

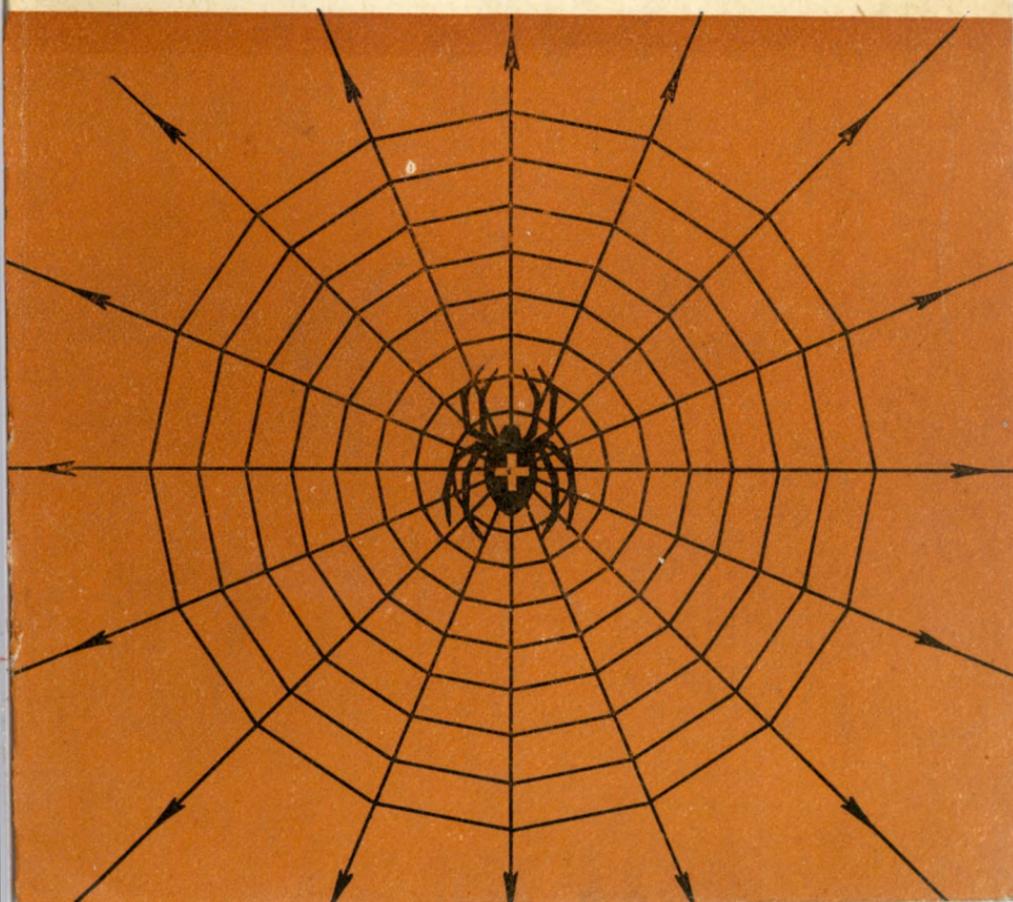
22.33
Б83Г

Ф и з и к а

Библиотечна
физико-математической школы

А.А.БОРОВОЙ
Э.Б.ФИНКЕЛЬШТЕЙН
А.Н.ХЕРУВИМОВ

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРО - МАГНЕТИЗМА



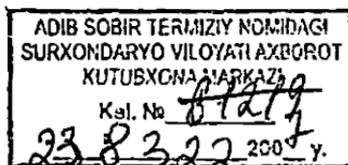
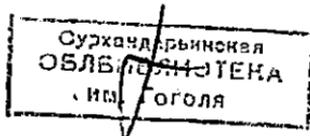
22.33

583
Физика

Библиотечка физико-математической школы

А. А. БОРОВОЙ
Э. Б. ФИНКЕЛЬШТЕЙН
А. Н. ХЕРУВИМОВ

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРО- МАГНЕТИЗМА



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1970

537

Б 83

УДК 537 (075.4)

Физика

Библиотечка

физико-математической школы

Редактор серии

Я. А. Смородинский

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Законы электромагнетизма» — вторая книга физической серии «Библиотечки физико-математической школы». Она является продолжением «Механики» и построена аналогично последней. Каждая глава начинается с изложения теоретического материала, затем разбираются несколько методически важных примеров (результаты их используются в дальнейшем), и заключается глава задачами, снабженными подробными решениями.

Однако, в то время как в «Механике» последовательность изложения редко отстает от общепринятой, построение «Законов электромагнетизма» не является традиционным. Это связано прежде всего с тем, что при изложении механики обычно достаточно четко выделяют фундаментальные законы, чего нельзя сказать о теории электромагнетизма, излагаемой в курсах общей физики. Например, иногда ставятся на одну ступень по значимости вопрос о шунтировании амперметра и закон индукции Фарадея. Мы поставили перед собой задачу сконцентрировать внимание именно на фундаментальных законах электромагнитного поля.

При изложении теории используются простые модели и с их помощью формируются наиболее общие понятия.

Эти фундаментальные понятия глубоко связаны с общей симметрией природы. Поэтому вопросам симметрии уделяется много внимания. Такой подход приближает рассмотрение вопросов к уровню современной физики.

«Механика» написана в известной степени догматично. Это позволило достаточно сжато изложить теорию, уделив основное внимание задачам. В этой же книге, по сути дела гораздо более трудной, чем предыдущая, авторы старались не только четко сформулировать основные положения, но и показать, как можно догадаться о существовании какой-либо зависимости (закономерности) и затем проверить это на опыте. В связи с этим относительная доля теории возросла.

Еще в большей степени, чем в «Механике», задачи являются продолжением и развитием теории. Кроме того, они все взаимосвязаны. Поэтому мы рекомендуем учащимся прочитать решения независимо от того, справился он с задачей или нет.

В заключение приносим глубокую благодарность академику И. К. Кикоину за критические замечания и большую помощь в работе.

Авторы

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Введение

Мы начнем эту книгу с того, что напомним читателю основную задачу механики *). Она состоит в том, чтобы по известному начальному состоянию тела уметь найти его состояние в любой момент времени. Знать состояние тела — это значит в данный момент времени знать его координаты и скорость.

Для решения такой задачи в самом общем виде надо воспользоваться уравнением движения

$$F = m \cdot a \quad (\text{второй закон Ньютона}).$$

Эту задачу можно решить, если, кроме начального состояния тела, знать вид сил, действующих на тело, и его массу. Силы учитывают внешние условия, в которых происходит движение. Масса же, как мера инертности, полностью определяет свойства самого тела.

Мы хотим показать, как, зная уравнение движения, начальное состояние тела, его массу и внешние силы, можно решить основную задачу. Конечно, разговор пойдет только о принципиальной возможности.

По заданному начальному состоянию определим состояние тела через малый промежуток времени Δt . (Для простоты рассмотрим одномерное движение.)

Скорость тела v_1 через Δt мы вычислим, зная ускорение $a = F/m$ и считая, что за это время сила, а

*) См. А. А. Б о р о в о й и др., Механика (выпуск «Библиотечки физико-математической школы»), стр. 50.

следовательно, и ускорение заметно не изменились:

$$v_t = v_0 + a \cdot \Delta t.$$

Изменение координаты легко определить по средней скорости:

$$\Delta x = v_{\text{ср}} \Delta t = \frac{v_0 + v_t}{2} \Delta t;$$

отсюда

$$x_t = x_0 + \Delta x.$$

Продолжая последовательно такой процесс, найдем все последующие состояния тела.

Процедура эта весьма утомительна, так что мы недаром говорили только о принципиальной возможности решить задачу. Физики же для решения этой задачи используют аппарат дифференциальных уравнений.

Итак, нам необходимо знать вид внешних сил. Какие силы уже известны? В механике изучались силы тяготения, трения и упругости.

Для первой из них существует достаточно простой закон — она прямо пропорциональна массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Этот закон справедлив во всех случаях, независимо от вещества тел и условий, в которых они находятся, из него вытекает большое число следствий, он является фундаментальным.

Другое дело трение и упругость. Выражение для этих сил на первый взгляд тоже довольно простое: $F_{\text{тр}} = k_{\text{тр}} N$ и $F_y = -k_y x$. Однако эта простота только кажущаяся. Во-первых, в формулы входят коэффициенты, определяемые из опыта и зависящие от вещества, качества поверхности и т. п. Во-вторых, эти формулы применимы далеко не всегда: например, выражение для силы трения имеет такой вид только при малых скоростях, а для сил упругости — при малых смещениях. При увеличении скорости и смещения выражения усложняются. Все это показывает, что эти законы не являются фундаментальными. Дело в том, что силы трения и упругости выступают как усреднение огромного числа элементарных взаимодействий между молекулами. То, что это взаимодействие имеет

не гравитационную природу, следует из того простого факта, что тела сопротивляются не только растяжению, но и сжатию, т. е. между частицами тела возникает отталкивание. Гравитационные же силы могут вызвать только притяжение. Силы трения и упругости являются проявлением нового типа взаимодействия — *электромагнитного*.

Теория электромагнетизма рассматривает чрезвычайно широкий круг явлений. Поэтому представляется целесообразным разбить эти явления на две большие группы. К первой группе отнести те из них, которые не требуют подробного рассмотрения внутренних свойств среды, а ко второй — вопросы, связанные с электромагнитными явлениями в различных средах. В этом выпуске изучаются явления, относящиеся к первой группе. Свойства среды идеализируются, т. е. рассматриваются два случая: проводники — тела, в которых заряды могут двигаться свободно, и изоляторы — тела, не проводящие электричества.

Основным предметом изучения будут являться общие законы электромагнитного взаимодействия.

Очевидно, для того чтобы предсказывать поведение тел, участвующих в электромагнитном взаимодействии, необходимо установить для него такой же общий фундаментальный закон, как закон Ньютона для тяготения, а перед этим выяснить, какое же свойство частиц определяет их участие в новом взаимодействии.

§ 2. Заряд

Таким свойством является *электрический заряд*. Совокупность опытных данных о зарядах можно свести к следующим основным пунктам.

1. Заряды бывают двух видов. Одни из них условились называть положительными, другие — отрицательными.

2. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются.

3. Существует наименьший возможный в природе заряд — элементарный заряд. Будем его обозначать буквой e^*).

*) В настоящее время разрабатываются теоретические модели, предполагающие существование частиц с дробным электрическим зарядом, так называемых кварков.

Носителями элементарных зарядов являются частицы, из которых состоит тела, — элементарные частицы: электроны ($-e$) и протоны ($+e$).

4. Тела, не участвующие в электрическом взаимодействии, называются нейтральными.

Поскольку все тела состоят из заряженных частиц, это означает, что в нейтральных телах одинаковое количество положительных и отрицательных частиц. Это необходимое условие нейтральности, но этого еще недостаточно. Ведь может быть так, что заряды разных знаков скопились в разных частях тела, тогда оно вполне может участвовать во взаимодействии. Для истинной нейтральности необходимо, чтобы распределение зарядов обоих знаков по телу было равномерным или чтобы тело было точечным.

5. Один из фундаментальных законов физики — закон сохранения электрического заряда. На основании большого числа как простых, так и самых сложных экспериментов был сделан вывод: полный заряд системы, если в нее не вносятся посторонние заряды, остается постоянным. Под полным зарядом системы Q мы понимаем алгебраическую сумму входящих в систему зарядов

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{j=1}^m q_j$$

(в системе n положительно и m отрицательно заряженных частиц). В любых процессах при всех превращениях элементарных частиц выполняется закон сохранения заряда.

Для описания заряженных тел мы будем использовать две модели — модель точечного заряда и модель с непрерывным распределением заряда по объему, поверхности или линии.

Понятие точечного заряда аналогично понятию материальной точки в механике. Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Фактически же «точечный заряд» может представлять собой совокупность огромного числа элементарных зарядов.

Очень часто бывает удобно отвлекаться от дискретности заряда и представлять его себе непрерывно распределенным по некоторому объему, поверхности или линии. В этом случае распределение заряда характеризуют вели-

чиной его плотности ρ . Для объемного распределения вводится понятие объемной плотности ρ_v как предела отношения

$$\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.1)$$

где Δq — заряд, заключенный в элементе объема ΔV .
Для поверхностного распределения

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (1.2)$$

где Δq — заряд элемента поверхности ΔS , и наконец, для линейного распределения заряда

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}, \quad (1.3)$$

где Δq — заряд отрезка линии Δl .

§ 3. Закон Кулона

Выяснив вопрос о том, какое свойство тел определяет их участие в новом взаимодействии, а также введя основные модели, мы можем вернуться к фундаментальному закону электрических сил.

Этот закон был установлен Кулоном в 1785 г. Кулон поставил прямой опыт, в результате которого получил, что величина силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга, равна

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad (1.4)$$

k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц *).

Мы видим, что этот закон очень похож на закон тяготения, только роль масс играют здесь заряды.

Из этого же эксперимента Кулон установил, что сила взаимодействия направлена по прямой, соединяющей заряды. В векторном виде закон запишется следующим

*) Опыт проводился в воздухе, который, как оказалось, по своим электрическим свойствам близок к вакууму.

образом:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}, \quad (1.4a)$$

где \mathbf{r} — вектор, проведенный от первого заряда ко второму, а \mathbf{F} — сила, действующая на второй заряд (рис. 1.1). О том, что сила должна быть направлена именно так, а не иначе, можно было бы догадаться и из соображений симметрии. Действительно, из всех возможных направлений в пространстве, по которым можно было бы направить силу, действующую на заряд, существует лишь одно «выделенное» — это прямая, соединяющая два взаимодействующих заряда. Остальные направления

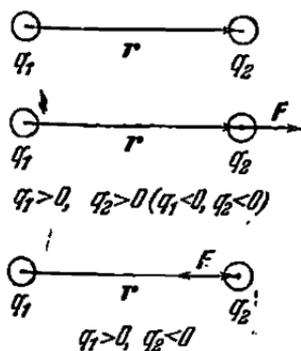


Рис. 1.1.

совершенно равноправны. Существенно то, что сам заряд не создает никакого выделенного направления в пространстве, так как является скалярной величиной.

§ 4. Единица заряда в системах СГСЭ и СИ

Мы ввели в закон Кулона коэффициент k , зависящий от выбора системы единиц. Так как единицы измерения силы и длины нам известны из механики, то размерность и величина k зависят от выбора единицы заряда.

В системе СГСЭ за единицу заряда выбрали такой заряд, который действует в вакууме на равный ему заряд, удаленный на расстояние в 1 сантиметр, с силой в 1 дина.

Таким образом, в этой системе k положили равным единице. И единицу заряда построили как производную из трех основных (введенных в механике): сантиметра, секунды и грамма. Легко можно проверить, что ее размерность $\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{сек}^{-1}$. Назвали ее абсолютной электростатической единицей заряда.

В системе СИ положение несколько другое. Здесь, кроме основных единиц механики (метр, килограмм, секунда), вводится еще одна основная единица. Это единица электрического тока — ампер.

Об электрическом токе речь у нас пойдет во второй главе, и тогда мы более подробно остановимся на единице его измерения. Заряд же в этой системе измеряется в кулонах. 1 кулон = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ единиц заряда.

Поэтому коэффициент в формуле закона Кулона становится размерным и отличным от единицы. Кроме того, для удобства (и об этом речь будет позднее) из него выделяют численный множитель, равный $1/4\pi$:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad (1.5)$$

ϵ_0 — размерный коэффициент. Если F выражено в ньютонах, q в кулонах и r в метрах, то $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ к}^2/\text{н} \cdot \text{м}^2$. Два точечных заряда в 1 к, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга, будут взаимодействовать с силой $9 \cdot 10^9$ н.

Заряд электрона

$e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ единиц СГСЭ в системе СГСЭ,

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ к в СИ.

§ 5. Напряженность. Электрическое поле

Изучение электрических сил было начато нами с рассмотрения взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов. Естественно теперь рассмотреть силы, действующие в том случае, когда одно из заряженных тел никак нельзя считать точечным. Это означает, что оно представляет собой целую систему зарядов, и размеры этой системы вполне сравнимы с расстоянием между телами. В дальнейшем первое тело будет называть источником, а второе — точечное — пробным зарядом.

Предположим также, что присутствие пробного заряда практически не влияет на распределение зарядов в источнике, т. е. величина его относительно мала. Как быть в этом случае?

Легко увидеть, что никаких принципиальных затруднений при решении задачи не возникает. Рецепт, который подсказывает принцип независимости действия сил, состоит в следующем. Источник надо мысленно разбить на такие малые «кусочки», каждый из которых можно считать точечным. Теперь можно воспользоваться законом Кулона и вычислить силу взаимодействия между пробным зарядом и любым из таких «кусочков». Остается все эти силы сложить (векторно!).

Мы педаром выдделили слово «принципиальных». Принципиальные, вычислительные затруднения остаются и вполне могут сделать задачу безнадежной.

Система зарядов, образующих источник, может оказаться очень сложной. Кроме того, далеко не всегда ясно, как измерить заряды «кусочков». Очевидно, силу надо измерять экспериментально. При этом возникают свои трудности.

Во-первых, для каждого пробного заряда, помещенного рядом с источником, надо проводить свои измерения.

Во-вторых, как измерить силу, действующую на совсем малый заряд? Ведь пробным зарядом может оказаться и просто электрон.

На помощь приходит факт, следующий из закона Кулона: отношение силы к величине пробного заряда является постоянной величиной в любой заданной точке *)

$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \overrightarrow{\text{const}} = E \quad (1.6)$$

— так обозначают эту постоянную. Называют ее напряженностью. Из (1.6) следует, что напряженность есть вектор.

Из (1.6) также видно, что измеряется напряженность величиной силы, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку, а направление ее совпадает с направлением этой силы.

Итак, измерив силу F_1 , для одного пробного заряда q_1 , найдем E и отсюда определим силу F_2 , которая будет действовать на другой пробный заряд q_2 в этой точке: $E = F_1/q_1$, $F_2 = q_2 E$. Измерив E заряженным шариком, легко определим F для электрона.

Путем последовательных рассуждений мы пришли к важному выводу. Действительно, как бы ни был сложен источник, достаточно знать E для какой-то точки и можно сразу предсказать, какая сила будет действовать на помещенный туда заряд. Если же известна величина и направление напряженности для любой точки, то нам вообще больше ничего и не надо знать об источнике. Такая совокупность векторов E его полностью характеризует. Называют эту совокупность электрическим полем или полем напряженности.

*) Под пробным зарядом в дальнейшем мы будем подразумевать положительный заряд.

Итак, самое общее решение поставленной в начале задачи удобно проводить в два приема: найти сначала электрическое поле источника, т. е. вычислить или измерить напряженность в интересующих нас точках.

И затем определить силы, действующие на пробный заряд (или на систему пробных зарядов), находящийся в этом поле.

Теперь понятны и названия «источник», «пробный заряд». Источник это то, что создает поле, а пробный заряд то, чем созданное поле измеряют, пробуют.

Пока для нас поле — это удобное математическое понятие, разумный способ описывать взаимодействие. Ясно, что можно было бы ввести не поле напряженностей, а просто силовое поле. Для этого пришлось бы определить электрическую силу, действующую на некоторый заряд в разных точках пространства, и совокупность всех таких сил назвать силовым полем данного заряда. Тогда для другого заряда силовое поле будет уже другим, что явно неудобно.

Итак, вернемся к рассмотрению поля напряженностей неподвижных электрических зарядов.

Такое поле называется *электростатическим*.

§ 6. Принцип суперпозиции

В предыдущем параграфе мы пользовались принципом независимости действия сил. В применении к полю этот принцип носит специальное название — принцип суперпозиции*). Его содержание заключается в том, что если один заряд создает одно поле, а другой — другое, то поле, создаваемое обоими зарядами, равно просто сумме полей от каждого заряда. Другими словами, напряженность результирующего поля в каждой точке получается в результате векторного сложения напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

§ 7. Способы задания электрического поля.

Силовые линии

Электрическое поле можно задать различными способами. Первый способ — аналитический, т. е. когда напряженность задается с помощью формулы. Рассмотрим,

*) Слово «суперпозиция» означает положение, сумму.

например, поле точечного заряда q . Величина напряженности, как следует из закона Кулона, запишется в виде

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (1.7)$$

где r — расстояние от точки, в которой измеряется напряженность, до заряда источника. Для поля двух точечных зарядов эта формула усложнится: $E = E_1 + E_2$,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_1^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_2^2};$$

r_1 — расстояние от точки наблюдения до заряда q_1 ,
 r_2 — до заряда q_2 .

Число таких примеров можно продолжить неограниченно.

Как уже говорилось, задавать поле в виде формул удается далеко не всегда. В реальных задачах часто приходится измерять его в большом числе точек.

Как в этом случае записать результаты таких измерений?

Составлять таблицу, где нужно отмечать и величину и направление напряженности, громоздко и не наглядно. Гораздо лучше составить план или карту поля, т. е. задать поле графически. Способ построения таких карт придумал Фарадей. Он изображал поле линиями напряженности, или, как их часто называют, *силовыми линиями*.

Силовой линией называется такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности в этой же точке. Чтобы направление силовой линии в каждой точке совпадало с вектором напряженности, условились считать их идущими от положительных зарядов к отрицательным. Силовые линии помогают яснее представить себе поле и в том случае, если напряженность выражена аналитическим способом. Запомнить картинку-

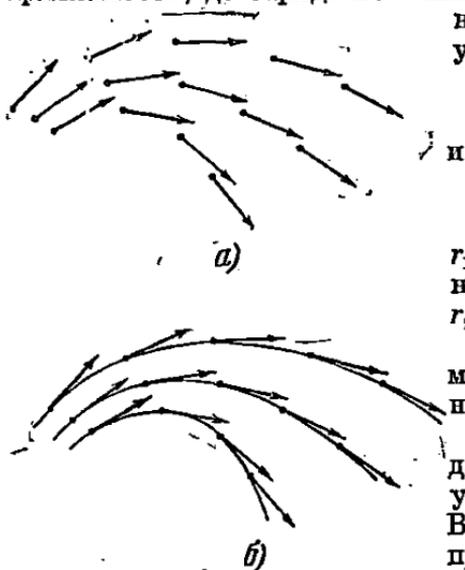
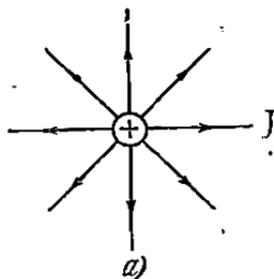


Рис. 1.2.

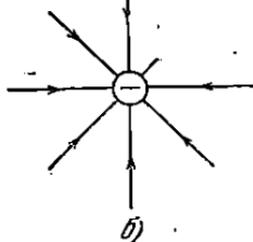
оказывается часто проще, чем формулу. Процесс построения силовой линии хорошо виден на рис. 1.2, а и б. Теперь рассмотрим примеры графического изображения простейших полей.

1. Поле точечного заряда.

а) Положительный заряд. Линии напряженности «выходят» из него и уходят на бесконечность. Они представляют собой лучи (рис. 1.3, а).

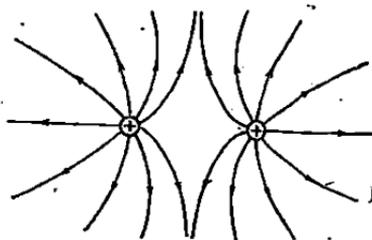


а)

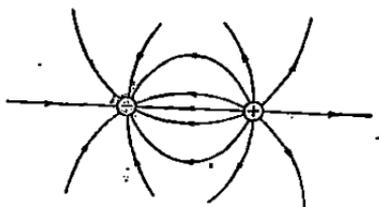


б)

Рис. 1.3.



а)



б)

Рис. 1.4.

б) Для отрицательных зарядов линии напряженности такие же. Единственное отличие в том, что они начинаются на бесконечности и «входят» в заряд (рис. 1.3, б).

Комбинируя эти два простейших случая, мы можем в принципе получить картину поля для системы зарядов. Условимся, что там, где поле больше, силовые линии мы будем проводить гуще, и наоборот.

2. Поле двух точечных зарядов. Здесь лучше всего обратиться к рисунку. На рис. 1.4 представлены линии напряженности для одноименных (а) и разноименных (б) зарядов. Система из равных по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов носит название *диполь*.

3. Поле между двумя плоскими пластинами. Заряды на них равномерно распределены. Одна из пластин несет заряд $+Q$, вторая $-Q$. Картина поля представлена на рис. 1.5. Во всех точках между пластинами значение напряженности одно и то же.

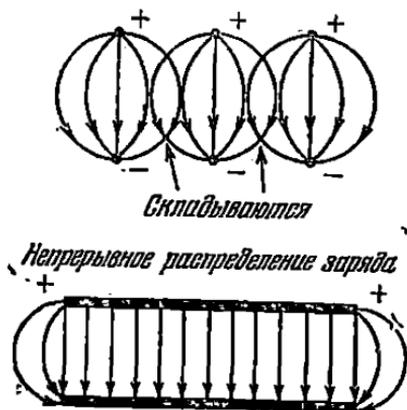


Рис. 1.5.

Почему так получается, можно легко проследить по рисункам. Поле между пластинами представлено равномерно проведенными параллельными линиями напряженности; оно носит название *однородного*. В действительности поле не будет полностью однородным. У края пластин однородность поля нарушается и силовые линии искривляются (это так называемый «краевой эффект»). Полностью однородным оно было бы только в случае бесконечных пластин. Более того, оно было бы целиком сосредоточено между пластинами. Чтобы показать это, рассмотрим сначала поле одной бесконечной, равномерно заряженной пластины. Вследствие симметрии силовые линии в этом случае должны неограниченно продолжаться вправо и влево от заряженной плоскости, быть ей перпендикулярны и параллельны между собой (рис. 1.6, а). Поле двух таких плоскостей, заряженных разноименно, есть просто результат суперпозиции полей, создаваемых каждой из них в отдельности. Как видно из рис. 1.6, б, поля вне плоскостей вычитаются, а внутри — складываются.

Таким образом, все поле сосредоточивается между плоскостями и вне их обращается в нуль. Для конечных пластин все это выполняется тем точнее, чем больше линейные размеры пластин по сравнению с расстоянием между ними. Теперь, еще раз внимательно рассмотрев рисунки, вы сможете прийти к некоторым выводам относительно силовых линий.

Во-первых, они начинаются и кончаются на электрических зарядах или уходят на бесконечность.

Во-вторых, они нигде не пересекаются, но это и так понятно. Каждой точке мы сопоставили свое, единственное значение напряженности, и значит, через каждую точку можно провести только одну силовую линию. Пересекаться они не могут.

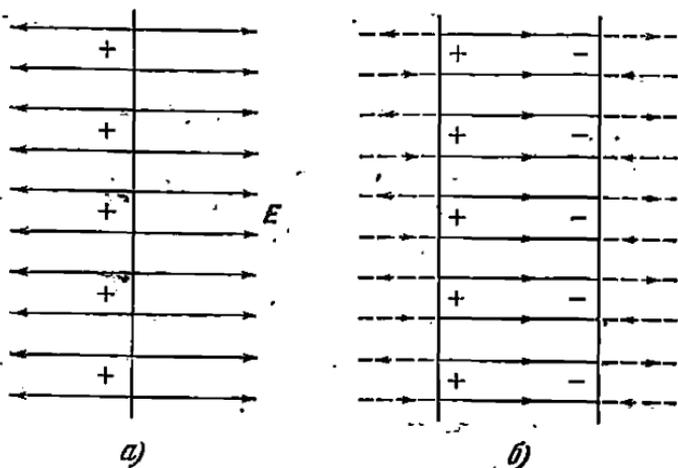


Рис. 1.6.

Мы условились по густоте силовых линий судить о величине напряженности. Но, конечно, следует более ясно определить, что именно понимать под густотой. Обратимся к точечному заряду (рис. 1.3). Ясно, что силовые линии идут во всех направлениях равномерно. Никаких оснований предпочесть одно направление другому у нас нет, и все их надо считать равноправными. Такая картина носит название сферически симметричной. Задача обладает сферической симметрией в том случае, если любая физическая величина зависит только от модуля радиуса-вектора. Ведь в сфере тоже ни одно направление, ни один радиус ничем не отличаются от других.

Если провести сферу вокруг точечного заряда, то силовые линии будут перпендикулярны к ее поверхности. И любую единичную площадку поверхности сферы будет пересекать одно и то же число силовых линий. Поскольку все линии выходят (или входят) из заряда, то вблизи него они расположены более густо. А число их N , приходящееся на единичную площадку поверхности сферы,

Сурхандарьинская
ОБЛАСНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Коголя

NO MIDAGI
SURXONDARYO VILOYATI AXBOROT
KUTUBXONA MARKAZI
Kot. No 17
200 y.

238322

238322

с увеличением радиуса сферы r убывает по закону

$$N \sim \frac{1}{r^2},$$

т. е. по такому же закону, как и напряженность поля

$$E \sim \frac{1}{r^2}.$$

Теперь понятно, что за меру густоты надо взять именно число силовых линий, проходящее через единичную площадку перпендикулярно к ней. А единичную площадку следует выбирать достаточно малой, чтобы не считаться с неоднородностью поля на ее протяжении. Как видим, картина силовых линий может давать и точные количественные значения напряженности. Поскольку поле любой системы зарядов можно представить себе как векторную сумму полей точечных зарядов, то наши рассуждения останутся справедливыми и для системы.

Итак, мы научились описывать электрические поля. Следующие параграфы в соответствии с нашей программой будут посвящены способам нахождения полей.

§ 8. Теорема Гаусса

При решении большого количества задач электростатики используется теорема Гаусса. Прежде чем сформулировать и доказать ее, необходимо ввести понятие потока напряженности через поверхность. Сначала рассмотрим однородное поле. Выделим прямоугольную плоскую площадку, перпендикуляр n к которой расположен под углом α к направлению силовых линий (рис. 1.7). Тогда потоком напряженности через эту площадку называется величина Ψ , равная

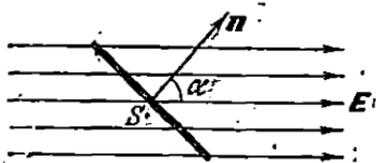


Рис. 1.7.

Прежде чем сформулировать и доказать ее, необходимо ввести понятие потока напряженности через поверхность. Сначала рассмотрим однородное поле. Выделим прямоугольную плоскую площадку, перпендикуляр n к которой расположен под углом α к направлению силовых линий (рис. 1.7). Тогда потоком напряженности через эту площадку называется величина Ψ , равная

$$\Psi = ES \cos \alpha. \quad (1.8)$$

В случае неоднородного поля и произвольной поверхности следует разбить эту поверхность на столь малые участки, на протяжении которых поле можно считать однородным, а сами участки — плоскими.

Полный поток через всю поверхность выразится суммой

$$\Psi_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^n \Psi_i = \sum_{i=1}^n E_i S_i \cos \alpha_i, \quad (1.9)$$

где Ψ_i — поток вектора E_i через малый участок поверхности S_i . Если поверхность замкнутая, то условимся отсчитывать угол от перпендикуляра, выходящего из поверхности. Соответственно этому, если линии напряженности выходят из поверхности, поток положительный, а если входят, — отрицательный.

Перейдем к рассмотрению теоремы Гаусса. Рассмотрим поток $\Delta\Psi$ от точечного заряда через элемент поверхности ΔS , отстоящий на расстоянии r от этого заряда (рис. 1.8):

$$\Delta\Psi = E \Delta S \cos \alpha = E \Delta S',$$

Рис. 1.8.

где $\Delta S'$ — площадка, перпендикулярная к радиусу-вектору. Если известен телесный угол $\Delta\omega$, под которым из точки расположения заряда виден элемент $\Delta S'$ (при достаточно малом $\Delta S'$ его можно считать частью сферы, так как он перпендикулярен к r), то

$$\Delta S' = r^2 \Delta\omega$$

и

$$\Delta\Psi = E r^2 \Delta\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot r^2 \Delta\omega = \frac{q \cdot \Delta\omega}{4\pi\epsilon_0}.$$

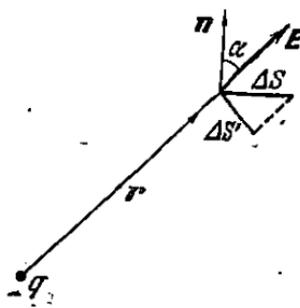
В случае, если заряд помещен внутри замкнутой поверхности, то

$$\Psi_{\text{полн}} = \sum \Delta\Psi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_i \Delta\omega_i = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.10)$$

Для системы зарядов

$$\Psi_{\text{полн}} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0} + \dots = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

Итак: полный поток вектора напряженности электрического поля, выходящий из замкнутой поверхности,



пропорционален алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Если внутри поверхности заряда нет, то из теоремы следует, что поток силовых линий через нее равен нулю. Как видно из рис. 1.9, каждая силовая линия, входящая в объем, ограниченный поверхностью, из него выходит.

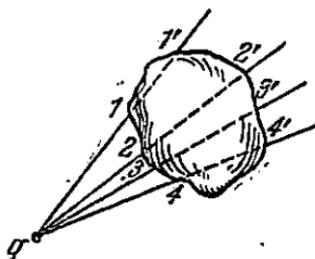


Рис. 1.9.

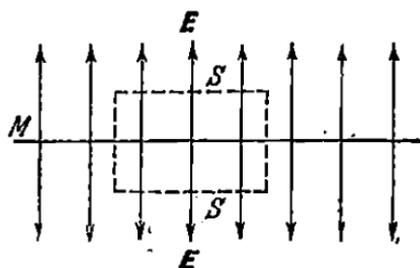


Рис. 1.10.

Особенно удобно для нахождения поля пользоваться теоремой Гаусса в том случае, когда задача обладает какой-либо симметрией. Как пример выберем бесконечную равномерно заряженную плоскость M (рис. 1.10). Плотность заряда на ней ρ_s . Мы уже знаем, как в этом случае направлены силовые линии (знаем из соображений симметрии!). Величину напряженности найдем с помощью теоремы Гаусса. Для этого мысленно выделим прямой параллелепипед с площадью основания S , пересекающий M так, что основания параллельны ей. Напряженность E будет перпендикулярна к основаниям параллелепипеда и параллельна остальным граням.

Полный поток напряженности через поверхность параллелепипеда равен сумме потоков через оба основания (поток через боковые грани равен нулю) $\Psi = 2ES$. Полный заряд внутри параллелепипеда $Q = S\rho_s$. По теореме Гаусса

$$2ES = \frac{1}{\epsilon_0} S\rho_s;$$

отсюда

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \rho_s. \quad (1.12)$$

Для пространства между двумя разноименно заряженными плоскостями

$$E = E_1 + E_2 = 2 \frac{1}{2\epsilon_0} \rho_s = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_s. \quad (1.13)$$

§ 9. Движение заряда в электрическом поле

Предыдущие параграфы были посвящены способам описания и нахождения электрического поля E , создаваемого заряженными телами. Знание этого поля позволяет нам составить уравнения движения для изучаемого пробного заряда и, следовательно, предсказывать его движение, точно так же, как мы поступали в механике.

Рассмотрим, например, движение заряда q в однородном поле E и сравним эту задачу с механической задачей о движении массы m в однородном поле тяжести Земли. В начальный момент и заряд q , и масса m предполагаются покоящимися. Сходство очень ясно видно из таблицы I.

Таблица I

	Поле тяжести Земли	Однородное электростатическое поле
Величина, определяющая свойства тела по отношению к взаимодействию	Масса m	Заряд q
Величина, определяющая свойства самого поля	Ускорение свободного падения (напряженность) g	Напряженность E
Сила, действующая на тело	mg	qE
Уравнение движения $ma = \sum F^i$	$ma = mg$	$ma = qE$
Ускорение	$a = g$	$a = \frac{1}{m} qE$
Скорость $v = at$	$v = gt$	$v = \frac{1}{m} qEt$
Путь $S = \frac{1}{2} at^2$	$S = \frac{1}{2} gt^2$	$S = \frac{1}{2m} qEt^2$

§ 10. Законы сохранения в электростатическом поле

Как уже говорилось в «Механике», далеко не во всех задачах необходимо решать уравнения движения, чтобы предсказать поведение тел. Часто достаточно использовать то, что при движении системы сохраняется неизменным ряд величин — импульс, энергия *). Законы сохранения являются фундаментальными и подтверждены огромным количеством опытов во всех областях физики.

Вместе с тем они являются следствиями уравнений движения и общих свойств симметрии пространства и времени. Так, например, закон сохранения импульса был выведен нами **) на основании второго закона Ньютона. Так же обстоит дело и с энергией.

Естественно воспользоваться законами сохранения при описании движения системы зарядов в электростатическом поле.

Начнем с закона сохранения энергии и в связи с этим напомним основные положения, которые были сформулированы в механике.

1. В замкнутой системе или в системе, находящейся в постоянном (не зависящем от времени) внешнем поле, сохраняется скалярная величина, называемая полной энергией системы W . Именно случай системы, находящейся в постоянном внешнем поле, и осуществляется при движении пробных зарядов в электростатическом поле.

2. Полную энергию можно представить в виде суммы двух различных членов. Первый из них зависит от квадратов скоростей входящих в систему тел и носит название кинетической энергии

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

(n — число тел системы).

Второй член характеризует взаимодействие тел, входящих в систему. В классической механике взаимодействие зависит только от положения тел в данный момент

*) Сохраняется также величина момента импульса.

**) См. «Механика».

времени. В этом случае этот член называют потенциальной энергией U^*)

$$U = U(r_1, r_2, \dots, r_n).$$

Выражение для потенциальной энергии можно найти, зная выражение для сил. В предыдущем параграфе было показано, что уравнения движения тел в гравитационном поле и зарядов в электростатическом поле полностью аналогичны, так как силы в обоих случаях обратно пропорциональны квадрату расстояния. Поэтому мы воспользуемся этим и, не проводя доказательств для электростатического поля, будем по аналогии строить соответствующие выражения. Так как сила в электростатическом поле зависит только от расположения тел, то член в полной энергии, описывающий взаимодействие, называется потенциальной энергией (см. сноску).

Потенциальная энергия связана с силой F соотноше-

нием $F = - \frac{\Delta U^{**})}{\Delta x}$, где ΔU означает разность потенциальных энергий $\Delta U = U_2 - U_1$ в точках с координатами x_2 и x_1 . Это равенство выполняется точно для однородного поля, например для однородного поля сил тяжести Земли

$$U = mgx$$

и

$$F = P = \frac{mg(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = mg.$$

А для неоднородного поля равенство выполняется тем точнее, чем меньше Δx . Для электростатики связь между потенциальной энергией и силой запишется как

$$F_x = qE = - \frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (1.14)$$

Так как для характеристики взаимодействия мы ввели поле напряженности, то удобно равенство (1.14) записать

*) В дальнейшем мы познакомимся с более сложными видами взаимодействия, зависящими не только от расположения тел, но и от других их характеристик. В этом случае величину, описывающую взаимодействие, не принято называть потенциальной энергией, хотя закон сохранения энергии безусловно выполняется.

**) Рассматривается перемещение тела вдоль оси x .

в следующем виде:

$$E_x = - \frac{\Delta U}{\Delta x} = - \frac{U_1 - U_2}{\Delta x} = \frac{U_2}{q} - \frac{U_1}{q}. \quad (1.15)$$

Величина U/q называется потенциалом электрического поля и обозначается через ϕ . Используя свойства символа Δ , формулу (1.15) можно записать в виде

$$E_x = - \frac{\Delta \phi}{\Delta x}. \quad (1.16)$$

Потенциальная энергия заряда в поле, выраженная через потенциал, равна

$$U = q\phi. \quad (1.17)$$

3. Так как в выражение для силы входит приращение потенциальной энергии, то от прибавления к потенциальной энергии постоянной величины, сила, а вместе с ней и уравнения движения не изменятся. Потенциальная энергия определена неоднозначно. Для однозначного определения необходимо указать такое расположение взаимодействующих тел, которому соответствует $U = 0$, т. е. выбрать нулевой уровень потенциальной энергии. То же относится, очевидно, и к потенциалу. Чаще всего принимают, что система зарядов обладает нулевой потенциальной энергией в случае, если заряды разведены на бесконечно большое расстояние и не взаимодействуют.

Вообще же нулевой уровень можно выбирать произвольно, а именно так, как удобно для решения конкретных задач. Выбор нулевого уровня называется калибровкой потенциальной энергии.

4. Для двух масс m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, величина потенциальной энергии дается выражением

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Соответственно для двух зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстоянии r друг от друга,

$$U(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1.18)$$

При этом выбрана калибровка $U(\infty) = 0$.

В этом случае

$$\varphi_1(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}, \quad \varphi_1(\infty) = 0.$$

5. Изменение энергии тела характеризуется работой. При перемещении тела в поле сил тяжести по произвольному пути величина работы определяется изменением потенциальной энергии, которое зависит только от начального и конечного положений тела, так как

$$U = U(r).$$

Работа сил тяжести поэтому не зависит от формы пути. То же самое верно и для электростатического поля, в котором аналогично $U = U(r)$.

Следовательно, работа электрических сил не зависит от формы пути и при движении заряда по замкнутому контуру равна нулю.

При перенесении заряда по замкнутому контуру на каждом его малом участке Δl мы можем считать силу, действующую на заряд q , постоянной: $F = \text{const}$, а участок траектории Δl — отрезком прямой. Тогда работа

$$\Delta A_i = F\Delta l = qE\Delta l = qE\Delta l \cos \alpha,$$

где α — угол между направлением напряженности и направлением перемещения Δl .

Если теперь вычислить всю работу, произведенную над зарядом, то

$$A = q \sum_i E \Delta l = 0. \quad (1.19)$$

Величина $\sum_i E \Delta l$ носит название *электродвижущей силы*. Понятие это пригодится нам впоследствии.

§ 11. Потенциал электростатического поля

Электростатическое поле в каждой точке можно характеризовать не только векторной величиной — напряженностью, но и скалярной величиной — потенциалом.

В предыдущем параграфе была установлена связь между ними. Так как потенциал является скалярной величиной, то использование его во многих случаях бывает проще и удобней.

Если нам известно значение потенциала в каждой точке, то мы всегда можем найти соответствующее значение напряженности. В декартовой системе координат, согласно

(1.16), $E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ и для E_y и E_z имеем

$$E_y = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta y},$$

$$E_z = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}.$$

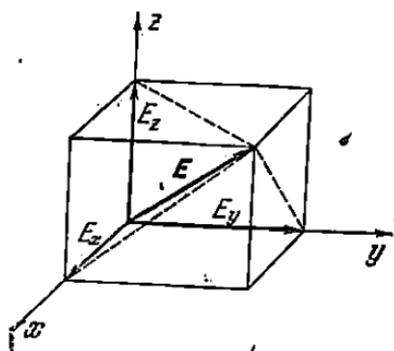


Рис. 1.11.

Отсюда легко восстановить величину и направление E (рис. 1.11).

Поле можно задать не только аналитически, но и графически — с помощью силовых линий.

Если мы пользуемся потенциалом, то для графического изображения полей строят так называемые эквипотенциальные по-

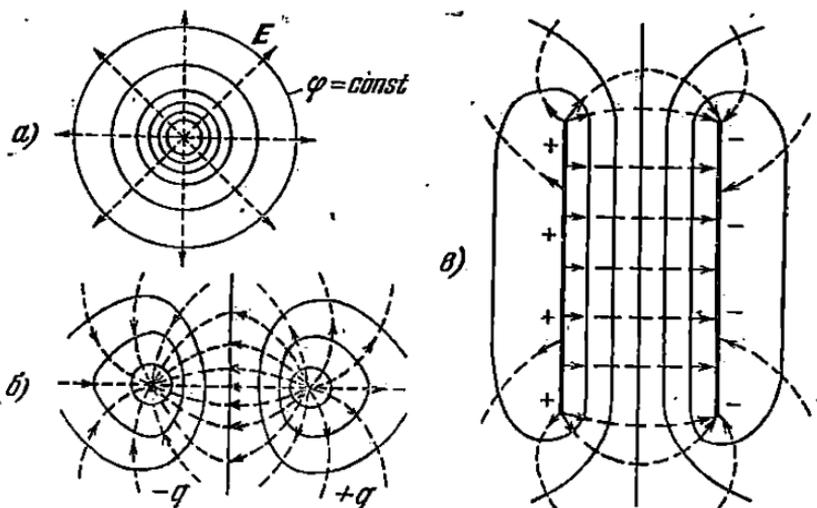


Рис. 1.12.

верхности, т. е. поверхность равного потенциала. Двигая заряд перпендикулярно силовым линиям, мы не совершаем никакой работы. Следовательно, потенциал при таком дви-

жении будет одинаков во всех точках траектории. Поверхность, каждый малый элемент которой перпендикулярен к силовым линиям, пересекающим ее, и будет эквипотенциальной. На рисунке мы можем изобразить сечение эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа, т. е. эквипотенциальные линии. Если проводить эквипотенциальные поверхности так, чтобы между ними была одинаковая разность потенциалов $\Delta\phi$, то их густота позволяет судить о характере поля так же, как и густота силовых линий.

Все это проиллюстрировано на рис. 1.12, изображающих силовые линии и эквипотенциальные поверхности одиночного заряда (а), диполя (б), поля двух плоских разноименно заряженных пластин (в).

§ 12. Энергия системы зарядов во внешнем поле

В электростатике нас будет интересовать вычисление энергии в двух случаях.

Во-первых, нахождение энергии пробного заряда или системы пробных зарядов в заданном внешнем поле.

Во-вторых, определение энергии взаимодействия зарядов между собой (см. § 13).

В первом случае мы пренебрегаем силами внутри системы по сравнению с ее взаимодействием с внешним полем. Поэтому и говорят о пробных зарядах, т. е. таких зарядах, влияние которых друг на друга и на источники поля можно не учитывать. Мы знаем выражение для энергии одного заряда q во внешнем поле: $U = q\phi$, где ϕ — потенциал поля в точке нахождения заряда. Если система состоит из n зарядов, то энергия такой системы

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (1.20)$$

где q_i — заряд i -го тела системы *), ϕ_i — потенциал внешнего поля в точке нахождения i -го тела. Формула (1.20) справедлива постольку, поскольку мы пренебрегли взаимодействием зарядов системы между собой.

*) Тела считаем точечными. Когда это не так, мысленно разбиваем тело на какое-то число частей, каждую из которых можно считать точечной.

Эта формула является самой общей. Однако чтобы ею воспользоваться, надо иметь очень подробные сведения как о системе зарядов, так и о поле. Надо знать детальное распределение зарядов и потенциал внешнего поля в каждой точке системы. Поэтому часто используют приближенные методы определения энергии. Сейчас мы и перейдем к их рассмотрению.

Пусть система, состоящая из произвольного числа, скажем, n зарядов, находится в электрическом поле. В первом, самом грубом, приближении будем считать, что потенциал внешнего поля не изменяется существенно на протяжении размеров системы (рис. 1.13) (такая ситуация осуществляется в действительности, когда эти размеры очень малы). Тогда, поместив начало декартовой системы координат в произвольной точке внутри системы, мы можем записать ее энергию в виде

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \varphi(\mathbf{r}_i),$$

где \mathbf{r}_i — радиусы-векторы зарядов системы, и сказать, что у нас все $\varphi(\mathbf{r}_i)$ равны одной и той же постоянной $\varphi(0)$. Поэтому

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \varphi(0) = \varphi(0) \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.21)$$

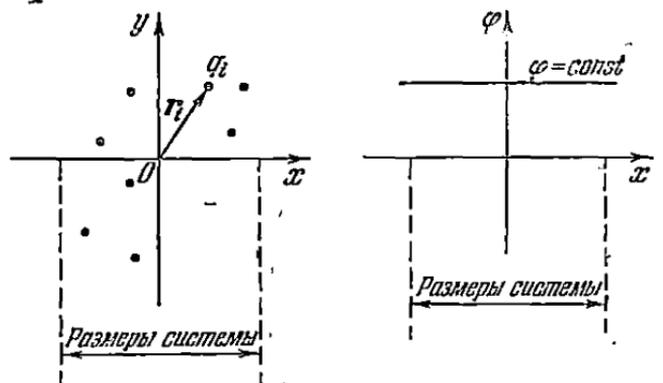
В этом приближении система взаимодействует с внешним полем как точечный заряд, помещенный в точку с потенциалом $\varphi(0)$. Величина этого заряда равна алгебраической сумме зарядов системы.

Перейдем к следующему приближению. Естественно учесть теперь изменение потенциала на протяжении системы. Самый простой закон такого изменения — линейный.

Произвольную кривую на графике для достаточно малого участка можно заменить отрезком прямой. Поэтому и мы потенциал (достаточно сложно зависящий от \mathbf{r}') заменим на протяжении системы линейно меняющейся функцией координат. Это приближение тоже тем точнее, чем меньше размеры системы.

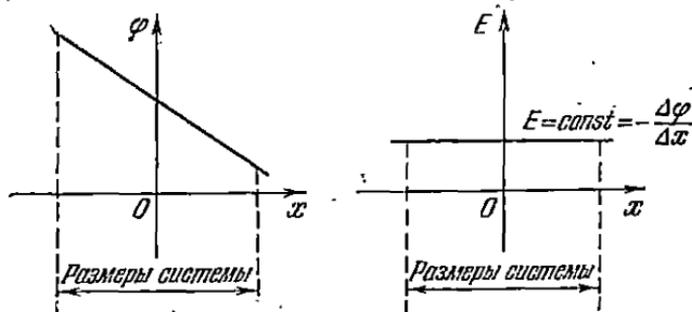
Что значит, что потенциал зависит линейно от координат? Это значит, что, например, величина $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ остается

Первое приближение: $\varphi = \text{const} = \varphi(0)$

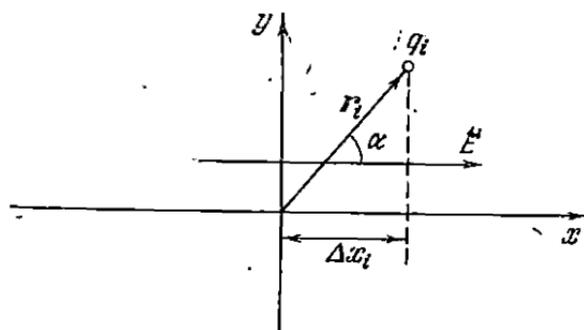


а)

Второе приближение: $\varphi = kx$



б)



в)

Рис. 1.13.

постоянной и напряженность поля $E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ тоже остается неизменной в области, занимаемой нашими зарядами (рис. 1.13, б). Точно так же остаются неизменными E_y и E_z . Следовательно, и сам вектор E не меняется. Удобно систему координат выбрать так, чтобы ось x по направлению совпала с E . На физические выводы это, естественно, не повлияет.

Итак, второе приближение — система, находящаяся в однородном поле E , направленном вдоль некоторой оси x .

Запишем общую формулу $U = \sum_{i=1}^n q_i \varphi(r_i)$ и представим каждый из φ_i как $\varphi(0) + \Delta\varphi(r_i)$; тогда

$$U = \sum q_i [\varphi(0) + \Delta\varphi(r_i)] = \varphi_0 \sum q_i + \sum q_i \Delta\varphi(r_i).$$

Последний член преобразуем

$$\sum q_i \Delta\varphi(r_i) = \sum q_i \frac{\Delta\varphi(r_i) \Delta x_i}{\Delta x_i} = - \sum q_i E_x \Delta x_i,$$

где Δx_i — координата i -го заряда. Но $E_x \Delta x_i = E r_i \cos \alpha = E r_i$, так как ось x выбрана вдоль E (см. рис. 1.13, в), и окончательно

$$U = \varphi(0) \sum q_i - E \sum q_i r_i \quad (1.21a)$$

(E всюду одинаково!).

Первый член нам уже знаком из более грубого приближения, приближения точечного заряда.

Когда система в целом нейтральна, т. е. $\sum q_i = 0$, остается только второй член. Этот случай представляет большой интерес. Ведь в обычном состоянии все тела нейтральны, хотя и состоят из огромного числа заряженных частиц. Просто положительных и отрицательных частиц одинаковое количество. Поэтому мы сейчас займемся подробным исследованием второго члена и выясним его физического смысла.

Рассмотрим вначале самую простую модель нейтрального тела — диполь. Под диполем мы понимаем жесткую систему из двух зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга. Энергия диполя в однородном

поле E (рис. 1.14)

$$U = -E \sum_{i=1}^2 q_i r_i = -E (+qr_1 - qr_2) = \\ = -Eq(r_1 - r_2) = -Elq. \quad (1.22)$$

Вектор l направлен от отрицательного заряда к положительному. Произведение же $ql = \sum_{i=1}^2 q_i r_i$ называется дипольным моментом и обозначается через d

$$d = ql, \quad (1.23)$$

$$U = -Ed. \quad (1.22a)$$

Видно, что вектор d полностью характеризует поведение диполя во внешнем поле. При d , параллельном E , энергия системы минимальна — это соответствует устойчивому равновесию диполя. При d , антипараллельном E , равновесие неустойчиво. При любых других взаимных ориентациях E и d диполь стремится повернуться и стать так, чтобы векторы расположились параллельно. Любую нейтральную систему из n зарядов можно представить

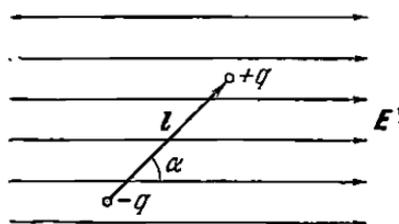


Рис. 1.14.

как совокупность диполей. Величину $D = \sum_{i=1}^n q_i r_i$ естественно назвать дипольным моментом системы, ведь это векторная сумма моментов всех составляющих ее диполей. Свойства нашей системы в рассматриваемом приближении целиком определяются D . Она эквивалентна некоторому диполю. Как можно его себе наглядно представить? Поместим все положительные заряды системы в одну точку. В ней будет находиться суммарный положительный заряд $Q^+ = \sum_{i=1}^{n/2} q_i^+$. В другую точку — все отрицательные заряды. Получим диполь. Расстояние между этими точками $|R|$

определился из равенства дипольных моментов

$$QR = \sum q_i r_i$$

и

$$R = \frac{\sum q_i r_i}{Q} = \frac{\sum q_i r_i}{\sum q_i} \quad (1.24)$$

Итак, в первом приближении мы заменяем систему одиночным точечным зарядом.

Второе приближение учитывает более тонкие детали распределения заряда, поэтому оно более точное.

Еще раз проследим логику наших приближений. На первом этапе мы считали, что потенциал поля неизменен на протяжении размеров системы, это привело к очень жесткому требованию малости системы.

На втором этапе мы полагали постоянным поле или, что то же самое, грубо учли изменения потенциала, считая их линейными.

Требование малости при этом стали менее жесткими. Ведь в формулу вошел дипольный момент системы, зависящий от ее размеров, а это подразумевает, что она имеет конечную протяженность. Вместе с тем неоднородность поля на таких расстояниях еще не сказывается.

Естественно на следующем этапе учесть и изменение поля на протяжении системы. Простейшее такое изменение, опять-таки, линейное. Требование малости еще более ослабляется, а вычисления становятся более точными.

Однако третье приближение много сложнее первых двух. В этом приближении энергия взаимодействия системы с полем запишется также в виде суммы нескольких членов. Первые два из них нам уже знакомы. Они зависят соответственно от заряда и дипольного момента. Остальные члены, с одной стороны, должны учитывать неоднородность внешнего поля, а с другой — потребуют от нас еще более точной информации о расположении зарядов в системе. Их роль будет особенно велика, когда первые два члена обращаются в нуль. Это происходит в том случае, когда система нейтральна и не имеет дипольного момента.

Самый простой пример такой системы дают два диполя с равными по величине и противоположно направленными

дипольными моментами (рис. 1.15). Такая совокупность зарядов носит название квадруполь.

Процесс нахождения последовательных приближений можно продолжать неограниченно. Каждое следующее из них будет учитывать все более тонкие изменения поля и требовать все больше сведений о системе зарядов, находящейся в этом поле. В огромном большинстве практических случаев никто не интересуется приближениями выше третьего.

Метод, который мы применяем, хорош только тогда, когда члены суммы достаточно быстро уменьшаются*). Если 27-й член играет основную роль, а мы проводим разложение только до третьего члена, то ценность таких вычислений невелика.

Члены суммы быстро уменьшаются в том случае, когда внешнее поле на протяжении размеров системы не сильно отличается от однородного. Какой источник создает такое поле? Любой, если его расстояние до системы R много больше ее характерных размеров r . Это и есть общее требование к малости системы.

Аналогичные рассуждения помогают нам понять, как выглядит поле самой системы на далеких расстояниях от нее. Проведя их, мы получим, что потенциал поля системы можно представить в виде суммы потенциалов точечного заряда, диполя, квадруполя и т. д.

В примере VI этой главы будет дан строгий вывод для этого случая.

§ 13. Энергия системы зарядов

Нам теперь необходимо научиться вычислять энергию взаимодействия системы зарядов. Введение понятия потенциала эту задачу значительно облегчает. Действительно, для двух неподвижных зарядов q_1 и q_2

*) Конечно, имеются в виду члены суммы, не равные нулю. Например, суммарный заряд системы может быть равен нулю, а дипольный момент отличен от нуля.

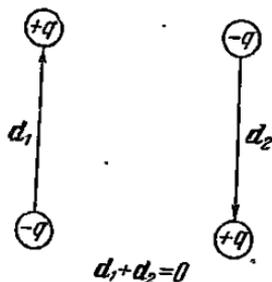


Рис. 1.15.

потенциальная энергия взаимодействия равна

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

где r_{12} — расстояние между зарядами. Используя понятие потенциала, эту формулу можно записать как $U = q_1\varphi_1$ (φ_1 — потенциал поля второго заряда в точке, где находится первый заряд, $\varphi_1 = \frac{q_2}{r_{12}}$).

Можно записать U и по-другому: $U = q_2\varphi_2$; здесь уже φ_2 — потенциал, создаваемый первым зарядом в точке нахождения второго. Чтобы ни одному из зарядов не было «обидно», естественно написать

$$U = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2),$$

т. е. в так называемом симметричном виде. Итак, для двух зарядов

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i\varphi_i. \quad (1.25)$$

Для системы из n зарядов выражение для энергии можно получить, например, методом математической индукции. Оно будет иметь вид

$$U = \sum_{k=1}^n \frac{q_k\varphi_k}{2}, \quad (1.26)$$

где φ_k — потенциал поля, создаваемый всей системой зарядов в точке нахождения k -го заряда (исключается только сам k -й заряд).

Так как $\varphi_k = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_{ik}}$ ($i \neq k$), то формулу (1.26) можно переписать в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ (i \neq k)}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (1.27)$$

Если заряд непрерывно распределен по объему и в каждой точке задана его плотность ρ_v , то необходимо

разбить объем на n малых частей ΔV_k , внутри которых можно считать потенциал φ_k и плотность ρ_{vk} постоянными. Тогда

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_{vk} \Delta V_k \varphi_k. \quad (1.28)$$

Итак, мы получили общую формулу, описывающую энергию взаимодействия зарядов.

Разберем очень важный для дальнейшего случай, когда система взаимодействующих зарядов представляет собой две одинаковые параллельные равномерно заряженные пластины, площадью S каждая. Плотности зарядов на каждой из них равны ρ_s , но различаются знаком (рис. 1.16).

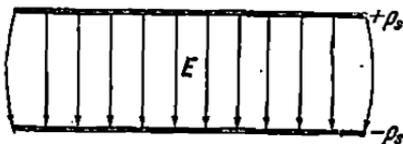


Рис. 1.16.

Если расстояние между пластинами l много меньше их линейных размеров d (а мы будем рассматривать только такой случай), то электрическое поле между ними вполне можно считать однородным.

Неоднородность будет только на краях и в соответствии с условием $l \ll d$ ею можно пренебречь. Мы уже знаем вид силовых линий этого поля (и эквипотенциальных поверхностей). Они показаны на рис. 1.12. Из того же рисунка видно, что сами поверхности пластин являются эквипотенциальными. Поэтому имеет смысл говорить о потенциале пластины.

Пусть потенциал одной из пластин (например, положительной) равен $+\varphi_1$, а второй $-\varphi_2$. Тогда, воспользовавшись формулой (1.2) для поверхностного распределения зарядов, мы можем записать выражение для энергии в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \rho_s^+ \Delta S_i \varphi_1 + \frac{1}{2} \sum_k \rho_s^- \Delta S_k \varphi_2.$$

Это выражение упростится, если выбрать нормировку потенциала так, чтобы, скажем, $\varphi_2 = 0$, и, кроме того, постоянные φ_1 и ρ_s вынести за скобку. Тогда $U = \frac{1}{2} \rho_s \varphi_1 \sum \Delta S_i$.

Замечаем, что $\sum \Delta S_i$ равна площади пластины, и тогда

$$U = \frac{1}{2} \rho_s \varphi S = \frac{1}{2} Q \varphi, \quad (1.29)$$

где Q — общий заряд одной из пластин.

Этот пример показывает, что иногда понятие поля (потенциала) становится практически незаменимым. Действительно, если бы мы пытались вычислить энергию такой системы по формуле (1.27), то погрязли бы в математических выкладках до конца всех выпусков серии. А здесь мы использовали только соображения симметрии и понятие потенциала поля (существенна эквипотенциальность поверхности пластин).

§ 14. Энергия электростатического поля

Пример, рассмотренный нами в конце предыдущего параграфа, интересен и тем, что электрическое поле целиком заключено в ограниченном объеме между двумя пластинами, в то время как поле большинства заряженных систем заполняет все пространство. Кроме того, это поле однородно. Поэтому, переписав формулу (1.29) в виде

$$U = \frac{1}{2} Q \varphi = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} l S$$

(здесь мы использовали то, что $\varphi = El$, а $Q = S \rho_s = S \varepsilon_0 E$ (см. (1.13)) и заменив произведение Sl на объем V , занимаемый полем, мы видим, что каждой единице этого объема соответствует энергия, равная

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.30)$$

Эту величину можно назвать плотностью энергии поля.

Выражение (1.30) справедливо и в случае неоднородных полей. Тогда под \bar{E} понимается средняя напряженность в «бесконечно малом» объеме ΔV .

Полная энергия поля в некоторой области пространства равна

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N u_i \Delta V_i \quad (1.31)$$

(номер N , как всегда, равен числу кусочков, на которые мы разбили весь объем V).

При выводе этой формулы мы с самого начала считали, что эта энергия — энергия взаимодействия зарядов и «носителями» ее являются именно заряды, находящиеся на пластинах. Тот факт, что в формулу (1.30) входит только квадрат напряженности поля и занимаемый им объем, дает право считать, что эта энергия сосредоточена в пространстве, занимаемом полем. В электростатике оба подхода равноправны, так как поля всегда создаются зарядами и заряды окружены полями.

Итак, поле оказывается очень полезным понятием. Сначала нами просто был введен «агент», посредством которого мы описывали взаимодействия зарядов:

«Но теперь агент действует и как переводчик, переводящий законы на простой ясный, легко понимаемый язык» (Эйнштейн).

§ 15. Об единицах измерения

В § 4 мы ввели единицу заряда для двух систем СГСЭ и СИ. Теперь приведем единицы измерения основных величин, встречающихся в электростатике. Так как в задачах и примерах используется только система СИ, то таблица II содержит единицы этой системы.

Таблица II

Наименование величины	Обозначение	Название единицы	Размерность
Электрический заряд	q	Кулон (κ)	$a \times \text{сек}$
Электрический потенциал	ϕ	Вольт (ϵ)	$\text{м}^2 \times \text{кг} \times \text{сек}^{-3} \times a^{-1}$
Электродвижущая сила	\mathcal{E}		
Напряженность электрического поля	E	Вольт на метр ($\epsilon/\text{м}$)	$\text{м} \times \text{кг} \times \text{сек}^{-3} \times a^{-1}$
Плотность энергии электрического поля	u	Джоуль на кубический метр ($\text{дж}/\text{м}^3$)	$\text{м}^{-1} \times \text{кг} \times \text{сек}^{-2}$

Кроме того, приведем в заключение еще одну часто встречающуюся единицу, не входящую в эту систему, — электрон-вольт. Электрон-вольт это энергия, которую приобрела частица с зарядом, равным заряду электрона, пройдя разность потенциалов в 1 вольт.

ПРИМЕРЫ

1. Найти выражение для напряженности поля бесконечно длинной заряженной нити, если линейная плотность зарядов на ней одинакова и равна ρ_l (для определенности примем, что нить заряжена положительно, т. е. $\rho_l > 0$).

Выберем произвольную точку A на расстоянии R от нити и будем искать выражение для напряженности поля

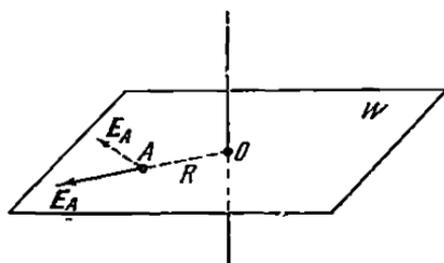


Рис. 1.17.

в этой точке. Соображения симметрии позволяют нам предсказать, как именно будет направлена напряженность. Если через точку A провести плоскость W , перпендикулярную к нити, то, во-первых, вектор напряженности E_A будет лежать в этой плоскости, и, во-вторых, он

будет направлен перпендикулярно к нити (рис. 1.17).

Действительно, если бы вектор E_A лежал не в этой плоскости, а, скажем, так, как это показано на рис. 1.17 пунктиром, то это указывало бы на то, что верхняя часть нити (выше точки O) отталкивает единичный положительный заряд не так, как нижняя.

Но ведь нить простирается бесконечно как вверх, так и вниз от точки O и плотность заряда по ее длине одинакова!

Теперь осталось разобрать второе утверждение, а именно, что E_A направлено по радиусу OA .

В плоскости W есть две выделенные точки. Это точка O , в которой нить пересекает плоскость, и точка A , которая выделена тем, что в ней мы меряем напряженность. Но две точки задают только одну прямую — проходящую через них. Следовательно, существует только одно выделенное направление OA . Любые другие направления никаких «преимуществ» друг перед другом не имеют.

Итак, симметрия задачи (а она носит название цилиндрической симметрии) дает нам право утверждать, что напряженность направлена по радиусу OA . Используя ту же симметрию, следует считать, что абсолютная вели-

чина напряженности для всех точек, лежащих на окружности радиусом R и с центром в точке O , одинакова, а направление в каждой точке совпадает с направлением проведенного в нее радиуса. Поэтому силовые линии заряженной нити в плоскости, перпендикулярной к нити, будут иметь вид, указанный на рис. 1.18.

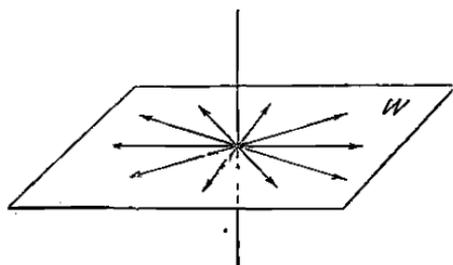


Рис. 1.18.

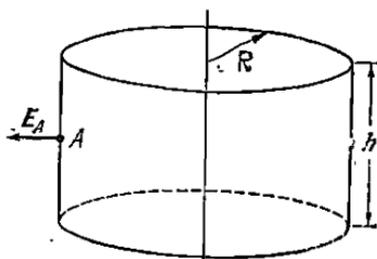


Рис. 1.19.

Теперь, когда симметрия задачи подсказала нам направление напряженности, используем теорему Гаусса для нахождения ее величины.

Проведем через точку A цилиндр, ось которого совпадает с нитью. Высота цилиндра h (рис. 1.19).

Полный поток Ψ напряженности через поверхность цилиндра равен потоку через боковую поверхность, так как силовые линии не пересекают торцов цилиндра:

$$\Psi = E_A 2\pi R h.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса $\Psi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_l h$, т. е. полный поток вектора напряженности пропорционален сумме зарядов, заключенных внутри поверхности:

$$E_A 2\pi R h = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_l h.$$

Отсюда

$$E_A = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l}{R}.$$

Напряженность поля убывает обратно пропорционально расстоянию до нити.

II. Найти поле диполя $(+q, -q)$ в точках, расположенных на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка l , соединяющего заряды (рис. 1.20). Рассмотреть случай, когда расстояние r до точки наблюдения много больше l .

Напряженность поля, создаваемого отдельным зарядом, равна по величине

$$E = E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + (l/2)^2};$$

отсюда

$$\begin{aligned} E_{\text{полн}} &= E_1 \cos \alpha + E_2 \cos \alpha = 2E \cos \alpha = \\ &= \frac{2q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 [r^2 + (l/2)^2]} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 + (l/2)^2} \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} = \\ &= \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 [r^2 + (l/2)^2]^{3/2}} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3 [1 + (l/2r)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Для расстояний $r \gg l$ формула для $E_{\text{полн}}$ принимает простой вид

$$E \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

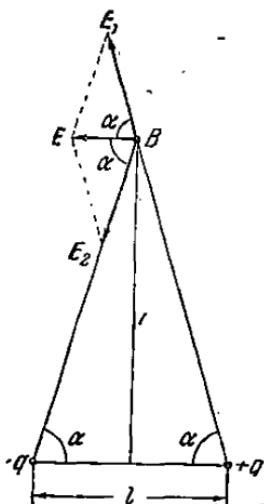


Рис. 1.20.

Здесь ql величина дипольного момента системы наших зарядов $d = ql$. Окончательно

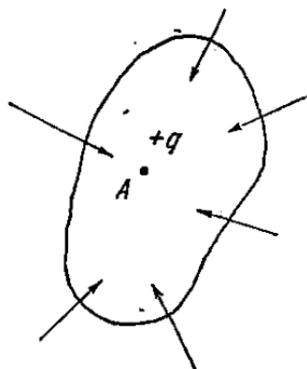
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{r^3}.$$

Напряженность поля диполя спадает быстрее, чем напряженность поля точечного заряда.

III. Доказать, что неподвижная система зарядов не может находиться в состоянии устойчивого равновесия в том случае, если на заряды не действуют никакие силы, кроме электрических.

Рассмотрим равновесие одного из зарядов системы. Для определенности выберем положительный заряд $+q$. И предположим, что заряд находится в устойчивом равновесии в некоторой точке пространства A под действием одних лишь электрических сил.

То, что заряд находится в состоянии устойчивого равновесия, означает, что при смещении его из точки A в любую другую близкую точку возникают силы, стремящиеся вернуть заряд в первоначальное состояние. Окружим заряд поверхностью S , такой, чтобы никакие другие заряды внутри этой поверхности не попали и чтобы точки этой поверхности были достаточно близки к точке A . Устойчивость равновесия будет выполняться, если все векторы напряженности, пересекающие поверхность, будут направлены внутрь ее (рис. 1.21). Именно это и означает, что при смещении из точки A будут возникать возвращающие силы.



$$\sum E \Delta S = +kq$$

Рис. 1.21.

Но это явно противоречит теореме Гаусса. Ведь общее число и направление линий напряженности, пересекающих поверхность S , должно быть связано со знаком и величиной заряда, заключенного внутри объема, охватываемого этой поверхностью. Число их должно быть пропорционально q , а направлены они должны быть из объема, охватываемого поверхностью S , а не наоборот, так как заряд, заключенный в объеме, положительный.

Мы пришли к противоречию. Следовательно, равновесие положительного заряда под действием одних только электрических сил в случае, если заряды неподвижны, невозможно. Аналогично можно рассмотреть и равновесие отрицательного заряда. Откуда следует, что невозможно устойчивое равновесие и любой системы зарядов.

IV. Пусть в однородное электростатическое поле E влетает перпендикулярно к силовым линиям заряженное тело массой m (рис. 1.22). Надо найти его координаты спустя время t . Начальная скорость тела v , а его заряд q . Направление силы тяжести совпадает с направлением E .

Так как по горизонтали на тело никакие силы не действуют, то и его горизонтальная скорость останется постоянной. Через время t координата x тела станет равной $x(t) = vt$.

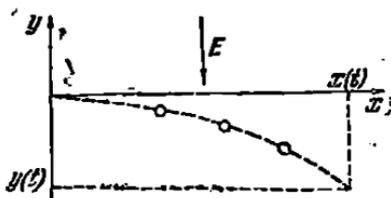
По вертикали силы действуют. Это сила тяжести и электрическая сила. Уравнение движения для вертикальной проекции

$$ma_y = qE + mg,$$

откуда $a_y = \frac{qE}{m} + g$ и по формуле

$$y(t) = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{(qE/m + g)t^2}{2}$$

можно найти координату тела в любой момент времени. Скорость тела в этот момент



$$v_y = a_y t = \left(\frac{qE}{m} + g \right) t,$$

$$v_x = v,$$

$$v_{\text{полн}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Рис. 1.22.

Тем самым полностью определено состояние тела.

V. Зависит ли (в электростатике) работа электрических сил от формы пути, по которому перемещается заряд? Использовать закон сохранения энергии.

Рассмотрим сначала случай, когда заряд перемещается по замкнутому контуру, и докажем, что в этом случае работа по перемещению равна нулю. Для доказательства предположим обратное. У нас существует система неподвижных и неизменных зарядов-источников и пробный заряд. Мы переносим этот пробный заряд по замкнутому контуру и, возвратившись в исходную точку, замечаем, что его энергия изменяется. Ну, скажем, возрастает. Это и есть тот случай, когда работа отлична от нуля. Может ли это быть? Никаких изменений с окружающими телами не произошло (по самому определению статического поля оно неизменно). Пробный заряд находится в той же точке, что и в начале, а мы получили дополнительную энергию.

Поскольку закон сохранения энергии справедлив, остается предположить, что работа по перемещению заряда равна нулю. Из равенства работы нулю на замкнутом пути сразу же следует ответ на вопрос, поставленный в этом примере: если перемещать заряд между двумя точка-

ми A и B , то работа не зависит от формы пути, по которому заряд перемещается (рис. 1.23).

Пусть заряд по пути 1 перешел из A в B , затратив работу A_1 , затем по пути 2 вернулся в A , затратив работу A_2 . Тогда $A_1 = -A_2$. Если бы он возвращался по пути 3, то $A_1 = -A_3$. Отсюда $A_2 = A_3$, т. е. работа от формы пути не зависит.

VI. Получить приближенное выражение для потенциала системы зарядов на далеких расстояниях от нее (т. е. когда размеры системы много меньше расстояния от нее до точки наблюдения).

Прежде чем получить некоторое приближение для φ , мы можем написать его точное выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i},$$

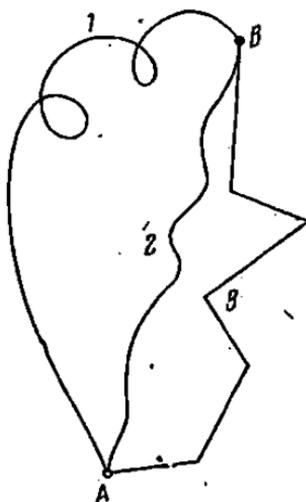


Рис. 1.23.

где q_i — величина i -го заряда и R_i — его расстояние до точки наблюдения. Чтобы воспользоваться этой формулой, надо знать величину каждого заряда и его местонахождение. Чаще всего такую подробную информацию получить трудно, если вообще возможно. Поэтому чрезвычайно полезно было бы найти некоторое приближенное выражение для потенциала. Тогда, проиграв в точности, мы бы выиграли в быстроте вычислений и в наглядности физической картины.

Выберем начало координат внутри системы зарядов так, как это показано на рис. 1.24.

Теперь потенциал можно записать в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|},$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор точки наблюдения и \mathbf{r}_i радиус-вектор i -го заряда.

Если ввести единичный вектор \mathbf{e} вдоль направления \mathbf{R} , то, так как все $|\mathbf{r}_i| \ll |\mathbf{R}|$ и $|\mathbf{r}_i| \ll |\mathbf{R}_i|$ (размеры системы

малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения), можно положить, что

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i| \approx R - r_i e = R - r_i \cdot 1 \cdot \cos(\widehat{r, e})$$

и

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R - r_i e}.$$

Умножим числитель и знаменатель каждого из слагаемых

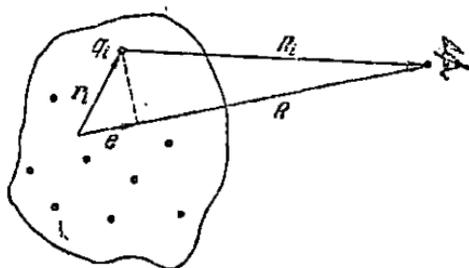


Рис. 1.24.

суммы на выражение $R + r_i e$, тогда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i (R + r_i e)}{R^2 - r_i^2}, \text{ так как } (r_i e)^2 = (r_i)^2 (e)^2 = (r_i)^2 \cdot 1 = r_i^2.$$

Теперь пренебрегая величиной r_i^2 по сравнению с R^2 , получим приближенное выражение для потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{R} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^n q_i r_i}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \frac{eD}{R^2} \right),$$

где Q — суммарный заряд системы и D — ее дипольный момент. Итак, в этом приближении первый член — потенциал точечного заряда Q , расположенного на расстоянии R от точки наблюдения.

В случае, когда система нейтральна и $Q = \sum_{i=1}^n q_i = 0$, основную роль играет второй член, который представляет со-

бой потенциал диполя, с дипольным моментом $D = \sum_{i=1}^n q_i r_i$.

Потенциал этот убывает уже, как $1/R^2$, т. е. значительно быстрее потенциала точечного заряда (следовательно, поле диполя должно убывать, как $1/R^3$).

Если бы мы интересовались дальнейшими членами этого ряда, то следующий член представлял бы собой потенциал квадруполь. Этот член убывает, как $1/R^3$. Однако из-за громоздких выкладок мы не стали его получать.

Такое разложение помогает очень наглядно представить себе электрические характеристики системы.

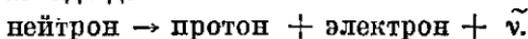
ЗАДАЧИ

1.1. Все известные сейчас элементарные частицы можно разбить на три группы: нейтральные (например, нейтрон, π^0 -мезон, γ -квант, нейтрино), имеющие заряд $+e$ (например, протон, π^+ -мезон, позитрон), и, наконец, имеющие заряд $-e$ (π^- -мезон, электрон и т. д.). Ответьте на следующие вопросы:

1) Может ли нейтральная частица распадаться на нечетное число заряженных элементарных частиц?

2) Известно, что нейтральный η -мезон может распадаться на три π -мезона. Написать реакцию распада, если дано, что один из π -мезонов заряжен.

3) Законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения заставили физиков предположить, что кроме протона и электрона при распаде нейтрона вылетает некоторая частица, которую принято обозначать $\tilde{\nu}$. Такой распад идет по схеме



Что вы можете сказать об электромагнитных свойствах этой частицы?

1.2. Сравнить силы гравитационного и электрического притяжения между электроном и протоном. Напомним, что

заряд электрона $-1,6 \cdot 10^{-19} \kappa$, масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \kappa g$;

заряд протона $+1,6 \cdot 10^{-19} \kappa$, масса $m_p = 1836 m_e$;

постоянная γ в законе тяготения Ньютона

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2 / \kappa g^2.$$

1.3. За несколько лет до того, как Кулон проделал опыты и установил закон для электрических сил, Франклин заметил, что на заряд, помещенный внутри равномерно заряженной сферы, не действуют никакие силы. Мог ли он, используя этот факт, сделать предположение о зависимости электрических сил от расстояния?

1.4. Кулон изучал зависимость силы, действующей между проводящими заряженными шариками*), от величины их зарядов. Поэтому ему было необходимо изменять величину заряда шариков в известное число раз. Как это можно было сделать? (учтите, что измерить заряд Кулон никак не мог — ведь величину заряда можно установить только на основании этого же опыта).

1.5. Обязано ли заряженное тело, помещенное в электрическое поле, двигаться по силовым линиям? Никакие другие силы, кроме электрических, на него не действуют.

1.6. Могут ли силовые линии электрического поля касаться друг друга в какой-то точке?

1.7. Показать, что силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.

1.8. Шар радиуса R равномерно заряжен по всему объему. Плотность заряда ρ_v .

Найти электрическое поле внутри и вне шара. Построить график зависимости $E = f(r)$, где r — расстояние до точки O — центра шара.

1.9. Две равномерно заряженные сферы расположены одна внутри другой так, что их центры совпадают. Полный заряд одной сферы $+Q$, радиус ее R_1 . Полный заряд второй сферы $-Q$ и ее радиус R_2 . При этом $R_2 > R_1$.

Найти зависимость напряженности поля, создаваемого такой системой зарядов, от расстояния r до ее центра. Построить график этой зависимости.

1.10. В равномерно заряженном шаре $\rho_v = \text{const}$ вырезана сферическая полость.

Найти поле внутри этой полости, если центр ее удален на расстояние R_1 от центра шара (рис. 1.25).

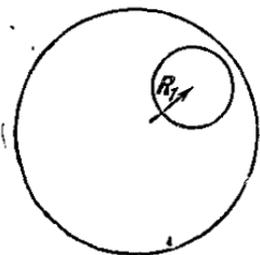


Рис. 1.25.

*) Шарик были сделаны из бузины и сверху позолочены.

1.11. Ученикам была дана следующая задача: в бесконечной заряженной среде ($\rho_v = \text{const}$) вырезали сферическую полость радиуса r .

Нужно найти поле внутри этой полости. Преподавателю представили два решения.

Первое решение. Рассмотрим равномерно заряженный шар с центральной полый сферой (радиуса r). Поле внутри полости равно нулю. Будем наслаивать на шар сферические слои с плотностью заряда $\rho_v = \text{const}$. Тогда радиус заряженного шара R может стать сколь угодно большим ($R \rightarrow \infty$). Мы получим бесконечную равномерно заряженную среду со сферической полостью, поле в которой равно нулю.

Второе решение. Предположим, что мы заполнили нашу полость зарядом того же знака и той же плотности, что и заряд среды. Тогда мы имеем бесконечную равномерно заряженную среду.

Так как все ее точки совершенно равноправны, то, следовательно, потенциал поля в любой точке одинаков, $\varphi = \text{const}$, и $E_c = 0$. Следовательно, такая среда создаст внутри мысленно выделенной сферы радиуса r поле, равное нулю. Теперь поместим в среду шар с плотностью заряда $-\rho_v$.

Поле внутри него есть суперпозиция поля среды с $E_c = 0$ и поля самого шара

$$E_{\text{ш}} = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} r$$

(где $|r|$ — расстояние его центра до точки наблюдения внутри шара).

$$E_{\text{пол}} = E_c + E_{\text{ш}} = -\frac{\rho_v}{3\epsilon_0} r.$$

Но шар с плотностью заряда $-\rho_v$, помещенный в среду с плотностью заряда ρ_v , — это и есть рассматриваемая в задаче система — бесконечная среда с незаряженной сферической полостью. Итак, поле внутри полости

$$E_{\text{полн}} = -\frac{\rho_v}{3\epsilon_0} r.$$

Какое же из решений верное?

1.12. Модель атома, предложенная английским ученым Дж. Дж. Томсоном, выглядела следующим образом:

внутри области, занятой равномерно распределенным положительным зарядом (ядро), находятся отрицательно заряженные частицы — электроны. В целом атом нейтрален — суммарный заряд всех электронов равен заряду ядра.

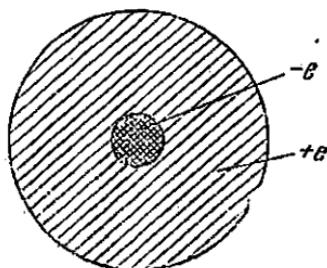


Рис. 1.26.

Атом водорода с точки зрения такой модели выглядел так, как это показано на рис. 1.26.

Если предположить, что равномерно заряженное ядро радиуса R в силу действия каких-то сил устойчиво, то тогда и равновесие электрона внутри ядра устойчиво.

Докажите это.

1.13. После опытов, проведенных Э. Резерфордом и его сотрудниками, оказалось, что

модель атома Томсона не соответствует действительному положению вещей (см. предыдущую задачу). Резерфорд предложил модель атома, согласно которой вокруг положительно заряженного тяжелого ядра (заряд его $+Ze$) вращаются Z электронов.

Оценить по порядку величины скорость электрона в атоме водорода ($Z = 1$), если известно, что его радиус $R \approx 5 \cdot 10^{-11}$ м *) и электрон при этом не падает на ядро.

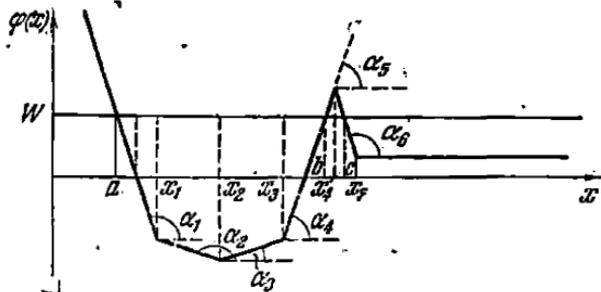


Рис. 1.27.

1.14. На рис. 1.27 дан график электростатического потенциала φ в зависимости от расстояния x до начала координат (рассматривается одномерный случай).

*) Масса протона примерно в 2000 раз больше массы электрона, и его можно считать неподвижным.

Построить график напряженности $E = E(x)$, описать характер движения единичного положительного заряда в этом поле при заданной его полной энергии W ; определить, в каких точках x заряд будет находиться в равновесии и будет ли оно устойчивым *).

1.15. В промежуток между двумя заряженными цилиндрами из проводящего материала (рис. 1.28) попадает

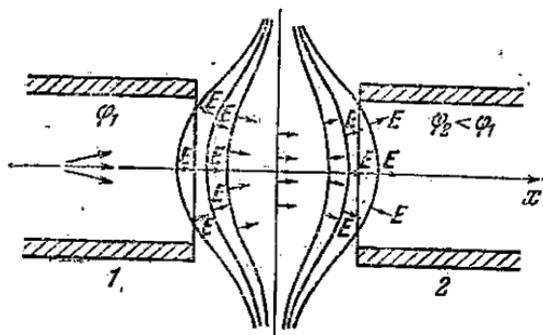


Рис. 1.28.

почти параллельный пучок положительно заряженных частиц, летящих вдоль оси x . Эквипотенциальные поверхности в промежутке (щели) между цилиндрами изображены на рисунке.

Показать, что при прохождении такого промежутка происходит не только ускорение частиц, но и фокусировка пучка. Это означает, что частицы, вылетающие из цилиндра 1 под некоторым углом к оси, под действием электрического поля изменяют траекторию так, что в дальнейшем движутся в цилиндре 2 под меньшим углом к оси и имеют меньшую вероятность попасть на стенку.

Подобные фокусирующие линзы для заряженных частиц широко применяются, например, в ускорительной технике

1.16. Меняются ли уравнения движения в электрическом поле при обращении знака времени?

*) Эта задача во многом аналогична задачам 35—37, помещенным в «Механику». Поэтому читателю, у которого возникнут какие-либо трудности, мы отсылаем к соответствующему выпуску библиотечки Физико-математической школы.

1.17. Электрон, летящий со скоростью v_1 , попадает в пространство между двумя сетками, расположенными на расстоянии d друг от друга (рис. 1.29). Сетки заряжены, и между ними существует однородное электрическое поле E (поле вне сеток отсутствует).

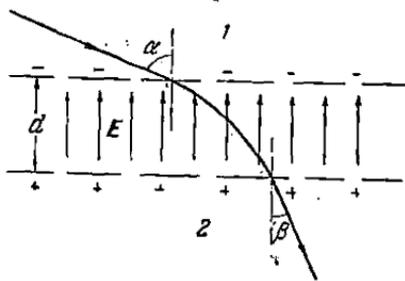


Рис. 1.29.

Траектория электрона лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости сеток. Влетает он из области 1 под углом α к вертикали.

1) Под каким углом β и с какой скоростью v_2 он вылетит в область 2?

2) Рассмотреть случай, когда электрон влетает со скоростью v_2 и под углом β из области 2 в пространство между сетками. Под каким углом и с какой скоростью он в этом случае вылетит?

3) Может ли такая система «отразить» падающий электрон обратно в область 2?

1.18. Электрон, двигаясь прямолинейно, попадает в точке A в электрическое поле, потенциал которого имеет вид, показанный на рис. 1.30.

В точке B электрон вылетает из поля. Изменится ли (а если изменится, то как) скорость частицы в точке B и время пролета расстояния AB , если вместо электрона полетит позитрон? (позитрон — это элементарная частица, отличающаяся от электрона только знаком заряда).

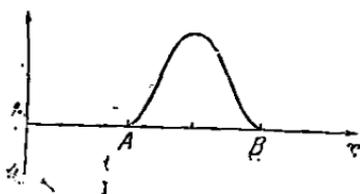


Рис. 1.30.

1.19. На пути заряда $+q$, имеющего массу m и летящего со скоростью v_0 , находятся две разноименно заряженные концентрические сферические поверхности. Внутренняя поверхность имеет плотность заряда $-\rho_s$, а внешняя $+\rho_s$. Радиус внутренней поверхности R_0 , а зазор между поверхностями $\Delta R \ll R_0$ (такая система называется двойным электрическим слоем). Обе поверхности абсолютно проницаемы для заряда.

Определить угол, на который отклонится заряд от первоначальной траектории после пролета через двойной электрический слой, если известно, что расстояние от прямой, по которой двигался заряд, до центра сфер равно d (рис. 1.31).

1.20. Используя уравнение движения заряженной частицы в электростатическом поле (для простоты разбирается одномерный случай)

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -q \frac{\Delta \Phi}{\Delta x},$$

показать, что полная энергия этой частицы сохраняется

(m — масса частицы, q — ее заряд, $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ — ускорение частицы, Δv — изменение скорости за время Δt , $\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}$ — напряженность внешнего поля, выраженная через потенциал Φ и смещение Δx , происшедшее за время Δt).

1.21. Какое свойство электрических сил дает возможность утверждать, что работа их не зависит от формы пути?

1.22. Вычислить энергию системы зарядов, описанной в задаче 1.9, в предположении, что $R_2 - R_1 \ll R_1$ (расстояние между сферами много меньше радиуса внутренней сферы).

1.23. На поверхность тонкой сферы радиуса R равномерно наносят заряд. В момент, когда полный заряд, помещенный на сферу, становится равным Q , она под действием электрических сил отталкивания разрывается на большое число отдельных частей, которые летят в разные стороны. Каждая из них обладает зарядом q и массой m .

Какой максимальной скорости может достичь один из кусочков сферы?

1.24. Мы утверждали (см. § 14), что в электростатике всегда можно приписать энергию взаимодействия системы зарядов полю, которое этой системой создается.

Но возьмем, например, простейшую систему — диполь. С одной стороны, по формуле (1.18) энергия взаимодействия его зарядов есть $U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)(+q)}{r}$, где $-q$ и

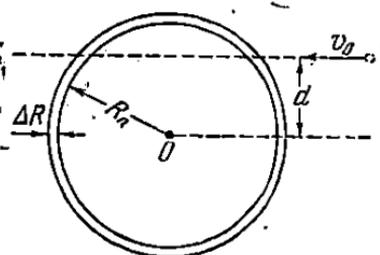


Рис. 1.31.

$+q$ — заряды диполя и r — расстояние между ними. Отметим, что эта энергия отрицательна.

С другой стороны, энергия поля диполя (см. формулу (1.31)) есть

$$U_2 = \sum_i \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} \Delta V_i.$$

Эта сумма всегда положительна, так как E^2 всегда больше нуля, так же как ΔV_i и ϵ_0 .

В чем же здесь дело?

1.25. Два одинаковых проводящих шарика расположены на расстоянии в 1 м друг от друга. Заряды шариков равны $q_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ к и $q_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ к. В какой-то момент времени шарики соединили проводником и заряд на них уравнился $q_1 = q_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ к (всегда можно выбрать проводник таким, чтобы на нем самом осталась лишь малая доля заряда). После этого проводник унесли. Если до соединения энергия взаимодействия шариков была равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 4,5 \text{ н.м.}$$

то после соединения она стала равна

$$U = 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 8,1 \text{ н.м.}$$

т. е. увеличилась. Откуда же взялась «лишняя» энергия?

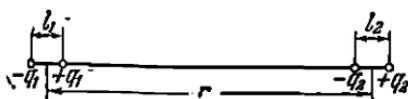


Рис. 1.32.

1.26. Равна ли энергия взаимодействия какой-то системы зарядов сумме энергий ее частей?

1.27. Найти силу, с которой взаимодействуют два диполя, с дипольными моментами d_1 и d_2 . Расположены они так, как это показано на рис. 1.32. Расстояние r между диполями много больше их размеров ($l_1 \ll r$ и $l_2 \ll r$).

1.28. Показать, что в случае нейтральной системы зарядов ($\sum_{i=1}^n q_i = 0$) ее дипольный момент не зависит от выбора начала системы координат.

1.29. Имеет ли молекула бензола (рис. 1.33) дипольный момент?

1.30. На рис. 1.34 изображены структурные формулы ортодихлорбензола $o\text{-C}_6\text{H}_4\cdot\text{Cl}_2$, метадихлорбензола $m\text{-C}_6\text{H}_4\cdot\text{Cl}_2$ и парадихлорбензола $p\text{-C}_6\text{H}_4\cdot\text{Cl}_2$. Определить дипольные моменты каждой из этих молекул, если известно, что дипольный момент моноклорбензола $\text{C}_6\text{H}_5\cdot\text{Cl}$ (рис. 1.34) равен $1,5 \cdot 10^{-18}$ единиц СГСЭ $= 5 \cdot 10^{-30}$ к.м.

1.31. Найти формулу молекул:

а) двуокиси углерода CO_2 , если известно, что она не имеет дипольного момента;

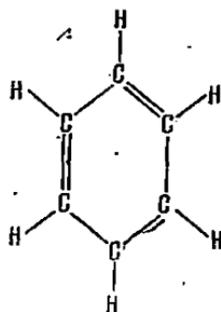
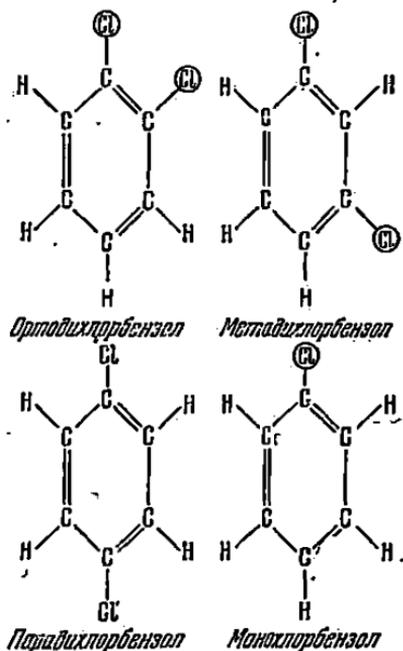


Рис. 1.33.



б) воды H_2O , аммиака NH_3 , если известно, что они обладают дипольным моментом.

1.32. Чему равен средний дипольный момент атома в модели Резерфорда (см. задачу 1.13).

1.33. Показать, что электрон может взаимодействовать с нейтральным атомом. Найти зависимость энергии этого взаимодействия от расстояния. Использовать модель атома Резерфорда (см. задачу 1.13).

1.34. Энергия, необходимая для отделения электрона от атома натрия (так называемый потенциал ионизации), равна 5,1 эв. При присоединении электрона к атому хлора выделяется энергия (она называется электронным сродством), равная 3,8 эв. Определить то наибольшее расстояние, на котором может образоваться молекула соли NaCl .

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.1. 1) Нет, это запрещает закон сохранения электрического заряда, так как образующаяся в результате реакции система будет обязательно иметь заряд.

2) $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$.

3) Это нейтральная частица. Можно добавить, что сейчас в физике элементарных частиц изучению ее свойств придают большое значение. Назвали эту частицу *анти-нейтрино*.

Все эти вопросы должны дать читателю представление о том, что закон сохранения заряда плодотворно используется в современной физике, так же как и остальные законы сохранения.

1.2. Сила гравитационного притяжения

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Электрическая сила

$$F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}.$$

Их отношение

$$\frac{F_{\text{гр}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \gamma m_e m_p}{e^2}.$$

Полезно запомнить, что в системе СИ

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = (1,52 \cdot 10^{-14})^2 \text{ ньютон} \cdot \text{м}^2.$$

Окончательно

$$\frac{F_{\text{гр}}}{F_{\text{эл}}} = 4,5 \cdot 10^{-39}.$$

Гравитационные силы, действующие между элементарными частицами, ничтожны по сравнению с электрическими.

1.3. В «Механике» на стр. 159 было показано, что на тело, помещенное внутрь гравитирующей сферы силы тяготения не действуют. Это связано с тем, что сила в законе Ньютона обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами.

Проводя обратное рассуждение для электростатики из того факта, что внутри равномерно заряженной сферы

электрическое поле равно нулю, можно сделать вывод о зависимости электрических сил от расстояния.

1.4. Кулон приводил в соприкосновение два совершенно одинаковых проводящих шарика, один из которых несет заряд q , а второй не заряжен. При их соприкосновении заряды с одного шарика из-за взаимного отталкивания перетекают на второй до тех пор, пока заряды на шариках не уравниются.

Действительно, если бы заряд одного из них отличался от заряда второго, то это нарушило бы равноправие шариков, а ведь ни один из шариков не имеет преимущества перед другим. Так можно разделить заряды пополам. (Конечно, Кулон, должен был предположить, что выполняется закон сохранения заряда и полный заряд не меняется.) Деление заряда на любое целое число можно провести, приведя в соприкосновение соответствующее число шариков.

1.5. Траектория тела совпадает с силовой линией только в одном частном случае: если тело первоначально покоилось ($v_0 = 0$) и силовые линии поля прямые. Во всех других случаях заряженное тело не будет двигаться по силовым линиям. Действительно, если поле неоднородно и нецентрально, то его силовые линии — это некоторые кривые.

Для движения по кривой необходимо, чтобы на тело действовали силы, перпендикулярные к траектории, обеспечивающие центростремительное ускорение. Поле же в каждой точке направлено по касательной к силовой линии, а кроме электрических, других сил нет. Только в течение очень малого промежутка времени Δt первоначально покоившийся заряд будет двигаться по силовой линии, так как только достаточно малый участок кривой можно заменить отрезком прямой.

1.6. Не могут. Для доказательства предположим противное. Пусть в какой-то точке две силовые линии касаются друг друга. Поместим в точку касания заряд и предоставим ему возможность двигаться под действием сил электрического поля. Тогда в течение малого промежутка времени Δt после начала движения скорость и ускорение заряда совпадают между собой, а ускорение направлено по силовой линии. Но одновременно двигаться по двум силовым линиям заряд не может. Следовательно, он движется по одной из них, и в то же время нет никаких

физических соображений, руководствуясь которыми можно было бы сказать, по какой именно. Это противоречит основам классической физики, так как она предполагает, что если задано начальное состояние заряда и известны уравнения движения, то можно однозначно предсказать дальнейшее его движение.

1.7. Рассмотрим неподвижную систему зарядов, которая создает в пространстве электростатическое поле. Если предположить, что хотя бы одна из силовых линий этого поля является замкнутой, то можно проделать некоторый мысленный эксперимент, который приведет к абсурду.

Действительно, пусть вдоль этой силовой линии идет желоб, внутри которого практически без трения может перемещаться некоторое заряженное тело. Заряд его выберем таким, чтобы он не изменял картины поля. Тогда на тело будет действовать сила, направленная вдоль желоба, и оно в каждый момент времени будет иметь некото-

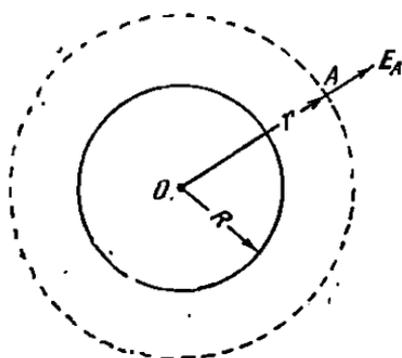


Рис. 1.35.

рое ускорение, скорость его будет возрастать. Это приведет к неограниченному увеличению кинетической энергии тела. Так как никаких изменений поля пробное тело не вызывает (поле статическое!), то тем самым мы получили вечный двигатель, способный производить работу из «ничего».

1.8. Вначале воспользуемся симметрией задачи. Очевидно, что единствен-

ное выделенное направление в любой точке A пространства это направление радиуса OA (рис. 1.35). По или против радиуса (в зависимости от знака заряда шара) должен быть направлен и вектор E_A . Кроме того, величина напряженности должна зависеть только от расстояния OA , которое мы обозначим через r .

Теперь следует применить теорему Гаусса. Рассмотрим два случая:

1) $r > R$, т. е. точка A находится вне шара. Проведем через эту точку сферу радиусом r с центром в точке O (рис. 1.35). В каждой точке сферы напряженность направ-

лена по нормали к ней и равна по величине E_A . Полный поток напряженности через сферу

$$\Psi = E_A 4\pi r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса $\Psi = \frac{Q}{\epsilon_0}$, где Q — полный заряд шара, равный $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$. Отсюда

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \text{или} \quad E_A = \frac{1}{r^2} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0}.$$

Формула для E_A полностью аналогична формуле для напряженности точечного заряда величиной Q , помещенного в точке O .

2) $r < R$. Точка A внутри шара. Проведем через эту точку сферу с центром в точке O . Тогда полный поток напряженности через эту сферу

$$\Psi = E_A 4\pi r^2.$$

По теореме Гаусса $\Psi = \frac{Q}{\epsilon_0}$ и $Q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0$. Отсюда

$$E_A = \frac{r \rho_0}{3\epsilon_0}.$$

Напряженность прямо пропорциональна расстоянию до центра. График приведен на рис. 1.36.

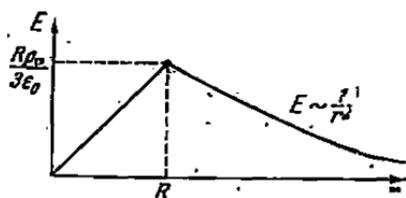


Рис. 1.36.

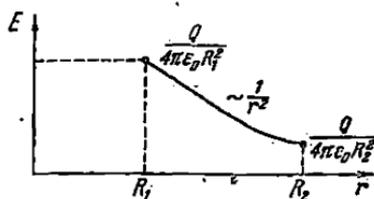


Рис. 1.37.

1.9. Используя соображения симметрии и теорему Гаусса, легко показать, что поле отлично от нуля только в области пространства между сферами и что в этой области E направлено по радиусу и равно по величине

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

График $E = f(r)$ приведен на рис. 1.37.

1.10. Удобно поле источника — шара со сферической полостью представлять себе как суперпозицию полей двух источников — шара такого же размера, равномерно заряженного с плотностью заряда $+\rho_v$ и второго шара (радиус которого равен радиусу сферической полости), также равномерно заряженного, но уже с плотностью заряда $-\rho_v$ *). Второй шар вложен в первый так, что их центры удалены на расстояние R_1 (рис. 1.38). Эта система зарядов совершенно эквивалентна данной в условии задачи.

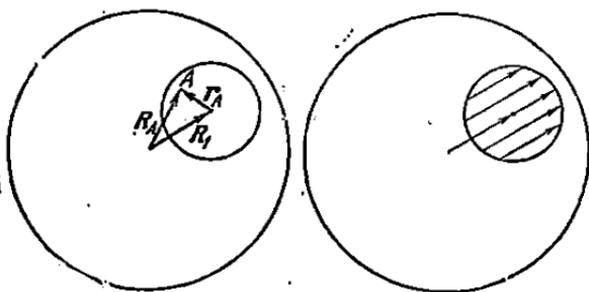


Рис. 1.38.

Поле первого шара в точке A (рис. 1.38), лежащей внутри обоих шаров, есть (см. задачу 1.8)

$$E'_A = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} R_A,$$

где $|R_A|$ — расстояние от центра шара до точки A . Для меньшего шара точно так же

$$E''_A = -\frac{\rho_v}{3\epsilon_0} r_A.$$

Полное поле

$$E_A = E'_A + E''_A = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} (R_A - r_A) = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} R_1.$$

При любом положении точки A внутри полости поле остается в ней постоянным по величине и направлению (при заданном R_1).

*) Вспомните метод отрицательных масс в механике.

1.11. Чтобы ответить на этот вопрос, преподаватель рассмотрел такой пример: пусть дан равномерно заряженный шар с нецентральной полый сферой в нем радиуса r ($\rho_v = \text{const}$). Поле внутри полый сферы отлично от нуля (см. задачу 1.10) и равно $E(r)$. Будем наслаивать на шар сферические слои с зарядом того же знака, что и шар, и той же плотностью $\rho_v = \text{const}$. Так мы можем получить бесконечную равномерно заряженную среду. Так как поле внутри сферического слоя равно нулю, то в нашей полости поле будет создаваться только первоначальным шаром и $E = E(r)$.

Из этого примера особенно ясно следует, что можно получить совершенно разные ответы, по-разному осуществляя предельный переход к бесконечной среде. Задача является неопределенной, так как в ней не заданы условия на границах области, — среда сделана бесконечной. А без задания условий на границе невозможно сказать, какое решение является верным.

1.12. Пусть электрон смещен на расстояние r от центра ядра. Найдем силу, действующую на него. Используя выражение для напряженности поля внутри равномерно заряженного по объему шара (см. задачу 1.8), мы получаем

$$F = -eE = -\frac{e\rho_v r}{3\varepsilon_0},$$

$\rho_v = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ — плотность заряда; отсюда

$$F = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

Сила противоположна смещению и стремится вернуть электрон в прежнее положение — в центр ядра.

1.13. В этом случае кулоновская сила

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

обеспечивает центростремительное ускорение v^2/R . Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{mR}} = \frac{1,5 \cdot 10^{-14}}{6,75 \cdot 10^{-21}} = 0,22 \cdot 10^7 \text{ м/сек} = 22 \cdot 10^5 \text{ м/сек.}$$

1.14. Для построения графика напряженности $E = E(x)$ воспользуемся соотношением

$$E_x = - \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = - \operatorname{tg} \alpha,$$

где угол α отсчитывается от положительного направления оси x . График $E(x)$ приведен на рис. 1.39. Опишем теперь

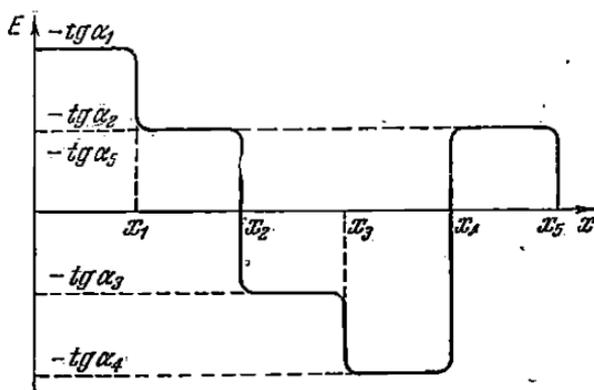


Рис. 1.39.

характер движения положительного заряда, двигаясь от больших значений x к малым.

При $x > x_5$ никакие силы на заряд не действуют и он находится в положении безразличного равновесия. На отрезке $x_4 < x < x_5$ на заряд действуют силы отталкивания.

В точке $x = x_4$ он находится в положении неустойчивого равновесия. Такое состояние соответствует максимуму потенциальной энергии. На отрезках $x_3 < x < x_4$ и $x_2 < x < x_3$ силы, действующие на заряд, отличаются по величине, но имеют одинаковый знак — это силы притяжения.

В точке x_2 потенциальная энергия заряда проходит через свое минимальное значение; в этой точке равновесие заряда устойчиво. Наконец, для $x < x_2$ на заряд вновь начинают действовать силы отталкивания.

Движение заряда на отрезке $c < x < \infty$ не ограничено (инфинитно). Между точками c и b заряд находиться не может. Для того чтобы проникнуть в область $a < x < b$,

ему не хватает энергии. Если же он находится в этой области с самого начала, то движение его ограничено (финитно). Точки a и b — точки поворота.

— 1.15. Очевидно, что частицы, летящие вдоль оси цилиндра, только ускорятся полем. Рассмотрим частицу, которая при полете отклонилась на угол α от оси (рис. 1.40). Поле будет оказывать и на нее ускоряющее действие,

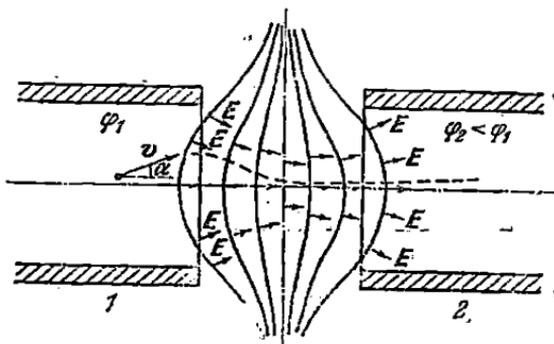


Рис. 1.40.

так как на всем пути $E_x > 0$. Кроме того, при прохождении частицей первой половины щели на частицу будет действовать со стороны поля сила, стремящаяся приблизить ее к оси. Во второй же половине пути действие поля будет дефокусирующим. Но надо учесть, что при прохождении первой половины щели частица двигалась медленнее, чем при прохождении второй половины (ведь она все время ускорялась вдоль оси x !). Влияние фокусирующих сил скажется сильнее, чем действие сил дефокусирующих, так как они действуют большее время. Пучок частиц сожмется.

1.16. — Уравнения движения имеют вид

$$ma = qE.$$

При перемене знака времени ни масса m , ни ускорение a , ни величина заряда q и напряженность внешнего поля E не меняют знака. Начальные условия заменяются на конечные, и частица в своем движении проходит обратную последовательность состояний (подробнее см. «Механика», стр. 52—54).

1.17. 1) Пролетая между сетками, электрон прошел разность потенциалов $\Delta\varphi = Ed$. Его кинетическая энергия в области 1, равная $\frac{mv_1^2}{2}$, изменилась на величину $e\Delta\varphi$ и стала равной

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + eEd. \quad (1)$$

Горизонтальная составляющая скорости v_r электрона не изменилась. Мы можем написать, что

$$v_r = v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta. \quad (2)$$

Отсюда

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Подставляя выражение для v_2 в (1), найдем, что

$$\frac{mv_1^2}{2} \left[\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2 - 1 \right] = eEd \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\frac{2eEd}{mv_1^2} + 1}},$$

откуда

$$\beta = \arcsin \left[\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\frac{2eEd}{mv_1^2} + 1}} \right] \quad \text{и} \quad v_2 = v_1 \sqrt{\frac{2eEd}{mv_1^2} + 1}.$$

2) Задача сводится к предыдущей при условии изменения знака времени. Действительно, в этом случае электрон пройдет обратную последовательность состояний, т. е. под углом β и со скоростью v_2 влетит в промежуток между сетками из области 2, а вылетит под углом α и со скоростью v_1 , что и требовалось определить.

3) Для ответа на последний вопрос напишем выражение для $\sin \alpha$ через β и v_2 . Подставляя значение v_1 в уравнение (1), получим

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)^2 + eEd, \quad \sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \frac{2eEd}{mv_2^2}}}.$$

При

$$\frac{m(v_2 \cos \beta)^2}{2} \geq eEd \quad \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \frac{2eEd}{mv_2^2}}} = \sin \alpha \leq 1, \quad \alpha \leq 90^\circ,$$

т. е. электрон попадает в область 1.

Для $\frac{m(v_2 \cos \beta)^2}{2} < eEd$ электрон уже не может попасть в область 2 (это и соответствует тому, что не может выполняться неравенство $\sin \alpha > 1$). При этом угол падения равен углу отражения.

Как мы видим, такая система из двух сеток может служить для преломления электронного пучка, подобно линзе, или для отражения его, подобно зеркалу для пучка световых лучей.

1.18. Для решения задачи построим графики потенциальных энергий электрона и позитрона в заданном поле, затем графики сил, действующих на частицы и графики скоростей для обеих частиц.

Потенциальная энергия позитрона равна $U_{\text{п}} = +e\varphi$, а электрона $U_{\text{э}} = -e\varphi$. График потенциальной энергии позитрона совпадает с графиком потенциала поля (рис. 1.41, а), только масштаб по оси y изменится в e раз, а график потенциальной энергии электрона будет симметричен относительно оси x соответствующему графику для позитрона (рис. 1.41, б).

Графики сил для обеих частиц построим так же, как это делалось в задаче 1.14 (рис. 1.41, в).

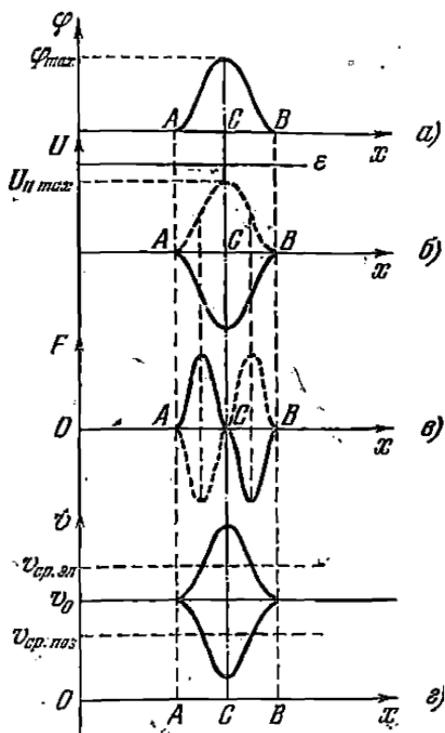


Рис. 1.41.

Теперь нетрудно видеть, как будут изменяться скорости электрона и позитрона на пути AB . Пусть в точке A скорость частиц v_0 . На участке AC электрон движется ускоренно. В точке C сила меняет знак, и электрон начинает замедляться (рис. 1.41 $э$), и в точке B его скорость снова равна v_0 (никаких потерь энергии не происходило).

График скорости позитрона будет симметричен графику скорости электрона относительно прямой $v = v_0$, так как графики сил, действующих на частицы, симметричны относительно оси x . Следовательно, скорость позитрона в точке B будет такой же, как и у электрона, т. е. v_0 .

Тем не менее позитрон пролетит участок AB за большее время, чем электрон. Действительно, время пролета отрезка AB можно оценить по формуле $t \approx \text{длина } AB / v_{\text{ср}}$; как видно из графиков, средняя скорость электрона на этом отрезке больше v_0 , а средняя скорость позитрона меньше v_0 ; следовательно,

$$t_p = \frac{\text{длина } AB}{v_{\text{ср. } э}} < \frac{\text{длина } AB}{v_{\text{ср. п}}} = t_{\text{п.}}$$

Итак, скорости в точке B у электрона и позитрона будут одинаковыми, а время пролета участка AB для электрона меньше, чем для позитрона.

Следует отметить, что электрон преодолет участок AB при любой начальной скорости v_0 и соответствующей ей полной энергии W (до точки A полная энергия W совпадала с кинетической энергией частицы $T_0 = \frac{mv_0^2}{2}$, где m — масса частицы, так как никаких сил на нее не действовало). Действительно, $T_э = W - U_э$, и это выражение в любой точке отрезка AB больше нуля, так как $U_э < 0$. Позитрон же, для того чтобы достигнуть точки B , должен обладать полной энергией

$$W \geq U_{\text{п max}} = e\varphi_{\text{max}}.$$

Только в этом случае $T_{\text{п}} = W - U_{\text{п}} = W - e\varphi_{\text{п}}$ во всех точках отрезка AB будет больше нуля. В противном случае позитрон не сумеет преодолеть «потенциальный барьер» и остановится, не достигая точки C ($\varphi(C) = \varphi_{\text{max}}$).]

1.19 Разобьем решение задачи на два этапа. Сначала определим потенциал внутри сферы. Как было показано в задаче 1.9, поле вне и внутри сфер равно нулю (потен-

циал, следовательно, постоянен), а в зазоре между сферами $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, где Q — полный заряд внутренней поверхности, а R — расстояние от центра сфер. Эта формула показывает, что поле в зазоре возбуждается зарядом лишь внутренней поверхности и совпадает при этом с полем точечного заряда Q , помещенного в центр системы. Поэтому разность потенциалов между двумя сферами можно вычислять по формуле

$$\Delta\varphi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_0 + \Delta R)} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0 + \Delta R} - \frac{1}{R_0} \right) = \\ = \frac{Q \Delta R}{4\pi\epsilon_0(R_0^2 + \Delta R R_0)} = \frac{Q \Delta R}{4\pi\epsilon_0 R_0^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)} \approx \frac{Q \Delta R}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}$$

(слагаемое $\frac{\Delta R}{R_0} \ll 1$ по условию, и им можно пренебречь).

Учитывая, что $Q = -\rho_s 4\pi R_0^2$, получим, что потенциал внутри двойного слоя отличается от потенциала вне его на величину

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_s \Delta R}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Если потенциал вне сфер (на бесконечности) положить равным нулю, то потенциал внутри системы будет равен

$$\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho_s \Delta R}{\epsilon_0}.$$

График потенциала представлен на рис. 1.42 (толщиной слоя ΔR можно пренебречь и считать, что потенциал меняется скачком). Такая форма потенциала носит название «потенциальной ямы».

Теперь задача свелась к нахождению угла преломления прямолинейной траектории заряда при прохождении сферы. В задаче 1.17 было получено соотношение между углом падения и углом преломления при прохождении зарядом разности потенциалов $\Delta\varphi$

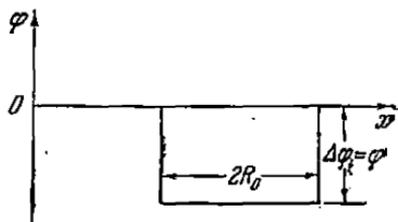


Рис. 1.42.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \frac{2q}{mv_0^2} Ed} = \sqrt{1 + \frac{2q}{mv_0^2} \Delta\varphi} = n, \quad (2)$$

где α — угол падения на преломляющую поверхность, β — угол преломления.

В нашей задаче преломление на поверхности будет происходить дважды: первый раз при влете заряда в сферу, а второй — при вылете из нее, причем во втором случае угол падения равен β и, как было показано в задаче

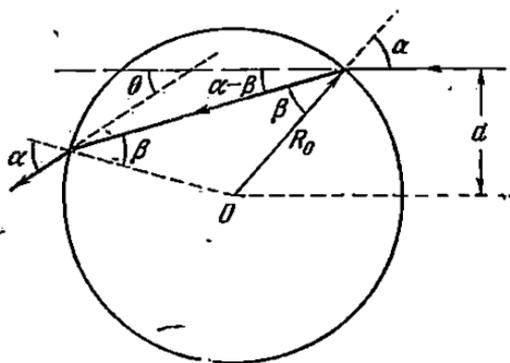


Рис. 1.43.

1.17, угол преломления будет равен α . Нам необходимо найти угол θ (рис. 1.43). Из рисунка видно, что $\theta = 2(\alpha - \beta)$; отсюда, учитывая, что $\beta = \alpha - \frac{\theta}{2}$, найдем

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta/2)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \theta/2 - \cos \alpha \sin \theta/2}. \quad (3)$$

Из того же рисунка ясно, что

$$\sin \alpha = \frac{d}{R_0} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{R_0^2 - d^2}}{R_0}.$$

Исключив из формулы (3) α , придем к уравнению для θ

$$\frac{d}{d \cos \theta/2 - \sqrt{R_0^2 - d^2} \sin \theta/2} = n.$$

После преобразований получим

$$d \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{R_0^2 - d^2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{d}{n}.$$

Решая это уравнение *) и подставляя в ответ выражение для n , получим

$$\theta = 2 \arcsin \left[\frac{d}{\sqrt{1 + \frac{2q\Delta\varphi}{mv_0^2} R_0^2}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\left(R_0^2 \left(1 + \frac{2q}{mv_0^2} \Delta\varphi \right) - d^2 - \sqrt{R_0^2 - d^2} \right)} \right]$$

1.20. Умножим обе части равенства

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -q \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

на скорость частицы $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, получим

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} v = -q \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} v = -q \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = -q \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Величину $\frac{mv \Delta v}{\Delta t}$ можно представить как $\frac{\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right)**}$.

*) Это уравнение типа $a \cos x + b \sin x = c$. Его можно решить, например, введя вспомогательный угол:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Положим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \gamma, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \gamma;$$

это возможно, так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$. Получим

$$\sin \gamma \cos x + \cos \gamma \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\gamma + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$x = \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**) См. математическое приложение к «Механике». Действительно,

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{m}{2} \Delta(v^2) = \frac{m}{2} [(v + \Delta v)^2 - v^2] =$$

$$= \frac{m}{2} [v^2 + 2v \Delta v + \Delta v^2 - v^2] = \frac{m}{2} (2v \Delta v + \Delta v^2) =$$

$$= mv \Delta v \left(1 + \frac{\Delta v}{2v} \right) \approx mv \Delta v, \quad \text{так как } \frac{\Delta v}{v} \ll 1.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right)}{\Delta t} + \frac{\Delta(q\Phi)}{\Delta t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta \left(\frac{mv^2}{2} + q\Phi \right)}{\Delta t} = 0.$$

Но это значит, что за промежуток времени Δt не изменяется величина $\frac{mv^2}{2} + q\Phi$. Так как мы взяли этот промежуток времени совершенно произвольно, то, очевидно, в процессе всего движения $\frac{mv^2}{2} + q\Phi = \text{const}$, что и требовалось доказать, потому что для частицы в электростатическом поле величина $\frac{mv^2}{2} + q\Phi$ и есть полная энергия.

1.21. То, что $F = F(r)$, т. е. сила, действующая в поле одного заряда на некоторый пробный заряд, зависит только от радиуса-вектора, проведенного из точки, где находится заряд-источник, в точку наблюдения. Такое поле носит название центрального. Доказательство того, что в центральном поле работа по перенесению пробного тела не зависит от формы пути, разбиралось в «Механике» (см. задачу 1.4). Так как поле любой системы зарядов есть суперпозиция полей точечных зарядов, то утверждение о

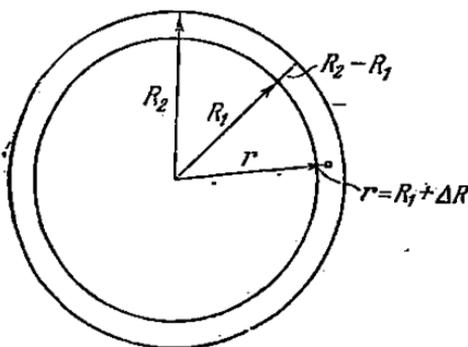


Рис. 1.44.

независимости работы от формы пути верно и для любого электростатического поля.

1.22. Как уже было показано в задаче 1.9, поле такой системы целиком заключено в пространстве между сферами и величина его дается выражением

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где r — расстояние от общего центра сфер до точки наблюдения, расположенной между ними.

Найдя полную энергию этого поля, мы тем самым определим и энергию взаимодействия системы зарядов. Запишем r в виде (рис. 1.44) $r = R_1 + \Delta R$, где $\Delta R \ll$

$\ll R_2 - R_1$ и, согласно условию задачи, $\Delta R \ll R_1$, т. е. $\frac{\Delta R}{R_1} \ll 1$.

Выражение для напряженности поля теперь можно преобразовать следующим образом:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R_1 + \Delta R)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_1}\right)^2}.$$

Пренебрегая членом $\frac{\Delta R}{R_1}$ по сравнению с единицей ($\frac{\Delta R}{R_1} \ll 1$), получим, что

$$E \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1^2} = \text{const.}$$

В этом случае энергия поля, заключенная в объеме V между сферами, есть

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 R_1^4} \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) = \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 R_1} \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 - 1 \right]. \end{aligned}$$

1.23. Максимальную скорость можно найти, используя закон сохранения энергии. В момент разрыва потенциальная энергия всей сферы была равна

$$U_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n q_i$$

(здесь мы использовали то, что потенциалы φ_i на поверхности сферы всюду одинаковы).

Так как сфера разлетается на n одинаковых частей, то каждой из них мы можем приписать энергию $U_i = \frac{1}{2} q_i \varphi$.

Когда расстояние между частями сферы станет настолько большим, что их взаимодействием можно будет пренебречь, начальная потенциальная энергия целиком перейдет в кинетическую

$$\frac{mv_i^2}{2} \text{max} = \frac{q_i \varphi}{2}.$$

Отсюда $v_{\max} = \sqrt{\frac{q\Phi}{m}}$; здесь индекс i опущен, так как все кусочки абсолютно одинаковы. Потенциал на поверхности сферы равен $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$.

Действительно, ведь внешнее поле такой сферы можно представить как поле точечного заряда величиной Q , помещенного в ее центр. А потенциал такого заряда на расстоянии R от него равен $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$. Отсюда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m R}}$$

1.24. В первом случае мы не учли часть энергии системы. Ведь, кроме энергии взаимодействия зарядов друг с другом, существует еще и собственная энергия каждого заряда, обусловленная взаимодействием его элементов между собой. Эта энергия всегда положительна, потому что элементы заряда имеют одинаковый знак и всегда больше U_1 , так как расстояние между разными зарядами больше, чем между частями одного и того же заряда.

В большинстве задач заряды не изменяют со временем своей формы и величины, и нас интересует именно энергия взаимодействия зарядов, так как их собственная энергия остается постоянной. От прибавления же к энергии любой постоянной величины ни один из физических результатов не меняется.

Когда же приходится заниматься вопросом о собственной энергии, возникают серьезные трудности.

Модель точечного заряда предполагает при конечной величине самого заряда его бесконечно малые размеры. Тогда собственная энергия такого заряда бесконечно велика, так как расстояние между элементами равно нулю. Недаром мы в тексте подчеркивали, что при выводе формулы для энергии взаимодействия системы точечных заря-

дов $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi_i$ в потенциал Φ_i не включается по-

тенциал самого i -го заряда в точке его нахождения. Таким образом, мы не учитывали действия заряда самого на себя, т. е. его собственную энергию.

В модели распределенного заряда этой трудности нет. При стремлении объема к нулю заряд, заключенный в

этом объеме, также стремится к нулю. Собственная энергия не стремится к бесконечности. Поэтому формула

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_{v_k} \varphi_k \Delta v_k \text{ учитывает всю энергию. Пользуясь}$$

именно этой формулой, мы и показали, что энергия взаимодействия системы зарядов может считаться заключенной в поле, созданном этой системой.

Насколько же «точечными» являются элементарные носители заряда? Как быть с собственной энергией, скажем, электрона? На эти вопросы физика еще не нашла окончательного ответа.

1.25. Для того чтобы зарядить шарики, надо затратить какую-то работу. Эта работа равна «собственной энергии» шариков, т. е. энергии взаимодействия зарядов на каждом из них. После перераспределения зарядов часть «собственной энергии» перешла в энергию взаимодействия шариков между собой. В условии же задачи при составлении баланса энергии это не было учтено.

1.26. Равна только в том случае, если эти части системы не взаимодействуют между собой. В противном случае надо учесть энергию этого взаимодействия.

1.27. Первый диполь в точке нахождения заряда $-q_2$ создает поле

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d_1}{(r - l_2/2)^3};$$

преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d_1}{r^3(1 - l_2/2r)^3} = \\ &= \frac{2d_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{l_2}{r} + \frac{3}{4} \left(\frac{l_2}{r}\right)^2 - \left(\frac{l_2}{2r}\right)^3} \end{aligned}$$

пренебрегая членами, содержащими дробь l_2/r в степени больше первой (из условия $l_2/r \ll 1$), получим

$$\begin{aligned} E_1 &\approx \frac{2d_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{l_2}{r}} = \\ &= \frac{2d_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{l_2}{r}}{1 - \left(\frac{3}{2} \frac{l_2}{r}\right)^2} \approx \frac{2d_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{l_2}{r}\right). \end{aligned}$$

Точно так же находим поле в точке нахождения заряда $+q_2$:

$$E_2 = \frac{2d_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{l_2}{r}\right).$$

Силы, действующие на эти заряды:

$$F_1 = -q_1 E_1 \quad \text{и} \quad F_2 = +q_2 E_2.$$

Сила, действующая на диполь:

$$F = F_1 + F_2 = -\frac{2d_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} 3 \frac{l_2 q_2}{r} = -\frac{6d_1 d_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = -\frac{3d_1 d_2}{2\pi\epsilon_0 r^4}.$$

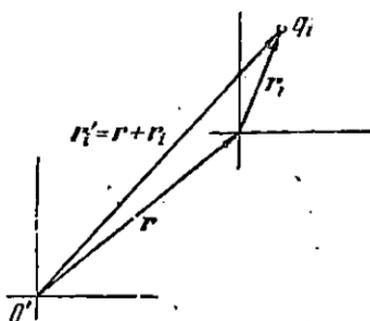


Рис. 1.45.

В эту формулу дипольные моменты, как и должно быть, входят симметрично. Кроме того, знак минус означает, что действующая сила — сила притяжения.

1.28. По определению ди-

польный момент $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$,

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -го заряда системы.

Пусть при переносе системы координат прежнее начало координат будет определяться радиусом-вектором \mathbf{r} (рис. 1.45). Тогда

$$\mathbf{d}' = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i,$$

где \mathbf{r}'_i — новый радиус-вектор i -го заряда, равный $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}$,

$$\mathbf{d}' = \sum_{i=1}^n q_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i + \mathbf{r} \sum_{i=1}^n q_i.$$

Так как по условию $\sum_{i=1}^n q_i = 0$, то $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$.

При $\sum_{i=1}^n q_i \neq 0$ дипольный момент системы зависит от выбора начала отсчета.

1.29. Дипольный момент нейтральной системы (молекулы) не зависит от выбора начала отсчета. Взяв это начало в центре бензольной молекулы, можно сразу же из соображений симметрии утверждать, что ее дипольный момент будет равен нулю.

1.30. Как было показано в предыдущей задаче, молекула бензола в силу своей симметрии не может иметь дипольный момент.

Для молекулы моноклорбензола эта симметрия нарушается вдоль оси xx' (рис. 1.46, а). Соответственно этому молекула обладает дипольным моментом, направленным

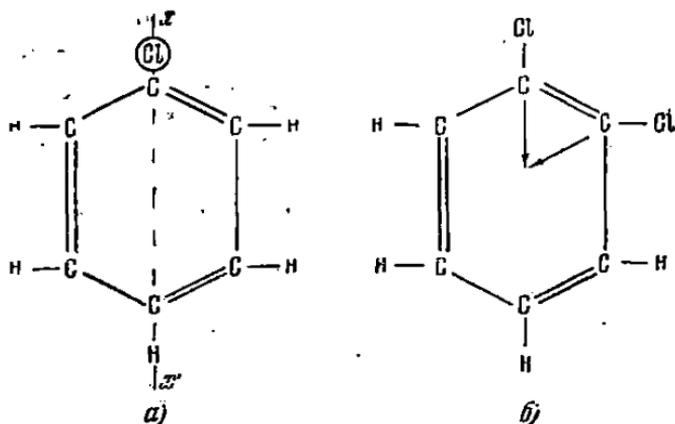


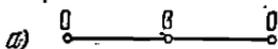
Рис. 1.46.

вдоль оси xx' , поэтому мы можем каждому атому хлора, расположенному в бензольном кольце и нарушающему его симметрию вдоль какой-либо оси (рис. 1.46, б), сопоставить дипольный момент $d = 5 \cdot 10^{-30}$ к.м. Тогда полный дипольный момент ортодихлорбензола равен векторной сумме двух таких моментов, расположенных под углом 60° (бензольное кольцо — правильный шестиугольник). Его величина равна $d = 5 \cdot 10^{-30}$ к.м $\sqrt{3} \approx 8,7 \cdot 10^{-30}$ к.м.

У метадихлорбензола угол между составляющими момента равен 120° , а полный $d = 5 \cdot 10^{-30}$ к.м.

Дипольный момент парадихлорбензола равен нулю, так как у него атомы хлора расположены симметрично.

1.31. а) Молекула CO_2 может иметь только линейную форму (рис. 1.47, а). В любом другом случае ее дипольный момент будет отличен от нуля.



б) Существование дипольного момента и соображения симметрии приводят для молекул воды и аммиака к структурам, изображенным на рис. 1.47, б.

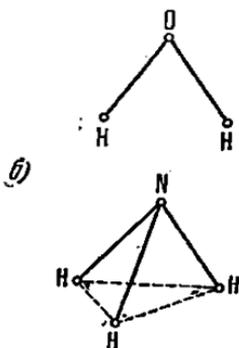


Рис. 1.47.

1.32. В качестве примера разберем простейший атом — атом водорода. В каждый данный момент времени он обладает дипольным моментом $\vec{d} = -er$, где $-e$ заряд электрона, r — радиус-вектор, проведенный от ядра к электрону. Через половину периода вращения электрон будет находиться в положении с радиусом-вектором $-\vec{r}$ и дипольный момент атома станет равным $-\vec{d}$, поэтому за достаточно большой промежуток вре-

мени величину дипольного момента атома можно считать равной нулю. Эти рассуждения справедливы и для любого другого атома с Z электронами.

1.33. В поле электрона ядро атома и его электронная оболочка изменят свое взаимное положение (рис. 1.48).

Электроны, отталкиваясь, сместятся против поля, а ядро, притягиваясь, сместится в направлении внешнего поля E . В результате у атома появится дипольный момент \vec{d} , тогда как без внешнего поля он был равен нулю (см. задачу

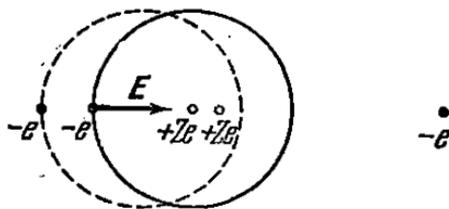


Рис. 1.48.

1.32). Величина этого дипольного момента зависит от величины поля E . Чем больше внешнее поле, тем больше разойдутся центры положительных (протоны ядра) и отрицательных (электроны оболочки) зарядов.

Можно написать в первом приближении, что $d = kE$ (k — коэффициент, зависящий от свойств атома), т. е. дипольный момент пропорционален внешнему полю.

Будем считать, что поле электрона E на протяжении атома однородно, тогда энергия взаимодействия атома с электроном

$$U = -dE = -kE^2 = -\frac{ke^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \left(E = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right).$$

Видно, что взаимодействие быстро падает с расстоянием (сравним с энергией взаимодействия зарядов $U \sim \frac{1}{r}$), но на малых расстояниях приводит к притяжению атомом электрона.

1.34. Процесс образования молекулы NaCl можно представить себе следующим образом. Атом натрия отдаст электрон атому хлора и возникают ионы Na^+ и Cl^- , притягивающиеся по закону Кулона. Самопроизвольно этот процесс происходить не может, так как энергия электронного сродства хлора меньше энергии ионизации натрия и для образования ионов требуется затрата энергии. Эта дополнительная энергия равна $5,1 - 3,8 = 1,3$ эв. Она восполняется из освобождающейся при сближении ионов электростатической энергии. Следовательно, образование ионов и их сближение происходят одновременно и представляют собой единый процесс.

Так как электростатическая энергия ионов равна $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, то максимальное расстояние между ними определится из равенства

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\max}} = 1,3 \text{ эв},$$

отсюда $r_{\max} = 11 \cdot 10^{-10}$ м. Объединение атомов в молекулу может произойти только при $r < r_{\max}$.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Введение

Если бы эта книга была написана полтора столетия назад, то предыдущая глава была бы не только первой, но и последней. Сейчас она является лишь малой частью учения об электричестве.

В 1819 г. датский учитель физики Эрстед впервые обнаружил, а многочисленные последующие эксперименты подтвердили тот факт, что движущиеся электрические заряды взаимодействуют не так, как покоящиеся.

Таким образом, перед нами встает следующая задача: описать это взаимодействие и учесть новые силы в уравнениях движения.

При этом мы не будем придерживаться исторической последовательности в нашем изложении. Подход к новому явлению останется таким же, как и в первой главе. Вначале мы введем некоторые понятия, необходимые для описания взаимодействия. Потом, основываясь на опытах, найдем фундаментальный закон для сил.

Итак, следуя изложенному плану, введем новое важное понятие, с помощью которого можно описать движение заряда, — понятие электрического тока: *всякое направленное (не хаотическое) движение зарядов называется электрическим током.*

§ 2. Электрический ток

Любую систему зарядов мы описывали с помощью двух моделей. Либо как систему точечных зарядов, либо как некоторое непрерывное распределение с заданной

плотностью $\rho(r)$. Все величины, характеризующие ток, можно определить, пользуясь языком этих двух моделей.

Сначала сформулируем все определения, пользуясь моделью системы точечных зарядов. Положение большой группы частиц характеризуется их плотностью η в данном месте (в данном малом элементе объема). Разбив весь объем, который занимает наша система, на k малых частей, мы определим η как отношение

$$\eta = \frac{n_i - \text{число частиц в } i\text{-м элементе объема}}{\Delta V_i - \text{величина } i\text{-го элемента объема}}. \quad (2.1)$$

Теперь легко определить объемную плотность заряда ρ_v ; если все частицы системы имеют одинаковый заряд q , то

$$\rho_v = q \frac{n_i}{\Delta V_i} = q\eta. \quad (2.2)$$

Пусть теперь частицы находятся в движении. Скорость всех зарядов в выделенном элементе объема считаем одинаковой и равной v . Тогда число частиц, проходящих за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к вектору v , равно ηv (рис. 2.1).

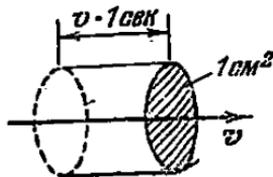


Рис. 2.1.

Вектор ηv называют потоком частиц. Чтобы найти количество заряда Q , переносимого частицами за единицу времени через эту площадку, достаточно число частиц ηv умножить на заряд одной частицы q

$$Q = q\eta v = \rho_v v.$$

Вектор

$$\mathbf{j} = q\eta \mathbf{v} = \rho_v \mathbf{v} \quad (2.3)$$

называют вектором плотности электрического тока. Итак, движение зарядов в каждой точке (достаточно малом объеме) характеризуется вектором плотности тока

Точно так же, как мы вводили поток вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через любую поверхность, можно ввести поток вектора \mathbf{j} через поверхность S

(рис. 2.2)

$$I = \sum_{i=1}^k j \Delta S_i \cos \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^k \Delta S_i = S; \quad (2.4)$$

I имеет специальное название — называется силой или величиной тока.

В случае непрерывного распределения заряда плотность заряда

$$\rho_v = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Когда в каждом элементе объема ΔV имеется достаточно большое число частиц, эти две модели полностью эквивалентны.

Нам остается добавить, что тело (проводник), по которому движутся заряды, может быть электрически нейтральным; это значит, что в нем имеется одинаковое количество зарядов обоих знаков и распределены они равномерно. Мы

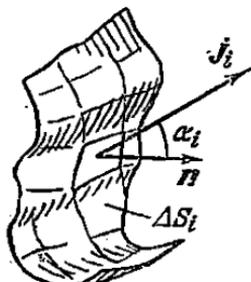


Рис. 2.2.

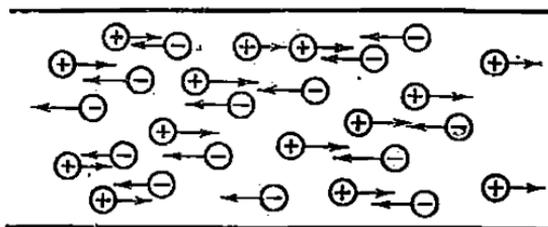


Рис. 2.3.

говорим о токе в том случае, если имеет место относительное движение отрицательных и положительных зарядов (рис. 2.3).

§ 3. Фундаментальные опыты

Установив свойство зарядов, которое определяет их участие в новом взаимодействии (движение), и введя основные понятия плотность тока и его величину, мы можем непосредственно перейти к выяснению закона для сил, действующих между движущимися зарядами.

Фундаментальные, основные законы физики могут быть взяты только из опыта. Другое дело, менее общие закономерности. Их можно вывести на основании фундаментальных законов вполне строго. Правда, исторически часто бывает так, что сначала устанавливают какое-то правило или закон опытным путем, а потом его объясняют, исходя из более общих законов, открытых позднее (пример — правило рычага в механике).

На постановке опыта следует остановиться более подробно, так как новый вид взаимодействия сложнее всего того, с чем мы сталкивались раньше. Просто изучать взаимодействие двух движущихся заряженных тел неудобно.

Во-первых, между ними все время меняется расстояние, а сила, действующая между движущимися зарядами, должна зависеть от этого расстояния, и картина очень усложнится.

Во-вторых, на фоне кулоновских новые силы могут остаться незамеченными.

Лучше всего поставить опыт так, чтобы кулоновские силы совсем не действовали, т. е. чтобы заряды двигались в теле, которое в целом было бы электрически нейтральным. Мы знаем, что этому требованию удовлетворяют незаряженные проводники с током. Теперь остается сделать так, чтобы и изменение расстояния между зарядами не играло роли.

С этой целью рассмотрим два гибких металлических проводника, расположенных параллельно друг другу (рис. 2.4). Если пустить по ним в одном направлении постоянный (не зависящий от времени) ток, то проводники притянутся *).

Повернем один из проводников так, чтобы они вновь стали параллельными, но токи в них имели противоположное направление. Теперь проводники отталкиваются друг от друга. Увеличивая ток, мы замечаем, что провод-

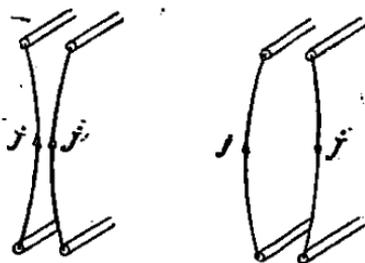


Рис. 2.4.

*) Постоянные токи всегда замкнуты. Мы, таким образом, рассматриваем лишь одну ветвь такого тока — длинный прямой провод.

ники притягиваются или отталкиваются сильнее, а увеличивая расстояние между ними, видим, что взаимодействие убывает.

Уже эти простейшие опыты показывают, что существуют силы, которые зависят от движения зарядов и направления этого движения. То, что кулоновские силы здесь ни при чем, лишний раз подтверждается тем, что при перемещении проводника притяжение сменяется отталкиванием. Новые силы следовало бы назвать электродинамическими, т. е. зависящими от движения зарядов. Исторически же так сложилось, что их обнаружили по воздействию на магнитную стрелку. И потому назвали магнитными.

Теперь нам надо количественно охарактеризовать новое явление — научиться находить силы, действующие на токи. Зная их, мы сможем выполнить свою главную задачу — написать уравнения движения для заряженных тел, научиться предсказывать их поведение в различных условиях.

Уже один только перечень тех величин, от которых должны зависеть эти силы, а именно направление каждого из токов, их величина (скорость и величина перемещающегося заряда), расстояние между проводниками, заставляет предполагать, что выражение для силы будет много сложнее, чем в законе Кулона.

Как же выбрать наиболее простой путь для нахождения сил, действующих между движущимися зарядами? Очевидно, так, как мы поступали раньше, — использовать понятие поля и тем самым разбить задачу на два этапа.

Первый этап — нахождение магнитного поля тока. Второй этап — нахождение сил, действующих на ток в известном магнитном поле. Этот путь хорош тем, что обладает большей простотой и наглядностью.

Постараемся на основе некоторых рассуждений, опираясь на описанные опыты, ввести магнитное поле.

§ 4. Магнитное поле

Вспомним те требования, которые мы предъявляли к электрическому полю:

1. Если задано поле E , то в любой точке пространства мы можем однозначно найти силу, действующую на пробный заряд.

2. Поле зависит только от величин, относящихся к источнику.

3. Поле должно подчиняться принципу суперпозиции, т. е. поле от источника, состоящего из нескольких точечных зарядов, должно быть равно сумме полей всех этих зарядов.

Поэтому мы так и определили \mathbf{E} , что, с одной стороны, этот вектор совпадает по направлению с силой (по единственному выделенному направлению); с другой стороны, он не просто равен силе, а равен F'/q , где q — величина пробного заряда. Тем самым поле зависит только от свойств источника.

Теперь перейдем к магнитному полю и вернемся к опыту, описанному на стр. 79. Наша задача на первом этапе заключается

в том, чтобы каждой точке пространства сопоставить вектор \mathbf{B} магнитного поля источника. Источник представляет собой длинный проводник с током, и, следовательно, поле обладает цилиндрической симметрией. Означает это следующее: в плоскости W , перпендикулярной к проводу (рис. 2.5), все точки, находящиеся на одном и том же расстоянии от провода, совершенно равноправны. Отсюда напрашивается заключение, что величина поля во всех этих точках, лежащих на окружности с центром в точке O , одинакова. В любой другой плоскости, параллельной плоскости W , картина будет совершенно такая же*).

Выберем на этой окружности произвольную точку A . Тем самым в пространстве получилось два выделенных направления — радиус-вектор $\vec{OA} = \mathbf{r}$ и направление движения зарядов в проводнике. Здесь следует оговориться. Мы не приписываем полному току никакого направления. Это — скаляр. Поэтому удобно бывает приписать направ-

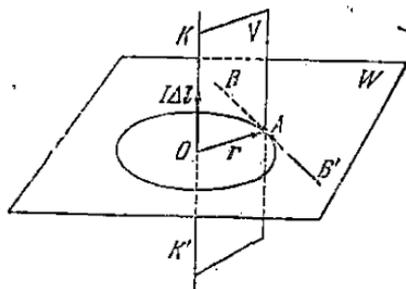


Рис. 2.5.

*) Если провод был бы не длинный, то нам пришлось бы отдельно рассматривать поле, создаваемое проводами, подводящими к нему ток. Здесь же мы считаем, что они находятся на достаточно большом расстоянии, и их влияние пренебрежимо мало.

ление элементу провода Δl , т. е. сказать, что $\Delta \mathbf{l}$ — вектор, совпадающий по направлению с направлением скорости положительных зарядов. При этом все проводники считаются достаточно тонкими *) и все заряды в них движутся с одинаковой скоростью и только вдоль проводника.

Два направления \mathbf{r} и $\Delta \mathbf{l}$ выделяют в пространстве плоскость V , в которой они лежат (см. рис. 2.5).

Эту же плоскость можно было бы выделить и с помощью одной-единственной прямой — перпендикуляра, восстановленного из точки A к плоскости V . Это геометрическое утверждение, но оно может быть проиллюстрировано на физическом примере.

Прямая, на которой лежит ось вращающегося диска (рис. 2.6), и точка O задают нам однозначно положение плоскости самого диска.

Естественно направить магнитное поле по прямой BB' . Тогда оно сразу характеризует и данную точку пространства A и прямую, по которой течет ток, так как перпендикулярно к плоскости, в которой лежат $\Delta \mathbf{l}$ и \mathbf{r} .

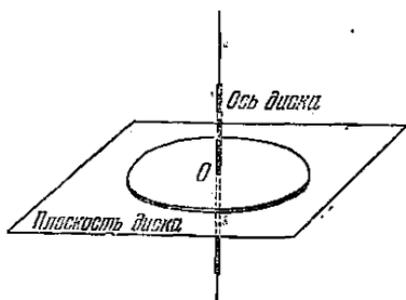


Рис. 2.6.

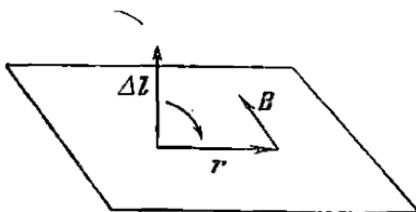
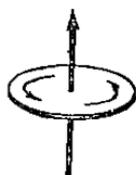
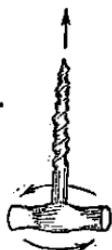


Рис. 2.7.

Рис. 2.8.

Теперь надо условиться о направлении вектора поля. Продолжим нашу аналогию с диском. Можно ли с помощью задания направления его оси определить вектор его скорости, можно ли понять в какую сторону диск вра-

*) Там, где это не выполняется, мы будем специально оговаривать.

щается? (Ведь мы вектор магнитного поля должны связать с направлением движения зарядов.)

Да, можно. Достаточно, скажем, приписать оси такое направление, которое совпадает с поступательным движением завинчивающегося буравчика, если его рукоятку вращают в направлении вращения диска (рис. 2.7).

Аналогично этому за положительное направление магнитного поля выбирают такое, которое совпадает с поступательным движением буравчика, когда его рукоятка вращается в том же направлении, в котором можно осуществить кратчайший поворот от ΔI к r (рис. 2.8). Точно так же найдем направление поля и для любой другой точки.

Теперь продолжим решение нашей задачи и приступим ко второму этапу.

Каждой точке пространства мы сопоставили вектор B . Внесем пробный ток в точку A (рис. 2.9) и попытаемся найти направление силы, действующей на этот ток. Рассуждения в этом случае вполне аналогичны тем, какие мы проводили раньше.

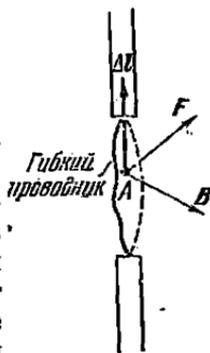


Рис. 2.9.

У нас есть два выделенных направления: поля B и пробного тока ΔI . Они выделяют в пространстве плоскость. Единственной выделенной прямой, по которой можно направить силу, является перпендикуляр к этой плоскости. Направление силы выберем по тому же правилу буравчика, рукоятка которого совершает кратчайший поворот от ΔI к B . В этом случае направление завинчивания и силы совпадают.

§ 5. Сила Лоренца

Все вышеприведенные рассуждения достаточно убедительны, но правильны они или нет, может решить только опыт. Поэтому мы к нему и обратимся. Сначала применим правило для нахождения направления магнитного поля и силы к опыту с длинными параллельными проводниками в случае, когда токи в них параллельны и антипараллельны. Найдя направление поля B , создаваемого первым проводником в точках расположения второго (рис. 2.10, а), и силу, действующую на него в этом поле, мы видим, что

она действительно совпадает с тем, что дает опыт (рис. 2.10, б и в).

Вообще говоря, пробный ток может быть направлен под любым углом к вектору B . Из наших рассуждений следует, что и в этом случае сила должна действовать перпендикулярно к плоскости, проходящей через Δl и B . Направление этой силы находится по правилу буравчика.

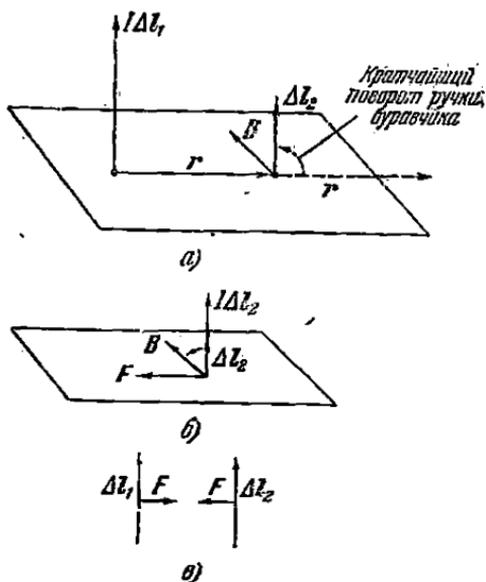


Рис. 2.10.

Опыты подтверждают и эти предсказания. При этом для удобства исследования поля в заданной точке, пробный проводник делают так, чтобы малый его участок Δl был подвижным, а остальная часть — жесткой. Из опыта можно получить и количественную зависимость силы от характеристик пробного тока: его силы I , длины Δl и угла α между Δl и B

$$F \sim I \Delta l \sin \alpha.$$

Как же сила зависит от поля источника?

Ясно, что сила F и величина B должны быть связаны линейной зависимостью (т. е. в выражение для силы B должно входить в первой степени). Только при этом условии

из принципа суперпозиции полей будет автоматически вытекать и принцип сложения сил.

Окончательно мы можем написать выражение для силы

$$F = kI \Delta l B \sin \alpha, \quad (2.5)$$

где k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц.

Ток — это направленное движение зарядов. Нашей целью является нахождение силы, действующей на один заряд. Для этого перепишем выражение (2.5), используя равенство $I = jS = qnvS$, где q — величина заряда, n — число зарядов, пересекающих единицу площади за единицу времени, S — площадь поперечного сечения провода и, наконец, v — скорость зарядов,

$$F = kqvB \sin \alpha \cdot S \Delta l n.$$

В этом длинном выражении величина $S \Delta l n$ есть просто число зарядов N , движущихся во всем объеме проводника длиной Δl . На один заряд действует сила

$$f = kqvB \sin \alpha. \quad (2.6)$$

Направление силы находится по правилу буравчика, кратчайший поворот ручки производится, как всегда, от направления вектора, написанного первым, — это v , ко второму B .

Используя понятие векторного произведения, запишем (2.6) как

$$f = kq [v, B] \quad (2.7)$$

(см. Приложение).

Для заряда, двигающегося одновременно в электрическом и магнитном полях, мы можем написать уравнения движения уже с учетом всех действующих сил:

$$F = ma = q (E + k [v, B]). \quad (2.8)$$

Сила F называется *силой Лоренца*.

§ 6. Поле прямого бесконечного провода

Все ли соотношения, необходимые для решения уравнений движения, мы выяснили?

Очевидно, нет. Хотя уже известно, как направлено в пространстве магнитное поле источника, и что B является функцией силы тока источника и расстояния от него до

точки наблюдения, но какая именно функция, мы еще не знаем. Другими словами, мы не знаем, как по известному источнику вычислить его магнитное поле. Программа действий будет следующей: во-первых, найдем явное выражение для B в каком-либо простом частном случае, скажем, для прямого бесконечного провода. Отсюда легче будет перейти и к наиболее общей задаче — нахождению магнитного поля одного движущегося заряда. Ведь поле любого источника может быть представлено как суперпозиция таких полей.

Опыты с пробным проводником, имеющим подвижной участок Δl , показывают, что сила F , действующая на этот пробный участок в поле бесконечного прямого провода с током I ,

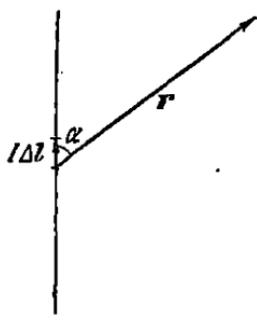


Рис. 2.11.

$$F \sim \frac{I}{r},$$

где r — расстояние между участком Δl и источником. Следова-

тельно, и $B \sim \frac{I}{r}$ *).

Бросается в глаза полное совпадение этой формулы с выражением для электрического поля беско-

нечной равномерно заряженной нити $E \sim \frac{2\rho l}{r}$, найденным в примере I гл. I. Электрическое поле такой нити является по принципу суперпозиции суммой полей, создаваемых малыми элементами нити, т. е. точечными зарядами. При этом поле каждого из зарядов убывает по закону $1/r^2$. Совершенно так же магнитное поле прямого провода можно считать суммой полей, создаваемых малыми элементами тока $I \Delta l$. Логично предположить, что каждый из элементов создает поле, убывающее с расстоянием, как $1/r^2$.

Точное выражение

$$B = k' \frac{I \Delta l}{r^2} \sin \alpha \quad (2.9)$$

*) Эту зависимость можно установить, также используя пробный проводник с подвижным участком Δl .

следует из опыта, а коэффициент пропорциональности k' зависит от выбора системы единиц. Угол α — это угол между Δl и r (рис. 2. 11).

Направление поля мы уже научились находить по известным направлениям Δl и r .

Но что такое элемент тока $I \Delta l$? Это группа N зарядов, движущаяся со скоростью v в ограниченной области пространства.

Действительно, $I \Delta l = qS \Delta l \eta v = qNv$ (см. формулы (2.3) и (2.4)). Отсюда магнитное поле одного заряда, движущегося со скоростью v , в точке, отстоящей от этого заряда на расстояние r , дается выражением]

$$B = k' \frac{qv}{r^2} \sin \alpha \quad (2.10)$$

(теперь уже α — угол между v и r , так как v по направлению совпадает с Δl).

Та же формула, записанная с использованием векторного произведения, даст

$$B = k' \frac{q[v, r]}{r^3} \quad (2.11)$$

§ 7. Об единицах измерения

Теперь, когда мы познакомились с таким фундаментальным понятием магнетизма, как магнитное поле, нам надо найти и единицы, в которых оно измеряется, и одновременно определить во всех ранее написанных формулах коэффициенты k и k' , зависящие от выбора системы единиц.

Начнем с системы СИ, так как в огромном большинстве случаев мы будем использовать именно эту систему. В системе СИ, кроме основных механических величин килограмм, секунда и метр, вводится, как уже говорилось, еще одна основная единица ампер. Приведем ее определение:

«Ампер есть сила неизменяющегося тока, который, будучи поддерживаемым в двух параллельных прямолинейных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ единицы силы (ньютон) на метр длины».

Чтобы воспользоваться этим определением, надо написать в явном виде выражение для силы, действующей на ток I длиной l в поле бесконечного параллельного ему тока I , расположенного на расстоянии r от него.

Выражение для поля дается формулой

$$B = k' \frac{2I}{r}. \quad (2.9a)$$

Тогда сила $F = kk' \frac{2I^2 l}{r}$. Неудобно писать два коэффициента k и k' , и в системе СИ выбрали $k = 1$.

Как следует из определения ампера, для $I = 1$ ампер и $l = r = 1$ метр коэффициент k' будет равен 10^{-7} единиц СИ

$$k' = \left[\frac{\text{ньютон}}{\text{ампер}^2} \right].$$

Принято записывать этот коэффициент в виде $\mu_0/4\pi$:

$$\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ единиц СИ.}$$

Тогда

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I^2 l}{r} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (2.9b)$$

Коэффициент $1/2\pi$ удобен, так как поле бесконечного прямого провода с током обладает цилиндрической симметрией.

Величину B по историческим причинам часто называют магнитной индукцией. В системе СИ за единицу магнитной индукции принимают тесла ($тл$) $1 тл = 1 в \cdot сек/м^2$.

Наименование «тесла» присвоено единице магнитной индукции в честь югославского изобретателя в области электро- и радиотехники Н. Тесла (1856—1943).

Мы же в дальнейшем чаще будем пользоваться термином «магнитное поле», чем «магнитная индукция».

Теперь следует остановиться на введенных нами ранее в электростатике и сейчас в магнетизме коэффициентах

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{и} \quad \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Размерность первого коэффициента легко определить из закона Кулона:

$$\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] = \frac{м^2}{сек^2} \frac{м \cdot кг}{а^2 \cdot сек^2}$$

и соответственно размерность

$$\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \right] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{а}^2 \cdot \text{сек}^2}.$$

Различаются коэффициенты по размерности величиной $\text{м}^2/\text{сек}^2$, т. е. квадратом размерности скорости.

Можно написать, что

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2},$$

где c — некоторый коэффициент, имеющий размерность $\text{м}/\text{сек}$ и, как показывает опыт, величину около $3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{сек}$.

Все, что мы сейчас выяснили, приводит к интересным следствиям: между двумя летящими параллельно зарядами q_1 и q_2 на расстоянии r друг от друга действует кулоновская сила

$$F_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

и магнитная сила

$$F_{\text{магн}} = q_1 v B = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

откуда

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_{\text{магн}}} = \frac{c^2}{v^2}.$$

Величина c^2/v^2 есть мера относительной интенсивности магнитного и электрического взаимодействий. При обычных скоростях частиц эта величина очень мала из-за огромного значения c . Поэтому магнитные силы становятся сколько-нибудь значительными по сравнению с электрическими при скоростях частиц, близких к c .

(Вспомним, как мы были озабочены тем, чтобы уничтожить кулоновские силы в опыте с параллельными токами!)

§ 8. Магнитные силовые линии.

Поля различных систем

Для поля прямого длинного провода нам нетрудно нарисовать силовые линии. В плоскостях, перпендикулярных к проводу, они будут представлять собой систему концентрических окружностей (рис. 2.12).

Условимся, как и раньше, проводить силовые линии так, чтобы густота их характеризовала величину поля. Тогда для рассматриваемого случая число силовых линий, проходящее через единичную площадку, будет складываться, как $1/r$.

Несколько слов о свойствах магнитных силовых линий. Как и в случае электрического поля, через каждую точку пространства

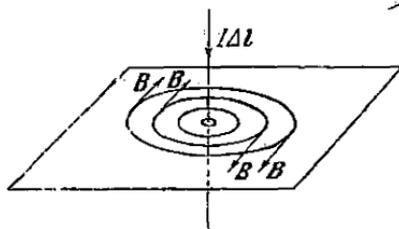


Рис. 2.12.

можно провести только одну силовую линию. Однако есть и отличие: магнитные силовые линии нигде не начинаются и не кончаются. Они представляют собой замкнутые линии либо линии, уходящие на бесконечность. Это соответствует тому, что магнитных зарядов в природе не существует.

Теперь рассмотрим виток проводника, по которому течет постоянный ток, и нарисуем его силовые линии

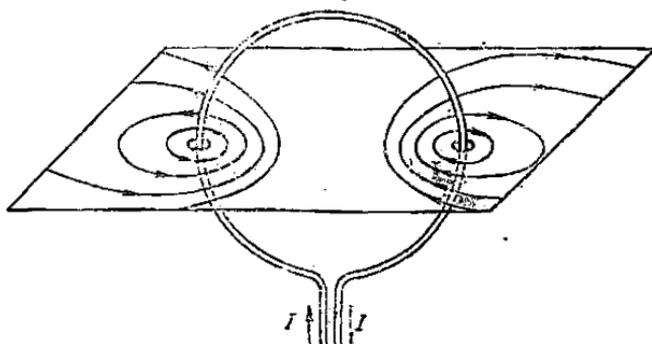


Рис. 2.13.

(рис. 2.13) *). Силовые линии для любого элемента тока находятся очень просто — ведь элемент всегда можно

*) Мы не интересуемся сейчас причинами, вызывающими постоянный ток в проводниках, т. е. не рассматриваем вопроса об источниках тока. Эти вопросы будут обсуждаться позднее в других выпусках.

взять достаточно малым и считать его прямым током. Поэтому, для того чтобы провести силовые линии этого элемента, надо провести плоскость, перпендикулярную к нему, и в этой плоскости начертить концентрические окружности. Суммарная картина будет выглядеть как суперпозиция картинок от всех элементов тока. При этом видно,

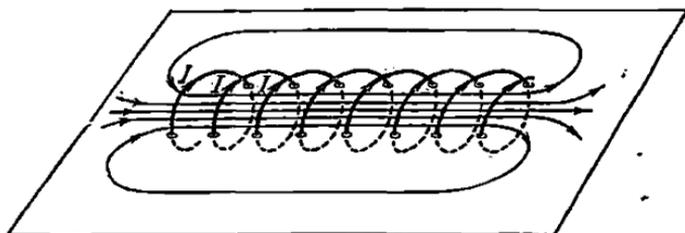


Рис. 2.14.

что в центре витка силовые линии каждого из элементов совпадают по направлению и, следовательно, поля их складываются, а вне витка направлены противоположно, и поле там ослабляется.

Система одинаковых круговых токов с общей осью называется соленоидом (рис. 2.14). Силовые линии соленоида могут быть получены суперпозицией полей отдельных витков. Как это видно из рисунка, внутри достаточно длинного соленоида магнитное поле можно считать однородным. Вне соленоида поле ослаблено, и им часто можно пренебречь по сравнению с полем внутри. Если взять соленоид бесконечной длины, то все поле будет сосредоточено внутри него.

§ 9. Основная теорема магнетизма

Всюду, где это возможно, мы пытаемся построить теорию магнитного поля по аналогии с теорией электростатического поля. Попытаемся установить теперь в магнетизме соотношения, аналогичные основным соотношениям электростатики:

$$\sum_{\sigma} E_n \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad \text{— теорема Гаусса,}$$

$$\sum_i E_n \Delta l = 0 \quad \text{— выражение для э.д.с.}$$

Точно так же, как вводится поток электрического поля, можно ввести и поток магнитного поля. Однако в силу замкнутости магнитных силовых линий величина такого потока через любую замкнутую поверхность равна нулю. Ведь каждая линия, входящая в поверхность, должна и выйти оттуда, иначе это означало бы, что она прервалась внутри поверхности.

Соотношение, аналогичное теореме Гаусса, запишется как

$$\sum_n B_n \Delta S = 0 \quad \text{или} \quad \sum_i \Phi_i = 0, \quad (2.12)$$

где Φ_i — магнитный поток, пересекающий ΔS_i . Определение магнитного потока Φ аналогично определению потока электрического поля Ψ (см. гл. I, стр. 19). Ясно, что при решении задач о нахождении магнитного поля это выражение не играет той роли, как теорема Гаусса в электростатике. Оно никак не связывает магнитное поле с источниками и, следовательно, не может помочь его вычислить.

Введем теперь по аналогии с а.д.с. магнитодвижущую силу м.д.с., т. е.

$$\sum_l (B \Delta l) = \sum_l B \Delta l \cos \alpha \quad (2.13)$$

по какому-либо замкнутому контуру l .

Рассмотрим поле длинного прямого проводника с током I в качестве контура выберем кривую, совпадающую с силовой линией. Во всех точках такого контура поле B имеет одну и ту же величину

$$B = \frac{2I\mu_0}{r \cdot 4\pi}, \quad \text{а} \quad \cos \alpha = 1.$$

Тогда

$$\sum_l B \Delta l = B \sum_l \Delta l = \frac{\mu_0 2I}{4\pi r} 2\pi r = \mu_0 I. \quad (2.14)$$

Это и есть соотношение для магнитодвижущей силы. Можно строго показать, что оно верно для любого контура и для любой системы токов.

В силу принципа суперпозиции, если контур пронизывается токами $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, то

$$\sum_r B_r \Delta l = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2.15)$$

Для магнетизма выражение (2.15) столь же важно, как теорема Гаусса для электростатики.

Оно связывает значение магнитного поля с распределением токов и в случае, если задача обладает определенной симметрией, позволяет найти B .

§ 10. Магнитный момент

Системы токов могут быть достаточно сложными, и в этом случае нахождение их магнитного поля весьма трудоемкая, а часто и просто невыполнимая задача. Поэтому

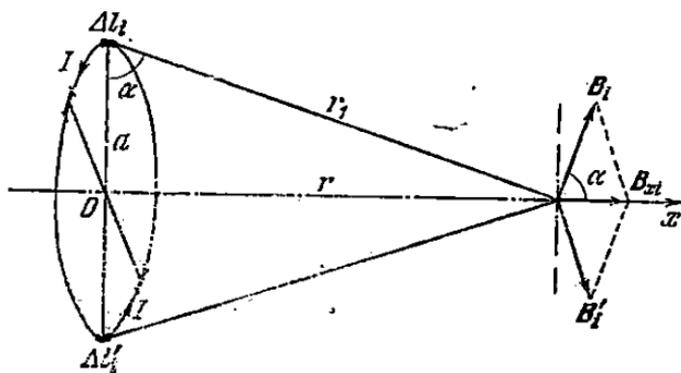


Рис. 2.15.

представляется очень интересным найти какие-то приближенные методы ее решения.

Рассмотрим для этого поле системы постоянных токов на больших расстояниях, т. е. поступим точно так же, как и в электростатике (см. пример II). Простейшей такой системой является круговой замкнутый ток. Магнитное поле на его оси вычисляется достаточно легко (рис. 2.15). Из соображений симметрии сразу же ясно, что оно будет направлено вдоль оси x .

Одинаковые элементы Δl_i и Δl_i , расположенные в диаметрально противоположных точках кольца, дадут вдоль оси x суммарное поле

$$B_{xi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\Delta l I \cos \alpha}{r_1^2} = \frac{\mu_0 \Delta l I a}{2\pi r_1^3},$$

а все кольцо

$$B_x = \sum_i B_{xi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi a a I}{r_1^3} = \frac{2\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi r_1^3} = \frac{2\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi (r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (2.16)$$

Для $r \gg a$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi a^2 I}{r^3} = \frac{2\pi a^2 I}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^3} = \frac{\pi a^2 I}{2\pi \epsilon_0 c^2 r^3}. \quad (2.16a)$$

В электростатике (см. пример II) было получено поле диполя на его оси. Когда расстояние до точки наблюдения много больше расстояния между зарядами, это поле имеет вид

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2d}{r^3}.$$

где d — дипольный момент.

По аналогии с этим назовем величину $m = \pi a^2 I$ магнитным моментом элементарного тока. Таким образом, магнитный момент выражается через произведение тока на площадь, охватываемую этим током.

Направление магнитного момента следует выбрать так, чтобы равенство (2.16a) можно было написать в векторном виде. Будем за положительное направление вектора m считать такое направление, которое совпадает с поступательным движением закручивающегося буравчика, если направление вращения его рукоятки совпадает с направлением движения положительных зарядов кругового тока. Это правило вытекает из определения направления B . Тогда

$$B = \frac{2m}{r^3} \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2}. \quad (2.17)$$

Поле любой системы зарядов, суммарный заряд которой равен нулю, можно представить как сумму полей диполей. Дипольный момент всей системы, как мы уже гово-

рили, равен векторной сумме дипольных моментов каждой пары зарядов.

Точно так же поле системы токов, расположенных на больших расстояниях от точки наблюдения, можно представить как сумму полей элементарных токов.

А магнитный момент можно ввести и для тока, создаваемого отдельным зарядом. Если заряд движется с постоянной скоростью по замкнутому контуру, ему следует приписать магнитный момент

$$m = qvS \frac{1}{l},$$

где S — площадь контура, v — скорость заряда, l — длина контура.

Как мы увидим в дальнейшем, приближенное нахождение поля системы токов с использованием магнитного момента помогает решить самые разнообразные задачи, кроме того, понятием магнитного момента мы будем все время в дальнейшем пользоваться.

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о методе аналогии между электростатическим полем и полем постоянных токов, к которому мы так часто прибегаем.

Как видно из примера с диполем и круговым током, такая аналогия лучше всего оправдывается на больших расстояниях от системы источников, так как именно в источниках и заключается существенное отличие магнитного и электрического полей. Все дело сводится к отсутствию магнитных зарядов, хотя существование таких зарядов в принципе не противоречит общим законам природы.

Однако ни одна из известных сейчас элементарных частиц не является носителем магнитного заряда.

§ 11. Движение заряда в электрическом и магнитном полях

Теперь мы вплотную подошли к решению основной задачи. Умея находить магнитное поле различных систем и зная силу, действующую в заданном поле B на движущийся пробный заряд q , можно написать уравнения движения этого заряда

$$ma = q [v, B],$$

где v — скорость заряда, m — масса и a — ускорение.

Для примера рассмотрим наиболее простой случай — движение заряда, влетевшего в однородное магнитное поле перпендикулярно к его силовым линиям. В этом случае v перпендикулярно к B , сила, действующая на заряд, будет одинакова по величине во всех точках (однородное поле!) и всегда перпендикулярна к направлению скорости заряда. Заряд будет двигаться (как известно из механики) по окружности, радиус которой определится из соотношения

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

Магнитная сила обеспечивает центростремительное ускорение. Часто употребляют выражение: «заряд крутится вокруг силовой линии». Более сложные случаи движения зарядов в магнитном поле будут разобраны в задачах и примерах.

В заключение остановимся еще на одном важном вопросе. Если заряд находится одновременно в электрическом и магнитном полях, то на него, как мы уже говорили, действует сила Лоренца, и уравнение движения имеет следующий вид:

$$ma = qE + q[v, B].$$

В «Механике» было показано, что уравнения движения сохраняют свой вид при изменении знака времени. Это означает, что если тело проходит определенную последовательность состояний в соответствии с уравнениями движения, то возможно обратное движение, при котором тело будет проходить те же самые состояния, но в обратном порядке.

Докажем это утверждение и для движения заряженной частицы под действием силы Лоренца. При замене t на $-t$ член ta знака не меняет *).

$$*) a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, v = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \text{ при замене } t \text{ на } -t$$

$$\Delta t \rightarrow -\Delta t, \quad \Delta r \rightarrow \Delta r, \quad v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow -v, \quad \Delta v \rightarrow -\Delta v,$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{-\Delta v}{-\Delta t} = a.$$

Итак, $ta \rightarrow ta$ при замене t на $-t$.

Выражение qE также не может изменить знак, по той простой причине, что q — скаляр, не зависящий от времени, а E — статическое поле внешних источников, также не зависящее от времени.

Второй член, описывающий магнитную силу, зависит от скорости v . Если изменить знак времени, то это означает, что скорость всех частиц изменится на обратную.

Значит ли это, что и сила $F = q [v, B]$ изменит знак? Оказывается нет. При изменении скорости всех частиц на противоположную изменяет свой знак и ток $I \Delta l$, создающее поле. Но перемена направления тока источника по нашим правилам нахождения вектора B должна изменить и его знак на обратный: B заменяется на $-B$. Поэтому произведение $[v, B]$, а значит, и сила будут иметь прежнее направление.

§ 12. Энергия заряда в магнитном поле

Для электростатики выражение полной энергии было введено по аналогии с соответствующим выражением для энергии тяготения. После этого в решении задачи 1.20 было показано, как может быть получено это выражение из уравнений движения. Для магнитных сил, которые зависят от скоростей взаимодействующих зарядов, у нас нет аналогии, которой можно было бы воспользоваться. Поэтому попытаемся вывести необходимые выражения из уравнений движения

$$ma = q [v, B]$$

или в другой записи

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = q [v, B].$$

Обе части векторного равенства умножим скалярно на вектор v ; тогда

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} v = q (v [v, B]).$$

Произведение $(v [v, B])$ обращается в нуль. Это доказывается в математическом дополнении (см. стр. 164).

$$\text{Величина же } m \frac{\Delta v}{\Delta t} v = \frac{\Delta \frac{mv^2}{2}}{\Delta t} = 0 \text{ *)}.$$

*) Подобное преобразование проделано в задаче 1.20.

И, следовательно, при движении в магнитном поле $mv^2/2$, т. е. кинетическая энергия движущейся частицы, сохраняется. Физически это достаточно ясно. Для малого участка пути мы всегда можем считать, что направление скорости частицы и перемещения совпадают. Но сила в магнитном поле перпендикулярна к направлению скорости и, следовательно, к перемещению. В этом случае никакой работы поле над зарядом не производит. Полная энергия совпадает с кинетической энергией и сохраняется при движении.

В случае, если заряд движется в постоянном электрическом и магнитном полях, то сохраняется величина

$$W = \frac{mv^2}{2} + e\varphi$$

и она является полной энергией заряда.

§ 13. Энергия магнитного поля

Теперь осталось разобрать вопрос об энергии магнитного поля. Для электростатического поля мы поступили таким образом: вычислили энергию взаимодействия двух заряженных пластин и сказали, что эта энергия может быть выражена двумя способами. Либо только через величины, относящиеся к зарядам, и геометрические размеры системы, либо через величину поля между пластинами и занимаемый им объем. Оба описания совершенно равноправны. Поэтому можно приписать энергию нашей системы полю, которое оно создает. Откуда эта энергия появилась?

Очевидно, за счет той работы, которую пришлось затратить, чтобы пластины зарядить. Скажем, можно себе представить такой способ зарядки нейтральных вначале пластин: берем положительный заряд $+q$ с одной пластины и переносим на другую. У первой пластины образуется нехватка положительного заряда, т. е. она заряжается отрицательно. У второй образуется избыток положительных зарядов.

Мы продолжаем эту процедуру до тех пор, пока на первой пластине не образуется заряд $-Q$, на второй — заряд $+Q$.

Когда мы переносим очередной заряд, то совершаем работу против сил притяжения со стороны первой пласти-

ны и сил отталкивания со стороны второй. Эта работа и перешла в энергию электрического поля.

Если идти по пути аналогии, то можно было бы рассуждать так. Пусть мы имеем какую-то систему нейтральных токов (например, соленоид), создающую в пространстве магнитное поле. Тогда, так же как и для электростатического поля, энергию системы можно было бы, с одной стороны, выразить через ток и геометрические размеры соленоида, а с другой, через магнитное поле в соленоиде и занимаемый им объем:

в электростатике

$$U \sim Q \text{ или } U \sim E^2,$$

в магнетизме

$$U \sim I^2 \text{ или } U \sim B^2.$$

Но если задуматься над тем, откуда появляется эта энергия, то возникают некоторые трудности.

Чтобы создать магнитное поле, надо создать ток, т. е. заставить заряды двигаться. Ясно, что при этом мы должны совершить работу.

Заряды начинают двигаться и приобретают некоторую кинетическую энергию. Может ли эта кинетическая энергия движущихся зарядов быть представлена как энергия, накопленная их магнитным полем?

Очевидно нет. Ведь поле зависит только от заряда частиц и скорости их движения, но не от массы. А кинетическая энергия пропорциональна массе.

Это легко понять из того, что, заставив двигаться с одинаковой скоростью две равные по массе частицы, одна из которых нейтральная, а вторая заряженная, мы в первом случае не создадим никакого магнитного поля, а во втором создадим. При этом кинетические энергии у них будут одинаковы.

И наоборот, одно и то же магнитное поле можно получить от двух одинаково заряженных частиц, но имеющих разную кинетическую энергию.

Отсюда ясно, что если приписать магнитному полю некоторую энергию, то это будет означать, что получить ток нейтральных частиц «легче», чем заряженных, т. е., приводя в движение заряд, мы совершаем некоторую дополнительную работу. П р о т и в каких сил совершается такая работа?

Что может помешать движению зарядов?

Очевидно, возникающее в момент начала движения электрическое поле, которое противодействует внешним силам *). Нам приходится затрачивать работу на преодоление этого противодействия и этой работой измеряется энергия магнитного поля.

Пока это только подозрения.

Если они подтвердятся, то это будет означать прежде всего, что существует глубокая связь между электрическими и магнитными явлениями, что магнитному полю можно приписать энергию, и это подтвердит наши предположения, сделанные на основании аналогии. Наконец, что понятие поля приобретает все более реальный и осязаемый смысл.

Все эти вопросы будут подробно рассмотрены в следующей главе.

ПРИМЕРЫ

I. Найти магнитное поле внутри длинного соленоида. Выберем прямоугольный контур, такой, как показано на рис. 2.16. Одна сторона AB этого контура, длиной l , расположена внутри соленоида и параллельна силовым линиям поля. Так как поле внутри однородно, то

$$\sum_{\text{по } AB} B \Delta l = \sum_{\text{по } AB} B \Delta l \cos(B, \hat{\Delta l}) = Bl.$$

Противоположная сторона контура DC находится вне соленоида. Согласно условию соленоид достаточно длинный, и это означает, что величиной поля вне его можно пренебречь. Поэтому

$$\sum_{\text{по } DC} B \Delta l = 0.$$

Наконец, м.д.с. вдоль двух сторон BC и AD , перпендикулярных к полю, тоже равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{по } BC} B \Delta l &= \sum_{\text{по } AD} B \Delta l = \sum B \Delta l \cos(B, \hat{\Delta l}) = \\ &= \sum B \Delta l \cos 90^\circ = 0. \end{aligned}$$

*) Именно электрическое поле, так как только против него заряд совершает работу, при движении же в магнитном поле работа не совершается.

Согласно основной теореме для постоянного магнитного поля

$$\sum_{\text{по контуру } ABCD} B \Delta l = \mu_0 I = \frac{\sum_{k=1}^n i_k}{\epsilon_0 c^2},$$

где $\sum_{k=1}^n i_k$ — полный ток, пересекающий площадь, ограниченную контуром. Но площадь $ABCD$ пересекает n витков с током i в каждом, поэтому

$$\sum_{ABCD} B \Delta l = Bl = \frac{ni}{\epsilon_0 c^2} \quad \text{и} \quad B = \frac{n}{l} \frac{i}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0 i \frac{n}{l},$$

где n/l — число витков на 1 м длины.

Пользоваться теоремой об м.д.с. особенно удобно в тех случаях, когда задача обладает какой-либо симметрией, точно так же, как теоремой Гаусса для электростатического поля.

Однако только одной этой теоремы для нахождения магнитного поля в общем случае недостаточно. Необходимо знать свойства силовых линий этого поля, их замкнутость, т. е. необходимо использовать соотношение

$$\sum B_n \Delta S = 0.$$

II. Найти силы, действующие на прямоугольную рамку с током в однородном магнитном поле.

Рассмотрим сначала рамку с током I , помещенную в однородное магнитное поле B , так как это показано на рис. 2.17, а. Мы знаем, что сила, действующая на провод с током I длиной Δl в однородном магнитном поле, выражается формулой $F = I \Delta l B \sin(\Delta l, \hat{B})$ или, записанная с помощью векторного произведения, как $F = I [\Delta l, B]$.

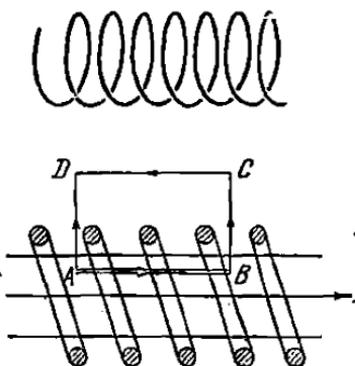


Рис. 2.16.

Отсюда видно, что силы, действующие на стороны рамки BC и AD , лежат в плоскости рамки и стремятся ее растянуть. (На рис. 2.17, *а* показана одна из сил F' , приложенная к отрезку провода BC . Она направлена вертикально. В случае, если переменить направление тока или магнитного поля на обратное, силы будут не растягивать, а сжимать наш контур)

Теперь рассмотрим силы, действующие на стороны AB и CD . Для этого обратимся к рис. 2.17, *б*, на котором изображен вертикальный разрез рамки.

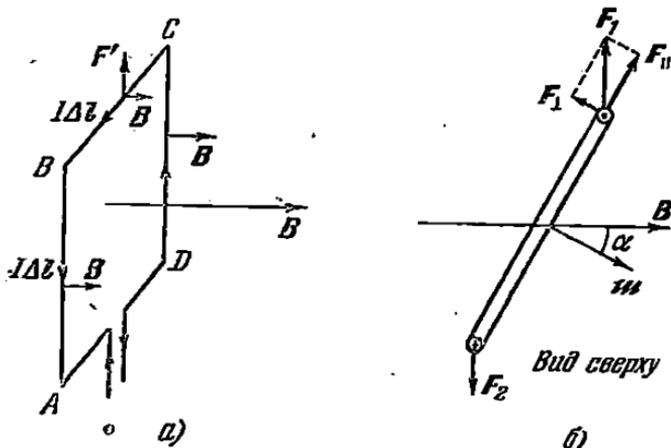


Рис. 2.17.

К отрезку CD приложена сила F_1 , равная по величине силе F_2 , действующей на сторону AB , но направленная противоположно ей.

На рамку действует момент сил

$$M = F_{\perp} l_{BC} = F_1 l_{BC} \sin \alpha = Il_{CD} l_{BC} B \sin \alpha = ISB \sin \alpha,$$

где l_{BC} и l_{CD} — длины соответствующих сторон рамки, S — ее площадь и α — угол между направлением нормали к рамке, которую мы выбираем по направлению ее магнитного момента m и направлением поля

$$M = mB \sin \alpha.$$

Отсюда видно, что при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$, т. е. когда плоскость рамки перпендикулярна к силовым линиям поля, момент сил, действующих на рамку, обращается в нуль.

При угле $\alpha = 0^\circ$ рамка находится в устойчивом равновесии, так как силы, появляющиеся при отклонении ее от этого положения на малый угол $\Delta\alpha$, стремятся снова возвратить рамку в первоначальное положение (рис. 2.18, а).

Для угла $\alpha = 180^\circ$ равновесие неустойчиво. Это проиллюстрировано на рис. 2.18, б.

Максимальный момент действует на рамку при $\alpha = 90^\circ$ или 270° . В этом случае вектор \mathbf{B} лежит в плоскости рамки.

Окончательный вывод: рамка с током, помещенная в однородное магнитное поле, стремится повернуться так, чтобы направление ее магнитного момента совпадало с направлением поля (в нашем случае при этом $\alpha = 0$).

III. Найти силу, действующую в неоднородном магнитном поле, на круговую рамку с током.

Пусть кольцо с током I радиуса R помещено в неоднородное магнитное поле, симметричное относительно оси x (рис. 2.19, а).

В каждой точке внешнее поле можно разложить на две составляющих B_x и B_y . Первая из них приводит к появлению сил, лежащих в плоскости рамки и стремящихся ее растянуть. Вторая составляющая действует на каждый элемент рамки с силой $F_t = B_y \Delta l_i I$, а на всю рамку с силой $F = 2\pi R I B_y$, стремясь сдвинуть рамку в сторону меньших значений x .

Продолжим вектор \mathbf{B} до пересечения с осью x (эту точку мы для простоты примем за начало координат), тогда из чертежа очевидно, что $B_y = B_x \operatorname{tg} \alpha = B_x \frac{R}{x}$. Отсюда

$$F = 2\pi R I B_x \frac{R}{x} = 2\pi R^2 I \frac{B_x}{x} = 2SI \frac{B_x}{x},$$

где S — площадь рамки. Учитывая, что $SI = m$ и то, что сила F противоположна направлению выбранной оси,

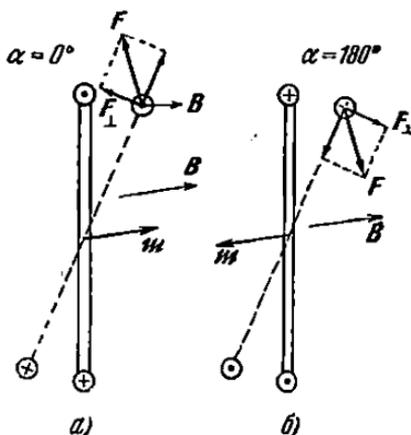


Рис. 2.18.

а магнитный момент параллелен ей, можно записать:

$$F_x = -m \frac{2B_x}{x}. \quad (1)$$

Для достаточно малого отрезка Δx (см. рис. 2.19, б) мы можем считать, что силовые линии представляют собой расходящиеся прямые. Исходя из этого, попытаемся найти величину B_x как функцию x .

Величину индукции $B(x)$ в месте нахождения рамки (считая поле близким к однородному) можно найти из соотношения

$$B(x) = \frac{\Phi}{S},$$

где Φ — магнитный поток, пересекающий площадь $S = \pi R^2$, для $B(x - \Delta x)$ он запишется как

$$B(x - \Delta x) = \frac{\Phi'}{S} = \frac{\Phi'}{\pi R^2};$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta B &= B(x - \Delta x) - B(x) = \\ &= \frac{\Phi'}{S} - \frac{\Phi}{S} = \frac{\Delta \Phi}{S}. \end{aligned}$$

Из рис. 2.19, б следует, что $\Delta \Phi$ равно потоку через боковую поверхность цилиндра радиуса R и высотой Δx :

$$\Delta \Phi = B_y 2\pi R \Delta x = B_x \frac{R}{x} 2\pi R \Delta x = \frac{B_x \Delta x}{x} 2\pi R^2,$$

поэтому

$$\Delta B = \frac{-B_x \Delta x}{x} 2\pi R^2 \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2B_x \Delta x}{x},$$

и отсюда получим

$$B_x = \frac{\Delta B(x) x}{2\Delta x}.$$

Подставив значение B_x в формулу (1), имеем

$$F_x = - \pi \frac{2B_x}{x} = - \pi \frac{\Delta B(x) x}{2\Delta x} \frac{2}{x} = - \pi \frac{\Delta B(x)}{\Delta x},$$

т. е. величина силы зависит от магнитного момента рамки и степени неоднородности поля.

IV. Рассмотрим сферу радиуса R с поверхностной плотностью заряда ρ_s .

Со стороны электрического поля на сферу действуют силы, стремящиеся разорвать ее. Результирующая всех таких сил равна нулю.

Пользуясь принципом возможных перемещений ^{*}), мы можем найти силу, действующую на единицу заряженной поверхности.

Предположим, что радиус сферы увеличится на величину ΔR , причем ΔR может быть как угодно малым. Тогда электрическое поле совершит работу $A = P_E 4\pi R^2 \Delta R$, где P_E — сила, действующая на единицу поверхности со стороны электрического поля ^{**}).

С другой стороны, эта работа совершается за счет уменьшения электростатической энергии $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ (см. (1.29)), где $Q = 4\pi R^2 \rho_s$ — полный заряд сферы. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_E \cdot 4\pi R^2 \Delta R &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q^2}{2R} - \frac{Q^2}{2(R + \Delta R)} \right) = \\ &= \frac{Q^2 \Delta R}{8\pi\epsilon_0 R (R + \Delta R)} = \frac{Q^2 \Delta R}{8\pi\epsilon_0 R^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R} \right)}, \end{aligned}$$

откуда

$$P_E = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1)$$

Сила ^{***}), действующая на единицу поверхности, называется давлением. Мы можем поэтому сказать, что электрическое поле оказывает давление на заряженную поверхность, равное

$$P_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (2)$$

^{*}) См. «Механика», стр. 135.

^{**}) Имеется в виду абсолютная величина силы.

^{***}) Имеется в виду абсолютная величина силы.

Сила давления электрического поля действует в сторону увеличения поля.

Поставим теперь задачу, найти величину, играющую роль давления для магнитного поля. Другими словами, требуется найти силу, действующую со стороны магнитного поля на единицу поверхности, по которой протекает ток.

Для этого рассмотрим длинную полую трубу радиуса R , вдоль которой течет ток I . Но в данном случае при вычислении давления мы уже не можем воспользоваться принципом возможных перемещений, так как у нас нет выражения для энергии магнитного поля. Поэтому мы проведем вычисление непосредственно. На рис. 2.20 изображено сечение трубы плоскостью, перпендикулярной к ее оси.

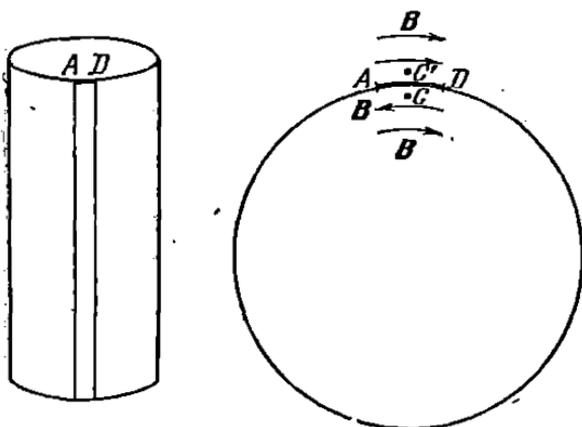


Рис. 2.20.

AD — сечение достаточно малого участка трубы, который можно считать бесконечно тонким линейным током, направленным перпендикулярно к плоскости чертежа. Поле в любой точке C вблизи участка AD складывается (по принципу суперпозиции) из поля, создаваемого током, протекающим вдоль AD , и из поля, создаваемого остальной частью трубы (рис. 2.20). Так как внутри трубы результирующее поле равно нулю, то эти поля равны по величине и противоположны по направлению.

Вне трубы в близкой точке C' (рис. 2.20) направление и величина поля, создаваемого всей трубой, за исключе-

нием участка AD , остаются практически такими же, как в точке C , а поле, создаваемое током, протекающим по AD , меняется лишь по направлению на противоположное (по правилу буравчика), оставаясь таким же, как и в точке C по величине. Так как полное поле в точках, принадлежащих участку AD , с внешней стороны равно $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, то поле, создаваемое в этих же точках всей трубой, за исключением AD , равно

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \quad (3)$$

Сила, действующая на ток длины l , равна $F = IBl$. Следовательно, на единицу поверхности приходится сила, равная

$$P = \frac{IBl}{2\pi Rl} = \frac{IB}{2\pi R}.$$

Подставляя значение B из (3), получим $P = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$, или, выражая I через B , $I = \frac{2\pi RB}{\mu_0}$, окончательно получим $P = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

Таким образом, мы получили выражение, в точности аналогичное выражению для давления электрического поля (см. (2)). Теперь мы видим, что можно было бы провести расчет, используя принцип возможных перемещений, если в качестве плотности энергии магнитного поля принять выражение $B^2/2\mu_0$.

Сила давления магнитного поля направлена в сторону уменьшения поля. Это отличие от электрического поля связано с тем, что в случае электрического поля мы вычисляли давление вдоль силовых линий, а в случае магнитного — поперек.

ЗАДАЧИ

2.1. На рис. 2.21 изображена катушка с током; называют ее тороидальной катушкой или тороидом (размеры ее приведены на рисунке). Число витков тороида n и величина тока I .

1) Найдите величину магнитного поля такой системы как функцию расстояния от точки наблюдения до центра катушки.

2) Если задана степень неоднородности поля внутри тороида $\frac{B_1 - B_2}{B_1}$, равная 1%, то каково должно быть соотношение между r_1 и r_2 ?

2.2. Длинный проводник с током I согнут под прямым углом. Найти магнитное поле такой системы в точке A , лежащей на расстоянии r от вершины прямого угла на продолжении одной из его сторон (рис. 2.22).

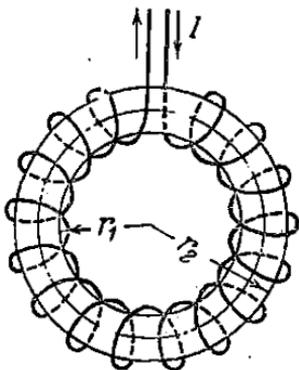


Рис. 2.21.

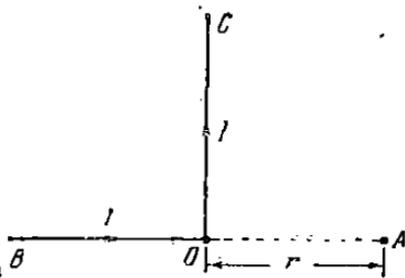


Рис. 2.22.

2.3. Контур с током имеет вид, показанный на рис. 2.23. Прямой провод на одном из участков переходит в полуокружность радиуса R . Ток, текущий по проводу, равен I . Найти величину магнитного поля в центре полуокружности (точка O).

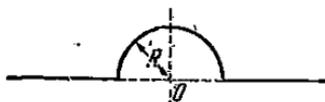


Рис. 2.23.

2.4. Определить магнитное поле, создаваемое длинным прямым проводом, по которому протекает ток I . Построить график зависимости индукции B от расстояния r до оси. Рассмотреть два случая:

- 1) Провод сплошной; радиус сечения R .
- 2) Провод представляет собой полу трубу с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 .

В обоих случаях плотность тока постоянна по сечению.

2.5. Ток I идет по проводнику, форма которого указана на рис. 2.24. Диаметр левой части AC проводника много меньше диаметра CD правой части. Цилиндр CD полый. Определить создаваемое током магнитное поле.

2.6. Описать поведение двух рамок с током, подвешенных на гибких проводах параллельно друг другу.

2.7. Пружина, изготовленная из проводящего материала, имеет длину l и радиус r . Число ее витков n , зазоры между витками можно считать малыми. Коэффициент упругости пружины k .

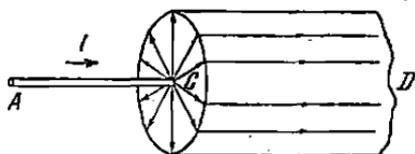
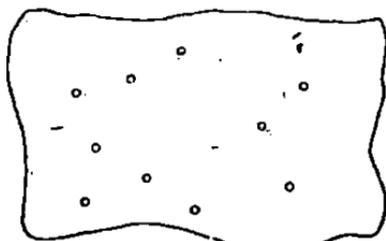


Рис. 2.24.

Что произойдет, если пропустить по пружине ток I (дать качественное описание и сделать количественные оценки).

2.8. Показать, что из всех плоских фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет окружность (использовать физическую модель).

2.9. Один человек покупал земельный участок. Хозяин земли, чудаковатый любитель всяких задач, принес план своих владений и сказал, что он готов продать участок, который покупатель сможет оградить забором, касающимся деревьев, обозначенных на плане (рис.2.25). При этом стоимость будет пропорциональна длине забора. Как покупатель должен поставить забор, чтобы при имеющейся у него сумме денег купить участок наибольшей площади?



• - деревья

Масштаб 1:М

Рис. 2.25.

2.10. Если из длинной поллой трубки, запаивной с торцов, полностью выкачать воздух, то она сплющится. Какой наименьший ток надо пропустить по трубке, чтобы добиться такого же «результата», не запаивая ее и не выкачивая воздуха. Радиус трубки R (см. пример IV).

2.11. По длинному прямолинейному проводнику радиуса r течет ток I . Проводник окружен концентрическим проводящим цилиндром, по которому течет ток равный по величине току в центральном проводнике и противоположный ему по направлению. Радиус цилиндра R . Внутренний проводник гибкий, т. е. может свободно изгибаться

и растягиваться *). Исследовать характер равновесия, внутреннего проводника, рассмотрев два случая: $r \ll R$ и $r \approx R$.

2.12. Будет ли движение заряда вдоль силовой линии однородного магнитного поля устойчивым? Что произойдет при небольших возмущениях?

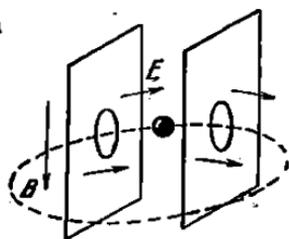


Рис. 2.26.

2.13. От каких характеристик частицы зависит форма ее траектории при движении в: 1) гравитационном поле, 2) электрическом поле, 3) магнитном поле?

2.14. Был предложен следующий проект вечного двигателя (рис. 2.26). В однородном магнитном поле движется по круговой траектории перпендикулярно к силовым линиям заряженный шарик. В одном месте траектория его про-

ходит через ускоряющую систему, которая состоит из двух параллельных равномерно заряженных пластин (величина заряда у них одинаковая, а знаки заряда разные). Каждый раз, проходя через поле, заключенное между пластинами, шарик ускоряется и приобретает некую дополнительную энергию. Выйдя из промежутка между пластинами, он эту энергию отдает какому-либо механизму и продолжает свой путь с прежней скоростью по прежней траектории. Трение его можно сделать достаточно малым. Какую ошибку допустил автор, конструируя такой двигатель?

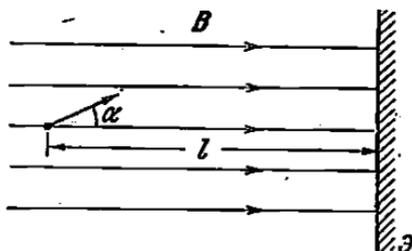


Рис. 2.27.

2.15. Электрон влетает в однородное магнитное поле под углом α к силовым линиям и движется до столкновения с плоским экраном, расположенным перпендикулярно к полю (рис. 2.27). Расстояние от источника электронов до экрана Э равно l . Определить длину S траекто-

*) Примером такого проводника может служить резинка, покрытая проводящим веществом, или струя металла.

рий электрона, если известно, что частица к моменту столкновения с экраном совершает один полный оборот.

2.16. Коллимированный *) пучок электронов от радиоактивного источника S проходит через область пространства, в котором создано однородное магнитное поле B , направленное перпендикулярно к скорости, и попадает на плоский экран \mathcal{E} (рис. 2.28). Кинетическая энергия T различных электронов в пучке может принимать значение от 0 до некоторого T_{\max} . Определить: а) при каком

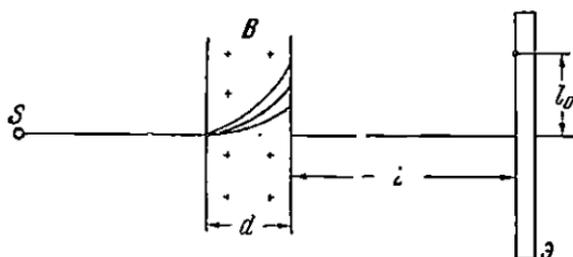


Рис. 2.28.

условию электроны достигнут экрана, б) на каком расстоянии l_0 от оси пучка нужно сделать щель на экране, чтобы выделить электроны с заданной энергией T_0 . Все линейные размеры и направление магнитного поля указаны на рисунке.

2.17. Коллимированный пучок заряженных частиц под влиянием кулоновских сил постепенно расходится. Как зависит этот эффект от скорости частиц?

2.18. Перпендикулярно к плоскости витка с током (и параллельно его оси) летит пучок положительно заряженных частиц. Показать, что магнитное поле такого витка оказывает на пучок фокусирующее действие, т. е. сообщает частицам скорость, направленную к оси витка.

2.19. Электрон влетает в однородное магнитное поле B . Скорость электрона равна v и направлена под углом α к силовым линиям. Определить создаваемый электроном магнитный момент.

2.20. Описать качественно движение позитрона одновременно в электрическом и магнитном полях, если известно, что векторы E и B перпендикулярны друг к другу и

*) Коллимированным называется пучок, в котором все частицы имеют одно и то же направление скорости.

что скорость позитрона в начальный момент перпендикулярна им обоим.

2.21. Выполняется ли принцип независимости движений для заряженных частиц, движущихся одновременно в электрическом и магнитном полях?

2.22. Оценить магнитный момент атома водорода в модели Резерфорда. (Использовать решение задачи 1.13.)

2.23. В 1932 году американский физик Карл Д. Андерсен открыл частицу, обладающую массой, равной массе электрона, и зарядом $+e$. Частицу эту называли позитроном. Тормозясь в веществе, позитрон может захватить электрон, и, сдерживаемые электростатическим полем притяжения, электрон и позитрон будут вращаться друг относительно друга. Образуется нейтральный атом, — «позитроний», подобный атому водорода, только роль протона в нем играет позитрон. Ответьте на следующие вопросы:

1) Чему равно отношение среднего радиуса атома водорода к среднему расстоянию между частицами в позитронии, если известно, что электростатическая энергия позитрония в два раза меньше электростатической энергии атома водорода?

2) Какова величина магнитного момента позитрония, связанного с относительным движением частиц?

2.24. Одним из важнейших свойств элементарных частиц является то, что они обладают некоторым внутренним движением. В связи с этим у многих частиц был обнаружен магнитный момент. В частности, нейтрон — нейтральная элементарная частица, которая наряду с протоном входит в состав атомных ядер, — обладает магнитным моментом μ . Его можно обнаружить, изучая поведение нейтронов в магнитном поле. Покажите, что электрический дипольный момент нейтрона равен нулю*).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. Торойд обладает определенной симметрией. Эта симметрия позволяет нам утверждать, что величина магнитного поля и вне и внутри данной катушки может зависеть только от расстояния r от точки наблюдения до центра катушки.

*) Используйте то, что при обращении времени физические законы не меняются.

Для нахождения B применим теорему о м.д.с. Выберем в качестве контура окружность, лежащую вне катушки ($r > r_2$). Тогда

$$\sum_{\substack{\text{по окружности} \\ \text{радиуса } r}} B \Delta l = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

Используя соображения симметрии, согласно которым $B = \text{const}$ для всех точек контура, получим

$$B \sum_{\substack{\text{по окружности} \\ \text{радиуса } r}} \Delta l = B 2\pi r = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_{k=1}^n I_k.$$

Полный ток $\sum_{k=1}^n I_k$, пересекающий площадь контура, равен нулю, так как ток в каждом витке катушки пересекает ее дважды, имея противоположные направления. Поэтому для $r > r_2$ $B = 0$.

Выбрав в качестве контура окружность с r , меньшим r_2 и большим r_1 , и используя ту же теорему, мы получим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

В этом случае ток I пронизывает площадь контура n раз, идя в одном направлении, поэтому

$$B = \frac{1}{2\pi r} \mu_0 I n$$

(n — число витков катушки). Для $r < r_1$ легко показать, что $B = 0$.

Поле внутри тороида неоднородно:

$$\text{для } r = r_1 \text{ оно равно } B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r_1} nI,$$

$$\text{для } r = r_2 \text{ оно равно } B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r_2} nI.$$

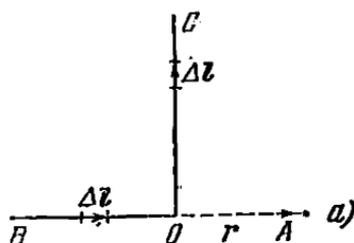
Если задана степень неоднородности, т. е. отношение $\frac{B_1 - B_2}{B_1} = 0,01$, то

$$\frac{\frac{1}{2\pi r_1} \mu_0 n I - \frac{1}{2\pi r_2} \mu_0 n I}{\frac{1}{2\pi r_1} \mu_0 n I} = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} = 0,01,$$

откуда

$$1 - \frac{r_1}{r_2} = 0,01 \quad \text{и} \quad \frac{r_1}{r_2} = 0,99.$$

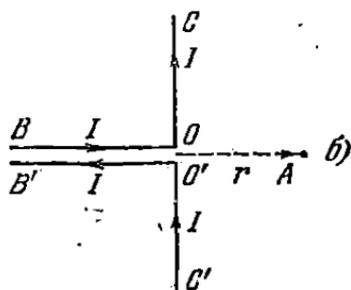
2.2. Магнитное поле, создаваемое элементами тока стороны OB (рис. 2.29, а), в точке A равно нулю, так как направление каждого элемента Δl совпадает с направлением радиуса-вектора, проведенного из элемента Δl в точку A .



Поэтому все поле в точке A создается участком OC . Для его нахождения рассмотрим систему контуров, представленных на рис. 2.29, б.

Поле таких контуров эквивалентно полю бесконечно длинного провода CC'

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$



Из-за того, что эти контуры дают одинаковый вклад в величину поля в точке A (они совершенно симметричны относительно нее), каждый должен создавать поле

$$B_A = \frac{1}{2} B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r}.$$

Рис. 2. 29.

2.3. Ток в бесконечном прямом проводе не дает вклада в магнитное поле в точке O , так как она лежит на оси провода (см. предыдущую задачу). Используя выражение для магнитной индукции в центре кольца

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

можно найти поле B_1 , создаваемое в точке O проводом, согнутым в виде полуокружности:

$$B_1 = \frac{1}{2} B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.$$

Здесь существенно то, что в центре кольца все элементы кольца создают поле, одинаковое по величине и по направлению. Поэтому n -я часть кольца создаст поле B_0/n .

2.4. Воспользуемся основной теоремой (2.14), выбрав в качестве контура окружность радиуса r с центром на оси провода, лежащую в плоскости, перпендикулярной к току. В силу симметрии вектор \mathbf{B} должен иметь одно и то же значение во всех точках этой окружности. Так как направление магнитного поля перпендикулярно к направлению тока, то вектор \mathbf{B} должен лежать в плоскости окружности и быть в каждой точке касательным к ней (любое другое направление противоречило бы замкнутости магнитных силовых линий).

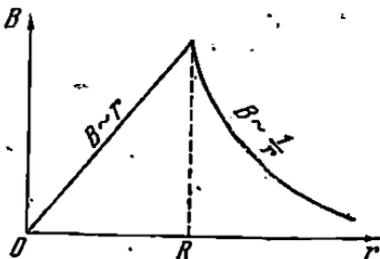


Рис. 2.30.

Основная теорема даст

$$2\pi r B = \mu_0 I, \quad (1)$$

где I — ток, пронизывающий выбранную окружность.

Рассмотрим первый случай.

При $r \geq R$ $I = I_1$, и из (1) имеем $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, где I_1 — полный ток в проводе. Следовательно, магнитное поле вне провода конечного радиуса такое же, как и поле бесконечно тонкого провода, с током той же величины и расположенного на его оси.

При $r < R$ $I = \pi r^2 j$, где j — плотность тока, и

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

График зависимости B от r показан на рис. 2.30.

Во втором случае рассуждения аналогичны. Точно так же получим, что поле вне провода ($r \geq R_2$) равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2)$$

При $R_1 < r < R_2$ получаем

$$2\pi r B = \mu_0 I, \quad I = \pi \cdot (r^2 - R_1^2) j, \quad j = \frac{I_1}{\pi (R_2^2 - R_1^2)}.$$

Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi (R_2^2 - R_1^2)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right). \quad (3)$$

Поле внутри полости (при $r < R_1$) равно нулю. При $r = R_2$ формула (2) приводит к правильному значению, согласующемуся с (3).

График зависимости B от r дан на рис. 2.31.

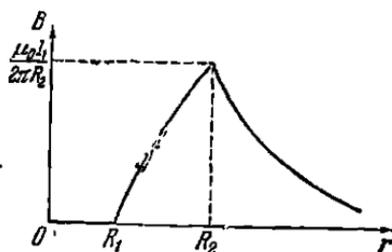


Рис. 2.31.

2.5. Поле вокруг тонкого проводника AC известно:

$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$. Поле внутри цилиндра CD равно нулю. Вне цилиндра оно совпадает с полем тонкого проводника. Ток, протекающий по плоскому диску, соединяющему части AC и CD , вклада в магнитное поле не дает.

2.6. Здесь могут быть два случая: 1) токи в рамках направлены одинаково, 2) токи в рамках текут в противоположных направлениях.

1) Каждая из рамок создает неоднородное магнитное поле. Как было показано в примере III, на рамку с током в неоднородном магнитном поле действует сила $F_x = -m \frac{\Delta B_x}{\Delta x}$, где m — магнитный момент рамки, B_x — внешнее магнитное поле, ось x — ось симметрии поля. При этом сила действует в направлении увеличения поля, если m расположен вдоль поля, и в противоположном направлении, если m направлен против поля.

В нашем случае ось симметрии будет прямая, соединяющая центры рамок. Так как магнитный момент каж-

дой рамки параллелен полю другой, и поля возрастают при уменьшении расстояния до рамок, то рамки будут притягиваться.

2) В этом случае магнитный момент каждой из рамок направлен против поля другой, и рамки будут отталкиваться. Этот эффект, однако будет наблюдаться только в том случае, если плоскости рамок идеально параллельны друг другу. Это следует из того, что если m направлен против поля (угол между m и B составляет 180°), то равновесие рамки (относительно поворотов) неустойчиво (см. пример II). При небольших отклонениях от параллельности на рамки будет действовать вращательный момент, рамки повернутся так, чтобы их магнитные моменты стали параллельны, и, следовательно, станут притягиваться.

2.7. Пружина сожмется из-за притяжения между соседними витками. Величину сжатия можно оценить, зная, что область, занятая магнитным полем (считаем, что все поле сосредоточено внутри пружины), уменьшится и эта энергия перейдет в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$\Delta U_{\text{магн}} = \Delta U_{\text{упр}}. \quad (1)$$

$U_{\text{магн}}$ найдем, используя результаты примера IV:

$$\Delta U_{\text{магн}} = \frac{B^2}{2\mu_0} S \Delta x, \quad (2)$$

где Δx — изменение длины пружины, B — величина индукции внутри пружины и S — площадь ее сечения.

$$U_{\text{упр}} = k \frac{(\Delta x)^2}{2} \quad (3)$$

(см. «Механика», стр. 97). Подставляя значения изменения энергии (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2 S \Delta x = k \frac{(\Delta x)^2}{2}.$$

Поле B для соленоида равно

$$B = \mu_0 I \frac{n}{l}, \quad \text{а} \quad S = \pi r^2.$$

Отсюда

$$\Delta x = \frac{B^2 S}{\mu_0 k} = \frac{\pi r^2 n^2 \mu_0 I^2}{l^2 k}.$$

2.8. В качестве модели используем замкнутую проводящую нить с постоянным током, помещенную в однородное магнитное поле, и сделаем все необходимые для доказательства предположения. Нить должна быть нерастяжимой, чтобы ее периметр не изменялся, однородной, гибкой и невесомой (невесомость нужна для того, чтобы можно было пренебречь силами тяжести по сравнению с электромагнитными силами).

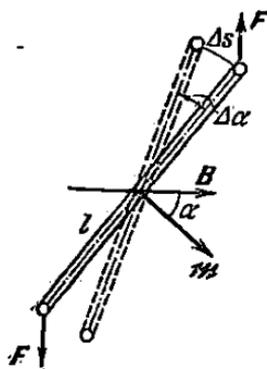


Рис. 2.32.

Какую форму примет такая идеальная нить в положении равновесия? Так как нить замкнута, то такая система обладает магнитным моментом $m = IS$, где I — ток, текущий по нити, а S — площадь фигуры, ограниченной нитью. Можно доказать, что в устойчивом равновесии контур с магнитным моментом m в однородном магнитном поле B обладает энергией $U = -mB$. Рассмотрим такой контур в однородном магнитном поле B , причем угол между B и m пусть равен α . В таком положении на него действует момент сил $M = mB \sin \alpha$ (см. пример II). При повороте контура на угол $\Delta\alpha$ (рис. 2.32) его энергия изменится, при этом $\Delta U = -A$, где A — работа, совершенная обеими силами, действующими на контур:

$$A = 2F \Delta s \sin \alpha = -2F \frac{l}{2} \Delta \alpha \sin \alpha = Fl \sin \alpha \cdot \Delta \alpha = \\ = -M \Delta \alpha = -mB \sin \alpha \cdot \Delta \alpha$$

(знак «минус» появился из-за того, что в нашем случае $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 < 0$). Но $\sin \alpha \cdot \Delta \alpha = -\Delta \cos \alpha$ *).

Таким образом,

$$A = mB \Delta \cos \alpha = -\Delta U, \quad -\Delta U = -(U_2 - U_1) = \\ = (mB \cos \alpha_2 - mB \cos \alpha_1).$$

Отсюда $U = -mB \cos \alpha$. Так как в положении устойчивого равновесия $\alpha = 0$ (см. пример II), то $\cos \alpha = 1$ и $U = -mB$.

* Это легко показать: $\Delta \cos \alpha = \cos(\alpha + \Delta \alpha) - \cos \alpha = \cos \alpha \cos \Delta \alpha - \sin \alpha \sin \Delta \alpha - \cos \alpha$.

Так как $\Delta \alpha$ мало, то $\cos \Delta \alpha \approx 1$, а $\sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha$ и $\Delta \cos \alpha \approx -\sin \alpha \Delta \alpha$.

Из принципа минимальности энергии следует, что любая система стремится в такое положение, при котором ее энергия минимальна. Для того чтобы энергия нити в магнитном поле B была наименьшей возможной, необходимо, чтобы у нити был максимальный магнитный момент ($U < 0$, и чем больше $|U|$, тем меньше энергия), а при заданном токе это возможно, если площадь контура будет наибольшей. Итак, в положении устойчивого равновесия площадь фигуры, ограниченной нитью, наибольшая.

Так как нить совершенно однородна, т. е. ее упругость одинакова по всей длине, величина тока не меняется от точки к точке и нить находится в однородном магнитном поле в равновесии, то отсюда следует, что фигура, ограниченная контуром нити, не имеет ни одного выделенного направления. Существует лишь одна фигура с таким свойством — это окружность. И как было доказано выше, эта фигура — окружность — имеет при заданном периметре наибольшую возможную площадь.

2.9. Пусть суммы, которой обладает покупатель, хватает на покупку участка с длиной забора l , и пусть масштаб плана $1 : M$. Покупатель должен закрепить в тех точках плана, где расположены деревья, маленькие колечки и пропустить через них замкнутую гибкую, нерастяжимую проводящую нить длиной l/M . Затем пустить по нити ток (обязательно постоянный) и всю эту систему поместить в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости плана и совпадающее по направлению с магнитным моментом нити. Тогда, как было показано в предыдущей задаче, нить в положении равновесия примет такую форму, что ограниченная ею площадь будет наибольшей возможной (в соответствии с требованием максимальности $m = IS$). Теперь осталось перенести на план полученный контур забора.

2.10. Трубка, из которой выкачан воздух, сплющивается атмосферным давлением. Следовательно, по трубке нужно пропустить такой ток I , чтобы его магнитное поле B создавало давление, по меньшей мере равное атмосферному:

$$P = \frac{B^2}{2\mu_0} = P_{\text{атм}}, \quad I = \frac{2\pi RB}{\mu_0} = \frac{2\pi R}{\mu_0} \sqrt{2\mu_0 P_{\text{атм}}}$$

2.11. Все магнитное поле сосредоточено внутри цилиндра, так как во внешнем пространстве наружный и

внутренний проводники создают одинаковое по величине и противоположно направленное поле. Рассмотрим сначала характер равновесия внутреннего проводника при условии $r \ll R$.

Предположим, что какой-нибудь участок проводника под действием малого возмущения слегка изогнется (рис. 2.33, а). Тогда справа от искривленного участка плотность силовых линий магнитного поля (а следова-

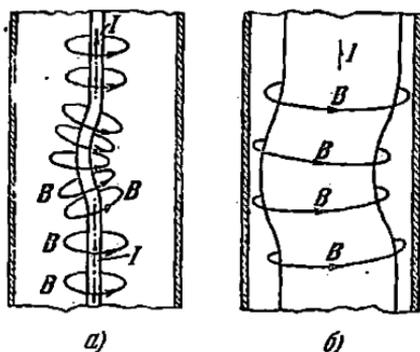


Рис. 2.33.

тельно, и магнитное давление) увеличится, а слева уменьшится. Возникнет разность давлений, которая будет изгибать внутренний проводник до соприкосновения с внешним. Равновесие неустойчивое. При этом мы пренебрегли небольшим изменением плотности магнитных силовых линий в остальном объеме цилиндра так как $r \ll R$.

Рассмотрим случай $r \approx R$. Теперь достаточно небольшого искривления внутреннего проводника, чтобы заметно уменьшить зазор между проводниками. Так как общее число силовых линий не меняется, то их плотность возрастет слева от искривленного участка (рис. 2.33, б). Возникнет сила, возвращающая проводник к центру. Равновесие будет устойчивым.

2.12. Прямолинейное движение будет неустойчивым, так как сила Лоренца, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, равна нулю лишь в том случае, если угол между скоростью заряда v и полем B равен нулю. При появлении хотя бы очень небольшой составляющей скорости, перпендикулярной к B (в результате какого-либо возмущения), на заряд начнет действовать сила $qv_{\perp}B$, и заряд, сохраняя поступательное движение, начнет вращаться вокруг силовой линии, т. е. будет двигаться по спирали. Однако радиус спирали будет оставаться постоянным до следующего воздействия на заряд, приводящего к изменению v_{\perp} . Так как изменение траектории движения происходит лишь в течение времени, когда за-

ряд испытывает внешнее воздействие, то можно сказать, что движение будет безразлично-устойчивым.

2.13. Для решения задачи запишем уравнения движения в этих полях:

- 1) $ma = mg, \quad a = g;$
- 2) $ma = qE, \quad a = \frac{q}{m} E;$
- 3) $ma = q[v, B], \quad a = \frac{q}{m} [v, B].$

Отсюда видно, что в гравитационном поле траектория вообще не зависит от вида частицы, в электрическом определяется отношением заряда частицы к ее массе, в магнитном поле зависит от q/m .

2.14. Ошибка заключается в том, что шарик, двигаясь по замкнутой траектории в электрическом поле, не изменяет энергии, так как поле не совершает над ним работы.

Автор не учел, что поле вне промежутка между пластинами будет тормозить шарик как раз настолько, насколько ускоряет его поле внутри пластин.

2.15. Электрон в однородном магнитном поле движется по винтовой линии, ось которой совпадает с силовой линией магнитного поля (см. стр. 96). Можно считать, что винтовая линия навита на поверхность прямого цилиндра, основанием которого служит окружность, являющаяся проекцией траектории электрона на плоскость экрана.

Если цилиндрическую поверхность развернуть на плоскость, то траектория S электрона, образующая цилиндра l и основание образуют прямоугольный треугольник с углом α между S и l : Следовательно, $S = l/\cos \alpha$.

2.16. Электроны в магнитном поле будут двигаться по окружностям, радиусы которых определяются из условия

$$\frac{mv^2}{R} = evB,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{eB} \quad \text{или} \quad R = \frac{\sqrt{2Tm}}{eB} \quad \text{и} \quad T = \frac{R^2 e^2 B^2}{2m}.$$

Так как центры всех окружностей лежат на прямой OO' , то из области, занимаемой полем, вылетят только те электроны, для которых выполняется строгое неравенство

$$R > d \quad \text{или} \quad R^2 > d^2,$$

т. е. такие электроны, у которых кинетическая энергия

$$T > \frac{d^2 e^2 B^2}{2m} \quad (1)$$

Угол φ , на который отклоняются электроны, определяется из треугольника OAB (рис. 2.34): $\sin \varphi = \frac{d}{R}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} l &= AO' + CD = R(1 - \cos \varphi) + L \operatorname{tg} \varphi = \\ &= R - R \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}} + \frac{Ld}{\sqrt{R^2 - d^2}} = \\ &= R - \sqrt{R^2 - d^2} + \frac{Ld}{\sqrt{R^2 - d^2}}. \end{aligned}$$

Чтобы получить отклонение, соответствующее данной кинетической энергии T_0 , нужно в последнюю формулу подставить вместо R величину

$$R_0 = \frac{\sqrt{2T_0 m}}{eB}.$$

В итоге получим

$$l_0 = \frac{\sqrt{2T_0 m}}{eB} - \frac{\sqrt{2T_0 m - e^2 B^2 d^2}}{eB} + \frac{Ld}{\sqrt{2T_0 m - e^2 B^2 d^2}}.$$

Если $e^2 B^2 d^2 \geq 2T_0 m$, то полученное выражение теряет смысл, что согласуется с (1).

2.17. При увеличении скорости увеличиваются магнитные силы притяжения между частицами.

2.18. На рис. 2.35 изображено сечение витка вертикальной плоскостью и силовые линии магнитного поля, лежащие в этой плоскости. Рассмотрим силы, действующие на частицу, пролетающую параллельно

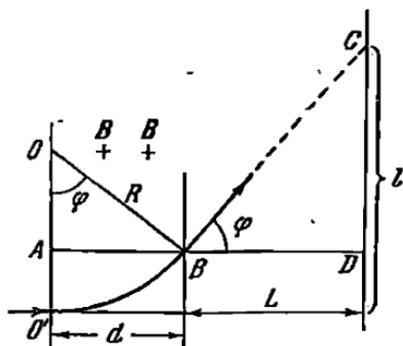


Рис. 2.34.

но оси витка. В каждой точке траектории вектор \mathbf{B} можно разложить на две составляющие: направленную вдоль

траектории по касательной к ней B_{κ} и нормальную к траектории B_{μ} . Для точек, расположенных в левой части рисунка, составляющая B_{κ} будет приводить к тому, что частицы начнут отклоняться за плоскость чертежа. Тогда составляющая B_{μ} приведет к возникновению силы Лоренца, направленной к оси витка.

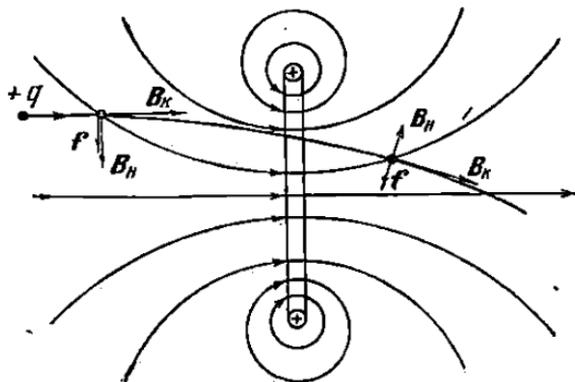


Рис. 2.35.

В правой части рисунка направление B_{μ} изменится на обратное. Составляющая скорости частицы, направленная за плоскость чертежа, будет уменьшаться, а фокусирующее действие линзы — ослабевать.

В целом же все движущиеся частицы будут стремиться собраться к оси витка. Такое фокусирующее устройство называется магнитной линзой.

2.19. Движение электрона в магнитном поле можно представить в виде двух независимых движений: равномерного движения по окружности вокруг силовой линии со скоростью $v_{\perp} = v_0 \sin \alpha$ и равномерного движения вдоль силовой линии со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$. Так как движение электрона по окружности замкнуто, то именно оно определит создаваемый им магнитный момент.

Среднее значение тока, создаваемого вращающейся частицей, равно $I = e/T$, где T — период обращения и e — ее заряд. Или

$$I = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev_{\perp}}{2\pi R};$$

здесь ω — угловая скорость, R — радиус орбиты.

Магнитный момент электрона равен

$$m = IS = \frac{ev_{\perp} \pi R^2}{2\pi R} = \frac{ev_{\perp} R}{2}.$$

Радиус найдем из условия равенства центростремительной силы и силы Лоренца:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = ev_{\perp} B, \quad \text{откуда} \quad R = \frac{mv_{\perp}}{eB}.$$

Окончательно получим

$$m = \frac{v_{\perp}^2 m}{2B}. \quad (1)$$

Так как направление магнитного момента совпадает с направлением поля, создаваемого им самим, а оно противоположно внешнему, то равенство (1) можно переписать в векторном виде

$$m = -\frac{v_{\perp}^2 m}{2B^2} B.$$

Отметим, что магнитный момент частицы в магнитном поле не зависит от ее заряда.

2.20. Пусть позитрон движется в плоскости

xy , перпендикулярной к направлению магнитного поля B , выбранному за ось z . Будем считать, что вектор B направлен вниз, перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 2.36, а). Электрическое поле E направим по оси y , а скорость позитрона v — по оси x . В отсутствие электрического поля позитрон двигался бы по окружности в плоскости xy в направлении по часовой стрелке (рис. 2.36, б). Электрическое поле будет искажать круговую траекторию частицы. При движении по левой полуокружности, т. е. вдоль поля, позитрон набирает скорость, а при движении по правой теряет.

Следовательно, двигаясь в верхней полуокружности, позитрон сначала ускоряется, потом замедляется, а в ниж-

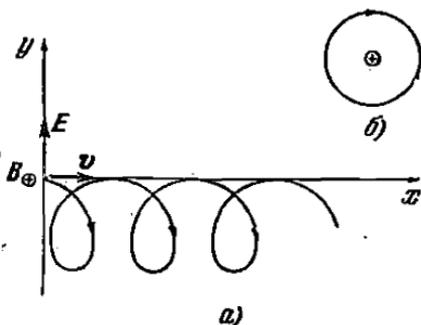


Рис. 2.36.

ней полуокружности наоборот, поэтому средняя скорость движения по верхней полуокружности больше, чем по нижней. Из соотношения

$$\dot{R} = \frac{mv}{eB}$$

(см. предыдущую задачу) следует, что радиус движения тем больше, чем больше скорость, и, следовательно, магнитное поле на нижней полуокружности будет изгибать траекторию позитрона больше (так как R меньше), чем на верхней. При этом проекция пути позитрона на ось x в верхней полуокружности будет больше, чем в нижней, и после каждого оборота позитрон будет смещаться на некоторое расстояние вдоль оси x (см. рис. 2.36).

Смещения по оси y не будет, так как средняя скорость движения по левой полуокружности равна средней скорости движения по правой полуокружности. Общий вид траектории позитрона показан на рис. 2.36.

2.21. Рассмотренный в предыдущей задаче пример движения электрона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях показывает, что принцип независимости движений в этом случае не выполняется.

Мы не можем рассчитывать такое движение так же, как мы рассчитывали в механике движение тела, брошенного под углом к горизонту, или движение электрона в конденсаторе.

Нельзя, например, учитывая сначала только действие электрического поля, вычислить координату y в некоторый момент времени, а затем учесть магнитное поле и вычислить в тот же момент координату x . Как нам уже известно из предыдущей задачи, такой метод расчета траектории приведет к совершенно неверному результату. В чем же здесь дело?

Ответ заключается в том, что принцип независимости движений является следствием принципа независимости действия сил; гравитационная и электрическая силы, действующие на электрон в конденсаторе, независимы. Отсюда и независимость движений. Магнитная же сила неявным образом зависит от электрической, так как электрическое поле изменяет скорость электрона, а магнитная сила зависит от скорости.

Существенно, что такая зависимость сил не подрывает принципа суперпозиции полей, утверждающего,

что поле от некоторого источника в данной точке не зависит от присутствия в данной точке других полей (от другого источника или другой природы).

2.22. В этой модели электрон вращается со скоростью $v = 22 \cdot 10^5$ м/сек вокруг ядра (протона). Радиус орбиты $R = 5 \cdot 10^{-11}$ м (см. задачу 1.13). Магнитный момент такой системы

$$m = evS \frac{1}{l} = ev \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{evr}{2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \kappa \cdot 22 \cdot 10^5 \text{ м/сек} \cdot 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}}{2} \approx \approx 0,9 \cdot 10^{-23} \kappa \cdot \text{м}^2/\text{сек} = 0,9 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/тл.}$$

2.23. 1) Энергия взаимодействия частиц в позитронии есть в основном электростатическая энергия. Можно оценить величину магнитного взаимодействия и убедиться, что она мала по сравнению с кулоновскими силами. Действительно,

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_{\text{магн}}} = \frac{c^2}{v^2} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{484 \cdot 10^{10}} \gg 1.$$

Эта энергия равна e^2/r . Отсюда видно, что расстояние между частицами в позитронии в два раза больше среднего радиуса атома водорода.

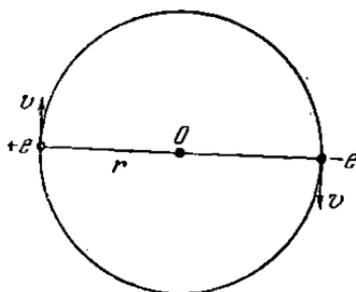


Рис. 2.37.

Таким образом, вращающиеся позитрон и электрон — это два тока, имеющие одинаковую величину и противоположные направления (заряд электрона $-e$, а позитрона $+e$). Суммарный магнитный момент таких токов равен нулю.

2.24. Предположим, что дипольный момент нейтрона \vec{d} не равен нулю. Тогда вектор \vec{d} должен быть направлен по или против магнитного момента нейтрона, так как этот

магнитный момент создает в системе координат, где нейтрон покоится, единственное выделенное направление. Пусть для определенности \vec{d} совпадает по направлению с n , и тогда это является фундаментальным свойством частицы.

Предположим далее, что мы изменили знак времени. Это значит, что в каком-то процессе с участием нейтрона рассматривается обратная последовательность состояний. В этом случае магнитный момент нейтрона изменит знак, так как изменится направление создающих его токов. Электрический же дипольный момент не изменит знака. Это видно из выражения для дипольного момента:
$$\vec{d} = \sum_i \Delta q_i \vec{r}_i.$$

Мы получили, что путем изменения знака времени можно сделать из частицы нейтрона некоторую новую частицу, обладающую другими фундаментальными свойствами (\vec{d} антипараллелен n) и по-другому взаимодействующую с электрическим и магнитным полем. При обратной последовательности состояний частицы уже не будут вести себя в поле, как нейтрон.

Остается сделать вывод, что \vec{d} нейтрона равен нулю.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Электромагнитная индукция

Мы рассмотрели магнитное поле, создаваемое движущимися зарядами. Естественно, возникает вопрос — может ли осуществиться обратная ситуация? Т. е. если проводник поместить в магнитное поле, то будет ли по нему идти ток? Нетрудно догадаться, что этого не будет. Маг-

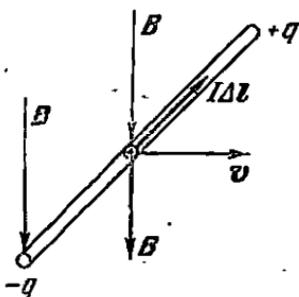


Рис. 3.1.

нитная сила действует на заряды только тогда, когда они движутся*).

Поэтому, для того чтобы магнитное поле вызвало движение зарядов относительно проводника (ток), необходимо перемещать проводник как целое.

Поясним это на примере.

Пусть в однородное магнитное поле B помещен прямолинейный отрезок проводника. Будем двигать его перпендикулярно к силовым линиям, так, как это показано на рис. 3.1. В этом случае под

действием магнитной силы заряды начнут передвигаться вдоль проводника перпендикулярно к направлению движения и к вектору поля B .

Направление тока легко установить по выражению для силы, действующей на заряд: $F = q [v, B]$, где v — скорость перемещения проводника. Ток будет течь до тех пор, пока на концах проводника не образуются заряды

*) При рассмотрении реальных проводников следовало бы учитывать тепловое движение зарядов. Но из-за его хаотичности заранее ясно, что средняя скорость такого движения равна нулю.

противоположного знака. Они создадут электрическое поле E , направленное против F . В конце концов электрические и магнитные силы друг друга уравновесят, и движение зарядов прекратится.

В этот момент $E = -\frac{F}{q} = -[v, B]$.

В этом опыте заряды накапливаются на концах проводника. Но вполне можно представить себе случай, когда у проводника концов нет, т. е. в магнитном поле перемещается замкнутый контур.

Выберем в качестве такого контура прямоугольную рамку и будем двигать ее так, чтобы плоскость рамки была перпендикулярна к силовым линиям однородного поля B , в котором и происходит движение (рис. 3.2). В соответствии с тем, что мы уже знаем, ток потечет по стороне ab от a к b , а по стороне dc от d к c . Две другие стороны можно исключить из рассмотрения, так как сила, действующая на заряды, расположенные в них, перпендикулярна к проводу, и заряды двигаться некуда.

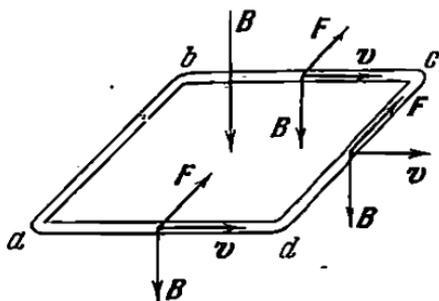


Рис. 3.2.

Так как токи в сторонах ab и dc текут навстречу друг другу, они приведут к накоплению заряда, и замкнутый ток по рамке не пойдет.

Величина э.д.с. *), т. е. $\sum E_l \Delta l$ вдоль рамки равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum E_l \Delta l &= E_{ab} l_{ab} + E_{bc} l_{bc} + E_{cd} l_{cd} + E_{da} l_{da} = \\ &= (E + 0 + (-E) + 0) \Delta l = 0. \end{aligned}$$

Отметим еще тот важный для дальнейших рассуждений факт, что общее число силовых линий, т. е. поток магнитного поля, пронизывающий контур, при движении не меняется, так как поле однородно.

*) См. § 10.

Продолжая двигать рамку в том же направлении, можно дождаться момента, когда сторона dc выйдет из области, занимаемой полем. Поток магнитного поля через площадь рамки начнет уменьшаться. В этом случае сила, действовавшая на заряды, принадлежащие стороне dc , исчезнет, и заряды, движущиеся от a к b , ничто теперь уравновешивать не будет. По рамке пойдет замкнутый ток. Представим себе обратную ситуацию. Рамка лежит неподвижно, а мы на нее надвигаем соленоид, создающий однородное поле. Так как наши результаты зависят от относительного движения рамки и соленоида, то и в этом случае по рамке пойдет ток. Какую же картину мы будем наблюдать? Заряды, первоначально покоившиеся, в момент, когда рамка начнет пересекать силовые линии магнитного поля, придут в движение.

Мы уже знаем, что магнитное поле не влияет на покоящиеся заряды, начало их движения можно объяснить только возникновением в пространстве электрического поля, некоторого нового поля, не связанного с зарядами.

Напряженность этого поля E должна обеспечить действие на один заряд силы

$$F = qE = -q[v, B].$$

Найдем величину э.д.с. в этом случае:

$$\begin{aligned} \sum E \Delta l &= E_{ab} \Delta l_{ab} + E_{bc} l_{bc} + E_{cd} l_{cd} + E_{da} l_{da} = \\ &= E_{ab} l_{ab} + 0 + 0 + 0 = E_{ab} \Delta l = vB \Delta l. \end{aligned}$$

С другой стороны, скорость $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где Δx — смещение рамки за время Δt . Тогда

$$\sum E \Delta l = \frac{B \Delta x \Delta l_{ab}}{\Delta t},$$

но произведение $\Delta x \Delta l_{ab} = \Delta S$, т. е. равно изменению площади, пронизываемой магнитным потоком, а $\Delta SB = \Delta(SB) = \Delta \Phi$ есть изменение самого магнитного потока за время Δt :

$$\sum E \Delta l = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Мы пришли к важному результату — при изменении магнитного потока через контур в этом контуре начинает идти ток (его часто называют индуцированным, т. е. на-

веденным током). Он обязан своим возникновением электрическому полю. Величина э.д.с. этого поля зависит от скорости изменения магнитного потока. Силовые линии этого поля замкнуты, так как нет зарядов, вызывающих его. Такое поле мы будем называть вихревым.

Здесь остается не выясненным вопрос о том, как связать уменьшение или увеличение потока с направлением возникающего электрического поля.

Это можно сделать, используя закон сохранения энергии. Действительно, ток, возникающий за счет э.д.с. индукции, сам является источником магнитного поля. Рассмотрим, например, случай, когда внешний магнитный поток увеличивается. Тогда поле индуцированного тока может либо «помогать» этому увеличению, либо «мешать» ему. Закон сохранения энергии позволяет сделать однозначный выбор между этими двумя возможностями.

Если бы индуцированное магнитное поле «помогало» расти магнитному потоку через контур, то тем самым увеличивался бы индукционный ток, что вызвало бы увеличение первоначального магнитного поля, новое увеличение потока через контур и т. д. до бесконечности. Ясно, что такой «саморазгон» противоречит закону сохранения энергии.

Этот результат был сформулирован Ленцем в виде следующего правила: *возникающий в контуре ток имеет такое направление, что созданный им самим магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, направлен таким образом, что стремится компенсировать изменение потока внешнего магнитного поля.*

Теперь видно, что в равенстве (3.1) надо поставить знак минус

$$\sum E \Delta l = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

§ 2. Некоторые следствия из закона электромагнитной индукции

Мы впервые столкнулись с электрическим полем, появление которого нельзя связать ни с какими зарядами. До сих пор поле это было некоторой математической абстракцией, удобной для описания взаимодействия зарядов и токов. В данном же случае мы приписываем появление одного поля — электрического — изменению другого

поля — магнитного. Это наводит на мысль, что поле само по себе является физической реальностью.

Знаменитые опыты английского физика М. Фарадея показали, что соотношение (3.2) остается верным всегда независимо от причины, вызывающей изменение магнитного потока.

Деформируем ли мы контур, двигаем ли его в неоднородном поле, меняем ли величину поля при неподвижном контуре, закон этот, названный законом электромагнитной индукции Фарадея, остается в силе. Это еще более утверждает в мысли, что электромагнитные явления определяются поведением полей и не зависят от способа их возбуждения.

Например, известно, что магнитное поле можно создать постоянным магнитом. И в этом случае закон Фарадея остается в силе, т. е. важно именно поле, а не характер источника.

Теперь мы видим, что все три предположения, сделанные в конце предыдущей главы, полностью подтвердились. А состояли они в следующем:

1. Между электрическими и магнитными явлениями существует глубокая связь. Количественно она выражается законом Фарадея.

2. Магнитному полю можно приписать плотность энергии $u = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

3. Понятие поля приобретает все более глубокий смысл.

К фундаментальному вопросу о реальности поля мы перейдем в следующем параграфе.

§ 3. Реальность поля

Начнем этот параграф с некоторого мысленного эксперимента. Пусть пробный заряд находится в поле двух одинаковых по величине, но разных по знаку зарядов, т. е. в поле диполя. В какой-то момент времени мы сводим заряды источника вместе и нейтрализуем их. Ясно, что поле изменится.

Как же будет происходить такое изменение? Как «узнает» пробный заряд о событиях с зарядами-источниками? Очевидно, возможны два ответа.

Первый состоит в том, что при любых изменениях, происходящих с источником, мгновенно меняется его поле

во всех точках пространства. Сдвинем немного один заряд, и сразу же другой почувствует изменение силы, которая на него действовала, как бы далеко он ни находился. Другими словами, мы можем сказать, что сигнал передается от одного заряда к другому с бесконечно большой скоростью. Заряды непосредственно взаимодействуют между собой, а поле — это только удобный математический прием для описания этого взаимодействия. Можно поле вводить, а можно и не вводить.

Но возможно и другое предположение. Вот мы свели заряды вместе и нейтрализовали, а пробный заряд почувствует это не в тот же момент времени, а позднее. Сначала изменится электрическое поле в непосредственной близости от зарядов-источников, затем это изменение будет распространяться от одной точки пространства к другой, пока не дойдет до пробного заряда. И чем дальше он находится от точки, где произошла нейтрализация, тем через большее время он «почувствует», что она произошла.

Во втором случае полю отводится куда более значительная роль и уже не математическая, а физическая.

Описание взаимодействия тел с помощью представления о мгновенном распространении сил носит название теории дальнего действия. В этом случае мы должны считать, что энергия системы зарядов или токов может быть приписана полю лишь формально.

Представление о конечной скорости распространения взаимодействия предполагает, что заряд «чувствует» изменение поля, только если оно происходит в точках пространства, непосредственно окружающих заряд. Такое взаимодействие называется ближним действием.

Изменение переходит от одной точки поля к другой, распространяется в пространстве и, только дойдя до пробного заряда, как-то воздействует на него.

Если пробный заряд представлял, скажем, заряженный шарик, растягивающий пружину динамометра, которым мы мерили силу взаимодействия источников и пробного заряда, то мы наблюдаем интересную вещь: уже источников нет, а динамометр все еще некоторое время растянут.

Кто же сообщает шарiku энергию, из-за которой он растягивает пружину?

Поле, существующее без источников! Оно производит вполне ощутимые физические действия, обладает энергией.

Из представления о близкодействии следует также, что поле обладает импульсом.

Если заряды-источники сдвинулись, то их импульс изменился. Передать этот импульс они могут только полю, а уж оно в свою очередь передаст его пробному заряду.

Итак, поле — такая же физическая реальность, как и тела. Оно реально существует вне нас и независимо от нас, а не является выдуманной для удобства математической абстракцией. Поле — это форма существования материи.

Многие эксперименты доказывают, что правильна вторая точка зрения. О них еще будет речь впереди. Теперь же ограничимся тем, что приведем значение скорости распространения сигнала в электрическом поле. Скорость эта обозначается буквой c и равна

$$c = \frac{r}{t} \approx 300\,000\,000 \text{ м/сек} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек},$$

(r — расстояние от источника до пробного заряда, t — время прохождения сигнала). Конечно, такая скорость огромна. Вот почему мы вполне можем во многих задачах считать распространение взаимодействия мгновенным.

Фундаментальные законы, которые мы рассматривали, и закон Кулона, и закон для магнитных сил предполагали мгновенное распространение взаимодействия. Это выражается тем, что время в явном виде в законы эти не входит.

Вместе с тем, если с источником произошли какие-то изменения, то пробный заряд или пробный ток, находящийся на расстоянии r , может узнать об этом изменении только через время $t = r/c$. В законах же это никак не отражается. Именно поэтому мы везде договаривались, что будем рассматривать только малые скорости движения. Теперь ясно, что под малыми скоростями мы понимали скорости $v \ll c$. Здесь, конечно, надо учитывать, что заряд, летящий со скоростью даже 1000 км/сек , вполне можно считать медленным.

Поскольку поля так же реальны, как заряды, то мы должны предсказывать не только поведение частиц, но и поведение полей.

Для описания движения заряженного тела мы использовали уравнения движения. С их помощью по начальному состоянию и заданным силам можно найти все последующие состояния в любой момент времени.

Какой же смысл вкладываем мы в понятие начального состояния и уравнений движения для поля?

Поле занимает все пространство. Поэтому, для того чтобы задать его начальное состояние, надо задать значение поля в каждой точке пространства в некоторый — **н а ч а л ь н ы й** — момент времени.

Уравнения движения для полей должны нам дать возможность определить поле во всем пространстве во все последующие моменты времени.

Конечно, в реальных задачах мы не можем задать поле во всем бесконечном пространстве, поэтому приходится прибегать к дополнительным условиям. Нужно или задать поле в конечном объеме и задать условия на границах данного объема, которые можно найти из физических соображений, или предположить определенный закон убывания поля на бесконечности

Написать уравнения движения для поля и, главное, научиться их решать и понимать — задача очень трудная и с точки зрения математики, и с точки зрения физики. Но, хотя бы качественно и далеко не во всех деталях, сделать мы это должны.

Это и будет составлять программу наших дальнейших действий.

§ 4. Система уравнений электромагнитного поля

Прежде чем сформулировать уравнения движения полей, напомним важнейшие сведения об электрическом и магнитном полях. И, кроме того, выберем из них те, которые верны как в случае постоянных, так и в случае переменных полей.

Этих основных законов и положений не так уж много. Перечислим их.

1. В пространстве вокруг заряженного тела существует электрическое поле. Это поле действует на другие заряженные тела.

2. Если область пространства, в которой находятся заряды ограничить поверхностью, то число силовых линий, проходящих через эту поверхность (поток напряженности поля E , который мы обозначим через Ψ), будет пропорционально величине заряда, заключенного в

этой области:

$$\Psi = \sum_{\Delta S_i} E_n \Delta S_i = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

Это есть уже хорошо известная нам теорема Гаусса для статического поля.

Действительно, так как все силовые линии статического поля начинаются и кончаются на зарядах, то замкнутую поверхность будет пересекать как раз такое их число, которое пропорционально помещенному внутрь заряду. Но в этой главе мы столкнулись с тем, что существует электрическое поле, которое не связано ни с какими зарядами, — индуцированное поле. Выполняется ли для него теорема Гаусса?

Конечно, выполняется. С одной стороны, для индуцированного поля $\sum_i q_i = 0$, с другой стороны, его силовые линии замкнуты, и сколько их входит в какой-то объем, столько должно и выходить, т. е. $\sum_{\Delta S_i} E_n \Delta S_i = 0$.

Таким образом, теорема Гаусса выполняется для всех известных нам электрических полей.

3. Движущийся заряд, кроме электрического поля, создает и магнитное. Это поле действует в свою очередь только на движущиеся заряды.

4. Силовые линии магнитного поля замкнуты или уходят на бесконечность. Поэтому поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi = \sum_{\text{по замкнутой поверхности}} B_n \Delta S_i = 0.$$

5. Если движение заряда — ток — вызывает магнитное поле, то при изменении потока магнитного поля через какой-либо контур, возникает электрическое поле. Для в.д.с. этого поля мы нашли выражение

$$\sum E \Delta l = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{\Delta [\sum B_n \Delta S_i]}{\Delta t} \quad (3.2')$$

(не нужно думать, что согласно п. 4 и для уравнения (3.2') $\sum B_n \Delta S_i = 0$, ведь поверхность, ограниченная контуром, не замкнута!).

В случае статического поля это соотношение тоже выполняется. Ведь для такого поля работа по перенесению заряда q вдоль замкнутой траектории равна нулю, т. е. $q \sum E \Delta l = 0$. В свою очередь, так как заряды не движутся, то и не создают магнитного поля: $B = 0$.

При выводе соотношения (3.2) мы в качестве контура пользовались рамкой. Но ведь поле реально, значит, присутствие рамки вовсе не обязательно. Индуцированное поле E будет возникать при изменении магнитного потока, пронизывающего любой мысленный контур.

А как может изменяться магнитный поток, через мысленный контур? Конечно, не изменением формы контура, иначе мы смогли бы вызывать появление электрического поля одними волевыми усилиями, представляя себе деформирующийся контур. В этом случае изменение потока может достигаться только за счет изменения магнитного поля.

Нас этот случай и интересует, так как для написания уравнений движения полей надо связать между собой именно их изменения. Итак,

$$\sum E \Delta l = - \sum_{\text{по заданному контуру}} \Delta S_i \frac{\Delta B_{n_i}}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Изменяющееся магнитное поле рождает вихревое электрическое.

6. М.д.с. для магнитного поля постоянных токов связана с током, пронизывающим контур соотношением

$$\sum B \Delta l = \frac{1}{c^2} \frac{I}{\epsilon_0}.$$

Теперь можно написать систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum E_n S_i &= \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}, & 3. \quad \sum E \Delta l &= - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_{n_i}}{\Delta t}, \\ 2. \quad \sum B_n S_i &= 0, & 4. \quad \sum B \Delta l &= \frac{I}{c^2 \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если внимательно присмотреться к этим уравнениям, то можно заметить некоторое неравноправие электрического и магнитного полей. Ну, прежде всего, то неравноправие, которое вызвано существованием электрических зарядов и отсутствием магнитных. Но кроме того, есть и еще одна непонятная вещь, уже целиком связанная с полями.

Если переменное магнитное поле индуцирует электрическое, то для появления магнитного поля обязательно необходим движущийся заряд. Ну, а если индуцированное вихревое поле \mathcal{E} меняется, когда никакого заряда нет, не возникает ли вокруг него индуцированное магнитное поле?

Из написанных уравнений не вытекает существование такого эффекта. Поэтому возникает альтернатива: либо мы полностью «доверяем» уравнениям, и тогда нарушается красивая симметрия электрического и магнитного полей, либо мы по-прежнему исходим из симметрии (ведь она уже не раз помогала нам в предыдущих рассуждениях), и тогда должны быть исправлены какие-то уравнения из системы (3.4).

Сразу бросается в глаза, что симметрию нарушает четвертое уравнение. Вместе с тем оно является «подозрительным» и по другой причине. Первые три уравнения описывают самый общий случай. Они годятся как для постоянных, так и для переменных полей. Последнее же уравнение мы взяли из теории магнитного поля постоянных токов.

Все опыты, которые лежат в основе этого уравнения, проводились либо с постоянными токами, либо с токами, мало отличающимися от постоянных. А вопрос о том, насколько пригодно это уравнение к быстропеременным полям, так и остался нерешенным.

§ 5. Ток смещения

Для того чтобы ответить на вопрос, поставленный в конце предыдущего параграфа, рассмотрим следующий опыт.

Имеется прямолинейный отрезок проводника, в котором возбуждается ток (рис. 3.3). Конечно, в этом случае ток может быть только переменным, так как контур у нас не замкнут. Заряды сначала текут от точки A к точке B ,

а затем от точки B к точке A . Происходит это изменение тока с достаточно большой частотой.

Нас здесь не будет интересовать вопрос о способе возбуждения такого тока. Важно лишь то, что подводящие провода никакого вклада в поле не дают, так как они расположены сколь угодно близко друг от друга, и в каждый

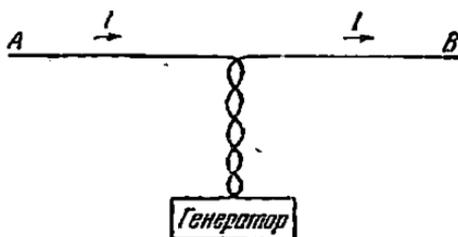


Рис. 3.3.

момент времени токи в них равны и противоположны по направлению. Поэтому мы вполне можем идеализировать задачу, представив себе просто отрезок AB , по которому идет ток, и использовать все свойства симметрии такой задачи.

Теперь рассмотрим два мысленных контура. Один из них имеет центр в точке O и охватывает провод с током (рис. 3.4). Второй включает в себя часть первого контура (дугу FC), две стороны его CD и EF параллельны проводнику AB и, наконец, замыкается он дугой DE , которая находится достаточно далеко от источника, так что мы можем считать, что магнитное поле в этой области близко к нулю. Тогда, используя четвертое уравнение полей для первого контура, мы получим .

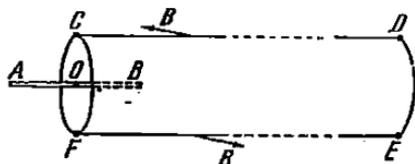


Рис. 3.4.

$$\sum_{\substack{\text{1-й} \\ \text{контур}}} B \Delta l = \frac{I}{c^2 \epsilon_0} .$$

В силу симметрии задачи, если вся сумма $\sum_{\substack{\text{1-й} \\ \text{контур}}} B \Delta l$

отлична от нуля, то и

$$\sum_{FC} B \Delta l \neq 0. \quad (3.5)$$

Можно даже утверждать, что $\sum_{FC} B \Delta l = \frac{1}{2} \frac{I}{c^2 \epsilon_0}$, но нам достаточно условия (3.5).

Стороны CD и FE перпендикулярны к B в каждой точке, и поэтому $\sum_{CD} B \Delta l + \sum_{EF} B \Delta l = 0$.

Кроме того, мы так выбрали контур, что

$$\sum_{DE} B \Delta l = 0.$$

Тогда получаем интересную ситуацию. С одной стороны,

$$\sum_{CDEF} B \Delta l \neq 0.$$

С другой стороны, никакой ток этот контур не пронизывает, т. е.

$$\frac{I}{e_0 c^2} = 0.$$

Итак, предположив справедливость уравнения 4 из (3.4) для переменных полей, мы пришли к противоречию.

Английский ученый Дж. К. Максвелл, исходя из симметрии между электрическим и магнитным полем, предложил дополнить четвертое уравнение. Оно стало выглядеть следующим образом:

$$\sum B \Delta l = \frac{1}{c^2} \left(\frac{I}{e_0} + \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \right), \quad (3.6)$$

где $\frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$ — изменение потока электрического поля, пронизывающего контур.

Как это уравнение понять? Прежде всего вспомним математическую запись закона Фарадея

$$\sum E \Delta l = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Последний член равенства (3.6) полностью аналогичен

этому закону, только с заменой E на B и потока магнитного поля Φ на поток электрического поля Ψ .

Как источником электрического поля может быть не только заряд, но и меняющееся магнитное поле, так и источником магнитного поля может быть не только ток. Достаточно в какой-то области пространства измениться электрическому полю; как это приведет к тому, что в контуре, помещенном в эту область, возникнет м.д.с., появится B , хотя никакой ток может контур и не пронизывать.

В последнем случае для мысленного контура изменение потока достигается изменением электрического поля.

Если S — поверхность контура, то

$$\frac{1}{c^2} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta \left[\sum E_{n_i} \Delta S_i \right]}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} \sum_i \Delta S_i \frac{\Delta E_{n_i}}{\Delta t},$$

где суммирование производится по всем элементам поверхности S .

Величина $\frac{\epsilon_0 \Delta E}{\Delta t}$ имеет размерность тока и эквивалентна обычному току в том смысле, что создает магнитное поле такое же, какое бы создавал реальный ток той же величины. Поэтому Максвелл назвал эту величину током смещения.

Теперь легко объяснить и предыдущий опыт. На концах провода появляются заряды: либо в точке A (см. рис. 3.4) возникает плюс, а в точке B — минус, либо наоборот.

Поток электрического поля Ψ через контур $CDEF$ непрерывно меняется. Поэтому для отыскания $\sum B \Delta l$, т. е. м.д.с. в этом контуре, надо учитывать не только член с током, но и $\frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$.

Окончательно система уравнений, записанная впервые Максвеллом, выглядит так:

$$\sum_{\text{по замкнутой поверхности}} E_n \Delta S_i = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0},$$

$$\sum_{\text{по замкнутому контуру}} E \Delta l = - \sum_{\text{по поверхности, натянутой на этот контур}} \Delta S_i \frac{\Delta B_{n_i}}{\Delta t},$$

$$\sum_{\text{по замкнутой поверхности}} B_n \Delta S_i = 0,$$

$$\sum_{\text{по замкнутому контуру}} B \Delta l = \frac{I}{c^2 \epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \sum_{\text{по поверхности, натянутой на этот контур}} \Delta S_i \frac{\Delta E_{n_i}}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Если в некоторой области пространства заряды и токи равны нулю, то уравнения для E становятся полностью аналогичными уравнениям для B :

$$\sum E_n \Delta S_i = 0, \quad \sum E \Delta l = - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_n}{\Delta t},$$

$$\sum B_n \Delta S_i = 0, \quad \sum B \Delta l = \sum \Delta S_i \frac{\Delta E_n}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

§ 6. Преобразование полей

Вся совокупность имеющихся у нас сведений об электрическом и магнитном полях объединена в уравнения Максвелла. Они правильно описывают все те явления, с которыми мы сталкивались до сих пор. Но правильная теория может предсказывать и новые явления. С этой точки зрения следует внимательно исследовать эти уравнения.

Однако, прежде чем к этому приступить, мы должны разрешить сомнение, которое могло возникнуть у читателя. Оно состоит в том, что утверждение о реальности поля вступает в кажущееся противоречие со «здравым смыслом».

В самом деле, покоящийся заряд создает только электрическое поле, а движущийся — и электрическое и магнитное. Но покой и движение понятия относительные и целиком зависят от выбранной нами системы отсчета. Отсюда следует, что наличие или отсутствие магнитного поля должны зависеть от системы отсчета. Ведь в одной системе заряд может покоиться, а в другой — двигаться.

Точно так же при переходе от одной системы отсчета к другой может меняться и электрическое поле. Чтобы пояснить, как это происходит, обратимся к примеру.

Из ускорителя вылетает узкий пучок заряженных частиц, движущихся с одинаковой скоростью *).

*) Всякому предполагается, что скорость частиц много меньше c .

Наблюдатель, неподвижный относительно ускорителя, своими приборами зафиксирует и электрическое и магнитное поля, создаваемые движущимися зарядами. В свою очередь он может воздействовать на пучок, установив на пути его движения соленоид или магнит. Когда пучок попадает в соленоид, в котором существует только магнитное поле, то частицы отклоняются.

Теперь представим себе второго наблюдателя, летящего вместе с частицами. В его системе отсчета пучок — это неподвижная заряженная нить, создающая только электрическое поле.

Если в распоряжении этого второго наблюдателя имеется соленоид, то он ничего с пучком сделать не сможет (ведь соленоид и пучок неподвижны относительно друг друга!).

Значит, магнитное поле частиц можно уничтожить выбором системы отсчета. В одной системе оно существует, в другой его нет. Как же это вяжется с реальностью поля?

Теперь можно показать, что и с электрическим полем дела обстоят не лучше. С помощью выбора системы отсчета можно «создать» электрическое поле, а сделав переход в прежнюю систему, вновь его «уничтожить».

Видно это из того же примера.

Первый наблюдатель (неподвижный относительно ускорителя) установил на пути пучка, перпендикулярно к нему, соленоид с однородным полем. Для простоты рассмотрим одну какую-либо частицу, влетающую в соленоид со скоростью v . Под действием силы Лоренца она начинает отклоняться и двигаться по окружности. Что же будет видеть второй наблюдатель, летящий со скоростью v . В его системе на первоначально покоящуюся частицу налетает соленоид. В момент, когда она проникает внутрь соленоида, покоящаяся частица начинает двигаться по какой-то кривой. Но на покоящуюся частицу может действовать только электрическое поле. Значит, в момент попадания частицы в соленоид второй наблюдатель зарегистрирует появление электрического поля.

Опять-таки возникает подозрение, что это противоречит представлению о реальности поля, так как существование реального объекта не может зависеть от системы отсчета.

Если же проанализировать описанные мысленные эксперименты глубже, можно убедиться, что противоречие

только кажущееся. Ведь ни в одном из этих экспериментов мы не могли выбором системы отсчета уничтожить одновременно и электрическое и магнитное поля. «Исчезновение» одного из них приводило к «появлению» другого, оказывающего точно такое же действие.

В последнем примере, когда мы разбирали поведение заряженной частицы, попадающей в соленоид с точки зрения наблюдателей, связанных с двумя системами отсчета, важно обратить внимание на следующее.

Если в системе отсчета, связанной с источником магнитного поля (соленоидом), это поле постоянно, то в другой системе оно становится переменным. С точки зрения наблюдателя, на которого налетает соленоид, магнитное поле возрастает за малый промежуток времени от нуля до конечной величины. В полном соответствии с уравнениями Максвелла в этот момент возникает электрическое поле.

Поэтому движущийся равномерно и прямолинейно наблюдатель (мы рассматриваем его движение вместе с зарядом только до тех пор, пока заряд не начал заворачивать, чтобы не иметь дело с неинерциальными системами отсчета) не может отличить с помощью любых физических опытов две ситуации.

Первая — он покоится, а на него надвигается источник поля, и соответственно в точке наблюдения поле переменное во времени. Вторая — он движется, налетая на покоящийся источник, и поле меняется с расстоянием, хотя во времени в каждой точке оно остается постоянным. Наблюдатель, попадая все время в точки с разными значениями поля, будет считать его переменным.

Невозможность различить собственное движение и движение источников поля является общим физическим принципом — п р и н ц и п о м о т н о с и т е л ь н о с т и. Поэтому наблюдатель может считать себя покоящимся, но просто находящимся в переменном поле. А раз поле переменное, то нельзя рассматривать порознь E и B . Об этом говорят уравнения Максвелла. Реальность — это совокупность электрического и магнитного полей — электромагнитное поле. Его уже нельзя уничтожить переходом ни в какую систему отсчета. В разных системах отсчета действие E и B по отдельности может быть различным, но их совместное действие — сила $F = qE + q[v, B]$ остается одной и той же.

Электрическое и магнитное поля — разные стороны одного и того же явления.

Представьте себе такую ситуацию. Три человека рассказывают о том, что они видят перед собой. Один говорит, что видит мультипликационный фильм. Второй — что перед ним ящик. Третий описывает сложное сплетение проводов. Каждый из них убежден, что картина, которую он видит, не имеет ничего общего с тем, что видят остальные. Взглянув на последнюю страницу обложки, можно им поверить. Они смотрят с разных сторон на один и тот же предмет — работающий телевизор.

Бессмыслен спор о том, что более реально — экран телевизора или его боковая сторона. Хотелось бы, чтобы такая чисто внешняя аналогия облегчила понимание этого достаточно трудного параграфа.

Теперь вернемся к исследованию уравнений Максвелла. Они должны предсказывать поведение электромагнитных полей.

«Ареной этих законов является все пространство, а не одни только точки, в которых находится вещество или заряды, как это имеет место для механических законов». (А. Эйнштейн, Л. Инфельд, Эволюция физики.)

Мы написали уравнения для конечных контуров, вдоль которых и подсчитывали э.д.с. и м.д.с. для площадей, которые пересекаются силовыми линиями, для объемов, заключающих в себе заряды. Вместе с тем принцип близкого действия требует предсказывать поле именно в каждой точке и в каждый момент времени.

По сути дела мы уже использовали то, что уравнения Максвелла описывают поведение полей в точке. Например, в предыдущем параграфе, когда мы рассматривали поле, возникающее в точке нахождения заряда, попадающего в соленоид.

Из того факта, что менялось магнитное поле в точке, мы, не рассматривая каких-либо контуров, делали вывод, что появляется электрическое поле.

Как же перейти от контуров, от площадей, от объемов к точкам?

Такой переход с математической точки зрения достаточно сложен. И мы не можем его здесь привести. Качественно он состоит в том, что контур стягивают в точку и, переходя к пределу, получают связь между E и B в этой точке.

Следует отметить еще одно важное обстоятельство. Часто говорят, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное, оно в свою очередь вызывает появление переменного электрического и т. д. Уравнения говорят о том, что этот процесс происходит одновременно. Когда мы рассматриваем поля в точке, то это относится не только к точке пространства, но и к фиксированному моменту (точке) времени.

Нельзя сказать, что было электрическое поле и его изменение вызвало через какое-то время появление B . Вопрос о «первенстве» не имеет смысла, и это надо всегда помнить.

Получив некоторое качественное представление об уравнениях Максвелла, интересно было бы посмотреть, могут ли они дать следствия, о которых мы не подозревали. Оказывается, могут. Только с их помощью можно понять физическую картину распространения сигнала, о котором мы говорили в параграфе «Реальность поля».

Вернемся к описанному там эксперименту. В качестве источника поля выбран диполь. В какой-то момент времени мы сводим его заряды вместе и нейтрализуем их.

Теперь в пространстве уже нет зарядов или токов, осталось только электромагнитное поле, которое не может исчезнуть мгновенно.

Наблюдатель, измеряющий поле на далеком расстоянии от источника, в момент, когда диполь нейтрализовали, все еще регистрирует на своих приборах прежнюю величину поля. Это продолжается до тех пор, пока до него не дойдет сигнал о том, что диполя нет. Но что это за сигнал?

Электрическое поле в точке наблюдения начнет меняться, исчезать. Раз меняется электрическое поле, то в соответствии с уравнениями Максвелла это приводит к появлению в этой точке магнитного поля.

В свою очередь изменение магнитного поля (раньше его не было, а теперь оно появилось) индуцирует электрическое поле. Распространяясь, сигнал перейдет в следующую точку, где его сможет зафиксировать другой наблюдатель.

Итак, в пространстве будет распространяться совокупность переменных электрических и магнитных полей, перенося энергию и импульс.

Так трактуется физическая природа сигнала с точки зрения теории электромагнитного поля. Уравнения Максвелла позволяют предсказать и скорость распространения сигнала.

Мы можем это показать опять-таки лишь на основе общих качественных рассуждений. Единственная постоянная, входящая в уравнения и имеющая размерность скорости, есть c . Постоянная эта универсальна, она всегда появляется в электромагнитных процессах, даже когда в пространстве нет зарядов и токов. Естественно поэтому считать ее скоростью распространения электромагнитного поля.

Историческая последовательность открытий электродинамики была отлична от той, которой мы придерживаемся в этой книге.

Когда Максвелл написал систему уравнений для электромагнитного поля и ввел ток смещения, он не имел никаких опытных данных о полях, существующих без зарядов и токов. Но из этих уравнений он предсказал существование распространяющихся в пустом пространстве со скоростью c электромагнитных сигналов — электромагнитных волн. И только позднее эксперименты Г. Герца дали первое блестящее подтверждение выводов теории.

Основное внимание мы уделили тому, чтобы показать неразрывную связь между электричеством и магнетизмом. Эта связь венчается системой уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла послужат для нас отправной точкой в дальнейшем.

До того, как они были выведены, существовало три разных области физики: электричество, магнетизм и оптика. Правда, уже после работ Фарадея наметилось единство двух первых. Максвелл, объединив их окончательно, высказал предположение о том, что свет, распространяющийся со скоростью c , представляет собой электромагнитные волны.

Поэтому в дальнейшем, исходя из уравнений электромагнитного поля, можно приступить к изучению электромагнитных волн, излучения и оптики.

В заключение этой главы приводим таблицу, в которой даны некоторые единицы измерения магнитных величин (табл. III).

Таблица III

Наименование величины	Обозначение	Название единицы	Размерность
Магнитная индукция	B	Тесла ($тл$)	$кг \times сек^{-2} \times а^{-1}$
Магнитный поток	Φ	Вебер ($вб$)	$м^2 \times кг \times сек^{-2} \times а^{-1}$
Магнитный момент	m	Ампер на метр в квадрате ($а \times м^2$)	$м^2 \times а$
Магнитная постоянная	μ_0	Генри на метр ($гн/м$)	$м \times кг \times сек^{-2} \times а^{-2}$
Плотность энергии магнитного поля	u	Джоуль на кубический метр ($дж/м^3$)	$м^{-2} \times кг \times сек^{-2}$

ПРИМЕРЫ

I. Рамка с током, помещенная в магнитное поле, начинает колебаться; при этом ее кинетическая энергия увеличивается и можно предположить, что увеличивается и кинетическая энергия зарядов, движущихся по рамке, так как теперь они участвуют в двух движениях — движении относительно рамки (электрический ток) и движении вместе с рамкой (колебания). Это противоречит тому, что магнитное поле не может совершить работу над зарядом; т. е. изменить его кинетическую энергию.

Как объяснить такое явление?

В действительности никакого противоречия здесь нет. При колебаниях рамки происходит изменение магнитного потока, пронизывающего ее площадь, и, согласно закону электромагнитной индукции, возникает э.д.с. Электрическое поле тормозит заряды. Таким образом, увеличение кинетической энергии за счет колебаний компенсируется уменьшением ее за счет снижения скорости движения зарядов по рамке.

II. Для ускорения электронов до энергий порядка нескольких сот миллионов электрон-вольт используется индукционный ускоритель — бетатрон *).

В бетатроне создается переменное во времени магнитное поле. Возникающее по закону Фарадея индукционное

*) Бета-частицами принято называть электроны или позитроны.

электрическое поле разгоняет частицу, а магнитное поле удерживает ее на заданной круговой орбите. Силовые линии магнитного поля показаны на рис. 3.5. Траектория электрона лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Найти условие работы бетатрона, т. е. условие, при котором электрон движется по окружности заданного радиуса. Так как магнитное поле симметрично относительно оси z , то из соображений симметрии очевидно, что силовые линии индуцированного электрического поля представляют собой концентрические окружности с центрами на оси z и лежащие в плоскости, к ней перпендикулярной, и что напряженность электрического поля принимает одно и то же значение в любой точке такой окружности.

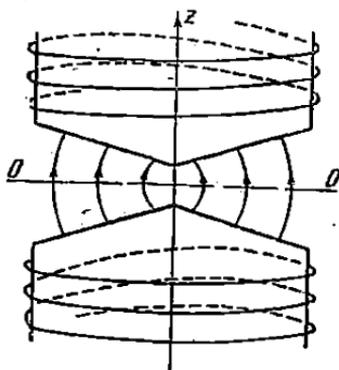


Рис. 3.5.

Рассмотрим электрон, движущийся по одной из таких окружностей с постоянным радиусом r .

Уравнение движения для касательной составляющей скорости электрона можно записать в виде

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = eE, \quad (1)$$

где E — величина напряженности электрического поля, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ — тангенциальное (касательное) ускорение электрона.

По закону Фарадея имеем (не учитывая знак)

$$2\pi r E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (2)$$

где Φ — поток магнитного поля, пронизывающий орбиту электрона. Подставляя в (1) выражение E из (2), получим

$$\frac{e}{2\pi r} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

или

$$\frac{e}{2\pi r} (\Phi_2 - \Phi_1) = m (v_2 - v_1), \quad (3)$$

где Φ_1 — магнитный поток в начальный момент времени

(его можно выбрать произвольно), Φ_2 — магнитный поток в рассматриваемый момент времени, v_1 — скорость в начальный момент, v_2 — скорость в рассматриваемый момент.

Учитывая, что скорость электрона v связана с величиной магнитного поля \bar{B} и радиусом орбиты r соотношением $\frac{mv^2}{r} = eBv$ и, следовательно, $mv = eBr$, перепишем (3) в виде

$$\frac{e}{2\pi r} (\Phi_2 - \Phi_1) = er (B_2 - B_1). \quad (4)$$

С другой стороны, магнитный поток через орбиту можно выразить через среднее магнитное поле \bar{B} ;

$$\Phi = \pi r^2 \bar{B}.$$

Формула (4) приобретает вид

$$\frac{1}{2} (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = B_2 - B_1.$$

Считая, что в начальный момент $B_1 = \bar{B}_1 = 0$, получим

$$B_2 = \frac{1}{2} \bar{B}_2,$$

т. е. в любой момент времени поле на орбите должно быть равно половине среднего поля, пронизывающего площадь орбиты. Это и есть условие работы бетатрона.

III. Электрон равномерно движется вдоль некоторой прямой. Найти создаваемое им магнитное поле.

Воспользовавшись формулой (2.10)

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ev}{R^2c^2} \sin \alpha, \quad (1)$$

где α — угол между радиусом-вектором R , проведенным в точку наблюдения, и скоростью заряда v , можно найти поле B вблизи прямой, например в точках на самой траектории электрона $B = 0$.

Из каких соображений может быть получена формула (2.10)?

Возьмем круговой контур радиуса r , перпендикулярный к оси некоторого прямого бесконечного тока I (рис. 3.6). Для этого контура напишем уравнение

Максвелла

$$c^2 \sum B_l \Delta l = \frac{I}{\varepsilon_0} + \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}.$$

Теперь, учитывая только первый член (а во второй главе мы только его и знали!), так как во всем пространстве для непрерывно текущих зарядов электрическое поле не меняется и $\Delta \Psi = 0$, найдем B :

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{c^2 \varepsilon_0}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \left(\mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \right).$$

Зная поле прямого тока I , мы говорили, что оно может быть представлено как суперпозиция полей элементов тока

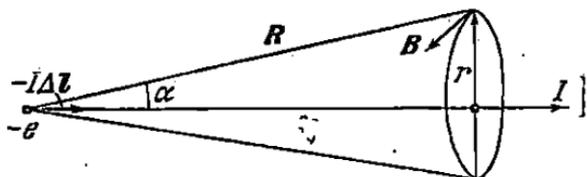


Рис. 3.6.

или отдельных зарядов, поле каждого из которых вычисляется по формуле (1). Для элементов тока, которые лишь формально можно рассматривать отдельно (мы всегда имели дело с замкнутыми токами), такой подход не вызывает сомнения.

Но для одного летящего заряда напряженность электрического поля будет непрерывно меняться во всех точках пространства. Поэтому для нашего контура член $\Delta \Psi / \Delta t$ не равен нулю, в отличие от случая с током. И, кроме того, если электрон в данный момент времени не пронизывает плоскость контура, то член $\mu_0 I$ обращается в нуль, так как никакой ток через контур не течет (рис. 3.6).

Будет ли иметь хоть какую-нибудь ценность выражение для поля одиночного заряда, выведенное в § 6 гл. II, или оно годится лишь тогда, когда этот заряд рассматривается в составе непрерывного тока?

Вычислим поле электрона, воспользовавшись тем, что теперь нам известно полное уравнение Максвелла вместе с током смещения.

Электрон за малый промежуток времени Δt сместился на расстояние $\Delta S = v\Delta t$, где v — скорость электрона. При этом поток напряженности через контур S радиуса r (рис. 3.7) изменился на величину $\Delta\Psi$, как раз равную по-

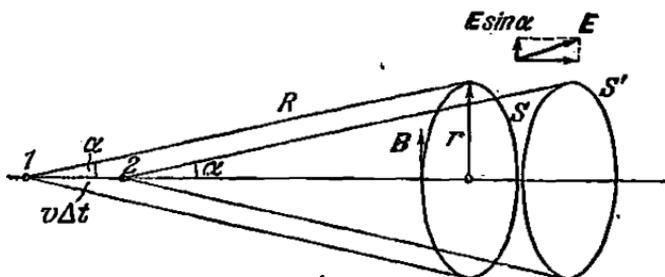


Рис. 3.7.

току напряженности через боковую поверхность цилиндра с основаниями S и S' . $\Delta\Psi = SE$ (считаем

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \text{const}$$

для всех точек боковой поверхности, так как время Δt достаточно мало и смещение $\Delta S = v\Delta t$ также мало).

Тогда

$$\Delta\Psi = 2\pi r v\Delta t \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\alpha.$$

В эту формулу входит $\sin\alpha$ из-за того, что в поток вносит вклад только нормальная составляющая напряженности. Окончательно

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = 2\pi r v \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\alpha = \sum_1 B_1 \Delta l c^2 = B 2\pi r c^2.$$

Отсюда

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{ev \sin\alpha}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin\alpha}{R^2},$$

т. е. мы получили формулу, совпадающую с (2.10).

IV. Вывести формулы, по которым преобразуются электрическое и магнитное поля при переходе от одной

инерциальной системы к другой, движущейся со скоростью v относительно первой. (Как обычно, предполагается $v \ll c$).

Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся со скоростью v относительно первой системы отсчета (эту систему мы будем называть «неподвижной»). Если в этой системе присутствуют электрическое и магнитное поля, то на частицу будет действовать сила

$$F = q (E + [v, B]).$$

Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся вместе с частицей со скоростью v .

В течение малого промежутка времени можно считать эту систему инерциальной, так как скорость частицы не успеет заметно измениться.

Так как в движущейся системе отсчета частица покоится, то действующая на нее сила равна

$$F' = qE'$$

(штрихом мы отмечаем величины, измеренные относительно движущейся системы отсчета).

Из равенства $F = F'$ следует

$$E = E' + [v, B]. \quad (1)$$

Таким образом, мы нашли закон преобразования для электрического поля. Теперь следует найти формулу для магнитного поля.

Мы знаем, что между электрическим и магнитным полями существует глубокая аналогия, которая отражена в полной симметрии уравнений Максвелла без источников для E и B (см. (3.8)). Эта симметрия нарушается только знаком «минус» в третьем уравнении (3.8).

С математической точки зрения такая симметрия означает что уравнения

$$\sum E \Delta l = - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_n}{\Delta t}, \quad (2)$$

$$\sum B_n \Delta l = \sum \Delta S_i \frac{\Delta E_n}{\Delta t}.$$

не изменятся, если произвести замену

$$E \rightarrow B, \quad B \rightarrow (-E). \quad (3)$$

Если бы, например, нам было известно только одно из уравнений (2), то с помощью условия (3) мы могли бы получить второе.

Исходя из этой симметрии, мы сразу можем получить формулу преобразования для магнитного поля, заменив в (1) E на B и B на $(-E)$:

$$B' = B - [v, E].$$

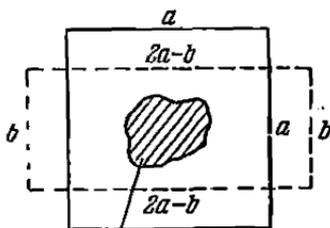
Итак, окончательно имеем

$$E' = E + [v, B],$$

$$B' = B - [v, E].$$

ЗАДАЧИ

3.1. Ученик решал следующую задачу: «Дан контур в виде квадрата со стороной a (рис. 3.8), плоскость которого перпендикулярна к магнитным силовым линиям однородного поля B . Мы деформируем квадрат так, что он



Область, занятая полем

Рис. 3.8.

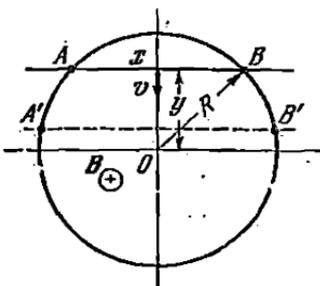


Рис. 3.9.

превращается в прямоугольник, одна из сторон которого есть b . При этом проводник, образующий фигуру, ни разу не пересекает область, занимаемую полем (рис. 3.8).

Оценить, чему равна наведенная э.д.с., если деформация произошла за время Δt .

Решение выглядело так:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{B \Delta S}{\Delta t} = - \frac{B}{\Delta t} [a^2 - (2a - b)b] = \\ &= - \frac{B}{\Delta t} (a - b)^2. \end{aligned}$$

Правильно ли оно?

3.2. В однородном магнитном поле B помещен круговой проводник, так, что его плоскость перпендикулярна к силовым линиям поля. Радиус проводника R . По окружности со скоростью v перемещается стержень так, как это показано на рис. 3.9. Найти электродвижущую силу, возникающую между точками касания стержня и кругового проводника (точки A и B на рисунке).

3.3. В однородном магнитном поле, перпендикулярно к его силовым линиям вращается с угловой скоростью ω проводящий стержень длиной l .

Найти величину э.д.с., индуцируемой между его концами.

3.4. Сторона AB рамки находится в области однородного магнитного поля B (рис. 3.10). Если привести рамку

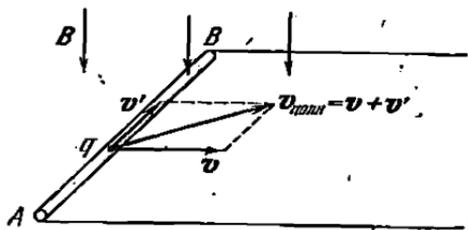


Рис. 3.10.

в движение со скоростью v , то в ней возбуждается индукционный ток. Следовательно, заряды в рамке будут иметь скорость $v_{\text{полн}} = v + v'$, где v' — скорость их перемещения относительно рамки. Если магнитное поле не совершает работы над зарядом, то как объяснить то, что их кинетическая энергия после начала движения не $\frac{mv^2}{2}$

(m — масса заряда), а $\frac{mv_{\text{полн}}^2}{2} > \frac{mv^2}{2}$?

За счет совершения какой работы может пойти по рамке индукционный ток?

3.5. Показать, что ни одно тело не может двигаться со скоростью c (c — скорость распространения электромагнитного сигнала в вакууме).

3.6. В механике применялась модель абсолютно твердого тела. Совместима ли она с фактом существования максимальной скорости распространения взаимодействия?

3.7. Существует много видов переменных звезд, отличающихся тем, что их блеск периодически меняется (пульсирует). Изменение блеска объясняется колебаниями радиуса звезды. Найти электрическое и магнитное поля такой пульсирующей звезды*) в предположении, что она представляет собой заряженный шар и что объемная плотность заряда зависит только от расстояния до центра.

Считать, что при пульсациях сохраняется сферическая симметрия и что полный заряд звезды равен Q .

3.8. Два электрона движутся в одной плоскости так, что их скорости взаимно перпендикулярны.

Рассмотреть силы, действующие на каждый из электронов для момента движения, изображенного на рис. 3.11. С чем связано невыполнение третьего закона Ньютона для этих частиц?

3.9. Две заряженные проводящие пластины (плотность зарядов у них равна по вели-

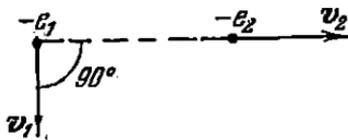


Рис. 3.11.

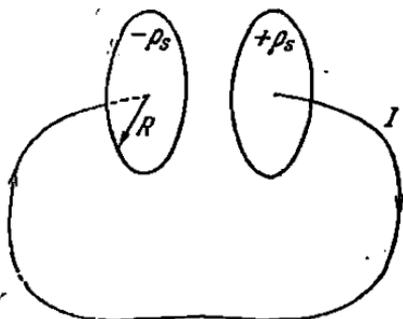


Рис. 3.12.

чине, но противоположна по знаку) радиуса R в какой-то момент времени замыкаются проводником так, как это показано на рис. 3.12. Считая, что в первый момент времени ток разрядки I остается постоянным, найти возникающее в пространстве между пластинами магнитное поле.

3.10. Известно, что если по прямому однородному проводнику постоянного сечения течет постоянный ток, то плотность тока во всех точках приблизительно одинакова**). Как изменится распределение плотности тока по

*) Имеются в виду поля в точках пространства вне звезды.

***) На самом деле плотность тока больше в центре сечения и меньше по краям.

сечению того же проводника, если ток будет быстропеременным? Дать качественное описание.

3.11. Показать, что при отражении времени (замене t на $-t$) уравнения Максвелла не изменяются.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. Решение неверное. Под изменением потока в законе Фарадея надо всегда понимать изменение числа силовых линий, пронизывающих контур. Это происходит или за счет изменения площади контура, или за счет изменения величины B , или, наконец, за счет и того и другого.

В данном случае проводник при деформации не находился в магнитном поле. Число силовых линий, пронизывающих контур, не изменилось. Сила Лоренца на заряды проводника не действовала, и наведенная э.д.с. $\mathcal{E} = 0$.

3.2. Обозначим длину отрезка AB через x (см. рис. 3.9). Тогда э.д.с., наводимая в стержне, равна $\mathcal{E} = Bxv$. Если расстояние между центром окружности и центром стержня обозначить через y , то

$x = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ и э.д.с.

$$\mathcal{E} = 2Bv\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Согласно условию $y = R - vt$. Отсюда $\mathcal{E} =$

$$= 2Bv\sqrt{R^2 - (R - vt)^2} =$$

$$= 2Bv\sqrt{vt(2R - vt)}.$$

3.3. Рассмотрим элемент стержня Δx , расположенный на расстоянии x от оси вращения (рис. 3.13).

На заряды этого элемента действует сила Лоренца $F = \rho_l v B \Delta x$, где ρ_l — линейная плотность зарядов, v — линейная скорость точки x и B — индукция поля.

Мы можем для F написать $F = \rho_l \omega x \Delta x B$. В системе, связанной со стержнем, на заряды действует сила $F = \rho_l \Delta x E$, где E — напряженность индуцированного электрического поля, приблизительно одинаковая по всей длине Δx . Отсюда $E \Delta x = x \Delta x B \omega$.

Для того чтобы найти величину э.д.с. между концами стержня, надо просуммировать $E \Delta x$ по всей длине стержня, считая, что стержень разбит на n элементов длиной

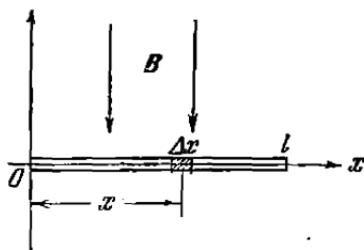


Рис. 3.13.

Δx (см. рис. 3.13); $\Delta x = l/n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^n E_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i \Delta x_i B \omega = B \omega (\Delta x \Delta x + \Delta x 2 \Delta x + \dots \\ &\dots + \Delta x n \Delta x) = B \omega \Delta x^2 (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= B \omega \frac{(n+1)n}{2} \Delta x^2 = \frac{B \omega (n+1)n}{2} \frac{l^2}{n^2} = B \omega \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Для получения точного равенства необходимо перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\mathcal{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} B \omega \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{B \omega^2 l^2}{2}$.

3.4. На заряд, перемещающийся в поле B со скоростью $v_{\text{полн}}$, действует сила Лоренца $F_{i \text{ полн}} = \frac{q}{c} [v_{\text{полн}}, B]$, направленная так, как показано на рис. 3.14. Эту силу

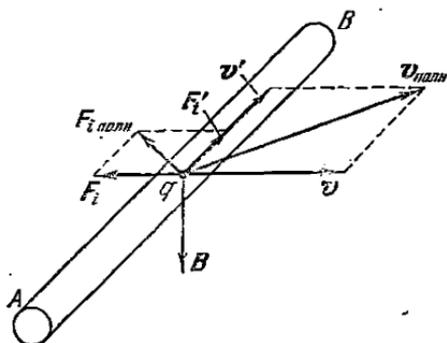


Рис. 3.14.

мы можем разложить на две составляющие: F'_i , приводящую к движению заряда вдоль рамки, и F_i — силу, с которой заряд «сопротивляется» перемещению в направлении вектора v . Поэтому, чтобы сместить рамку на расстояние Δx , необходимо произвести работу против силы $F = \sum_{i=1}^n F_i$,

*) Приемы суммирования, см. «Механика», Математическое дополнение.

где сумма берется по всем зарядам, передвигающимся по AB .

Эта работа и идет на придание зарядам дополнительной кинетической энергии, т. е. она обуславливает появление индукционного тока. Таким образом, механическая энергия, которую мы расходуем, передвигая рамку как целое, превращается в энергию движения зарядов вдоль рамки, т. е. энергию электрического тока. На этом принципе основана работа динамо-машины.

3.5. Предположим, что существует тело, движущееся со скоростью s . Перейдем в систему отсчета, связанную с этим телом, и рассмотрим поведение электромагнитного сигнала с точки зрения такой системы.

Так как сигнал представляет собой совокупность электрического и магнитного полей, передвигающихся в пространстве со скоростью s , то в выбранной нами системе такой сигнал должен быть неподвижным. Соответственно электрическое поле в такой системе должно быть статическим. Но тогда должны быть источники, создающие это поле. Вместе с тем мы знаем, что электромагнитный сигнал вполне может существовать и без источников. Полученное противоречие показывает, что наше первоначальное предположение было неверным.

3.6. Пусть какое-нибудь твердое тело внешним воздействием приложенным к одной из его точек, приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы прийти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию. В противном случае тело деформировалось бы. Это невозможно, так как воздействие от данной точки к другим передается с конечной скоростью, и поэтому все точки не могут начать двигаться одновременно.

3.7. Электрическое поле легко найти, воспользовавшись уравнением Максвелла (3.4), справедливым не только в электростатике, но и в случае произвольно движущихся источников. Проведем через точку наблюдения сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром звезды. Так как в силу сферической симметрии электрическое поле имеет одинаковую величину во всех точках такой поверхности и направлено по радиусу, то

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \text{т. е.} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

где R — расстояние от центра звезды до точки наблюдения. Этот результат физически очевиден, так как центр заряда звезды при сферически симметричной пульсации остается неподвижным и поле звезды просто равно полю точечного заряда Q , сосредоточенного в ее центре.

Из соображений симметрии очевидно, что магнитное поле во всех точках равно нулю, так как нет ни одного выделенного направления. Это следует также и из уравнения Максвелла, так как электрическое поле постоянно (и, следовательно, ток смещения равен нулю) и $\sum I$ сквозь любой контур равна нулю.

3.8. Электрические силы, действующие на частицы, равны по величине и противоположны по направлению. Не так обстоит дело с магнитными силами. Первый электрон в данный момент находится на оси движения второго, а согласно примеру III магнитное

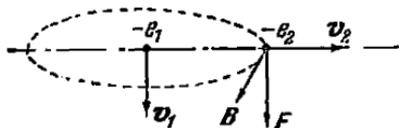


Рис. 3.15.

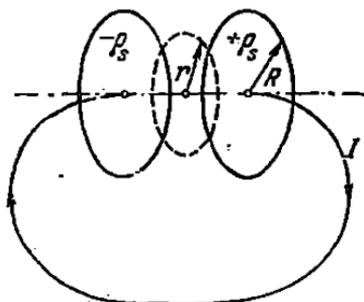


Рис. 3.16.

поле второго электрона равно нулю. Поэтому на первый электрон магнитные силы не действуют.

В то же время на второй электрон действует со стороны первого сила $F = e [v, B]$, не равная нулю и направленная так, как это показано на рис. 3.15. Для такой системы из двух электронов не выполняется третий закон Ньютона. А так как действие и противодействие оказываются не равными, то должен нарушаться и закон сохранения импульса.

Однако в таком решении содержится ошибка. Система из двух электронов не является замкнутой, нельзя исключать из рассмотрения электромагнитное поле и не рассматривать уносимый им импульс. А для незамкнутой системы закон сохранения импульса не выполняется.

3.9. Рассмотрим окружность радиуса r , находящуюся между пластинами (рис. 3.16). Из соображений симметрии

магнитное поле будет равно по величине во всех точках этой окружности и направлено по касательной к ней.

Напишем уравнение Максвелла для нашего контура

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0} + \frac{\Delta\psi}{\Delta t}.$$

Так как никакой ток поверхность контура не пронизывает, то $I/\epsilon_0 = 0$ и в уравнении остается только ток смещения — изменение потока электрического поля E в единицу времени:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{\Delta(\pi r^2 E)}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Для нашей системы $E = \frac{P_s}{\epsilon_0}$; отсюда

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta P_s}{\epsilon_0 \Delta t} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \frac{\Delta \pi R^2 P_s}{\epsilon_0 \Delta t} = \frac{r^2}{R^2 \epsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

где Q — общий заряд пластины. Но изменение заряда Q со временем выражается через ток зарядки I . Поэтому

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{r^2}{\epsilon_0 R^2} I \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{rI}{2\pi R^2}.$$

Полученная формула — совершенно эквивалентна формуле для магнитного поля внутри прямого провода радиуса R с током I . Ток смещения приводит к появлению такого же магнитного поля, как и обычный ток.

3.10. Рассмотрим проводник с переменным током, и пусть в данный момент времени ток I имеет направление, указанное на рис. 3.17. Он создает внутри проводника магнитное поле B , силовые линии которого лежат в плоскости, перпендикулярной к току. Пусть ток I возрастает. В этом случае также возрастающее поле B вызовет появление вихревого электрического поля E . Внутри проводника это поле направлено против тока, а на поверхности — одинаково с ним. Следовательно, ток по поверхности будет усиливаться, а внутри проводника — ослабляться. Аналогичное явление произойдет и в случае убывания тока I . В этом случае ослабевающее магнитное поле B

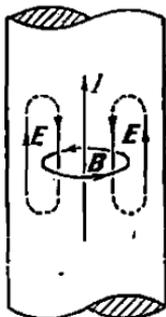


Рис. 3.17.

вызовет электрическое поле E' , которое будет направлено противоположно по сравнению с первым случаем, т. е. на оси будет совпадать с током, а на поверхности — противоположно ему.

В обоих случаях, и тогда, когда ток нарастает, и когда он убывает, вихревое электрическое поле противодействует изменению тока на оси проводника и способствует этому процессу на поверхности. Таким образом, плотность переменного тока на поверхности выше чем на оси проводника. Это явление называется *скин-эффектом*.

Если диаметр проводника достаточно велик и ток меняется с большой частотой, то он практически существует лишь в тонком поверхностном слое проводника. Поэтому часто проводники для быстропеременных токов делают в виде труб.

3.11. Запишем систему уравнений Максвелла

$$\sum_{\text{по замкнутой поверхности}} E_n \Delta S_i = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0},$$

$$\sum_{\text{по замкнутому контуру}} E \Delta l = - \sum_{\text{по площади поверхности, натянутой на этот контур}} \Delta S_i \frac{\Delta B_{n_i}}{\Delta t},$$

$$\sum_{\text{по замкнутой поверхности}} B_n \Delta S_i = 0,$$

$$\sum_{\text{по замкнутому контуру}} B \Delta l = \frac{I}{c^2 \epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \sum \Delta S_i \frac{\Delta E_{n_i}}{\Delta t}.$$

При замене t на $-t$ происходит замена: $E \rightarrow E$, B на $-B$, I на $-I$ и Δt на $-\Delta t$. Изменив знаки соответствующих величин, легко показать, что уравнения не изменятся.

I. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В первом выпуске серии («Механика») было рассмотрено скалярное произведение векторов, т. е. такое, в результате которого получается скаляр. Напомним, что скалярным произведением векторов a и b называется число

$$c = (a, b) = ab \cos(\widehat{a, b}).$$

С помощью этой формулы в физике вычисляется, например, работа

$$A = (F, s) = Fs \cos(\widehat{F, s}).$$

Теперь мы рассмотрим еще одну операцию перемножения векторов, в результате которой получается новый вектор — *векторное произведение*.

Векторное произведение двух векторов a и b есть вектор c , модуль которого равен произведению модулей векторов-сомножителей на синус угла между ними, а направление его перпендикулярно к плоскости, проходящей через a и b , и обращено в ту сторону, с которой вращение по кратчайшему пути от a к b представляется происходящим против часовой стрелки. Обозначается операция векторного умножения так:

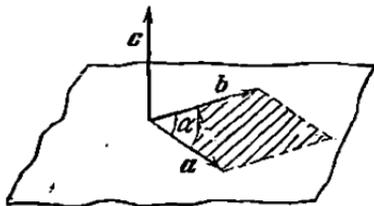


Рис. П.1.

$$c = [a, b] \text{ или } c = a \times b. \quad (1)$$

Модуль векторного произведения $[a, b]$ численно равен площади параллелограмма со сторонами a и b (рис. 1)

$$|c| = |a| \cdot |b| \sin(\alpha, b).$$

В физике встречается немало примеров, подтверждающих необходимость введения операции векторного умножения векторов.

В механике существует величина, называемая моментом силы относительно точки (или оси), которая определяется как произведение модуля силы на ее плечо. Если ввести в рассмотрение радиус-вектор, проведенный из точки, относительно которой вычисляется

момент, в точку приложения силы, то очевидно, что (рис. 2)

$$M = Fr \sin(\widehat{F, r}). \quad (2)$$

Этой величине можно придать векторный характер, т. е. условиться о направлении вектора момента силы M , модуль которого определяется формулой (2). Пусть сила F приложена к телу, имеющему ось вращения, причем направление действия силы не проходит че-

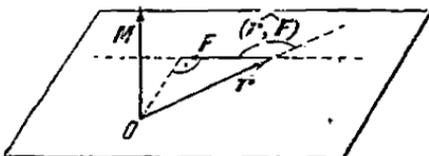


Рис. П.2.

рез эту ось и сама сила лежит в плоскости, перпендикулярной к оси. В этом случае вектор момента силы относительно оси (вращающий момент) принято направлять по оси вращения в ту сторону, в которую перемещался бы бумажник, если бы он вращался так же, как рассматриваемое

тело. Но это как раз то направление, которое определяется векторным произведением r и F . Итак,

$$M = [r, F].$$

Аналогично сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле B , по модулю равна $F = qvB \sin(\widehat{v, B})$ и направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы v и B , причем в ту сторону, с которой вращение по кратчайшему пути от v к B происходит против часовой стрелки. Таким образом,

$$F = q [v, B].$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

1. $[a, b] = -[b, a]$.

Действительно, кратчайший поворот от b к a происходит в направлении, противоположном кратчайшему повороту от a к b , и, следовательно, векторное произведение меняет свой знак.

2. $[a, b] = 0$, если $a = 0$, $b = 0$. Вектор a , параллелен вектору b ; в этом случае векторное произведение также равно нулю.

3. $[a, a] = 0$.

4. $[ma, nb] = mn [a, b]$. Скалярные коэффициенты не меняют направления векторов (или меняют их на обратные), они влияют на их величину. Поэтому их можно выносить за знак векторного произведения.

5. $a [a, b] = 0$. Действительно, вектор $[a, b]$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы a и b и, таким образом, перпендикулярен к вектору a . Но скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

II. О СИСТЕМАХ ЕДИНИЦ СИ И СГС

Длительное время единицы величин различных разделов физики не были объединены в единую систему. Так, например, электрические измерения базировались на так называемых практических единицах, основными из которых были ом — единица сопротивления и ампер — единица силы тока. Ом определялся как сопротивление столба ртути определенной длины и массы, а ампер —

по электрохимическому эффекту. Однако точность воспроизведения подобных единиц с некоторого времени перестала удовлетворять требованиям физики. Кроме того, такое определение единиц затрудняло образование единой системы, охватывающей физику в целом.

Применение для всех разделов физики единой системы, основанной только на трех основных единицах (например, абсолютной системы Гаусса), приводит к тому, что совершенно различные физические величины выражаются через одни и те же единицы. Характерным примером этого может служить применение системы СГС для электрических и магнитных величин. В этой системе в единицах длины измеряются длина, емкость, индуктивность, взаимная индуктивность. Магнитный поток и количество электричества (заряд) тоже имеют одинаковую размерность.

Современное решение этого вопроса заключается в создании единой системы единиц, в которой к трем основным механическим единицам добавлены в качестве основных по одной единице для каждого раздела физики: электромагнетизма, теплоты и оптики. Эта система единиц называется СИ (в международной транскрипции SI — Systeme International). Тем не менее в физике продолжает использоваться система СГС. Измерение одной и той же физической величины в различных единицах неизбежно приводит к появлению переводных коэффициентов.

Таблица переводных коэффициентов между системами СИ и СГС для величин, используемых в этой книге, дана ниже.

Единицы измерения электромагнитных величин

Величина	Система СИ		Система СГС		Соотношение между единицами систем СИ и СГС
	сокращенное обозначение единиц	размерность единиц	сокращенное обозначение единиц	размерность единиц	
Основные единицы					
Длина	<i>м</i>	<i>L</i>	<i>см</i>	<i>L</i>	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$
Масса	<i>кг</i>	<i>M</i>	<i>г</i>	<i>M</i>	$1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$
Время	<i>сек</i>	<i>T</i>	<i>сек</i>	<i>T</i>	1 сек
Сила тока	<i>а</i>	<i>I</i>			
Производные единицы					
Работа, энергия	<i>дж</i>	L^2MT^{-2}	<i>эрг</i>	L^2MT^{-2}	$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ дж}$
Мощность	<i>вт</i>	L^2MT^{-3}	$\frac{\text{эрг}}{\text{сек}}$	L^2MT^{-3}	$1 \text{ эрг/сек} = 10^{-7} \text{ вт}$
Потенциал электрического поля, разность потенциалов, электродвижущая сила	<i>в</i>	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	—	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ ед. СГС} = c \cdot 10^{-9} \text{ в}$

ОУХВИАДВРЬИНСКАЯ
ОБЛИБЕЛИСТЕНА
ИИ. ГОГОЛЯ

Продолжение

Величина	Система СИ		Система СГС		Соотношение между единицами систем СИ и СГС
	сокращенное обозначение единиц	размерность единиц	сокращенное обозначение единиц	размерность единиц	
Заряд, количество электричества	κ	IT	—	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	1 ед. СГС = $\frac{10}{c}$ κ
Напряженность электрического поля	σ/m	$LMT^{-2}I^{-1}$	—	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	1 ед. СГС = $c \cdot 10^{-6}$ σ/m
Магнитный поток	$\sigma\delta$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	мкс	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	1 мкс = 10^{-8} $\sigma\delta$
Магнитная индукция	$\frac{m\delta}{(a\delta)} \left(\frac{a\delta}{M\delta^2}\right)$	$MT^{-2}I^{-1}$	гс	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	1 гс = 10^{-4} $m\delta$
Магнитная постоянная	$эм/м$	$LMT^{-2}I^{-2}$	—	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	($c = 3 \cdot 10^{10}$)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Электростатика	5
Краткая теория (5). Примеры (38). Задачи (45). Решения задач (54).	
Глава II. Магнитное поле	70
Краткая теория (76). Примеры (100). Задачи (107). Решения задач (112).	
Глава III. Электромагнитное поле	128
Краткая теория (128). Примеры (148). Задачи (154). Решения задач (157).	
Приложения	163

Александр
Александрович
Боровой,

Эдуард
Борисович
Финкельштейн,

Александр
Николаевич
Херувимов

Законы электромагнетизма

М., 1970 г., 168 стр. с илл.

Редактор
Техн. редактор
Корректор

Е. Б. Куанецова
В. С. Никифорова
Т. А. Панькова

Сдано в набор
Подп. и печати
Бумага
Физич. печ. л.
Усл. печ. л.
Уч.-изд. л.
Т- 00138.

8/VIII 1969 г.
27/I 1970 г.
84×108^{1/2} мм.
5,25.
8,82.
8,14.

Тираж
Цена книги
Заказ

250 000 экз.
23 коп.
2652.

Издательство «Наука»
Главная редакция
Физико-математической литературы.
Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука».
Москва Г-99, Шубинский пер., 10