ISSN 0142-0843

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА сериясы
№ 4(76)/2014
Серия МАТЕМАТИКА

Қазан–қараша–желтоқсан
30 желтоқсан 2014 ж.

1996 жылдан бастап шығады
Жылына 4 рет шығады

Октябрь–ноябрь–декабрь
30 декабря 2014 г.

Издается с 1996 года
Выходит 4 раза в год

Собственник РГП **Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова**

Адрес редакции: 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: http://www.ksu.kz

Редакторы *Ж.Т.Нұрмұханова*
Техн. редактор *Д.Н.Муртазина*

Издательство Карагандинского государственного университета им. Е.А.Букетова
100012, г. Караганда, ул. Гоголя, 38,
тел.: (7212) 51-38-20
e-mail: izd_kargu@mail.ru

Басуға 29.12.2014 ж. қол қойылды.
Пішімі 60×84 1/8.
Офсеттік қағазы.
Көлемі 13,25 б.т.
Таралымы 300 дана.
Бағасы келісім бойынша.
Тапсырыс № 173.

Подписано в печать 29.12.2014 г.
Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная.
Объем 13,25 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 173.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

М А З М Ұ Н Ы

МАТЕМАТИКА

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Г.Акишев[1], С.Битимхан[2]

[1]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;
[2]Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза
(E-mail: bsamat10@mail.ru)

Условия принадлежности тригонометрических рядов с положительными коэффициентами к весовым пространствам

В статье получено необходимое и достаточное условие принадлежности синус-рядов с положительными коэффициентами к весовым пространствам. Доказаны необходимые условия принадлежности тригонометрических рядов к весовым пространствам. Получено обобщение теоремы Хард-Литтлвуда о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами для класса числовых последовательностей RBSVS.

Ключевые слова: ряды, коэффициенты рядов, функций, ряды Фурье, весовые пространства, числовая последовательность, класс последовательностей, сходимость.

Пусть $W(x)$ — неотрицательная 2π -периодическая функция на $(0,\pi)$.

Через $L_{p,W}(0,\pi)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу 2π -периодических функций *f*, для которых

$$\|f\|_{p,W}=\left(\int_0^{\pi}|f(x)|^p W(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty, 1\le p<+\infty.$$

Будем считать, что функция $W(x)$ удовлетворяет A_p -условию [1] $(W\in A_p)$, если

$$\sup_{I\subset(0,\pi)}\left[\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(W(x)\right)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}}<+\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Множество всех числовых последовательностей $\{a_n\}$ таких, что $a_n\downarrow 0, n\to+\infty,$ обозначается через MS. Положительная числовая последовательность $\{a_n\}$ называется квазимонотонной, если $\exists\,\tau>0$ такое, что $\frac{a_n}{n^{\tau}}\downarrow 0, n\to+\infty.$ Множество квазимонотонных последовательностей обозначается через $QMDS$ [2].

B.Szal [2] определил класс числовых последовательностей $RBSVS$ (rest bounded second variation sequence).

Определение. Нулевая последовательность неотрицательных чисел $\{c_n\}\in RBSVS,$ если $\exists K>0$

$$\sum_{m=n}^{\infty}|c_m-c_{m+2}|\le K\cdot c_n$$

для любых натуральных n.

Известно, что $MS\subset QMDS, MS\subset RBSVS$ и $QMDS\ne RBSVS$ [2].

В теории одномерных тригонометрических рядов важное значение имеет теорема Харди-Литтлвуда о рядах с монотонными коэффициентами.

Теорема. Пусть $a_n \downarrow 0, n \to +\infty.$ Для того чтобы тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

был рядом Фурье некоторой функции $f \in L_p, 1 < p < +\infty,$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < +\infty.$$

Аналог теоремы Харди-Литтлвуда для функций из пространства $L_{p,W}$ (в случае $W(x) = |\sin x|^{\alpha}, -1 < \alpha < p-1),$ коэффициенты Фурье которых квазимонотонны, доказали Р. Аскей и С. Вейнгер [3]. Т.М. Вуколова [4] обобщила теорему Харди-Литтлвуда для рядов с кратно-монотонными коэффициентами. Результаты Т.М.Вуколовой нами обобщены на степенные [5] и общие весовые пространства [6]. А в работе [2] B. Szal получил аналог теоремы Харди-Литтлвуда для рядов с коэффициентами из класса $RBSVS$.

Нами получено обобщение результата B.Szal для общих весовых пространств.

В дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах. А запись $A(\varphi) \succ\prec B(\varphi)$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 A(\varphi) \le B(\varphi) \le c_2 A(\varphi).$

Теперь приведем полученные нами результаты.

Теорема 1. Пусть $W(x) \in A_p, 1 < p < +\infty,$ и $\lambda_n \ge 0$ и λ_n являются синус-коэффициентами Фурье функции $\varphi.$

1) Условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty \tag{*}$$

необходимо для того, чтобы $\varphi \in L_{p,W}.$

2) Если $W(xy) \le W(x)W(y), \forall x, y \in (0,\pi)$ условие (*) достаточно для того, чтобы $\varphi \in L_{p,W}.$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi \in L_{p,W}$ и

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \sin nx.$$

Известно, что $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].$ Получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \varphi(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \sin kx dx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi k}{n+1} \right) \cdot \frac{\lambda_k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \sin^2 \frac{\pi k}{2(n+1)} \cdot \frac{\lambda_k}{k} = C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi k}{2(n+1)}}{\frac{\pi k}{2(n+1)}} \right)^2 \cdot \frac{k \lambda_k}{(n+1)^2} \ge$$

$$\ge C \sum_{k=1}^{n} \frac{k \lambda_k}{(n+1)^2} = \frac{C}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k \lambda_k \right) \ge \frac{C}{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx \le C \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \varphi(t)dt \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx \le$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{x}\int_0^x|\varphi(t)|\,dt\right)^p W(x)dx = C\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}\int_0^x|\varphi(t)|\,dt\right)^p W(x)dx \le$$

$$\le C\int_0^{\pi}|\varphi(x)|^p\,W(x)dx < +\infty,\, W\in A_p.$$

Достаточность. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx < +\infty. \qquad (1)$$

Для любого натурального N получим

$$\left(\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\cdot\sin kt\right|^p W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_k\cdot\sin kt\right|^p W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1/t}^{N}\lambda_k\cdot\sin kt\right|^p W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

Каждое слагаемое правой части неравенства (2) оценим по отдельности:

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_k\cdot\sin kt\right|^p W(t)dt \le \int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_k\cdot kt\right|^p W(t)dt =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_k\cdot k\right|^p t^p W(t)dt \le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot k\right)^p\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)dt \le$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)dt. \qquad (3)$$

Для второго слагаемого получим

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1/t}^{N}\lambda_k\cdot\sin kt\right|^p W(t)dt \le \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1/t}^{N}|\lambda_k|\right)^p W(t)dt \le \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1/t}^{\infty}\lambda_k\right)^p W(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left(\sum_{k=1/t}^{\infty}\lambda_k\right)^p W(t)dt \le$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=\frac{n}{\pi}}^{\infty}\lambda_k\right)^p\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)dt = \left[\frac{n}{\pi}=m,\, n=m\pi\right] =$$

$$= C\sum_{m=\frac{1}{\pi}}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\lambda_k\right)^p\int_{\frac{\pi}{\pi m+1}}^{\frac{1}{m}}W(t)dt = \begin{bmatrix} x=\pi t\Rightarrow t=\dfrac{x}{\pi} \\ \dfrac{\pi}{n+1}\le x\le\dfrac{\pi}{n}\end{bmatrix} \le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\right)^p\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{dx}{\pi} \le$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\right)^p\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)\,dt. \qquad (4)$$

Теперь в силу (3) и (4) из (2) имеем

$$\left(\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\cdot\sin kt\right|^p W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\right)^p\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall N.$$

Из произвольности N и условия (1) получим, что $\varphi\in L_{p,W}$.

Замечание 1. В случае $W(t)=t^{-\gamma p}$ из теоремы 1 следует теорема 7 работы [7].

Теорема 2. Пусть $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$. Если $\lambda_n\ge 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx\sim\varphi(x)\in L_{p,W}$, то сходится следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$ и $\varphi(x)\in L_{p,W}$. Положим

$$f(x)=\int_0^x\varphi(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lambda_n\sin nx.$$

Если $\varphi(x)\in L_{p,W}$, то по неравенству Харди [1]

$$\int_0^{\pi}|\varphi(x)|^pW(x)dx\ge\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}\int_0^x|\varphi(t)|dt\right)^pW(x)dx\ge$$

$$\ge\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(t)dt\right|^pW(x)dx=\int_0^{\pi}|f(x)|^p\frac{W(x)}{x^p}dx,$$

т.е. $f(x)\in L_{p,\frac{W(x)}{x^p}}$. Если $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$, то получим

$$\left[\frac{1}{|I|}\int_I\frac{W(x)}{x^p}dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(\frac{W(x)}{x^p}\right)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}}=\left[\frac{1}{|I|}\int_I\frac{W(x)}{x^p}dx\right]^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(W(x)\right)^{-\frac{1}{p-1}}x^{\frac{p}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}}\le C\left[\frac{1}{|I|}\int_IW(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(W(x)\right)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}},\ \forall I\in(0,\pi).$$

Поэтому $\frac{W(x)}{x^p}\in A_p, 1<p<+\infty$. Тогда, пользуясь теоремой 1, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{W(x)}{x^p}dx<+\infty.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx<+\infty.$$

Замечание 2. В случае $W(t)=t^{-\gamma p}$ из теоремы 2 следует теорема 8 работы [7].

Теорема 3. Пусть $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$, и $W(xy)\le W(x)W(y)$, $\forall x,y\in(0,\pi)$. Если $f(x)\in L$, $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}|\lambda_k-\lambda_{k+2}|\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx<+\infty,$$

то $f(x)\in L_{p,W}$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in L,\ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx,$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty.$$

Нетрудно убедиться, что

$$2f(x) \cdot \sin x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \lambda_{n+2} \right) \sin(n+1)x.$$

Простыми вычислениями получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx = \pi^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{\left(\frac{\pi}{n} \right)^p} dx \geq$$

$$\geq C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{x^p} dx \geq \left[2\sin x \geq x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right] \right] \geq$$

$$\geq C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{(2\sin x)^p} dx.$$

Отсюда получим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{(2\sin x)^p} dx.$$

Тогда по теореме 1 это означает, что $2f(x)\sin x \in L_{p, \frac{W(x)}{(2\sin x)^p}}$, т.е. $f(x) \in L_{p,W}$.

Замечание 3. В случае $W(t) = t^{-\gamma p}$ из теоремы 3 следует теорема 9 работы [7].

Теорема 4. Пусть функция $f \in L_1(0,\pi)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f) \cos nx,$ где $\{\lambda_n(f)\} \in RBSVS.$ Если $W(x) \in A_p,\ 1 < p < +\infty,$ и $W(xy) \leq W(x)W(y),\ \forall x, y \in (0,\pi),$ то $f \in L_{p,W}(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\lambda_n(f) \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty.$$

При этом имеет место соотношение

$$\|f\|_{p,W} \succ\prec C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\lambda_n(f) \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Достаточность. По теореме 3, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k(f) - \lambda_{k+2}(f) \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty,$$

то $f(x) \in L_{p,W}$. Так как $\{\lambda_n(f)\} \in RBSVS,$ то

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|\lambda_k(f)-\lambda_{k+2}(f)\right|\le C\cdot\lambda_n.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_n(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}\left|\lambda_k(f)-\lambda_{k+2}(f)\right|\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx.$$

Следовательно, $f(x)\in L_{p,W}$.

Необходимость. Пусть $f(x)\in L_{p,W}$. Если $\{\lambda_n(f)\}\in RBSVS$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda_k(f)}{k}\ge C\cdot\left(\lambda_{2n}(f)+\lambda_{2n+1}(f)\right). \tag{5}$$

Тогда по теореме 2, в силу (5), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(\lambda_{2n}(f)+\lambda_{2n+1}(f)\right)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx.$$

Теперь в интеграле сделаем замену переменного $x=2t.$ Тогда $\frac{\pi}{2n}\le t\le\frac{\pi}{2n+2}.$ Применяя неравенство $(a+b)^p\ge a^p+b^p,\, a>0,\, b>0,\, p>1,$ из последнего неравенства получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge$$

$$\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_{2n}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_{2n+1}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt\ge$$

$$\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\lambda_{2n}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\lambda_{2n+1}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt\,.$$

Воспользовавшись неравенствами $\frac{\pi}{2n+2}<\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2n},$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge$$

$$\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\lambda_{2n}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\lambda_{2n+1}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n+1}}W(2t)dt.$$

Так как функция $W(t)$ удовлетворяет условию $W(xy)\le W(x)W(y),\,\forall x,y\in(0,\pi),$ то получим $W(2t)\ge\frac{W(t)}{W\left(\frac{1}{2}\right)}.$ Поэтому имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge$$

$$\geq C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\lambda_{2n}(f)\right)^{p}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2n}}W(t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\lambda_{2n+1}(f)\right)^{p}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n+1}}W(t)dt=$$

$$=C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_{n}(f)\right)^{p}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В случае $W(t)=1$ из теоремы 4 следует лемма 6 работы [2].

Замечание 5. Теоремы 2–4 анонсированы в работе [8].

Список литературы

1 *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. American Math. Soc. — 1972. — Vol. 162. — P. 207–226.

2 *Szal B.* Generalization of a theorem on Besov-Nikol’skii classes // Acta Math. Hungar. — 2009. — № 125 (1–2). — P. 161–181.

3 *Askey R., Wainger S.* Integrability theorems for Fourier series // Duke Math. J. — 1966. — Vol. 3. — № 1. — P. 223–228.

4 *Вуколова Т.М.* Некоторые свойства тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Москов. ун-та. — Сер. мат.-мех. — 1984. — № 6. — С. 18–23.

5 *Волкова Е., Акишев Г.А.* О коэффициентах Фурье и теоремы вложения в пространствах с весом // Рукопись депон. в КазНИИНТИ. — 1990. — № 3097. — 19 с.

6 *Битимханулы С.* Интегральное свойство суммы тригонометрического ряда с кратно-монотонными коэффициентами // Естественные науки: Сб. науч. ст. аспирантов КарГУ. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1998. — С. 3–9.

7 *Boas R.P.* Jr Fourier Series with Positive Coefficients // Journal of mathematical analysis and applications. — 1967. — № 17. — P. 463–483.

8 *Акишев Г.А., Битимхан С.* Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье с коэффициентами из класса RBSVS // Междунар. конф. «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». — Караганда, 2014. — С. 4–5.

Ғ.Ақышев, С.Бітімхан

Оң коэффициентті тригонометриялық қатарлардың салмақты кеңістікте жату шарттары

Мақалада оң коэффициентті синус-қатарлардың салмақты кеңістікке тиісті болуының қажетті және жеткілікті шарты алынды. Сондай-ақ тригонометриялық қатарлардың салмақты кеңістікке тиісті болуының қажетті шарттары дәлелденді. Монотонды коэффициентті тригонометриялық қатарлар туралы Харди-Литтлвуд теоремасының RBSVS сандық тізбектер класы үшін жалпыламасы алынды.

G.Akishev, S.Bitimkhan

Conditions for membership of trigonometric series with positive coefficients to the weighted space

A necessary and sufficient condition for a sine series with positive coefficients in weighted spaces was obtained. The necessary conditions for membership trigonometric series in weighted spaces were proved. A generalization of Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with monotone coefficients for the class of numerical sequences RBSVS was obtained.

References

1 Muckenhoupt B. *Trans. American Math. Soc.*, 1972, 162, p. 207–226.

2 Szal B. *Acta Math. Hungar.*, 2009, 125 (1–2), p. 161–181.

3 Askey R., Wainger S. *Duke Math. J.*, 1966, 3, 1, p. 223–228.

4 Vukolova T.M. *Bull. Moscow un-ta, ser.* matematika, mekhanika, 1984, 6, p. 18–23.

5 Volkova Ye., Akishev G.A. *The manuscript is deposited in KazNIINTI*, 1990, 3097, 19 p.

6 Bitimkhanuly S. *Natural sciences: collection of scientific articles postgraduates*, Karaganda State University, Karaganda: Publ. KSU, 1998, p. 3–9.

7 Boas R.P. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1967, 17, p. 463–483.

8 Akishev G.A., Bitimkhan S. *International Conference «Theoretical and applied problems of mathematics, mechanics and computer science»*, Karaganda, 2014, p. 4, 5.

УДК 517.968

А.Х.Аттаев[1], С.А.Искаков[2], Г.Ж.Каршыгина[2], М.И.Рамазанов[2]

[1]Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик, Россия;
[2]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка I

В статье рассмотрена первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое — след производной дробного порядка на многообразии $x = t$. Решение задачи сводится к исследованию особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода с несжимаемым ядром. Решение характеристического уравнения методом регуляризации показало, что особое интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при $1/2 \le \beta < 1$. Доказана теорема о существовании нетривиального решения однородной краевой задачи в неограниченной области.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, особое интегральное уравнение Вольтерра, нетривиальное решение.

В работе [1] отмечено, что за последние 35 лет появилось значительное число публикаций, проблемно-ориентированных на нагруженные уравнения, и об этом свидетельствует, например, то, что на запрос о нагруженных уравнениях на поисковом российском сервере «Яндекс» нашлось 163 тысячи ответов, на поисковом международном сервере «Yahoo» — 699 тысяч ответов. Значительную роль в развитии теории нагруженных уравнений играет и то, что они могут выступать как один из способов введения обобщенных решений широких классов уравнений в частных производных и как эффективный метод поиска приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений. Там же показано, что базовые уравнения линейных математических моделей многих процессов на фрактальных структурах являются нагруженными дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка — обобщения уравнений с частными производными целочисленного порядка имеют большое практическое значение, например, такие уравнения являются математическими моделями различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой. При описании процессов в системах, для которых необходимо учитывать нелокальные свойства по времени и пространству, необходим аппарат дробного интегро-дифференцирования [2]. При этом существенно то, что в рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удается не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты.

В монографии [3] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений. В [4–7] показано, что если в дифференциальном уравнении параболического типа нагруженное слагаемое — значение искомой функции или ее производных первого порядка на многообразии $x = t$, то соответствующие краевые задачи являются корректными в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое — *слабое* возмущение. Если же нагруженным слагаемым является значение производной второго порядка искомой функции на многообразии $x=t$, то нарушается единственность решения первой краевой задачи, т.е. в этом случае нагрузку можно интерпретировать как *сильное* возмущение [3].

Целью данной работы является выяснение характера нагрузки дробного порядка $(1+\beta)$, $0<\beta<1$, в вопросах разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

В области $Q=\{(x,t), x>0, t>0\}$, $0<\beta<1$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t-u_{xx}+\lambda\cdot\left\{{}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)\right\}_{x=t}=f(x,t); \tag{1}$$

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0. \tag{2}$$

Здесь λ — комплексный параметр;

${}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\displaystyle\int_0^x\dfrac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^\beta}d\xi\right)$ — дробная производная Римана-Лиувилля порядка $(1+\beta)$,

$0<\beta<1$, $t^{-1/2}e^{-t}\cdot\left[\ {}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)\ \right]_{x=t}\in L_1(0,\infty)$,

$$e^{-t}\cdot\left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]\Bigg|_{x=t}\in L_1(0,\infty), \tag{3}$$

где $G(x,\xi,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\dfrac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right]$ — функция Грина.

Обратим дифференциальную часть задачи (1)–(2)

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t}d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

и с учетом соотношения

$$\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi=erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

получим следующее представление решения задачи (1)–(2):

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t}d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\mu(\tau)=\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{x=t}, \tag{4}$$

тогда соотношение (3) запишется в виде:

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t). \tag{5}$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём производную порядка $(1+\beta)$ по переменной x в обеих частях соотношения (5) и положим $x=t$, тогда с учётом обозначения (4) получим:

$$\mu(t)=-\lambda\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_2(t). \tag{6}$$

Ядро интегрального уравнения (6) имеет вид:

$$K_{1+\beta}(t,\tau)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\Bigg|_{x=t}, \tag{7}$$

$$f_2(t)=\left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right]\Bigg|_{x=t}.$$

Найдем явный вид ядра, для этого вычислим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\frac{d\xi}{(x-\xi)^\beta}=\left\|\begin{matrix}x-\xi=\eta\\ \xi=x-\eta\end{matrix}\right\|=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\frac{d\eta}{\eta^\beta}=$$

$$=\left\|\frac{\partial}{\partial x}erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}}e^{-z^2}dz\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\right\|=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\int_0^x e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\eta}{\eta^\beta}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{x^\beta}-\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{2}{4(t-\tau)}\int_0^x\frac{x-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x-\eta=\xi\\ \eta=x-\xi\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot x^\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x\xi\cdot(x-\xi)^{-\beta}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot x^\beta}-\frac{B(1-\beta,2)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot x^{2-\beta}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Здесь ${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)$ — гипергеометрическая функция, представимая в виде обобщенного гипергеометрического ряда:

$${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_1)_k\cdot(a_2)_k}{(b_1)_k\cdot(b_2)_k}\cdot\frac{z^k}{k!};$$

где $(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)=\dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ — символ Похгаммера;

$$B(1-\beta,2)=\frac{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(3-\beta)}=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(3-\beta)}.$$

Значит, окончательно имеем:

$$K_{1+\beta}(t,\tau)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^\beta\sqrt{t-\tau}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Замечание 1. $\lim\limits_{\beta\to1-0}K_{1+\beta}(t,\tau)=\dfrac{t}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}=K_2(t,\tau)$ [3], так как

$${}_2F_2(a_1,a_2;a_1,a_2,z)=e^z.$$

Замечание 2. $K_{1+\beta}(t,\tau)_{\beta=0} = K_1(t,\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}$ [4].

Действительно $K_1(t,\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \dfrac{t^2}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot {}_2F_2\left(1,\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2},2;-\dfrac{t^2}{4(t-\tau)}\right)$. Преобразуем функцию

$$ {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},2;-z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{(2)_k}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(k+1)!}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = $$

$$ = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \left\| e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \right\| = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right). $$

Значит,

$$ K_1(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{t^2}{4(t-\tau)}\cdot\left(-\frac{4(t-\tau)}{\alpha^2(t)}\right)\left[e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - 1\right] = $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}. $$

Эти два замечания верны, так как это же можно получить непосредственно, положив в (1)–(2) $\beta = 0$, $\beta = 1$.

Определим порядок особенности ядра интегрального уравнения (6) — $K_{1+\beta}(t,\tau)$ (при $\tau \to t$ и $t \to 0$). Очевидно, что если $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)d\tau = 0$, то данное ядро имеет слабую особенность, в противном случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением Вольтерра, которое может иметь неединственное решение. Воспользуемся следующим представлением ядра:

$$ \Gamma(1-\beta)K_{1+\beta}(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{t^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{2}{4(t-\tau)}\int_0^x \frac{t-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{-\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta = k_1(t,\tau) - k_2(t,\tau). $$

Очевидно, что $\int_0^t k_1(t,\tau)d\tau = \int_0^t \dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot t^\beta}d\tau = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2-\beta}$.

$$ \int_0^t k_2(t,\tau)d\tau = $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{d\eta}{\eta^\beta}\int_{\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}dz = \int_0^x \frac{1}{\eta^\beta}erfc\left(\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}\right)d\eta; $$

$$ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x \frac{x-\eta}{\eta^\beta}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta = \frac{4}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{1}{\eta^\beta}d\eta\int_0^t \frac{x-\eta}{4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\tau = $$

$$ = \int_0^x (t-\xi)^{-\beta}\cdot erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)d\xi = $$

$$ = -\frac{t^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}}\cdot \mathrm{B}(2,1-\beta)\cdot {}_3F_3\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2}+1,\frac{3}{2};-\frac{t}{4}\right) + t^{1-\beta}B(1,1-\beta). \qquad (8) $$

Здесь

$$ {}_3F_3(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdot(a_2)_k\cdot(a_3)_k}{(b_1)_k\cdot(b_2)_k\cdot(b_3)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}. $$

Таким образом, имеем ($0<\beta<1$):

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\,d\tau=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 0<\beta<\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{2}{\pi}, & \text{если}\quad \beta=\dfrac{1}{2};\\ \infty, & \text{если}\quad \dfrac{1}{2}<\beta<1.\end{cases}\tag{9}$$

Значит, при $0<\beta<\dfrac{1}{2}$ ядро интегрального уравнения (5) имеет слабую особенность, т.е. методом последовательных приближений можно найти его единственное решение. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $0<\beta<\dfrac{1}{2}$, тогда $\forall\lambda\in C$, $\forall f(x,t)\in L_\infty(D)\bigcap C(D)$ — граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение $u(x,t)\in L_\infty(D)\bigcap C(D)$.

Выше мы показали, что если дифференциальный порядок нагруженного слагаемого есть производная целого порядка на многообразии $x=t$, то единственность решения соответствующей задачи нарушалась, начиная со второго порядка (наличие сплошного спектра, количество собственных функций растет с возрастанием $|\lambda|$) [3, 8–11]. Теперь из соотношений (9) выясняется, что «нарушения», по всей видимости, начинаются «раньше» ($\beta={}^1\!/_2$), т.е. когда нагруженное слагаемое есть производная порядка 3/2.

Рассмотрим случай $\beta={}^1\!/_2$. В этом случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением вида

$$\mu(t)-\lambda\int_0^t K_{3/2}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=f_2(t),\tag{10}$$

где

$$K_{3/2}(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}}+\frac{2}{3\pi}\cdot\frac{t^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Норма интегрального оператора, определяемого ядром $K_{3/2}(t,\tau)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна ${}^2\!/_\pi\neq 0$. Поэтому интегральное уравнение (10) не разрешимо методом последовательных приближений. Покажем, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения.

Исследования интегрального уравнения (10) и краевой задачи (1)–(2) для случая $1>\beta\geq{}^1\!/_2$ будут продолжены во второй части данной работы.

Список литературы

1 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

2 *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

3 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010. — 334 с.

4 *Жанболова А.К., Каршыгина Г.Ж.* О нагруженном уравнении теплопроводности с нагрузкой дробного порядка // Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики: Материалы Междунар. науч. конф. 12–14 июня. — Караганда, 2014. — С. 25, 26.

5 *Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.* О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 4 (68). — С. 31–37.

6 *Аттаев А.Х.* Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2008. — Т. 10. — № 2. — С. 14–16.

7 *Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 1. — С. 177–179.

8 *Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Bull. KSU. Ser. Mathematics — 2013. — № 2 (70). — С. 153–158.

9 *Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52. — № 1. — С. 3–14.

10 *Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47. — № 2. — С. 231–243.

11 *Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On a Singular Volterra Integral Equations of the Third Kind // World Applied Sciences Journal. — 2013. — 26 (11). — P. 1424–1427.

А.Х.Аттаев, С.А.Ысқақов, Г.Ж.Қаршығина, М.Ы.Рамазанов

Бөлшекті жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп I

Мақалада жазықтың ширегінде жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп қарастырылған. Мұндағы жүктелген қосылғыш $x = t$ сызығында — бөлшек ретті туындының ізі. Есептің шешімі сығылмайтын өзекті екінші текті Вольтерра ерекше интегралдық теңдеуін зерттеуге келтірілді. Сипаттамалық теңдеуідің шешімімен регуляризациялау әдісін пайдаланып, Вольтерра ерекше интегралдық теңдеуінің $1/2 \le \beta < 1$ болғанда бос емес спектрі бар екені көрсетілген. Шектелмеген облыста біртекті шеттік есептің тривиалды емес шешімінің бар екені туралы теорема дәлелденді.

A.Kh.Attayev, S.A.Iskakov, G.Zh.Karshigina, M.I.Ramazanov

The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order I

In this paper we consider the first boundary value problem for a loaded heat conduction equation in a quarter plane. A loaded summand is the trace of the derivative of fractional order on the manifold $x = t.$ Solving of the problem is reduced to the study of singular Volterra integral equation of the second kind with incompressible kernel. Using the regularization method by solution of the characteristic equation it is shown that the singular Volterra integral equation have the non-empty spectrum a $1/2 \le \beta < 1.$ Theorem on the existence of a nontrivial solution of the homogeneous boundary value problem in an unbounded domain is proved.

References

1 Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, 232 p.

2 Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its application*, Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.

3 Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equation — how perturbed differential equations*, Almaty: Gylym, 2010, 334 p.

4 Zhanbolova A.K., Karshygina G.Zh. *Theoretical and applied problems of mathematics, mechanics and informatics*: Proceedings of the International Scientific Conference con (June, 12–14), 2014 Karaganda, 2014, p. 25–26.

5 Yesbayev A.N., Zhanbolova A.K., Peters S.N. *Bull. of the KSU. Ser. Mathematics*, 2012, 4 (68), p. 31–37.

6 Attayev A.Kh. *Docking frets Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*, 2008, 10, 2, p. 14–16.

7 Deakinov Kh.Zh., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. *Differ. equation*, 1976, 12, 1, p. 177–179.

8 Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. *Bull. of KSU. Ser. Mathematics*, 2013, 2 (70), p. 153–158.

9 Akhmanova D.M., Dzhenaliyev MT, Ramazanov M.I. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 3–14.

10 Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Differential equations*, 2011, 47, 2, p. 231–243.

11 Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. *World Applied Sciences Journal*, 2013, 26 (11), p. 1424–1427.

УДК 517.911865

М.М.Букенов, С.Хабдолда, Б.Хабдолда

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: nani_serik77@mail.ru)

Итерационный метод решения статических задач теории упругости в напряжениях

В статье исследовано асимптотическое поведение при $t \to \infty$ динамической вязкоупругой задачи, построенной на основе использования вязкоупругой модели Максвелла. Получены оценки скорости сходимости решения вязкоупругой задачи к решению статической упругости. Исследуемая модель применяется при построении трехслойного итерационного метода решения статической упругой задачи в напряжениях.

Ключевые слова: теория вязкоупругости, модель Максвелла вязкоупругого тела, решение задачи вязкоупругости в напряжениях, неравенства Корна и Пуанкаре, метод итераций Чебышева.

1. Исследование асимптотических свойств вязкоупругой среды

Постановка задачи содержит следующие соотношения. Уравнения движения сплошной среды:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+f_i\equiv L_i\bar{\sigma};\ x\in\Omega\subset R, \tag{1}$$

соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)i,\,k=1,2,3 \tag{2}$$

и уравнениями состояния:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s_{ik}}{\partial t}+\dfrac{1}{\theta_1}s_{ik}=2\mu\dfrac{\partial l_{ik}}{\partial t}\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}+\dfrac{1}{\theta_2}\sigma=3K\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}\end{cases}; \tag{3}$$

$$s_{ik}=\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma,\ \ \sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33};$$

$$l_{ik}=\varepsilon_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon,\ \ \varepsilon=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33};$$

$$\theta_1=\frac{\eta_1}{\mu},\ \theta_1=\frac{\eta_2}{\mu},\ K=\frac{3\lambda+2\mu}{3}.$$

Уравнения (3) получаются путем применения вязкоупругой модели Максвелла [1] к девиатором s_{ik}, ℓ_{ik} и шаровым составляющим σ, ε тензоров напряжений и деформаций. λ и μ — коэффициенты Ламе; η_1 и η_2 — сдвиговый и объемный коэффициенты вязкости. На границе *Г* области Ω задаются напряжения

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(x,t)n_k=g_i(x),\ x\in \Gamma, \tag{4}$$

в начальный момент времени заданы перемещения и их скорости

$$\bar{u}(x,0)=\bar{u}_0(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\bar{u}_1(x),\ x\in S. \tag{5}$$

В дальнейшем будем рассматривать постановку задач (1)–(5) в напряжениях, предложенную А.Н.Коноваловым [2, 3]. В качестве следствий из (1), (2) можно получить

$$2\rho\frac{\partial^2\varepsilon_{ik}}{\partial t^2}=\frac{\partial L_i\bar{\sigma}}{\partial x_k}+\frac{\partial L_k\bar{\sigma}}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Начальные условия

$$\sigma_{ik}(x,0)=\alpha_{ik}(x),\left.\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial t}\right|_{t=0}=\beta_{ik}(x) \tag{7}$$

должны задаваться таким образом, чтобы деформации, найденные из (3), удовлетворяли уравнениям совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}, \; i, j, k = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Деформации должны быть связаны с начальными условиями (5) соотношениями (2). В [2] показано, что задачи (3), (4) (6), (7), уравнения совместности (8) выполняются на любой момент времени. Изучим вопрос сходимости решения задачи вязкоупругости в напряжениях к решению статической упругой задачи:

$$L_i \overline{\sigma} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{9}$$

$$\sigma_{ik} = \lambda \sigma_{ik} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ik}. \tag{10}$$

К уравнениям (9), (10) следует добавить (8) и граничные условия (4). Запишем уравнения в векторной форме и исключим из них деформации. Тогда получим

$$\rho B \frac{\partial^2 \overline{\sigma}}{\partial t^2} + \rho C \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial t} = A\overline{\sigma} + \overline{F}, \tag{11}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1}{3\eta_2\eta_1} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1}{3\eta_2\eta_1} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1}{3\eta_2\eta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{pmatrix};$$

$$\overline{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix},\ \overline{\sigma}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}.$$

Матрицы B и C симметричны, перестановочны и положительно определены. Относительно оператора А докажем следующую теорему.

Теорема 1. Оператор (-А) с однородными граничными условиями (4) положительно определен.

Доказательство. Введем скалярное произведение следующим образом:

$$\left(\overline{\sigma},\overline{\varepsilon}\right)=\sum_{i,k=1}^{3}\left(\sigma_{ik},\varepsilon_{ik}\right),\ \left(\sigma_{ik},\varepsilon_{ik}\right)=\int_{\Omega}\sigma_{ik}\left(M\right)\varepsilon_{ik}\left(M\right)dM.$$

Соотношения (3) в векторной форме имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon}}{\partial t}=B\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}+C\overline{\sigma}. \tag{12}$$

В [2] показано, что следствием из (6) получается

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(\overline{\varepsilon}\right)=0, \tag{13}$$

где $G\left(\overline{\varepsilon}\right)$ — операторная запись уравнений совместности деформаций (8). Тогда исходя из (13) и (12) и пользуясь линейностью оператора G, имеем:

$$0=\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(\overline{\varepsilon}\right)=G\left(\frac{\partial^2\overline{\varepsilon}}{\partial t^2}\right)=G\left(B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2}+C\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(B\overline{\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial t}G\left(C\overline{\sigma}\right). \tag{14}$$

Если $\theta_1=\theta_2=\theta$ (3), то легко получить:

$$C=\frac{1}{\theta}B. \tag{15}$$

Используя (15), из (14) имеем $\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(B\overline{\sigma}\right)+\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}G\left(B\overline{\sigma}\right)=0.$ Решение этого уравнения имеет вид

$$G\left(B\overline{\sigma}(t)\right)+\theta\frac{\partial}{\partial t}G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}\left(1-e^{-\frac{t}{\theta}}\right)+G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}. \tag{16}$$

Выше был описан способ построения начальных данных в напряжениях. Он обеспечивает выполнение уравнения совместности (8) для деформаций и их скоростей в начальный момент времени:

$$G\left(\overline{\varepsilon}\right)\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}G\left(\overline{\varepsilon}\right)\Big|_{t=0}=0. \tag{17}$$

Однако из уравнений (12) или (13) видно, что остается произвол в выборе начальных напряжений и их скоростей (7). Поэтому при $t = 0$ можно положить $\overline{\varepsilon}(x,0)=B\overline{\sigma}(x,0).$ Тогда из (17) и (12) имеем

$$G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}=0. \tag{18}$$

Подставив (18) в (16), получаем

$$G\left(B\overline{\sigma}(t)\right)\equiv 0. \tag{19}$$

Если ввести функцию

$$\varepsilon^*\left(x,t\right)=B\overline{\sigma}\left(x,t\right), \tag{20}$$

то для нее выполнено уравнение совместности (8), и тогда существует вектор $u^*\left(x,t\right)$ такой, что $2\varepsilon^*_{ik}=\frac{\partial u^*_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u^*_k}{\partial x_i}.$ Пользуясь неравенствами Корна и Пуанкаре [4], можно получить оценку

$$\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)=\left(B^{-1}\overline{\varepsilon}^*,\overline{\varepsilon}^*\right)\geq c\left\|\overline{u}^*\right\|^2, \tag{21}$$

где константа C зависит от λ и μ области Ω. Так как матрица B положительно определена, то

$$\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)=\left(B\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)\geq c_1\left\|\sigma\right\|^2. \tag{22}$$

Учитывая однородные граничные условия (4), получаем равенство $\left(-A\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2,$ $P_k\overline{\sigma}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{kj}}{\partial x_j},$ для проведения дальнейших оценок применим неравенства (21) и (22):

$$\left(-A\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)=\frac{\sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}\geq c\frac{\sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2\left\|\overline{u}^*\right\|^2}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}\geq$$

$$\geq c\frac{\left[\sum_{k=1}^{3}\left(P_k\overline{\sigma},u^*_k\right)\right]^2}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}=c\frac{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)^2}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}=c\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)\geq cc_1\left\|\overline{\sigma}\right\|^2.$$

Окончательно получаем

$$\left(-A\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)\geq c_2\left\|\overline{\sigma}\right\|^2,\ c_2=cc_1. \tag{23}$$

Рассмотрим разность решений вязкоупругой задачи (6), (3), (7), (4) $\overline{\sigma}^b$ и статической задачи теории упругости (8), (9), (10), (4):

$$\overline{\sigma}\left(x,t\right)=\overline{\sigma}^b\left(x,t\right)-\overline{\sigma}^y\left(x\right). \tag{24}$$

Для разности $\overline{\sigma}$ получаем однородную задачу

$$B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2}+C\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}=\frac{1}{\rho}A\overline{\sigma}; \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}\left(x,t\right)n_k=0; \tag{26}$$

$$\overline{\sigma}\left(x,0\right)=\overline{\alpha}\left(x\right)-\overline{\sigma}^{y}\left(x\right)=\overline{\alpha_1}\left(x\right);$$

$$\left.\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}\right|_{t=0}=\overline{\beta}\left(x\right). \tag{27}$$

Получим оценку скорости сходимости функции $\overline{\sigma}\left(x,t\right)$ к нулю. Введем функцию $\overline{z}\left(x,t\right)$

$$\overline{\sigma}\left(x,t\right)=e^{-\alpha t}\,\overline{z}\left(x,t\right). \tag{28}$$

Подставим (28) в (25) и умножим полученное уравнение на $2e^{\alpha t}\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(B\frac{\partial\overline{z}}{\partial t},\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}\right)+\left(\left(\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\right)\overline{z},\overline{z}\right)\right]=2\left(\left(2\alpha B-C\right)\frac{\partial\overline{z}}{\partial t},\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}\right). \tag{29}$$

Выберем параметр $\alpha\succ 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие операторные неравенства:

$$\begin{cases}2\alpha B-C\le 0;\\ -\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\ge 0.\end{cases} \tag{30}$$

Тогда из (29) получаем оценку

$$\left\|\overline{z}\left(x,t\right)\right\|_1\le\left\|\overline{z}\left(x,0\right)\right\|_1, \tag{31}$$

где

$$\left\|\overline{z}\left(x,t\right)\right\|_1^2=\left(B\frac{\partial\overline{z}}{\partial t},\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}\right)+\left(\left(-\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\right)\overline{z},\overline{z}\right). \tag{32}$$

Оценка (31) показывает, что функция $\overline{z}\left(x,t\right)$ ограничена в полунорме (32) для любого момента времени. Возвращаясь по формуле (28) к функции $\overline{\sigma}\left(x,t\right)$, получаем

$$\left\|\overline{\sigma}\left(x,t\right)\right\|_2\le e^{-\alpha t}\left\|\overline{\sigma}\left(x,0\right)\right\|_2; \tag{33}$$

$$\left\|\overline{\sigma}\left(x,t\right)\right\|_2^2=\left(B\frac{\partial\sigma}{\partial},\frac{\partial\sigma}{\partial}\right)+\alpha\frac{d}{dt}\left(B\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)+\left(\left(-\frac{1}{\rho}A+2\alpha^2B-\alpha C\right)\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right). \tag{34}$$

Покажем, что существует параметр $\alpha\succ 0$, при котором выполняются соотношения (30), более того, поставим задачу определения оптимального α, т.е. при котором обеспечивается максимально возможная скорость сходимости $\overline{\sigma}\left(x,t\right)$ к нулю. Из положительной определенности оператора (-*A*) (23) и второго неравенства (30) получаем

$$-\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\ge\frac{1}{\rho}c_2E+\alpha^2B-\alpha C.$$

Вместо (30) рассмотрим следующие неравенства:

$$\begin{cases}2\alpha B-C\le 0;\\ -\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\ge 0,\end{cases} \tag{35}$$

из которых следует (30). Так как матрицы *B* и *C* симметричны и перестановочны, то (35) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 2\alpha\Lambda_B - \Lambda_C \le 0; \\ \dfrac{1}{\rho} c_2 E + \alpha^2 \Lambda_B - \alpha\Lambda_C \ge 0, \end{cases} \tag{36}$$

где Λ_B и Λ_C — диагональные матрицы, состоящие из собственных значений B и C, соответственно. Распишем покомпонентно первое неравенство в (36):

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\mu} - \dfrac{1}{\eta_1} \le 0, \\ \dfrac{2\alpha}{K} - \dfrac{1}{\eta_2} \le 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} \alpha \le \dfrac{1}{2\theta_1}; \\ \alpha \le \dfrac{1}{2\theta_2}. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$x \le \frac{1}{2\theta_1},\ y \le \frac{1}{2\theta_2}. \tag{37}$$

Тогда

$$\alpha = \min(x, y). \tag{38}$$

Расписывая второе неравенство в (36) и учитывая (38), для параметра α получаем следующее соотношение:

$$\alpha = \min\left(x, y, x - \sqrt{x^2 - \frac{c_2\mu}{\rho}}, y = \sqrt{y^2 - \frac{3Kc_2}{\rho}} \right).$$

Параметры x, y или η_1, η_2, при которых α достигает своего максимального значения $\alpha^* = \max\limits_{x\ge 0, y\ge 0} \alpha(x, y)$, принимают следующие значения:

$$x = \sqrt{\frac{c_2\mu}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_2\mu}{\rho}} \le y \le \frac{3}{2}(\lambda+\mu)\sqrt{\frac{c_2}{\rho\mu}};\ \alpha^* = \sqrt{\frac{c_2\mu}{\rho}};$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\mu}{c_2}}, \frac{3\lambda+2\mu}{3(\lambda+\mu)}\sqrt{\frac{\rho\mu}{c_2}} \le 3\eta_2 \le \frac{3\lambda+2\mu}{2\mu}\sqrt{\frac{\rho\mu}{c_2}}; \tag{39}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}}, \frac{\mu}{3(\lambda+\mu)}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}} \le \theta_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}}. \tag{40}$$

Отметим, что θ_2 можно выбрать

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}},\ \alpha^* = \frac{1}{2\theta}. \tag{41}$$

Тогда полунорма (34) упрощается и становится нормой

$$\left\|\overline{\sigma}(x,t)\right\|_2^2 = \left\|\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{2\theta}\overline{\sigma}\right\|_B^2 + \left\|\overline{\sigma}\right\|_D^2. \tag{42}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Решение вязкоупругой задачи (11), (4), (7) сходится к решению статической задачи теории упругости (9), (10), (8), (4). При этом выполняется оценка (33) в норме (42) и оптимальные значения коэффициентов вязкости даются формулами (40).

2 Разностная схема и итерационный метод решения статической задачи теории упругости

Результат, полученный в теореме 2, можно использовать для построения численного метода решения задачи (9), (10), (8), (4). Ради простоты изложения рассмотрим двумерную задачу упругости, а именно плоскую деформацию. Тогда уравнение (11) будет иметь вид

$$B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2} + C\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} = A\overline{\sigma} + \overline{F}, \tag{43}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} \frac{1}{3\eta_1}+\frac{1}{9\eta_2} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & 0 \\ \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{3\eta_1}+\frac{1}{9\eta_2} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & 0 \\ \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{3\eta_1}+\frac{1}{9\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 & \Delta \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix},\ \overline{\sigma}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Плотность ρ полагаем равной единице. Область Ω, в которой определяется решение, будем считать прямоугольником $\Omega=\{0\le x_1\le L_1, 0\le x_2\le L_2\}$. Теперь граничные условия (4) запишутся следующим образом:

$$\begin{cases}\sigma_{11}(0,x_2)=g_1(x_2)\\ \sigma_{12}(0,x_2)=g_2(x_2)\end{cases},\ \begin{cases}\sigma_{11}(L_1,x_2)=g_3(x_2);\\ \sigma_{12}(L_1,x_2)=g_4(x_2);\end{cases}$$
$$\begin{cases}\sigma_{22}(x_1,0)=g_5(x_1)\\ \sigma_{12}(x_1,0)=g_6(x_1)\end{cases},\ \begin{cases}\sigma_{22}(x_1,L_2)=g_7(x_1);\\ \sigma_{12}(x_1,L_2)=g_8(x_1).\end{cases} \tag{44}$$

В области Ω введем прямоугольную, равномерную сетку

$$\overline{\varpi}=\left\{\left(x_{1,k},x_{2,}m\right),x_{1,k}=x_{2,m}=mh_2,\begin{matrix}k=0,\ldots N_1\\ m=0,\ldots N_2\end{matrix}\right\},\ h_1=\frac{L_1}{N_1},\ h_2=\frac{L_2}{N_2}.$$

На $\overline{\varpi}$ определим сеточные функции y_{km} и следующие разностные аналоги производных:

$$\left(y_{km}\right)_{x_1}=\frac{y_{k+1,m}-y_{km}}{h_1},\ \left(y_{km}\right)_{\overline{x_1}}=\frac{y_{km}-y_{k-1,m}}{h_1};$$
$$\left(y_{km}\right)_{x_2}=\frac{y_{k,m+1}-y_{km}}{h_2},\ \left(y_{km}\right)_{\overline{x_2}}=\frac{y_{km}-y_{k,m-1}}{h_2}; \tag{45}$$
$$\Lambda_{11}y=y_{\overline{x_1}x_1},\ \Lambda_{22}y=y_{\overline{x_2}x_2},\ \Lambda_{12}y=y_{x_1x_2};$$
$$\Lambda_{12}^{*}y=y_{\overline{x}_1\overline{x}_1},\ \Delta_h y=\Lambda_{11}y+\Lambda_{22}y.$$

Следуя методу, изложенному в [4], запишем аппроксимацию оператора A:

$$A_h=\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & & \Lambda_{12} \\ & \Lambda_{22} & \Lambda_{12} \\ & & \\ \Lambda_{12}^{*} & \Lambda_{12}^{*} & \Delta_h \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Аппроксимируя производные по времени обычным способом, из (43) получим

$$B\overline{y}_{\bar{t}t}^{n}+C\overline{y}_{t^0}^{n}=A_h\overline{y}^{n}+\overline{F}^{n}. \tag{47}$$

Здесь $y_{\bar{t}t}^n = \dfrac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2}$, $y_{t^0}^n = \dfrac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau}$; τ — шаг по времени. Отметим, что полученное разностное уравнение (47) является канонической формой трехслойной разностной схемы по А.А.Самарскому [5]. Из (44) и (7) вытекают начальные и краевые условия для уравнения (47):

$$\begin{cases} y_{11,0m} = g_{1,m}, \\ y_{12,0m} = g_{2,m}, \end{cases} \begin{cases} y_{11,N_1m} = g_{3,m}; \\ y_{12,N_1m} = g_{4,m}; \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} y_{22,ko} = g_{5,k}, \\ y_{12,ko} = g_{6,k}, \end{cases} \begin{cases} y_{22,kN_2} = g_{7,k}; \\ y_{12,kN_2} = g_{8,k}; \end{cases}$$

$$\bar{y}_{km}^0 = \bar{\alpha}_{km}, \bar{y}_{km,t}^0 = \bar{\beta}_{km}. \tag{49}$$

Для решения разностной задачи (47), (48), (49) построим стандартную трехслойную итерационную схему, которая была исследована в [6]. Схема определяется следующим образом:

$$Dy_{k+1} = \alpha_{k+1}\left(D - \tau_{k+1}A\right)y_k + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)Dy_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}F; \tag{50}$$

$$Dy_1 = \left(D - \tau_1 A\right)y_0 + \tau_1 F, \ k = 1,2,\ldots, \tag{50}$$

где y_0 — произвольное начальное приближение; D — линейный невырожденный оператор; α_k и τ_k — итерационные параметры. Решение задачи

$$-Ay + F = 0. \tag{51}$$

При помощи схемы (50), которая называется полуитерационным методом Чебышева, и в [6] доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия

$$\gamma_1 \le D^{-1}A \le \gamma_2, \ \gamma_1 \succ 0; \ D^{-1}A = \left(D^{-1}A\right)^*. \tag{52}$$

Полуитерационный метод Чебышева (50) с итерационными параметрами

$$\tau_k \equiv \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}; \ \alpha_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho_0^2\alpha_k}; \ k = 1, 2, \ldots, \ \alpha_1 = 2, \tag{53}$$

сходится в H, и для погрешности $z_k = y - y_k$ справедлива оценка

$$\|z_k\| \le q_k \|z_0\|. \tag{54}$$

Для числа итераций n имеет место оценка $n \ge n_0(\varepsilon)$, где

$$n_0(\varepsilon)\frac{\ln\frac{\varepsilon}{2}}{\ln\rho_1}; \ \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}; \ \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}; \ q_k = \frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}}; \ \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{55}$$

Разностная схема (47), (48), (49) эквивалентна (50), если выполняются следующие условия:

$$B = \frac{\tau}{2\tau_{k+1}}D, \ C = \frac{\tau\left(2 - \alpha_{k+1}\right)}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}}D, \ -A_h = A, \tag{56}$$

и функция $\bar{\beta}_{km}$ из (49) выбирается так:

$$\bar{\beta}_{km} = D^{-1}\left(-A\bar{\alpha}_{km} + \bar{F}\right). \tag{57}$$

Так как матрица B симметрична и положительно определена, то в качестве операторов *Д* и D в (20), (22) и (24) можно взять B:

$$Д = B; D = B. \tag{58}$$

Учитывая соотношение (15),

$$C = \frac{1}{\theta}B, \tag{59}$$

для параметров схемы (47) τ и θ из (56), (58) получаем выражения:

$$\tau^2 = 2\tau_{k+1}, \frac{1}{\theta_{k+1}} = \frac{\tau\left(2 - \alpha_{k+1}\right)}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}} \text{ или } \tau^2 = \frac{4}{\gamma_1 + \gamma_2}, \theta_k = \frac{\alpha_k\tau}{2\left(2 - \alpha_k\right)}. \tag{60}$$

Здесь γ_1 и γ_2 — константы эквивалентности операторов B и γ_1

$$\gamma_1 B \le -A_h \le \gamma_2 B, \tag{61}$$

а параметры α_k рассчитываются по формуле (53). Условие (57) с учетом (58) имеет вид:

$$B\overline{y}_t^0 = A_h \overline{y}^0 + \overline{F}. \tag{62}$$

Начальное приближение y_0 выбираем таким образом, чтобы для него выполнялись уравнения совместности, тогда из (62) имеем

$$G_h\left(B\overline{y}_t^0\right) = 0, \tag{63}$$

где $G_h(\varepsilon)$— аппроксимация уравнений (8). Это обеспечивает выполнение неравенств (61) и, значит, сходимость схемы (47).

Таким образом, согласно приведенной теореме и проведенным выше рассуждениям, решение разностной схемы (47), (48), (49) сходится к решению разностной задачи, аппроксимирующей статическую задачу теории упругости (9), (10), (8), (4). Для решения задачи (47), (48), (49) можно построить также стационарный трехслойный метод [6]. В этом случае итерационная схема имеет вид (50), в котором параметры α_k и τ_k постоянны.

$$\tau_k = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \ \alpha_k = 1 + \rho_1^2. \tag{64}$$

При этом оценка скорости сходимости схемы ухудшается по сравнению с (54).

$$\|z_k\| \le \overline{q}_k \|z_0\|;$$

$$\overline{q}_k = \rho^k\left(1 + K\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}\right), \tag{65}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{q_k}{\overline{q}_k} = 0.$$

Поэтому для практических расчетов предпочтительней использовать метод (50) с параметрами (53).

Список литературы

1 *Роботнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.

2 *Коновалов А.Н.* О решении вязкоупругих задач в напряжениях. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы V Всесоюз. конф. — Ч. 1. — Новосибирск, 1978. — С. 104–109.

3 *Коновалов А.Н.* Решение задач теории упругости в напряжениях. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979.

4 *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974.

5 *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.

6 *Самарский А.А., Николаев А.С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

М.М.Букенов, С.Хабдолда, Б.Хабдолда

Кернеулі серпін теориясындағы статикалық есептерді шешудің итерациялық әдісі

Мақалада Максвеллдің тұтқыр серпімді моделін қолдану негізінде құрылған динамикалық тұтқыр серпімді есептің $t \to \infty$ болғандағы асимтотикалық күйі зерттелді. Тұтқыр серпімді есептің шешімінің статистикалық серпімді шешімге жинақталу жылдамдығының бағасы алынған. Зерттелген модель кернеулердегі статистикалық серпімді есепті шешудің үшқабатты итерациялық әдісін құру үшін қолданылады.

M.M.Bukenov, S.Khabdolda, B.Khabdolda

Iterative method for solving static problems the theory of elasticity in terms of stresses

In this paper we study the asymptotic behavior as $t \to \infty$ dynamic viscoelastic problems constructed based on the use of a viscoelastic Maxwell model. Estimates of the rate of convergence of solutions of a viscoelastic problem to the solution of static elasticity. The study model is used to construct a three-layer iterative method for solving the problem in the static elastic stresses.

References

1 Rabotnov Yu.N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Moscow: Nauka, 1977.

2 Konovalov A.N. *On the solution of viscoelastic problems in stresses. Numerical methods for solving problems decisions of tasks in the theory of elasticity and plasticity*: Materials of All-Union Conference, Novosibirsk, 1978, p. 104–109.

3 Konovalov A.N. *Solution of Problems* of *Elasticity Theory* in *Stresses*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1979.

4 Fichera G. *Existence theorems in elasticity*, Moscow: Mir, 1974.

5 *Samarskiy A.A. Introduction to the theory of difference schemes*, Moscow: Nauka, 1971.

6 *Samarskiy A.A.*, *Nikolayev* A.S. *Methods for solving the grid equations*, Moscow: Nauka, 1977.

УДК 681.5

А.В.Букетов, Л.В.Кравцова, А.П.Богдан

Херсонская государственная морская академия, Украина
(E-mail: arundo.p@mail.ru)

Определение вероятностей восстановления образцов эпоксидных композитных материалов при повторно-переменных нагружениях

В статье представлены результаты экспериментального исследования полимерных композитных материалов при воздействии повторно-переменных нагружений. На основе экспериментальных данных методом теории случайных процессов установлены вероятности пребывания системы в различных состояниях, а также вероятность разрушения образца при достижении состояния пластической деформации. Разработанная модель позволяет прогнозировать свойства и поведение композитных материалов в процессе эксплуатации.

Ключевые слова: случайные процессы, прогнозирование свойств, вероятности состояний системы.

Постановка проблемы

Полимерные композитные материалы (ПКМ) находят широкое применение в конструкциях разного назначения. Обеспечение экономичности и безопасности эксплуатации конструкций и деталей предъявляет определенные требования к надежности и долговечности используемых материалов [1, 2]. Их высокие удельные механические характеристики особенно необходимы там, где большую роль играет требование снижения массы конструкции. Однако широкое применение ПКМ предполагает также решение ряда научно-технических проблем, связанных с их эксплуатацией. Одно из главных направлений исследований на современном этапе связано с изучением свойств, расширением понимания поведения ПКМ в условиях повторно-переменных нагрузок, с анализом накопленной информации (в том числе и экспериментальных данных), которые позволят сделать достоверные выводы. В частности, интересным с научной точки зрения является испытание образцов ПКМ на чистый изгиб при повторно-переменных нагружениях. Анализ этих испытаний с точки зрения математических методов теории случайных процессов позволит прогнозировать поведение ПКМ в процессе эксплуатации и расширить область применения КМ.

В работе проведены испытания образцов ЭКМ на четырехточечный изгиб при повторно-переменных нагружениях. Нагрузку на образец подавали до определенной величины деформации с шагом 0,05 мм, после чего образец разгружали с тем же шагом деформации. При этом для каждого узлового значения деформации фиксировали изменение нагрузки. Процесс повторно-переменных нагружений повторяли до момента разрушения образца. В результате эксперимента получена зависимость нагрузки на образец от его деформации с учетом цикла.

Анализ последних исследований и публикаций

Известно, что исследование закономерностей процессов деформации и разрушения материалов, находящихся под действием постоянного напряжения, способствует наиболее достоверному прогнозированию деформационных процессов, происходящих в материалах, в том числе и ПКМ [3, 4]. В работах [5–7] авторами проанализированы и исследованы вопросы зависимости абсолютной деформации образца эпоксидного композитного материала от продолжительности воздействия статической нагрузки, предложен метод определения вероятности восстановления образца после снятия статической нагрузки, что, в свою очередь, обеспечит надежность эксплуатации технологического оборудования в различных отраслях промышленности. Данная работа является логическим продолжением исследований.

Цель работы — определение вероятностей пребывания образца эпоксидного композитного материала в различных состояниях при повторно-переменных нагружениях, а также вероятности разрушения образца при достижении им состояния пластической деформации.

Результаты исследования

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется Марковским (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Классификация Марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

– с дискретными состояниями и дискретным временем (*цепь Маркова*);

– с непрерывными состояниями и дискретным временем (*Марковские последовательности*);

– с дискретными состояниями и непрерывным временем (*непрерывная цепь Маркова*);

– с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется непрерывной цепью Маркова при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

Пусть $S_1, S_2, \ldots S_n$ — всевозможные состояния системы S. Вероятность $p_1(t) = p(S_i(t))$, $i = 1, \ldots n$; $t \ge 0$ события $S_i(t)$, состоящего в том, что система S в момент времени t находится в состоянии S_i, называется вероятностью i-ого состояния системы в момент времени t. Вероятность состояния $p_i(t)$ является, таким образом, вероятностной функцией времени $t \ge 0$.

Так как в любой момент времени t система S будет находиться только в одном из состояний $S_1, S_2, \ldots S_n$, то события $S_i(t)$, $i = 1, \ldots n$ несовместны и образуют полную группу. Поэтому имеет место нормировочное условие: $\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \ge 0$.

Вероятности состояний $p_1(t)$, $i = 1, \ldots n$ (неизвестные вероятностные функции) являются решением следующей системы дифференциальных уравнений:

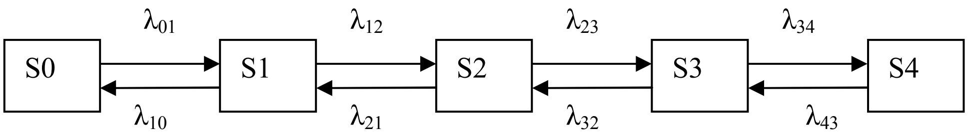
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) p_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j(t), i = 1, \ldots n; t \ge 0.$$

Система представляет собой систему n обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эта система называется системой дифференциальных уравнений Колмогорова.

В нашем случае составим систему Колмогорова по размеченному графу состояний.

В дифференциальном уравнении Колмогорова для функции $p_1(t),\ i=1,...n,$ левая часть состоит из производной $\frac{dp_i(t)}{dt}$ функции $p_i(t),$ а правая часть представляет произведение $\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)$ суммы $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ij},$ выходящих из состояния S_i, на вероятность $p_i(t)$ этого состояния со знаком минус плюс сумма $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_j(t)$ произведений $\lambda_{ij}p_j(t)$ плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ij},$ соответствующих стрелкам, входящим в состояние S_i, на вероятности состояний $p_j(t),$ из которых эти стрелки выходят. При этом плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij},$ соответствующие отсутствующим стрелкам на графе, равны 0.

Граф состояний имеет вид:



Здесь S_i — состояние системы, соответствующее пограничной деформации образца в момент снятия нагрузки.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, составленная по графу состояний, имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dp_1(t)}{dt}=-(\lambda_{10}+\lambda_{12})p_1(t)+\lambda_{01}p_0(t)+\lambda_{21}p_2(t);\\ \dfrac{dp_2(t)}{dt}=-(\lambda_{21}+\lambda_{23})p_2(t)+\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{32}p_3(t);\\ \dfrac{dp_3(t)}{dt}=-(\lambda_{32}+\lambda_{34})p_3(t)+\lambda_{23}p_2(t)+\lambda_{43}p_4(t);\\ \dfrac{dp_4(t)}{dt}=-\lambda_{43}p_4(t)+\lambda_{34}p_3(t).\end{cases}$$

Кроме того, учитываем нормировочное требование $\sum_{i=0}^{n}p_i(t)=1,\forall t\ge 0.$

Вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояний $P_1(t),\ldots,P_n(t)$ в правых частях уравнений заменить соответственно на неизвестные финальные вероятности $P_1,\ldots,P_n$.

По результатам измерений получена система линейных уравнений для определения вероятностей состояний $p_0,p_1,...p_5$ с учетом нормировочного уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_1(t)}{dt}=-82{,}1p_1(t)+46{,}8p_0(t)+31{,}9p_2(t);\\ \dfrac{dp_2(t)}{dt}=-79{,}8p_2(t)+52{,}2p_1(t)+27{,}2p_3(t);\\ \dfrac{dp_3(t)}{dt}=-67{,}8p_3(t)+50{,}8p_2(t)+16{,}4p_4(t);\\ \dfrac{dp_4(t)}{dt}=-17{,}4p_4(t)+40{,}6p_3(t);\\ p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1.\end{cases}$$

Приравняем к нулю правые части системы:

$$\begin{cases} 46.8p_0 - 82.1p_1 + 31.9p_2 = 0; \\ 52.2p_1 - 79.8p_2 + 27.2p_3 = 0; \\ 50.8p_2 - 67.8p_3 + 16.4p_4 = 0; \\ 40.6p_3 - 17.4p_4 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1. \end{cases}$$

Систему решаем матричным методом. В матричной форме она имеет вид $A\overline{x} = \overline{b}$, где A — матрица коэффициентов; $\overline{x}$ — вектор-столбец неизвестных; $\overline{b}$ — правая часть.

Тогда если A^{-1} — обратная матрица, такая что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E — единичная матрица, то решение системы имеет вид $\overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{b}$.

В нашем случае решением системы будут значения вероятностей состояний системы p_0, p_1, ... p_5.

Матрица коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 46.8 & -82.1 & 31.9 & 0 & 0 \\ 0 & 52.2 & -79.8 & 27.2 & 0 \\ 0 & 0 & 50.8 & -67.8 & 16.4 \\ 0 & 0 & 0 & 40.6 & -17.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{x} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0201 & 0.031 & 0.0345 & 0.0357 & 0.055 \\ -0.00173 & 0.015 & 0.0229 & 0.0262 & 0.081 \\ -0.00274 & -0.01 & 0.0083 & 0.01515 & 0.128 \\ -0.00472 & -0.01 & -0.0197 & -0.0058 & 0.221 \\ -0.0110 & -0.03 & -0.0459 & -0.0711 & 0.515 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $\overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{b}$ получим вектор-столбец решения системы

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0549 \\ 0.0811 \\ 0.1283 \\ 0.2207 \\ 0.5150 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вероятность пребывания системы в состоянии S_0 составляет $p_0 = 0{,}055$, в состоянии S_1 — $p_1 = 0{,}0811$, в состоянии S_2 — $p_2 = 0{,}1283$, в состоянии S_3 — $p_3 = 0{,}2207$, в состоянии S_4, предшествующем разрушению, $p_4 = 0{,}5150$.

Выводы

Методом теории случайных процессов установлены вероятности пребывания системы в различных состояниях, а также вероятность разрушения образца при достижении состояния пластической деформации. Разработанная модель дает возможность анализировать, прогнозировать свойства, а также оценить поведение композитных материалов под действием повторно-переменной нагрузки, и на основе этих результатов предотвратить преждевременное разрушение.

Список литературы

1 *Кербер М.Л., Виноградов В.М., Головкин Г.С. и др.* Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: Учеб. пособие / Под ред. А.А. Берлина. — СПб.: Профессия, 2008. — 560 с.; ил.

2 *Аскадский А.А.* Компьютерное материаловедение полимеров. — Т. 1. Атомно-молекулярный уровень. — М.: Научный мир, 1999. — С. 544.

3 *Макаров А.Г., Ростовцева Н.Г.* Моделирование деформационных свойств полимерных материалов // Дизайн. Материалы. Технология. — 2008. — № 1 (4). — С. 140–145.

4 *Букетов А.В.* Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем: Посібник. — Тернопіль: СМП «Тайп», 2009. — 260 с.

5 *Кравцова Л.В.* Определение вероятностей напряженного состояния эпоксидных композитных материалов под воздействием статической нагрузки / Л.В. Кравцова, А.В. Букетов, А.П. Пирог // Искусственный интеллект. — 2013. — № 3 (61). — С. 355–363.

6 *Кравцова Л.В.* Определение вероятностей восстановления и разрушения полимерных композитных материалов под действием статической нагрузки / Л.В. Кравцова, А.П. Пирог, А.В. Букетов // Наукові нотатки. — Луцьк: Изд-во ЛНТУ, 2013. — № 43. — С. 126–133.

7 *Букетов А.В.* Прогнозування деформаційних властивостей епоксидних композитних матеріалів / А.В. Букетов, Л.В. Кравцова, А.П. Пірог // Вісн. Житомирського державного технічного ун-ту. — 2013. — № 4 (67). — С. 7–11.

А.В.Букетов, Л.В.Кравцова, А.П.Богдан

Қайталанған айнымалы жүктеме үшін эпоксидті композитті материалдардың үлгілерін қалпына келтіру ықтималдықтарын анықтау

Мақалада қайталанған айнымалы жүктеменің әсері бар эпоксидті полимерлі композитті материалдардың экпериментaлды зерттеулердің нәтижелері берілген. Экспериментaлды нәтижелер негізінде кездейсоқ процестер теориясының әдісі мен жүйенің әр түрлі күйдегі ықтималдықтары, сондай-ақ пластикалық деформация күйіне жеткендегі үлгінің құлдырау ықтималдылығы орнатылған. Құрылған модель эксплуатация кезіндегі композитті материалдардың өзгеруін және қасиеттерін болжауға мүмкіндік береді.

A.V.Buketov, L.V.Kravtsova, A.P.Bogdan

Determination of probabilities recovery samples of epoxy composite materials under cyclic loading

The paper presents the results of an experimental study of polymer composite materials when exposed to cyclic loading. On the basis of experimental data using the theory of random processes, the probability of the system being installed in different states, as well as the probability of failure of the sample when the state of the plastic deformation. The developed model allows to predict the properties and behavior of composite materials during operation.

References

1 Kerber M.L., Vinogradov V.M., Golovkin G.S. et al. *Polymer composite materials: structure, properties, technology:* Tutorial / Edit. by A.A. Berlin, Saint Petersburg: Professiya, 2008, 560 p.; il.

2 Askadskiy A.A. *Computational materials science of polymers. Atomic and molecular level*, Moscow: Nauchnyiy mir, 1999, p. 544.

3 Makarov A.G., Rostovceva N.G. *Design. Materials. Technology*, 2008, 1 (4), p. 140–145.

4 Buketov A.V. *Identification and modeling of technological objects and systems:* Manual, Ternopil: SMP «Tiap», 2009, 260 p.

5 Kravtsova L.V. *Artificial Intelligence*, 2013, 3 (61), p. 355–363.

6 Kravtsova L.V. *Interuniversity collection «Research notes»*, Luck: LNTU publ., 2013, 43, p. 126–133.

7 Buketov A.V. *Journal of Zhytomyr State Technical University*, 2013, 4 (67), p. 7–11.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: Modth1705@mail.ru)

Сильно минимальные йонсоновские множества

В статье введены и рассмотрены понятия минимальных йонсоновских множеств и, соответственно, сильно минимальных йонсоновских множеств. На этой основе введено понятие независимости специальных подмножеств экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели, которое приводит к понятию базиса, и далее мы имеем йонсоновский аналог теоремы о несчетной категоричности.

Ключевые слова: йонсоновская теория, йонсоновское множество, фрагмент йонсоновского множества, решётка экзистенциальных формул йонсоновской теории.

Данная статья посвящена изучению понятия йонсоновского множества и его применения. Понятие йонсоновского множества было определено в [1], и в дальнейшем были получены результаты, которые были доложены в [2–4]. Понятие сильной минимальности как для множеств, так и для теорий сыграли решающую роль при получении результата об описании несчетно-категоричных теорий [5].

Хорошо известно, что йонсоновские теории представляют собой естественный подкласс такого широкого класса теорий, как класс индуктивных теорий. Кроме того, основные примеры теорий алгебр являются примерами индуктивных теорий, и они, как правило, представляют пример неполных теорий. При этом современный аппарат теории моделей развивался в основном для полных теорий, поэтому на сегодняшний день техника изучения неполных теорий заметно беднее, чем для полных.

С одной стороны, условия Йонсона — это естественные алгебраические требования, которые возникают при изучении широкого класса алгебр. С другой — естественных примеров йонсоновских теорий достаточно много, это, например, теории булевых алгебр, абелевых групп, полей фиксированной характеристики, полигонов и т. д. Все эти примеры важны как в алгебре, так и в различных областях математики. Как видно из перечисленного списка, сфера применения техники, развитой для изучения йонсоновских теорий, может быть достаточно широка.

Таким образом, всё сказанное выше говорит о том, что изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий является актуальной задачей.

Из опыта изучения индуктивных теорий [6] следует, что йонсоновские теории, как подкласс индуктивных теорий, представляют собой такую часть, в которой есть определенные методы исследования неполных теорий, а именно метод переноса свойств первого порядка центра йонсоновской теории на саму йонсоновскую теорию. Об этом методе и об исследованиях в рамках изучения йонсоновских теорий, имеющих отношение к материалу данной статьи, мы можем отослать читателя к источникам [7–10].

Как было замечено выше, основная техника, связанная с более тонкими методами исследования поведения элементов модели, относится к прерогативе техники исследования полных теорий. Поэтому, даже стараясь просто найти обобщение стандартных понятий из арсенала полных теорий, мы можем натолкнуться либо на тавтологию, либо на понятие, которое технически неоправданно. Отсюда и были предложены йонсоновские множества. Напомним основные определения из [1], которые связаны с этими множествами.

Пусть задан произвольный язык L.

Теория T называется йонсоновской, если она:

1) имеет бесконечные модели;

2) индуктивна;

3) обладает свойством совместного вложения (JEP);

4) обладает свойством амальгамы (AP).

Йонсоновская теория T называется совершенной теорией, если семантическая модель насыщенна.

Пусть T — йонсоновская совершенная теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L и ее семантическая модель есть C.

Мы говорим, что множество X Σ-определимо, если оно определимо некоторой экзистенциальной формулой.

а) Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– dcl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

б) Множество X называется алгебраически йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– acl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

Из определения йонсоновских множеств видно, что они устроены очень просто в смысле ранга Морли [1]. Получается, что элементы из теоретико-множественной разности (лунки) замыкания и множества имеют ранг 0, т.е. они все алгебраические. А значит, это тот случай, когда мы можем работать с элементами даже и в неполном случае.

Второй момент полезности такого определения йонсоновского множества заключается в том, что мы, замыкая данное множество, сразу получаем некоторую экзистенциально замкнутую модель. Это, в свою очередь, дает нам определить йонсоновский фрагмент сначала у рассматриваемого множества, а в принципе — и у произвольной теории.

На данный момент достаточно хорошо изученными являются совершенные йонсоновские теории. Для них был доказан критерий совершенности [7], что позволило получить многие теоретико-модельные факты относительно йонсоновской теории и ее центра. Имеются полные описания как центра таких теорий, так и классов их моделей.

Если в случае изучения полных теорий мы имеем в основном дело с двумя объектами — это сама теория и ее модели, то в случае изучения йонсоновской теории мы в качестве моделей рассматриваем класс эзистенциально замкнутых моделей рассматриваемой теории, а также дополнительным условием является некоторая полнота рассматриваемой теории в логическом смысле. Как минимум, рассматриваемая теория должна быть экзистенциально полна. Дадим определения йонсоновского фрагмента. Будем говорить, что все $\forall\exists$-следствия произвольной теории создают йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих $\forall\exists$-следствий есть йонсоновская теория. В силу того, что это не всегда верно, было бы интересно уметь выделять у произвольной теории такую часть, которая будет йонсоновской теорией. Такая задача имеет место быть хотя бы в силу того, что морлизация произвольной теории нам это обеспечивает, более того, полученная теория совершенна [6].

Другой путь — использование такого факта, что любая счетная модель индуктивной теории обязательно вложится изоморфно в некоторую экзистенциально замкнутую модель рассматриваемой теории [6]. Далее рассматриваем все $\forall\exists$-предложения, истинные в этой модели. Тогда в случае йонсоновской теории хорошо известен тот факт, что $\forall\exists$-предложения, истинные в данной экзистенциально замкнутой модели, образуют йонсоновскую теорию. В противном случае на данный момент, кроме обогащения сигнатуры (случай сколемизации и морлезации [6]), у нас нет способа достичь йонсоновости теории.

Для изучения поведения элементов лунки в случае йонсоновских множеств мы всегда можем рассмотреть $\forall\exists$-следствия, истинные в указанных выше замыканиях йонсоновского множества. В силу сказанного выше, в том случае, что рассмотренное множество предложений будет йонсоновской теорией.

Полученная таким образом йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом соответствующего йонсоновского множества. Понятно, что мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследовании йонсоновских теорий.

Основной задачей данной статьи является в рамках данных нововведенных определений рассмотреть и попытаться описать сильно минимальные йонсоновские множества. Это, в свою очередь, повлечет за собой целый ряд новых постановок задач, например, уточнение теоремы Лахлана-Болдуина в рамках нововведенной тематики.

Напомним, что йонсоновская теория T имеет семантическую модель C достаточно большой мощности. Если эта модель является насыщенной, то данная йонсоновская теория называется совершенной. Семантические модели совершенной йонсоновской теории однозначно определяются своей мощностью. Далее, так как мы будем иметь дело с совершенными йосоновскимим теориями, нам удобно работать внутри некоторой большой семантической экзистенциально замкнутой модели, содержащей все остальные экзистенциально замкнутые модели рассматриваемой совершенной йонсоновской теории. Назовем эту модель универсальной экзистенциальной областью (УЭО).

Ее можно также охарактеризовать следующими условиями.

1. Каждая модель данной теории изоморфна, вложима в $C^{Б}$.

2. Каждый изоморфизм между двумя подмоделями продолжается до автоморфизма модели C.

Мы будем рассматривать не все подмножества C, а только йонсоновские подмножества.

Для любых Σ-определимых подмножеств семантической модели мы имеем верный следующий результат.

Лемма 1. Σ-определимое подмножество семантической модели определимо над множеством параметров A из семантической модели, если и только если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов модели С, оставляющих на месте каждый элемент из A.

Отсюда следует, что определимое замыкание dcl (A) йонсоновского множества A, т.е. множество всех элементов, определимых над A, совпадает с множеством элементов, инвариантных относительно всех автоморфизмов над A.

Из леммы 1 вытекает, что элемент b алгебраичен над A, если и только если он имеет лишь конечное число элементов, сопряженных над A.

Определим ранг Морли для экзистенциально определимых подмножеств семантической модели.

Мы хотим приписать каждому Σ-определимому подмножеству D из семантической модели порядковое число (или, возможно, -1 или ∞) — его ранг Морли, обозначаемый через MR. Сначала определим отношение $MR(D) \geq \alpha$ посредством рекурсии по ординалу α.

Пусть T — совершенная йонсоновская теория, C — ее УЭО.

Определение 1. $MR(D) \geq 0,$ если и только если D непусто;

– $MR(D) \geq \lambda,$ если и только если $MR(D) \geq \alpha$ при всех $\alpha < \lambda$ (λ — предельный ординал);

– $MR(D) \geq (\alpha+1),$ если и только если в D существует бесконечное семейство (D_i) попарно непересекающихся Σ определимых подмножеств, таких что $MR(D)_i \geq \alpha$ при всех i.

Тогда ранг Морли класса D равен $MR(D) = \sup\left\{\dfrac{\alpha}{MR(D)} \geq \alpha\right\}.$

Причем будем считать, что $MR(\varnothing) = -1$ и $MR(D) = \infty,$ если 48/ для всех α (в последнем случае будем говорить, что D не имеет ранга).

Заметим,что Σ-определимый класс имеет ранг -1, если он пуст; ранг 0, если он конечен; ранг 1, если он бесконечен, но не содержит бесконечного семейства непересекающихся бесконечных Σ-определимых классов.

Лемма 2. Справедливо соотношение $MR(D_1 \cup D_2) = \max\left(MR(D_1), MR(D_2)\right).$

Определение 2. Степень Морли $Md(D)$ йонсоновского подмножества D из семантической модели, имеющего ранг Морли $\alpha,$ — это максимальная длина d его разложения $D = D_1 \cup ... \cup D_d$ на непересекающиеся экзистенциально определимые подмножества ранга $\alpha.$

В случае ранга 0 степень экзистенциально определимого подмножества D — это просто число его элементов. Если экзистенциально определимое подмножество не имеет ранга, то не определена и его степень Морли.

Рассмотрим йонсоновски минимальные множества. Далее под структурой понимается модель сигнатуры или языка L рассматриваемой йонсоновской теории.

Пусть M — структура, и пусть $D \subseteq M^n$ — бесконечное Σ-определяемое подмножество. Мы говорим, что D является минимальным в M, если для любого Σ-определяемого $Y \subseteq D$ либо Y конечно, либо D/Y конечно. Если $\varphi(\bar{v}, \bar{a})$ является формулой, которая определяет D, то мы также можем сказать, что $\varphi(\bar{v}, \bar{a})$ минимальна.

Мы говорим, что D и φ йонсоновски сильно минимальны, если φ минимальна в любом экзистенциально замкнутом расширении N из M.

Будем говорить, что теория T йонсоновски сильно минимальна, если $\forall M \in E_T, M$ является йонсоновски сильно минимальной.

Рассмотрим пример алгебраического замыкания в нескольких йонсоновски сильно минимальных теориях.

Если K — алгебраически замкнутое поле и $A \subseteq K$, то $acl(A)$ является алгебраическим замкнутым подполем, порожденным A.

Следующие свойства алгебраического замыкания верны для любого алгебраически йонсоновского множества D.

i) $acl\left(acl(A)\right) = acl(A) \supseteq A$.

ii) Если $A \subseteq B$, то $acl(A) \subseteq acl(B)$.

iii) Если $a \in acl(A)$, тогда $a \in acl(A_0)$ для некоторого конечного $A_0 \subseteq A$.

Более тонкое свойство верно, если D йонсоновски сильно минимально.

Лемма о замене. Предположим, что D — подмножество семантической модели рассматриваемой теории и оно йонсоновски сильно минимально, $A \subseteq D$ и $a, b \in D$. Если $a \in acl(A \cup \{b\}) \setminus acl(A)$, тогда $b \in acl\left(A \cup \{a\}\right)$.

Замечание. Йонсоновски сильно минимальное множество — это экзистенциально определимое подмножество семантической модели рассматриваемой теории ранга 1 и степени 1 в смысле Морли.

Определение 2. 1. Йонсоновская теория T йонсоновски тотально трансцендентна, если каждое экзистенциально определимое подмножество ее семантической модели имеет ранг Морли.

2. Теория T является йонсоновски ω-стабильной, если число экзистенциальных типов счетно для каждого счетного А подмножества семантической модели.

Теорема 1. Йонсоновская теория T йонсоновски тотально трансцендентна, если и только если она йонсоновски ω-стабильна.

Лемма 3. Пусть a и b — произвольные элементы семантической модели. Если элемент b алгебраичен над A и a, где A — экзистенциально определимое подмножество семантической модели, то $MR\left(\frac{b}{A}\right) \leq MR\left(\frac{a}{A}\right)$.

Следствие 1. Пусть M — некоторая ω-насыщенная экзистенциально замкнутая подмодель семантической модели, а φ — некоторая $L(M)$-формула ранга α и степени Морли d. Тогда можно разложить φ на $L(M)$-формулы $\varphi_1, ..., \varphi_m$ ранга α и степени 1.

Во всяком йонсоновски сильно минимальном множестве мы можем определить понятие независимости, обобщающее линейную независимость в векторных пространствах и алгебраические независимости в алгебраически замкнутых полях.

Зафиксируем $M \models T$ и D йонсоновски сильно минимальное множество в M — экзистенциально-замкнутую подмодель семантической модели йонсоновской теории T.

Определение 2. Будем говорить, что $A \subseteq D$ независимо, если $a \notin acl\left(A \setminus \{a\}\right)$ для всех $a \in A$. Если $C \subset D$, мы говорим, что A независимо над C, если $a \notin acl\left(C \cup \left(A \setminus \{a\}\right)\right)$ для всех $a \in A$.

Мы покажем, что бесконечные независимые множества являются множествами неразличимых элементов.

Лемма 3. Пусть T — йонсоновски сильно минимальная теория и $\varphi(\upsilon)$ является йонсоновски сильно минимальной формулой с параметрами из A, где либо $A = \varnothing$, либо $A \subseteq M_0$ где $M_0 \models E_T, M_0 <_1 M$, и $M_0 <_1 N$. Если $a_1, ..., a_n \in \varphi(M)$ независимы над A и $b_1, ..., b_n \in \varphi(N)$ являются независимыми над A, то полные экзистенциальные типы $tp^M\left(\frac{\bar{a}}{A}\right), tp^N\left(\frac{\bar{b}}{A}\right)$ равны между собой.

Следствие 1. Если $M, N \models T$ и $\varphi(\upsilon)$, как указано выше, B представляет собой бесконечное подмножество $\varphi(M)$, независимое над A и C, является бесконечным подмножеством $\varphi(N)$, независимым над A, тогда B и C являются бесконечными множествами неразличимых того же типа над A. Таким образом, мощность однозначно определяет независимые подмножества D.

Определение 3. Будем говорить, что A является базисом для $Y \subseteq D$, если $A \subseteq Y$ независимо и $acl(A) = acl(Y)$.

Очевидно, что любое максимально независимое подмножество Y является базисом для Y. Так же как в векторных пространствах и в алгебраически замкнутых полях, любые два базиса имеют одинаковую мощность.

Пусть $I(E_T, \chi_0)$ обозначает число счетных экзистенциально замкнутых моделей йонсоновской теории T.

Используя технику доказательств для полных теорий и изменяя соответствующие понятия на технику йонсоновских множеств, мы можем доказать йонсоновские аналоги соответствующих результатов в спектре счетных моделей [6].

Следствие 1. Если T — сильно минимальная йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений, то T является k-категорическим для $k \geq \chi_1$ и $I(E_T, \chi_0) \leq \chi_0$.

Следствие 2. Если T — йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений, является несчетно категоричной и есть йонсоновски сильно минимальная L-формула, то она либо $T\chi_0$-категорична, либо $I(E_T, \chi_0) = \chi_0$.

Теорема 2. Если T — йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений, является несчетно категоричной, но не χ_0-категоричной, то $I(E_T, \chi_0) = \chi_0$.

Определение 4. Йонсоновская стабильность (J-стабильность). Пусть T — йонсоновская теория, $S^J(X)$ — множество всех экзистенциальных полных n-типов над X, в соответствии с T, для любого конечного *n*. Мы будем говорить, что йонсоновская теория T J-λ-стабильна, если для любой T-экзистенциально-замкнутой модели, для любого подмножества X из A . $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$. .

Теорема 3. Если T — йонсоновски суперстабильна, но не χ_0-категорична, то $I(E_T, \chi_0) = \chi_0$.

Стабильность йонсоновских множеств. Пусть X — йонсоновское множество и M экзистенциально замкнутая модель, где $dcl(X) = M$. Рассмотрим $Th_{\forall\exists}(M) = T_M$.

Лемма 2. T_M будет йонсоновской теорией.

Теорема 1. Пусть T_M, как описано выше. Если $\lambda \geq \omega$, то следующие условия эквивалентны: (1) T_M-стабильна; (2) T^* λ-стабильна, где T^* является центром T.

Рассмотрим ω-категоричность йонсоновских множеств.

Теорема 2. Пусть T_M, как описано выше. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) $T^*{}_M - \omega$-категорична; (2) $T_M - \omega$-категорична.

Алгебраически простое расширение для йонсоновских множеств.

Определение 9. Пусть $T_M^* A, B \in E_T$ и $T_M^* A \subset B$. Тогда B называется алгебраически простым расширением A в E_T, если для любой модели $C \in E_T$ таким образом, что если A изоморфно вкладывается в C, то и B изоморфно вкладывается в C.

ω_1— категоричность йонсоновских множеств. Пусть X — алгебраически йонсоновское множество, $acl(X) = M$ — формула, которая определяет множество X, является экзистенциально сильно минимальной.

Теорема 3. Тогда эквивалентны следующие условия: (1) $T_M^* - \omega$-категорична; (2) любая счетная модель $T_M^*\ E_{T_M}$ имеет простое алгебраическое расширение в E_{T_M}.

Все неопределенные в этой статье определения понятий, а также более полную информацию о йонсоновских теориях можно получить в [7].

Список литературы

1 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 53–62.

2 *Yeshkeyev A.R.* The similarity of Jonsson sets: Abstracts. V congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul (June, 5–7), 2014. — P. 217.

3 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book. International Congress of Mathematicians. — Seoul, Korea (August, 13–21), 2014 — P. 8.

4 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson sets and some their properties. Abstracts Book Logic. Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees, Vienna Summer of Logic (July, 9–24), 2014. — P. 108.

5 *Baldwin John T., Lachlan Alistair H.* On Strongly Minimal Sets, Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — № 1. — P. 79–96.

6 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж.Барвайса. — Ч. 1.Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 126 с.

7 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

8 *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность Δ - PM -теорий: Тез. 12-й Межвуз. конф. по математике, механике и информатике. — Алматы, 2008.

9 *Ешкеев А.Р., Мейрембаева Н.К.* Свойства $(\Sigma^{+}_{n+1},\Sigma^{+}_{n+1})$ -атомных моделей T - Δ - PM -теории // Вестн. КазНУ. Сер. Математика, Механика, Информатика. — Спец. вып. — 2008. — № 3. — С. 74–77.

10 *Ешкеев А.Р.* О йонсоновской стабильности и некоторых её обобщениях // Фундаментальная и прикладная математика. МГУ: ЦНИТ. — 2008. — Вып. 8. — С. 117–128.

А.Р.Ешкеев

Қатты минималды йонсондық жиындар

Мақалада минималды йонсондық жиындар мен қатты минималды йонсондық жиындар ұғымдары беріліп, қарастырылған. Сол негізде семантикалық үлгінің экзистенциялық тұйық подмоделінің арнайы жиын тәуелсіздігі түсінігі енгізілді. Тәуелсіздік ұғымы базис түсінігіне әкеліп, әрі қарай біз есеп-қисапсыз кесімді іспеттес теоремасын аламыз.

A.R.Yeshkeyev

Strongly minimal jonsson sets

This paper introduced and discussed the concepts of minimal Jonsson sets and respectively strongly minimal Jonsson sets. On this basis, we introduce the concept of independence of special subsets of existentially closed submodel of semantic model. The concept of independence leads to the concept of basis and then we have the Jonsson analogue of the theorem on uncountable categoricity.

References

1 Yeshkeyev A.R. *Bull. of KSU*, Series of Mathematics, 2014, 2 (74), p. 53–62.

2 Yeshkeyev A.R. *The similarity of Jonsson sets. Abstracts. V congress of the Turkic World Mathematicians*. Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June, 5–7, 2014, p. 217.

3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book. International Congress of Mathematicians, August, 13–21*, Seoul, Korea, 2014, p. 8.

4 Yeshkeyev A.R. *On Jonsson sets and some their properties. Abstracts Book Logic. Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic*, July, 9–24, 2014, p. 108.

5 Baldwin, John T. Lachlan Alistair H. *Journal of Symbolic Logic*, 1971, 36, p. 79–96.

6 *Handbook of mathematical logic: In 4 parts* / Ed. Dzh.Barvaysa, part 1. Teoriya models: Per. from Engl., Moscow: Nauka: Home Editorial physical and mathematical literature, 1982, 126 p.

7 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: Publ. KSU, 2009, 250 p.

8 Yeshkeyev A.R. *Countably categorical-theory. Abstracts. 12th Inter-College Conference on Mathematics, Mechanics and Informatics*, Almaty, 2008.

9 Yeshkeyev A.R., Meyrembaeva N.K. *Bulletin of the KNU*, Ser. of Mathematics, Mechanics, Computer science, 2008, 3, Special Issue, p. 74–77.

10 Yeshkeyev A.R. *Fundamental and applied mathematics*, 8, MSU, CNIT, 2008, p. 117–128.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: Modth1705@mail.ru)

Теоретико-модельные свойства йонсоновских фрагментов

В статье рассмотрены теоретико-модельные вопросы, связанные с различными постановками задач для йонсоновских теорий. Установлена связь между свойствами йонсоновского фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории, центрального пополнения фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории и соответствующего фрагмента.

Ключевые слова: йонсоновская теория, йонсоновское множество, фрагмент йонсоновского множества, решётка экзистенциальных формул йонсоновской теории.

Данная работа связана с понятием фрагмента йонсоновского множества. Понятие йонсоновского множества было дано автором данной статьи в [1] и, кроме того, была определена некоторая программа изучения данного понятия в [2–4]. Также для этого понятия изучены теоретико-модельные вопросы, связанные с различными постановками задач, рассмотренных ранее в [5–7], для йонсоновских теорий. Основные сведения и ссылки, касающиеся постановок задач, связанных с понятиями йонсоновских теорий, можно найти в [8].

Хорошо известно, что в случае неполных йонсоновских теорий мы стремимся работать с совершенным случаем, так как при изучении свойств первого порядка самой теории мы применяем так называемый семантический метод, суть которого заключается в переносе элементарных свойств центра йонсоновской теории на саму эту теорию. Это неплохо работает при всех типах исследований, которые не связаны с такими «тонкими» исследованиями, как исследования, связанные с понятиями размерности модели. Но так как для таких исследований разработаны методы только для полных теорий, то в данной статье мы рассмотрим аналоги результатов для йонсоновских теорий на языке йонсоновских множеств. Дадим необходимые определения, связанные с понятием йонсоновских теорий и йонсоновских множеств.

Теория T называется йонсоновской, если:

1) имеет бесконечные модели;
2) индуктивна;
3) обладает свойством совместного вложения (JEP);
4) обладает свойством амальгамы (AP).

Изучение структурных вопросов теории и, соответственно, ее моделей является актуальной задачей теории моделей. При изучении свойств модели необходимо знать свойства ее элементов. Поэтому мы должны пойти на некоторые ограничения на свойства как моделей, так и их подмножеств, так как в общем случае такая задача для неполных теорий представляется совсем неподъемной. Как известно, в общем случае аксиомам йонсоновских теорий удовлетворяют практически все основные типы алгебраических объектов, но они, к сожалению, не полны в логическом смысле, а техника доказательств и используемые методы и понятия из теории моделей, как правило, даны для полных теорий и, соответственно, не работают в случае йонсоновских теорий. Поэтому развитие аппарата исследований и получение на этой базе новых теоретико-модельных результатов о структуре моделей в нашем случае играют важную роль для разработки общей теории моделей.

Итак, у нас два вида изучаемых объектов: теория и ее класс моделей. Как правило, в случае йонсоновских теорий мы рассматриваем класс всех экзистенциально замкнутых моделей некоторой совершенной, полной для специального вида предложений йонсоновской теории. И, наконец, мы будем работать не просто с подмножествами моделей, а только с йонсоновскими множествами, которые на самом деле являются подмножествами семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. Далее у специальных замыканий этих подмножеств будет рассмотрена некоторая индуктивная теория. Фактически на некотором замыкании будет рассмотрена йонсоновская теория.

Будем считать, что все $\forall\exists$-следствия произвольной теории создают йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих $\forall\exists$-следствий есть йонсоновская теория.

В противном случае мы всегда можем рассмотреть $\forall\exists$-следствия, истинные в указанных выше замыканиях йонсоновского множества.

Полученная в этом случае йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом, соответственно, йонсоновского множества. В обоих случаях мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследований йонсоновских теорий. Рассмотрим определения:

Пусть L является счетным языком первого порядка.

Пусть T — йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L, и ее семантическая модель есть C.

Мы говорим, что множество X Σ-определимо, если оно определимо некоторой экзистенциальной формулой.

а) Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– dcl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

б) Множество X называется алгебраически йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– acl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

Определение 1. Пусть X — йонсоновское множество и M — экзистенциально-замкнутая модель, где dcl (X) = M. Рассмотрим $Th_{\forall\exists}(M) = T_M$.

Назовем T_M йонсоновским фрагментом йонсоновского множества X.

Если первоначально йонсоновское множество X являлось подмножеством семантической модели некоторой йонсоновской теории T, то это не вызовет двух разночтений в связи с незанятостью символа T_M.

Далее мы предполагаем, что будем работать с некоторой йонсоновской теорией T, полной для экзистенциальных предложений, и ее семантической моделью C.

Рассмотрим некоторое йонсоновское множество X, являющееся подмножеством семантической модели C.

В рамках данных нововведенных определений рассмотрим теоретико-модельные свойства формульных решеток таких множеств и их связь с первоначальной теорией, а также новые методы изучения указанных выше теорий.

Рассмотрим йонсоновские теории и фрагменты йонсоновских подмножеств их семантических моделей. А также установим связь между свойствами йонсоновского фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории, центрального пополнения фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории и соответствующего фрагмента. Для этого мы будем использовать результаты из [7] и [9]. В [7] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и её центра. С другой стороны,

Теорема 1. [7] Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– T совершенна;

– T имеет модельный компаньон.

Ранее [10] была установлена связь между полнотой и модельной полнотой йонсоновской теории.

Теорема 2. Пусть T — совершенная йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

– T полна;

– T модельно полна.

В [7] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть T — полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

– T совершенна;

– T* модельно полна;

– $E_n(T)$ — булева алгебра,

где полнота теории для $\exists$-предложений означает, что любые две модели этой теории относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга. В связи с указанными выше результатами относительно введенных понятий получены данные, связывающие понятия из [9] с йонсоновскими теориями.

Далее, так как йонсоновская теория фиксирована, мы будем иметь дело только с йонсоновским фрагментом йонсоновского множества *X* этой теории *T* и, поскольку не будем использовать саму теорию, для удобства будем применять символ *T*.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории *T* и позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории *T*.

Теорема 4. Пусть *T* — полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория, *T** — центр теории *T*. Тогда:

– *T** допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;

– *T** позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

Доказательство. 1) Пусть *T** допускает элиминацию кванторов. Тогда *T** подмодельно полна и в силу определения модельно полна, а $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое дополнение. В силу элиминации кванторов *T**, так как *T** — пополнение теории *T*, относительно теории *T* каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое бескванторное дополнение.

Обратно, пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение. Тогда $E_n(T)$ является булевой алгеброй, *T** модельно полна, а тогда, в свою очередь, мы имеем, что любая формула относительно теории *T** эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле, т.е. класс этой формулы принадлежит $E_n(T^*)$. В силу $\exists$-полноты теории *T* $E_n(T) = E_n(T^*)$. Следовательно, в силу того, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение и $E_n(T)$ является булевой алгеброй, любая формула в $E_n(T^*)$ бескванторна. Таким образом, теория *T** допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть теория *T** позитивно модельно полна. Тогда в силу определения теория *T** модельно полна и для каждой экзистенциальной формулы φ существует позитивная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Тогда $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет экзистенциальное дополнение. Так как для каждой экзистенциальной формулы φ существует позитивная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \models \varphi \leftrightarrow \psi$, получаем, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение. Тем самым необходимое условие пункта 2 доказано.

Докажем достаточность пункта 2. Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение. Тогда теория *T* позитивно модельно полна и, следовательно, по определению модельно полна. Тогда мы имеем, что теория *T* полна, и так как теория *T** является центральным пополнением теории *T*, мы получаем, что *T* = *T**. Таким образом, *T** позитивно модельно полна.

Тем самым доказательство теоремы завершено.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновской теории *T*.

Теорема 5. Пусть *T* — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) *T* совершенна;

2) $E_n(T)$ слабо дополняема;

3) $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть йонсоновская теория *T* совершенна, тогда она имеет модельный компаньон T^M. Из [8] известно, что $T^M = T^0$, где $T^0 = Th_{\forall\exists}(E_T)$ — оболочка Кайзера йонсоновской теории. Так как в силу определения модельного компаньона T^M модельно полна, мы имеем, что каждая формула рассматриваемого языка устойчива относительно подмоделей в $ModT^M$. Следовательно, каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно подмоделей в

$ModT^M$, в то же время каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно расширений моделей в $ModT^M$ и по определению эта формула инвариантна в $ModT^M$. Отсюда следует, что каждая экзистенциальная формула слабо дополняема. Таким образом, $E_n(T)$ слабо дополняема. Докажем из 2) в 1). Если $E_n(T)$ слабо дополняема, то теория *T* имеет модельный компаньон. Тогда *T* совершенна. Тем самым, 1) эквивалентно; 2) докажем из 1) в 3). Заметим, что модельный компаньон йонсоновской теории является её модельным пополнением. Тогда из совершенности теории *T* следует, что $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Докажем из 3) в 1). Если $E_n(T)$ — алгебра Стоуна, теория *T* имеет модельный компаньон, и, следовательно, по теореме теория *T* совершенна.

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

В следующей теореме в терминах решетки формул найдены необходимые и достаточные условия йонсоновости центра йонсоновской теории.

Теорема 6. Пусть *T* — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– *T** — йонсоновская теория;

– каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение.

Для доказательства необходимости нам понадобится следующее утверждение:

Факт (*) [8]. Если модельный компаньон T^M определен, то известен и модельный компаньон $(T_\forall)^M$ и $T^M = (T_\forall)^M$.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть *T** — йонсоновская теория, тогда из [7] следует, что теория *T* совершенна. Тогда теория *T* имеет модельный компаньон, равный теории *T**, который является модельным пополнением теории *T*. В силу взаимной модельной совместности теории *T* и теории $T_\forall$ — всех универсальных следствий теории *T* и факта (*) модельное пополнение теории Т является модельным пополнением теории $T_\forall$. Отсюда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

Докажем из 2) в 1). Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение. Тогда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое дополнение, т.е. $E_n(T)$ слабо дополняема. Тогда теория *T* совершенна. Тогда из [7] следует, что теория *T** является йонсоновской теорией.

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Все неопределяемые понятия в данной статье можно извлечь из [7].

Список литературы

1 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 53–62.

2 *Ешкеев А.Р.* On Jonsson sets and some their properties: Logic Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic, July, 9–24, 2014. — P. 108.

3 *Ешкеев А.Р.* Jonsson sets and some of their model-theoretic properties: International Congress of Mathematicians August, 13–21, 2014, Seoul, Korea. — P. 8.

4 *Ешкеев А.Р.* The similarity of Jonsson sets: V Congress of the Turkic World Mathematicians Kyrgyzstan, Issyk-Kul (5–7 June), 2014. — P. 217.

5 *Ешкеев А.Р.* Категоричные позитивные йонсоновские теории // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2006. — № 4 (44). — С. 10–16.

6 *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность Δ - PM -теорий // Вестн. Казах. нац. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. — Спец. вып. — 2008. — № 3. — С. 64–69.

7 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

8 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж. Барвайса. — Ч. 1. Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 126 с.

9 *Volker Weispfenning*. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // Journal of Symbolic Logic. — Vol. 46. — № 4. — Dec. 1981. — P. 843–849.

10 *Yeshkeyev A.R.* The Properties of Positive Jonsson's Theories and Their Models // International Journal of Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 22. — № 1. — P. 161–171.

А.Р.Ешкеев

Йонсондық фрагменттердің модельді теоретикалық қасиеттері

Мақалада йонсондық жиынның фрагмент ұғымымен және йонсондық теориялар үшін зерттелген әр түрлі есептің қойылымымен байланысты модельді теоретикалық мәселелер қарастырылған. Йонсондық жиын, йонсондық теория, йонсондық фрагмент қасиеттерінің йонсондық теориядағы йонсондық жиынның фрагменттің орталық толықтыруы және осы теорияға қатысты экзистенциалды формулалардың эквивалентті кластар торының қасиеттерімен сәйкес фрагменттің арасындағы байланыс орнатылған.

A.R.Yeshkeyev

The model theoretical proprties of jonsson fragments

This work is related to the notion of a fragment of Jonsson set. For this concept considered model-theoretic questions related to different formulation of the problem, previously considered to Jónsson theories. The relation between the properties of the Jonsson fragment of Jonsson sets of Jonsson theory, the central replenishment of Jonsson fragment of Jonsson sets of Jonsson theory and properties of the lattice of equivalence classes of existential formulas regarding this theory and the corresponding fragment.

References

1 Yeshkeyev A.R. *Bulletin of KSU*, Series of mathematics, 2014, 2 (74), p. 53–62.

2 Yeshkeyev A.R. *On Jonsson sets and some their properties: Logic Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic*, July, 9–24, 2014, p. 108.

3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties:* International Congress of Mathematicians August, 13–21, 2014, Seoul, Korea, p. 8.

4 Yeshkeyev A.R. *The similarity of Jonsson sets*: V Congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 5–7 June, 2014, p. 217.

5 Yeshkeyev A.R. *Bull. of the University, Ser. of Mathematics*, 2006, 4 (44), p. 10–16.

6 Yeshkeyev A.R. *Bull. of the KNU, Ser. of Mathematics, Mechanics*, Inform teak, 3, Special Issue, 2008, p. 64–69.

7 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: Publ. KSU, 2009, 250 p.

8 *Handbook of mathematical logic*: In 4 parts / Ed. J. Barwise, ch. 1.Teoriya models: Per. from English, Moscow: Nauka; Home Editorial physical and mathematical literature, 1982, 126 p.

9 Volker Weispfenning. *Journal of Symbolic Logic*, 46, 4, 1981, p. 843–849.

10 Yeshkeyev A.R. *International Journal of Mathematics and Computation*, 2014, 22, 1, p. 161–171.

UDC 517.938

T.Zh.Yeldesbaiy, A.B.Tungatarov, M.U.Tursynbekova

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty
(E-mail: yeldesbay@mail.ru)

About mixed problem for degenerate hyperbolic-parabolic equation

The hyperbolic-parabolic equation in the upper half plane with given boundary and initial conditions is considered. By the method of generalized Fourier transformation the existence and the uniqueness of the solution of the posed mixed problem are proved.

Key words: hyperbolic and parabolic equations, mixed problem, fourier method and transformation.

Introduction

By investigating the problems of aerodynamics, hydrodynamics, the membrane theory of shells, heat and mass exchange in the capillary porous environment and in the stratum environment it is very common that one have to solve the boundary value problems for partial differential equations which belong to different type in the different regions of its domain. Many works [1–19] have been addressed to the analysis of various boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations of the second and the third order. In this work we solve the mixed problem for degenerate hyperbolic-parabolic equation of the second order in the upper half plane by applying for each parts of the domain the generalized Fourier transformations corresponding to the posed problem.

1. The statement of the problem

In the domain $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, where $\Omega_1=\{(x,t):-1<x<0,t>0\}$, $\Omega_2=\{(x,t):0<x<1,t>0\}$, we consider the mixed hyperbolic-parabolic type equation

$$0=\begin{cases} t^m u_{tt}-u_{xx}+c_1(x)u, & -1<x<0,\ t>0,\ 0<m<1; \\ t^\alpha u_t-u_{xx}+c_2(x)u, & 0<x<1,\ t>0,\ 0<\alpha<1, \end{cases} \tag{1}$$

where $c_1(x)\in C[-1,0]$, $c_2(x)\in C[0,1]$.

We search the solution from the class of functions $u(x,t)$, satisfying the conditions

$$\forall t>0\ \lim_{x\to 0-}u(x,t)=\lim_{x\to 0+}u(x,t),\ -\infty<\int_{-1}^{0}\left|u(x,t)\right|^2 dx<+\infty,\ \forall t>0;$$
$$\int_0^1\left|u(x,t)\right|^2 dx<\infty,\ \forall t>0\ u(x)\in C_{x,t}^{(2,2)}(\Omega_1)\bigcup C(\bar{\Omega}_2)\bigcup C_{x,t}^{(2,1)}(\Omega_2)\bigcap L_2(\Omega). \tag{2}$$

We consider the mixed problem for the equation (1) in the following statement.

Problem

Find the solution of the equation (1) satisfying the conditions (2), union conditions on the line $x=0$

$$\lim_{x\to 0-}\left[u_x^{'}(x,t)-h_2u(x,t)\right]=\lim_{x\to 0+}\left[u_x^{'}(x,t)-h_3u(x,t)\right]=0,\ t>0, \tag{3}$$

boundary and initial conditions

$$u_x(-1,t)+h_1u(-1,t)=0,\ t>0; \tag{4}$$

$$u_x^{'}(1,t)+h_4u(1,t)=0,\ t>0; \tag{5}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ -1\le x\le 1; \tag{6}$$

$$\lim_{t\to 0+}u_t(x,t)=\upsilon(x),\ -1\le x\le 0, \tag{7}$$

where $\tau(x)\in C^1\left[-1,0\right]\bigcap C\left[0,1\right]\bigcap C^2(-1,0)\bigcap C^1(0,1)$, $\upsilon(x)\in C\left[-1,0\right]\bigcap C^1(-1,0), h_1,h_2,h_3,h_4$ are positive numbers.

To solve the problem (1)–(7) we use the method based on the Fourier method of separation of variables and the method of generalized Fourier transformations. As known the method of separation of variables implies finding particular solutions of the equation (1) in the following form

$$u(x,t)=\theta_1(x)\omega_1(t),\ \text{if } -1<x<0$$

and

$$u(x,t)=\theta_2(x)\omega_2(t),\ \text{if } 0<x<1,$$

which in the domains Ω_1 and Ω_2 satisfy the homogenous boundary conditions (2) + (3) and (3) + (4) accordingly.

Thus, the functions $\vartheta_1(x)$ and $\vartheta_2(x)$ should be the solutions of the next Sturm-Liouville problems accordingly

$$\begin{cases} -\vartheta_1'' + c_1(x)\vartheta_1 = \lambda_1\vartheta_1,\ -1\le x\le 0; \\ \vartheta_1'(-1)+h_1\vartheta_1(-1)=0,\ \lim\limits_{x\to 0-}\left(\vartheta_1'(x)-h_2\vartheta_1(x)\right)=0 \end{cases} \tag{8}$$

and

$$\begin{cases} -\vartheta_2'' + c_2(x)\vartheta_2 = \lambda_2\vartheta_2, \qquad 0\le x\le 1; \\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(\vartheta_2'(x)-h_2\vartheta_2(x)\right)=0,\ \vartheta_2'(1)+h_2\vartheta_2(1)=0 \end{cases} \tag{9}$$

and the functions $\omega_1(t)$ and $\omega_2(t)$ are the solutions of the corresponding ordinary differential equations

$$t^m\omega_1'' + \lambda_1\omega_1 = 0,\ t>0 \tag{10}$$

and

$$t^\alpha\omega_2' + \lambda_2\omega_2 = 0,\ t>0. \tag{11}$$

The problems (8) and (9) have been studied in [15]. The general solution of the equation (10) has the following form [20, 21]:

$$\omega_1(t) = c_1 I_1(t,\lambda_1,m) + c_2 I_2(t,\lambda_1,m), \tag{12}$$

where c_1 and c_2 are arbitrary constants,

$$I_1(t,\lambda_1,m) = t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t,\lambda_1,m),\ {}_2(t,\lambda_1,m) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t,\lambda_1,m);$$

$$a_k(t,\lambda_1,m) = \frac{(-1)^k\lambda_1^k t^{2-m} k+1}{k!(2-m)^k\Pi_{n=1}^k((2-m)n+1)};$$

$$b_k(t,\lambda_1,m) = \frac{(-1)^k\lambda_1^k t^{2-m} k}{k!(2-m)^k\Pi_{n=1}^k((2-m)n-1)},\ 0<m<1$$

and the general solution of the equation (11) are presented by the following formula

$$\omega_2(t) = c_3\exp\left[-\frac{\lambda_2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right], \tag{13}$$

where c_3 is an arbitrary constant.

Under the assumption of continuity of $c_1(x)$ for $-1\le x\le 0$ and $c_2(x)$ for $0\le x\le 1$, and finiteness of the intervals [-1, 0] and [0, 1] the nonzero solutions of the problem (8) and the problem (9) can only exist for discreet values of $\lambda_1=\lambda_{1n}$ and $\lambda_2=\lambda_{2n}$, which are all real numbers and have as the accumulation points the infinity for points $\lambda_1=+\infty, \lambda_2=+\infty$ [1]. Also, as known eigenvalues λ_{1n} and λ_{2n} are paired with their corresponding eigenfunctions $\vartheta_{1n}(x)=\vartheta_1(x,\lambda_{1n})$ and $\vartheta_{2n}(x)=\vartheta_2(x,\lambda_{2n})$, and all eigenfunctions $\vartheta_1(x,\lambda_{1n})$ and $\vartheta_2(x,\lambda_{2n})$ are orthogonal for $[-1,0]$ and $[0,1]$ accordingly and they form a complete system in $L_2[-1,0]$ and $L_2[0,1]$ [1]. Due to the fact that $\forall x\in[-1,0], c_1(x)\ge 0, \forall x\in[0,1], c_2(x)\ge 0$ there are no negative eigenvalues in our case.

Let's consider the problems (8) and (9) in the sense of the spectral functions $\rho_1(\lambda_1)$ and $\rho_2(\lambda_2)$. Therefore we need the solutions $\vartheta_1(x,\lambda_1)$ and $\vartheta_2(x,\lambda_2)$ of the corresponding Cauchy problems

$$-\vartheta_1'' + c_1(x)\vartheta_1 = \lambda_1\vartheta_1,\ \vartheta_1(-1,\lambda)=1,\ \vartheta_1'(-1,\lambda)=-h_1$$

and

$$-\vartheta_2'' + c_2(x)\vartheta_2 = \lambda_2\vartheta_2,\ \vartheta_2(0,\lambda)=1,\ \vartheta_2'(0,\lambda)=h_3.$$

The solution for the first problem has the next form [20, 21]:

$$\vartheta_1(x,\lambda_1)=h_1 I(x,\lambda_1)+J(x,\lambda_1)$$

where

$$I(x,\lambda_1)=x+1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x,\lambda_1),\ J(x,\lambda_1)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(x,\lambda_1);$$

$$a_1(x,\lambda_1)=-\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}(t+1)(c(t)-\lambda_1)dtdy;$$

$$a_k(x,\lambda_1)=-\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}((c(t)-\lambda_1)a_{k-1}(t,\lambda_1)\mathrm{dtdy},\ (k=\overline{2,\infty});$$

$$b_1(x,\lambda_1)=-\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}(c(t)-\lambda_1)dtdy;$$

$$b_k(x,\lambda_1)=-\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}((c(t)-\lambda_1)b_{k-1}(t,\lambda_1)\mathrm{dtdy},\ (k=\overline{2,\infty})$$

and for the second problem the solution could be find as [20, 21]:

$$\vartheta_2(x,\lambda_2)=I(x)+h_2 J(x),$$

where

$$I(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x),\ J(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(x);$$

$$a_1(x)=-\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}t(c_2(t)-\lambda_2)dtdy,\ a_k(x)=-\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}((c_2(t)-\lambda_2)a_{k-1}(t,\lambda_1)dtdy;$$

$$b_1(x)=-\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}(c_2(t)-\lambda_2)dtdy,\ b_k(x)=-\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}((c_2(t)-\lambda_2)b_{k-1}(t)\mathrm{dtdy}.$$

Let's introduce the generalized Fourier transformations for the functions $g_1(x)\in L_2[-1,0]$ and $g_2(x)\in L_2[0,1]$:

$$g_1(\lambda_1)=\int_{-1}^{0}g_1(x)\vartheta_1(x,\lambda_1)dx,\ {}_2(\lambda_2)=\int_{0}^{1}g_2(x)\vartheta_2(x,\lambda_2)dx.$$

For $\lambda_1=\lambda_{1n}$ and $\lambda_1=\lambda_{2n}$ according to the system of the eigenfunctions of the problems (8) and (9) we have the following Fourier coefficients for the functions $g_1(x)$ and $g_2(x)$

$$g_{1n}=\tilde g_1(\lambda_{1n})=\int_{-1}^{0}g_1(x)\vartheta_1(x,\lambda_{1n})dx,\ (n=\overline{1,\infty})$$

and

$$g_{2n}=\tilde g_2(\lambda_{2n})=\int_{0}^{1}g_2(x)\vartheta_2(x,\lambda_{2n})dx,\ (n=\overline{1,\infty}).$$

For the full orthogonal system of functions $\vartheta_1(x,\lambda_{1n})$ and $\vartheta_2(x,\lambda_{2n})$ in $L_2[-1,0]$ and $L_2[-1,0]$ the closure conditions, namely Parseval's identity, is fulfilled [1]

$$\int_{-1}^{0}g_1^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde g_1(\lambda_{1n})}{P\vartheta_1(x,\lambda_{1n})P^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde g_1^2(\lambda_1)d\rho_1(\lambda_1);$$

$$\int_{0}^{1}g_2^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde g_2(\lambda_{2n})}{P\vartheta_2(x,\lambda_{2n})P^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde g_2^2(\lambda_2)d\rho_2(\lambda_2),$$

where integrals in the right hand side are considered as Stieltjes integrals, and the spectral functions $\rho_1(\lambda_1)$ and $\rho_2(\lambda_2)$ are defined by [1]

$$\rho_1(\lambda_1)=\sum_{\lambda_{1n}<\lambda_1}\frac{1}{P\vartheta_1(x,\lambda_{1n})P^2}\varepsilon(\lambda_1-\lambda_{1n});$$

$$\rho_2(\lambda_1) = \sum_{\lambda_{2n}<\lambda_2} \frac{1}{P\vartheta_2(x,\lambda_{2n})P^2}\varepsilon(\lambda_2-\lambda_{2n});$$

$$P\vartheta_1(x,\lambda_{1n})P^2 = \int_{-1}^{0}\vartheta_1^2(x,\lambda_{1n})dx,\ P\vartheta_2(x,\lambda_{2n})P^2 = \int_{0}^{1}\vartheta_2^2(x,\lambda_{2n})dx,$$

where $\varepsilon(\lambda_1-\lambda_{1n})$ and $\varepsilon(\lambda_2-\lambda_{2n})$ are Heaviside functions. The symbols $\sum_{\lambda_{1n}}<\lambda_1$ and $\sum_{\lambda_{2n}}<\lambda_2$ denote the sum over n, when $\lambda_{1n}<\lambda_1$ and $\lambda_{2n}<\lambda_2$ [1].

Thus, the spectral functions $\rho_1(\lambda_1)$ and $\rho_2(\lambda_2)$ hold the information about eigenvalues $\lambda_{1n},\lambda_{2n}$, and also about the normalizing coefficients $P\vartheta_1(x,\lambda_{1n})P$ and $P\vartheta_2(x,\lambda_{2n})P$ [16].

Notice, that for finite intervals $[-1,0]$ and $[0,1]$ there is also so called Weyls limited points case, where the only unique spectral functions $\rho_1(\lambda_1)$ and $\rho_2(\lambda_2)$ of the problems (8) and (9) exist [17].

Now, if we use the generalized Fourier transformations for the equations (1) in the domains Ω_1 and Ω_2

$$\tilde{u}_1(\lambda_1 t) = \int_{-1}^{0} u(x,t)\vartheta_1(x,\lambda_1)dx \tag{14}$$

and

$$\tilde{u}_2(\lambda_2 t) = \int_{0}^{1} u(x,t)\vartheta_2(x,\lambda_2)dx, \tag{15}$$

then, by finding the functions $\tilde{u}_1(\lambda_1,t)$ and $\tilde{u}_2(\lambda_2,t)$ from the equalities (1(1)) we obtain the equations (10) and (11), where $\omega_1(t,\lambda_1)\equiv\tilde{u}_1(\lambda_1,t), \omega_2(t,\lambda_2)\equiv\tilde{u}_2(\lambda_2,t)$, and initial conditions (6) and (7) turn these condition

$$\omega_1(0,\lambda_1)\equiv\tilde{u}_1(\lambda_1,0)=\tilde{\tau}_1(\lambda_1)=\int_{-1}^{0}\tau(x)\vartheta_1(x,\lambda_1)dx; \tag{16}$$

$$\lim_{t\to 0-0}\omega_1^{'}(t,\lambda_1)\equiv\lim_{t\to 0+0}\tilde{u}_1(\lambda_1,t)=\upsilon(\lambda_1)=\int_{-1}^{0}\nu(x)\vartheta_1(x,\lambda_1)dx; \tag{17}$$

$$\omega_2(0,\lambda_2)\equiv\tilde{u}_2(\lambda_2,0)=\tilde{\tau}_2(\lambda_2)=\int_{0}^{1}\tau(x)\vartheta_2(x,\lambda_2)dx. \tag{18}$$

By using the initial conditions (16) and (17) we find c_1 and c_2, and for the functions $\omega_1(t,\lambda_1)=\tilde{u}_1(t,\lambda_{1n})$ we have

$$\omega_1(t,\lambda_{1n})\equiv\tilde{u}_1(t,\lambda_{1n})=\tilde{\nu}(\lambda_{1n})I_1(t,\lambda_{1n},m)+\tilde{\tau}(\lambda_{1n})I_2(t,\lambda_{1n},m). \tag{19}$$

By solving the problem (11) + (18), we find c_3 and obtain

$$\omega_2(t,\lambda_{2n})\equiv\tilde{u}_2(t,\lambda_{2n})=\tilde{\tau}_2(\lambda_{2n})\exp\left[-\frac{\lambda_{2n}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]. \tag{20}$$

Next, we apply the reverse generalized Fourier transformation to (14) and (15) and have the representation of the solution of the problem (1)–(7) by means of it's generalized Fourier transformation according to the system of eigenfunctions of the problems (8) and (9)

$$u(x,t)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_1(\lambda_1,t)\vartheta_1(x,\lambda_1)d\rho_1(\lambda_1), & -1\le x\le 0,\ t>0;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_2(\lambda_2,t)\vartheta_2(x,\lambda_2)d\rho_2(\lambda_2), & 0\le x\le 1,\ t>0,\end{cases}$$

where $\tilde{u}_1(\lambda_1,y)$ and $\tilde{u}_2(\lambda_2,y)$ are defined by (19) and (20).

The latter is possible, because the conditions (2) fulfilled for function $u(x,t)$ make the generalized Fourier transformation applicable [22]. Uniqueness of the solution of the problem (1)–(7) follows from the uniqueness of the spectral functions $\rho_1(\lambda_1)$ and $\rho_2(\lambda_2)$. From the conditions (2) it follows

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\nu}(\lambda_1)I_1(t,\lambda_1,m)\left[h_1 I(0,\lambda_1)+J(0,\lambda_1)\right]d\rho_1(\lambda_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\tau}_2(\lambda_2)\exp\left[-\frac{\lambda_2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]d\rho_2(\lambda_2). \tag{21}$$

Thereby we proved the following theorem.

Theorem 1. If $c_1(x)\ge 0$, for $x\in[-1,0]$, and $c_2(x)\ge 0$ for $x\in[0,1]$, and the equality (21) fulfills then the problem is unique solvable.

References

1 *Накушев А.М.* О теории краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа: Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 235. — № 2. — С. 273–276.

2 *Елеев В.А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа //Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13. — № 1. — С. 56–63.

3 *Елеев В.А.* Обобщенная задача Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с характеристической линией изменения типа //Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16. — № 1. — С. 59–73.

4 *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. — Ташкент: ФАН, 1986. — 220 с.

5 *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо–гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью //Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 8. — С. 1379–1386.

6 *Мамажанов М., Холмурадов Д.* Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа //Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 2. — С. 271–275.

7 *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 1. — С. 117–126.

8 *Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д.* Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28. — № 1. — С. 176–179.

9 *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ. мат. наук. — 1984. — № 3. — С. 29–36.

10 *Бердышев А.С.* О локальных краевых задачах для параболо-гиперболического уравнения // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск, 1989. — С. 86–89.

11 *Бердышев А.С., Садыбеков М.А.* Об одном аналоге нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в области с отходом от характеристики // Узб. матем. журнал. — 1991. — № 6. — С. 14–19.

12 *Бердышев А.С.* О единственности решения обобщенной задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения: Докл. АН РУ. — 1994. — № 10. — С. 5–7.

13 *Бердышев А.С., Тойжанова Г.Д.* Краевые задачи с наклонной производной для параболо-гиперболического уравнения в области с отходом от характеристики // Изв. НАН РК. Сер. физ. мат. наук. — 1995. — № 5. — С. 13–20.

14 *Бердышев А.С.* Базисность системы корневых функций краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения: Докл. АН РУ. — 1999. — Т. 366. — № 1. — С. 7–9.

15 *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970. — 672 с.

16 *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. — М.: Наука, 1984. — 240 с.

17 *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. — Киев: Наук. думка, 1972. — 220 с.

18 *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

19 *Елдесбай Т.Ж.* Одномерные обратные задачи для вырождающихся эволюционных уравнений и уравнений смешанного типа. — Алматы: Ғылым, 2003. — 209 с.

20 *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* Cauchy problem for on class of ordinary differential equations // Int. Journal of Math. Analysis. — 2012. — Vol. 6. — 14. — P. 695–699.

21 *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // Int. Journal of Inequalities and Special functions. — 2012. — Vol. 3. — Issue 4. — P. 42–49.

22 *Кошляков Н.С., Глипер Э.В., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970. — 712 с.

Т.Ж.Елдесбай, Ә.Б.Түнғатаров, М.У.Тұрсынбекова

Түрі өзгеретін гиперболалық-параболалық теңдеу үшін аралас есеп туралы

Мақалада жоғары жартыжолақта гиперболалық-параболлалық теңдеу үшін шекаралық және бастапқы шарттары бар есеп қарастырылды. Фурье жалпыланған түрлендіруін қолдана отырып, қойылған аралас есептің шешімі бар және жалғыз екендігі дәлелденген.

Т.Ж.Елдесбай, А.Б.Тунгатаров, М.У.Турсынбекова

О смешанной задаче для вырождающегося гиперболо-параболического уравнения

В статье в верхней полуполосе рассмотрено гиперболо-параболическое уравнение с заданными граничными и начальными условиями. С помощью метода обобщенного преобразования Фурье доказаны существование и единственность поставленной смешанной задачи.

References

1 Nakushev A.M. *On the theory of boundary value problems for mixed parabolic-hyperbolic equations:* Dokl., 1977, 235, 2, p. 273–276.

2 Yeleyev V.A. *Differential equation*, 1977, 13, 1, p. 56–63.

3 Yeleyev V.A *Differential equations*, 1980, 16, 1, p. 59–73.

4 Dzhurayev T.D., Sopuev A., Mamazhenov M. *Boundary value problems for parabolic-hyperbolic type equations*, Tashkent: FAN, 1986, p. 220.

5 Kapustin N.Yu. *Differential equations*, 1988, 24, 8, p. 1379–1386.

6 Mamazhanov M., Holmuradov D. *Differential equations*, 1989, 25, 2, p. 271–275.

7 Sabitov K.B. *Differential equations*, 1989, 25, 1, p. 117–126.

8 Sadybekov M.A., Toyzhanova G.D. *Differential equations*, 1992, 28, 1, p. 176–179.

9 Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. *Izvestiya AN Uz.SSR. Ser. fiz.-mat. sciences*, 1984, 3, p. 29–36.

10 Berdyshev A.S. *In. Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics*, Novosibirsk, 1989, p. 86–89.

11 Berdyshev A.S., Sadybekov M.A. *Uzbek. Mat. Magazine*, 1991, 6, p. 14–19.

12 Berdyshev A.S. *Reports of the Republic of Uzbekistan*, 1994, 10, p. 5–7.

13 Berdyshev A.S., Toyzhanova G.D. *Boundary value problem with a directional derivative for parabolic-hyperbolic equation in an area with deviation from the characteristics. Reports of National Academy of Sciences of Kazakhstan. Ser. fiz.-mat*, 1995, 5, p. 13–20.

14 Berdyshev A.S. *Reports of the Republic of Uzbekistan*, 1999, 366, 1, p. 7–9.

15 Levitan B.M., Sargsyan P.S. *Introduction to the spectral theory*, Moscow: Nauka, 1970, 672 p.

16 Levitan B.M. *Inverse Sturm-Liouville problems*, Moscow: Nauka, 1984, 240 p.

17 Marchenko V.A. *Spectral theory of Sturm-Liouville operators*, Kiev: Naukova Dumka, 1972, 220 p.

18 Kamke E. *Handbook of Common Differential equations*, Moscow: Nauka, 1971, 576 p.

19 Yeldesbaiy T.Zh. *One-dimensional inverse problems for degenerate evolution equations and equations of mixed type*, Almaty: Gylym, 2003, 209 p.

20 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. *Int. Journal of Math. Analysis*, 2012, 6, 14, p. 695–699.

21 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. *Int. Journal of Inequalities and Special functions*, 2012, 3, 4, p. 42–49.

22 Koshlyakov N.S., Gliper E.V., Smirnov M.M. *Partial differential equations of mathematical physics*, Moscow: Vyshaya shkola, 1970, 712 p.

UDC 517.95

M.T.Dzhenaliyev[1], V.K.Kalantarov[2], M.T.Kosmakova[3], M.I.Ramazanov[4]

[1]Institute of mathematics and mathematical modeling, MES CS RK, Almaty;
[2]Koç University, Istanbul, Turkey;
[3]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty;
[4]Ye.A.Buketov Karaganda State University
(E-mail: muvasharkhan@gmail.com)

On the second boundary value problem for the equation of heat conduction in an unbounded plane angle

In the article, the second homogeneous boundary value problem is considered in an infinite angular domain. Solution of the problem is reduced to solving the singular Volterra integral equations of the second kind with kernel whose norm is equal to unity. By the method of Carleman-Vekua, solving the integral equation is reduced to solving the inhomogeneous equation of Abel. The theorem on the existence of a non-trivial solution of the second homogeneous boundary value problem in a non-cylindrical domain is proved. The solution of the given problem is obtained in an explicit form.

Key words: singular Volterra integral equation, Abel equation, non-cylindrical domain, non-trivial solution.

The need to study boundary value problems of heat conduction (diffusion) in the domain with moving boundaries is dictated by numerous practical applications in modeling the processes of electrocontact apparatuses in a related field of designing the plasma torches, the creation of new technologies, production of crystals, laser technology and other industries. Mathematical modeling these processes allows to carry out the optimal choice of parameters and operating modes of technological equipment and maximize economic and ecological benefits. Actuality of studies of parabolic boundary value problems in non-cylindrical domains is conditioned by this aspect.

The complexity in finding analytical solutions of heat conduction problems (diffusion) in domains with moving boundaries is determined by the fact that classical methods of differential equations of mathematical physics are not applicable to this type of problems directly. Staying within these methods, the solutions can not be reconciled with the movement of the domain boundary. The last proposition is equally characteristic for boundary value problems of non-stationary and stationary transfer with diverse boundary conditions on the lines.

Constructive methods for solving thermal problems for parabolic equations based on using thermal potentials and the reducing the initial boundary value problems to integral equations were developed by E.I.Kim [1].

To find the analytical solutions to these classes of transfer problems the special techniques or modification of known approaches are needed. Presentation of the results accumulated in the field of analytical theory of heat conductivity of solids is given in Refs [2, 3].

The most of researchers [4, 5] consider such problems in-mainly in non-cylindrical domains without singular point. In paper [6] it is established the asymptotically exponential convergence of solutions to the solution of the elliptic problem defined in the spatial domain, independent of time. In [7] some inverse problems for the heat conduction equation in non-cylindrical domain are studied. In [8] space-time Brownian motion and the heat conduction equation in non-cylindrical domains are studied. In [9] for the study of the problem the authors go on to a weak formulation and then prove the existence and uniqueness of the solution.

In spite of numerous studies conducted by many authors for boundary value problems of heat conduction in non-cylindrical degenerating domains to date efficient numerical algorithms for their solution do not exist, mainly because of the lack of the mathematical theory of these problems. This has determined the theme for this work, its actuality and content.

1 Statement of the problem

We consider the boundary value problem of heat conduction in the degenerating domain (domain with a moving boundary).

In the domain $G=\{(x;t):\quad t>0,\quad 0<x<t\}$ it is required to find a solution the heat conduction equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

satisfying the boundary conditions:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=t}=0. \tag{3}$$

2 Reduction of the problem to an integral equation

We are looking for solution of the boundary problem (1)–(2) as the sum of the heat potentials of the simple layer:

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)\,d\tau+\\ &+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

It is known that function (4) satisfies the equation (1) for any $\nu(t)$ and $\varphi(t)$.

Since the:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau$$

then from the properties of heat potentials, we have:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{v(t)}{2a^2}+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=t}=-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v(\tau)\,d\tau+\\ +\frac{\varphi(t)}{2a^2}-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau.\end{gathered} \tag{6}$$

Using conditions (2)–(3) and the properties of heat potentials, we have the following system of integral equations for the unknown densities $v(t)$ and $\varphi(t)$:

$$\begin{cases}-\dfrac{v(t)}{2a^2}+\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau=0;\\ -\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v(\tau)\,d\tau+\\ +\dfrac{\varphi(t)}{2a^2}-\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau=0.\end{cases} \tag{7}$$

We express from the first equation of system (7) function $v(t)$:

$$v(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

We substitute (8) into the second equation of system (7):

$$\begin{gathered}-\frac{1}{8a^4\pi}\int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\int_0^\tau \frac{\theta}{(\tau-\theta)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\theta^2}{4a^2(\tau-\theta)}\right\}\varphi(\theta)\,d\theta\,d\tau+\\ +\frac{\varphi(t)}{2a^2}-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau=0\end{gathered} \tag{9}$$

We introduce the following notation:

$$J(t)=\int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\int_0^\tau \frac{\theta}{(\tau-\theta)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\theta^2}{4a^2(\tau-\theta)}\right\}\varphi(\theta)\,d\theta\,d\tau.$$

The integral $J(t)$ has the property commute, in the sense of Dirichlet formula, if $J(t)\in M_\beta(h)=\left\{\varphi(t):\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(t)}{t^\beta}=h=const,\quad h\neq 0\right\}$, $\beta>-1$. Then we change the order of integration and equation (9) can be rewritten as

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau-\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t \varphi(\theta)\,I(t,\theta)\,d\theta=0, \tag{10}$$

where

$$I(t,\theta)=\int_{\theta}^{t}\frac{t\theta}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\theta)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}d\tau. \tag{11}$$

For integral (11) we make the substitution of the form:

$$z=\sqrt{\frac{t-\tau}{\tau-\theta}}.$$

Then

$$\tau=\frac{t+z^2\theta}{1+z^2};\quad t-\tau=\frac{z^2(t-\theta)}{1+z^2};\quad \tau-\theta=\frac{t-\theta}{1+z^2};\quad d\tau=\frac{-2z(t-\theta)}{(1+z^2)^2}dz.$$

After substituting the integral $I(t,\theta)$ takes the form

$$I(t,\theta)=\frac{2t\theta}{(t-\theta)^2}\exp\left\{-\frac{t^2+\theta^2}{4a^2(t-\theta)}\right\}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}+1\right)\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\theta)z^2}-\frac{\theta^2z^2}{4a^2(t-\theta)}\right\}dz.$$

Using the known equality

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{-\mu x^2-\frac{\eta}{x^2}\right\}dx=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\eta}}\exp\left\{-2\sqrt{\mu\eta}\right\},$$

we reach the result (for the first integral we have previously introduced a replacement $x=\frac{1}{z}$):

$$I(t,\theta)=\frac{2a\sqrt{\pi}(t+\theta)}{(t-\theta)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\theta)^2}{4a^2(t-\theta)}\right\}. \tag{12}$$

Expression (12) we substitute into equation (10):

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau=0.$$

Introducing the notation

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right)+\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\}, \tag{13}$$

we obtain

$$\varphi(t)-\int_0^t K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=0. \tag{14}$$

We note that the kernel $\mathrm{K}(t,\tau)$ has the following properties:

1) $K(t,\tau)\geq 0$ and continuously at $0<\tau\leq t\leq 1$;

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\,d\tau=0,\ t_0\geq\varepsilon>0$;

3) $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau=1,\ \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau=1.$

Properties 1) and 2) are obvious. We prove property 3) for the kernel (13), that is, we show that

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)+\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\right\}d\tau=1.$$

We make the substitution:

$$x=\sqrt{t-\tau}.$$

Then we obtain

$$\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2t}{a^2}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left\{-\left(\frac{t}{ax}+\frac{x}{2a}\right)^2\right\}\left(\frac{t}{a x^2}-\frac{1}{2a}\right)dx + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\,dx =$$

$$= \left\| z = \frac{t}{ax}+\frac{x}{2a};\quad \xi = \frac{x}{2a} \right\| = e^{\frac{2t}{a^2}}\, erfc\left(\frac{3\sqrt{t}}{2a}\right) + erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right).$$

Hear

$$erf\left(t\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz;\quad erfc\left(t\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

That means

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = 1,\ \lim_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = 1.$$

3 Investigating the integral equation

Feature of the investigated equation consists in property 3) of the kernel $K(t,\tau)$ and expressed in the fact that the corresponding inhomogeneous equation can not be solved by the method of successive approximations. Equations of this type were first considered in the works of S.N. Kharin, in which the asymptotics of integrals of potential type was studied and approximate solutions of some applied problems are constructed [10, 11]. He proposed and justified the method in which the solution of the integral equation is represented in the form of an asymptotic expansion in half-integer powers of the variable t. And later, integral equation (14) has been the subject of research by many authors. In the general case the integral equations whose kernels have the property 3), (such equations are called by us Volterra integral equations with «incompressible» kernel) are considered in [12].

It should be noted that to this kind of singular integral equations also boundary value problems for spectrally loaded parabolic equations are reduced when the load line moves by law $x = \alpha(t)$ [13, 14].

We consider homogeneous equation (14):

$$\varphi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \left[\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\right]\varphi(\tau)\,d\tau = 0, \tag{15}$$

$$(t>0)$$

Using the relations:

$$t+\tau = 2t-(t-\tau),\quad \frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} + \frac{t-\tau}{4a^2},$$

we obtain

$$\varphi(t) - \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} - \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau = 0. \tag{16}$$

It is known that if the solution of the integral equation

$$y(x) + \int_a^x K\left(x,t\right) y(t)\,dt = f(x),$$

is given by formula $y(x) = f(x) + \int_a^x R\left(x,t\right) f(t)\,dt,$ then the solution of the equation [15; 183]

$$y(x) + \int_a^x K\left(x,t\right)\, e^{\alpha(x-t)} y(t)\,dt = f(x);$$

has the form

$$y(x)=f(x)+\int_a^x R(x,t)\,e^{\alpha(x-t)}f(t)\,dt.$$

Therefore it is sufficient to find a solution of «simplified» equation

$$\varphi(t)-\int_0^t k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=0, \tag{17}$$

where

$$k(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)\right\}.$$

4 Solving the characteristic equation

To investigate complete equation (17) we distinguish its characteristic part, namely:

$$\varphi(t)-\int_0^t k_o(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f_1(t), \tag{18}$$

where

$$k_o(t,\tau)=\frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\};$$

$$f_1(t)=\int_0^t k_h(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

where

$$k_h(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right).$$

Equation (18) is characteristic equation for (16), as:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t k_o(t,\tau)\,d\tau=1;\ \lim_{t\to 0}\int_0^t k_h(t,\tau)\,d\tau=0.$$

Indeed

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t k_o(t,\tau)\,d\tau=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}d\tau=\left\| z=\frac{t}{a\sqrt{t-\tau}}\right\|=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to 0}\int_{\frac{\sqrt{t}}{a}}^{\infty}\exp\left\{-\left(z^2-\frac{t}{a^2}\right)\right\}dz=\lim_{t\to 0}\left\{e^{\frac{t}{a^2}}\cdot erfs\left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)\right\}=1.$$

The validity of equality

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t k_h(t,\tau)\,d\tau=0,$$

follows from the estimate

$$k_h(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)\le\frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}}\cdot\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}=\frac{t\tau}{2a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}},$$

i.e., the function $k_h(t,\tau)$ has a weak singularity.

Assuming that the right side of equation (18) is known, we find its solution, i.e. solution of the characteristic equation (18).

Similarly, [16; 174], we reduce the integral equation (18) to an equation with a difference kernel. To do this, we will make in it replacements:

$$t=\frac{1}{y},\quad \tau=\frac{1}{x};\ \psi(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}\varphi\left(\frac{1}{y}\right);\quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}f_1\left(\frac{1}{y}\right). \tag{20}$$

Then we obtain the equation of the form

$$\psi(y)-\int_{y}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\pi}(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\psi(x)\,dx=f_2(y).\quad (y>0) \tag{21}$$

The solution of equation (21) can be found by an operational method [16] or by reducing it to the Riemann boundary value problem [16]. The index of boundary value problem in this case is equal to 1 and the function $\psi(y)=C\quad(C-const)$ is a solution of the homogeneous equation

$$\psi(y)-\int_{y}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\pi}(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\psi(x)\,dx=0,$$

corresponding (21).

The solution of inhomogeneous equation (21) has the form

$$\psi(y)=f_2(y)+\int_{y}^{\infty}r_{-}(y-x)f_2(x)\,dx+C,\quad (C-const) \tag{22}$$

where

$$r_{-}(y)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}(-y)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(-y)}\right\}.$$

Making reverse substitution (20) to (22), we obtain the solution of inhomogeneous equation (18):

$$\varphi(t)=f_1(t)+\int_{0}^{t}r(t,\tau)f_1(\tau)\,d\tau+\frac{C}{\sqrt{t}}, \tag{23}$$

where

$$r(t,\tau)=\frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\exp\left\{-n^2\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}. \tag{24}$$

We will obtain an estimate for the resolvent. Since

$$|\theta|^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2}{a^2|\theta|}\right\}\le\frac{a^2}{2\sqrt{|\theta|}}\int_{1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{a^2|\theta|}\right\}d\left(\frac{y^2}{a^2|\theta|}\right)=\frac{a^2}{2\sqrt{|\theta|}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2|\theta|}\right\},$$

then

$$|r(t,\tau)|\le\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}.$$

Then a necessary condition for the function $f_1(t)$ is

$$|f_1(t)|\le M\cdot t^{\varepsilon};\quad \varepsilon>0.$$

5 Reducing the initial «simplified» equation to Abel equation

We will now proceed to solving equation (17), i.e. «simplified» version of initial equation (15).

Using the formula for the solution of characteristic equation (23), taking into account relations (19) for the function $f_1(t)$, we obtain

$$\varphi(t)=\int_{0}^{t}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_{0}^{t}r(t,\tau)\left(f(\tau)+\int_{0}^{\tau}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau\tau_1}{a^2(\tau-\tau_1)}\right\}\right)\varphi(\tau_1)\,d\tau_1\right)d\tau+\frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Changing the order of integration in the right-hand side of obtained equation and interchanging the roles of τ and τ_1 we have

$$\varphi(t)=\int_0^t\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right)+\int_\tau^t r(t,\tau_1)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(\tau_1-\tau)}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\exp\left\{-\frac{\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\right)d\tau_1\right\}\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{C}{\sqrt{t}} \tag{25}$$

Calculating the inner integral into (25) and taking into account formula (24), after simple transformations we obtain [17]

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{C}{\sqrt{t}}. \tag{26}$$

Thus, initial «simplified» integral equation (17) was reduced to equation (26) that is Abel integral equation of the second kind.

6 Solving the Abel equation

The solution of the Abel equation of the second kind [15; 117]

$$y(x)+\lambda\int_a^x\frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt=f(x),$$

has the form

$$y(x)=F(x)+\pi\lambda^2\int_a^x\exp\left[\pi\lambda^2(x-t)\right]F(t)\,dt,$$

where

$$F(x)=f(x)-\lambda\int_a^x\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt.$$

Therefore, the solution of equation (26) can be written as

$$\varphi(t)=F(t)+\frac{1}{4a^2}\int_0^t\exp\left[\frac{t-\tau}{4a^2}\right]F(\tau)d\tau,$$

where

$$F(t)=C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\right\}=C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}.$$

Then

$$\varphi(t)=C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}+\frac{1}{4a^2}\int_0^t\exp\left[\frac{t-\tau}{4a^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right)d\tau\right\}=$$
$$=C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}+\frac{C}{4a^2}\exp\left[\frac{t}{4a^2}\right]\left\{\int_0^t\exp\left[-\frac{\tau}{4a^2}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^t\exp\left[-\frac{\tau}{4a^2}\right]d\tau\right\}$$

After simplifications, we obtain

$$\varphi(t)=C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{\frac{t}{4a^2}}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{\frac{t}{4a^2}}\right\}. \tag{27}$$

(27) is the solution of Abel equation (26), i.e. the solution of «simplified» equation (17).

We note that after multiplying equality (27) by $\exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right)$, we obtain the solution of original equation (15) (in virtue of the foregoing)

$$\varphi(t)=C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{4a^2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}. \tag{28}$$

Thus, the eigenfunction of equation (15) has the form $\varphi_0(t) = C \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{4a^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \right\}.$

7 The solution of the initial boundary value problem

Thus, we have found the solution of second problem (1)–(3) for homogeneous equation of heat conduction in the degenerating domain $G = \{(x;t): \ t>0, \ \ 0<x<t\}$ with homogeneous boundary conditions. We write it in an explicit form.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \nu(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

where

$$\nu(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau)\, d\tau$$

and the function $\varphi(t)$ is determined by formula (28).

This study was financially supported by Committee of Science of the Ministry of Education and Sciences (Grant 0112 RK 00619/GF on priority «Intellectual potential of the country»).

References

1 *Ким Е.И.* Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений с линейными интегралами: Докл. АН СССР. 1957. — Т. 113. — С. 24–27.

2 *Карташов Э.М.* Метод функций Грина для уравнения параболического типа в нецилиндрических областях: Докл. АН РФ. 1996. — Т. 351. — № 1. — С. 32–36.

3 *Карташов Э.М.* Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Изв. АН СССР. — Энергетика. — 1993. — № 2. — С. 99–127.

4 *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 2001. — 550 с.

5 *Карташов Э.М.* Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // ИФЖ. — 2001. — Т. 74. — № 2. — С. 171–195.

6 *Senoussi Guesmia*. (Saudi Arabia) Large time and space size behaviour of the heat equation in non-cylindrical domains // Archiv der Mathematik, ISSN: 0003-889X (Print) 1420-8938 (Online), September. — 2013. — Vol. 101. — Is. 3. — P. 293–299.

7 *Malyshev I.* An inverse source problem for heat equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications — J. Math anal appl 01/1989; 142(1):206-218. DOI:10.1016/0022-247X(89)90175-3

8 *Krzysztof Burdzy, Zhen-Qing Chen, John Sylvester* The heat equation and reflected Brownian motion in time-dependent domains.: II. Singularities of solutions // Journal of Functional Analysis. 2003/10

9 *Carmen Cortazar (Chile), Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, Noemi Wolanski* How to Approximate the Heat Equation with Neumann Boundary Conditions by Nonlocal Diffusion Problems // Archive for Rational Mechanics and Analysis (Impact Factor: 2.29). 12/2007; 187(1):137-156. DOI:10.1007/s00205-007-0062-8

10 *Харин С.Н.* Тепловые процессы в электрических контактах и связанных сингулярных интегральных уравнениях: Дис. ... канд.физ.мат.наук // ИММ АН КазССР, 1970. — С. 13.

11 *Kharin S.N.* The analytical solution of the two-phase Stefan problem with boundary flux condition // Mathematical journal. — 2014. — Vol. 14. — № 1 (51). — P. 55–76.

12 *Dzhenaliyev M.T., Kalantarov V.K., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I.* On a Volterra equation of the second kind with «incompressible» kernel // Bull. KSU. Ser. Mathematics. — 2014. — № 3 (74). — P. 42–49.

13 *Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52. — № 1. — С. 3–14.

14 *Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Вып. 47. — № 2. — С. 231–243.

15 *Полянин А.Д., Манжиров А.В*. Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003.

16 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010.

17 *Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I.* On a singular integral equation of Volterra and its adjoint one // Bull. KSU. Ser. Mathematics. — 2013. — № 3 (71). — P. 3–10.

М.Т.Дженалиев, В.К.Калантаров, М.Т.Космакова, М.Ы.Рамазанов

Шектелмеген жазық бұрыштағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін екінші шеттік есеп жайында

Мақалада шектелмеген бұрыштық облыстағы біртекті екінші шеттік есеп қарастырылды. Есептің шешімі, нормасы бірге тең, ерекше интегралды Вольтерра теңдеуінің шешіміне келтірілді. Карлеман-Векуа әдісі арқылы интегралды теңдеудің шешімі біртексіз Абель теңдеуінің шешіміне келеді. Цилиндрлік емес облыста біртекті екінші шеттік есептің 0-дік емес шешімінің бар болуы туралы теорема дәлелденген. Қойылған есептің шешімі айқын түрде алынған.

М.Т.Дженалиев, В.К.Калантаров, М.Т.Космакова, М.И.Рамазанов

О второй краевой задаче для уравнения теплопроводности в неограниченном плоском углу

В статье рассмотрена вторая однородная краевая задача в неограниченной угловой области. Решение задачи редуцируется к решению особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ядром, норма которого равна единице. Методом Карлемана-Векуа решение интегрального уравнения сводится к решению неоднородного уравнения Абеля. Доказана теорема о существовании нетривиального решения второй однородной краевой задачи в нецилиндрической области. Решение поставленной задачи получено в явном виде.

References

1 Kim Ye.I. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, 113, p. 24–27.

2 Kartashow E.M. *Reports of the Russian Federation*, 1996, 351, 1, p. 32–36.

3 Kartashow E.M. *Izvestiya AN SSSR. Energetics*, 1993, 2, p. 99–127.

4 Kartashow E.M. *Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids (in Russian)*, Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 550 p.

5 Kartashow E.M. *Journal of Engineering* Physics, 2001, 74, 2, p. 171–195.

6 *Archiv der Mathematik*, ISSN: 0003-889X (Print) 1420–8938 (Online), September, 2013, 101, p. 293–299.

7 Malyshev I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, J MATH ANAL APPL 01/1989; 142 (1):206-218. DOI:10.1016/0022-247X(89)90175-3

8 Krzysztof Burdzy, Zhen-Qing Chen, John Sylvester *Journal of Functional Analysis*, 10/2003.

9 Carmen Cortazar (Chile), Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, Noemi Wolanski *Archive for Rational Mechanics and Analysis* (Impact Factor: 2.29). 12/2007; 187(1):137-156. DOI:10.1007/s00205-007-0062-8

10 Kharin S.N. *Dissertation for the degree of c.ph.-m.sc. 01.01.02. — Institute of Mathematics and Mechanics. — Academy of Sciences of the Kazakh SSR*, Almaty, 13, 1970.

11 Kharin S.N. *Mathematical Journal*, 2014, 14, 1 (51), p. 55–76.

12 Dzenaliyev M.T., Kalantarov V.K., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Bulletin of the University. Mathematics series*, 2014, 3 (74), p. 42–49.

13 Akhmanova D.M., Dzenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Siberian mathematical journal*, 2011, 52, 1, p. 3–14.

14 Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Differential equations*, 2011, 47, 2, p. 231–243.

15 Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook on Integral Equations (in Russian)*, Moscow: FIZMATLIT, 2003, 608 p.

16 Dzenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *The loaded equations as perturbations of differential equations (in Russian)*, Almaty: Gylym, 2010, p. 334.

17 Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Bull. of the University. Mathematics ser.*, 2013, 3 (71), p. 3–10.

УДК 517.988.68

К.Т.Искаков, А.Т.Кусаинова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, Астана
(E-mail: kazizat@mail.ru)

Оптимизационный метод решения обратной задачи электродинамики в линеаризованной постановке

В статье рассмотрена обратная коэффициентная задача для многомерного уравнения электродинамики в линеаризованной постановке. Коэффициентная обратная задача по определению диэлектрической проницаемости, зависящей от двух переменных, определяется оптимизационным методом. Выписан алгоритм вычисления градиента функционала. Построены соответствующие сопряженные задачи.

Ключевые слова: обратная коэффициентная задача, многомерное уравнение электродинамики, линеаризованная задача, диэлектрическая проницаемость, оптимизационный метод.

1 Постановка линеаризованной обратной задачи

Рассмотрим постановку прямой задачи для системы уравнений Максвелла [1].

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot\vec{H} + \sigma\vec{E} + \vec{j}^{\,cm} = 0, \quad x_3 \neq 0, x \in \Re; \\ \mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot\vec{E} = 0, \; t > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)^T$; $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; σ — проводимость среды; $\vec{j}^{\,cm}$ — плотность сторонних токов.

Пусть до момента времени $t = 0$ поле отсутствует:

$$(\vec{E}, \vec{H})\Big|_{t<0} = 0, \qquad \vec{\mathrm{j}}^{\,cm}{}_{|t<0} = 0. \tag{1.2}$$

На плоскости $x_3 = 0$ тангенционные компоненты векторов $\vec{E}, \vec{H}$ удовлетворяют условиям непрерывности:

$$E_j\Big|_{x_3=-0} = E_j\Big|_{x_3=+0}, \quad H_j\Big|_{x_3=-0} = H_j\Big|_{x_3=+0}, \quad j = 1,2. \tag{1.3}$$

Для отыскания коэффициента ε зададим дополнительную информацию:

$$E_j\Big|_{x_3=0} = \chi_j(x_1, x_2, t), \quad H_j\Big|_{x_3=0} = \eta_j(x_1, x_2, t), \quad j = 1,2. \tag{1.4}$$

Предположим, что коэффициенты диэлектрической проницаемости в области $\Re$ представимы в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0(x_3) + \varepsilon_1(x_1, x_3). \tag{1.5}$$

Полагаем, что коэффициенты $\varepsilon_1(x_1, x_3)$ малы по сравнению с коэффициентом $\varepsilon_0(x_3)$. Предположения малости коэффициента $\varepsilon_1(x_1, x_3)$ позволяют использовать метод линеаризации [2].

Представим векторы электрической и магнитной напряженностей в виде

$$\vec{E} = E^0 + E^1, \quad \vec{H} = H^0 + H^1, \tag{1.6}$$

где (E^0, H^0) — решение задачи. Здесь и в дальнейшем будем считаем, что $\vec{E}^0 = E^0, \vec{H}^0 = H^0, \vec{E}^1 = E^1, \vec{H}^1 = H^1, \vec{j}^{\,cm} = j^{cm}$.

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} E^0 - rotH^0 + \sigma E^0 + j^{cm} = 0; \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H^0 + rotE^0 = 0; \\ (E_0, H_0)_{|t<0} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Пренебрегая величиной $\varepsilon_1 \dfrac{\partial}{\partial t} E^1,$ получим для (E^1, H^1) следующую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} E^1 - rotH^1 + \sigma E^1 = -\varepsilon_1 \dfrac{\partial}{\partial t} E^0; \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H^1 + rotE^1 = 0; \\ (E^1, H^1)_{|t<0} = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

На плоскости $x_3 = 0$ тангенциальные компоненты векторов $(E^0, H^0),$ (E^1, H^1) удовлетворяют условиям непрерывности

$$[E_j^0]_{x_3=0} = [H_j^0]_{x_3=0} = 0; \quad [E_j^1]_{x_3=0} = [H_j^1]_{x_3=0} = 0. \tag{1.9}$$

Информацию запишем в виде

$$\left(E^1\right)_j\Big|_{x_3=0} = \chi^1{}_j(\bar{x}, t), \ \left(H^1\right)_{j|_{x_3=0}} = \eta^1{}_j(\bar{x}, t), \quad j = 1, 2, \quad \bar{x} = (x_1, x_2), \tag{1.10}$$

где

$$\chi_j^1 = \chi_j - E_j^0\Big|_{x_3=0}; \ \eta_j^1 = \eta_j - H_j^0\Big|_{x_3=0}, \ j = 1, 2. \tag{1.11}$$

Предположим, что функции $\varepsilon_0(x_3),$ $\varepsilon_1(x_1, x_3)$ удовлетворяют условию $\varepsilon_0 \in C^2(\Re).$ Существуют $M_1, M_2, M_3 \in \Re,$ такие что при всех $x_3 \in \Re$ выполнены неравенства $0 < M_1 \le \varepsilon_0(x_3) \le M_2;$ $\|\varepsilon_0\|_{C^2(\Re)} \le M_3.$ Функция $\varepsilon_1(x_1, x_3)$ отлична от нуля лишь в области $(x_1, x_3) \in (0, h) \times K(D_1);$ $K(D_1) = \left\{x_1 \in \Re; \left|x_j\right| < D_1, j = 1, 3\right\},$ где $h,$ $D_1 \in \Re_T$ — фиксированные числа.

$$\varepsilon_1(x_1, x_3) \in C^2((0, h) * K(D_1)); \ \alpha = \|\varepsilon_1\| C^2((0, h) * K(D_1)) \le M_1.$$

В силу этих условий и предположения минимальное время, за которое возмущение успеет достигнуть глубины h при всех $x_1 \in \Re$ и вернуться на поверхность $x_3 = 0,$ равно $T_h = 2h / (M_1 - \alpha).$ Тогда, в силу этого, запишем граничное условие

$$E_j^0\Big|_{x_1 = \pm D_1} = 0. \tag{1.12}$$

Сформулируем дополнительные условия для задачи. Так как коэффициент $\varepsilon_0(x_3)$ зависит от одной переменной $x_3,$ достаточно задать одну горизонтальную компоненту:

$$E_2^0\Big|_{x_3=0} = f_{(1)}(x_1, t). \tag{1.13}$$

Не хватает условия для компоненты $H_1^0.$ Для этого, считая условия как граничные условия в области $x_3 < 0,$ где $\sigma = 0,$ а $\varepsilon = 1,$ $\mu = 1,$ разрешив систему, определяем вектор $H^0,$ а следовательно, будет известно и условие

$$H^0\Big|_{x_3=0} = f_{(2)}(x_1, t). \tag{1.14}$$

Дополнительные условия для задачи имеют вид. Общий алгоритм решения обратной линеаризованной задачи. Решаем задачу в воздухе, в плоскости $x_3 < 0,$ в которой известны $\sigma = 0,$ $\varepsilon = 1,$ $\mu = 1.$ Находим $(E, H).$

Вычисляем граничные условия:

$$\begin{cases} H_1\big|_{x_3=0} = f_{(2)}(x_1,t); \\ (H^1)_{j|_{x_3=0}} = \eta_j^1(\bar{x},t),\ j=1,2; \\ (H_j^0)_{|x_3=0},\ j=1,2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Решаем обратную задачу об определении $\varepsilon_0(x_3)$ в плоскости $x_3 \geq 0$. Считаем, что $\sigma(x_3)$ в $x_3 \geq 0$ известна, а $\mu = 1$. Задаем начальные условия

$$(E_0, H_0)\big|_{t=0} = 0 \tag{1.16}$$

и граничные условия

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial x_3}\right)_{|_{x_3=0}} = \frac{\partial}{\partial t} f_{(2)}(x_1,t). \tag{1.17}$$

Используя оптимизационный метод, определяем правую часть системы, т.е. вычисляем $\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} E^0$. Кроме того, вычисляем дополнительную информацию. Строим оптимизационный метод по определению функции $\varepsilon_1(x_1,x_3)$ как решение системы итерационно.

2 Оптимизационный метод решения обратной задачи об определении $\varepsilon_1(x_1,x_3)$

Конкретизируем постановку прямой задачи. Найти векторы (E^1, H^1) из системы:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1 - rot H^1 + \sigma E^1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} E^0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H^1 + rot E^1 = 0; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$(E^1, H^1)_{t<0} = 0; \quad [E_j^1]_{x_3=0} = [H_j^1]_{x_3=0} = 0,\ j=1,2.$$

Дополнительная информация:

$$(E^1)_j\Big|_{x_3=0} = \chi_j^1(\bar{x},t),\ j=1,2; \quad (H^1)_j\Big|_{x_3=0} = \eta_j^1(\bar{x},t),\ j=1,2,$$

где $\chi_j^1 = \chi_j - E_j^0\Big|_{x_3=0}$; $\eta_j^1 = \eta_j - H_j^0\Big|_{x_3=0}$, $j=1,2$.

Пусть $p(\bar{x})$ — приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал

$$J(p(\bar{x})) = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{2} \Big[E_j^1(\bar{x},0,t;p) - \chi_j^1(\bar{x},t) \Big]^2 dt \right) +$$

$$+ \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{2} \Big[H_j^1(\bar{x},0,t,p) - \eta_j^1(\bar{x},\ t) \Big]^2 dt \right). \tag{2.2}$$

Явный вид для градиента функционала по методике, изложенной в [3], примет вид (2.2):

$$J(p) = \int_0^T \int_{-D_2}^{D_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} E^0\right) \varphi(\bar{x}, x_2, t)\, dx_2 dt, \tag{2.3}$$

где φ, ψ — решения соответствующих задач:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial t} \psi - rot\varphi = 0; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi + rot\psi + \sigma\varphi = -p \frac{\partial}{\partial t} E^0; \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\psi_j(x_1,x_2,x_3,T) = 0,\ j=2,3;$$

$$\psi_j(x_1,x_2,x_3,t)\Big|_{x_k=\pm D_k} = 0,\ j=2,3; k=1,2,3;$$

$$\varphi_j(x_1,x_2,x_3,T) = 0,\ j=2,3;$$

$$\varphi_j(x_1,x_2,x_3,t)\Big|_{x_k=\pm D_k}=0,\ j=2,3;k=1,2,3; \tag{2.5}$$

$$\left(\psi_j\right)_{x_3|_{x_3=0}}=2\sum_{j=1}^{2}\left[H_j^1\left(\bar{x},0,t,p\right)-\eta_j^1\left(\bar{x},t\right)\right]; \tag{2.6}$$

$$\left(\varphi_j\right)_{x_3|_{x_3=0}}=2\sum_{j=1}^{2}\left[E_j^1\left(\bar{x},0,t,p\right)-\chi_j^1\left(\bar{x},t\right)\right].$$

Зададим приращение $p(\bar{x})+\delta p(\bar{x})$, тогда $\delta E^1=E^1(\overline{x,}\ x_3,t;p+\delta p)-E^1(\bar{x},x_3,t;p)$, $\delta H^1=H^1(\bar{x},x_3,t;p+\delta p)-H^1(\overline{x},x_3,t;p)$. Пренебрегая членом второго порядка, получим относительное приращение, следующую систему:

$$\begin{cases}\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E^1-rot\delta H^1+\sigma\delta E^1=-p\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E^0-\delta p\dfrac{\partial}{\partial t}E^0;\\ \mu\dfrac{\partial}{\partial t}\delta H^1+rot\delta E^1=0.\end{cases} \tag{2.7}$$

Умножим скалярно обе части системы (2.7) на вектор $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$, т.е. $\left\langle\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\delta H^1,\psi\right\rangle+\left\langle rot\delta E^1,\psi\right\rangle=0$. Распишем покомпонентно вторую подсистему системы (2.7):

$$\begin{cases}\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\delta H_1^1\psi_1+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\delta E_3^1-\dfrac{\partial}{\partial x_3}\delta E_2^1\right)\psi_1=0;\\ \mu\dfrac{\partial}{\partial t}\delta H_2^1\psi_2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\delta E_3^1-\dfrac{\partial}{\partial x_3}\delta E_1^1\right)\psi_2=0;\\ \mu\dfrac{\partial}{\partial t}\delta H_3^1\psi_3+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\delta E_2^1-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\delta E_1^1\right)\psi_3=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Распишем покомпонентно первую подсистему системы (2.7):

$$\begin{cases}\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E_1^1\psi_1-\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\delta H_3^1-\dfrac{\partial}{\partial x_3}\delta H_2^1\right)\psi_1+\sigma\delta E_1^1\psi_1=-p\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E_1^0\psi_1-\delta p\dfrac{\partial}{\partial t}E_1^0\psi_1;\\ \varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E_2^1\psi_2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\delta H_3^1-\dfrac{\partial}{\partial x_3}\delta H_1^1\right)\psi_2+\sigma\delta E_2^1\psi_2=-p\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E_2^0\psi_2-\delta p\dfrac{\partial}{\partial t}E_2^0\psi_2;\\ \varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E_3^1\psi_3+\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\delta H_2^1-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\delta H_1^1\right)\psi_3+\sigma\delta E_3^1\psi_3=-p\dfrac{\partial}{\partial t}\delta E_3^0\psi_3-\delta p\dfrac{\partial}{\partial t}E_3^0\psi_3.\end{cases} \tag{2.9}$$

Проинтегрируем обе части каждого уравнения системы (2.8) в области: $t\in(0,T_h),\bar{x}\in\Gamma D$, отсюда будем иметь:

$$\begin{aligned}J^{(1)}&=\int_0^T\int_{\bar{x}\in D}\left[\mu(\frac{\partial}{\partial t}\delta H_1^1)\psi_1+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\delta E_3^1-\frac{\partial}{\partial x_3}\delta E_2^1\right)\psi_1\right]d\bar{x}dt=\int_{\bar{x}\in D}\left[\mu\delta H_1^1\psi_1\Big|_0^T-\int_0^T\delta H_1^1\frac{\partial}{\partial t}\psi_1dt\right]d\bar{x}+\\&+\int_0^T\left[\int_{-D_1}^{D_1}\int_{-D_3}^{D_3}\int_{-D_2}^{D_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta E_3^1\psi_1dx_2dx_3dx_1-\int_{-D_1}^{D_1}\int_{-D_3}^{D_3}\int_{-D_2}^{D_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\delta E_2^1\psi_1dx_3dx_2dx_1\right]dt=\\&=J_1+\int_0^T\left[\int_{-D_1}^{D_1}\int_{-D_3}^{D_3}\left\{\delta E_3^1\psi_1\Big|_{-D_2}^{D_2}-\int_{-D_2}^{D_2}\delta E_3^1\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1dx_2\right\}dx_3dx_1\right]dt-\\&-\int_0^T\left[\int_{-D_1}^{D_1}\int_{-D_2}^{D_2}\left\{\delta \mathrm{E}_2^1\psi_1\Big|_{-D_3}^{D_3}-\int_{-D_3}^{D_3}\delta \mathrm{E}_2^1\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_1dx_3\right\}dx_2dx_1\right]dt.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь через J_1 обозначен первый интеграл. Положим, что

$$\psi_1(x_1,x_2,x_3,T)=0; \tag{2.11}$$

$$\psi_1(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{x_2=\pm D_2}=0; \qquad \psi_1(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{x_3=\pm D_3}=0.$$

Для системы (2.7) имеют место граничное условие

$$\delta E^1\big|_{x=\Gamma D}=0 \tag{2.12}$$

и начальные условия

$$(\delta E^1,\delta H^1)_{|_{t=0.}}=0. \tag{2.13}$$

Здесь $ГD$ — граница области $D=D_{\pm1}\times Д_{\pm2}\times Д_{\pm3}$. Тогда, с учетом условий (2.12), (2.13) и принятых условий (2.11) в соотношении (2.9) для $J^{(1)}$ останутся:

$$J^{(1)}=\int_0^T\int_{\bar{x}\in D}\left[-\delta H_1^1\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi_1\right)-\delta E_3^1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1\right)+\delta E_2^1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_1\right)\right]d\bar{x}dt=0. \tag{2.14}$$

Аналогично проинтегрируем по частям второе и третье уравнения системы.

$$\psi_j(x_1,x_2,x_3,T)=0,\ j=2,3; \tag{2.15}$$

$$\psi_j(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{x_k=\pm D_k}=0,\ j=2,3; k=1,2,3.$$

С учетом этих условий и условий (2.12), (2.13) имеем:

$$J^{(2)}=\int_0^T\int_{\bar{x}\in D}\left[-\delta H_2^1\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi_2\right)+\delta E_3^1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_2\right)-\delta E_1^1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_2\right)\right]d\bar{x}dt=0; \tag{2.16}$$

$$J^{(3)}=\int_0^T\int_{\bar{x}\in D}\left[-\delta H_3^1\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi_3\right)-\delta E_2^1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_3\right)+\delta E_1^1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_3\right)\right]d\bar{x}dt=0. \tag{2.17}$$

Из соотношений (2.16), (2.17) получим, что

$$-\delta H_1^1\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi_1\right)-\delta H_2^1\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi_2\right)--\delta H_3^1\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi_2\right)+$$

$$+\delta E_3^1\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_2-\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1\right]-\delta E_2^1\left[-\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_1+\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_3\right]+\delta E_1^1\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_3-\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_2\right]=0. \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует, что

$$-\left\langle\delta H^1,\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi\right\rangle+\left\langle\delta E^1, rot\psi\right\rangle=0; \tag{2.19}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\psi+rot\psi=0. \tag{2.20}$$

Займемся по аналогии с первым уравнением системы (2.7), т.е. рассмотрим соотношение

$$\left\langle\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\delta \mathrm{E}^1,\psi\right\rangle-\left\langle rot\delta \mathrm{H}^1,\psi\right\rangle+\left\langle\sigma\delta \mathrm{E}^1,\psi\right\rangle=-\left\langle p\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}^0,\psi\right\rangle-\left\langle\delta p\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}^0,\psi\right\rangle, \tag{2.21}$$

где $\psi=\left(\psi_1,\psi_2,\psi_3\right)$. По аналогии, как в предыдущем случае, получим:

$$-\left\langle\delta E^1,\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\psi\right\rangle-\left\langle\delta H^1, rot\psi\right\rangle+\left\langle\delta E^1,\sigma\psi\right\rangle=-\left\langle E^1,p\frac{\partial}{\partial t}\psi\right\rangle-\left\langle\delta p\frac{\partial}{\partial t}E^0,\psi\right\rangle.$$

Объединим равенства (2.19), (2.21) и полагаем, что

$$\begin{cases}-\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\psi+rot\psi=p\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi;\\ -\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi-rot\varphi+\sigma\varphi=-E^0;\end{cases}$$

$$\psi_j(x_1,x_2,x_3,T)=0,\ j=2,3;$$

$$\psi_j(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{x_k=\pm D_k}=0,\ j=2,3; k=1,2,3;$$

$$\varphi_j(x_1,x_2,x_3,T)=0,\ j=2,3;$$

$$\varphi_j(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{x_k=\pm D_k}=0,\ j=2,3;\ k=1,2,3;$$

$$\left(\psi_j\right)_{x_3|_{x_3=0}} = 2\sum_{j=1}^{2}\left[\mathrm{H}_j^1\left(\bar{x},0,t,p\right) - \eta_{j1}\left(\bar{x},t\right)\right];$$

$$\left(\varphi_j\right)_{x_3|_{x_3=0}} = 2\sum_{j=1}^{2}\left[\mathrm{E}_j^1\left(\bar{x},0,t,p\right) - \chi_{j1}\left(\bar{x},t\right)\right].$$

Таким образом, мы получили алгоритм решения обратной задачи об определении $\varepsilon_1(x_1, x_3)$, являющийся главным шагом (см. шаг 6) общего алгоритма решения обратной линеаризованной задачи, представленной в разделе 1.

Работа поддержана грантом МОН РК по Договору № 139 (69) от 04.02.2014.

Список литературы

1 *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984. — 363 с.

2 *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. — М.: Наука, 1991. — 303 с.

3 *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. — Новосибирск, 2001. — 316 с.

Қ.Т.Ысқақов, А.Т.Құсайынова

Сызықтық қойылымдағы электродинамиканың кері есебін шешудің оңтайлы әдісі

Мақалада сызықтық қойылымдағы электродинамиканың көпөлшемді теңдеуі үшін кері коэффициентті есеп қарастырылды. Екі айнымалыға тәуелді диэлектрлік өткізгіштікті анықтайтын коэффициенттік кері есебі оңтайландыру әдісімен анықталды. Функционалдың градиентіне есептеу алгоритмі жазылды, сондай-ақ сәйкес түйіндес есептер құрылды.

K.T.Iskakov, A.T.Kussainova

Optimization methods for solving inverse problems of electrodynamics in the linearized formulation

In this work we consider the inverse coefficient problem for a multidimensional equation electrodynamics in the linear zed formulation. The inverse coefficient problem of determining the dielectric permittivity that depends on two variables, determined by optimization method. The algorithm for calculating the gradient of the functional is presented. The corresponding conjugate problems are constructed.

References

1 Romanov V.G. *Inverse problems of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1984, 363 p.

2 Romanov V.G., Kabanikhin S.I. *Inverse problems geoelectric*, Moscow: Nauka, 1991, 303 p.

3 Kabanikhin S.I., Iskakov K.T. *Optimization methods for solving the coefficient inverse problems*, Novosibirsk, 2001, 316 p.

УДК 511.1

Д.Исмоилов

Инновационный евразийский университет, Павлодар
(E-mail: i.Dodojon@rambler.ru)

Многочлены деления круга, проблема Фейта-Томпсона и некоторые применения к теории делимости

В статье предложен один из способов решения гипотезы Фейта-Томпсона из теории групп. На основании арифметической трактовки многочленов деления круга доказаны некоторые утверждения относительно представления многочленов, зависящих от круговых многочленов. На основании полученных утверждений выводится ряд результатов, относящихся к теории делимости в полугруппе натуральных чисел.

Ключевые слова: теория групп, многочлены, теория делимости, полугруппа.

I О многочленах деления круга

В этом пункте приведем определения, понятия и соотношения, необходимые для доказательства основных результатов работы.

Определение. Многочленом деления круга порядка n называется многочлен

$$f_n(x) = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)...(x-\varepsilon_{\varphi(n)}), \tag{1}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varphi(n)}$ — все первообразные корни степени n из единицы;

$$\varepsilon_k = \exp\left(2\pi i\,\frac{k}{n}\right);\ k=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,n;\ (k,n)=1, \tag{2}$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Заметим, что $\varepsilon_k^m \neq 1$ при всех $1 \le m < n$.

Согласно определению основных симметрических многочленов $f(x) = x^n - 1$ является многочленом с комплексными коэффициентами. В действительности же коэффициенты $f(x)$ — целые числа. Вопрос разложения многочлена $f(x) = x^n - 1$ на множители в общем случае осуществляется на основании известной формулы обращения

$$f(n) = \prod_{d/n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \prod_{d/n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}, \tag{3}$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса (мультипликативный аналог формулы обращения Мёбиуса). Отсюда непосредственно выводится формула

$$x^n - 1 = \prod_{d/n} f_d(x) \Leftrightarrow f_n(x) = \prod_{d/n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}. \tag{4}$$

Следствие. Если n — простое, то существует единственное разложение

$$f(x) = x^n - 1 = (x-1) f_n(x), \tag{5}$$

где

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1};\ f_0(x) = 0; f_1(x) = 1. \tag{6}$$

Если же n — составное, то возможны и другие разложения $f(x)$ на сомножители. Пусть d/n, $1 \le d \le n$, тогда имеет место разложение

$$f(x) = (x^d)^m - 1 = (x^d - 1)(x^{d(m-1)} + x^{d(m-2)} + ... + x^d + 1), \tag{7}$$

где d пробегает все натуральные делители числа n. Как известно, число различных делителей n равно $\tau(n)$, тем самым будем иметь $\tau(n)$ различных разложений $f(x) = x^n - 1$ [1]. В общем случае имеет место мультипликативная формула

$$x^n - 1 = \prod_{d/n} f_d(x);\ \ x^n - 1 = f_n(x) \cdot g_n(x), \tag{8}$$

где $g_n(x)$ — произведение многочленов $f_d(x)$ по всем собственным делителям d числа n.

Проверка первого равенства (8) проводится следующим образом. Рассмотрим разложение с учетом следствия из основной теоремы алгебры:

$$x^n - 1 = (x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)...(x-\varepsilon_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k),\ \varepsilon_0 = 1. \tag{9}$$

Далее сгруппируем все множители вида $x-\varepsilon_k$, для которых $(k,d)=1$, т.е. по всем первообразным корням фиксированной степени *d*, *d/n*. Таким образом, получим $f_d(x)$, поскольку каждый множитель $(x-\varepsilon_k)$ входит в правой части (9) ровно в один из многочленов $f_d(x)$. Как было отмечено, если *n* — простое, то существует единственное разложение (5) с равенством (6). Теперь, согласно свойствам функции Мёбиуса, из равенства (3) следует равенство (4), так как левая часть формулы (4) представляет равенство (8), тем самым для нахождения многочленов $f_d(x)$ будем иметь вычислительную формулу

$$f_n(x) = \prod_{d/n}(x^d - 1)^{\mu(n/d)} \tag{10}$$

для выписывания явного вида многочленов деления круга при $n=p$ (где p — простое число), и имеют место равенства

$$P_p(q) = (q-\varepsilon_1)(q-\varepsilon_2)...(q-\varepsilon_{p-1}) = \frac{q^p-1}{q-1}; \tag{11}$$

$$P_q(p) = (p-\eta_1)(p-\eta_2)...(p-\eta_{q-1}) = \frac{p^q-1}{p-1}, \tag{12}$$

где $\varepsilon_k;\eta_r$ — соответственно первообразные корни *p*- и *q*-ой степени из единицы; *p* и *q* — различные простые числа. Теперь заметим, что многочлены (11) и (12), соответственно, являются многочленами деления круга. Каждый из них многочлен корней p и q-ой степени из единицы соответственно, и вместе с единицей они делят единичный круг комплексной плоскости на *p* и *q* равных частей. Кроме того, каждый из этих многочленов является неприводимым над полем рациональных чисел *Q*.

Следует отметить, что многочлены деления круга сами не раскладываются дальше на множители с целыми коэффициентами [2]. Если $P_p(x)$ — многочлен деления круга (p — простое число), то известно, что

$$P_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}. \tag{13}$$

Корнями этого многочлена служат корни p-ой степени из единицы, отличные от самой единицы. Так как эти корни $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ (здесь значение функции Эйлера $\varphi(p) = p-1$) вместе с единицей делят единичный круг комплексной плоскости на p-равных частей (величина раствора сектора деления $\theta = 2\pi/p$), то отсюда и название «многочлен деления круга». К этому многочлену не может быть непосредственно применен критерий Эйзенштейна о неприводимости над полем Q [3]. Пусть дан многочлен $h(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами. Если хотя бы одним способом можно подобрать простое число *p*, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) старший коэффициент a_0 не делится на *p*;

2) все остальные коэффициенты делятся на *p*;

3) свободный член, делясь на р, не делится на p^2,

то многочлен *h* (*x*) неприводим над полем рациональных чисел *Q* [1].

В равенстве (13) произведем замену $x = y+1$, тогда получим

$$P_p(y+1) = g(y) = \frac{(y+1)^p - 1}{(y+1)-1} = \frac{1}{y}[y^p + C_p^1y^{p-1} + C_p^2y^{p-2} + ... + py] = y^{p-1} + py^{p-2} + C_p^2\cdot y^{p-3} + ... + p.$$

Коэффициенты C_p^k многочлена кратны *p* при всех $1 \le \kappa < p$, причем старший коэффициент равен 1, а свободный член не делится на p^2. Следовательно, многочлен *g* (*y*) неприводим и тем самым $P_p(x)$ неприводим.

II Функция Мёбиуса и ее применение

Пусть $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Определим функцию Мёбиуса следующим образом: если $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ — каноническое представление числа n, то положим

$$\mu(n) = (-1)^r C_1^{\alpha_1}...C_1^{\alpha_r}, \tag{14}$$

где C_m^k — биноминальные коэффициенты. Классическое определение отличается от равенства (14) [1]. Согласно (14) легко заметить, что

$$\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu(p^\alpha) = 0, \alpha \geq 2;$$

$$\mu(p_1 p_2 ... p_r) = (-1)^r = \begin{cases} 1, & r \text{ — четное;} \\ -1, & r \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Формула (14) удобна для последующих обобщений функции Мёбиуса, а именно:

$$\mu_k(n) = (-1)^r C_k^{\alpha_1}...C_k^{\alpha_r}; k = 2,3,\cdots$$

Далее, согласно первым примерам по равенству (10) (для начальных значений n), казалось бы, можно предположить, что коэффициенты многочленов деления круга всегда равны 0, 1, -1 (их будем называть *многочленами первого класса*). Однако существуют такие n, при которых коэффициенты многочленов деления круга отличны от 0, 1, -1 (их будем называть *многочленами второго класса*).

Такой пример указан в [4], для значений $n = 105$. Для полноты картины приведём этот пример. Следуя равенству (10), получим:

$$f_{105}(x) = (x-1)^{\mu(105)}(x^3-1)^{\mu(35)}(x^5-1)^{\mu(21)} \times$$
$$\times (x^7-1)^{\mu(15)}(x^{105}-1)^{\mu(1)}(x^{15}-1)^{\mu(7)}(x^{21}-1)^{\mu(5)}(x^{35}-1)^{\mu(3)}.$$

Отсюда после некоторых стандартных упрощений получим

$$f_{105}(x) = \frac{(x^{105}-1)(x^3-1)(x^5-1)(x^7-1)}{(x-1)(x^{15}-1)(x^{21}-1)(x^{35}-1)} =$$
$$= x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} +$$
$$+ x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} +$$
$$+ x^{14} + x^{13} + + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1.$$

Возникают интересные арифметические задачи:

− *определить, для каких* n *коэффициенты многочленов деления круга отличны от* 0, 1, -1;

− *найти следующее число* n >105, *для которого* $f_n(x)$ *является многочленом второго класса;*

− *в отрезке натурального ряда* $[n, n+m]$ *оценить количество многочленов второго класса.*

Докажем следующее утверждение (решение гипотезы Фейта-Томпсона [2]).

Теорема 1. При любых различных простых p и q многочлены $P_p(q)$ и $P_q(p)$ являются взаимно простыми.

Доказательство. Известно, что для функции Мёбиуса $\mu(n)$ от любого натурального числа n верно равенство

$$\mu(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} \xi_k. \tag{15}$$

Многочлены (11) и (12) взаимно просты тогда и только тогда, когда у них в правых частях отсутствуют общие комплексные корни. Покажем, что все множители в произведениях (11) и (12) различны для $p \neq q$. Рассуждения будем вести от противного. Пусть некоторый первообразный корень ε_k совпадает с некоторым первообразным корнем η_r, т.е. $\varepsilon_k = \eta_r$. Просуммируем обе части последнего равенства по всем целым $k = 1,2,\cdots,p-1$ и $r = 1,2,\cdots,q-1$, получим

$$\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{k=1}^{p-1}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{r=1}^{q-1}\eta_r. \tag{16}$$

Отсюда, согласно (15) и (16), получим, что простые числа p и q равны между собой вопреки условию нашей теоремы. Утверждение доказано, тем самым получено и доказательство гипотезы.

Замечания:

1. Пусть в равенствах (11) и (12) p и q — бесквадратные числа. Тогда, используя метод доказательства теоремы, можно установить, что если $m \neq n,$ то $(f_n(m), f_m(n)) = 1$.

2. a) Если $f_n(a) = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ и $d/(a-1),$ то можно доказать, что число $(f_n(a) - n)$ также кратно $d,$ а следовательно, верна эквивалентность $d/f_n(a) \Leftrightarrow d/n$. Отсюда можно вывести

b) $(f_n(a), a-1) = (a-1, n).$

Доказательства утверждений пунктов α) и β) в §6 [2].

c) На основании пунктов α) и β) можно вывести еще одно доказательство гипотезы Фейта-Томпсона.

3. Пусть $\forall a \in Z_+,\ a \geq 2$ и $f_n(a,d) = \dfrac{a^n - 1}{a^d - 1},$ d/n, тогда $\left(f_{\frac{n}{d}}(a), f_{\frac{m}{d}}(a) \right) = 1,\ d = (m,n) = \text{НОД}\{m,n\}.$

III Об одном применении круговых многочленов к теории делимости

Ниже сформулируем некоторые выводы, относящиеся к теории делимости. Имеет место

Теорема 2. Пусть $2 \leq g \in Z_+$ и $\forall n \in Z_+,$ и пусть последовательность многочленов $D_n(g)$ определяется равенством

$$D_n(g) = g^n + (g-1)\cdot(g-2)\cdot n - 1. \tag{17}$$

Тогда справедлива формула $D_n(g) = (g-1)^2 \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} f_k(g) + n \right].$

Доказательство. Очевидно, что при $n = 1$ $D_n(g) = (g-1)^2$. Пусть $n > 1,$ тогда по формуле (5) имеем $g^n - 1 = (g-1)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f_k(g) + (g-1)\cdot n.$ Прибавляя к обеим частям последнего равенства выражение $(g-1)\cdot(g-2)\cdot n,$ получим наше утверждение. Теорема 2 имеет многочисленные применения к теории делимости. Приведём примеры:

1) $D_n(g^m) \vdots (g^m - 1)^2 \Rightarrow D_n(g^m) \vdots [(g-1)\cdot f_m(g)]^2;$

2) $D_n(g^m) \vdots [f_m(g)]^2\ , m \in Z_+;$

3) для любых целых $m \geq 0; n \geq 1$ имеет место признак делимости $D_n(F_m) \vdots 2^{2^{m+1}},$ где $F_m = 2^{2^m} + 1$ — числа Ферма.

Рассмотрим ещё одно утверждение в связи с круговыми многочленами.

Теорема 3. Пусть $g - 1 \geq 0$ и $\forall n \in Z_+$. Пусть многочлен $D_n(g;k)$ определён равенством

$$D_n(g;k) = P_n(g)\cdot\{g^n + 2\sqrt{g-1}\cdot k - 1\} + k^2;\ k \in Z.$$

Тогда справедливо равенство $D_n(g;k) = \left[\sqrt{g-1} \cdot f_n(g) + k \right]^2$. В частности, справедливо равенство

$$D_n(m^2+1;k) = \left[m \cdot f_n(m^2+1) + k \right]^2.$$

Доказательство. В соответствии с определением $f_n(g)$ и условием $g - 1 \geq 0$ имеем: в частности, также и для $g = m^2 + 1,$

$$f_n(g) = \frac{(g^n - 1)}{g - 1} = f_n(m^2+1) = \frac{(m^2+1)^n - 1}{m^2}.$$

Следовательно, проведя стандартные преобразования, получим равенства

$$D_n(g;k) = \frac{(g^n - 1)\cdot\left[g^n + (2\sqrt{g-1}\cdot k - 1) + (\sqrt{g-1}\cdot k)^2 \right]}{g-1} =$$

$$= \left\{ \frac{g^n + \sqrt{g-1}\cdot k - 1}{\sqrt{g-1}} \right\}^2 = \left\{ \sqrt{g-1}\cdot f_n(g) + k \right\}^2.$$

Основное утверждение доказано. В частности, для случаев $g-1=m^2$ получим

$$D_n(m^2+1;k)=\left\{\frac{(m^2+1)^n+m\cdot k-1}{m}\right\}^2=\left\{\frac{m[(m^2+1)^n-1]}{m^2}+k\right\}^2.$$

Таким образом, доказано и равенство $D_n(m^2+1;k)=[m\cdot f_n(m^2+1)+k]^2$. Очевидно, что указанный результат справедлив и для $g-1=m^{2l}$; $m\in Z$; $m\neq 0$; $l\in Z_+$.

Замечание. Доказанное утверждение является источником многих интересных следствий, относящихся к теории делимости. К примеру:

$$D_1(m^2+1;k)=(m+k)^2\Rightarrow D_1(m^2+1;0)=m^2;\forall m\in Z_+;$$

$$D_1(m^2+1;f_n(m^2+1)-m)=[f_n(m^2+1)]^2;$$

$$D_1(1;k)=k^2;\forall k\in Z;$$

$$D_2(m^2+1;3m^2+m+1)=(m+1)^2$$

и т.д. Очевидно, что аналогичные утверждения также справедливы при $n=p$ (где p — простое число), тогда $f_n(x)$ заменяется всюду на $P_p(x)$:

$$D_1(m^2+1;P_p(m^2+1)-m)=[P_p(m^2+1)]^2;$$

где p — простое число. Отметим, что в равенстве $D_n(g;k)=\left[\sqrt{g-1}\cdot f_n(g)+k\right]^2$ параметры $g\geq 2$ и k — произвольные числа, а это обстоятельство позволяет нам расширить круг применения полученных результатов.

Следствия. Пусть $\sqrt{g-1}=m=[\sqrt{p}]$; $k=\{\sqrt{p}\}$, где p — простое число. Тогда справедлива формула $D_1(g,k)=([\sqrt{p}]+\{\sqrt{p}\})^2=(\sqrt{p})^2=p$, где $[\alpha]$ — целая часть, а $\{\alpha\}$ — дробная часть числа α. Или в случаях $\sqrt{g-1}=m=[\sqrt{p}]$; $k=-([\sqrt{p}])^3-[\sqrt{p}]+\{\sqrt{p}\}$ справедлива другая формула:

$$D_2(g,k)=\left([\sqrt{p}]+\{\sqrt{p}\}\right)^2=(\sqrt{p})^2=p.$$

Отметим, что аналогичную теорию легко развивать для случая разности целых a^n-b^n:

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot F_n(a,b);\ F_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}\cdot b^k.$$

Для этого многочлен x^n-1 представим в многочлен вида x^n-y^n, подстановкой $x\to x/y$ и, умножая результат на y^n, получим равенства

$$F_n(x,y)=x^{\varphi(n)}\cdot f_n\left(x/y\right),\ x^n-y^n=\prod_{d/n}F_d(x,y);\ x^n-y^n=F_n(x,y)\cdot G_n(x,y),$$

где $G_n(x,y)$ — произведение многочленов $F_d(x,y)$ по всем собственным делителям d числа n

$$G_n(x,y)=x^{n-\varphi(n)}\cdot g_n(x/y).$$

Можно доказать:

1) Если $a-b$ кратно m, то число $F_n(a,b)-n\cdot a^{n-1}$ тоже кратно m, задача 6.41 [5].

2) $F_n(a,b)>n$ для всех n, за исключением $n=6$; $a=2$; $b=1$ [1].

3) Для любого натурального числа $n>1$ существует бесконечно много простых чисел, дающих остаток 1 при делении на n (частный случай теоремы Дирихле, не поддаётся пока элементарному доказательству) [5].

4) Для любого натурального числа $n>2$ и любых натуральных $a;b$, где $a>b$, число a^n-b^n имеет простой делитель, больший n.

Замечание. В случае $n=2$ утверждение 4) неверно. Например, пусть $a=2^k+1$; $b=2^k-1$, тогда $a^2-b^2=2^{k+2}$.

Сформулируем две задачи, связанные с теорией делителей. Пусть m и n — натуральные числа, причем $n > 2$. Докажите, что $2^m + 1$ никогда не делится на число $2^n - 1$. Пусть δ — общий делитель чисел a и b (т.е. $a = \delta \cdot a_1$; $b = \delta \cdot b_1$), n — любое целое число больше 1.

Докажите, что если b_1 нечетно, то общий множитель чисел $n^a + 1$; $n^b - 1$ не может быть больше двух [6]. Также можно сформулировать и доказать аналоги теоремы 2 и 3 для функции от двух переменных $D_n(a,b)$. Сформулируем один из результатов.

Утверждение. Пусть многочлен $D_n(a,b)$ определяется равенством

$$D_n(a,b) = a^n + b^{n-1} \cdot (a-b) \cdot (a-b-1) \cdot n - b^n.$$

Тогда для всех натуральных чисел n и различных пар натуральных чисел $\{a,b\}$ имеет место критерий делимости $D_n(a,b) \vdots (a-b)^2$. На этом мы завершаем нашу статью. Читатели самостоятельно могут убедиться в полезности рассмотренных предложений.

Список литературы

1 *Виноградов И.И.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — 176 с.
2 *Feit W., Thompson J.G.* Pacif. Tourna. Math. — 1963. — 13. — № 3 — P. 775–1029.
3 *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1965. — 432 с.
4 Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. — Л., 2006. — 224 с.
5 *Гашков С.Б., Чубариков В.Н.* Арифметика, алгоритмы, сложность вычисления. — М.: Наука, 2005. — 350 с.
6 Избранные задачи: Сб. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.

Д.Исмоилов

Дөңгелекті бөлу көпмүшеліктері, Фейт-Томсон проблемасы және бөлінгіштік теорияның кейбір қолданылуы

Мақалада группалар теориясының Фейт-Томпсон ғылыми болжамын шешудің бір әдісі берілген. Дөңгелекті бөлу көпмүшеліктерінің арифметикалық түсінігі негізінде дөңгелекті көпмүшеліктерге тәуелді көпмүшеліктердің берілуіне қатысты кейбір тұжырымдар дәлелденген. Алынған тұжырымдар негізінде натурал сандардың жартылай группасында бөлінгіштік теориясына қатысты бірқатар нәтижелер енгізілген.

D.Ismoilov

Cyclotomic polynomials, the problem of Feit-Thompson and some applications to the theory of divisibility

In this paper we propose one way of solving the conjecture of Feit-Thompson of group theory. On the basis of the arithmetic interpretation of cyclotomic polynomials prove some statements about the representation of polynomials depending on cyclotomic polynomials. On the basis of the allegations shows a number of results relating to the theory of divisibility in the semigroup of natural numbers.

References

1 Vinogradov I.I. *Fundamentals of the theory of numbers*, Moscow: Nauka, 1981, 176 p.
2 Feit W., Thompson J.G., *Pacif. Tourna. Math*., 1963, 13, 3 p. 775–1029.
3 Kurosh A.G. *Course of higher algebra*, Moscow: Nauka, 1965, 432 p.
4 *Problems of St.-Petersburg mathematical olympiad*, Leningrad: 2006, 224 p.
5 Gashkov S.B., Chubarikov V.N. *Arithmetic, algorithms, computational complexity*, Moscow: Nauka, 2005, 350 p.
6 *Selected problems. Compilation. Trans.* / Transl. from Engl., Moscow: Mir, 1977.

ӘОЖ 004.738.5(574)

А.Б.Келдібекова, А.Е.Сланбекова, Ш.К.Кәменова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail: SlanbekovaAE@mail.ru)

Оқу жетістіктерін бағалауға арналған тестілеу жүйесін автоматтандыру

Мақалада тестілеу жүйесін Adobe Photoshop CS3, Adobe ImageReady CS, Adobe DreamWeaver CS3, Adobe Flash CS3, NotePad++, сервер Apache программалық пакеттерін қолдану арқылы құру қарастырылды. Тестілеу бағдарламасында қолданылатын тестілеу кешені мен тестілеуді құру мәселелері Flash-технологиясында, білімді өзін-өзі тексеруде IT саласында пайданылды. Авторлар Flash-бағдарламасының мүмкіндіктері, әдістері, негізгі функционалды мүмкіндіктері, ActionScript объектті-бағытталған программалау тілінің функциялары мен ерекшеліктеріне байланысты жүйе қызметін одан әрі кеңейтуге мүмкіндік береді деген қорытынды жасады.

Кілт сөздер: код, шаблон, кадр, символ, импорт, фильм, кортеж, тег, атрибут, конструктор, модель, интерфейс, утилиттер.

Ақпараттық технологиялар және коммуникациялардың дамуымен тестілеудің әдістері жаңа деңгейлерге шықты: дербес компьютер арқылы тестілеу және Internet-ті қолданып *on-line* тестілеу. Ақпараттық технологиялардың қолдануы оқытудың сапасын бағалау үшін кәдімгі бақылау өткізудің алдында артықшылықтардың бір қатарын береді. Ең алдымен, бұл студенттердің керекті контингентінің жинағын қамтамасыз ететін орталықтандырылған бақылауды ұйымдастыру мүмкіндігі. Бұдан әрі компьютеризация бақылауды нақтырақ жасауға мүмкіндік береді, бұл оқытушының жекелігіне байланысты емес.

Ақпараттық технологиялардың дамуы әр түрлі программалық тестілеу кешендерін тәжірибе жүзінде құруға және қолдануға мүмкіндік туғызды. Қазіргі кезде білім алушы өз деңгейін тексеру үшін арналған қызметтер құруда [1, 2].

Тесттік тапсырмаларды құруда қолданылатын жақсы шешімдердің бірі Flash технологиясы болды. Ол мультипликациялық бейнелер жасауда да өңдеушілер арасында кеңінен қолдау тапты. Соңғы кездері Flash технологиясы Web-дизайнында, сонымен қатар Web-тен тыс аймақтарда да танымал болып келеді. Осындай аймақтардың бірі — электрондық оқыту жүйелерінің өңделуі мен көрсетілімдері. Flash-ті презентацияларда және электрондық оқыту жүйелерін өңдеуде тиімді құрал ретінде қолдануға болады [3–5].

Тесттік тапсырмалар жасаудың мақсаты — дәстүрлі ұйымдастырылған оқу процесі мен білімді бақылау автоматтық жүйелерді қолданып және тестке кіргізілетін педагогикалық материал құру.

Тестік формадағы тапсырмаларға келесі формалдық талаптар ұсынылады: қысқалығы; форманы дұрыс таңдау; айтылудың логикалық формасы; жауаптар бағасының бірдей заңдылығы; жауаптар үшін анықталған орынның болуы; тапсырма элементтерінің дұрыс орналасуы; барлық зерттелушілердің нұсқаулықтарының бірдейлігі; тапсырма формасы мен мазмұнның нұсқауы адекваттілігі.

Тесттік формада тапсырмалардың қысқалығы сөздер, символдар, графиктерді мұқият таңдауды қамтамасыз етеді, бұл арқылы минимум құралдарды тапсырма мазмұнындағы мағыналығы анық болуының максимумына жету керек. Қайталаулар, түсініксіздеу, сирек қолданылатын, сонымен қатар оқушыларға мағынасын түсінуге бөгет жасайтын белгісіз символдар, шетел сөздері алып тасталынады. Қысқалық айтылудың логикалық формасының артықшылық салдары болып табылады. Сондықтан тестік формадағы тапсырмалар тапсырма мен сұрақтардан әрдайым қысқа болады. Тестілеу бағдарламасы Flash-технологиясында қолданып, IT саласында білімді өзін-өзі тексеруге арналған тестілеу кешені және тестілеу тапсырмаларын құру мәселелері қарастырылды. Сондықтан бұл технология басқа тілдерден өзінің қолайлылығы және тиімділігімен ерекшеленіп тұрады. Оны білдіретін төмендегі сапаларға ие: 1) жинақтылық (компьютерде тез жүктеледі); 2) интерактивтілік; 3) мультимедиалық; 4) көпсалалығы; 5) қолайлылық.

Тестілеу кешенін құру барысында келесі программалық жабдықтар қолданылды: Adobe Photoshop CS3, Adobe ImageReady CS, Adobe DreamWeaver CS3, Adobe Flash CS3, NotePad++, сервер Apache.

Flash-бағдарламасында жұмыс істеу үшін арнайы тәжірибенің қажеті жоқ және Flash-бағдарламасы Web-тораптарының интерактивті элементтерін JavaScript, Java немесе HTML кодтар түрінде жазуға мүмкіндігі бар.

Flash-технологиясы HTML тілінің орнына ешқашан таласқан емес, алайда қазіргі уақытта Flash-тің көмегімен толық ролик беттерді форматтауға мүмкіндік бар. Macromedia Flash-тің көптеген беттерінде HTML мүлдем жоқ тәрізді сезіледі. HTML-код Flash-тің арқасында артта қалып, аз қолданыста.

Flash бағдарламасының терезесі бастапқы күйінде үш қосымша беттен тұрады:

1. Formats (Форматтар) — берілген қосымша бет фильмді жариялау кезінде құрылуға тиісті файлдар форматын таңдауға арналған. Қосымша қолданушы өз атын әрбір генерацияланатын файлға Use default names (Үнсіз келісім бойынша орнатылған аттарды қолдану) жалаушасын алып, енгізе алады. Егер қажет болса, файлға қолжетімділіктің әрбір файлға өз толық маршрутын көрсетуге болады. Қосымша форматтардың біреуінің таңдалуы кезінде Publish Settings терезесінде сәйкес қосымша бет құрылады. Егер қандай да бір графикалық формат (GIF, JPEG, PNG) таңдалса, онда HTML-да Flash-плеер болмаған жағдайда фильмнің графикаға ауысуын қамтамасыз ететін автоматты түрде сәйкес мәтін қосылады.

2. Flash — берілген қосымша бет FLA файлының SWF форматына экспортталу параметрін орнатады.

3. HTML — бұл қосымша беттің элементтері фильмді HTML-бетпарақтарына орналастырудың кейбір қосымша параметрлерінің таңдауын қамтиды.

HTML қосымша беті келесі элементтерден тұрады:

- Template (Шаблон) ашылмалы тізімі HTML-құжаты сәйкесінше сгенерирленген. Тізім келесідей негізгі нұсқалардан тұрады (олардың барлығы он шақты):
- Flash Only (Тек қана Flash) — шаблон HTML-құжатына тек қана фильмді жүктеуге қажетті тэгтарды қосуды қамтамасыз етеді (яғни <OBJECT> және <EMBED> тэгтары), берілген шаблон үнсіз келісім бойынша қолданылады;
- Flash with Named Anchor (Flash атаулы зәкірлермен) — шаблон HTML-құжатқа фильм кадрлары арасындағы навигация орындай алынуы негізінде қосымша гиперсілтемелердің қосылуын қамтамасыз етеді;
- Image Map (Сенсорлы карта) — шаблон HTML-құжатына клиенттік сенсорлық карталарды құруға мүмкіндік беретін параметрлермен <IMG> тэгының қосылуын қамтамасыз етеді. Берілген шаблонның таңдалуы кезінде Formats қосымша бетінде графикалық форматтардың біреуінен файлды генерациялауға рұқсат етеді. Quit Time — шаблон HTML-құжатқа Flash-фильмді Quit Time форматта проектор түрінде қосуға мүмкіндік береді;
- Dimensions (Өлшемдер) — ашылмалы тізімі Width және Height өрістерімен бірлесіп, фильм терезесінің өлшемін және өлшеу тәсілін таңдауға мүмкіндік береді;
- Paused at Start (Жіберу алдындағы кідіріс) жалаушасы. Егер ол орнатылған болса, онда фильм жүктелгеннен кейін қолданушының өзі ойнатуды инициализациялағанша ойнамайды. Үнсіз келісім бойынша фильмнің ойнауы оның жүктелуінен кейін бірден басталады;
- Loop (Цикл) жалаушасы. Егер орнатылған болса, онда фильмнің ойнауы циклді түрде бетпарақ жабылғанша қайталанады;
- Display Menu (Мәзірді көрсету) жалаушасы. Жалаудың орнатылуы тінтуірдің оң жақ батырмасын шерту арқылы шақырылатын клиптің контекстік мәзірін қолдануға мүмкіндік береді;
- Device Font (Физикалық қаріп) жалаушасы. Оның орнатылуы қаріптерге қолданушы компьютерінде орнатылмаған тегістеу (*anti-aliasing*) функциясын қолдануға рұқсат етеді;
- Window Mode (Терезе режимі) ашылатын тізімі Web-парақта фильм құрамын көрсету нұсқасын таңдауға арналған:
- Window — Flash-плеер броузер ішкі терезесінде көрсетілетін өзіндік тікбұрышты терезені қолданады. Бұл нұсқа ойнатудың ең үлкен жылдамдығын қамтиды;
- Opaque Windowless (Мөлдір емес, терезесіз) — фильм, сөзсіз, «экрансыз» бетпарақта ойналады, бұл кезде ол бетпарақтағы басқа объектілерді жасыра алады;

– Transparent Windowless (Мөлдір, терезесіз) — нұсқа алдыңғысынан былайша ерекшеленеді: фильм арқылы онымен жабылған басқа элементтер «көрінеді».

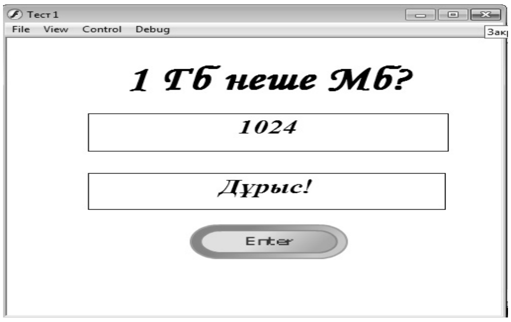
Тестілеу жүйесі қалай жүзеге асатындығына тоқталайық. Тесттік тапсырмалардың екі негізгі түрі бар: жабық және ашық түрдегі тапсырмалар (1-сур.).

1-сурет. Тесттік тапсырмалар түрлері

Жауаптың еркін формасы бар тест (бланк толтырылуы). Мәліметтің ең оңай жағдайындағы тесттердің бұл түрінде, қолданушымен мәтіндік өріске енгізілген мәлімет эталонмен салыстырылып, тестін орындалу дұрыстығының қорытындысы шығарылады. Мәтін енгізілгеннен кейін және батырма басылғаннан кейін тексеруді іске асыру коды мынадай түрде жазылады:

```
but1.onPress = function() {
  // Жолды өңдеуден өткізу
  // Жол объектісін құру және оған мәнді енгізу өрісінен тағайындау
  string1 = newString();
  string1 = txt.text;
  // барлық символдарды төменгі регистрге келтіру
  string1 = string1.toLowerCase();
  // жол ұзындығын анықтау
  len = string1.length;
  // жолдағы барлық символдарды charAt();  әдісі арқылы циклда қарастыру
  // және олар қателер болып табылмаса,
 // онда бұл символдарды char1 айнымалысына қосу
  for (i=0; i<len; i++) {
    char = string1.charAt(i);
    if (char != " ") {
      char1 += char;
    }
  } // іріктеп алу нәтижесін мәтіндік өріске қайта енгізу
  string1 = char1;
  txt.text = string1;
  char1 = "";
  // және эталонмен салыстыру
    if (string1 == "1024") {
      itog.text = "Дұрыс!";
   } else {
      itog.text = "Сіз қателестіңіз...";
   }
 };
```

Нәтиже төмендегі 2-суретте келтірілген.



2-сурет. Жауаптың еркін формасы бар тест тапсырмасы терезесі

Төрт пән бойынша («Мультимедиалық технологиялар», «Компьютерлік желілер», «Информатиканың қолданбалы есептері» және «Информатика») 100 тесттік тапсырма құрылды. Тесттік тапсырмалардың барлық түрлері қамтылған.

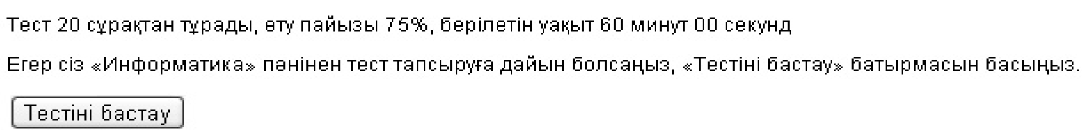
Құрылған тестілеу кешенінің басты бетінің кескіні 3-суретте келтірілген.

3-сурет. Тестілеу кешенінің басты бетінің кескіні

Деректер қоры phpMyAdmin утилитасы көмегімен құрылған. Деректер қорындағы кестелерді құру үшін жазылған сұраныстар мен бағдарлама коды мынадай түрде жазылады. Мысалы, деректер қорынан пән бойынша сұрақтарды іріктеу үшін келесідей код құрылған:

```
$result1 = mysql_query("SELECT * FROM questions WHERE s_id='$id' ",$db);
if (!$result1)
{
echo "<p>Деректер қорынан іріктеу сұранысы орындалған жоқ. Ол туралы администраторға
жызыңыз: support@test.kz. <br> <strong>Қатенің коды: </strong></p>";
exit(mysql_error());
}
if (mysql_num_rows($result1) > 0)
{
while ($myrow1 = mysql_fetch_array($result1))
{ $b[]=$myrow1;
};
};
```

Тестілеу пәнін таңдаған соң, сұрақтарға жауап беріп болғаннан кейін алған балы көрсетіліп, 4-суреттегідей терезе ашылады.



4-сурет. Тестілеу туралы ақпарат терезесі

Тестілік түрде тапсырмаларды әзірлеу біртұтас әдістемелер шеңберінде қисынды талаптарға сай қатар негізде жүргізіледі. Дүниежүзілік тәжірибеде қабылданған әдістеме шеңберінде, сондай талаптарға келесілер жатады:

1. Тапсырмалар мәтінінде екі ұштылық немесе тұжырымдардың анықтық емесі болмауға тиісті.
2. Тапсырманың негізгі бөлігі өте қысқаша тұжырымдалады (ережеге сәйкес бір сөйлемнен көп емес).
3. Бір тапсырмаға тиісті барлық жауап нұсқалары жуық шамамен бірдей ұзындықта болуға тиісті.
4. Тапсырма мәтінінен болжамдау көмегімен дұрыс жауапты таңдауға себепші болатын барлық вербалды ассоциацияларды алып тастау қажет.

«Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2011–2020 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасында» Интернет желілеріне білім беру ұйымдарының 90 %-ынан астамы қосылатын болады деп айтылған.

Кең жолақты Интернетке қосылу, электрондық білім беру жүйесі үшін жабдықтармен қамтамасыз ету және жеткізушілердің қызмет көрсетулерін таңдау мемлекеттік сатып алу саласындағы Қазақстан Республикасының қолданыстағы заңнамасына сәйкес жүргізілетін болады.

Білім беру ұйымдарының 90 %-ның қажетті оқу ресурстары бар Интернет-ресурстары болады. Сондықтан біз құрған тестілеу кешені біздің еліміздің азаматтарына қажет болады деген сенімдеміз.

Жоғары оқу орны үшін білім алушылардың оқу жетістіктерін сырттай бағалау — бейресми рейтингте алдыңғы орындарды иелену мүмкіндігі, ондай рейтингтің беделі жыл сайын өсіп келеді. Сонымен бірге жоғары оқу орындары үшін білім алушылардың оқу жетістіктерін сырттай бағалау — тұтынушыларға ұсынылып отырған білім беру қызметінің сапасының кепілдігінің салмақты дәлелі, ал ол, өз кезегінде, бағдарламалық немесе институционалдық деңгейдегі аккредитация кезінде өз септігін тигізуі мүмкін.

Әдебиеттер тізімі

1 [ЭР]. Қолжетімділік тәртібі: http://perevod.nur.kz/ru-kz.html

2 *Бенкен Е.* PHP, MySQL, XML программирование для Интернета. — СПб.: БХВ-Петербург, 2007. — 306 с.

3 *Лещев Д.В.* Flash MX 2004. Теория и практика. Самоучитель. — СПб.: Питер, 2004. — 362 с.; ил.

4 *Майоров А.Н.* Теория и практика создания тестов для системы образования. — М.: Интеллект-центр, 2001. — 145 с.

5 *Рейнхард Р., Лотт Д.* Macromedia Flash MX ActionScript. Библия пользователя / Пер с англ. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2009. — 1280 с.; ил.–парал.тит.англ.

А.Б.Кельдибекова, А.Е.Сланбекова, Ш.К.Каменова

Автоматизация тестирующей системы, предназначенной для оценки учебных достижений

В статье рассмотрено создание тестирующей системы с использованием программных пакетов Adobe Photoshop CS3, Adobe ImageReady CS, Adobe DreamWeaver CS3, Adobe Flash CS3, NotePad++, сервер Apache. Тестирующий комплекс и создание тестируемых заданий используются во Flash-технологии, в сфере технологий IT для самопроверки знаний обучающихся. Отмечены возможности расширения функций данной системы с использованием методов, основных функций программы Flash, особенностей объектно-ориентированного языка программирования ActionScript.

A.B.Keldibekova, A.Ye.Slanbekova, Sh.K.Kamenova

Automation testing system for assessing of educational achievements

This article discusses the creation of the testing system using the software package Adobe Photoshop CS3, Adobe ImageReady CS, Adobe DreamWeaver CS3, Adobe Flash CS3, NotePad ++, server Apache. Development of tests and analysis of the results of testing are important. The testing and the creation of complex test tasks used in Flash technology in the field of IT technologies for self-knowledge of their students. This article discusses the possibility of expanding the functions of the system using the capabilities, methods, basic functions of the program Flash, features of object-oriented programming language ActionScript.

References

1 [ER]. Access mode: http://perevod.nur.kz/ru-kz.html
2 Behnken Ye. *PHP, MySQL, XML programming for interneta*, Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2007, 306 p.
3 Leshchev D.V. *Flash MX 2004. Theory and Practice. Teach*, Saint Petersburg: Peter, 2004, 362 p.
4 Mayorov A.N. *Theory and practice of creating tests for the system education*, Moscow: Intelligence Center, 2001, 145 p.
5 Reinhard R., Lott. D. *Macromedia Flash MX ActionScript. Users*: Bible translated from Engl., Moscow: Publ. House «Williams», 2009, 1280 p. il.-paral.tit.engl.

УДК 531.88

Т.Х.Макажанова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: orumbayevan@mail.ru)

Об условии компактности в пространстве звездных множеств

В статье исследовано пространство $S(X)$ звездных множеств конечномерного евклидова пространства, являющегося упорядоченным нормированным пространством. Получены условия компактности в $S(X)$ для подмножеств, состоящих из выпуклых звездных множеств.

Ключевые слова: звездное множество, калибровочная функция, выпуклость, компактность.

В работе [1] построено упорядоченное нормированное пространство $S(X)$ звездных подмножеств конечномерного евклидова пространства $X = R^n$ и изоморфное ему пространство $K(X)$ калибров звездных множеств.

Примем обозначения: clM — замыкание; $\operatorname{int} M$ — внутренность; frM — граница множества $M \subset X$.

Напомним U — звездное множество в X $\Leftrightarrow$ U-замкнутом подмножестве, $0 \in \operatorname{int} U$: каждый луч $Lx = \{\lambda x, \lambda \geq 0\}$ $\forall x \in X$ пересекает границу U не более чем в одной точке.

Функция $Pu(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$ $\forall x \in X$ называется калибром множества U.

При этом P — калибр $\Leftrightarrow$ P — положительно однородная неотрицательная непрерывная функция на X ([1]).

Отметим, что соответствие $\varphi : S(X) \to K(X),\ U \to Pu$, где $U = \{x \in X : Pu(x) \leq 1\}$ является биекцией.

Пусть $|x|$ — евклидова норма элемента x в $X = R^n$, $B_0 = \{x \in X : |x| \leq 1\}$ — единичный шар в X, тогда $P_{B_0} = |\ |$, а если $B = B(0,r) = \{x \in X : |x| \leq r\}$, то $P_B = \frac{1}{r}|\ |$ и P_B является нормой в X.

Нетрудно заметить, что если U — выпуклое звездное множество, то Pu — выпуклая функция.

Под 0-симметричным множеством в X будем понимать множество, симметричное относительно 0.

Если U — звездное, 0 — симметричное множество, то легко увидеть, что $Pu(x) = Pu(-x)$ $\forall x \in X$, и, наоборот, если $Pu(x) = Pu(-x)$ $\forall x \in X$, то U — 0-симметричное.

Для звездных множеств вводятся алгебраические инверсные операции $U_1 \oplus U_2 = cl \bigcup\limits_{0 \leq \alpha \leq 1} \left[\alpha U_1 \cap (1-\alpha) U_2\right]$ сложения и $\alpha \otimes U = \frac{1}{\alpha} U,\ (\alpha \geq 0)$ умножения на неотрицательные числа. Упорядочение звездных множеств определяется соотношением $U_1 \geq U_2 \Leftrightarrow U_1 \subset U_2$.

При рассмотрении во множестве калибров $K(X)$ операций $\left(P_1+P_2\right)(x)=P_1(x)+P_2(x)$ и $(\alpha P)(x)=\alpha P(x)\ \forall x\in X$ и отношения порядка $P_1\le P_2 \Leftrightarrow= P_1(x)\le P_2(x)\ \forall x\in X$ мы продолжим биекцию $\varphi: S(X)\to K(X)$ до алгебраического и порядкового изоморфизма $S(X)$ и $K(X)$. При этом $S(X)$ и $K(X)$ становятся конусами.

Поскольку калибры положительно однородны, то $K(X)$ можно отождествлять с конусом $C_0^+(B_0)$ — неотрицательных, положительно однородных, непрерывных функций на единичном шаре B_0 в X.

Построенное далее в [1] упорядоченное нормированное пространство $T(X)$ звездных множеств позволяет рассматривать $S(X)$ как конус в $T(X)$ с нормой, определяемой по формуле $\|U\|=\inf\left\{\lambda>0:\lambda U\supset B_0\right\}$, соответственно, $\|P\|=\max\limits_{x\in R^n}\dfrac{P(x)}{|x|}=\max\limits_{x\in B_0}P(x)\ \forall P\in K(X)$. (Здесь и далее при рассмотрении $\|P\|$ считаем $x\ne 0$).

Замечание 1. Покажем, что $\|U\|=\|Pu\|\ \forall u\in S(X)$. По определению

$$\|U\|=\inf\left\{\lambda>0:\lambda U\supset B_0\right\}=\inf\left\{\lambda>0:U\supset\frac{1}{\lambda}B_0\right\}=\inf\left\{\lambda>0:U\supset\lambda\otimes B_0\right\}==\inf\left\{\lambda>0:U\le\lambda\otimes B_0\right\}.$$

Если $U\le\lambda\otimes B_0\Rightarrow Pu\le\lambda\cdot B_0=\lambda|\ |$ в силу порядкового изоморфизма φ.

Согласно определению $\|Pu\|=\max\limits_{x\in R^n}Pu(x)\le\lambda\max\limits_{x\in B_0}|x|=\lambda,$ тогда

$$\|Pu\|\le\inf\left\{\lambda>0:U\le\lambda\otimes B_0\right\}=\|U\|.$$

С другой стороны, если $\lambda_0=\|Pu\|=\max\limits_{x\in R^n}\dfrac{Pu(x)}{|x|}\ge\dfrac{Pu(x)}{|x|}\ \forall x\in R^n\Rightarrow Pu(x)\le\lambda_0|x|\ \forall x\in R^n,$ т.е. $Pu\le\lambda_0|\ |$, откуда и $U\le\lambda_0\otimes B_0$, тогда $\|U\|=\inf\left\{\lambda>0:U\le\lambda\otimes B_0\right\}\le\lambda_0=\|Pu\|.$

Таким образом, биекция $\varphi: S(X)\to K(X)$ является изометрией.

Замечание 2. Очевидно, $\|B_0\|=\||\ |\|=1$, и если $B=B(0,r)=r\cdot B_0=\dfrac{1}{r}\otimes B_0$, то $\|B\|=\dfrac{1}{r}.$

Замечание 3. Если $U_1\supset U_2\Rightarrow\|U_1\|\le\|U_2\|$. Действительно, условие $U_1\supset U_2\Leftrightarrow U_1\le U_2$, откуда $Pu_1\le Pu_2$ и $\|U_1\|=\|Pu_1\|=\max\limits_{x\in B_0}Pu_1(x)\le\max\limits_{x\in B_0}Pu_2(x)=\|Pu_2\|=\|U_2\|.$

Если $U\supset B=B(0,r)$, то $\|U\|=\|B\|=\dfrac{1}{r}.$

Предложение. Пусть $\Sigma=\{U$ -звездные выпуклые 0-симметричные$\}$, $\exists B=B\left(0,r\right)\subset U\ \forall U\in$ $\in\Sigma\Rightarrow\Sigma$ -выпуклое компактное множество в $S(X)$.

Доказательство. В силу отмеченной выше изометричности φ (т.е. гомеоморфности $S(X)$ и $K(X)$) компактность Σ в $S(X)$ равносильна компактности $\sum_p=\left\{Pu,U\in\sum\ \right\}=\left\{P\in K(X),P\right.$ — выпуклая, $\left.P(x)=P(-x),\|P\|\le\dfrac{1}{r}\right\}$. Из включения $B\subset U$ и замечания 3 $\|Pu\|\le\dfrac{1}{r}\ \forall U\in\Sigma,$ но $\|Pu\|=\max\limits_{x\in B_0}P_u(x)\le\dfrac{1}{r}\ \forall U\in\Sigma,$ т.е. множество непрерывных функций Σ_p равномерно ограничено на выпуклом компактном шаре B_0 в X, т.е. в $C(B_0)$, где $C(B_0)=\{f$ — непрерывные функции на $B_0\}$, $\|f\|=\max\limits_{x\in B_0}|f(x)|\ \forall f\in C(B_0)\}$.

Как было отмечено выше, калибры выпуклых звездных 0-симметричных множеств выпуклы, (т.е. $P(\alpha x)=\alpha P(x)\ \forall\alpha\ge 0\ \forall x,\ P(x+y)\le P(x)+P(y)\ \forall x,y\in X)$ и $P(x)=P(-x)\ \forall x\in X$ в силу 0-симметричности множеств.

Покажем, что множество $\sum_p$ равностепенно непрерывно в $C(B_0)$, т.е. выполнено условие

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0: \left|Pu(x_1)-Pu(x_2)\right|<\varepsilon\ \forall U\in\Sigma\ \ \forall x_1,x_2\in B_0: \left|x_1-x_2\right|<\delta_\varepsilon.$$

В силу выпуклости калибров Pu имеем $Pu(x_1)=Pu(x_1-x_2+x_2)\le Pu(x_1-x_2)+Pu(x_2)$ или $Pu(x_1)-Pu(x_2)\le Pu(x_1-x_2)$, $Pu(x_2)=Pu(x_2-x_1+x_1)\le Pu(x_2-x_1)+Pu(x_1)$ или $Pu(x_2)-Pu(x_1)\le$ $\le Pu(x_2-x_1)$, откуда $Pu(x_1)-Pu(x_2)\ge -Pu(x_2-x_1)$.

Таким образом, мы получили неравенства $-Pu(x_2-x_1)\le Pu(x_1)-Pu(x_2)\le Pu(x_1-x_2)$, но $Pu(x_2-x_1)=Pu(x_1-x_2)$, т.е. $-Pu(x_1-x_2)\le Pu(x_1)-Pu(x_2)\le Pu(x_1-x_2)$ или $\left|Pu(x_1)-Pu(x_2)\right|\le$ $\le Pu(x_1-x_2)$.

В силу положительной однородности

$$Pu(x_1-x_2)=Pu\left(\left|x_1-x_2\right|\frac{x_1-x_2}{\left|x_1-x_2\right|}\right)=\left|x_1-x_2\right|Pu\left(\frac{x_1-x_2}{\left|x_1-x_2\right|}\right),$$

где $\dfrac{x_1-x_2}{\left|x_1-x_2\right|}\in B_0$, т.е. $Pu\left(\dfrac{x_1-x_2}{\left|x_1-x_2\right|}\right)\le\left\|Pu\right\|$.

Пусть $\varepsilon>0$, полагая $0<\delta_\varepsilon<\varepsilon\cdot r$, имеем

$$\left|Pu(x_1)-Pu(x_2)\right|\le Pu(x_1-x_2)=\left|x_1-x_2\right|Pu\left(\frac{x_1-x_2}{\left|x_1-x_2\right|}\right)\le\left|x_1-x_2\right|\left\|Pu\right\|,$$

но $\left\|Pu\right\|\le\dfrac{1}{r}$ $\forall u\in\Sigma$, поэтому $\left|Pu(x_1)-Pu(x_2)\right|\le\delta_\varepsilon\cdot\dfrac{1}{r}<\dfrac{\varepsilon\cdot r}{r}=\varepsilon$, если $\left|x_1-x_2\right|<\delta_\varepsilon$.

Пусть $C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$— пространство непрерывных функций, отображающих компактный шар $B_0=B(0,1)$ в числовой компакт $\left[0,\dfrac{1}{r}\right]$, наделенное нормой $\left\|f\right\|=\max\limits_{x\in B_0}\left|f(x)\right|$.

Множество $\sum_p\subset C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$ и, как показано выше, $\sum_p$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$, тогда по теореме Арцела-Асколи [2] множество $\sum_p$ является относительно компактным в $C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$.

Осталось показать, что $\sum_p$ замкнуто по норме в $C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$.

Пусть $\left\{Pu_n\right\}_n\subset\sum_p$ и $Pu_n\to P$, (т.е. $\left\|Pu_n-P\right\|\to 0$) в $C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$. Как известно, сходимость по норме в $C\left(B_0,\left[0,\dfrac{1}{r}\right]\right)$ является равномерной сходимостью, т.е. $\lim Pn(x)=P(x)$ $\forall x\in B_0$, и P является непрерывной на B_0 функцией.

При этом $\left\|P\right\|=\left\|P-Pu_n+Pu_n\right\|\le\left\|P-Pu_n\right\|+\left\|Pu_n\right\|$, откуда $\left\|P\right\|\le\lim\left\|P-Pu_n\right\|+\lim\left\|Pu_n\right\|\le\dfrac{1}{r}$.

Очевидно, что $P(\alpha x)=\lim Pu_n(\alpha x)=\alpha\lim Pu_n(x)=\alpha P(x)$; $P(x+y)=\lim Pu_n(x+y)\le$ $\le\lim\left(Pu_n(x)+Pu_n(y)\right)=\lim Pu_n(x)+\lim Pu_n(y)=P(x)+P(y)\,\forall x,y\in B_0$, т.е. P— выпуклая функция на B_0.

Кроме того, $P(-x)=\lim Pu_n(-x)=\lim Pu_n(x)=P(x)\ \forall x\in B_0$. Распространив P на всё X по формуле $P(0)=0$ и $P(x)=P\left(|x|\dfrac{x}{|x|}\right)=|x|P\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$, где $\dfrac{x}{|x|}\in B_0$, $x\neq 0$, получим, что P — неотрицательная, положительно однородная функция на X и $P(x)=P(-x)\ \forall x\in X$.

Покажем, что $P(x+y)\le P(x)+P(y)\ \forall x,y\in X$. Если $x=0$ (или $y=0$) или $x+y=0$, то всё очевидно.

Пусть $x\neq 0,\ y\neq 0,\ x+y\neq 0$, тогда по определению $P(x+y)=|x+y|P\left(\dfrac{x+y}{|x+y|}\right)$, но $x+y=\left(|x|+|y|\right)\left(\dfrac{x+y}{|x|+|y|}\right)=\left(|x|+|y|\right)\left(\dfrac{x}{|x|+|y|}+\dfrac{y}{|x|+|y|}\right)$, где $\dfrac{x}{|x|+|y|}\in B_0$, $\dfrac{y}{|x|+|y|}\in B_0$, $\dfrac{x+y}{|x|+|y|}\in B_0$ и в силу выпуклости P на B_0 имеем, что $P\left(\dfrac{x}{|x|+|y|}+\dfrac{y}{|x|+|y|}\right)\le\dfrac{1}{|x|+|y|}\left(P(x)+P(y)\right)$, но

$$P(x+y)=\left(|x|+|y|\right)P\left(\frac{x+y}{|x|+|y|}\right)=\left(|x|+|y|\right)P\left(\frac{x}{|x|+|y|}+\frac{y}{|x|+|y|}\right)\le$$
$$\le\left(|x|+|y|\right)\frac{1}{\left(|x|+|y|\right)}\left(P(x)+P(y)\right)=P(x)+P(y).$$

Мы получили, что P — выпуклая на X функция. При этом $\|P\|$ определяется на B_0, поэтому $\|P\|\le\dfrac{1}{r}$, что было уже отмечено.

Покажем, что P — непрерывная на X функция. Пусть $x_n\to x$, проверим, что $P(x_n)\to P(x)$. Как известно, сходимость $x_n\to x$ в $X=R^n$ равносильна тому, что $|x_n-x|\to 0$.

Учитывая, что $|x_n-x|\to 0$, можно считать, что $\left(x_n-x\right)\in B_0$, а так как P на B_0 является непрерывной функцией, то $P\left(x_n-x\right)\to P(0)=0$. Поскольку P_n и P — числовые функции, то

$$P\left(x_n\right)\to P(x)\Leftrightarrow P\left(x_n\right)-P(x)\to 0\Leftrightarrow\left|P\left(x_n\right)-P(x)\right|\to 0.$$

Учитывая выпуклость функции P, имеем оценки:

$$P(x)=P\left(x-x_n+x_n\right)\le P\left(x-x_n\right)+P\left(x_n\right)=P\left(x_n-x\right)+P\left(x_n\right);$$
$$P\left(x_n\right)=P\left(x_n-x+x\right)\le P\left(x_n-x\right)+P\left(x\right),$$

откуда

$$P(x)-P\left(x_n\right)\le P\left(x_n-x\right),\ P\left(x_n\right)-P(x)\le P\left(x_n-x\right).$$

Из последних двух неравенств имеем $\left|P\left(x_n\right)-P\left(x\right)\right|\le P\left(x_n-x\right)\to 0$ и т.д.

Таким образом, мы показали, что P — неотрицательная, положительно однородная, выпуклая функция на X, $P(-x)=P(x)\ \forall x\in X$ и $\|P\|\le\dfrac{1}{r}\left(\Leftrightarrow B=B(0,r)\subset U\right)$, т.е. функция P является калибром множества $U\in\Sigma$, откуда $P\in\sum_p$.

Тем самым $\sum_p$ — замкнутое множество, что вместе с относительной компактностью дает компактность $\sum_p$, а в силу изометрии φ — и компактность Σ. Покажем, что $\sum_p$ — выпуклое множество. Пусть $P_1,P_2\in\sum_p$, $\alpha,\beta\ge 0$, $\alpha+\beta=1$, $P=\alpha P_1+\beta P_2$. Очевидно, что P — неотрицательная, непрерывная, положительно однородная функция, $P(x)=P(-x)\ \forall x\in X$.

Кроме того, $P(x+y)=\alpha P_1(x+y)+\beta P_2(x+y)\le\alpha P_1(x)+\alpha P_1(y)+\beta P_2(x)+\beta P_2(y)=\left(\alpha P_1(x)+\beta P_2(x)\right)+$ $+\left(\alpha P_1(y)+\beta P_2(y)\right)=P(x)+P(y)$, а $\|P\|=\|\alpha P_1+\beta P_2\|\le\alpha\|P_1\|+\beta\|P_2\|\le\alpha\cdot\dfrac{1}{r}+\beta\dfrac{1}{r}=r$, откуда $P\in\sum_p$.

Тем самым $\sum_p$, а значит, и Σ — выпуклое компактное множество.

Замечание 4. Как известно, для звездных множеств U_1 и U_2 условие $U_1 \subset U_2$ означает, что $U_1 \geq U_2$. Кроме того, в силу звездности U_1 существует шар $B = B(0,r) \subset U_1$, а значит, $B \subset U_2$. Поэтому полученный в предложении результат представляет

Теорема. Пусть Σ — ограниченное сверху в $S(X)$ множество звездных выпуклых 0 - симметричных множеств $\Rightarrow \Sigma$ — выпуклое компактное множество.

Список литературы

1 *Rubinov A.M., Jagubov A.A.* The space of star-shaped sets and its applications in no smooth optimization. — Jaxenburg, Austria, 1984.

2 *Александрян З.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. — М.: Высш. шк., 1979.

Т.Х.Мақажанова

Жұлдыздық жиындар кеңістігіндегі ықшамдылық шарты жайында

Мақалада ақырлы өлшемді евклидтік кеңістіктің $S(X)$ жұлдызды жиындар кеңістігі реттелген нормалданған кеңістікте зерттелген. Дөңес жұлдызды жиындардан тұратын $S(X)$ ішкі жиындарының ықшамдылық шарты алынды.

T.Kh.Makazhanova

About the condition of the compactness in the space of star-shaped sets

In this paper was investigated the space $S(X)$ star-shaped sets in the finite-dimensional The properties of space is the space of star-shaped subsets of finite-dimensional Euclidean space, which is an ordered nor med space. Here were obtained the conditions of the compactness in $S(X)$ for subsets consisting of the convex star-shaped sets.

References

1 Rubinov A.M., Jagubov A.A. *The space of star-shaped sets and its applications in no smooth optimization*, Jaxenburg, Austria, 1984.

2 Aleksandryan R.A., Mirzaxanyan E.A. *General topology*, Moscow: Vysshaya shkola, 1979.

УДК 517.946

Ж.Н.Тасмамбетов

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова
(E-mail: tasmam@rambler.ru)

Применение метода Фробениуса-Латышевой к построению биортогональных многочленов двух переменных Эрмита

В статье рассмотрены возможности построения решений специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в биортогональных многочленах Эрмита двух переменных. С помощью метода Фробениуса-Латышевой показаны особенности построения решений в виде биортогональных многочленов двух переменных вблизи особых кривых (0,0) и (∞, ∞). На конкретных примерах обосновано то, что основным аппаратом при таких построениях являются гипергеометрические функции Аппеля двух переменных.

Ключевые слова: построение решений, специальная система, частные производные, биортогональные многочлены, метод Фробениуса-Латышевой, гипергеометрические функции, особенности.

Предварительные сведения. Постоянно расширяется круг теоретических и прикладных вопросов, при решении которых используются ортогональные многочлены. Если ортогональные многочлены одной переменной хорошо изучены и в своем развитии к настоящему времени достигли значительного совершенства, то в случае двух и более переменных ортогональные многочлены изучены значительно меньше. Начало изучения в этом направлении заложено в работах Ш. Эрмита (1865) и П. Аппеля (1881). Построенные ими биортогональные многочлены являются аналогами и обобщениями классических ортогональных многочленов на случай двух и более переменных [1].

Простейшие свойства многочленов двух переменных, ортогональных по области с произвольным весом, были рассмотрены Д. Джексоном в 1938 г. [2]. Многие понятия, связанные с ортогональными многочленами по переменным, такие как монические ортогональные многочлены и нормальные биортогональные системы, приведены в монографии П.К. Суетина [2]. Так, многочлен

$$\Phi_{nk}(x,y)=x^{n-k}\cdot y^{k}+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}\cdot x^{m-s}\cdot y^{s},$$

удовлетворяющий условиям

$$\iint h(x,y)\cdot\Phi_{nk}(x,y)\cdot x^{p-q}\cdot y^{q}dxdy=0,\quad (p=0,1,...,n-1 \text{ и } q=0,1,...,p),$$

называется *моническим ортогональным многочленом*. Однако монические ортогональные многочлены одной и той же степени, вообще говоря, не ортогональны между собой. Поэтому, возникает задача о построении биортогональной системы многочленов. Действительно, существует такая система многочленов $\{\Psi_{ms}(x,y)\}$, что выполняются условия

$$\iint_{G} h(x,y)\cdot\Phi_{nk}(x,y)\cdot\Psi_{ms}(x,y)dxdy=\delta_{nm}\cdot\delta_{ks}.$$

Биортогональная система многочленов

$$\{\Phi_{nk}(x,y);\ \Psi_{ms}(x,y)\}$$

называется *нормальной биортогональной системой*, если при любом номере *n* выполняется равенство $\Psi_{ms}(x,y)=C_{np}^{(S)}\cdot\Phi_{np}(x,y)$.

Постановка задачи. Требуется построить решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned}x^2p_0\cdot Z_{xx}+xyp_1\cdot Z_{xy}+xp_2\cdot Z_x+yp_3\cdot Z+p_4\cdot Z=0\\ y^2q_0\cdot Z_{yy}+xyq_1\cdot Z_x+xq_2\cdot Z_x+yq_3\cdot Z_3+q_4\cdot Z=0\end{aligned}\right\},\tag{1}$$

где

$$p_i(x)=a_{00}^{(i)}+a_{10}^{(i)}\cdot x^k,\ \ q_i(y)=b_{00}^{(i)}+b_{10}^{(i)}\cdot y^k;\tag{2}$$

$(a_{00}^{(i)}, a_{10}^{(i)}, b_{00}^{(i)}, b_{01}^{(i)}\ (i=0,1,2,3,4)$ и k — некоторые постоянные) в виде биортогональных многочленов двух переменных. При этом особое внимание уделяется биортогональным многочленам Эрмита двух переменных. В системе (1) $Z = Z(x,y)$ — общая неизвестная, и для нее выполняются условия совместности [3] и условие интегрируемости

$$\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{q_1}{q_0} - 1 \neq 0. \tag{3}$$

При выполнении этих условий система может иметь до четырех линейно-независимых, частных решений

$$Z_j(x,y) = x^{\rho j}\cdot y^{\delta j}\cdot\sum_{\mu,\nu}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(i)}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\,(C_{00}\neq 0) \tag{4}$$

$\left((\rho_j, \sigma_j, C_{\mu,\nu}^{(i)}(\mu,\nu = 0,1,2,...;\ j=1,2,3,4)\right)$ — некоторые постоянные.

Тогда общее решение системы (1)–(2) представимо в виде

$$Z(x,y) = C_1\cdot Z_1 + C_2\cdot Z_2 + C_3\cdot Z_3 + C_4\cdot Z_4 \tag{5}$$

и зависит от произвольных постоянных $C_j\,(j=1,2,3,4)$.

Свойства системы (1)–(2). Раскроем некоторые важные свойства системы (1)–(2).

Подстановка

$$x^k = u,\ v = y^k \tag{5'}$$

преобразует эту систему в систему гипергеометрического типа [4]:

$$\begin{gathered}
u^2\left(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)}u\right)Z_{uu} + uv\left(a_{00}^{(1)} + a_{10}^{(1)}u\right)Z_{uv} + u\left\{\left[a_{00}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{a_{00}^{(2)}}{k}\right] + \left[a_{10}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{a_{10}^{(2)}}{k}\right]u\right\}Z_u + \\
+\frac{1}{k}\cdot v\cdot\left[a_{00}^{(3)} + a_{10}^{(3)}\cdot u\right]\cdot Z_v + \frac{1}{k^2}\cdot\left(a_{00}^{(4)} + a_{10}^{(4)}\cdot u\right)\cdot Z = 0; \\
v^2\left(b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)}v\right)Z_{vv} + uv\left(b_{00}^{(1)} + b_{01}^{(1)}v\right)Z_{uv} + v\left\{\left[b_{00}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{b_{00}^{(3)}}{k}\right] + \left[b_{01}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{b_{01}^{(3)}}{k}\right]v\right\}\cdot Z_v + \\
+\frac{1}{k}\cdot u\cdot\left[b_{00}^{(2)} + b_{01}^{(2)}\cdot v\right]\cdot Z_u + \frac{1}{k^2}\cdot\left(b_{00}^{(4)} + b_{01}^{(4)}\cdot v\right)\cdot Z = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Систему (6) назвали гипергеометрической, поскольку из нее при различных значениях коэффициентов можно получить многие из 34 гипергеометрических функций двух переменных со списка Горна [5].

В частности, получим гипергеометрические функции Аппеля двух переменных

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\cdot(\beta)_n\cdot(\beta')_n\cdot x^m\cdot y^n}{(\gamma)_m\cdot(\gamma')_n\cdot m!\cdot n!}, \tag{7}$$

являющиеся решением системы F_2:

$$\left.\begin{aligned}
&x(1-x)Z_{xx} - xyZ_{xy} + \left[\gamma - (a+\beta+1)x\right]Z_x - \beta yZ_y - \alpha\beta\cdot Z = 0\\
&y(1-y)Z_{yy} - xyZ_{xy} + \left[\gamma' - (a+\beta'+1)y\right]Z_y - \beta' xZ_x - \alpha\beta' Z = 0
\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

и функцию двух переменных

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m\cdot(\alpha')_n\cdot(\beta)_m\cdot(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\cdot m!\cdot n!}x^m\cdot y^n, \tag{9}$$

являющуюся решением системы (F_3):

$$\left.\begin{aligned}
&x(1-x)\cdot Z_{xx} + yZ_{xy} + \left[\gamma - (a+\beta+1)x\right]\cdot Z_x - \alpha\beta\cdot Z = 0\\
&y(1-y)\cdot Z_{yy} + xZ_{xy} + \left[\gamma - (a'+\beta'+1)y\right]\cdot Z_y - \alpha'\beta'\cdot Z = 0
\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Гипергеометрические функции двух переменных являются важным аппаратом исследования биортогональных многочленов двух переменных. Это можно показать на конкретных примерах, используя приведенные выше функции Аппеля двух переменных $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';u,v)$ и $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;u,v)$.

Применение метода Фробениуса-Латышевой. Для построения решения системы (1)–(2) в виде обобщенных степенных рядов двух переменных (4) применяем метод Фробениуса-Латышевой [6], где для исследования систем используются понятия ранга p и антиранга m. Понятие ранга $p = 1 + k$ $(k$ — *подранг*$)$ ввел А.Пуанкаре (1886) для изучения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее Э.Томе ввел понятие антиранга $m = -1-\chi$ (χ — антиподранг).

Понятие ранга связано с особенностью $x = \infty$, а антиранга — с особенностью $x = 0$. Эти понятия были обобщены Ж.Н.Тасмамбетовым на случай системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, кроме того, установлены простые признаки регулярности и иррегулярности особых кривых $(x = 0, y = 0)$ и $(x = \infty, y = \infty)$ [6]. В данном случае при $a_{00}^{(0)} \neq 0, b_{00}^{(0)} \neq 0$ система (6) имеет регулярную особенность $(x = 0, y = 0)$ и ранг $p = 0$, а также антиранг $m = 0$.

В качестве конкретного примера применения этого метода рассмотрим систему Эрмита [1; 318]:

$$(1-x)^2V_{xx} - xyV_{xy} - (n+3)xV_x + myV_y + +m(m+n+2)V = 0; \qquad (11)$$
$$(1-y)^2V_{yy} - xyV_{xy} - (m+3)yV_y + nxV_x + n(m+n+2)V = 0,$$

являющуюся частным случаем исходной системы (1)–(2).

Применение метода Фробениуса – Латышевой начинается с составления системы характеристических функций (11) [6]:

$$L_1[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^{\rho-2} \cdot y^\sigma \cdot \{[\rho\cdot(\rho-1)] - [\rho\cdot(\rho-1) + \rho\sigma + (n+3)\cdot\rho + m\sigma + m(m+n+2)]\,x^2]\};$$
$$L[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^\rho \cdot y^{\sigma-2} \cdot \{[\sigma\cdot(\sigma-1)] - [\sigma\cdot(\sigma-1) + \rho\,\sigma + (m+3)\sigma + n\cdot\rho + n(m+n+)]y^2\}. \quad (12)$$

Отсюда определим систему определяющих уравнений относительно особенности (0, 0):

$$\left.\begin{aligned} f_{00}^1(\rho,\sigma) &\equiv \rho(\rho-1) = 0 \\ f_{00}^2(\rho,\sigma) &\equiv \sigma(\sigma-1) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (13)$$

имеющую пары корней:

$$(\rho_1 = 0,\ \sigma_1 = 0); (\rho_2 = 1,\ \sigma_1 = 0); (\rho_1 = 0,\ \sigma_2 = 1) \text{ и } (\rho_2 = 1,\ \sigma_2 = 1).$$

Из системы (12) непосредственное определение неизвестных коэффициентов $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,\dots)$ решения (4) системы (11) вызывает некоторые трудности. Поэтому следует сделать преобразование при $k = 2$, т.е. при $x^2 = u,\ y^2 = v$. Тогда из (12) получим систему гипергеометрического типа:

$$u(1-u)Z_{uu} - uvZ_{uv} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{n}{2}+2\right)u\right]Z_u + \frac{m}{2}vZ_v + \frac{m}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)Z = 0; \qquad (14)$$
$$v\cdot(1-v)Z_{vv} - uvZ_{uv} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{m}{2}+2\right)v\right]Z_v + \frac{n}{2}uZ_u + \frac{n}{2}\left(\frac{n+m}{2}+1\right)Z = 0\,.$$

Легко заметить, что система гипергеометрического типа (14) при обозначении параметров через

$$\alpha = \frac{m+n}{2} + 1;\quad \beta = -\frac{m}{2};\quad \beta' = -\frac{n}{2};\ \gamma = \frac{1}{2};\ \ \gamma' = \frac{1}{2}$$

приводится к системе (8), решениями которой являются гипергеометрические функции Аппеля двух переменных $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma',\gamma;x,y)$. С учетом этих обозначений легко получить четыре линейно-независимые частные решения системы (14) в виде

$$Z_1(u,v) = F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; u,v\right);$$
$$Z_2(u,v) = u^{1/2}\cdot F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; u,v\right);$$
$$Z_3(u,v) = u^{1/2}\cdot F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; u,v\right);$$
$$Z_4(U,v) = u^{1/2}\cdot v^{1/2}\cdot F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; u,v\right).$$

Учитывая замену $x^2 = u,\ y^2 = v$ и переходя к старым переменным, получим, что система Эрмита (12) имеет линейно-независимые частные решения в виде многочленов $V_{m,n}(x,y)$, которые выражаются через функции $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$ следующим образом:

$$V_1(x,y) = F_2\left(\frac{m+n}{2}+1,\ \ -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2};\ x^2, y^2\right);$$
$$V_2(x,y) = x\cdot F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1,\ \ \frac{1-m}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2, y^2\right); \qquad (15)$$
$$V_3(x,y) = y\cdot F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right);$$

$$V_4(x,y) = xy\cdot F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right).$$

Отметим, что получены биортогональные многочлены Эрмита двух переменных, где показатели x и y точно совпадают с корнями (0,0), (1,0), (0,1) и (1,1) определяющей системы (13) относительно особенности (0,0). Тогда на основании (5) общее решение системы Эрмита (11) представится в виде

$$\begin{aligned} V(x,y) = {} & C_1 F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2};\ x^2, y^2\right)+ \\ & +C_2 x F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, \frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2};\ x^2, y^2\right)+ \\ & +C_3 y\, F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right)+ \\ & +C_4 xy\, F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Построенные частные решения (15) и общее решение (16) полностью совпадают с решениями, приведенными в [1; 320]. Это показывает, что введенная нами система (1)–(2) представляет собой наиболее общую систему, решениями которой являются биортогональные многочлены двух переменных. А биортогональные многочлены двух переменных всегда выражаются через решения системы гипергеометрического типа (6), т.е. выражаются через гипергеометрические функции двух переменных.

Для этого биортогонального многочлена принято обозначение

$$V_{m.n}(x.y) = 2^{m+n}\cdot\frac{(1,m+n)}{(1,m)\cdot(1,n)}\cdot\cdot\left[x^m\cdot y^n + \ldots + \frac{1}{2^{2j}}\cdot\frac{\Delta^{2j}(x^m\cdot y^n)}{(i,j)\cdot(-m-n,j)} + \ldots\right], \tag{17}$$

где использованы обозначения

$$(\lambda)_0 = 1,\ (\lambda)_n = \lambda\cdot(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1),\ n = 1,2,3,\cdots;$$

$$(1)_n = (1,n) = 1\cdot 2\cdots n = n!\ ,(\lambda,n) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1),\ n = 1,2,3,\cdots.$$

Для случая $m+n=4$ несколько первых многочленов имеют вид [1; 317]

$$\begin{array}{ll} V_{0,0} = 1; & V_{1,2} = 24xy^2 - 4x; \\ V_{1,0} = 2x; & V_{0,3} = 8y^3 - 4y; \\ V_{0,1} = 2y; & V_{4,0} = 16x^4 - 12x^2 + 1; \\ V_{2,0} = 4x^2 - 1; & V_{3,1} = 64x^3\cdot y - 24xy; \\ V_{1,1} = 8xy; & V_{2,2} = 96x^2y^2 - 12x^2 - 12y^2 + 2; \\ V_{0,2} = 4y^2 - 1; & V_{1,3} = 64xy^3 - 24xy; \\ V_{3,0} = 8x^3 - 4x; & V_{0,4} = 16y^4 - 12y^2 + 1, \ldots \\ V_{2,1} = 24x^2 - 4y\ldots & \end{array}$$

Приведенные биортогональные многочлены двух переменных являются обобщениями многочленов Чебышева второго рода $U_m\ (x)$и $U_n\ (y)$ со значениями

$$\begin{array}{ll} V_{0,0} = 1; & V_{0,0} = 1; \\ V_{1,0} = 2x; & V_{0,1} = 2y; \\ V_{2,0} = 4x^2 - 1; & V_{0,2} = 4y^2 - 1; \\ V_{3,0} = 8x^3 - 4x; & V_{0,3} = 8y^3 - 4y; \\ V_{4,0} = 16x^4 - 12x^2 + 1; & V_{0,4} = 16\cdot y^4 - 12y^2 + 1. \end{array}$$

Построение решений вблизи особенности (∞, ∞). Теперь возникает вопрос о построении решения системы Эрмита (11) вблизи особенности (∞, ∞), применяя метод Фробениуса-Латышевой. Вернемся к системе гипергеометрического типа (6) и составим систему характеристических функций относительно особенности (∞, ∞) в следующем виде:

$$L_1\left[u^{\rho}\cdot v^{\sigma}\right]\equiv u^{\rho}v^{\sigma}\left\{-\left[\rho(\rho-1)+\rho\sigma+\left(\frac{n}{2}+2\right)\rho-\frac{m}{2}\sigma-\frac{m}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\right]+\frac{\rho(\rho-1)+\frac{1}{2}}{u}\right\};$$

$$L_2\left[u^{\rho}\cdot v^{\sigma}\right]\equiv u^{\rho}v^{\sigma}\left\{-\left[\sigma(\sigma-1)+\rho\sigma+\left(\frac{m}{2}+2\right)\sigma-\frac{n}{2}p-\frac{n}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\right]+\frac{\sigma(\sigma-1)+\frac{1}{2}}{v}\right\}.$$

Система определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞)

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{1}_{00}(\rho,\sigma)&\equiv-\left[\rho\cdot(\rho-1)+\rho\sigma+(\frac{n}{2}+2)\,\rho-\frac{m}{2}\cdot\sigma-\frac{m}{2}(\frac{m+n}{2}+1)\right]=\\&=-(\rho-\frac{m}{2})\cdot(\rho+\frac{m}{2}+\sigma+\frac{n}{2}+1)=0,\qquad ,\\\varphi^{2}_{00}(\rho,\sigma)&\equiv-\left[\sigma\cdot(\sigma-1)+\rho\sigma+(\frac{m}{2}+2)\,\sigma-\frac{n}{2}\,\rho-\frac{n}{2}(\frac{m+n}{2}+1)\right]=\\&=\left(\sigma-\frac{n}{2}\right)\left(\rho+\frac{n}{2}+\sigma+\frac{m}{2}+1\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

имеет пару корней:

$$\left(\rho_1=\frac{m}{2},\sigma_1=\frac{n}{2}\right);\left(\rho_1=\frac{m}{2};\ \sigma_2=-\left(\frac{n}{2}+m+1\right)\right);\left(\rho_2=-\left(\frac{m}{2}+n+1\right),\sigma_1=\frac{n}{2}\right).\tag{19}$$

Решение системы гипергеометрического типа (14) вблизи особенности $(\infty,\ \infty)$ ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по убывающим степеням независимых переменных u и v:

$$Z(u,v)=u^{\rho}v^{\sigma}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\nu}\,u^{-\mu}v^{-\nu},(B_{0,0}\neq 0),\tag{20}$$

где $\rho,\sigma,B_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\cdots)$— некоторые постоянные. Пары показателей $(\rho_i,\sigma_i)(i=1,2,3)$ определены из системы определяющих уравнений (18) в виде (19). Соответствующие им неизвестные коэффициенты $B_{\mu,\nu}$ $(i=0,1,2,3,\cdots)$ определяются из систем рекуррентных последовательностей:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu-m,\nu-n}\cdot\varphi^{(j)}_{\mu,\nu}(\rho-m+\mu,\sigma-n+\nu)=0,\mu,\nu=0,1,2,\cdots;j=1,2;m,n=0,1,2,\cdots.$$

Тогда первое решение, соответствующее показателю $(\rho_1=\frac{m}{2},\sigma_1=\frac{n}{2})$, находим в виде следующего ряда:

$$Z_1(u,v)=u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{n}{2}}[1-\frac{m(m-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{u}-\frac{n(n-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{v}-\frac{m(m-1)n(n-1)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{uv}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{u^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{v^2}+\cdots].\tag{21}$$

Аналогично можно построить и остальные линейно-независимые частные решения $Z_j\ (j=2,3)$. Однако мы ограничимся построением только решения Z_1. В (21), переходя к старым переменным, получим одно решение исходной системы (11):

$$Z_1(x,y)=x^m y^n[1-\frac{m(m-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{x^2}-\frac{n(n-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{y^2}-\frac{m(m-1)n(n-1)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{x^2y^2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{x^4}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{y^4}+\cdots].\tag{22}$$

Таким образом, удается построить три линейно-независимые частные решения $V_{m,n}(x,y)$ системы Эрмита (11) вблизи особенности (∞,∞). Из (22) легко показать, что биортогональные многочлены $V_{m,n}(x,y)$ выражаются также через гипергеометрическую функцию Аппеля $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)$:

$$V_{m.n}(x.y) = 2^{m+n}\cdot\frac{(1,m+n)}{(1,m)\cdot(1,n)}\cdot x^m\cdot y^n\, F_3(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2},\frac{1-m}{2},\frac{1-n}{2},-m-n,\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}). \qquad (23)$$

Здесь уместно отметить, что гипергеометрические функции Аппеля $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$ и $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)$, как и в обыкновенном случае, превращаются в многочлены двух переменных при следующих значениях параметров [1]:

F_2 : при $\alpha=-p$ в многочлен степени p;

F_2 : при $\beta=-r,\beta'=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 1^0. при $\alpha=-r,\alpha'=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 2^0. при $\alpha=-r,\beta'=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 3^0. при $\alpha'=-r,\beta=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 4^0. при $\beta=-r,\beta'=-s$ в многочлен степени $r+s$.

Например, такими значениями в (14) и (23) являются $(-\frac{m}{2})$ и $(-\frac{n}{2})$.

Таким образом, используя метод Фробениуса-Латышевой, мы на конкретном примере убедились, что гипергеометрические функции двух переменных играют важную роль при построении биортогональных многочленов Эрмита. Кроме того, из системы (1) и (2) с помощью замены $(5')$, используя систему гипергеометрического типа, можно построить и биортогональные многочлены $U_{m.n}(x.y)$, когда областями ортогональности является вся плоскость или единичный круг. В этом отношении система (1)–(2) и система гипергеометрического типа (6) являются наиболее общими. Однако здесь для исследования использованы только две функции Аппеля. Роль других гипергеометрических функций двух переменных требует дальнейшего изучения.

Работа выполнена по гранту КН МОН РК «Актуальные проблемы теории потенциалов и их приложения». Государственная регистрация № 0112РК00607. (Руководитель темы — академик Т.Ш.Кальменов)

Список литературы

1 *Appell P.* Kampe de Feriet. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polionomes d' Hermite. — Paris: Gauthier – Villars, 1926. — 484 p.

2 *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. — М.: Наука, 1988. — 384 с.

3 *Sternberg W.* Uber dis asymptotische Intergration von Differentialgleichungen // Math. Ann. — 1920. — Bd. 81. — P. 119–186.

4 *Тасмамбетов Ж.Н.* Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Укр. мат. журнал. — 1992. — Т. 44. — № 3. — С. 427–431.

5 *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 294 с.

6 *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса // (Препр. АН УССР. Ин-т математики: 91.29). — Киев, 1999. — 44 с.

Ж.Н.Тасмәмбетов

Фробениус-Латышева әдісін Эрмиттің екі айнымалының биортогонал көпмүшеліктерін құруда қолданылуы

Мақалада екінші ретті дербес туынды дифференциалдық теңдеулердің арнайы жүйесінің шешімдерін Эрмиттің екі айнымалының биортогонал көпмүшеліктері түрінде іздеу мүмкіндіктері қарастырылған. Фробениус-Латышева әдісін қолдану негізінде екі айнымалының биортогонал көпмүшеліктері түріндегі шешімдерін (0,0) және (∞, ∞) ерекше қисықтар маңайында тұрғызу ерекшеліктері көрсетілген. Нақты мысалдар арқылы мұндай шешімдер тұрғызу кезіндегі негізгі аппарат Аппельің екі айнымалының гипергеометрикалық функциялары екендігі дәлелденген.

Zh.N.Tasmambetov

The usage of Frobenius-Latysheva method for the construction of two variables biorthogonal Hermit polynomials

The possibilities of constructing the solutions of a special system of second order partial differential equations in two variables biorthogonal Hermite polynomials are studied in this work. Using the method of Frobenius-Latysheva it is shown the features of constructing the solutions in the form of two variables biorthogonal polynomials near the (0,0) and (∞, ∞) singular curves. By using the specific examples it is substantiated that the main tool in such constructions are two variables hypergeometric Appell functions.

References

1 Appell P. *Kampe de Feriet. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques.Polionomes d' Hermite*, Paris: Gauthier – Villars, 1926, 484 p.

2 Suetin P.K. *Orthogonal polynomials by two variables*. Gordon and Breach Scienes Publishers, Moscow: Nauka, 1988, 384 p.

3 Sternberg W. *Math. Ann.*, 1920, 81, p. 119–186.

4 Tasmambetov Zh.N. *Ukrainian mathematical journal*, 1992, 44, 3, p. 427–430.

5 Bateman G., Erdeliyi A. *Higer transcendental functions*, vol. 1. Hypergeometrical function. Function of Lejander, New York, Toronto, London, MC Graw-Hill Company, IN, Moscow: Nauka, 1965, 294 p.

6 Tasmambetov Zh.N. *Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*. Mathematics Institute: 91.29, Kiev, 1999, 44 p.

UDC 517.938

A.Tungatarov, M.Baiyzhanova

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty
(E-mail: tun-mat@list.ru)

Boundary value problem for a class of nonlinear second order ordinary differential equations with variable coefficients

In this article the existence of continuous solutions of two-point boundary value problem in an interval of positive real line for a class of nonlinear second order ordinary differential equations with variable coefficients is proved. To prove of the existence theorem about two-point boundary value problem the authors constructed the general solution of the corresponding linear second order differential equations with variable coefficients and used Schauder fixed point principle. The method of building of the solution of linear second order differential equations with variable coefficients and the general solution can be useful for various applications of science. For simplicity the coefficient and the nonlinear part of the ordinary second order differential equation are taken from the class of continuous functions. They can be taken from the class of measurable and essentially bounded functions. One can easily verify that the results remain in force and in this case.

Key words: two-point boundary value problem, ordinary differential equation, the second order, nonlinear equation, general solution, Schauder principle.

1 Introduction

Let $0 < x_1 < \infty$. We consider the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)y = f(x, y) \tag{1}$$

in the interval $[0,\ x_1]$, where $a(x) \in C[0,\ x_1]$ and the function $f(x, y)$ is continuous in the set of variables in the domain $D = \{(x,\ y) : 0 \le x \le x_1,\ |\ y - \alpha\ | \le \sigma\}$. Here $y(0) = \alpha,\ \sigma > 0$. The connection between the numbers x_1 and σ will be defined later. In this article we will solve the following boundary value problem.

Problem *D*. Find the solution of the equation (1) from the class $C^2[0, x_1]$ satisfying the conditions

$$y(0) = \alpha,\ \frac{du}{dx}(x_0) = \beta, \tag{2}$$

where α, β — are given real numbers.

2 Construction of the general solution of the linear equation

Let $S[0,\ x_1]$ is the class of measurable, essentially bounded functions in $[0,\ x_1]$, with the norm

$$|\ f\ |_0 = \sup_{x\in[0,x_1]} vrai\ |\ f(x)\ | = \lim_{p\to\infty} \|\ f\ \|_{L_p[0,x_1]}.$$

By $W^2_\infty[0, x_1]$ we denote the class of functions $f(x)$, such that $\frac{d^2f}{dx^2} \in S[0,\ x_1]$.

We consider the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)u = f(x) \tag{3}$$

in $[0,\ x_1]$, where $a(x),\ f(x) \in S[0,\ x_1]$.

Two-point boundary value problems for the ordinary second order differential equations is a classic of research domain of the theory of ordinary differential equations and due to their wide application in mechanics, mathematical physics and geometry (see, for example, [1–9]) have been actively investigated so far. However, in the mathematical literature mainly it is studied equations of the form (3) with continuous coefficients and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for them. In [10, 11] the general solution of the equation (1) is constructed and the Cauchy problem for him with initial point $x = 0$ is solved. In this section an explicit solution to the boundary-value problem for the equation (3) in the class

$$W^2_\infty[0,\ x_1] \cap C^1[0,\ x_1], \tag{4}$$

where

$$x_1 < \sqrt{\frac{2}{|a|_0}} \tag{5}$$

is found and the following problem is solved.

Problem D_1. Find the solution of the equation (3) from the class (4) satisfying the conditions (2).

Integrating twice the equation (3), we have

$$y(x) = (By)(x) + g(x) + c_1 x + c_2, \tag{6}$$

where c_1, c_2 — are arbitrary real numbers,

$$(By)(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t)y(t)dtd\tau, \quad g(x) = -\int_0^x \int_\tau^{x_1} f(t)dtd\tau.$$

Applying the operator B to both sides of equation (6), we get

$$(By)(x) = (B^2 y)(x) + (Bg)(x) + c_1 a_1(x) + c_2 b_1(x), \tag{7}$$

where

$$(B^2 y)(x) = (B(By)(x))(x),\ a_1(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} ta(t)dtd\tau; \quad b_1(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t)dtd\tau.$$

From (6) and (7) it follows

$$y(x) = (B^2 y)(x) + c_1(x + a_1(x)) + c_2(1 + b_1(x)) + g(x) + (Bg)(x). \tag{8}$$

In the following we use functions and operators

$$a_k(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t)a_{k-1}(t)dtd\tau, \quad b_k(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t)b_{k-1}(t)dtd\tau, \quad (k = \overline{2,\infty}),$$

$$(B^k y)(x) = (B(B^{k-1} y)(x))(x), \quad (k = \overline{2,\infty}).$$

Applying the operator B to both sides of the equation (8), we have

$$(By)(x) = (B^3 y)(x) + c_1(a_1(x) + a_2(x)) + c_2(b_1(x) + b_2(x)) + (Bg)(x) + (B^2 g)(x).$$

From (6) and (9) it follows

$$y(x) = (B^3 y)(x) + c_1(x + a_1(x) + a_2(x)) + c_2(1 + b_1(x) + b_2(x)) + g(x) + (Bg)(x) + (B^2 g)(x). \tag{9}$$

Continuing this procedure n times, we obtain an integral representation of the solution of equation (1):

$$y(x) = (B^n y)(x) + c_1\left(x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x)\right) + c_2\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k(x)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} (B^k g)(x), \tag{10}$$

where $(B^0 g)(x) = g(x)$.

Let $y(x) \in C[0, x_1]$. Taking into consideration the definition of the operators $(B^n y)(x)$ and the functions $a_k(x)$, $b_k(x)$, the following estimates are obtained

$$|(B^n y)(x)| \le 2|y|_1 \cdot \frac{|a|_0^n \cdot x_1^{2n}}{2^n}, \quad (n = \overline{1,\infty}), \tag{11}$$

$$|a_k(x)| < \frac{|a|_0^k \cdot x_1^{2k}}{2^k} \cdot x, \quad |b_k(x)| < \frac{2 \cdot |a|_0^k \cdot x_1^{2k}}{2^k}, \quad (k = \overline{1,\infty}), \tag{12}$$

where $|f|_1 = \max\limits_{x \in [0, x_1]} |f(x)|$.

Passing to the limit with $n \to \infty$ in the representation (10) and taking estimates (11), (12) into account, we receive

$$y(x) = c_1 I_1(x) + c_2 I_2(x) + F(x), \tag{13}$$

where

$$I_1(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),\ I_2(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x), \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (B^k g)(x).$$

Using inequalities (11), (12), we have

$$|I_1(x)| \le \frac{2}{2 - |a|_0 \cdot x_1^2},\ |I_2(x)| < \frac{2 + |a|_0 \cdot x_1^2}{2 - |a|_0 \cdot x_1^2},\ |F(x)| \le |g|_1 \cdot \frac{2 + |a|_0 \cdot x_1^2}{2 - |a|_0 \cdot x_1^2}. \tag{14}$$

From the forms of the functions $I_1(x), I_2(x)$ and $F(x)$ for $x \in [0, x_1]$, where x_1 satisfies (5), it follows

$$\frac{dI_1}{dx} = 1 + \int_x^{x_1} a(t) I_1(t) dt, \quad \frac{dI_2}{dx} = \int_x^{x_1} a(t) I_2(t) dt;$$
$$\frac{dF}{dx} = -\int_x^{x_1} f(t) dt + \int_x^{x_1} a(t) F(t) dt; \tag{15}$$

$$\frac{d^2 I_1}{dx^2} = -a(x) I_1(x), \quad \frac{d^2 I_2}{dx^2} = -a(x) I_2(x); \tag{16}$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = f(x) - a(x) F(x). \tag{17}$$

By virtue of (15) and the form of the function $I_1(x), I_2(x), F(x)$ we obtain

$$I_1(0) = F(0) = \frac{dF}{dx}(x_1) = \frac{dI_2}{dx}(x_1) = 0, \; I_2(0) = \frac{dI_1}{dx}(x_1) = 1. \tag{18}$$

From (16) and (17) it follows that the functions $I_1(x), I_2(x)$ are particular solutions from class (4) of the homogeneous equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) y = 0 \tag{19}$$

and $F(x)$ is a particular solution of non-homogeneous equation (3).

We will compute the Wronskian of functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$. By definition $W(x) = I_1(x) \cdot I_2^{'}(x) - I_2(x) \cdot I_1^{'}(x)$. Hence by virtue of (16) we have $W^{'}(x) = I_1(x) \cdot I_2^{''}(x) - -I_2(x) \cdot I_1^{''}(x) = a(x)(-I_1(x) \cdot I_2(x) + I_2(x) \cdot I_1(x)) = 0$. Hence, $W(x) = const$. On the other hand from (18) it follows that $W(0) = -I_1^{'}(0)$ and $W(x_1) = -I_2(x_1)$, so $W(x) = -I_2(x_1) = -I_1^{'}(0)$. Thus we have proved the following theorem.

Theorem 1. Let $I_2(x_1) \neq 0$. Then the function $y(x)$, defined by the formula (13), is the general solution of equation (3) from the class (4).

For the equation (3) we consider the problem D_1. To solve the problem D_1 we use the general solution of equation (3) given by the formula (13). Substituting the function defined by the formula (13) into the boundary conditions (2) taking into (18), we have $c_2 = \alpha, \; c_1 = \beta$.

Hence the solution of the problem D_1 has the form

$$y(x) = \beta I_1(x) + \alpha I_2(x) + F(x). \tag{20}$$

Thus we have proved the following theorem.

Theorem 2. Problem D_1 has the solution, which is given by (20).

Remark 1. The obtained results remain in force and in the case $a(x), f(x) \in C[0, x_1]; \; x < \sqrt{\frac{2}{|a|_1}}$. In this case the solutions given by (13) and (20) belong to the class $C^2[0, x_1]$.

3 Reduction of the equation (1) to integral equation

In section 2 we construct the general solution of the equation (19) in the form $y(x) = c_1 I_1(x) + c_2 I_2(x)$, where c_1, c_2 are arbitrary real numbers,

$$I_1(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x), \quad I_2(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x);$$

$$a_1(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} t a(t) dt d\tau, \quad b_1(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t) dt d\tau;$$

$$a_k(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t) a_{k-1}(t) dt d\tau, \qquad b_k(x) = \int_0^x \int_\tau^{x_1} a(t) b_{k-1}(t) dt d\tau, \qquad (k = \overline{2, \infty}).$$

The following inequality can be easily verified

$$|I_1(x)|<\frac{2x}{2-|a|_1\cdot x_1^2},\qquad |I_2(x)-1|<\frac{2|a|_1\cdot x_1\cdot x}{2-|a|_1\cdot x_1^2};\tag{21}$$

$$|I_1(x_3)-I_1(x_2)|<(x_3-x_2)\cdot\frac{2}{2-|a|_1\cdot x_1^2},\ |I_2(x_3)-I_2(x_2)|\le(x_3-x_2)\cdot\frac{2|a|_1\cdot x_1}{2-|a|_1\cdot x_1^2},\tag{22}$$

where $|a|_1=\max\limits_{0\le x\le x_1}|a(x)|,\quad 0\le x_2<x_3\le x_1$. Following the method of variation of arbitrary constants, we choose the solution of equation (1) in the form

$$y(x)=c_1(x)I_1(x)+c_2(x)I_2(x),\tag{23}$$

where $c_1(x),\ c_2(x)$ — unknown functions from the class $C^1[0,\,x_1]$. Counting of the right-hand side of equation (1) is known by the method of variation of arbitrary constants, we obtain a system for determining the functions $c_1(x)$ and $c_2(x)$:

$$c_1^{'}(x)\cdot I_1(x)+c_2^{'}(x)\cdot I_2(x)=0;$$
$$c_1^{'}(x)\cdot I_1^{'}(x)+c_2^{'}(x)\cdot I_2^{'}(x)=f(x,y).$$

Hence, by virtue of the equation $W(x)=-I_2(x_1)$ we have

$$c_1(x)=\frac{1}{I_2(x_1)}\int_0^x I_2(t)f(t,y)dt+c_1;\qquad c_2(x)=\frac{-1}{I_2(x_1)}\int_0^x I_1(t)f(t,y)dt+c_2,\tag{24}$$

where c_1 and c_2 — are arbitrary real numbers. We have assumed here that $I_2(x_1)\ne 0$.

From (23) and (24) it follows

$$y(x)=\int_0^x K(x,t)f(t,y)dt+c_1I_1(x)+c_2I_2(x),\tag{25}$$

where $K(x,t)=\dfrac{1}{I_2(x_1)}(I_1(x)\cdot I_2(t)-I_2(x)\cdot I_1(t))$.

Now we show that any solution of the equation (25) of the class $C[0,x_1]$ satisfies the equation (1).

Theorem 3. Let $I_2(x_1)\ne 0$. Then any solution of the equation (25) from the class $C[0,x_1]$ belongs to the class $C^2[0,x_1]$ and satisfies the equation (1).

Proof. Obviously, the right-hand side of the equation (25) belongs to the class $C^1[0,x_1]$. Therefore, from (25) by virtue of $K(x,\,x)=0$ we get

$$y^{'}(x)=\frac{I_1^{'}(x)}{I_2(x_1)}\int_0^x I_2(t)f(t,y)dt-\frac{I_2^{'}(x)}{I_2(x_1)}\int_0^x I_1(t)f(t,y)dt+c_1I_1^{'}(x)+c_2I_2^{'}(x).\tag{26}$$

Right side of (26) belongs to the class $C^1[0,\,x_1]$. Therefore, $y(x)\in C^2[0,x_1]$. Hence, from (26) by virtue of (16) and equality $W(x)=-I_2(x_1)$ it follows

$$y^{''}(x)=-a(x)\cdot\int_0^x K(x,t)f(t,y)dt+f(x,y)-a(x)(c_1I_1(x)+c_2I_2(x))=-a(x)y(x)+f(x,y).$$

The theorem is proved.

4 Proof of the existence of continuous solutions of the boundary value problem for the equation (1)

In section 3 it is proved that any solution of the equation (25) from the class $C[0,x_1]$ belongs to the class $C^2[0,x_1]$ and satisfies the equation (1). Now we consider the solution of the equation (25) satisfying the boundary conditions (2). To do this, from (25) and (26) taking into account (18), we obtain

$$c_2=\alpha,\ c_1=\beta-\frac{1}{I_2(x_1)}\int_0^{x_1} I_2(t)f(t,y(x_1))dt.$$

Therefore, any solution from the class $C[0,x_1]$ of the equation

$$y(x)=(Ay)(x),\tag{27}$$

where

$$(Ay)(x)=\int_0^x K(x,t)f(t,y)dt-\frac{I_1(x)}{I_2(x_1)}\int_0^{x_1} I_2(t)f(t,y(x_1))dt+\beta I_1(x)+\alpha I_2(x), \tag{28}$$

will be a solution of problem D to the equation (1). Let

$$\left(\gamma K_1+\frac{2(2+|a|_1\cdot x_1^2)\cdot x_1}{(2-|a|_1\cdot x_1^2)^2\,|I_2(x_1)|}+\frac{2|\beta|+2|\alpha|\cdot|a|_1\cdot x_1}{2-|a|_1\cdot x_1^2}\right)\cdot x_1<\sigma, \tag{29}$$

where $K_1=\max\limits_{0<x,t<x_1}|K(x,t)|$; γ — maximum of the function $|f(x,y)|$ in D.

Inequality (29) always might be obtained for the small value of the number x_1. Let us prove the existence of continuous solution of the equation in the interval $[0, x_1]$.

Theorem 4. Let $I_2(x)\neq 0$, $a(x)\in C[0,x_1]$ and $f(x, y)$ is continuous in the set of variables in the domain D. Then in the interval $[0,x_1]$, where the number x_1 satisfies (29) and (5), there is at least one solution of the equation (1) of class $C^2[0,x_1]$, satisfying (2).

Proof. By virtue of theorem 3 it is sufficient to prove the existence of solutions from the class $C[0,x_1]$ of the equation (27). Let $\|y\|=\max\limits_{0\le x\le x_1}|y(x)|$. We consider the operator A, defined by (28), on the sphere $\|y-\alpha\|\le\sigma$ of the space $C[0,x_1]$. We show that the operator A is continuous on the sphere $\|y-\alpha\|\le\sigma$. If the sequence $\{y_n(x)\}$, belonging to the sphere $\|y-\alpha\|\le\sigma$, converges uniformly to $y(x)$, obviously belonging to the same sphere, then by virtue of the continuity of the function $f(x,y)$ the sequence $\{f(x,y_n(x))\}$ converges uniformly to $f(x,y(x))$ in $[0,x_1]$. Hence, by the passage to the limit under the integral sign the uniform convergence implies that the sequence $\{(Ay_n)(x)\}$ converges uniformly to $(Ay)(x)$, i.e. we have a continuous operator on the sphere $\|y-\alpha\|\le\sigma$. For any element $y(x)$ of sphere $\|y-\alpha\|\le\sigma$ by virtue of (14) we obtain

$$|(Ay)(x)|\le K_1\cdot\gamma\cdot x_1+\frac{2\gamma x_1(2+|a|_1\,x_1^2)}{(2-|a|_1\,x_1^2)^2\,|I_2(x_1)|}+\frac{2|\beta|+2|\alpha|\cdot x_1^2\cdot|a|_1}{2-|a|_1\cdot x_1^2}. \tag{30}$$

If x_2 and x_3 are two arbitrary points of the interval $[0,x_1]$, then by virtue of (22) we will have

$$|(Ay)(x_3)-(Ay)(x_2)|\le\left(K_1\gamma+\frac{2\gamma x_1(2+|a|_1\,x_1^2)}{(2-|a|_1\,x_1^2\,|I_2(x_1)|}+\frac{2|\beta|+2|\alpha|\cdot x_1\cdot|a|_1}{2-|a|_1\cdot x_1^2}\right)\cdot|x_3-x_2|. \tag{31}$$

Inequalities (30) and (31) by virtue of the Arzela show that the operator A transforms the sphere $\|u-\alpha\|\le\sigma$ into a compact set. We now show that the operator A transforms this sphere into itself. In fact, by virtue of (21)

$$|(Ay)(x)-\alpha|<\left(K_1\gamma+\frac{2(2+|a|_1\cdot x_1^2)\cdot x_1}{(2-|a|_1\cdot x_1^2)^2\,|I_2(x_1)|}+\frac{2|\beta|+2x_1\,|a|_1\cdot|\alpha|}{2-|a|_1\cdot x_1^2}\right)\cdot x_1$$

and by virtue of the inequality (29), we obtain here $|(Ay)(x)-\alpha|<\sigma$.

Thus, the operator A satisfies all the conditions of Schauders theorem. Therefore, there is the fixed point of this operator, i.e such a function $y(x)$, so that

$$y(x)=\int_0^x K(x,t)f(t,y)dt-\frac{I_1(x)}{I_2(x_1)}\int_0^{x_1} I_2(t)f(t,y(x_1))dt+\beta I_1(x)+\alpha I_2(x).$$

Hence, by theorem 3 there is the solution of the boundary value problem D for the equation (1). The theorem is proved.

Remark 2. This theorem will be suitable and in more general case, when $a(x)\in S[0, x_1]$ and $y(x)\in W_\infty^2[0, x_1]\cap C^1[0, x_1]$.

References

1 *Kamke E.* Differentialgleichungen. Losungsmethoden and Losungen, Teil 1. Akad. Verlag. — Leipzid, 1959.

2 *Федорук М.Ф.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.

3 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — 1969.

4 *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Т. 1. — 1953.

5 *Кодингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — 1958.

6 *Boucherif A.* Boundary value problems for second order differential inclusions / A. Boucherif, B. Chanane // Int. I. Differ. Equ. Appl. 7. 2003. — № 2. — 10. 147–151.

7 *Boucherif A.* Second order multivalued boundary value problem / A. Boucherif, B. Chanane // Comm. Appl. Nonlinear Anal. — 2004. — № 1. — P. 85–91.

8 *Donchev T.* A two point boundary value problem for a class of differential inclusions / T. Donchev, M. Quincampoix // I. Nonlinear Complex Anal. 5 (2004). — № 1. — P. 59–69.

9 *Erbe L.* On two point boundary value problems for second order differential inclusions / L. Erbe, R. Ma, CC Tisdell / Dynam. Systems Appl. 15. — 2006. — № 1. — P. 79–88.

10 *Tungatarov A., Akhmed-Zaki.* General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // J. of Inequalities and Special Functions ISSN: 2217-4303. URL: HTTP: / / www. ILIRIAS.com-2012. — Vol. 3, Issue 4. — P. 42–49.

11 *Tungatarov A., Akhmed-Zaki.* Cauchy problem for one class of ordinary differential equations // Int. J. of Mathematical Analyses. — 2012. — Vol. 6. — № 14. — P. 695–699.

Ә.Түнғатаров, М.Байжанова

Айнымалы коэффициенттері бар екінші ретті сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулердің бір класы үшін шеттік есеп

Мақалада сандар осінің бір кесіндісінде сингулярлы коэффициенттері бар екі ретті сызықты емес жай дифференциалдық теңдеудің бір класы үшін екі нүктелі шеттік есептің шешімінің бар болуы дәлелденген. Екі нүктелі шеттік есептің шешімі бар болу теоремасын авторлардың құрған сызықтық теңдеулердің жалпы шешімі мен Шаудер әдісі арқылы негізделген. Жалпы шешімдерді табу әдісі және құрылған жалпы шешімдер әр түрлі қолданбалы есептерді шығаруда қолданылуы мүмкін. Алынған нәтижелерді оңай түсіндіру үшін теңдеудің коэффициенттері және сызықты емес бөлік үзіліссіз функциялар класынан алынған. Оларды тек өлшемді және ақырлы дерлік кеңістіктерде алуға болады. Бұл жағдайда да нәтижелер дұрыс деп есептеледі.

А.Тунгатаров, М.Байжанова

Краевая задача для одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

В статье доказано существование непрерывных решений двухточечной краевой задачи в некотором отрезке положительной числовой прямой для одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Для доказательства теоремы существования двухточечной краевой задачи использованы построенное авторами общее решение соответствующих линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и принцип неподвижной точки Шаудера. Метод построения общего решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и само общее решение могут быть полезны для решения различных прикладных задач естествознания. Для простоты изложения коэффициент и нелинейная часть обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка взяты из класса непрерывных функций, т.е. из класса измеримых и существенно ограниченных функций. Легко можно проверить, что результаты работы остаются в силе и в этом случае.

References

1 Kamke E. *Differentialgleichungen. Losungsmethoden and Losungen*, Teil 1. Akad. Verlag, Leipzid, 1959.

2 Fedoruk M.F. *Asymptotic methods for linear ordinary differential equations*, Moscow: Nauka, 1983.

3 Naimark M.A. *Linear differential operators*, 1969.

4 *Sansone Dzh. Ordinary Differential Equations*, 1, 1953.

5 Kodington E.A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*, 1958.

6 Boucherif A. *Int. I. Differ. Equ. Appl. 7*, 2003, 2, p. 147–151.

7 Boucherif A. *Comm. Appl. Nonlinear Anal*. 2004, 1, p. 85–91.

8 Donchev T.A. *Two point boundary value problem for a class of differential inclusions* // T. Donchev, M. Quincampoix // I. Nonlinear Complex Anal. 5, 2004, 1, p. 59–69.

9 Erbe L. *On two point boundary value problems for second order differential inclusions* // L. Erbe, R. Ma, CC Tisdell / Dynam. Systems Appl. 15, 2006, 1, p. 79–88.

10 Tungatarov A., Akhmed-Zaki. *J. of Inequalities and Special Functions ISSN: 2217–4303*. URL: HTTP: // www. ILIRIAS.com-2012, 3, 4, p. 42–49.

11 Tungatarov A., Akhmed-Zaki. *Int. J. of Mathematical Analyses*. 2012, 6, 14, p. 695–699.

UDC 517.938

A.Tungatarov, A.A.Skakov

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty
(E-mail: tun-mat@list.ru)

Method of constructing general solution of the second order linear ordinary differential equations with variable coefficients

In this article new method of constructing general solution of the second order linear ordinary differential equations with variable coefficients is presented. The general solutions of Airy equation, of the second order linear ordinary differential equations with variable coefficients and coefficient e^x are constructed by this method. Constructed in explicit form general solutions can be used for solving of the Cauchy problem and of the two point's boundary value problems for ordinary differential equations with variable coefficients arising in solving various applied problems of science.

Key words: the second order, linear ordinary differential equation, variable and singular coefficients, general solution.

1 Introduction

Let $-\infty < x_1 < x_2 < \infty.$ By $S[x_1, x_2]$ we denote the class of measurable, essentially bounded functions in $[x_1, x_2].$ The norm of an element from S$[x_1, x_2]$ is defined by the formula

$$|f|_0 = \sup_{x\in[x_1,x_2]} vrai|f(x)| = \lim_{p\to\infty}\|f\|_{L_p[x_1,x_2]}.$$

We consider the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a(x)y = f(x) \tag{1}$$

in interval $[x_1, x_2]$, where $a(x), f(x) \in S[x_1, x_2].$

The solution of the equation (1) from class

$$W_\infty^2[x_1, x_2] \cap C^1[x_1, x_2] \tag{2}$$

is sought.

Here $W_\infty^2[x_1, x_2]$ is a class of functions $y(x),$ such that $\dfrac{d^2y}{dx^2} \in S[x_1, x_2].$

If $a(x), f(x) \in C[x_1, x_2],$ then general solutions that are found in this article belong to the class $C^2[x_1, x_2].$

2 Construction of general solution to equation (1)

Let $x_0 \in [x_1, x_2]$. By integrating two times the equation (1) we get

$$y(x) = (By)(x) + g(x) + c_1(x - x_0) + c_2; \tag{3}$$

$$(By)(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau} a(t)y(t)dtd\tau,\ g(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau} f(t)dtd\tau,$$

where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

Applying the operator $(B\cdot)(x)$ to both sides of the equation (3), we have

$$(By)(x) = (B^2y)(x) + (Bg)(x) + c_1a_1(x) + c_2b_1(x), \tag{4}$$

where

$$(B^2y)(x) = (B(By)(x))(x),\ a_1(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau}(t - x_0)a(t)dtd\tau,\ b_1(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau} a(t)dtd\tau.$$

From (3) and (4) it follows

$$y(x) = (B^2y)(x) + (Bg)(x) + g(x) + c_1((x - x_0) + a_1(x)) + c_2(1 + b_1(x)). \tag{5}$$

In the following we use functions and operators

$$(B^ny)(x) = (B(B^{n-1}y)(x))(x),\ (n = \overline{2,\infty}),\ (B^1y)(x) = (By)(x);$$

$$a_k(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau} a(t)a_{k-1}(t)dtd\tau,\ b_k(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau} a(t)b_{k-1}(t)dtd\tau,\ (k = \overline{2,\infty}).$$

Applying the operator $(B\cdot)(x)$ to both sides of the equation (5) again, we get

$$(By)(x) = (B^3y)(x) + (B^2g)(x) + (Bg)(x) + c_1(a_1(x) + a_2(x)) + c_2(b_1(x) + b_2(x)). \tag{6}$$

From (3) and (6) it follows

$$y(x) = (B^3y)(x) + (B^2g)(x) + (Bg)(x) + g(x) + c_1(x - x_0 + a_1(x) + a_2(x)) + c_2(1 + b_1(x) + b_2(x)).$$

Continuing this procedure n times, we obtain the following integral representation for solutions of the equation (1):

$$y(x) = (B^ny)(x) + c_1\left(x - x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x)\right) + c_2\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k(x)\right) + \sum_{k=0}^{n-1}(B^kg)(x), \tag{7}$$

where $(B^0g)(x) = g(x)$.

Let $y(x) \in C[x_1, x_2]$. Then the following inequalities are easily obtained

$$\left|(B^ny)(x)\right| \le |y|_1 \cdot \frac{\left(|a|_0 \cdot x^2\right)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdots 2n}; \tag{8}$$

$$|a_k(x)| \le |a|_0^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ |b_k(x)| \le |a|_0^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{9}$$

where $|f|_0 = \sup\limits_{x\in[x_1,x_2]} vrai|f(x)|$, $|f|_1 = \max\limits_{x\in[x_1,x_2]}|f(x)|$.

Passing to the limit with $n \to \infty$ in the representation (7) and using of inequalities (8), (9), we get

$$y(x) = c_1I_1(x) + c_2I_2(x) + F(x); \tag{10}$$

where $I_1(x) = x - x_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, $I_2(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(B^kg)(x)$.

Using the estimates (9) and (8), we receive

$$|I_1(x)| \le |x - x_0| + \frac{1}{\sqrt{|a|_0}} sh\left(\sqrt{|a|_0}\,|x - x_0|\right),\ |I_2(x)| \le ch\left(\sqrt{|a|_0}\,|x - x_0|\right);$$

$$|F(x)| \le |f|_1 + \frac{1}{\sqrt{|a|_0}} ch\left(\sqrt{|a|_0}\,|x-x_0|\right).$$

From the form of functions $I_1(x),\ I_2(x)$ and $F(x)$ it follows

$$I_1^{'}(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} a(t)I_1(t)dt,\ I_2^{'}(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)I_2(t)dt,\ F^{'}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x_0}^{x} a(t)F(t)dt;$$

$$I_1^{''}(x) = a(x)I_1(x),\ I_2^{''}(x) = a(x)I_2(x),\ \ F^{''}(x) = f(x) + a(x)F(x); \tag{11}$$

$$I_1(x_0) = F(x_0) = F^{'}(x_0) = I_2^{'}(x_0) = I_1^{''}(x_0) = 0,\ I_2(x_0) = I_1^{'}(x_0) = 1; \tag{12}$$

$$I_2^{''}(x_0) = -a(x_0),\ F^{''}(x_0) = f(x_0).$$

From formulas (11) it follows that the functions $I_1(x),\ I_2(x)$ are particular solutions from the class (2) of the homogeneous equation $\frac{d^2y}{dx^2} - a(x)y = 0$ and the function $F(x)$ is a particular solution from the class (2) of the inhomogeneous equation (1).

From (12) it follows that the Wronskian $W(x)$ of the functions $I_1(x),\ I_2(x)$ is not equal to zero in $x = x_0$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} I_1(x_0) & I_2(x_0) \\ I_1^{'}(x_0) & I_2^{'}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Furthermore, $W^{'}(x) = I_1(x)\cdot I_2^{''}(x) - I_2(x)\cdot I_1^{''}(x) = a(x)\cdot\left(I_1(x)\cdot I_2(x) - I_1(x)\cdot I_2(x)\right) = 0$ and thereby $W(x) = const$. Consequently, $W(x) = -1$. Therefore, the functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$ are linearly independent in the interval $[x_1, x_2]$ and the general solution for the equation (1) is determined by the formula (10) and belongs to the class (2). Summarizing we have proved the following theorem.

Theorem 1. The general solution of the equation (1) from the class (2) is given by formula (10).

Remark. If $a(x), f(x) \in C[x_1, x_2]$, then the general solution of equation (1) is given by formula (10) and belongs to the class $C^2[x_1, x_2]$.

3 Construction of the general solution to Airy equation

We consider the Airy equation

$$y^{''} - xy = 0. \tag{13}$$

As known the equation (13) is used in astronomy [1,2].

Let $0 < x_2 < \infty$. The solution of equation (13) in the class

$$C^2[0, x_2] \tag{14}$$

is sought. To construct the general solution of the equation (13) we use the formula (10), where $x_0 = 0$, $F(x) \equiv 0$, $a(x) = x$. Then we obtain the general solution of the equation (13) in the form

$$y = c_1 I_1(x) + c_2 I_2(x), \tag{15}$$

where $c_1,\ c_2$ are arbitrary real numbers,

$$I_1(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x);$$

$$I_2(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x);$$

$$a_1(x) = \int_0^x \int_0^\tau t^2 dt d\tau;$$

$$a_k(x) = \int_0^x \int_0^\tau t a_{k-1}(t) dt d\tau;$$

$$b_1(x)=\int_0^x\int_0^\tau tdtd\tau;$$

$$b_k(x)=\int_0^x\int_0^\tau tb_{k-1}dtd\tau,\ \left(k=\overline{2,\infty}\right).$$

Using these formulas, we find concrete value functions $a_k(x)$ and $b_k(x)$, $\left(k=\overline{1,\infty}\right)$, and thereby the functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$

$$a_k(x)=\frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdot\dots\cdot3k(3k+1)},\ b_k(x)=\frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\dots\cdot(3k-1)\cdot3k},\ \left(k=\overline{1,\infty}\right). \tag{16}$$

The formulas (16) can be proved by mathematical induction.

From formulas (16) and the form of the functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$ it follows

$$I_1(x)=x\left(1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{k!\prod\limits_{n=1}^{k}(3n+1)}\right),\ \ I_2(x)=1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{k!\prod\limits_{n=1}^{k}(3n-1)}.$$

For the obtained expressions of the functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$ the following estimates can be got easily

$$\left|I_1(x)\right|\le\frac{x}{3}\left(2+\exp x^3\right),\ \left|I_2(x)\right|\le\frac{1}{3}\left(2+\exp x^3\right).$$

Using these inequalities as in section 2, it can be shown that functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$ are particular solutions of the equation (13) in the class (14) and form a linearly independent system.

Consequently, the function

$$y=c_1x\left(1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{k!\prod\limits_{n=1}^{k}(3n+1)}\right)+c_2\left(1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{k!\prod\limits_{n=1}^{k}(3n-1)}\right)$$

is the general solution of the equation (13) in the class (14), where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

4 The general solution of the second order ordinary differential equations with singular point

We consider the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\beta}{x^\alpha}y=0, \tag{17}$$

where $0<\alpha<1$, $\beta>0$ are given parameters.

Let $-\infty<x_1<0<x_2<\infty$. Solution of the equation (17) is sought in the class (2). To construct the general solution of the equation (17) we use the formula (10), where $F(x)\equiv0$, $a(x)=\frac{\beta}{x^\alpha}$. Then we obtain the general solution of the equation (17) in the form $y=c_1I_1(x)+c_2I_2(x)$, where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

$$I_1(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x),\ I_2(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(x);$$

$$a_1(x)=\int_0^x\int_0^\tau t\frac{\beta}{t^\alpha}dtd\tau,\ a_k(x)=\int_0^x\int_0^\tau\frac{\beta}{t^\alpha}a_{k-1}(t)dtd\tau,\ b_1(x)=\int_0^x\int_0^\tau\frac{\beta}{t^\alpha}dtd\tau;$$

$$b_k(x)=\int_0^x\int_0^\tau\frac{\beta}{t^\alpha}b_{k-1}dtd\tau,\ \left(k=\overline{2,\infty}\right).$$

By these formulas we find concrete value functions $a_k(x)$ and $b_k(x)$, $\left(k=\overline{1,\infty}\right)$ and thereby functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$:

$$a_k(x)=\frac{\beta^k x^{k(2-\alpha)+1}}{k!(2-\alpha)^k \prod\limits_{n=1}^{k}(n(2-\alpha)+1)},\quad b_k(x)=\frac{\beta^k x^{k(2-\alpha)}}{k!(2-\alpha)^k \prod\limits_{n=1}^{k}(n(2-\alpha)-1)},\quad \left(k=\overline{1,\infty}\right);$$

$$I_1(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k x^{k(2-\alpha)+1}}{k!(2-\alpha)^k \prod\limits_{n=1}^{k}(n(2-\alpha)+1)},\quad I_2(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k x^{k(2-\alpha)}}{k!(2-\alpha)^k \prod\limits_{n=1}^{k}(n(2-\alpha)-1)}.$$

Since the function $a(x)=\dfrac{\beta}{x^{\alpha}}$ is not continuous in the interval $[x_1,x_2]$, within which there is a point $x=0$, then the proof of the uniform convergence of the series available for the functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$ is not suitable for their corresponding estimates of the second paragraph. Therefore, we obtained the following inequalities

$$|I_1(x)|<x_2\cdot\exp\left(\frac{\beta x_2^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right),\quad |I_1(x)|<\frac{1}{1-\alpha}\left((2-\alpha)\exp\left(\frac{\beta x_2^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right)-1\right).$$

Using these inequalities as in sections 2 and 3, it can be shown that the functions $I_1(x)$ and $I_2(x)$ are linearly independent and are particular solutions of the equation (17) from the class (2). Consequently, the function

$$y(x)=c_1\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k x^{k(2-\alpha)+1}}{k!(2-\alpha)^k \prod\limits_{n=1}^{k}(n(2-\alpha)+1)}\right)+c_2\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k x^{k(2-\alpha)}}{k!(2-\alpha)^k \prod\limits_{n=1}^{k}(n(2-\alpha)-1)}\right),$$

is the general solution of the equation (17) from the class (2), where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

5 The general solution of the ordinary second order differential equation with coefficient e^x

Let $0<x_2<\infty$. We consider the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2}-e^x y=0 \tag{18}$$

in the interval $[0,x_2]$.

Using formula (10) as described in paragraphs 2–4, we get the general solution of the equation (18) from the class $C^2[0,x_2]$ in the form $y=c_1I_1(x)+c_2I_2(x)$, where c_1, c_2 are arbitrary real numbers,

$$I_1(x)=2(x+1)+2(x-1)e^x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(x+2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}+e^{kx}\left(x-2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)\right)+$$
$$+\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{e^{nx}}{\left(n!(k-n)!\right)^2}\left(x+2\sum_{m=1}^{k-n}\frac{1}{m}-2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right);$$

$$I_2(x)=-x-(x-2)e^x-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!k!}\left(x-\frac{1}{k}+2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\frac{e^{kx}}{k}\right)-$$
$$-\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{e^{nx}}{(n!)^2(k-n)!(k-n-1)!}\left(x-\frac{1}{k-n}-2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}+2\sum_{m=1}^{k-n}\frac{1}{m}\right).$$

The program Matlab is used for calculating of the last formulas. Namely, to find the concrete values of the functions $a_k(x)$ and $b_k(x)$ we compiled the program Matlab:

```
function integ(n)
tic
   syms x y z;
   A =int(int(exp(z*x)*x,0,y),y,0,x);
   fprintf ('A%d = %s\n',1, char(A));
   B = exp(x)-x-1;
   fprintf ('B%d = %s\n\n',1, char(B));
   k = 2;
   while k<=n,
      A = int (int(exp(z*x)*A,x,0,y),y,0,x);
      fprintf ('A%d = %s\n',k, char(A));
      B = int (int(exp(x)*B,x,0,y),y,0,x);
      fprintf ('B%d = %s\n\n',k, char(B));
      k = k+1;
   end
toc
end
```

References

1 *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 1989. — 768 с.

2 Olver. Asymptotic and Special Functions, Charter 2. — New York: Academic Press, 1974.

Ә.Түнғатаров, А.А.Сқақов

Айнымалы коэффициенттері бар екінші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін құрудың бір әдісі

Мақалада айнымалы коэффициенттері бар сызықты жай дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін құрудың жаңа әдісі келтірілген. Осы әдіс арқылы Эйри теңдеуінің, сингулярлы коэффициенті бар сызықты дифференциалды теңдеудің және коэффициенті e^x болып келетін екі ретті жай дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдері құрылған. Ол шешімдер Коши есебін, екі нүктелі шеттік есепті және әр түрлі қолданбалы есептерді шешуде қолданылуы мүмкін.

А.Тунгатаров, А.А.Скаков

Об одном способе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

В статье приведен новый метод построения общих решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. С помощью этого метода построены общие решения уравнения Эйри, линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярным коэффициентом и с коэффициентом e^x. Эти решения могут быть использованы для решения задачи Коши и двух точечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, возникающих при решении различных прикладных задач естествознания.

References

1 Landau L.D., Lifshits Ye.M. *Quantum mechanics (nonrelativistic theory)*, Moscow: Nauka, 1989, 768 p.

2 *Olver. Asymptotic and Special Functions*, Charter 2, New York: Academic Press 1974.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Akishev, G. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the department of mathematical analysis and differential equations, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Attayev, A.Kh. — Candidate of physical and mathematical sciences, Head of department computer-aided design mixed systems and control, Scientific research institute of applied mathematics and automation, Kabardino-Balkar scientific centre of the Russian academy of sciences, Nal'chik, Russia.

Baiyzhanova, M. — Undergraduate, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Bitimkhan, S. — Candidate of technical sciences, Karaganda Economic University Kazpotrebsoyuz.

Bogdan, A.P. — Assistant of subdepartment technical mechanics, engineering and computer graphics, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

Bukenov, M.M. — Candidate of technical sciences, Docent, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Buketov, A.V. — Doctor of technical sciences, Professor, The Head of subdepartment for ship propulsion plant operation and general engineering, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

Dzhenaliyev, M.T. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Institute of mathematics and mathematical modeling, MES CS RK, Almaty.

Yeldesbay, T.Zh. — Candidate of physical and mathematical sciences, docent, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Yeshkeyev, A.R. — The Head and Professor of the Chair of algebra, mathematical logic and geometry named after prof. T.G.Mustafin, Doctor of physical and mathematical sciences, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Iskakov, K.T. — Doctor of physical and mathematical sciences, Eurasian National University L.N.Gumilyov, Astana.

Iskakov, S.A. — Magistrant of the first course in the specialty 6M060100 – «Mathematics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Ismoilov, D. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Innovative University of Eurasia, Pavlodar.

Kalantarov, V.K. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the department of mathematics, Koç University, Istanbul, Turkey.

Kamenova, Sh.K. — Teacher, Chair of «Applied mathematics and computer sciences», Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Karshygina, G.Zh. — Magistrant of the first course in the specialty 6M060100 – «Mathematics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Keldibekova, A.B. — Senior lecturer, Master of engineering sciences, Chair of «Applied mathematics and computer science», Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Kosmakova, M.T. — PhD student of the 1st course on specialty 6D060100 – «Mathematics», Department of differential equations and control theory, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Kravtsova, L.V. — Candidate technical sciences, Docent, The Head of IT, Computer systems and networks, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

Kussainova, A.T. — PhD student, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana.

Makazhanova, T.Kh. — Candidate of technical sciences, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Ramazanov, M.I. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the department of mathematical analysis and differential equations, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Skakov, A.A. — Undergraduate, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Slanbekova, A.Ye. — Senior lecturer, Master of engineering sciences, Chair of «Applied mathematics and computer science, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Tasmambetov, Zh.N. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, K.Zhubanov Aktobe Regional State University.

Tungatarov, A.B. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Tursynbekova, M.U. — Undergraduate, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Khabdolda, B. — Undergraduate, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Khabdolda, S. — Undergraduate, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

2014 жылғы «Қарағанды университетінің хабаршысында» жарияланған мақалалардың көрсеткіші. «Математика» сериясы

№ б.

МАТЕМАТИКА

Указатель статей, опубликованных в «Вестнике Карагандинского университета» в 2014 году. Серия «Математика»