотрение системы $\langle G, 1, G/\infty, 1\rangle^{(r)}$, управляемые стационарными последовательностями $\{\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s}\}$, зависящими от параметра $r = 1, 2, \ldots$ Во всех обозначениях, принятых прежде и относящихся к системам $\langle\cdot, \cdot, \cdot, \cdot\rangle^{(r)}$, мы будем добавлять верхний индекс (r).

Пусть выполнены следующие условия.

*) Соотношение $\xi \underset{p}{=} \eta$ означает, что распределения ξ и η совпадают.

A. *Существует последовательность* $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, *удовлетворяющая условиям теоремы* A, *такая, что конечномерные распределения последовательностей* $\{\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s}\}$, *также удовлетворяющих условиям теоремы* A, *сходятся к соответствующим конечномерным распределениям* $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$.

B. $M\tau_1^{(r)s} \to Mr_1^s$ *при* $r \to \infty$.

C. *Распределения* $\tau_{-j}^s - X_{-j}^e$, *где* $X_{-j}^e = \sum_{k=-j}^{0} \tau_k^e$, *при всех* $j \geqslant 0$ *непрерывны в точке* 0. *Другими словами, при любом целом* $j \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(\tau_{-j}^s - X_{-j}^e = 0\right) = 0.$$

Теорема 1. *При выполнении условий* A, B *и* C *конечномерные распределения стационарных последовательностей* $\{q^{(r)k}; k \geqslant 0\}$ *сходятся при* $r \to \infty$ *к соответствующим распределениям* $\{q^k; k \geqslant 0\}$.

Замечание. Все сформулированные условия являются существенными. Отказ хотя бы от одного из них сразу позволяет построить пример, где сходимость распределений $q^{(r)k}$ отсутствует.

Доказательство. Покажем сначала, что в неравенстве (4) для $q^{(r)0}$ правая часть сходится к 0 при $N \to \infty$ равномерно по r. В самом деле, при любом фиксированном $b > 0$ последнее слагаемое в (4)

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{\tau_{-j}^{(r)s} > b(j+1)\}\right) \leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau_0^{(r)s} > b_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_N^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau_0^{(r)s} > bx\right) dx = \frac{1}{b} \int_{bN}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau_0^{(r)s} > x\right) dx.$$

Но равномерная по r сходимость к 0 при $N \to \infty$ последнего интеграла необходима и достаточна для сходимости $\mathsf{M}\tau_0^{(r)s} \to \mathsf{M}\tau^s$ при $r \to \infty$ (условие B).

Рассмотрим теперь первое слагаемое в правой части (4):

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{\tau_0^{(r)e} + \ldots + \tau_{-j}^{(r)e} < b(j+1)\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant N} X_k^{(r)} > 0\right),$$

где $X_k^{(r)}=\sum_{j=0}^{k}\left(b-\tau_{-j}^{(r)e}\right)$. Здесь требуемая сходимость вытекает из следующей леммы, содержащейся в доказательстве теоремы 1 § 1.

Лемма. *Пусть* $\{\xi_j\}$ *и* $\{\xi_j^{(r)}\}$, $r=1,2,\ldots$, *— стационарные в узком смысле последовательности такие, что конечномерные распределения* $\{\xi_j^{(r)}\}$ *сходятся при* $r\to\infty$ *к соответствующим распределениям* $\{\xi_j\}$. *Тогда, если* $\{\xi_j\}$ *метрически транзитивна,* $\mathsf{M}\xi_j<0$ *и* $\mathsf{M}\left(\xi_j^{(r)}\right)^+\to\mathsf{M}\xi_j^+$, *то* $\mathsf{P}\left(\max_{k\geqslant N}\sum_{j=0}^{k}\xi_j^{(r)}>0\right)\to 0$ *при* $N\to\infty$ *равномерно по* r.

Рассмотрим теперь при нецелых y разность

$$\mathsf{P}\left(q^{(r)0}\geqslant y\right)-\mathsf{P}\left(q^0\geqslant y\right)=$$
$$=\mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N}I\left(\tau_{-j}^{(r)s}>X_{-j}^{(r)e}\right)\geqslant y\right)-\mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N}I\left(\tau_{-j}^{s}>X_{-j}^{e}\right)\geqslant y\right)+$$
$$+\varepsilon(r,N)+\varepsilon(N),\qquad(5)$$

где в силу доказанного $\varepsilon(N)\to 0$,

$$\varepsilon(r,N)\leqslant\mathsf{P}\left(\sum_{j=N}^{\infty}I\left(\tau_{-j}^{(r)s}>X_{-j}^{(r)e}\right)>0\right)\to 0$$

при $N\to\infty$ равномерно по r. Пусть $R(x)$ — функция равномерного на $[0,1]$ распределения. Положим при некотором $\delta>0$

$$I_{j-}=R\left(\frac{\tau_{-j}^{s}-X_{-j}^{e}}{\delta}\right),\qquad I_{j+}=R\left(1+\frac{\tau_{-j}^{s}-X_{-j}^{e}}{\delta}\right),$$
$$I_j=I\left(\tau_{-j}^{s}>X_{-j}^{e}\right).$$

Тогда, очевидно, $I_{j-}\leqslant I_j\leqslant I_{j+}$. Так как $R(x)$ — непрерывная функция, то при естественных соглашениях относительно обозначений при $r\to\infty$

$$\mathsf{P}\left(I_{j\pm}^{(r)}<x\right)\Rightarrow\mathsf{P}\left(I_{j\pm}<x\right).$$

Поэтому найдутся сколь угодно малые $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I\left(\tau_{-j}^{(r)s} > X_{-j}^{(r)e}\right) \geqslant y\right) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j+}^{(r)} \geqslant y\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j+} \geqslant y-\varepsilon\right). \qquad (6)$$

Но по условию C вероятность события

$$A_{N,\delta} = \bigcup_{j=0}^{N} \{I_{j+} \neq I_{j-}\}, \qquad (7)$$

равная $\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{N}\left\{\left|\tau_{-j}^{s} - X_{-j}^{e}\right| \leqslant \delta\right\}\right)$, стремится к 0 при

$$\mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j+} \geqslant y-\varepsilon\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j} \geqslant y\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j+} \geqslant y-\varepsilon;\ \bar{A}_{N,\delta}\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j} \geqslant y;\ \bar{A}_{N,\delta}\right) +$$
$$+ \varepsilon_1(\delta, N) = \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_j \in [y-\varepsilon, y);\ \bar{A}_{N,\delta}\right) + \varepsilon_1(\delta, N),$$

где $|\varepsilon_1(\delta, N)| \leqslant \mathsf{P}(A_{N,\delta})$. Если мы выберем ε так, чтобы полуинтервал $[y-\varepsilon, y)$ не содержал целых чисел, то событие $\left\{\sum_{j=0}^{N} I_j \in [y-\varepsilon, y)\right\}$ станет пустым и в силу (5), (6) мы получим

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\mathsf{P}\left(q^{(r)0} \geqslant y\right) - \mathsf{P}\left(q^0 \geqslant y\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{r\to\infty} \varepsilon(r, N) + \varepsilon(N) + \varepsilon_1(\delta, N). \qquad (8)$$

Из установленных нами свойств функций $\varepsilon(r, N)$, $\varepsilon_1(\delta, N)$ и $\varepsilon(N)$ и из независимости левой части в (8) от δ и N следует, что оцениваемый $\limsup$ не превосходит 0. Совершенно аналогично с помощью неравенства

$$\liminf_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I\left(\tau_{-j}^{(r)s} > X_{-j}^{(r)e}\right) \geqslant y\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{N} I_{j-} \geqslant y+\varepsilon\right)$$

убеждаемся, что

$$\liminf_{r\to\infty}(\mathsf{P}(q^{(r)0}\geqslant y)-\mathsf{P}(q^0\geqslant y))\geqslant 0$$

для любых нецелых y. Утверждение теоремы о сходимости одномерных распределений $q^{(r)k}$ тем самым доказано.

Идея доказательства была достаточно простой: в представлении

$$q^{(r)k}=\sum_{j=0}^{\infty} I\left(\tau_{k-j}^{(r)s}>X_k^{(r)e}-X_{k-j-1}^{(r)e}\right) \tag{9}$$

роль «хвоста» $\sum\limits_{j=N}^{\infty}$ оказалась равномерно по r малой при больших N. Сходимость же распределений конечных сумм $\sum\limits_{j=0}^{N}$ в (9) определяется при выполнении условия С сходимостью распределений управляющих последовательностей. Поэтому совершенно ясно, что, используя этот же прием, мы получим также и сходимость произвольных конечномерных распределений последовательностей $\{q^{(r)k};\ k\geqslant 0\}$ к соответствующим распределениям последовательности $\{q^k;\ k\geqslant 0\}$. Доказательство теоремы закончено.

Перейдем теперь к более *сильным теоремам непрерывности для систем* $\langle G,\ G,\ G/\infty,\ 1\rangle$. Рассмотрим более общую ситуацию, когда ν_j^e произвольно и $q_1\neq 0$. И рассмотрим более точную характеризацию состояния системы с помощью процессов

$$\begin{aligned}q_n(x)=\sum_{j=1}^{q_1} I\left(\rho_j>\tau_1^e+\ldots+\tau_{n-1}^e+x\right)+\\+\sum_{j=1}^{\nu_1^e} I\left(\tau_{1,j}^s>\tau_1^e+\ldots+\tau_{n-1}^e+x\right)+\ldots\\\ldots+\sum_{j=1}^{\nu_{n-1}^e} I\left(\tau_{n-1,j}^s>\tau_{n-1}^e+x\right),\end{aligned}$$

так что $q_n(0)=q_n$.

Процесс $\{q_n(x);\ x\geqslant 0\}$, очевидно, является скачкообразным и невозрастающим. Его можно однозначно описать начальным значением $q_n(0) = q_n$ и положением $x_1, \ldots, x_{q_n}$ точек единичных скачков. Вектор $(x_1, \ldots, x_{q_n})$ есть вектор времен, в течение которых будут еще обслуживаться вызовы, находившиеся в системе перед приходом n-й партии. Сама величина $q_n(x)$ означает, сколько вызовов из тех, что появились перед моментом t_n прихода n-й партии, останутся в системе спустя время x после момента t_n.

Соответствующую стационарную последовательность процессов $q^k(x)$ мы определим соотношением

$$q^k(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k^e} I(\tau_{k,j}^s > \tau_k^e + x) + \\ + \sum_{j=1}^{\nu_{k-1}^e} I(\tau_{k-1,j}^s > \tau_{k-1}^e + \tau_k^e + x) + \ldots$$

Как и прежде, находим, что

$$\mathsf{P}\left(q^0(x) > \sum_{j=0}^{N} \nu_{-j}^e + q_1\right) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{\tau_0^e + \ldots + \tau_{-j}^e < b(j+1)\}\right) + \\ + \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \{\max_k \tau_{-j,k}^s > b(j+1)\}\right).$$

Так как $\max\limits_k \tau_{0,k}^s \leqslant [\tau_0^s] \equiv \sum\limits_{j=1}^{\nu_0^e} \tau_{0,j}^s$, то, предполагая, что начальные условия являются собственными (q_1 и ρ_j конечны), мы получим следующее утверждение.

Т е о р е м а В. *Пусть последовательность $\{\tau_n^e, \nu_n^e, \tau_n^s; -\infty < n < \infty\}$ стационарна в узком смысле, а последовательность $\{\tau_j^e\}$, кроме того, метрически транзитивна. Тогда, если $\mathsf{M}[\tau_0^s] < \infty$, то распределение последовательности процессов $\{q_{n+k}(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$ при $n \to \infty$ сходится к распределению собственного стационарного по k процесса $\{q^k(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$.*

Точнее: существуют процессы $\{\tilde{q}^k(x) = \tilde{q}^k_n(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *распределенные при всех* n *как* $\{q^k(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$ *и такие, что при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{x \geqslant 0} \{q_{n+k}(x) \neq q^k_n(x)\}\right) \to 0.$$

Обратимся теперь к *теореме непрерывности*. Мы будем говорить, что *распределение процессов* $\{q^{(r)0}(x);\ x \geqslant 0\}$ *при* $t \to \infty$ *слабо сходится к распределению* $\{q^0(x);\ x \geqslant 0\}$, *если для некоторого всюду плотного множества* S *распределение* $(q^{(r)0}(x_1), \ldots, q(r)0(x_m))$ *слабо сходится к распределению* $(q^0(x_1), \ldots, q^0(x_m))$ *при* $x_1 \in S, \ldots, x_m \in S$.

Обозначим через S_0 множество значений $x \geqslant 0$, которые являются точками непрерывности распределений $\tau^s_{-l,k} - X^e_{-l}$ при всех $l \geqslant 0$ и k.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* A *и условие* B$_1$: $\mathsf{M}[\tau^{(r)s}] \to \mathsf{M}[\tau^s]$ *при* $r \to \infty$.

Тогда распределение процессов $\{q^{(r)0}(x);\ x \geqslant 0\}$ *слабо сходится при* $r \to \infty$ *к распределению* $\{q^0(x);\ x \geqslant 0\}$. *При этом множестве сходимости* S *совпадает с множеством* S_0.

Отметим, что теорема 1 в части, касающейся одномерных распределений, является следствием теоремы 2 и что условия теоремы 2 слабее условий теоремы 1, где присутствует условие С. Последнее обстоятельство станет понятным, если, переходя к доказательству теоремы и повторяя в новых условиях рассуждения теоремы 1, мы получим сходимость распределений $q^{(r)0}(x)$ для всех значений $x \geqslant 0$, которые являются точками непрерывности распределений $\tau^s_{-l,k} - X^e_{-l}$ при всех l и k (должна сходиться к 0 при $\delta \to 0$ вероятность $\mathsf{P}\left(\bigcup_{l=0}^{N} \bigcap_{i=0}^{\nu^e_l} \{|\tau^s_{-l,i} - X^e_{-l} - x| \leqslant \delta\}\right)$, ср. с (17)). Так как множество таких x совпадает к полупрямой $x \geqslant 0$, из которой выброшено не более чем счетное множество, то утверждение теоремы 2 можно считать доказанным.

Совершенно аналогичным образом может быть получена

Теорема 2А. *При выполнении условий теоремы 2 будет иметь место сходимость распределений «случайных полей»* $\{q^{(r)k}(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$. *То есть при любых* $k_1, \ldots, k_m$ *и* $x_1 \in S_0, \ldots, x_m \in S_0$ *будут сходиться распределения векторов* $\left(q^{(r)k_1}(x_1), \ldots, q^{(r)k_m}(x_m)\right)$.

Отметим также, что можно получать сходимость распределений $q^{(r)k}(x)$ и в случайные моменты времени. Мы сформулируем здесь следующее утверждение для систем $\langle G, 1, G/\infty, 1\rangle$, которое с очевидностью вытекает из всех предыдущих рассмотрений и которое понадобится в § 6.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* А, В, С *теоремы* 1.

Тогда будет иметь место сходимость при $r \to \infty$ *распределений векторов*

$$\left(q^{(r)k}(0),\ q^{(r)k}\left(\tau_{k+1}^{(r)e}\right), \ldots,\ q^{(r)k}\left(\tau_{k+1}^{(r)e} + \ldots + \tau_{k+N}^{(r)e}\right)\right).$$

При этом будут сходиться также совместные распределения таких векторов при разных k.

§ 6. Общие эргодические теоремы и теоремы устойчивости для последовательностей $w_{n+1} = f(w_n, \tau_n)$

В этом параграфе мы изложим некоторый подход к доказательству эргодических теорем и теорем устойчивости, который может применяться при исследовании самых разных типов процессов обслуживания (см., например, § 7). По существу он уже использовался нами в §§ 1, 2, 4, а также в [22], [26] для доказательства эргодической теоремы и теоремы устойчивости для систем с отказами и в [3]—[6], [30] для получения оценок скорости сходимости для различных типов систем обслуживания (для эргодических теорем см. также [18], [7], [117]).

Речь будет идти о подходе, который можно было бы назвать «методом обновлений». Он представляет и самостоятельный интерес, поскольку может оказаться полезным для решения задач и вне теории обслуживания.

Нам понадобится здесь более общая постановка задачи.

Пусть $\{\boldsymbol{\tau}_j;\ -\infty < j < \infty\}$ — векторнозначная стационарная, метрически транзитивная последовательность (в дальнейшем жирными буквами мы будем обозначать векторы). Мы рассмотрим векторнозначную последовательность $\boldsymbol{w}_n$ (размерности $\boldsymbol{w}_n$ и $\boldsymbol{\tau}_j$, вообще говоря, различны), которая определяется начальным значением $\boldsymbol{w}_1$ и рекуррентными соотношениями

$$\boldsymbol{w}_{n+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}_n, \boldsymbol{\tau}_n), \quad n \geqslant 1. \tag{1}$$

Позже мы увидим, что основные типы систем обслуживания имеют характеристики состояния, описываемые уравнениями вида (1); таковыми являются, например, многоканальные системы с очередью и с отказами (см. § 7).

Задача состоит в выяснении условий, при которых последовательность $\{\boldsymbol{w}_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ сходится при $n \to \infty$ к некоторой стационарной последовательности $\{\boldsymbol{w}^k;\ k \geqslant 0\}$, и условий устойчивости этой второй последовательности (или последовательности $\{\boldsymbol{w}_n\}$) при малых изменениях управляющей последовательности $\{\boldsymbol{\tau}_j\}$.

Если $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$, а функция $\boldsymbol{f} \geqslant \boldsymbol{0}$ непрерывна слева и монотонна по первому аргументу, то эргодичность, как было установлено Лойнесом ([101], см. также [18]), имеет место всегда (случай $\boldsymbol{w}^k = \infty$ не исключается). Однако приведенные выше требования на $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{f}$ весьма ограничительны, а метод доказательства в [101] не удается использовать для получения теорем устойчивости.

Пусть $\mathfrak{F}_{n,l}$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\boldsymbol{\tau}_n, \ldots, \boldsymbol{\tau}_l$. Обозначим через T взаимно однозначное, сохраняющее меру преобразования сдвига множеств из σ-алгебры $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{-\infty, \infty}$ такое, что

$$T\{\omega\colon \boldsymbol{\tau}_j \in \boldsymbol{B}_j,\ j = 1, \ldots, k\} = \{\omega\colon \boldsymbol{\tau}_{j+1} \in \boldsymbol{B}_j,\ j = 1, \ldots, k\}$$

для любого набора борелевских множеств $\boldsymbol{B}_j$ из области значений $\boldsymbol{\tau}_j$. Соответствующие преобразования над $\mathfrak{F}$-измеримыми функциям обозначим буквой U так, что

$$\boldsymbol{\tau}_{j+1}(\omega) = U\boldsymbol{\tau}_j(\omega).$$

Аналогично определяются преобразования T^{-1}, U^{-1}. Если $\zeta(\omega)$ измерима относительно $\mathfrak{F}$, то последовательность $\zeta_n = U^n\zeta$, $-\infty < n < \infty$, будет вместе с $\{\tau_j\}$ стационарной и метрически транзитивной.

Относительно начального условия w_1 можно предполагать, что оно либо не зависит от $\{\tau_j\}$, либо измеримо относительно $\mathfrak{F}_{-\infty, 0}$ (первое легко сводится ко второму расширением соответствующих σ-алгебр). Чтобы избежать в дальнейшем не существенных оговорок, связанных с начальными условиями, мы будем считать значение w_1 фиксированным *).

Определение. *События* $A_n \in \mathfrak{F}_{-\infty, n+L}$, $n = 1, 2, \ldots$, *называются обновляющими на интервалах* $[n, n+L]$, *если случайные величины* $w_{n+k} = w_{n+k}(\omega)$ *при* $k > L$ *на множестве* $\omega \in A_n$ *представимы в виде*

$$w_{n+k} = \varphi(\tau_n, \ldots, \tau_{n+k-1}), \tag{2}$$

где φ *зависит лишь от числа аргументов и определяется выбором последовательности* A_n.

Другими словами, выполнены следующие два свойства:

1. w_{n+k} при $n > L$ на множестве A_n измеримы относительно $\mathfrak{F}_{n, n+k-1}$ (т. е. $\{\omega: w_{n+k} \in B\} A_n \in \mathfrak{F}_{n, n+k-1} A_n$ для любого борелевского B).

2. При $\omega \in A_n T^{-s} A_{n+s}$ и любых $s > 0$, $k > L$ выполняется

$$w_{n+k}(\omega) = U^{-s} w_{n+k+s}(\omega).$$

Попадание w_n в любую фиксированную точку x, очевидно, представляет собой обновляющее событие. В частности, событие $A_n = \{w_n = 0\} \in \mathfrak{F}_{1, n-1}$ будет обновляющим, так как для $\omega \in A_n$ имеем $w_{n+1} = f(0, \tau_n)$, $w_{n+2} = f(f(0, \tau_n), \tau_{n+1})$ и т. д.

В условиях § 4 (т. е. для функций f определяемых равенствами (6), (7) § 4) мы использовали обновляющие события именно такого вида. Событие $\{\nu(n+L) \leqslant L\}$ в теоремах 1А, 2А § 4 означает, что на интервале $[n, n+L]$ по крайней мере один раз произошло попадание в точку 0, так что событие $\{\nu(n+L) \geqslant L\}$ также является обновляющим.

---

*) Если w_1 не зависит от $\{\tau_j\}$, то это допущение вообще не ограничивает общности. Мы могли бы, например, рассматривать условные относительно w_1 распределения w_n.

В § 3 мы приведем примеры более сложных обновляющих событий для функций f, появляющихся при описании многоканальных систем.

Обновляющее событие A_n называется *стационарным*, если

$$A_n = T^n A_0, \quad A_0 \in \mathfrak{F}_{-\infty, L}.$$

Докажем теперь следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть существует последовательность обновляющих событий A_j такая, что*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{l=l_0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} A_j T^{-l} A_{j+l}\right) \to 1 \tag{3}$$

при $n \to \infty$ для какого-нибудь $l_0 > 0$. Тогда распределение последовательности $\{w_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ сходится при $n \to \infty$ к распределению некоторой стационарной последовательности $\{w^k; k \geqslant 0\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (1). *Сходимость здесь понимается в следующем сильном смысле: существуют последовательности $\{w_n^k;\ k \geqslant 0\}$, распределенные так же, как $\{w^k; k \geqslant 0\}$, такие, что при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{w_{n+k} \neq w_n^k\}\right) \to 0. \tag{4}$$

Если события A_n стационарны, то $T^{-l} A_{j+l} = A_j$ и для выполнения (3) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathsf{P}(A_0) > 0.$$

Замечание 1. В первой части теоремы метрическая транзитивность $\{\tau_j\}$ не требуется.

Замечание 2. Если w_n образуют цепь Маркова (скажем, в случае, когда τ_j независимы), то критерий эргодичности, сформулированный в теореме, становится близким к условию существования возвратного положительного состояния.

Доказательство. Рассмотрим значения w_n и w_{n+k}, $n > 0$, $k > 0$, измеримые соответственно относительно $\mathfrak{F}_{1, n-1}$, $\mathfrak{F}_{1, n+k-1}$. Величины $u_n = U^{-n+1} w_n$ и $u_{n+k} = U^{-n-k+1} w_{n+k}$ будут измеримы относительно $\mathfrak{F}_{-n+2, 0}$, $\mathfrak{F}_{-n-k+2, 0}$. Из определения обновляющих событий

Чтобы получить теперь процессы w_n^k, фигурирующие в утверждении теоремы, достаточно положить

$$w_n^k = U^{n-1} w^{k+1}.$$

Требуемое совпадение w_{n+k} и w_n^k при всех $k \geqslant 0$ (или, что то же, $U^{-n+1} w_{n+k}$ и w^{k+1}) следует непосредственно из характера сходимости $U^{-n+1} w_{n+k}$ при $n \to \infty$ (как мы уже отмечали, с некоторых пор значение $U^{-n+1} w_{n+k}$ перестает меняться, см. (6)).

Нам осталось доказать последнее утверждение теоремы, относящееся к стационарным A_j. В этом случае вероятность в условии (3) равна $\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ и необходимость условия $\mathsf{P}(A_0) > 0$ очевидна. Докажем его достаточность. Положим $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Так как $A_j = T^j A_0$, то $TB = \bigcup_{j=1}^{\infty} TA_j = \bigcup_{j=2}^{\infty} A_j \subset B$. Кроме того, так как T сохраняет меру, то $\mathsf{P}(TB) = \mathsf{P}(B)$. Отсюда вытекает, что с точностью до множества меры 0 справедливо $TB = B$ и, следовательно, B является инвариантным относительно T. В силу метрической транзитивности $\{\tau_j\}$ это означает, что $\mathsf{P}(B) = 1$ или 0. Так как $\mathsf{P}(B) \geqslant \mathsf{P}(A_0) > 0$, то $\mathsf{P}(B) = 1$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \to 1$$

при $n \to \infty$ и справедливо (3). ◀

Перейдем к *теоремам устойчивости*. Мы будем рассматривать условия, связанные с методом обновлений, при которых малое изменение распределения последовательности $\{\tau_j\}$ влечет за собой малое изменение стационарной или достационарной последовательности $\{w_n;\ n \geqslant 1\}$. Точнее, пусть $\{\tau_j^{(r)}\}$, $r = 1, 2, \ldots$, есть семейство управляющих последовательностей, зависящих от параметра r, и $\{w^{(r)\,k};\ k \geqslant 0\}$, $\{w_n^{(r)};\ n \geqslant 1\}$, $r = 1, 2, \ldots,$ — соответствующие им стационарные и достационарные последовательности (в дальнейшем верхний индекс (r) у различных обозначений будет указывать на соответствие управляющей последовательности $\{\tau_j^{(r)}\}$). Предполагается, что последовательности $\{\tau_j^{(r)}\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, так что $\{w_{n+k}^{(r)};\ k \geqslant 0\}$ сходятся (в смысле (4)) к $w^{(r)k}$. Предположим теперь, что выполнено условие А.

А. *Конечномерные распределения* $\{\tau_j^{(r)}\}$ *сходятся при* $r \to \infty$ *к распределениям* $\{\tau_j\}$.

Будет ли это означать сходимость распределений $\{w^{(r)k}\}$ и $\{w^k\}$ или распределений $\{w_{n+k}^{(r)}\}$ и $\{w^k\}$ при $r \to \infty$, $n \to \infty$?

Чтобы упростить изложение, мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда существуют стационарные обновляющие события A_n. Из доказательства теоремы 1 видно, что величины w^k, как и w_k, можно считать измеримыми относительно $\mathfrak{F}_{-\infty,\,k-1}$ (см. (7)), поэтому в дальнейшем мы можем под $\{w_n\}$ понимать как стационарную, так и достационарную последовательности. Наличие стационарности $\{w_n\}$ или ее отсутствие, как правило, не будут влиять на ход наших рассуждений, а использование одного обозначения для обоих случаев сократит текст.

Мы будем предполагать далее, что выполнено условие В.

В. *Обновляющие события* $A_n^{(r)}$ *и* A_n *обладают свойствами*

$$\mathsf{P}(A_0) > 0, \quad \liminf_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} A_j^{(r)}\right) \geqslant 1 - p(k) > 0,$$

где $p(k) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Это условие всегда выполнено, если выполнено B_1.

$$\mathsf{P}(A_0) > 0, \quad \liminf_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} A_j^{(r)}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} A_j\right)$$

при любом $k \geqslant 0$.

Последнее условие более прозрачно и в свою очередь всегда выполнено, если справедливо

B_2. *События* A_k, $\mathsf{P}(A_k) > 0$ *допускают представление в виде открытых множеств*

$$A_k = \{\gamma_{k,1} > 0, \ \ldots, \ \gamma_{k,s} > 0\}$$

при некотором $s \geqslant 1$, *где* $\gamma_{k,j}$ *измеримы относительно* $\mathfrak{F}_{-\infty, k+L}$, $U\gamma_{k,j}=\gamma_{k+1,j}$, *распределения* $(\gamma_{0,1}^{(r)}, \ldots, \gamma_{0,s}^{(r)})$ *слабо сходятся при* $r \to \infty$ *к распределению* $(\gamma_{0,1}, \ldots, \gamma_{0,s})$ (*сходимость здесь достаточно требовать в окрестности* 0).

Нам понадобится также условие третьего типа, связанное со свойствами функции φ, присутствующей в определении обновляющих событий.

С. *Функции* $\varphi(y_1, \ldots, y_k)$ *в* (2) *непрерывны почти наверное относительно распределения* $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$.

Замечание. При проверке условия С может возникнуть вопрос о том, как найти функцию φ по функции f и событиям A_k. Допустим, что $A_n \subset B_n$, где B_n есть более широкое обновляющее событие, обладающее свойством

$$B_n \in \sigma(w_n, \ldots, w_{n+L}; \tau_n, \ldots, \tau_{n+L}) \subset \mathfrak{F}_{-\infty, n+L}.$$

Во всех приложениях, которые упоминаются в этой главе, B_n задано в виде некоторых соотношений

$$\psi(w_n, \ldots, w_{n+L}; \tau_n, \ldots, \tau_{n+L}) \in G,$$

где векторнозначная функция ψ и множество G от n не зависят. Обозначим через a какое-нибудь значение w_{n-1}, из которого «можно попасть» в B_n, т. е.

$$\mathbf{P}(\psi(w_n', \ldots, w_{n+L}'; \tau_n, \ldots, \tau_{n+L}) \in G) > 0,$$

где

$$w_n' = f(a, \tau_{n-1}),$$

$$w_{n+1}' = f_2(a, \tau_{n-1}, \tau_n) = f(f(a, \tau_{n-1}), \tau_n), \ldots$$

Тогда, очевидно,

$$w_{n+k} = f_{k+1}(a, \tau_{n-1}, \ldots, \tau_{n+k-1}),$$

где

$$f_{k+1}(a, y_1, \ldots, y_{k+1}) = f(f_k(a, y_1, \ldots, y_k), y_{k+1})$$

и следует положить

$$\varphi(y_1, \ldots, y_k) = f_{k+1}(a, y_0, y_1, \ldots, y_k).$$

Здесь правая часть на обновляющем событии не зависит от y_0 и от a (если a заменить на другую точку, из которой также можно попасть в B_n).

Совершенно аналогично предыдущему мы могли бы в качестве a взять значение w_{n-s} при любом $s > 1$, из которого можно попасть в B_n. Тогда мы получили бы

$$\varphi(y_1, \ldots, y_k) = f_{k+s}(a, y_{-s+1}, \ldots, y_k),$$

где правая часть зависит только от последних k аргументов.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A, B, C. *Тогда конечномерные распределения* $\{w_{n+k}^{(r)};\ k \geqslant 0\}$ *слабо сходятся при* $n \to \infty$, $r \to \infty$ *к конечномерным распределениям* $\{w^k;\ k \geqslant 0\}$.

Замечание. Очевидно, что если $\{w_n^{(r)}\}$, $\{w_n\}$ стационарны, то условие $n \to \infty$ становится излишним. Для нестационарного случая на самом деле будет доказано, что распределения *одновременно всех последовательностей* $\{w_{n-k}^{(r)};\ k \geqslant 0\}$ при $n > n_0$ сходятся при $n_0 \to \infty$, $r \to \infty$ к распределениям $\{w^k;\ k \geqslant 0\}$.

Вопрос о близости распределений w_n и $w_n^{(r)}$ при конечных n обычно затруднений не вызывает и гарантируется условием A и непрерывностью почти наверное $f_{n-1}(w_1, y_1, \ldots, y_{n-1})$ относительно распределения $(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что последовательности $\{w_n^{(r)}\}$ при достаточно больших r также удовлетворяют условиям теоремы 1. Действительно, из условия B следует, что

$$\liminf_{r \to \infty} \mathsf{P}\left(A_0^{(r)}\right) > 0, \tag{9}$$

и, следовательно, с некоторых пор $\mathsf{P}\left(A_0^{(r)}\right) > 0$.

Рассмотрим случайную величину ν, равную наименьшему $k > L$, при котором произошло A_{n-k}. Другими словами, $\nu(\omega) = k$ при $\omega \in B_k = \bar{A}_{n-L-1}\bar{A}_{n-L-2} \ldots \ldots \bar{A}_{n-k+1}A_{n-k}$. Так как $\mathsf{P}\left(\bigcup_{k>L} B_k\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k<n-L} A_k\right) = 1$, то для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем указать N такое, что

$$\mathsf{P}(\nu > N) < \varepsilon, \quad p(N) < \varepsilon.$$

Пусть теперь x — точка непрерывности распределения

$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_{N+L})$. Тогда при любом $n > N + L$

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(w_n^{(r)} < x\right) \leqslant \limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(w_n^{(r)} < x,\ \nu^{(r)} \leqslant N\right) + \varepsilon. \quad (10)$$

Используя условие обновления, мы получим

$$\mathsf{P}\left(w_n^{(r)} < x;\ \nu^{(r)} \leqslant N\right) = \mathsf{P}\left(w_n^{(r)} < x;\ \bigcup_{j=1}^{N} A_{n-L-j}^{(r)}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\varphi\left(\tau_{n-L-N}^{(r)}, \ldots, \tau_{n-1}^{(r)}\right) < x;\ \bigcup_{j=1}^{N} A_{n-L-j}^{(r)}\right).$$

Поэтому, продолжая неравенства (10), мы находим в силу условий А, С

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(w_n^{(r)} < x\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\varphi\left(\tau_1, \ldots, \tau_{N+L}\right) < x\right) + \varepsilon.$$

Аналогичным образом находим

$$\mathsf{P}\left(w^n < x\right) \geqslant \mathsf{P}\left(w^n < x;\ \bigcup_{j=1}^{N} A_{n-L-j}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\varphi\left(\tau_{n-L-N}, \ldots, \tau_{n-1}\right) < x,\ \bigcup_{j=1}^{N} A_{n-L-j}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{P}\left(\varphi\left(\tau_1, \ldots, \tau_{N+L}\right) < x\right) - \varepsilon.$$

Таким образом, при $n > N + L$, $N = N(\varepsilon)$

$$\limsup_{r\to\infty} \mathsf{P}\left(w_n^{(r)} < x\right) \leqslant \mathsf{P}\left(w^n < x\right) + 2\varepsilon.$$

Аналогичным образом устанавливается обратное неравенство для $\liminf$.

Сходимость произвольных конечномерных распределений доказывается точно так же. Теорема доказана.

§ 7. Эргодические теоремы и теоремы устойчивости для многоканальных систем с отказами и с очередью

Системы, рассматриваемые в этом параграфе, отличаются от систем $\langle G, G, G/\infty, 1\rangle$, описанных в § 5, следующим. Число m каналов, в которых происходит обслуживание вызовов, конечно: $m < \infty$. Если в момент прихода очередной партии вызовов число свободных каналов оказалось меньше, чем число пришедших вызовов, то «избыточные» (в порядке следования) вызовы становятся в очередь — для систем с ожиданием и получают отказ и выбывают из рассмотрения — для систем с отказами. Для систем с ожиданием вызовы, находящиеся в очереди, поступают на обслуживание по мере освобождения каналов.

Мы будем рассматривать здесь для простоты лишь системы $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$ и $\langle G, 1, G/m, 1\rangle_R$ в обозначениях [18], у которых $\nu_j^e \equiv \nu_j^s \equiv 1$.

Переход к системам $\langle G, G, G/m, 1\rangle$ и $\langle G, G, G/m, 1\rangle_R$ (т. е. к случаю $\nu_j^e \not\equiv 1$) вносит лишь технические трудности, не меняя существа рассмотрений (ср. с § 5 и с гл. 5, 7 в [18]).

Одной из основных характеристик рассматриваемых систем является вектор времени ожидания

$$w_n = (w_{n,1}, \ldots, w_{n,m}),$$

где $w_{n,i}$ есть время с момента прихода n-го вызова до освобождения i каналов от вызовов, пришедших раньше n-го (т. е. от первых $n-1$ вызовов). Ясно, что обычная для систем с отказами характеристика состояния q_n, равная числу занятых (или свободных) каналов в момент прихода n-го вызова, равна числу ненулевых (нулевых) координат вектора w_n.

Пусть $x^+ = \max(0, x)$ и для вектора x положим

$$x^+ = (x_1^+, \ldots, x_m^+).$$

Символ $R(x)$ будет обозначать вектор, полученный из x упорядочиванием по возрастанию его координат, так что первая координата $R(x)$ есть $\min(x_1, \ldots, x_m)$. Пусть, кроме того,

$$e = (1, 0, \ldots, 0), \quad i = (1, 1, \ldots, 1),$$

$I(A)$ — индикатор множества A. Тогда нетрудно видеть, что для систем с отказами имеет место следующее рекуррентное соотношение для w_n:

$$w_{n+1} = R\left(w_n + \tau_n^s e I(w_{n,1} = 0) - \tau_n^e i\right)^+, \tag{1}$$

где τ_n^e, τ_n^s — элементы управляющей последовательности (см. (1) § 5) (операции R и $(\cdot)^+$ перестановочны).

Для систем с очередью (с ожиданием) вместо (1) мы будем иметь хорошо известное равенство

$$w_{n+1} = R\left(w_n + \tau_n^s e - \tau_n^e i\right)^+. \tag{2}$$

Соотношение (2) так же, как и (1), есть, очевидно, равенства типа (1) § 6, изучавшиеся нами в предыдущем параграфе при $\tau_n = (\tau_n^e, \tau_n^s)$.

Для рассматриваемых многоканальных систем при *произвольных* стационарных управляющих последовательностях (τ_j^e, τ_j^s) *и при произвольных начальных условиях* пока не удается получить столь же законченные теоремы эргодичности и устойчивости, которые были приведены в §§ 2, 3, 5. Метод обновлений, которым мы будем пользоваться, заставляет накладывать на системы некоторые условия, которые, хотя и не являются сильно ограничительными, все же с существом дела, по-видимому, не связаны. Следует отметить, что для более простых систем, например, одноканальных, это не так. Результаты §§ 2, 3 не содержат лишних условий, хотя полностью основаны на методе обновлений. Именно это позволяет свести зависимость изучаемых характеристик от управляющей последовательности по существу к зависимости от конечного числа ее элементов.

Возможно, что и для многоканальных систем $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$ с очередью и с отказами при естественных ограничениях на $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$ также всегда существуют обновления. Во всяком случае для систем $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle$ это так (см. теорему 5 и [7]). Стало быть, в этом смысле *введения условия о существовании обновляющих событий не есть уменьшение общности.* Дополнительные же ограничения, появляющиеся в теоремах этого параграфа, связаны с требованием существования событий *одного конкретного вида,* который является наиболее простым для проверки. Упомянутые выше дополнительные ограничения, возникающие в связи с методом обновлений при простейших обновляющих событиях, состоят, грубо говоря, в требовании неограниченности случайных величин τ_j^e. Это условие, как мы уже отмечали, по-видимому, является излишним.

Рассмотрим сначала применения *эргодической* теоремы 1 § 6 к системам $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$ и $\langle G, 1, G/m, 1\rangle_R$.

Здесь роль функции f играют функции, стоящие в правых частях (2) и (1). Поскольку никаких условий непосредственно на функцию f в теореме 1 § 6 не накладывалось, то ее влияние будет сказываться лишь на конструкции обновляющих множеств.

Мы будем предполагать, разумеется, что последовательность $\tau_j = (\tau_j^e, \tau_j^s)$ *метрически транзитивна и не зависит от* w_1.

Начнем с примеров, которые будут существенны для дальнейшего. Рассмотрим последовательность w_n и положим

$$A_n = \left\{w_{n,1} = 0,\ w_{n,j} \leqslant \sum_{k=0}^{j-2} \tau_{n+k}^e;\ j = 2, \ldots, m\right\}. \tag{3}$$

Непосредственно с помощью рекуррентных формул (1), (2) устанавливается, что A_n есть обновляющее событие при $L = m - 2$, так как на множестве A_n величины w_{n+k} при $k > n + m - 2$ будут функциями только от элементов (τ_j^e, τ_j^s) при $j \geqslant n$.

В соотношениях (3) представлен простейший вид обновлений. Возможны другие обновления, например, ([7])

$$\left\{w_{n+j,1} = 0;\ j = 0, \ldots, L;\ w_{n,m} \leqslant \sum_{k=0}^{L} \tau_{n+k}^e\right\}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае вектор w_{n+L+1} будет функцией лишь от элементов (τ^e, τ_j^s) при $n \leqslant j \leqslant n + L$. Отметим, что событие (3) влечет за собой (4).

Проверка условий обновления вида (3), (4) может представлять существенные трудности. Это связано прежде всего с тем, что распределение последовательности w_n нам, как правило, не известно. В ряде случаев (особенно там, где существование стационарной последовательности w^n не установлено) бывает естественным, скажем, условия типа (3) заменить условиями

$$\left\{v_{n,1} = 0,\ v_{n,j} < \sum_{k=0}^{j-2} \tau_{n+k}^e;\ j = 2, \ldots, m\right\}, \tag{5}$$

где $v_{n,j}$ — некоторая известная нам (в той или иной мере) последовательность, являющаяся мажорантной для $w_{n,j}$:

$$w_{n,j} \leqslant v_{n,j}.$$

Как для систем с ожиданием, так и для систем с отказами такие мажоранты могут быть построены.

Рассмотрим сначала *системы с отказами* $\langle G, 1, G/m, 1\rangle_R$, управляемые стационарной метрически транзитивной последовательностью $\{\tau_j^e, \tau_j^s; -\infty < j < \infty\}$. Начальные условия будем считать сначала нулевыми $w_1 = 0$. Мы рассмотрим здесь две мажоранты.

а. Пусть $\langle G, 1, G/\infty, 1\rangle$ — система с бесконечным числом каналов, управляемая той же последовательностью $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, и пусть $q^k(x)$ означает для нее стационарный (по k) процесс

$$q^k(x) = \sum_{j=-\infty}^{k} I(\tau_j^s > \tau_j^e + \tau_{j-1}^e + \ldots + \tau_k^e + x), \tag{6}$$

определенный в § 5 ($q^k(0)$ есть стационарное число занятых каналов; $q^k(x)$ указывает, сколько каналов осталось занятыми спустя время x, если не учитывать вновь пришедшие вызовы). Если $v_k(i)$ означает время ожидания вызова с номером k в системе $\langle G, 1, G/\infty, 1\rangle$ до момента, когда не более i каналов будут заняты вызовами, пришедшими раньше k-го, то событие $\{v_k(i) < x\}$, очевидно, эквивалентно событию $\{q^{k-1}(x) \leqslant i\}$ ($v_k(i)$ совпадает с моментом скачка $q^{k-1}(x)$, когда $q^{k-1}(x)$ меняет свое значение с $i+1$ на i).

Но очевидно, что для нашей m-канальной системы

$$w_{n,i} \leqslant v_n(m-i)$$

и соотношения (5) и (3) будут выполнены, если

$$q^{n-1}(0) \leqslant m-1, \quad q^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{j} \tau_{n+k}^e\right) \leqslant m-2-j, \tag{7}$$

$$j = 0, \ldots, m-2.$$

Здесь соотношения (7) эквивалентны (5) при $v_{n,i} = v_n(m-i)$, а функции $q^{n-1}(x)$ определены в (6) в явном виде.

в. Построим теперь другую мажоранту, основанную на оценке последней координаты $w_{n,m}$ вектора w_n.

Лемма 1. *При нулевом начальном условии $w_1 = 0$ при всех n справедливо неравенство*

$$w_{n,m} \leqslant \zeta_{n-1}^{+} + V_{n-1},$$

где

$$\zeta_n = \tau_n^s - \tau_n^e, \quad V_n = \sup_{s \leqslant n} \left(\sum_{j=s}^{n} \eta_j, \ 0 \right),$$

$$\eta_n = \zeta_{n-1}^+ - \zeta_n^+ - \tau_n^e, \quad \mathrm{M}\eta_n < 0.$$

Доказательство. Очевидно, что для $m \geqslant 2$

$$w_{1,m} = 0, \quad w_{2,m} = (\tau_1^s - \tau_1^e)^+,$$

$$w_{3,m} = \max(w_{2,m} - \tau_2^e, \ \tau_2^s - \tau_2^e)^+;$$

при $n > 2$ справедливо

$$w_{n+1,m} = \max\left(w_{n,m} - \tau_n^e, \ (\tau_n^s - \tau_n^e)\, I(w_{n,1} = 0)\right)^+ \leqslant$$
$$\leqslant \max(w_{n,m} - \tau_n^e, \ \tau_n^s - \tau_n^e)^+. \tag{8}$$

Обозначим

$$\zeta_n = \tau_n^s - \tau_n^e \tag{9}$$

и рассмотрим последовательность z_n: $z_1 = 0$:

$$z_{n+1} = \max(z_n - \tau_n^e, \ \zeta_n)^+ = \max(z_n - \tau_n^e, \ \zeta_n, \ 0) =$$
$$= \max(z_n - \tau_n^e, \ \zeta_n^+).$$

Ясно, что $w_{n,m} \leqslant z_n$,

$$z_{n+1} - \zeta_n^+ = \max(z_n - \tau_n^e - \zeta_n^+, \ 0).$$

Обозначим $v_n = z_n - \zeta_{n-1}^+$, $v_1 = z_1 - \zeta_0^+ \leqslant 0$. Тогда при $n \geqslant 1$

$$v_{n+1} = \max(v_n + \eta_n, \ 0), \quad \text{где } \eta_n = \zeta_{n-1}^+ - \zeta_n^+ - \tau_n^e. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{M}\eta_n < 0$. Это сразу следует из соотношений $\mathrm{M}\tau_j^s < \infty$ и $\eta_n \leqslant \tau_{n-1}^s - \zeta_n - \tau_n^e = \tau_{n-1}^s - \tau_n^s$. Так как $v_n \leqslant \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant n-1} \left(\sum\limits_{j=s}^{n-1} \eta_j, \ 0 \right)$ (см. § 1), то

$$w_{n,m} \leqslant z_n \leqslant \zeta_{n-1}^+ + V_{n-1}. \tag{11}$$

Лемма доказана.

Таким образом, если, например,

$$\tau_{n-1}^e > \zeta_{n-2}^+ + V_{n-2}, \quad \sum_{j=0}^{m-2} \tau_{n+j}^e > \tau_n^s, \tag{12}$$

то соотношения (3) будут выполнены. Очевидно, что события A_n, определяемые соотношениями (7), (12), являются *стационарными* обновляющими событиями.

Как изменятся обновляющие события при *ненулевых начальных условиях*? Пусть $w_{1,m} > 0$. Рекуррентное соотношение (8), очевидно, сохранится. Поскольку решение уравнения (10) известно в явном виде:

$$v_n = \max\left(v_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j, \max_{1<s\leqslant n} \sum_{j=s}^{n-1} \eta_j\right)\left(\sum_{j=n}^{n-1} \eta_j = 0\right),$$

где $v_1 = z_1 - \zeta_0^+ = w_{1,m} - \zeta_0^+$, то путем прежних рассуждений получаем

$$w_{n,m} \leqslant z_n \leqslant \zeta_{n-1}^+ + \max\left(w_{1,m} - \zeta_0^+ + \sum_{j=1}^{n-1}\eta_j, \max_{1<s\leqslant n} \sum_{j=s}^{n-1}\eta_j\right) =$$
$$= \zeta_{n-1}^+ + \max_{1<s\leqslant n} \sum_{j=s}^{n-1} \eta_j + \varepsilon_{n-1} \leqslant \zeta_{n-1}^+ + V_{n-1} + \varepsilon_{n-1}, \quad (13)$$

где $\varepsilon_n = 0$, если и только если $\min\limits_{1\leqslant s\leqslant n}\left(v_1 + \sum\limits_{j=1}^{s} \eta_j\right) \leqslant 0$, так что $\varepsilon_n = 0$ влечет за собой $\varepsilon_{n+1} = 0$. Таким образом, при $w_{1,m} > 0$ обновляющее событие B_n, аналогичное (12), примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{n-1}^e > \zeta_{n-2}^+ + V_{n-2} + \varepsilon_{n-2}, \\ &\sum_{j=0}^{m-2} \tau_{n+j}^e > \tau_n^s, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

где $\varepsilon_n = 0$ при всех $n > N(\omega) = \min\{k: \varepsilon_k = 0\}$, и $\mathsf{P}(N(\omega) < \infty) = 1$, поскольку $\mathsf{M}\eta_k < 0$.

Рассмотрим теперь, что представляет собой в нашем случае событие $\bigcap\limits_{l=l_0}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j T^{-l} B_{j+l}$, присутствующее в условии (3) теоремы 1 § 6. Обозначим через A_n стационарное событие (12). Тогда, очевидно, $B_j \subset A_j$, $T^{-l}B_{j+l}$ есть событие

$$\tau_{j-1}^e > \zeta_{j-2}^+ + V_{j-2} + U^{-l}\varepsilon_{j+l-2},$$
$$\sum_{k=0}^{m-2} \tau_{j+k}^e > \tau_j^s.$$

Пусть d_N означает множество

$$\left\{\min_{1\leqslant s\leqslant N}\left(\omega_{1,m}+\sum_{k=1}^{s}\eta_k\right)\leqslant 0\right\}$$

и $U_{N,l}$ — множество

$$\{U^{-l}\varepsilon_{N+l}=0,\ U^{-l}\varepsilon_{N+l+1}=0,\ \ldots\}.$$

Тогда на основании свойств функций ε_n заключаем:

$$T^{-l}d_{N+l}\subset U_{N,l},$$

$$D_N\equiv\bigcap_{l=0}^{\infty}T^{-l}d_{N+l}\subset U_N\equiv$$
$$\equiv\{U^{-l}\varepsilon_{N+l+s}=0 \text{ при всех } l\geqslant 0,\ s\geqslant 0\}.$$

Но

$$T^{-l}d_{N+l}=\left\{\min_{-l+1\leqslant s\leqslant N}\left(\sum_{k=-l+1}^{s}\eta_k\right)\leqslant-\omega_{1,m}\right\},$$

$$\left\{\sum_{k=-l+1}^{0}\eta_k+\min_{1\leqslant s\leqslant N}\sum_{k=1}^{s}\eta_k\leqslant-\omega_{1,m}\right\}\subset T^{-l}d_{N+l},$$

$$\left\{\min_{1\leqslant s\leqslant n}\sum_{k=1}^{s}\eta_k\leqslant-\omega_{1,m}-V_0\right\}\subset D_N.$$

Так как $\omega_{1,m}$ и V_0 — собственные случайные величины, то в силу метрической транзитивности $\mathsf{P}(D_N)\to 1$ при $N\to\infty$.

С другой стороны, на множестве D_N неравенства, определяющие множества A_j и $B_jT^{-l}B_{j+l}$ при $j\geqslant N+2$, не отличаются. Следовательно,

$$B_jT^{-l}B_{j+l}D_N=A_jD_N \quad \text{при} \quad j\geqslant N+2.$$

Значит,

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{l=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{n}B_jT^{-l}B_{j+l}\right)\geqslant\mathsf{P}\left(\bigcap_{l=0}^{\infty}\bigcup_{j=N+2}^{n}B_jT^{-l}B_{j+l}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N+2}^{n}A_jD_N\right)\geqslant-\mathsf{P}(\bar{D}_N)+\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=N+2}^{n}A_j\right)=$$
$$=-\mathsf{P}(\bar{D}_N)+\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=2}^{n-N}A_j\right)\to 1$$

при $N=n/2\to\infty$, если $\mathsf{P}(A_0)>0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Если $\mathsf{P}(A_0)>0$ *для стационарных обновляющих событий, определенных в* (12) (*в этом случае условия теоремы* 1 *для нулевых начальных условий будут выполнены*), *то условия теоремы* 1 § 6 *будут выполнены и для нестационарных обновляющих событий* B_n, *определенных в* (14) *для* $w_1 \neq 0$.

Мы предоставляем читателю проверить, что то же самое будет происходить и с обновляющим событием вида (7).

Мы получили таким образом, следующее следствие теоремы 1. Пусть A_n — стационарные события, определенные неравенствами (12) или (7).

Теорема 1. *Если* $\mathsf{P}(A_0)>0$, $\mathsf{M}\tau_j^s<\infty$, *то для вектора* w_n *времен ожидания для систем с отказами* $\langle G, 1, G/m, 1\rangle_R$ *имеет место утверждение теоремы* 1 § 6 *при любом начальном условии* w_1.

Замечание 1. Отметим, что стационарные обновляющие события, которые годились бы для любых начальных условий, как правило, не существуют.

Замечание 2. При проверке условия $\mathsf{P}(A_0)>0$ *для события* A_0, определенного в (12), следует иметь в виду, что всегда $\mathsf{P}(V_{n-2}=0)>0$. В [7] показано, что если $\mathsf{P}(m\tau_0^e>\tau_0^s)>0$, то для систем $\langle G_l, 1, G_l/m, 1\rangle_R$ условие $\mathsf{P}(A_0)>0$ (для события A_0 в (7)) всегда выполнено.

Утверждение, аналогичное теореме 1, можно получить и для *систем с очередью.* Мы рассмотрим сначала системы $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$ *с нулевыми левыми начальными условиями.* Для таких систем доказана теорема о монотонной сходимости w_n к стационарной последовательности w_k (см. [101], а также [18]). Поэтому w_n будет мажорироваться вектором w^n и для теорем устойчивости в какой-то мере может оказаться полезным использование стационарных обновляющих событий в форме (3), (4), где $w_{n,i}$ заменены компонентами w_i^n вектора w^n.

В работе Лойнеса [101] (см. также [18]) содержится в неявнем виде построение и другой мажоранты, в известном смысле аналогичной (11).

Обозначим $[w_n]=\sum_{i=1}^{m} w_{n,i}$.

Лемма 2. *При* $w_1=0$ *справедливо неравенство*

$$[w_n]\leqslant W_n\equiv\sup_{k\leqslant n}\left[(m-1)^2\tau_{k-1}^s+(m-1)\,v_{k-1}+\sum_{j=k}^{n-1}\xi_j\right], \tag{15}$$

где

$$\xi_k=\tau_k^s-m\tau_k^e,\quad v_k=\sup_{s\leqslant k}\left(\sum_{j=s}^{k}\zeta_j\right)^+,$$

$$\zeta_j=-\tau_j^s+(m-1)\left(\tau_{j-1}^s-\tau_j^s\right).$$

Доказательство *). Обозначим $D_kx=\sum_{i=1}^{m}(x_k-x_i)$ и покажем сначала, что

$$D_mw_n\leqslant v_{n-1}+(m-1)\,\tau_{n-1}^s. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что

$$D_mR\left(w_n+\tau_n^se\right)=D_mw_n-\tau_n^s,$$

если $w_{n,1}+\tau_n^s\leqslant w_{n,m}$.

Если же $w_{n,1}+\tau_n^s>w_{n,m}$, то

$$D_mR\left(w_n+\tau_n^se\right)=\sum_{i=2}^{m}\left(w_{n,1}+\tau_n^s-w_{n,i}\right)=$$

$$=D_mw_n+(m-1)\,\tau_n^s-m\left(w_{n,m}-w_{n,1}\right)\leqslant(m-1)\,\tau_n^s.$$

Отсюда и из рекуррентной формулы для w_n получаем

$$D_mw_{n+1}\leqslant\max\left(D_mw_n-\tau_n^s,\ (m-1)\,\tau_n^s\right). \tag{17}$$

---

*) В [18] на стр. 220 приведено неравенство для $w_{n,m}$, дающее наряду с W_n нужную мажоранту, построенное на сравнении системы $\langle G,\ 1,\ G/m,\ 1\rangle$ с так называемой «циклической» системой обслуживания, в которой вызов с номером $n=km+l$, $0<l\leqslant m$, направляется на обслуживание в канал с номером l. Как было замечено независимо Стояном [109] и Невё, это неравенство не верно. Оно справедливо лишь в более широком «стохастическом» смысле (см. [74], [118], [119]).

Вычитая из обеих частей этого неравенства $(m-1)\tau_n^s$ и полагая

$$u_n = D_m w_n - (m-1)\tau_{n-1}^s,$$

мы получим

$$u_{n+1} \leqslant \max(0, u_n + \zeta_n), \quad u_1 = -(m-1)\tau_{n-1}^s \leqslant 0.$$

Так как $u_n \leqslant v_n$, то (16) доказано.

Заметим теперь, что из соотношения $\sum_i w_{n,i} \leqslant w_{n,1} + (m-1) w_{n,m}$ следует неравенство

$$D_1 w_n \leqslant (m-1) D_m w_n.$$

Далее, пусть $w_{k,1} = 0$ — последняя из переменных $w_{1,1} = 0$, $w_{2,1}, \ldots, w_{n,1}$, обращающихся в нуль. Тогда, очевидно, $D_1 w_k = [w_k]$ и в силу рекуррентного соотношения для w_n ($w_{j,1} > 0$ при $j > k$)

$$[w_n] = D_1 w_k + \sum_{j=k}^{n-1} \xi_j.$$

Отсюда следует, что

$$[w_n] \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(D_1 w_k + \sum_{j=k}^{n-1} \xi_j \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left[(m-1) D_m w_k + \sum_{j=k}^{n-1} \xi_j \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left[(w-1)^2 \tau_{k-1}^s + (m-1) v_{k-1} + \sum_{j=k}^{n-1} \xi_j \right].$$

Лемма 2 доказана.

Для $[w_n]$ можно строить и другие мажоранты. Можно, например, использовать неравенство $D_1 w_n \leqslant m\Delta_n$, где $\Delta_n = w_{n,m} - w_{n,1}$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет неравенству

$$\Delta_{n+m} \leqslant \max[\tau_n^s, \ldots, \tau_{n+m-1}^s, \Delta_n - \min(\tau_n^s, \ldots, \tau_{n+m-1}^s)].$$

Лемма 3. *Если* $\mathsf{P}(\tau_k^s \geqslant \varepsilon) = 1$ *при некотором* $\varepsilon > 0$, *то вероятность того, что* sup *в* (15) *достигается при* $k < n - N$, *оценивается сверху выражением*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant N} \sum_{j=1}^{k} (\xi_{-j} + \varepsilon) > 0 \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau_0^s \geqslant \frac{\varepsilon(N+k)}{(m-1)^2} \right).$$

Доказательство. Обозначим для краткости $(m-1)^2\tau_k^s+(m-1)v_k=d_k$ и применим к обеим частям (15) преобразование сдвига T^{-n}. Тогда событие C_N, вероятность которого оценивается в лемме 3, влечет за собой событие

$$C'_N=\bigcup_{k\geqslant N}\{d_{k-1}+\xi_{-1}+\ldots+\xi_{-k}\geqslant 0\}. \tag{18}$$

Рассмотрим событие

$$E_N=\left\{\sup_{k\geqslant N}\sum_{j=1}^{k}(\xi_{-j}+\varepsilon)\leqslant 0\right\}.$$

Легко видеть, что

$$C_NE_N\subset C'_NE_N\subset\bigcup_{k\geqslant 0}\{d_{-N-k-1}-\varepsilon(N+k)\geqslant 0\}. \tag{19}$$

Далее, из доказательства леммы 2 видно, что $z_k=(m-1)\tau_k^s+v_k$ удовлетворяет соотношению (см. исходное неравенство (17))

$$z_k=\max\left(z_{k-1}-\tau_{k-1}^s,\ (m-1)\tau_{k-1}^s\right).$$

Поэтому

$$\{z_k\geqslant M\}=\bigcup_{j\geqslant 1}\left\{(m-1)\tau_{k-j}^s-\sum_{i=1}^{j-1}\tau_{k-i}^s\geqslant M\right\}\subset$$
$$\subset\bigcup_{j\geqslant 1}\{(m-1)\tau_{k-j}^s\geqslant M+(j-1)\varepsilon\}. \tag{20}$$

Но $d_k=(m-1)z_k$. В силу (19), (20) это означает, что

$$C_NE_N\subset\bigcup_{k\geqslant 0}\left\{z_{-N-k-1}\geqslant\frac{\varepsilon(N+k)}{m-1}\right\}=$$
$$=\bigcup_{k\geqslant 0}\bigcup_{j\geqslant 1}\left\{(m-1)\tau_{N-k-j-1}^s\geqslant\frac{\varepsilon(N+k)}{m-1}+(j-1)\varepsilon\right\}\subset$$
$$\subset\bigcup_{k\geqslant 0}\left\{\tau_{-N-k-2}^s\geqslant\frac{\varepsilon(N+k)}{(m-1)^2}\right\}.$$

Поскольку $\mathsf{P}(C_N)\leqslant\mathsf{P}(\bar{E}_N)+\mathsf{P}(C_NE_N)$, то лемма доказана.

Из леммы 2 видно, что последовательность W_n, мажорирующая $[w_n]$, стационарна. Если $\mathsf{M}\tau_0^s<\infty$, $\mathsf{M}\xi_0=$

$=\mathsf{M}(\tau_0^s - m\tau_0^e) < 0$, то, полагая $\varepsilon \leqslant -\mathsf{M}\xi_0/3$, мы получим из леммы 3, что последовательность W_n является собственной (с вероятностью 1 конечной), если только $\mathsf{P}(\tau_0^s > \varepsilon) = 1$. Если же последнее условие не выполнено, то, полагая $\tau_j^{*s} = \max(\tau_j, \varepsilon)$, мы получим $\tau_j^s \leqslant \tau_j^{*s}$,

$$[w_n] \leqslant [w_n^*], \tag{21}$$

где индекс * указывает на соответствие управляющей последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^{*s}\}$. Неравенство (21) следует из монотонности функции f относительно τ_n^s в (2).

Таким образом, справедлива

Лемма 4. *Наряду с W_n мажорантой для $[w_n]$ является также любая стационарная, собственная последовательность W_n^*, построенная по последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^{*s}\}$, $\tau_j^{*s} = \max(\tau_j^s, \varepsilon)$, $\varepsilon \leqslant -\mathsf{M}\xi_0/3$.*

Неравенства

$$w_{n,j} \leqslant \frac{1}{m-j+1} \sum_{i=1}^{m} w_{n,i} \leqslant \frac{1}{m-j+1} W_n \equiv v_{n,j}$$

заканчивают построение мажоранты для w_n.

Событие A_n, определяемое неравенствами (ср. с (12), (13))

$$\tau_{n-1}^e > W_{n-1}, \quad \tau_n^e + \ldots + \tau_{n+m-2}^e > \tau_n^s, \tag{22}$$

очевидно, будет стационарным обновляющим событием для систем $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$ с нулевыми начальными условиями.

При *ненулевых начальных условиях* с мажорантой W_n в (15) и обновляющим событием A_n произойдут изменения, совершенно аналогичные тем, которые появились в (13), (14). Проверку этого факта мы предоставляем читателю.

В результате мы можем сформулировать следующую эргодическую теорему для систем с ожиданием $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$. Пусть A_n означает стационарное событие, определяемое неравенствами (22).

Теорема 2. *Если $\mathsf{P}(A_0) > 0$, $\mathsf{M}\tau_0^s < m\mathsf{M}\tau_0^e$, то для вектора времен ожидания w_n будет иметь место утверждение теоремы 1 § 6 при любом начальном условии w_1.*

Разумеется, в теоремах эргодичности можно использовать и другие мажоранты или обновляющие события.

В [7] показано, что для систем $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle$ с $w_1 = 0$ условие $\mathsf{M}\tau_0^s < m\mathsf{M}\tau_0^e$ является необходимым и достаточным для неравенства $\mathsf{P}(A_0) > 0$, где события A_n определены соотношениями (4).

Замечание. Если уже известно, что существует собственная стационарная последовательность $\{w^n\}$ и что $\mathsf{P}_{\mathfrak{F}_{-\infty,\,n-1}}(\tau_n^e > x) > 0$ почти всюду для любого $x > 0$, то условие $\mathsf{P}(A_n) > 0$ для *стационарной* последовательности $\{w^n\}$ будет выполнено для обновляющего события

$$A_n = \{w_1^n = 0,\ w_m^n < \tau_n^e\}.$$

Это сразу следует из того, что $\mathsf{P}(w_1^n = 0) > 0$ и, следовательно, $\mathsf{P}(w_1^n = 0,\ w_m^n < x) > 0$ при достаточно большом x.

Из теорем 1, 2 вытекает следующее утверждение, которое дает простое достаточное условие эргодичности систем.

Теорема 3. *Пусть* $\mathsf{M}\tau_j^s < \infty$ *для систем* $\langle G, 1, G/m, 1\rangle_R$ *и* $\mathsf{M}\tau_j^s < m\mathsf{M}\tau_j^e$ *для систем* $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$. *Предположим, что существует множество* $\Omega \in \mathfrak{F}_{-\infty,\,0}$ *положительной вероятности такое, что при* $\omega \in \Omega$ *и всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}_{\mathfrak{F}_{-\infty,\,0}}(\tau_1^e > x,\ \tau_1^e + \ldots + \tau_m^e > \tau_1^s) > 0.$$

Тогда справедливы утверждения теорем 1, 2.

Доказательство. Рассмотрим, например, системы с отказами, и пусть A_n означает событие (12). Так как $\mathsf{M}\tau_j^s < \infty$, то величины V_n в (12) будут с вероятностью 1 конечными. Пусть $\mathsf{P}(\Omega) = \varepsilon$. Выберем x настолько большим, чтобы вероятность $\mathsf{P}(H_x)$ события $H_x = \{\zeta_0^+ + V_0 < x\} \in \mathfrak{F}_{-\infty,\,0}$ была больше, чем $1 - \varepsilon/2$ (ζ_n^+ и V_n определены в лемме 1). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_2) = \mathsf{P}(\tau_1^e > \zeta_0^+ + V_0,\ \tau_1^e + \ldots + \tau_m^e > \tau_1^s) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(A_2 H_x) \geqslant \mathsf{P}(\tau_1^e > x,\ \tau_1^e + \ldots + \tau_m^e > \tau_1^s,\ H_x) = \\ = \mathsf{M}[\mathsf{P}_{\mathfrak{F}_{-\infty,\,0}}(\tau_1^e > x,\ \tau_1^e + \ldots + \tau_m^e > \tau_1^s);\ H_x] \geqslant \\ \geqslant \mathsf{M}[\mathsf{P}_{\mathfrak{F}_{-\infty,\,0}}(\tau_1^e > x,\ \tau_1^e + \ldots + \tau_m^e > \tau_1^s);\ H_x\Omega] > 0.\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что по условию теоремы случайная величина, стоящая под знаком математического ожидания, положительна на множестве Ω, $\mathsf{P}(\Omega)=\varepsilon$ и

$$\mathsf{P}(H_x\Omega)=1-\mathsf{P}(\overline{H}_x\cup\overline{\Omega})\geqslant 1-\mathsf{P}(\overline{H}_x)-\mathsf{P}(\overline{\Omega})\geqslant$$
$$\geqslant\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}>0.$$

Таким образом, условия теоремы 3 выполнены. Для систем с очередью доказательство проходит аналогично.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть* (τ_j^e, τ_j^s) *независимы при разных* j, $\mathsf{M}\tau_j^s<\infty$, *для систем с отказами и* $\mathsf{M}\tau_j^s<m\mathsf{M}\tau_j^e$ *для систем с очередью. Тогда, если случайная величина* τ_1^e *не ограничена, то имеют место утверждения теорем* 1, 2.

В этом утверждении может оказаться «лишним» лишь условие о неограниченности τ_1^e. Это показывает

Теорема 5. *Для систем с ожиданием* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathsf{M}(m\tau_j^e-\tau_j^s)>0$.

2) *Стационарная последовательность* $\{w^n\}$ *имеет стационарные обновляющие события*

$$A_n=\{w_1^n=w_1^{n+1}=\ldots$$
$$\ldots=w_1^{n+m-1}=0,\ w_m^n<\tau_n^e+\ldots+\tau_{n+m-1}^e\},$$

для которых $\mathsf{P}(A_n)>0$.

На самом деле к условиям 1), 2) можно присоединить и третье эквивалентное условие

3) *При произвольных начальных условиях выполнено условие эргодичности теоремы* 1 § 6, *т. е. для обновляющих событий* A_n *вида* (4)

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{l=l_0}^{\infty}\ \bigcup_{j=n/2}^{n}A_jT^{-l}A_{j+l}\right)\to 1$$

при $n\to\infty$ *и каком-нибудь* $l_0>0$.

Таким образом, при выполнении одного из этих условий будет иметь место утверждение теоремы 1 о сходимости последовательности $\{w_n\}$.

Ниже мы приводим доказательство теоремы 5. Доказательство расширенного варианта этой теоремы с условием 3) требует дополнительных рассуждений, аналогичных тем, которые были приведены нами после леммы 1 при рассмотрении *ненулевых* начальных условий. Очевидно, что при $w_0 = 0$ утверждение п. 3) следует из 2) и свойств монотонности w_{n+1} как функции от w_n.

Доказательство теоремы 5. Тот факт, что из 2) следует 1), вытекает из известных теорем о том, что $w_n \to \infty$ при $\mathsf{M}(m\tau_j^e - \tau_j^s) \leqslant 0$ (случай детерминированного управления $m\tau_j^e = \tau_j^s$ мы во избежание тривиальных оговорок опускаем).

Покажем, что из 1) следует 2). Так как τ_j^s и τ_j^e независимы, то из 1) вытекает, что $\mathsf{P}(m\tau_j^e - \tau_j^s > 0) > 0$, и, следовательно, существуют такие $a > 0$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\mathsf{P}(\tau_j^e \geqslant a) > 0, \quad \mathsf{P}(\tau_j^s < ma - \varepsilon) > 0.$$

Воспользуемся тем, что $\{w_m^n;\ n \geqslant 1\}$ образует собственную стационарную последовательность. Используя снова независимость τ_j^e и τ_j^s, мы получим, что при некотором $x > 0$ и всех N

$$\mathsf{P}(w_m^1 < x;\ \tau_j^e \geqslant a;\ \tau_j^s < ma - \varepsilon;\ 1 \leqslant j \leqslant N) > 0.$$

Обозначим событие под знаком этой вероятности через $A(N)$. Ясно, что на множестве $A(N)$ траектория $\{w^n;\ n \geqslant 1\}$ мажорируется траекторией $\{w_n^*;\ n \geqslant 1\}$ для системы с детерминированным управлением $\tau_j^{e*} = a$ $\tau_j^{s*} = ma - \varepsilon$ и начальным значением $w_1^* = x = (x, \ldots, x)$. Но нетрудно видеть, что при $n \geqslant 1$

1) $w_{n,m}^* - w_{n,1}^* \leqslant ma - \varepsilon$;

2) $[w_{n+1}^*] = [w_n^*] - \varepsilon$, если $w_{n,1} > 0$ $\left([w_n] = \sum\limits_{i=1}^{m} w_{n,i}\right)$.

Отсюда следует, что при достаточно большом n_0 и всех $n \geqslant n_0$ выполняется

$$w_{n,1}^* = 0, \quad w_{n,m}^* < ma - \varepsilon < \tau_n^{e*} + \ldots + \tau_{n+m-1}^{e*}$$

и, стало быть, при $n_0 < n < N - m$ справедливо $A(N) \subset A_n$. Так как $\mathsf{P}(A(N)) > 0$, то $\mathsf{P}(A_n) > 0$, и теорема доказана.

Повторяя почти дословно рассуждения в приведенном доказательстве (в той его части, где устанавливается, что из 1) следует 2)), мы можем получить также некоторый аналог теоремы 5 для систем с *отказами.*

Теорема 5А. *Для систем с отказами* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle_R$ *условие* $\mathsf{P}(m\tau_j^e - \tau_j^s > 0) > 0$ *влечет за собой утверждение* 2), *сформулированное в теореме* 5.

Упомянутое утверждение 2) теоремы 5 содержит в себе предположение о существовании стационарной последовательности $\{w^n\}$, которое является весьма неудобным. Однако мы видели, что при выполнении условия $\mathsf{M}(m\tau_j^e - \tau_j^s) > 0$ это предположение для систем с очередью будет выполнено автоматически (см. утверждение 3)).

Для систем с отказами будет иметь место аналогичная ситуация. Указанное предположение будет автоматически выполняться, если

$$\mathsf{P}(m\tau_j^e - \tau_j^s > 0) > 0$$

(ср. с [5]—[7]). Однако, в отличие от требования $\mathsf{M}(m\tau_j^e - \tau_j^s) > 0$ в условиях теоремы 5, требование $\mathsf{P}(m\tau_j^e - \tau_j^s > 0) > 0$ в условиях теоремы 5А (т. е. для систем с отказами), по-видимому, является излишним, так же как условие о неограниченности τ_j^e в теореме 4.

Перейдем теперь к *теоремам устойчивости* для систем $\langle G, 1, G/m, 1\rangle$ и $\langle G, 1, G/m, 1\rangle_R$. Мы воспользуемся теоремой 2 § 6 и мажорантами $v_n \geqslant w_n$, построенными нами выше как для систем с очередью, так и для систем с отказами. Важной особенностью этих мажорант является тот факт, что они мажорируют одновременно стационарные последовательности и последовательности с нулевыми начальными условиями $w_1 = 0$. Это видно непосредственно из их построения (см. (11)).

Мы ограничимся здесь теоремами устойчивости для *стационарных последовательностей* $\{w^k\}$ векторов времени ожидания для систем с очередью и с отказами (как мы видели, теорема 2 § 6 дает возможность изучать устойчивость и достационарных последовательностей $\{w_n\}$).

Пусть выполнены следующие условия (роль верхнего индекса (r) здесь та же, что в § 6).

A*. *Конечномерные распределения стационарных последовательностей* $\{\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s}\}$ *слабо сходятся при* $r\to\infty$ *к конечномерным распределениям* $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$.

C*. $\mathsf{P}(\tau_1^s-\tau_1^e-\ldots-\tau_k^e=0)=0$ *при всех* $k\geqslant 1$.

Условия A*, C* будут обеспечивать выполнение условий A и C теоремы 2 § 6.

Рассмотрим сначала *системы с очередью*. Пусть A_n означает стационарное обновляющее событие, определенное неравенствами (22).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* A*, $\mathsf{P}(A_0)>0$, $\mathsf{M}\tau_1^s<m\mathsf{M}\tau_1^e$, $\mathsf{M}\tau_1^{(r)s}\to\mathsf{M}\tau_1^s$ *при* $r\to\infty$. *Тогда конечномерные распределения* $\{w^{(r)k}\}$ *слабо сходятся при* $r\to\infty$ *к распределениям* $\{w^k\}$.

Для *систем с отказами* имеет место следующее утверждение. Пусть A_n означает обновляющее событие, определенное неравенствами (12).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* A*, C*, $\mathsf{P}(A_0)>0$, $\mathsf{M}\tau_1^s<\infty$ *и* $\mathsf{M}\tau_1^{(r)s}\to\mathsf{M}\tau_1^s$ *при* $r\to\infty$. *Тогда конечномерные распределения* $\{w^{(r)k}\}$ *слабо сходятся при* $r\to\infty$ *к распределениям* $\{w^k\}$.

В этих утверждениях существование стационарных последовательностей $\{w^{(r)k}\}$ и $\{w^k\}$ гарантируется условиями теорем (см. теоремы 1, 2).

Условия, достаточные для выполнения неравенства $\mathsf{P}(A_0)>0$ и доступные для проверки, содержатся в теоремах 3, 4. Разумеется, возможно использование и других обновляющих событий A_n.

Доказательство теоремы 6. Воспользуемся теоремой 2 § 6. Нам достаточно убедиться, что выполнены условия B и C этой теоремы. Рассмотрим условие B. Очевидно, что стационарные обновляющие события (22) записываются в виде (9) § 6, где $s=2$,

$$\gamma_{k,1}=\tau_{k-1}^e-W_{k-1},\quad \gamma_{k,2}=\tau_k^e+\ldots+\tau_{k+m-2}^e-\tau_k^s, \tag{23}$$

W_k определены в лемме 2, так что $\gamma_{k,i}$ измеримы относительно $\mathfrak{F}_{-\infty,k+L}$ при $L=m-2$.

Если $\mathsf{P}(\tau_j^s>\varepsilon)>0$ при любом $\varepsilon>0$, то в качестве обновляющего события мы возьмем событие

$$A_k=\{\gamma_{k,1}^*>0,\ \gamma_{k,2}^*>0\}.$$

где $\gamma^{*}_{k,l}$ определены в (23), но построены для последовательности $\{\tau^e_j, \tau^{*s}_j\}$,

$$\tau^{*s}_j = \max\left(\tau^s_j, \varepsilon\right), \; 0 < \varepsilon < \frac{\mathsf{M}\left(\tau^s_0 - m\tau^e_0\right)}{3}$$

(см. лемму 4).

Таким образом, мы можем, не ограничивая общности, считать, что

$$\mathsf{P}\left(\tau^s_j \geqslant \varepsilon\right) = 1$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда сходимость распределений $\gamma^{(r)}_{k,l}$ будет следовать из леммы 3. Действительно, нам достаточно доказать сходимость распределений величин $W^{(r)}_n$ (см. (23) и лемму 2), равных

$$W^{(r)}_n = \sup_{k \leqslant n}\left[(m-1)^2 \tau^{(r)s}_{k-1} + (m-1)\, v^{(r)}_k + \xi^{(r)}_k + \ldots + \xi^{(r)}_{n-1}\right]. \tag{24}$$

Пусть $\nu^{(r)}$ есть наименьшее расстояние от точки n до тех чисел k, при которых достигается sup в правой части (24). Тогда по лемме 3

$$\mathsf{P}\left(\nu^{(r)} > N\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant N} \sum_{j=1}^{k} \left(\xi^{(r)}_{-j} + \varepsilon\right) > 0\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau^{(r)s}_0 > \frac{\varepsilon(N+k)}{(m-1)^2}\right). \tag{25}$$

Здесь правая часть сходится к 0 при $N \to \infty$ равномерно по r. Этот факт следует из рассмотрений § 1 и условий

$$\mathsf{M}\tau^{(r)s}_0 \to \mathsf{M}\tau^s_0, \quad \mathsf{M}\left(\xi_0 + \varepsilon\right) < 0.$$

Так как распределение случайных величин, стоящих в квадратных скобках в (24), сходится при $r \to \infty$, то сходится и распределение максимума этих величин по k в пределах $n - N \leqslant k \leqslant n$. Вместе с (25) это означает требуемую сходимость распределений $\gamma_{k,l}$ (подробнее такие рассуждения проводились нами в § 1).

Для доказательства теоремы нам осталось проверить условие С теоремы 2 § 6. Существование точки a, удовлетворяющей условию С, здесь очевидно по самому построению обновляющих событий — достаточно взять $a=0$. Нам нужно установить теперь почти наверное непрерывность (относительно распределения $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$) функций

$$f_k(0, y_1, \ldots, y_k) = f(f_{k-1}(0, y_1, \ldots, y_{k-1}), y_k), \qquad k \geqslant 2, \tag{26}$$

где $f_1(0, y) = f(0, y)$ (см. условие С теоремы 2 § 6.) Здесь будет удобнее векторы y и τ представить в виде двумерных векторов $y=(x, z)$, $\tau = (\tau^e, \tau^s)$.

Тогда функция $f(a, y)$ для систем $\langle G,\ 1,\ G/m,\ 1\rangle$ (см. (2)), где a — m-мерный вектор, может быть записана в виде

$$f(a, y) = R(a + ze - xi)^+.$$

Но очевидно, что функция $f_k(0, y_1, \ldots, y_k)$ для такой функции будет непрерывной всюду. Теорема доказана. ◀

Доказательство теоремы 7. Здесь мы также должны убедиться в выполнении условий В и С теоремы 2 § 6. Выполнение условия В следует из записи обновляющего события в виде (12), аналогичном (23), и того, что распределения $V_n^{r)}$ (см. формулировку леммы 1) слабо сходятся при $r \to \infty$. Проверим теперь условие С. Функция $f(a, y)$ для систем $\langle G,\ 1,\ G/m,\ 1\rangle_R$ (см. (1), (26)) при соглашениях, принятых в доказательстве предыдущей теоремы, может быть записана в виде

$$f(a, y) = R(a + zeI(a_1 = 0) - xi)^+,$$

так что

$$w_{n+1} = f_n(0, \tau_1, \ldots, \tau_n) \quad \text{при} \quad w_1 = 0.$$

Имеем

$$f_1(0, y_1) = R(z_1 e - x_1 i)^+,$$

$$f_2(0, y_1, y_2) = R\left(R(z_1 e - x_1 i)^+ + z_2 e - x_1 i\right)^+ \quad \text{при} \quad m \geqslant 2$$

и т. д. Нетрудно видеть, что координаты $f_k(0, y_1, \ldots \ldots, y_k)$ и, в частности, первая координата будут либо равны 0 либо иметь вид сумм $z_j - x_j - x_{j-1} - \ldots \ldots - x_{j-l}$ при разных j и l. Так как точкой разрыва f_k является нулевое значение первой координаты, то отсюда и из условия С доказываемой теоремы следует требуемая п. н. непрерывность f_k. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что доказанные в этом параграфе теоремы для систем с ожиданием справедливы и для систем с ограниченным временем ожидания или с ограниченной очередью, поскольку мажоранты, построенные для случая неограниченной очереди, при этом сохраняются. Однако условие $\mathsf{M}\left(\tau_j^s - \tau_j^e m\right) < 0$ при этом становится несущественным, так как для доказательства теорем о сходимости распределений усеченных мажорант (см. условие В теоремы 2 § 6) можно использовать результаты § 4.

Вообще класс систем обслуживания, характеристики которых описываются уравнением вида $w_{n+1} = f(w_n, \tau_n)$ при сравнительно простых функциях f, весьма широк. Это дает возможность широкого использования методов §§ 6, 7 для доказательства эргодических теорем и теорем устойчивости. Кроме того, это делает актуальной задачу дальнейшего изучения последовательности $\{w_n\}$, описываемой уравнением (1) § 6.

По-видимому, метод обновлений может быть в полной мере перенесен и на случай непрерывного времени.

Как уже отмечалось, этот метод обладает также тем достоинством, что позволяет оценивать скорость сходимости как в эргодических теоремах, так и в теоремах устойчивости. При этом для независимых τ_n полученные оценки близки к неулучшаемым (см. [4], [5]).

В заключение этого параграфа мы приведем без доказательства некоторые результаты, касающиеся оценок скорости сходимости, полученные в [4], [5] с помощью метода обновлений для систем $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle$ с очередью и систем $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle_R$ с отказами.

Мы уже отмечали, что оценки скорости сходимости в эргодических теоремах и в теоремах устойчивости тесно связаны по своему существу. Напомним также, что абсолютная величина разности

$$\left|\mathsf{P}\left(w_n^{(r)} \in B\right) - \mathsf{P}\left(w^0 \in B\right)\right|$$

может быть оценена суммой величин

$$\left|\mathsf{P}\left(w_n^{(r)} \in B\right) - \mathsf{P}\left(w^{(r)\,0} \in B\right)\right|,$$

$$\left|\mathsf{P}\left(w^{(r)\,0} \in B\right) - \mathsf{P}\left(w^0 \in B\right)\right|,$$

первая из которых определяется скоростью сходимости в эргодических теоремах, вторая — скоростью сходимости в теоремах устойчивости. Поэтому мы приведем результаты, относящиеся к оценкам этих двух видов.

Мы начнем с оценок в *эргодических теоремах.*

Теорема 8. *Пусть система с ожиданием* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle$ *удовлетворяет условиям*

1) $w_1 = 0$,

2) $\mathsf{M}\left(m\tau_j^e - \tau_j^s\right) > 0$,

3) $\mathsf{M}\left(\tau_j^s\right)^\alpha < \infty$ *при некотором* $\alpha > 1$.

Тогда для любого измеримого $B \subset R^m$

$$\left|\mathsf{P}\left(w_n \in B\right) - \mathsf{P}\left(w^0 \in B\right)\right| \leqslant \frac{c\,(\ln n)^\alpha}{n^{\alpha-1}}, \tag{27}$$

где c *от* B *и* n *не зависит.*

Если же условие 3) *заменить условием*

4) $\mathsf{M}e^{\mu\tau_j^s} < \infty$ *при некотором* $\mu > 0$,

то

$$\left|\mathsf{P}\left(w_n \in B\right) - \mathsf{P}\left(w^0 \in B\right)\right| \leqslant c e^{-\gamma\sqrt{n}},$$

где c *и* $\gamma > 0$ *также не зависят от* B *и* n.

Аналогичным образом выглядит соответствующее утверждение для систем с отказами.

Теорема 9. *Пусть система с отказами* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle_R$ *удовлетворяет условиям*

1) $w_1 = 0$,

2) $\mathsf{P}\left(m\tau_j^e - \tau_j^s > 0\right) > 0$,

3) $\mathsf{M}\left(\tau_j^s\right)^\alpha < \infty$ *при некотором* $\alpha > 1$.

Тогда для любого измеримого $B \subset R^m$ *справедлива оценка* (27).

Если же вместо 3) *потребовать выполнения условия*

4) $\mathsf{M}e^{\mu\tau_j^s} < \infty$ *при некотором* $\mu > 0$,

то будет справедливо неравенство (28).

Доказательство этих утверждений содержится в [4].

Оценка скорости сходимости в п. 4) теорем 8, 9, по-видимому, может быть улучшена до экспоненциальной. Сравнение с результатами для одноканальных систем (см. [18]) показывает, что оценка (27) может быть улучшена разве лишь на логарифмический множитель.

Некоторые оценки скорости сходимости к предельным распределениям получены также для многоканальных систем с *ограниченным временем ожидания* (см. [3] — [6]) (ограничения на время ожидания подобны тем, которые описаны в § 4).

Перейдем теперь к оценкам в *теоремах устойчивости*. Рассмотрим сначала системы с ожиданием и обозначим $\lambda(\xi, \eta)$ расстояние Леви — Прохорова (см. § 3) между распределениями случайных величин ξ и η.

Теорема 10. *Пусть управляющие последовательности* $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$ *и* $\{\tau_j^{(r)\,e}, \tau_j^{(r)\,s}\}$ *систем с ожиданием* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle$ *и* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle^{(r)}$, *соответственно, удовлетворяют условиям*

$$1)\qquad \mathsf{M}\left(m\tau_j^e - \tau_j^s\right) > 0,$$

$$2)\ \varepsilon = \varepsilon_r = \max\left(\lambda\left(\tau_j^{(r)\,e}, \tau_j^e\right), \lambda\left(\tau_j^{(r)\,s}, \tau_j^s\right)\right) \to 0 \textit{ при } r \to \infty,$$

$$3)\qquad \mathsf{M}\left(\tau_j^s\right)^{\alpha} < \infty, \quad \sup_r \mathsf{M}\left(\tau_j^{(r)\,s}\right)^{\alpha} < \infty$$

при некотором $\alpha > 1$. *Тогда*

$$\lambda\left(w^{(r)\,0}, w^0\right) \leqslant c\varepsilon^{1-1/\alpha} \ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Если вместо условия 3) *потребовать, чтобы выполнялось*

$$4)\qquad \mathsf{M}e^{\mu\tau_j^s} < \infty, \quad \sup_r \mathsf{M}e^{\mu\tau_j^{(r)\,s}} < \infty \tag{29}$$

при некотором $\mu > 0$, *то*

$$\lambda\left(w^{r\,(0)}, w^0\right) \leqslant c\varepsilon\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

Аналогичное утверждение об оценках скорости сходимости в теореме устойчивости для систем с *отказами* содержит более жесткие требования на управляющие последовательности; некоторые из этих условий (см., например, условия 4), 5)), по-видимому, завышены.

Теорема 11. *Пусть управляющие последовательности* $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$ *и* $\{\tau_j^{(r)\,e}, \tau_j^{(r)\,s}\}$ *систем с отказами* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle_R$ *и* $\langle G_I, 1, G_I/m, 1\rangle_R$, *соответственно, удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\mathsf{P}(m\tau_j^e - \tau_j^s > 0) > 0$.

Условия 2), 3) *этой теоремы совпадают с условиями* 2), 3) *теоремы* 10.

4) $$\mathsf{P}(x \leqslant \tau_j^s < x + l) \leqslant \frac{c_1 l}{x^{\alpha+1}}$$

при всех $l > 0$ *и всех достаточно больших* x; $c_1 = \mathrm{const}$.

5) *Случайные величины* $\tau_j^e - \tau_j^s$ *имеют ограниченную плотность.*

При выполнении этих условий

$$\lambda(w^{(r)\,0}, w^0) \leqslant c\varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^3.$$

Если условие 3) (его формулировку см. в теореме 10) *заменить условием* (29), *то*

$$\lambda(w^{(r)\,0}, w^0) \leqslant c\varepsilon \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^4.$$

Утверждения этих теорем полностью сохранится, если управляющие последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$ и $\{\tau_j^{(r)\,e}, \tau_j^{(r)\,s}\}$ заданы на одном вероятностном пространстве и мы всюду в утверждениях теорем 10, 11 расстояние $\lambda(\xi, \eta)$ заменим расстоянием $\rho(\xi, \eta)$, определенным в п. 3 § 3:

$$\rho(\xi, \eta) = \inf\{\delta\colon\ \mathsf{P}(|\xi - \eta| > \delta) < \delta\},$$

где $|\xi - \eta|$ в многомерном случае означает евклидову норму $\xi - \eta$.

Собственно, теорема 11 доказана в [5] именно для расстояния ρ. Однако в силу цитированной в п. 3 § 3 теоремы Штрассена мы можем при данных расстояниях $\lambda(\tau_j^e, \tau_j^{(r)\,e})$, $\lambda(\tau_j^s, \tau_j^{(r)\,s})$ построить новые управляющие последовательности $\{\tau_j^{e*}, \tau_j^{s*}\}$ и $\{\tau_j^{(r)\,e*}, \tau_j^{(r)\,s*}\}$ с теми же распределениями, что и исходные, но заданные уже на одном вероятностном пространстве и обладающие свойством

$$\rho(\tau_j^{e*}, \tau_j^{(r)\,e*}) \leqslant \lambda(\tau_j^e, \tau_j^{(r)\,e}),$$

$$\rho(\tau_j^{s*}, \tau_j^{(r)\,s*}) \leqslant \lambda(\tau_j^s, \tau_j^{(r)\,s}).$$

Мы получим тогда, что при выполнении условий теоремы 11 (для расстояний λ) справедливы соответствующие оценки для $\rho(w^{(r)0*}, w^{0*})$ (индекс $*$ означает соответствие управляющим последовательностям $\{\tau_j^{(r)e*}, \tau_j^{(r)s*}\}$, $\{\tau_j^{e*}, \tau_j^{s*}\}$), из которых в силу неравенства $\lambda(\xi, \eta) \leqslant \rho(\xi, \eta)$ мы получим требуемые оценки для

$$\lambda(w^{(r)0}, w^0) = \lambda(w^{(r)0*}, w^{0*}).$$

Некоторые оценки скорости сходимости в теоремах устойчивости получены также для систем с *бесконечным числом каналов обслуживания* (см. [47], [115]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Афанасьева Л. Г. О существовании предельного распределения в системе массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, X, № 3, с. 570—578.

[2] Афанасьева Л. Г., Мартынов А. В. Об эргодических свойствах систем массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, XIV, № 1, с. 102—112.

[3] Ахмаров И. Об устойчивости блуждания в полосе с задерживающими границами. — Сиб. матем. журнал, 1979, XX, № 3, с. 645—650.

[4] Ахмаров И. О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для многолинейных систем с очередью.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, XXIV, № 2, с. 418—424.

[5] Ахмаров И. О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для систем с отказами. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, XXIV, № 4.

[6] Ахмаров И. Эргодичность и устойчивость многоканальных систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания. — Сиб. матем. журнал, 1979, XX, № 4, с. 911—916.

[7] Ахмаров И., Леонтьева Н. П. Условия сходимости к предельным процессам и усиленный закон больших чисел для систем обслуживания. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, XXI, № 3, с. 559—570.

[8] Бернштейн С. Н. Распределение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. — УМН, 1944, X, с. 65—115.

[9] Биллингсли П. (Billingsley P.). Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.

[10] Борисов И. А., Боровков А. А. Асимптотическое поведение числа свободных каналов для систем с отказами. — Теория вероятн. и ее примен., (в печати).

[11] Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания (Лекции школы по теории вероятностей в Ужгороде). — Киев, 1964.

[12] Боровков А. А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания, I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, IX, № 4, с. 608—625; 1965, X, № 3, с. 409—437.

[13] Боровков А. А. Асимптотический анализ некоторых систем обслуживания. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, XI, № 4, с. 675—682.

[14] Боровков А. А. О сходимости к диффузионным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, XII, № 4, с. 459—482.

[15] Боровков А. А. О сходимости слабозависимых процессов к винеровскому. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, XII, № 2, с. 193—221.

[16] Боровков А. А. О предельных законах для процессов обслуживания в многоканальных системах. — Сиб. матем. журнал, 1967, VIII, № 5, с. 983—1004.

[17] Боровков А. А. (Borovkov A. A.). Theorems on the Convergence to Markov Diffusion Processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1970, 16, S. 47—76.

[18] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972.

[19] Боровков А. А. Некоторые свойства супремума сумм стационарно связанных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, XVII, № 1, с. 147—150.

[20] Боровков А. А. Сходимость распределений функционалов от случайных процессов. — УМН, 1972, 27, № 1, с. 3—41.

[21] Боровков А. А. Сходимость распределений функционалов от последовательностей и процессов заданных на всей оси. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1972, 78, с. 41—65.

[22] Боровков А. А. Теоремы непрерывности для многоканальных систем с отказами. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, XVII, № 3, с. 458—468.

[23] Боровков А. А. Условия сходимости к вырожденным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, XVIII, № 3, с. 449—456.

[24] Боровков А. А. О блуждании в полосе с задерживающими границами. — Матем. заметки, 1975, 17, № 4, с. 649—657.

[25] Боровков А. А. General Asymptotic Methods of Queueing Theory. — Management Sciences 1975, XXII TIMS International Meeting in Kioto, July 1975.

[26] Боровков А. А. Stochastic Processes in Queueing Theory. — Springer-Verlag, 1976.

[27] Боровков А. А. Сходимость мер и случайных процессов.— УМН, 1976, 31, № 2, с. 3—68.

[28] Боровков А. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1976.

[29] Боровков А. А. Многоканальные процессы обслуживания с интенсивным входным потоком, I, II. — Сиб. матем. журнал, 1977, XVIII, № 5, с. 966—986; 1977, XVIII, № 6, с. 1220—1245.

[30] Боровков А. А. Некоторые оценки скорости сходимости в теоремах устойчивости.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, XXII, № 4, с. 689—699.

[31] Боровков А. А. Теоремы эргодичности и устойчивости для одного класса стохастических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен. 1978, XXIII, № 2, с. 241—262.

[32] Боровков А. А. Теоремы эргодичности и устойчивости для блужданий в полосе и их применения. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, XXIII, № 4, с. 705—714.

[33] Боровков К. А. Теоремы непрерывности и оценки сходимости компонент факторизации для случайных блужданий на цепи Маркова. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).

[34] Висков О. В., Прохоров Ю. В. Вероятность потери вызова при большой интенсивности потока. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, IX, № 1, с. 99—104.

[35] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов — М.: Наука, 1965.

[36] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, т. 1 (1971), т. 2 (1973), т. 3 (1976).

[37] Гихман И. И., Предельные теоремы для сумм бесконечно малых случайных векторов. — Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1973, с. 165—168.

[38] Гнеденко Б. В. О некоторых нерешенных задачах теории массового обслуживания. — Sixth Intern. Telegraphic Congress, Munich, 1970.

[39] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.

[40] Дао Ха Фук, Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, XVI, № 4, с. 660—674.

[41] Доллашер К. (Dellacherie C.) Емкости и случайные процессы. — М.: Мир, 1975.

[42] Дуб Дж. Л. (Doob J. L.). Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.

[43] Дынкин Е. Б. Марковские процессы. — М.: Наука, 1963.

[44] Золотарев В. М. Количественные оценки в задачах непрерывности систем массового обслуживания. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, XX, № 1, с. 215—217.

[45] Золотарев В. М. О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, XX, № 4, с. 834—847.

[46] Золотарев В. М. О стохастической непрерывности систем массового обслуживания типа $G|G|1$. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, XXI, № 2, с. 260—279.

[47] Золотарев В. М. Количественные оценки свойства непрерывности систем массового обслуживания типа $G|G|\infty$. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, XXII, № 4, с. 700—711.

[48] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. — М.: Наука, 1969.

[49] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.— УМН, 1962, 18, с. 3—147.

[50] Калашников В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. — М.: Наука, 1978.

[51] Калашников В. В. Анализ устойчивости в задачах массового обслуживания методом пробных функций. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, XXII, № 1, с. 89—105.

[52] Калашников В. В., Цицишвили Г. Ш. Об устойчивости систем массового обслуживания относительно возмущений определяющих их функций распределения. — ИАН, Техническая кибернетика, 1972, № 2, с. 41—49.

[53] Коваленко И. Н. Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, VI, с. 222—228.

[54] Колмогоров А. Н. Eine Verallgemeinerung der Laplace — Liapounoffschen Satzes. — UAH, OMEN, 1931, S. 959—961.

[55] Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. — УМН, 1958, № 5, с. 5—41.

[56] Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М.: Мир, 1969.

[57] Крупин В. Г. Теорема непрерывности для систем массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. — Труды III Всесоюзной школы по теории массового обслуживания в Пущино, МГУ, 1976, с. 36—40.

[58] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.

[59] Лоэв М. Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962.

[60] Могульский А. А. Абсолютные оценки для моментов некоторых граничных функционалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, XVIII, с. 350—357.

[61] Нагаев А. В. Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения при нарушении условия Крамера. — Изв. АН Узбекской ССР, 1969, № 6, с. 17—22.

[62] Нагаев С. В. Об асимптотическом поведении вероятностей односторонних больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).

[63] Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, 1, № 2, с. 177—238.

[64] Прохоров Ю. В. Переходные явления в процессах массового обслуживания. — Лит. матем. сб., 1963, 3, № 1, с. 199—206.

[65] Рогозин Б. А. Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви — Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах. — Сиб. матем. журнал, 1973, 14, № 6, с. 1304—1312.

[66] Самандаров Э. Г. Системы обслуживания в условиях большой нагрузки.— Теория вероятн. и ее примен., 1963, VIII, № 3, с. 327—330.

[67] Саханенко А. И. О сходимости распределений функционалов от процессов, заданных на всей оси. — Сиб. матем. журнал, 1974, 15, № 1, с. 102—119.

[68] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.

[69] Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, I, № 3, с. 289—319.

[70] Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. — Изд-во Киевского университета, 1961.

[71] Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. — М.: Наука, 1964.

[72] Хинчин А. Я. Асимтотические законы теории вероятностей. — М. — Л., ОНТИ, 1936.

[73] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, 2. — М.: Мир, 1967.

[74] Фосс С. Г. Об аппроксимации многоканальных систем обслуживания. — Сиб. матем. журнал (в печати).

[75] Эйдельман С. Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964.

[76] Arndt U. A continuity theorem for the stationary distributions in general many-server queues. — Elektr. Informationsf. and Kyb., 1978, 14, № 7/8, p. 395—402.

[77] Barrer D. Y. Queueing with impatient customers and indifferent clerks. — Oper. Res., 1957, 5, № 5, p. 650—656.

[78] Blomqvist N. A heavy traffic result for one finite dam. — J. Appl. Prob., 1973, 10, p. 223—228.

[79] Cohen J. W. Asymptotic relations in queueing theory.— Stoch. Proc. Appl., 1973, 1, p. 107—124.

[80] Delbrouck L. E. N. A set of Wiener-Hopf integral equations with common solution in fluctuation theory. — J. Math. Anal. Appl., 1973, 44, p. 100—112.

[81] Dudley R. M. Distance of probability measures and random variables. — Ann. Math. Statist., 1968, 39, p. 1563—1572.

[82] Essen M. Banach algebra methods in renewal theory. — J. d'Analyse Mathematique, 1973, 26, p. 303—336.

[83] Franken P. Ein Stetigkeitssatz für Verlustsysteme. — Operations-forschung und Math. Stat., 1970, 11, S. 1—23.

[84] Franken P., Stoyan D. Stabilitätssätze für eine Klasse homogener Markowschen Processe. — Math. Nachrichten, 1974, 61, S. 311—316.

[85] Franken P., Kalähne U. Existence, uniqueness and continuity of stationary distributions for queueng systems without delay. — Math. Nachr., 1978, t. 86, p. 97—115.

[86] Gaver D. P. Diffusion approximations and models for certain congestion problems. — J. Appl. Prob., 1968, 5, p. 607—623.

[87] Geza Schay. Nearest random variables with given distributions. — Ann. of Probability, 1974, 2, № 1, p. 163—166.

[88] Iglehart D. L. Limiting diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. — J. Appl. Prob., 1965, 2, № 2, p. 429—441.

[89] Iglehart D. L., Whitt W. Multiple channel queues in heavy traffic. I. — Advance Appl. Prob., 1970, 2, p. 150—177.

[90] Iglehart D. L., Weak convergence in queueing theory. — Advance Appl. Prob., 1973, 5, p. 570—594.

[91] Kac M. Random walk and the theory of Brownian motion, American Math. Monthly, 1947, 54, p. 369—391.

[92] Kennedy D. The continuity of the single server queue. — J. of Appl. Prob., 1972, 9, № 3.

[93] Kiefir J., Wolfowitz J. On the theory of queues with many servers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, p. 1—18.
[94] Kingman J. F. C. The single server queue in heavy traffic.— Proc. Camb. Phil. Soc., 1961, 57, p. 902—904.
[95] Kingman J. F. C. On queues in heavy traffic. — J. R. Statist. Soc., Ser. B, 1962, 24, p. 383—392.
[96] Köllerström J. Heavy traffic theory for queues with several servers, I. — J. Appl. Prob., 1974, 11, p. 544—552.
[97] Kotzurek M., Stoyan D. A quantitative continuity theorem for the mean stationary waiting time in GI/GI/1. — Math. Operationsforsch. u. Statist., 1976, 7, № 4, p. 595—599.
[98] Kyprianou E. The virtual waiting time of the GI/G/1 queue in heavy traffic. — Adv. Appl. Prob., 1971, 3, p. 249—269.
[99] Lindvall T. Weak convergence of probability measures and random functions in the function space — J. Appl. Prob., 1973, 10, p. 109—121.
[100] Loulou R. Multi-channel queues in heavy traffic. — J. Appl. Prob., 1973, 10, p. 769.
[101] Loynes R. The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1962, 58, № 3, p. 497—520.
[102] Miller D. R., Sentilles F. D. Translated renewal processes and the existence of a limiting distribution for the queue length of the GI/G/s queue. — The Ann. of Prob. 1975, 3, № 3, p. 424—439.
[103] Newell G. F. Queues with time dependent arrival rates, I, II, III. — J. Appl. Prob., 1968, 5, pp. 436—451, 579—590, 591—606.
[104] Rossberg H. J., Über die Verteilung von Wartezeiten, Mathematische Nachrichten, 1965, 30, № 1/2, S. 1—16.
[105] Rozanov Ju. A. Some system approaches to water resources problems, II, Statistical equilibrium of processes in dam storage. — Intern. Inst. Appl. Systems Anal., Research report, February 1975.
[106] Stone C. Weak convergence of stochastic processes defined on a semifinite time interval. — Proc. Amer. Math. Soc. 1963, 14, p. 694—696.
[107] Stoyan D. Ein Steigkeitssatz für einlinige Wartemodelle der Bedienungstheorie, Math. Operationsforsch. u. Statist., 1977, 3, № 2, S. 103—111.

[108] Stoyan H. Monotonie- und Statigkeits eigenschaften mehrliniger Wartesysteme der Bedienungstheorie. — Math. Operationsch. u. Statist., 1973, 4, № 2, S. 155—163.
[109] Stoyan D. A critical remark on a system approximation in queueing theory. — Math. Operationsforsch. und Statist., 1976, 7, № 6, 953—956.
[110] Strassen V. The existence of probability with given marginals. — Ann. Math. Statist., 1965, 36, p. 423—439.
[111] Szczotka W. An invariance principle for queues in heavy traffic. — Preprint № 91 (1976), Inst. of Math., Polish Academy of Sciences.
[112] Whitt W. Weak convergence of probability measures on the function space $C(0, \infty)$ — Ann. Math. Statist., 1970, 41, p. 939—944.
[113] Whitt W. Heavy traffic limit theorems for queues: A survey, Lecture Notes in Economics and Math. Systems, Berlin — Heidelberg — New York, 1974, 98.
[114] Whitt W. The continuity of queues, Adv. Appl. Probability, 1974, 6, p. 175—183.
[115] *) Ахмаров С. О скорости сходимости в теоремах непрерывности для систем с бесконечным числом обслуживающих каналов. — Сиб. матем. журнал (в печати).
[116] Боровков А. А. Об условиях сходимости к диффузионным процессам и асимптотических методах теории массового обслуживания. — Международный конгресс математиков, Тезисы докладов по приглашению, Москва, 1966, с. 133—136.
[117] Леонтьева Н. П. Системы обслуживания с произвольными начальными условиями. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, XXII, № 4, с. 831—837.
[118] Gittins J. C. A comparison of Service Disciplines for GL/G/m Queues. — Math. Operationsforsch. Statist., [illegible]78 v. 9, № 2, p. 255—260.
[119] Vasicer O. A. Inequality for the vari[illegible] under general queueing discipline. — O[illegible] v. 25, № 5, p. 879—884.

*) Литературные ссылки [115] — [119[illegible] ректуре.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Александр Алексеевич Боровков

Асимптотические методы
в теории массового обслуживания

(Серия «Теория вероятностей
и математическая статистика»)

М., 1980 г., 384 стр. с илл.

Редактор *А. С. Чистопольский*

Техн. редакторы *И. Ш. Аксельрод, С. Я. Шкляр*

Корректоры *З. В. Автонеева, М. Л. Медведская*

ИБ № 11490

Сдано в набор 21.04.79. Подписано к печати 16.01.80. Т-02419. Бумага 84 × 108¹/₃₂. Тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20,16. Уч-изд. л. 20,23. Тираж 7500 экз. Заказ № 201.
Цена книги 2 р. 20 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29