

И.М.ГЕЛЬФАНД и С.В.ФОМИН

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Израиль Моисеевич Гельфанд и Сергей Васильевич Фомин

Вариационное исчисление

Редактор С. М. Половинкин

Техн. редактор Н. А. Тумаркина

Корректор И. В. Цветкова

Сдано в набор 25/IV 1961 г. Подписано к печати 3/VIII 1961 г. Бумага 60×90/16.
Физ. печ. л. 14,25. Условн. печ. л. 14,25. Уч.-наз. л. 12,44. Тираж 25 000 экз. Т-08725.
Заказ № 2486. Цена книги 47 коп.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовета.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	5
Глава I. Функционалы. Простейшая задача вариационного исчисления	7
§ 1. Введение	7
§ 2. Функциональные пространства	10
§ 3. Дифференциал функционала. Необходимое условие экстремума	14
§ 4. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	20
§ 5. Случай нескольких переменных. Задача со свободными концами	28
§ 6. Вариационная производная. Инвариантность уравнения Эйлера	33
Глава II. Некоторые обобщения простейшей задачи. Условный экстремум	39
§ 7. Задача с закрепленными концами в случае n неизвестных функций	39
§ 8. Вариационные задачи в параметрической форме	43
§ 9. Функционалы, зависящие от производных высших порядков	46
§ 10. Изопериметрическая задача. Условный экстремум	48
Глава III. Основная формула для вариации функционала. Задачи с подвижными концами	56
§ 11. Основная формула для вариации функционала	56
§ 12. Задача с подвижными концами	61
§ 13. Случай не гладких экстремалей. Условия Вейерштрасса — Эрдмана	63
Глава IV. Канонический вид уравнений Эйлера. Вариационные принципы. Законы сохранения. Уравнение Гамильтона — Якоби	66
§ 14. Канонический вид уравнений Эйлера. Первые интегралы	66
§ 15. Преобразование Лежандра. Канонические преобразования	71
§ 16. Связь между инвариантностью интеграла $\int_a^b F dx$ и первыми интегралами уравнений Эйлера (теорема Нетер)	79
§ 17. Принцип наименьшего действия	84
§ 18. Законы сохранения	85
§ 19. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби	89

Глава V. Вторая вариация. Достаточные условия слабого экстремума	95
§ 20. Квадратичные функционалы. Вторая вариация функционала	95
§ 21. Формула для второй вариации. Условие Лежандра	98
§ 22. Исследование квадратичного функционала	103
§ 23. Сопряженные точки. Необходимое условие Якоби	110
§ 24. Достаточные условия слабого экстремума	115
§ 25. Условия Якоби для функционалов, зависящих от нескольких функций	117
§ 26. Связь условий Якоби с теорией квадратичных форм в конечномерном пространстве	124
Глава VI. Теория поля. Достаточные условия сильного экстремума	129
§ 27. Согласованные граничные условия. Общее определение поля	129
§ 28. Поле функционала	135
§ 29. Инвариантный интеграл Гильберта	144
§ 30. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия сильного экстремума	146
Глава VII. Вариационные задачи с частными производными	151
§ 31. Основная формула для вариации функционала в случае фиксированной области	151
§ 32. Вариационный вывод уравнений колебаний струны, мембраны и пластинки	154
§ 33. Основная формула для вариации в случае переменной области. Теорема Нетер	167
§ 34. Принцип стационарного действия для полей. Законы сохранения	182
§ 35. Примеры: уравнение Клейна — Гордона и уравнение Максвелла	188
Глава VIII. Прямые методы вариационного исчисления. Вариационные методы в задаче Штурма — Лиувилля	193
§ 36. Понятие о прямых методах вариационного исчисления	193
§ 37. Метод Рунге и метод ломаных	196
§ 38. Собственные функции и собственные значения краевой задачи Штурма — Лиувилля	199
Дополнение I. Распространение возбуждения и канонические уравнения	210
Дополнение II. Вариационные методы в задачах об оптимальном регулировании	220

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данного курса положены лекции, читавшиеся И. М. Гельфандом на механико-математическом факультете МГУ. Однако содержание книги значительно выходит за рамки материала, фактически излагавшегося на лекциях. Авторы ставили своей целью изложить основы вариационного исчисления в доступной и в то же время достаточно современной форме. Значительное внимание в книге уделено физическим применениям вариационных методов — каноническим уравнениям, вариационным принципам механики, законам сохранения и т. д.

Читатель, желающий ознакомиться лишь с самыми основными понятиями и методами вариационного исчисления, может ограничиться изучением одной первой главы. Совокупность первых трех глав образует несколько более обширный, но все еще достаточно элементарный курс основ вариационного исчисления (в рамках одних лишь необходимых условий экстремума). Наконец, гл. I — VI составляют более или менее обычный по объему университетский курс вариационного исчисления (с некоторыми применениями к механике систем с конечным числом степеней свободы), включающий теорию поля (в несколько отличном от обычного изложении) и достаточные условия слабого и сильного экстремумов. Седьмая глава книги посвящена применению вариационных методов к изучению систем с бесконечным числом степеней свободы. В восьмой главе кратко изложены прямые методы вариационного исчисления.

Авторы благодарны М. А. Евграфову и А. Г. Костюченко, которые прочли книгу в рукописи и сделали ряд полезных замечаний.

*И. М. Гельфанд
С. В. Фомин.*

Октябрь, 1960

ФУНКЦИОНАЛЫ. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Введение

Во многих задачах, возникающих в анализе, механике, геометрии и т. д., важную роль играют переменные величины, называемые *функционалами*. Мы говорим, что нам задан функционал, если каждой функции (или кривой) из некоторого класса поставлено в соответствие определенное число. Таким образом, можно сказать, что функционалы — это функции, в которых роль независимого переменного играют кривые или функции.

Приведем примеры функционалов.

1. Рассмотрим на плоскости всевозможные спрямляемые*) кривые. Каждой такой кривой соответствует определенное число — ее длина. Таким образом, длина кривой представляет собой функционал, определенный на множестве спрямляемых кривых.

2. Поставив в соответствие каждой плоской спрямляемой кривой (которую мы будем рассматривать как однородную материальную линию) ординату ее центра тяжести, мы опять-таки получим некоторый функционал.

3. Рассмотрим на плоскости всевозможные пути, соединяющие две данные точки A и B . Пусть некоторое тело может двигаться по любому из этих путей, имея в каждой точке (x, y) определенную скорость $v(x, y)$. Мы получим функционал, поставив в соответствие каждому пути то время, за которое рассматриваемое тело проходит этот путь.

4. Пусть $y(x)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Определим на множестве

*) Длина кривой определяется в анализе как предел длин ломаных, вершины которых лежат на этой кривой, при стремлении к нулю длин звеньев этих ломаных. Если этот предел существует и конечен, то данная кривая называется спрямляемой.

всех таких функций функционал $J[y]$ равенством

$$J[y] = \int_a^b y'^2(x) dx.$$

5. Рассмотрим более общий пример. Пусть $F(x, y, z)$ — некоторая непрерывная функция трех переменных. Выражение

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (1)$$

где $y(x)$ пробегает совокупность всевозможных непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[a, b]$, представляет собой функционал. Выбирая ту или иную функцию F , мы будем получать различные функционалы, например если

$$F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2},$$

то $J[y]$ — длина кривой $y = y(x)$ (пример 1), а при $F(x, y, z) = z^2$ получаем предыдущий пример. Функционалы вида (1) мы и будем в основном рассматривать ниже.

Отдельные задачи, связанные с понятием функционала, рассматривались более трехсот лет назад. Первые важные результаты здесь были получены еще Л. Эйлером. Тем не менее до сих пор еще не существует достаточно общих методов «исчисления функционалов», аналогичных классическому анализу («исчислению функций»). Наиболее разработанными являются методы нахождения наибольших и наименьших значений функционалов. Этот наиболее разработанный раздел «исчисления функционалов» называется вариационным исчислением. Правильнее, однако, было бы назвать его «вариационным исчислением в узком смысле», поскольку значение понятия вариации функционала, играющего основную роль в вариационном исчислении, далеко не исчерпывается применениями к задачам на нахождение экстремумов функционалов.

Укажем некоторые типичные примеры вариационных задач, т. е. задач на нахождение наибольших и наименьших значений функционалов.

1. Среди всех плоских кривых, соединяющих две заданные точки A и B , найти ту, которая имеет наименьшую длину; иначе говоря, найти кривую $y = y(x)$, для которой функционал

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

достигает минимума. Искомой линией будет отрезок прямой, соединяющий точки A и B .

2. Пусть A и B — две фиксированные точки. Время, в течение которого материальная точка скатывается под действием силы тяжести вдоль некоторого пути, соединяющего точки A и B , зависит от выбора этого пути, т. е. представляет собой функционал. Кривая, вдоль которой точка скатывается быстрее всего, носит название *брахистохроны*. Задача о брахистохроне была поставлена И. Бернулли в 1696 г. и сыграла важную роль в развитии вариационного исчисления. Ее решение было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Ньютоном и Лопиталем. Брахистохрона представляет собой циклоиду, лежащую в вертикальной плоскости, проходящей через A и B .

3. Л. Эйлером было дано решение следующей вариационной задачи (изопериметрическая задача): среди всех замкнутых кривых, имеющих данную длину S , найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Такой кривой является окружность.

Во всех указанных выше задачах речь шла о функционалах, представимых в виде

$$\int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Такие функционалы обладают так называемым свойством «локальности», которое состоит в следующем. Если мы разобьем кривую $y = y(x)$ на части и вычислим значение функционала для каждой из этих частей, то сумма этих значений будет равна значению функционала для всей кривой $y = y(x)$. Именно такие функционалы обычно рассматриваются в вариационном исчислении.

Примером нелокального функционала может служить выражение

$$\frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx},$$

представляющее собой абсциссу центра тяжести материальной кривой $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$).

В развитии вариационного исчисления важную роль сыграли многие механические и физические задачи, например упомянутая выше задача о брахистохроне. В свою очередь методы вариационного исчисления широко используются в различных вопросах физики. Следует подчеркнуть, что применения вариационного исчисления в физике не исчерпываются решением отдельных, хотя бы и весьма важных задач. Так называемые «вариационные принципы», о которых речь будет идти в гл. IV и VII, представляют собой, по существу, выражения весьма общих физических закономерностей, имеющих

место в самых различных областях физики, начиная от классической механики и кончая теорией элементарных частиц.

Для понимания существа задач и методов вариационного исчисления очень важно уяснить их связь с задачами классического анализа, т. е. с исследованием функций n переменных. Рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Здесь каждой кривой $y = y(x)$ ставится в соответствие некоторое число. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = b$$

на $n+1$ равных частей и рассмотрим вместо кривой $y = y(x)$ ломаную с вершинами

$$(x_0, A), (x_1, y(x_1)), \dots, (x_{n+1}, B),$$

а сам функционал $J[y]$ приближенно заменим суммой

$$J(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) h, \quad h = x_i - x_{i-1}. \quad (2)$$

Каждая ломаная однозначно определяется ординатами $y_1, y_2, \dots, y_n$ своих вершин, а сумма (2) представляет собой функцию переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Таким образом, вариационную задачу можно приближенно рассматривать как задачу о нахождении экстремума функции $J(y_1, \dots, y_n)$ от n переменных. Этот прием в вариационном исчислении был широко использован Эйлером. Заменяя гладкие кривые ломаными, он сводил задачу о нахождении экстремума функционала к нахождению экстремума функции n переменных, а затем с помощью предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ получал точные решения.

Таким образом, функционалы можно рассматривать как «функции от бесконечного числа независимых переменных», а именно значений функции $y(x)$ в отдельных точках, а вариационное исчисление — как соответствующий аналог дифференциального исчисления.

§ 2. Функциональные пространства

При изучении функций n переменных удобно пользоваться геометрическим языком, рассматривая набор n чисел $(y_1, \dots, y_n)$ как точку n -мерного пространства. Точно так же геометрический язык полезен и при изучении функционалов. Каждую функцию $y(x)$, принадлежащую какому-либо классу, мы будем рассматривать как точку

некоторого пространства. Пространства, элементами которых являются функции, мы будем называть функциональными пространствами.

В то время как для изучения функций от данного числа n независимых переменных достаточно рассматривать одно пространство, а именно n -мерное евклидово пространство, не существует какого-либо «универсального» функционального пространства; сами эти пространства приходится выбирать в зависимости от характера рассматриваемой вариационной задачи. Например, если речь идет о функционале

вида $\int_a^b F(x, y, y') dx$, то естественно рассматривать его на совокупности всех функций, имеющих непрерывную первую производную,

а в случае функционала вида $\int_a^b F(x, y, y', y'') dx$ следует за соответствующее функциональное пространство взять класс дважды непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому для того чтобы задать функциональное пространство, надо прежде всего задать класс рассматриваемых функций.

Для функционалов, так же как и для обычных функций, рассматриваемых в классическом анализе, важную роль играет понятие непрерывности. Для того чтобы сформулировать это понятие для функционалов, необходимо ввести в функциональном пространстве, тем или иным путем, понятие близости элементов. Это удобнее всего сделать, введя для функций понятие нормы — аналог расстояния между точками в евклидовом пространстве.

Хотя в дальнейшем мы будем всегда рассматривать именно функциональные пространства, нам удобнее будет сейчас ввести понятие нормы несколько более общим и абстрактным образом, а именно сформулировав определение линейного нормированного пространства.

Линейным пространством называется совокупность R элементов $x, y, z, \dots$ произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения их на числа, причем выполнены следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Существует такой элемент 0 (нулевой элемент), что $x + 0 = x$ для любого x из R .

4. Для каждого $x \in R$ существует такой элемент $-x$, что

$$x + (-x) = 0.$$

5. $1 \cdot x = x$.

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство R называется *нормированным*, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ — норма этого элемента так, что

1. $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В линейном нормированном пространстве можно говорить о расстоянии между элементами, понимая под расстоянием между x и y величину $\|x - y\|$. Элементами линейного нормированного пространства могут быть объекты произвольной природы: системы чисел, векторы (т. е. направленные отрезки), матрицы, функции и т. д.

Для нас важны следующие пространства.

1. Пространство C , состоящее из всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$. Сложение элементов и умножение их на числа вводятся как обычные сложение функций и умножение их на числа, а норма определяется как максимум модуля, т. е.

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|.$$

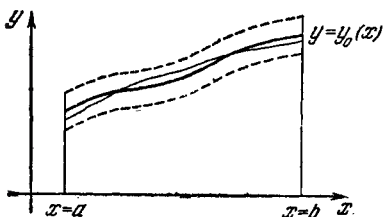


Рис. 1.

Таким образом, в пространстве C мы считаем функцию $y(x)$ отстоящей от функции $y_0(x)$ не больше чем на ϵ , если ее график целиком лежит внутри полосы, шириной 2ϵ (по вертикали), окружающей график функции $y_0(x)$ (рис. 1).

2. Пространство D_1 , состоящее из всех функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и непрерывных на этом отрезке вместе со своей первой производной. Операции сложения и умножения на числа вводятся так же, как и в C , а норма определяется формулой

$$\|y\|_1 = \max |y(x)| + \max |y'(x)|.$$

Таким образом, близость функций в пространстве D_1 означает, что близки как сами функции, так и их первые производные. Действительно, если

$$\|y - z\|_1 \leq \epsilon,$$

то при $a \leq x \leq b$

$$|y(x) - z(x)| \leq \epsilon \quad \text{и} \quad |y'(x) - z'(x)| \leq \epsilon.$$

3. Пространство D_n , состоящее из всех функций на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до n -го порядка включительно, где n — некоторое целое фиксированное число. Сумма элементов и произведение элемента на число определяются так же,

как и в предыдущих случаях, а норма определяется формулой

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^n \max |y^{(k)}(x)|,$$

где под производной нулевого порядка понимается сама функция. Близость функций в этом пространстве означает, следовательно, близость значений как самих функций, так и их производных до n -го порядка включительно. Легко проверить, что в каждом из указанных выше трех пространств все аксиомы линейного нормированного пространства действительно выполнены.

Аналогично можно ввести пространства функций нескольких переменных, например пространства непрерывных функций n переменных, пространство непрерывных функций n переменных, имеющих непрерывные первые производные, и т. д.

После того как в линейном (в частности, функциональном) пространстве R введена норма, для функционалов естественно вводится понятие непрерывности, а именно:

Определение: Функционал $\varphi(y)$ называется непрерывным в точке $y_0 \in R$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ как только $\|y - y_0\| < \delta$.

На первый взгляд может показаться, что при изучении функционалов и, в частности, при решении вариационных задач можно обойтись пространством C — самым обширным из всех перечисленных. На самом деле это не так. Действительно, как уже указывалось выше, один из основных типов функционалов, рассматриваемых в вариационном исчислении, — это функционалы вида

$$\int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Легко видеть, что такой функционал будет непрерывен, если близость функций понимать как близость в пространстве D_1 , но он не будет, вообще говоря, непрерывен, если пользоваться нормой, введенной в пространстве C *). В то же время на пространстве D_1 этот функционал (в частности, длина кривой) непрерывен. Для того чтобы иметь возможность пользоваться обычными аналитическими методами, например предельным переходом, разумно выбирать каждый раз функциональное пространство так, чтобы интересующий нас функционал был непрерывен.

*) Типичным примером является длина кривой. Для каждой кривой можно указать другую, сколь угодно близкую к ней (в смысле нормы пространства C) кривую, длина которой отличается от длины первой кривой, скажем, в 10 раз.

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание. Выше речь шла о линейных пространствах и функционалах на них. Однако во многих вариационных задачах приходится рассматривать функционалы на совокупности функций, не образующих линейного пространства, например на совокупности плоских кривых, проходящих через две фиксированные точки (см. § 4). Несмотря на это, понятие линейного нормированного пространства и связанные с ним понятия расстояния между функциями, непрерывности функционала и т. д. играют важную роль в вариационном исчислении. С аналогичным положением приходится встречаться и в анализе: рассматривая функции n переменных, удобно пользоваться понятием n -мерного евклидова пространства, однако область определения той или иной функции может и не быть линейным многообразием.

§ 3. Дифференциал функционала. Необходимое условие экстремума

1. В этом параграфе мы введем понятие дифференциала функционала, аналогичное понятию дифференциала функции n переменных и применим его к отысканию экстремумов функционалов. Мы начнем с некоторых вспомогательных фактов и определений.

Определение. Пусть R — линейное нормированное пространство и пусть каждому элементу h из R поставлено в соответствие число $\varphi(h)$, т. е. задан функционал. Этот функционал $\varphi(h)$ называется *линейным*, если он

- 1) непрерывен,
- 2) для любых h_1, h_2 , принадлежащих R , удовлетворяет условию

$$\varphi(h_1 + h_2) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2).$$

Укажем некоторые примеры линейных функционалов в пространстве C .

1. Положим

$$\varphi(h) = \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx.$$

Это выражение будет, очевидно, линейным функционалом.

2. Более общим примером линейного функционала в C является

$$\varphi(h) = \int_{x_1}^{x_2} a(x) h(x) dx,$$

где $a(x)$ — фиксированная функция.

3. Поставим в соответствие каждой функции $h(x)$ ее значение в фиксированной точке x_0 , т. е. зададим функционал $\varphi(h)$ равенством

$$\varphi(h) = h(x_0),$$

где x_0 — фиксированная точка. Это тоже будет линейный функционал. (Проверьте это!)

Как уже было сказано выше, выражение $\int_{x_1}^{x_2} a(x)h(x)dx$ есть линейный функционал. Предположим, что этот функционал равен нулю, т. е. $\int_{x_1}^{x_2} a(x)h(x)dx = 0$ для всех функций $h(x)$, принадлежащих некоторому классу. Что можно сказать о функции $a(x)$? Ответ на этот важный для дальнейшего вопрос дает следующая

Лемма 1. Если $a(x)$ — непрерывная функция и

$$\int_a^b a(x)h(x)dx = 0$$

для любой непрерывной функции $h(x)$, имеющей непрерывную производную и удовлетворяющей условию $h(a) = h(b) = 0$, то $a(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке c $a(c) \neq 0$, например $a(c) > 0$, тогда найдется интервал $\xi_1 < c < \xi_2$, содержащийся в (x_1, x_2) , в котором $a(x) > 0$. Положим $h(x) = (\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2$ на интервале (ξ_1, ξ_2) и $h(x) = 0$ вне этого интервала. $h(x)$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы. В то же время

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)h(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} a(x)(\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2dx > 0,$$

так как под интегралом стоит положительная непрерывная функция. Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим теперь линейный функционал

$$\int_{x_1}^{x_2} b(x)h'(x)dx,$$

определенный в пространстве D_1 . Покажем, что если

$$\int_a^b b(x)h'(x)dx = 0$$

для каждой функции $h(x)$ из D_1 такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $b(x) = \text{const.}$

Действительно, положим $h'(x) = g(x)$, тогда

$$h(x) = \int_a^x g(\tau) d\tau, \quad \int_a^b g(\tau) d\tau = 0.$$

Выберем постоянную c так, что

$$\int_a^b (b(x) - c) dx = 0,$$

и покажем, что

$$\int_a^b (b(x) - c) f(x) dx = 0$$

для любой непрерывной $f(x)$. Всякую непрерывную функцию можно представить в виде $f(x) = \lambda(x) + \alpha$, где

$$\int_a^b \lambda(x) dx = 0, \quad \alpha = \text{const.}$$

Получаем

$$\int_a^b (b(x) - c) f(x) dx = \int_a^b (b(x) - c) \lambda(x) dx + \alpha \int_a^b (b(x) - c) dx.$$

Первое слагаемое справа равно нулю, так как $\lambda(x)$ есть производная от функции $\int_a^x \lambda(\tau) d\tau$, удовлетворяющей всем условиям, наложенным на $h(x)$, а второе равно нулю в силу выбора c . Таким образом,

$$\int_a^b (b(x) - c) f(x) dx = 0$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. Положив

$$f(x) = b(x) - c,$$

получаем

$$\int_a^b (b(x) - c)^2 dx = 0,$$

откуда $b(x) - c \equiv 0$, т. е. $b(x)$ есть постоянная.

Рассмотрим в D_1 линейный функционал более общего вида:

$$\int_{x_1}^{x_2} [a(x)h(x) + b(x)h'(x)] dx.$$

(Читателю предоставляется проверить, что этот функционал линейный.) Такие функционалы нам понадобятся в дальнейшем. Докажем следующую лемму:

Лемма 2. Если

$$\int_a^b [a(x)h(x) + b(x)h'(x)] dx = 0 \quad (1)$$

для каждой функции $h(x)$ из D_1 такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $b(x)$ дифференцируема и $a(x) - b'(x) = 0$.

Действительно, положив

$$\int_a^t a(\tau) d\tau = A(t), \quad (2)$$

получаем с помощью интегрирования по частям, что

$$\int_a^b a(x)h(x) dx = - \int_a^b A(x)h'(x) dx,$$

т. е. равенство (1) можно переписать в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} [-A(x) + b(x)] h'(x) dx = 0,$$

но отсюда следует (см. выше), что

$$b(x) - A(x) = \text{const},$$

откуда в силу (2)

$$b'(x) = a(x).$$

Лемма доказана. Подчеркнем, что здесь дифференцируемость функции $b(x)$ заранее не предполагалась.

2. Перейдем теперь к определению понятия дифференциала функционала.

Рассмотрим некоторый функционал $J[y]$ и его приращение

$$\Delta J = J[y + h] - J[y],$$

отвечающее приращению h «независимой переменной» y . Если y фиксировано, то ΔJ представляет собой функционал (вообще говоря, нелинейный) от h .

Мы назовем дифференциалом, или *вариацией*, δJ функционала J главную линейную часть приращения ΔJ функционала J , т. е. линейный функционал $\varphi(h)$, отличающийся от ΔJ на бесконечно малую величину порядка выше первого по отношению к $\|h\|$. Таким образом,

$$\Delta J(h) = \varphi(h) + \alpha \|h\|,$$

где $\alpha \rightarrow 0$, когда $\|h\| \rightarrow 0$.

Легко видеть, что дифференциал функционала (если он вообще существует) определяется однозначно. Сделаем предварительно следующее замечание: если $\varphi(h)$ — линейный функционал и $\frac{\varphi(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$, то $\varphi(h) \equiv 0$. Действительно, пусть $\varphi(h_0) = \lambda \neq 0$. Положим $h_n = \frac{h_0}{n}$. Имеем $\|h_n\| \rightarrow 0$, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\varphi(h_0)}{n\|h_0\|} = \lambda \neq 0.$$

Допустим теперь, что дифференциал функционала определяется не единственным образом, т. е. пусть

$$\Delta J(h) = \varphi_1(h) + \alpha_1 \|h\|$$

и

$$\Delta J(h) = \varphi_2(h) + \alpha_2 \|h\|,$$

где $\varphi_1(h)$ и $\varphi_2(h)$ — линейные функционалы, а $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Тогда

$$\varphi_1(h) - \varphi_2(h) = \alpha_1 \|h\| - \alpha_2 \|h\|. \quad (3)$$

Следовательно, $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$ есть бесконечно малая порядка выше первого относительно h . Но так как $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$ — линейный функционал, то он в силу сделанного выше замечания равен нулю.

Воспользуемся понятием дифференциала (вариации) функционала для того, чтобы установить необходимые условия экстремума функционала.

Напомним сначала соответствующие понятия из анализа. Пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция n переменных. Говорят, что $F(x_1, \dots, x_n)$ имеет в точке $x_1^0, \dots, x_n^0$ экстремум, если

$$\Delta F = F(x_1, \dots, x_n) - F(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

имеет один и тот же знак для всех точек $(x_1, \dots, x_n)$, принадлежащих некоторой окрестности точки $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, именно F имеет в данной точке минимум, если $\Delta F \geq 0$ в данной окрестности, и максимум в случае $\Delta F \leq 0$.

Аналогично мы скажем, что функционал $J(y)$ достигает экстремума при $y = y_0$, если $J[y] - J[y_0]$ сохраняет знак в некоторой окрестности кривой $y_0(x)$.

Мы будем рассматривать функционалы, определенные на некотором множестве дифференцируемых функций. Сами эти функции мы можем считать элементами пространства C или пространства D_1 . В соответствии с этими двумя возможностями мы будем говорить, что функционал $J[y]$ достигает при $y = y_0$ *слабого экстремума*, если существует такое $\epsilon > 0$, что $J[y] - J[y_0]$ сохраняет постоянный знак для всех тех y из D_1 , для которых функционал $J[y]$ определен и $\|y - y_0\|_1 < \epsilon$ (здесь $\|\cdot\|_1$ означает норму в пространстве D_1), и будем называть значение $J[y_0]$ *сильным экстремумом*, если оно является экстремальным по отношению ко всем тем $y(x)$, которые принадлежат области определения функционала $J[y]$ и удовлетворяют условию $\|y - y_0\| < \epsilon$ (т. е. близки к y_0 в смысле нормы пространства C).

Ясно, что всякий сильный экстремум будет в то же время и слабым экстремумом.

Действительно, если $\|y - y_0\|_1 < \epsilon$, то подавно $\|y - y_0\| < \epsilon$, поэтому если $J[y_0]$ есть экстремум по отношению ко всем y таким, что $\|y - y_0\| < \epsilon$, то $J[y]$ тем более будет экстремумом по отношению к тем y , для которых $\|y - y_0\|_1 < \epsilon$. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. слабый экстремум может сильным экстремумом и не быть. Нахождение слабого экстремума является, как правило, задачей более простой, чем нахождение сильного экстремума. Причина этого состоит в том, что, как было отмечено в конце предыдущего параграфа, функционалы, рассматриваемые обычно в вариационном исчислении, непрерывны в пространстве D_1 . Поэтому в теории слабого экстремума можно пользоваться непрерывностью функционалов. В то же время эти функционалы, вообще говоря, не непрерывны по отношению к норме пространства C .

Теорема. Для того чтобы функционал $J[y]$ при $y = y_0$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его дифференциал (если он существует) обращался в нуль при $y = y_0$, т. е.

$$\delta J \equiv 0$$

при $y = y_0$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай минимума. Если $J[y]$ при $y = y_0$ достигает минимума, то это значит, что

$$J[y_0 + h] - J[y_0] \geq 0$$

для всех h , для которых $\|h\|_1$ достаточно мала. Но, по определению вариации,

$$J[y_0 + h] - J[y_0] = \delta J[h] + \alpha \|h\|$$

и $\alpha \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Если $\delta J[h] \neq 0$, то при достаточно малых h знак выражения

$$\delta J[h] + \alpha \|h\| \quad (4)$$

определяется знаком первого (главного) члена. Но δJ — линейный функционал, поэтому

$$\delta J[-h] = -\delta J[h],$$

и, следовательно, при $\delta J \neq 0$ выражение (4) может быть как положительным, так и отрицательным при сколь угодно малых h , т. е. экстремум в этом случае невозможен.

Замечание. В анализе, помимо условия $df = 0$, рассматривается и другое необходимое условие экстремума, состоящее в том, что второй дифференциал функции должен быть неотрицателен. Рассмотрение аналогичного вопроса для функционалов мы отложим до гл. V.

§ 4. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

1. Изучение конкретных задач вариационного исчисления мы начнем с так называемой простейшей задачи, которая формулируется следующим образом. Пусть $F(x, y, z)$ — функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (1)$$

найти ту функцию, которая доставляет слабый экстремум функционалу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (2)$$

Иначе говоря, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (2) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки.

Упомянутые во введении примеры 1 и 2, вариационных задач (о нахождении кратчайшей линии и о брахистохроне) принадлежат как раз к этому типу.

Чтобы применить к решению сформулированной простейшей задачи необходимое условие экстремума, найденное в предыдущем параграфе, нужно уметь вычислять вариацию для функционалов вида (2). Выведем соответствующую формулу.

Дадим функции $y(x)$ некоторое приращение $h(x)$. Для того чтобы функция

$$y(x) + h(x)$$

по-прежнему удовлетворяла граничным условиям, нужно, чтобы

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Вычислим приращение функционала (2). Оно равно

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b F(x, y+h, y'+h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b [F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h'] dx + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого относительно h и h' . Выражение

$$\int_a^b [F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h'] dx$$

представляет собой главную линейную часть приращения ΔJ функционала J , т. е. дифференциал.

Согласно теореме § 3 необходимым условием экстремума является равенство

$$\delta J = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx = 0. \quad (3)$$

Но в силу леммы 2 § 3 из равенства (3) вытекает, что*)

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (4)$$

Выражение (4) называется уравнением Эйлера.

Таким образом, установлена следующая

Теорема 1. *Для того чтобы функционал*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

определенный на множестве функций $y = y(x)$, имеющих

*) Подчеркнем, что существование производной $\frac{d}{dx} F_{y'}$ здесь заранее не предполагается, а вытекает из той же самой леммы 2 § 3.

непрерывную первую производную и удовлетворяющих условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, достигал на данной функции $y(x)$ экстремума*), необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются *экстремальными*.

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение должно зависеть, вообще говоря, от двух произвольных постоянных, которые определяются из двух краевых условий $y(a) = A$ и $y(b) = B$.

Отметим, что при решении уравнения Эйлера мы, в отличие от обычной для дифференциальных уравнений постановки вопроса, где ищется решение, определенное в окрестности некоторой точки и удовлетворяющее заданным начальным условиям (задачи Коши), ищем решение, определенное во всей фиксированной области и удовлетворяющее заданным граничным условиям. Поэтому вопрос о разрешимости той или иной вариационной задачи не сводится непосредственно к обычным теоремам существования для дифференциальных уравнений.

Приведем следующую теорему С. Н. Бернштейна**) о существовании и единственности решения в целом для уравнения вида

$$y'' = F(x, y, y'). \quad (*)$$

Если функции $F, F_y, F_{y'}$ непрерывны в каждой конечной точке (x, y) для любого конечного y' и если существует такая постоянная $k > 0$ и такие, ограниченные в каждой конечной части плоскости функции

$$\alpha = \alpha(x, y) \geq 0, \quad \beta = \beta(x, y) \geq 0,$$

что

$$F_y(x, y, y') > k, \quad |F(x, y, y')| \leq \alpha y'^2 + \beta,$$

то через любые две точки (a, a_1) и (b, b_1) плоскости (x, y) , абсциссы которых различны ($a \neq b$), проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (*).

Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы.

Уравнение (4) дает необходимое, но, вообще говоря, недостаточное условие экстремума. Вопрос о достаточных условиях экстремума будет рассмотрен в гл. V. В ряде случаев, однако, уже одно уравнение

*) Это условие необходимо для слабого экстремума. Так как всякий сильный экстремум является в то же время и слабым, то любое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо и для сильного.

**) Работа С. Н. Бернштейна относится к 1912 г. Ее русский перевод «Об уравнениях вариационного исчисления» напечатан в VIII выпуске «Успехов математических наук» (1941 г.).

Эйлера дает исчерпывающее решение задачи. Действительно, часто само существование экстремума бывает ясно из физического или геометрического смысла задачи (например, задачи о брахистохроне, о кратчайшем расстоянии между двумя точками и т. п.). Если при этом существует лишь единственная экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям задачи, то именно она и будет непременно той кривой, которая реализует искомый экстремум.

Уравнение Эйлера для функционала $\int_a^b F(x, y, y') dx$ представляет собой уравнение второго порядка. Может оказаться, однако, что та кривая, на которой этот функционал достигает экстремума, не является дважды дифференцируемой. Рассмотрим, например, функционал

$$J[y] = \int_{-1}^1 y^2 (1 - y')^2 dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Его минимальное значение, равное нулю, достигается на функции

$$y = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

не имеющей второй производной. Хотя функция $g(x)$ и не имеет второй производной, она удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера. Действительно, при $F(x, y, y') = y^2(1 - y')^2$ и $y = g$ имеем

$$F_{g'} = -2g^2(1 - g') \equiv 0$$

и, следовательно, $\frac{d}{dx} F_{g'} \equiv 0$; и хотя уравнение Эйлера имеет порядок два, а $g''(x)$ не существует, подстановка $g(x)$ в уравнение Эйлера обращает его в тождество.

Выясним теперь условия, при которых можно гарантировать существование второй производной у функции $y = y(x)$, представляющей собой решение уравнения Эйлера.

Теорема 2. Пусть $y = y(x)$ — решение уравнения Эйлера $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$. Если функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках (x, y) , в которых

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0,$$

функция $y = y(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta F_{y'} &= F_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_{y'}(x, y, y') = \\ &= \Delta x \tilde{F}_{y'x} + \Delta y \tilde{F}_{y'y} + \Delta y' \tilde{F}_{y'y'}, \end{aligned}$$

где знак $\sim$ указывает, что производные берутся в некоторой промежуточной точке.

Разделив эту разность на Δx , рассмотрим предел полученного выражения $\tilde{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \tilde{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \tilde{F}_{y'y'}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (этот предел существует, так как $F_{y'}$ имеет производную по x , в силу уравнения Эйлера она равна F_y).

Так как вторые производные функции $F(x, y, z)$ по условию непрерывны, то $\tilde{F}_{y'x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ стремится к $F_{y'x}$, т. е. к значению производной $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}$ в точке x .

Второе слагаемое, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \tilde{F}_{y'y}$, при $\Delta x \rightarrow 0$ также имеет предел. Это вытекает из существования y' и непрерывности второй производной $F_{y'y}$. Но тогда существует предел и третьего слагаемого (так как предел всей суммы существует), т. е. существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \tilde{F}_{y'y'}.$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\tilde{F}_{y'y'}$ стремится к пределу $F_{y'y'} \neq 0$, и значит, существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''(x).$$

Из уравнения

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$$

можно найти выражение для y'' , из которого видно, что y'' непрерывна всюду, где $F_{y'y'} \neq 0$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что экстремаль $y = y(x)$ может иметь излом только в тех точках, где

$$F_{y'y'} = 0.$$

2. Уравнение Эйлера, выведенное нами в этом параграфе, играет фундаментальную роль во всем вариационном исчислении. Оно представляет собой, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка. Укажем некоторые частные случаи, в которых это уравнение может быть сведено к уравнению первого порядка или даже полностью проинтегрировано в квадратурах.

1. Подынтегральная функция не зависит от y . Предположим, что рассматриваемый функционал имеет вид

$$\int_a^b F(x, y') dx,$$

т. е. F не содержит y явно. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и имеет, очевидно, первый интеграл

$$F_{y'} = C.$$

Это — уравнение первого порядка, не содержащее y . Решив его относительно y' , получаем соотношение вида

$$y' = f(x, C),$$

откуда y находится квадратурой.

2. Подынтегральная функция не зависит от x , т. е.

$$J[y] = \int_a^b F(y, y') dx.$$

В этом случае

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{y'y'} y'' - F_{y'y} y'.$$

Умножив это выражение на y' , получим выражение, которое можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}),$$

откуда получаем, что в рассматриваемом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y' F_{y'} = C.$$

3. Если F не зависит от y' , то уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y(x, y) = 0,$$

т. е. представляет собой не дифференциальное, а конечное уравнение, определяющее одну или несколько кривых.

4. В различных задачах часто встречаются функционалы вида

$$\int_a^b v(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

представляющие собой интеграл от некоторой функции $v(x, y)$, взятый по длине дуги. В этом случае уравнение Эйлера может быть

преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= v'_y(x, y) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left[v(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = \\ &= v'_y \sqrt{1 + y'^2} - v'_x \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - v'_y \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} - v \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \left[v'_y - v'_x y' - v \frac{y''}{1 + y'^2} \right] = 0,\end{aligned}$$

т. е.

$$v'_y - v'_x y' - v \frac{y''}{1 + y'^2} = 0.$$

Примеры. 1. $J[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{x}$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

Подынтегральная функция не содержит y , поэтому уравнение Эйлера имеет вид

$$F_{y'} = C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y'}{x \sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

откуда

$$y'^2(1 - x^2 C^2) = C^2 x^2, \quad \text{т. е.} \quad y' = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2 x^2}},$$

и следовательно,

$$y = \int \frac{Cx dx}{\sqrt{1 - C^2 x^2}} = \frac{1}{C} \sqrt{1 - C^2 x^2} + C_1, \quad \text{т. е.} \quad (y - C_1)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Таким образом, решение представляет собой окружность с центром на оси y . Из условий $y(1) = 0$, $y(2) = 1$ получаем, что

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_1 = 2. \quad \text{Итак, окончательное решение}$$

$$(y - 2)^2 + x^2 = 5.$$

2. Среди линий, соединяющих две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , найти ту, которая при вращении образует поверхность наименьшей площади. Как известно, площадь поверхности вращения равна

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Так как здесь подынтегральная функция не зависит явно от x , то можно сразу написать первый интеграл уравнения Эйлера, это будет:

$$F - y' F_{y'} = C,$$

т. е.

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

или

$$y = C\sqrt{1+y'^2},$$

откуда

$$y' = \sqrt{\frac{y^2 - C^2}{C^2}}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\int \frac{C dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int dx,$$

т. е.

$$x + C_1 = C \ln(y + \sqrt{y^2 - C^2}),$$

откуда

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{C}.$$

Таким образом, искомой кривой является цепная линия, проходящая через заданные точки. Поверхность, образованная вращением цепной линии, называется катеноидом. Значения произвольных постоянных C и C_1 определяются из условий

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Можно показать, что в зависимости от положения точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) здесь возможны следующие случаи:

1) Через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно провести единственную кривую вида

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{C},$$

тогда эта кривая и является решением задачи.

2) Через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проходят две экстремали. В этом случае одна из них действительно реализует минимум поверхности вращения, а другая нет.

3) Не существует ни одной кривой вида

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{C},$$

проходящей через заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Это означает, что в классе гладких поверхностей вращения, проходящих через данные точки, нет поверхности, реализующей минимум площади. Этот случай можно представить себе следующим образом. Если две заданные точки расположены так, что расстояние между ними доста-

точно велико по сравнению с расстояниями их от оси x , то площадь поверхности, состоящей из двух кругов радиусов y_1 и y_2 и соединяющего их центры отрезка оси x (рис. 2), будет меньше, чем площадь любой гладкой поверхности вращения, проходящей через заданные точки. Таким образом, в этом случае решением задачи о минимуме площади является ломаная Ax_1x_2B , а в классе поверхностей, образованных вращением гладких кривых, проходящих через заданные точки поверхности, имеющей наименьшую площадь, не существует.

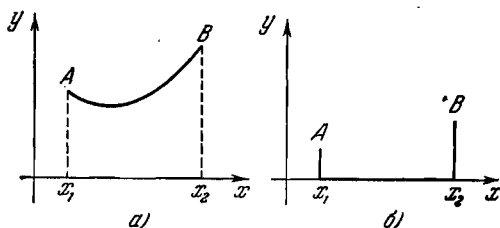


Рис. 2.

3. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b (x - y)^2 dx. \quad (5)$$

Здесь уравнение Эйлера сводится к конечному уравнению; его решение — прямая $y = x$ (вдоль нее интеграл (5) равен нулю).

§ 5. Случай нескольких переменных. Задача со свободными концами

1. Выше мы рассматривали функционалы, зависящие от функций одного переменного, т. е. от линий. Во многих вопросах встречаются функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных, т. е. от поверхностей. Подробнее такие многомерные вариационные задачи мы рассмотрим в гл. VII, а сейчас покажем лишь, как на случай функционалов, зависящих от поверхностей, переносятся постановка и решение рассмотренной выше простейшей задачи вариационного исчисления.

Ограничимся для простоты записи случаем двух независимых переменных. В случае n переменных все рассуждения остаются без изменений. Рассмотрим функционал вида

$$J(z) = \iint_G F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy, \quad (1)$$

где z_x и z_y — частные производные от $z = z(x, y)$, и предположим, что ищется функция $z(x, y)$, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка в области G , принимающая на границе этой области заданные значения и дающая экстремум функционалу (1).

Доказательство теоремы 1 § 3 не связано с видом рассматриваемого функционала, поэтому, как и в случае одного независимого переменного, необходимым условием экстремума функционала (1)

является обращение в нуль его вариации, т. е. главной линейной части его приращения.

Для установления необходимых условий экстремума функционала (1) нам понадобится следующая лемма, аналогичная лемме 1 § 3.

Лемма 1'. Если интеграл

$$\int_G \int f(s, t) \eta(s, t) ds dt, \quad (2)$$

где $f(s, t)$ — фиксированная функция, непрерывная в области G , обращается в нуль для всякой функции $\eta(s, t)$, непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка и обращающейся в нуль на границе L области G , то $f(s, t) = 0$ во всей области G .

Действительно, предположим, что в некоторой точке (ξ, η) функция $f(s, t)$ отлична от нуля, например положительна, тогда она положительна и в некотором содержащемся в G круге радиуса ρ с центром (ξ, η) . Тогда если положить

$$\eta(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{вне круга } (s - \xi)^2 + (t - \eta)^2 = \rho^2, \\ [(s - \xi)^2 + (t - \eta)^2 - \rho^2]^2 & \text{внутри этого круга,} \end{cases}$$

то интеграл (2) сведется к интегралу по рассматриваемому кругу и будет положителен. Лемма доказана.

Для того чтобы применить необходимое условие экстремума $\delta J = 0$ к изучению функционала (1), вычислим вариацию этого функционала.

Если $h(x, y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль на границе области G , то вместе с $z(x, y)$ области определения функционала (1) принадлежит и $z(x, y) + h(x, y)$.

Приращение функционала (1) равно

$$\begin{aligned} J[z + h] - J[z] &= \\ &= \int_G \int [F(x, y, z + h, z_x + h_x, z_y + h_y) - F(x, y, z, z_x, z_y)] dx dy = \\ &= \int_G \int (F_z h + F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y) dx dy + \dots, \end{aligned}$$

где выписанный интеграл представляет собой главную линейную часть этого приращения, т. е. вариацию.

Применяя формулу Грина

$$\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_G \int (F_{zx} h_x + F_{zy} h_y) dx dy &= \\ &= \int_G \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (h F_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h F_{zy}) \right] dx dy - \\ &\quad - \int_G \int h \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} F_{zy} \right) dx dy = \\ &= \int_L h F_{zx} dy - h F_{zy} dx - \int_G \int h \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} F_{zy} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Так как $h(x, y)$ обращается в нуль на L , то справа первый интеграл исчезает, и мы получаем для вариации функционала $J[z]$ следующее выражение:

$$\delta J = \int \int \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{zx} - \frac{\partial}{\partial y} F_{zy} \right) h(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Итак, для того чтобы поверхность $z = z(x, y)$ доставляла экстремум, необходимо, чтобы двойной интеграл (3) обращался в нуль для любой $h(x, y)$, удовлетворяющей указанным выше условиям; в силу леммы 1' отсюда вытекает соответствующее уравнение Эйлера

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{zx} - \frac{\partial}{\partial y} F_{zy} = 0.$$

Оно представляет собой уравнение второго порядка в частных производных, причем ищется решение его, принимающее на контуре L заданные значения.

Пример. Найти поверхность наименьшей площади, натянутую на данный контур. Это сводится к отысканию минимума функционала

$$J = \int_G \int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

Уравнение Эйлера для данного случая приводится к виду

$$r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2) = 0, \quad (4)$$

где $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$. Оно имеет простой геометрический смысл. Для выяснения этого смысла воспользуемся формулой средней кривизны поверхности

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{ED_2 - 2FD_1 + GD}{2(EG - F^2)},$$

где E, F, G и D, D_1, D_2 — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Если поверхность задана явным уравнением $z = z(x, y)$, то

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \\ D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D_1 = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D_2 = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

и, следовательно,

$$H = \frac{(1 + p^2)t - 2spq + (1 + q^2)r}{2\sqrt{(1 + p^2 + q^2)^3}}.$$

Здесь числитель совпадает с левой частью уравнения Эйлера (4). Таким образом, уравнение (4) означает, что средняя кривизна искомой поверхности равна нулю. Поверхности, имеющие нулевую среднюю кривизну, называются *минимальными*.

2. Задача со свободными концами. Простейшая задача вариационного исчисления, которую мы рассматривали до сих пор, является далеко не единственно возможной. Другие типы вариационных задач, с другими граничными условиями, будут рассмотрены в гл. II и III. Однако с одной из таких задач — так называемой задачей со свободными концами, целесообразно познакомиться уже сейчас. Она формулируется следующим образом. Среди всех кривых, концы которых лежат на двух заданных вертикалях $x = a$, $x = b$, найти ту, которая дает экстремум функционалу

$$\int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (5)$$

Вычислим вариацию функционала (5). Понимая под вариацией, как и выше, главную линейную часть приращения $J[y + h] - J[y]$ функционала, получаем

$$J[y + h] - J[y] = \int_a^b [F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y')] dx.$$

Разлагая подынтегральное выражение по степеням h и h' , имеем

$$J[y + h] - J[y] = \int_a^b [F_y h + F_{y'} h'] dx + \text{члены выше первого порядка малости.}$$

Таким образом,

$$\delta J = \int_a^b [F_y h + F_{y'} h'] dx.$$

Так как здесь, в отличие от задачи с закрепленными концами, $h(x)$ уже не обязательно обращается в нуль в точках a и b , то, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + [F_{y'} \delta y]_{x=a}^{x=b} = \\ &= \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + F_{y'}|_{x=b} \delta y_1 - F_{y'}|_{x=a} \delta y_0,\end{aligned}$$

где $\delta y_1 = h(b)$, $\delta y_0 = h(a)$. Таким образом, для задачи со свободными концами мы получили следующее выражение вариации:

$$\delta J = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + F_{y'}|_{x=b} h(b) - F_{y'}|_{x=a} h(a). \quad (6)$$

Рассмотрим сначала такие функции $h(x)$, для которых $h(a) = h(b) = 0$. Тогда, как и в простейшей задаче, из условия $\delta J = 0$ получаем, что

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (7)$$

Итак, для того чтобы кривая $y = y(x)$ могла быть решением задачи со свободными концами, она должна быть экстремалью, т. е. решением уравнения Эйлера (7). Пусть теперь $y = y(x)$ — экстремаль. Тогда в выражении (6) для δJ интегральный член исчезает и условие $\delta J = 0$ принимает вид

$$F_{y'}|_{x=b} h(b) - F_{y'}|_{x=a} h(a) = 0,$$

т. е., в силу произвольности $h(x)$,

$$F_{y'}|_{x=b} = 0, \quad F_{y'}|_{x=a} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно найти общий интеграл уравнения Эйлера (7) и затем определить значения произвольных постоянных из условий (8).

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, т. е. считать, что один конец закреплен, а другой свободен. Пусть, например, ищется экстремум функционала (5) на классе кривых, соединяющих данную точку A (с абсциссой a) и произвольную точку прямой $x = b$. В этом случае из двух условий (8) остается только одно условие

$$F_{y'}|_{x=b} = 0,$$

а равенство $y(a) = A$ служит вторым краевым условием.

Пример. По какой плоской кривой тяжелая точка должна скатываться вниз из положения $A(a, y_0)$ для того, чтобы в кратчайшее время достигнуть вертикальной прямой $x = b$?

Решение. Для упрощения записи будем считать, что исходная точка совпадает с началом координат. Так как скорость движения по кривой равна

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt},$$

то

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}},$$

откуда время движения T равно

$$T = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Общим решением соответствующего уравнения Эйлера будет семейство циклоид $x = r(\theta - \sin \theta) + c$, $y = r(1 - \cos \theta)$.

Из условия прохождения искомой кривой через начало координат получаем, что $c = 0$. Для определения r воспользуемся вторым условием

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy} \sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

т. е. при $x = b$ должно быть $y' = 0$: в правом конце искомой кривой касательная горизонтальна. Отсюда $r = \frac{b}{\pi}$.

Итак, соответствующая кривая задается уравнениями

$$x = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos \theta).$$

§ 6. Вариационная производная. Инвариантность уравнения Эйлера

1. Для функций n переменных наряду с понятием дифференциала вводится понятие частной производной. Выше мы ввели понятие дифференциала для функционалов. Выражение, играющее для функционалов ту же роль, что и частные производные для функций n переменных, носит название вариационной производной. Мы введем сперва понятие вариационной производной для функционалов вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

отвечающих простейшей задаче. Для этой цели мы перейдем от вариационной задачи к конечномерной, а затем совершим предельный переход.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n+1$ равных частей точками

$$x_0 = a, \quad x_1, \dots, x_n, \quad x_{n+1} = b, \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

и заменим гладкую функцию $y(x)$ ломаной с вершинами

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

при этом можно приближенно заменить суммой

$$\sum_{i=0}^n F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

представляющей собой функцию n переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Обозначим это выражение $J[y_1, y_2, \dots, y_n]$.

Вычислим частные производные $\frac{\partial J[y_1, \dots, y_n]}{\partial y_k}$ и посмотрим, что происходит с этими производными при неограниченном увеличении числа точек деления.

Заметив, что в выражении

$$J[y_1, \dots, y_n] = \sum_{i=0}^n F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x$$

каждое переменное y_k входит ровно в два слагаемых (отвечающих $i=k$ и $i=k-1$), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial y_k} &= F_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x + \\ &+ F_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Правая часть написанного здесь выражения при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. при неограниченном увеличении числа точек деления, стремится, очевидно, к нулю, представляя собой величину порядка Δx . Для того чтобы получить при $\Delta x \rightarrow 0$ предел, вообще говоря, отличный от нуля, разделим равенство (2) на Δx . Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial y_k \Delta x} &= F_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - \\ &- \frac{1}{\Delta x} \left[F_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что выражение $\delta y_k \Delta x$, стоящее в знаменателе слева, имеет непосредственный геометрический смысл. Это — разность между площадями, ограниченными сплошной и пунктирной ломаными (рис. 3). При $\Delta x \rightarrow 0$ выражение (3) стремится к пределу, равному

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y').$$

Этот предел и называется вариационной производной функционала (1). Вариационная производная обозначается символом

$$\frac{\delta J}{\delta y}.$$

Таким образом, формула, которая получается из (3) в результате предельного перехода при $\Delta x \rightarrow 0$, имеет вид

$$\frac{\delta J}{\delta y} = F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y'). \quad (4)$$

Мы видим, что полученное нами выражение вариационной производной представляет собой левую часть уравнения Эйлера. Следовательно, уравнение Эйлера означает не что иное, как равенство нулю

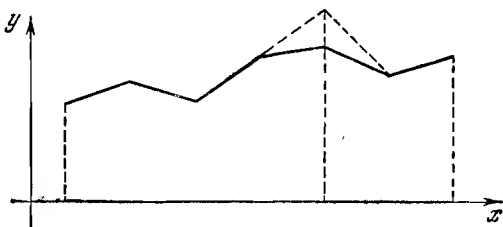


Рис. 3.

в каждой точке вариационной производной соответствующего функционала, точно так же, как в анализе необходимым условием экстремума функции n переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

Сформулируем теперь определение вариационной производной в общем случае. Пусть имеется некоторый функционал $J[y]$. Дадим функции y приращение, отличное от нуля лишь в окрестности некоторой точки x , и вычислим соответствующее приращение функционала

$$J[y + h] - J[y].$$

Разделив это приращение на площадь Δs , ограниченную кривой h и осью x , рассмотрим отношение

$$\frac{J[y + h] - J[y]}{\Delta s}. \quad (5)$$

Пусть теперь площадь Δs , ограниченная кривой $h(x)$, стремится к нулю, причем так, что и $|h(x)|$ и длина того интервала, в котором $h(x)$ отлична от нуля, стремятся к нулю. Если при этом отношение (5) стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *вариационной производной* функционала $J[y]$ в точке x_0 . Вариационную производную в точке x_0 мы обозначим $\left. \frac{\delta J}{\delta y} \right|_{x=x_0}$.

Задача. Вычислить вариационную производную в точке x_0 квадратичного функционала

$$J[y] = \int_a^b \int_a^b K(s, t) y(s) y(t) ds dt.$$

Для вариационных производных остаются в силе те основные правила, которые хорошо известны для обычных производных, например правила дифференцирования суммы, произведения, сложной функции и т. д.

Во многих случаях оказывается полезным понятие вариации в точке, представляющее собой аналог выражения

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Вариацией функционала $J[y]$ в точке x для кривой $y = y(x)$ называется произведение функциональной производной от J в точке x на площадь Δs области, заключенной между кривыми $y(x)$ и $y(x) + h(x)$.

Замечание. Из определения вариационной производной ясно, что если $h(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки x_0 и ограничивает площадь Δs , то

$$\Delta J \equiv J[y + h] - J[y] = \left\{ \left. \frac{\delta J}{\delta y} \right|_{x=x_0} + \varepsilon \right\} \Delta s,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, когда стремятся к нулю и $|h(x)|$ и длина интервала, в котором $h(x)$ отлична от нуля.

2. Инвариантность уравнения Эйлера. Пусть на плоскости вместо переменных (x, y) введены криволинейные координаты (u, v) по формулам

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Кривой, задаваемой на плоскости xu уравнением $y = y(x)$, отвечает на плоскости uv кривая, определяемая некоторым уравнением

$$v = v(u).$$

При замене переменных (6) функционал

$$J[y] = \int F(x, y, y') dx$$

переходит в функционал

$$\begin{aligned} J_1[v] &= \int_{a_1}^{b_1} F\left(x(u, v), y(u, v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right)(x_u + x_v v') du = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} F_1(u, v, v') du. \end{aligned}$$

Покажем, что если некоторая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, то функция $v = v(u)$ удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{d}{du} \frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0, \quad (7)$$

где

$$F_1(u, v, v') = F\left(x(u, v), y(u, v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right)(x_u + x_v v').$$

Для этого воспользуемся введенным выше понятием вариационной производной. Площадь, ограниченную кривыми $y = y(x)$ и $y = y(x) + h(x)$ на плоскости (x, y) , обозначим Δs , а площадь, ограниченную соответствующими кривыми $v = v(u)$ и $v = v(u) + \eta(u)$, обозначим $\Delta \sigma$. Отношение этих площадей стремится к функциональному детерминанту

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix},$$

не равному, по условию, нулю.

Если

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{J[y + h] - J[y]}{\Delta s} = 0,$$

то и

$$\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{J_1[v + \eta] - J_1[v]}{\Delta \sigma} = 0.$$

Итак, если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, то функция $v(u)$ удовлетворяет уравнению (7). Иначе говоря, свойство кривой быть (или не быть) экстремалью не зависит от выбора системы координат.

Свойство инвариантности уравнения Эйлера может быть использовано следующим образом. При решении уравнения Эйлера часто

приходится пользоваться той или иной заменой переменных. В силу свойства инвариантности эту замену можно делать не в уравнении, а прямо в интеграле, представляющем рассматриваемый функционал, а затем уже для нового интеграла писать уравнение Эйлера.

Пусть, например, ищутся экстремали функционала

$$J = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi, \quad (8)$$

где $r = r(\varphi)$. Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 0. \quad (9)$$

Замена

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

переводит (8) в интеграл вида

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

которому отвечает уравнение Эйлера

$$y'' = 0$$

с общим решением

$$y = \alpha x + \beta.$$

Следовательно, общее решение уравнения (9) есть

$$r \sin \varphi = \alpha r \cos \varphi + \beta.$$

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

В этой и следующей главах мы рассмотрим некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления, рассматривавшейся нами в гл. I.

В § 7 изложена простейшая задача для функционалов с несколькими неизвестными функциями. В § 8—10 рассматриваются различные обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. При желании читатель может приступить к чтению гл. III сразу же после изучения § 7.

§ 7. Задача с закрепленными концами в случае n неизвестных функций

Рассмотрим функционал

$$J = \int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx, \quad (1)$$

зависящий от n функций y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), где функции y_i удовлетворяют граничным условиям

$$y_i(a) = A, \quad y_i(b) = B \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

и установим необходимые условия экстремума для такого функционала. Иными словами, ищется экстремум функционала, определенного на некоторой совокупности кривых, соединяющих две фиксированных точки в $n+1$ -мерном пространстве. Примером подобных задач является отыскание геодезических, т. е. кратчайших, линий между двумя точками некоторого многообразия. Та же самая задача возникает и в геометрической оптике при нахождении пути, по которому распространяется свет в неоднородной среде; согласно принципу Ферма свет идет от точки A в точку B по такому пути, чтобы время прохождения было наименьшим.

Найдем необходимые условия экстремума функционала (1). Для этой цели вычислим его вариацию. Заменив функции $y_i(x)$ близкими к ним функциями $y_i(x) + h_i(x)$, где $h_i(a) = h_i(b) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b F(x, y_i + h_i, y_i' + h_i') dx - \int_a^b F(x, y_i, y_i') dx = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i + F_{y_i'} h_i') dx + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие означает члены порядка выше первого, а выписанные члены представляют собой главную линейную часть ΔJ , т. е. вариацию рассматриваемого функционала.

Таким образом,

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i + F_{y_i'} h_i') dx.$$

Все вариации $h_i(x)$ независимы между собой, и мы можем, например, одну из них выбрать произвольно (с соблюдением граничных условий), а все остальные взять равными нулю. Поэтому из равенства

$$\delta J = 0,$$

представляющего собой необходимое условие экстремума, вытекает, что

$$\int_a^b (F_{y_i} h_i + F_{y_i'} h_i') dx = 0 \quad (3)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Воспользовавшись леммой 2 § 3, получаем систему дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Итак, для того чтобы кривая

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

доставляла экстремум функционалу

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx,$$

необходимо, чтобы функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ удовлетворяли уравнениям Эйлера (4). Система (4) состоит из n уравнений второго

порядка, следовательно, ее общее решение содержит $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий (2).

Примеры. 1. Распространение света в неоднородной среде. Пусть пространство заполнено оптически неоднородной средой, так что в каждой точке пространства скорость распространения света есть некоторая функция $v(x, y, z)$ от координат этой точки. Согласно уже упоминавшемуся принципу Ферма свет идет из одной точки в другую по той кривой, для которой время прохождения света будет наименьшим. Если линия, соединяющая две точки A и B , задана уравнениями

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

то время, за которое свет проходит вдоль нее, равно

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx}{v(x, y, z)}.$$

Написав для этого функционала систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

получаем дифференциальные уравнения линий распространения света.

2. Геодезические линии. Рассмотрим некоторую поверхность, заданную векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v). \quad (5)$$

Линия минимальной длины, соединяющая две точки и лежащая на данной поверхности, называется геодезической линией. Найдем уравнения геодезических линий. Их можно, очевидно, получить как уравнения Эйлера, соответствующие некоторой вариационной задаче, а именно задаче о нахождении кратчайшего расстояния (считая по поверхности) между двумя точками, лежащими на данной поверхности.

Линия, лежащая на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, может быть задана уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Длина ее отрезка между точками, отвечающими значениям t_1 и t_2 параметра t , равна

$$J[u, v] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt, \quad (6)$$

где E , F и G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (5), т. е.

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right), \quad F = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right), \quad G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right).$$

Напишем для функционала (6) уравнения Эйлера. Получаем

$$\frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{\sqrt{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2(Eu' + Fv')}{\sqrt{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}} = 0,$$

$$\frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{\sqrt{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2(Fu' + Gv')}{\sqrt{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}} = 0.$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера круглый цилиндр

$$\mathbf{r} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z) \quad (7)$$

и найдем геодезические линии на этом цилиндре. Здесь роль параметров u и v играют переменные φ и z . Первая квадратичная форма цилиндра (7) имеет следующие коэффициенты:

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Следовательно, уравнения геодезических для этой поверхности будут

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2 \varphi'}{\sqrt{a^2 \varphi'^2 + z'^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{z'}{\sqrt{a^2 \varphi'^2 + z'^2}} = 0,$$

т. е.

$$\frac{a^2 \varphi'}{\sqrt{a^2 \varphi'^2 + z'^2}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{a^2 \varphi'^2 + z'^2}} = C_2.$$

Деля одно из этих уравнений на другое, получим

$$\frac{dz}{d\varphi} = C.$$

Решение этого уравнения

$$z = C\varphi + A$$

представляет собой двупараметрическое семейство винтовых линий, лежащих на рассматриваемом цилиндре.

Понятие геодезической может быть определено не только для поверхностей, но и для многообразий большего числа измерений. Нахождение геодезических линий n -мерного многообразия приводится, очевидно, к решению вариационной задачи для функционала, зависящего от n функций.

Замечание. Выше мы для каждого функционала

$$\int F(x, y_i, y'_i) dx$$

получили отвечающую ему вполне определенную систему уравнений Эйлера. Поставим обратную задачу: пусть заданы левые части уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'}.$$

Требуется по ним восстановить функцию $F(x, y, y')$, определяющую функционал (1). Такая задача решается неоднозначно. Действительно, если мы прибавим к выражению, стоящему под знаком интеграла в функционале (1), полный дифференциал какой-либо функции, т. е. прибавим к F выражение вида

$$\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i', \quad \text{где } \Phi = \Phi(x, y_1, \dots, y_n), \quad (8)$$

то соответствующие уравнения Эйлера при этом не изменятся, так как выражение

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y_i}$$

(рассматриваемое как функция от x, y_i, y_i') тождественно равно нулю. В этом легко убедиться, подставив сюда вместо ψ выражение (8). Сам функционал (1) от добавления к нему какого-либо полного дифференциала изменится, очевидно, на некоторую постоянную величину*).

§ 8. Вариационные задачи в параметрической форме

До сих пор мы считали, что кривые, на которых определен тот или иной функционал, заданы своими явными уравнениями, например, в плоском случае уравнениями вида

$$y = y(x). \quad (1)$$

Часто, однако, удобнее считать, что эти кривые заданы в параметрической форме. Фактически мы уже встречались с этим положением в последнем примере предыдущего параграфа, рассматривая

*) Из сказанного выше видно, что две различные функции F_1 и F_2 могут определять один и тот же функционал, т. е. может оказаться, что

$$\int_a^b F_1(x, y_i, y_i') dx = \int F_2(x, y_i, y_i') dx$$

для всех допустимых кривых, хотя $F_1(x, y_i, z_i) \not\equiv F_2(x, y_i, z_i)$. Если говорить о восстановлении функционала (а не функции F) по левым частям уравнений Эйлера, то этот функционал находится однозначно с точностью до произвольного постоянного слагаемого (аналогично тому, как функция n переменных восстанавливается по ее полному дифференциалу с точностью до произвольного постоянного слагаемого).

геодезические линии на поверхности. В этом параграфе мы, ограничиваясь простейшей задачей вариационного исчисления, перенесем полученные ранее результаты на случай параметрического задания кривых.

Предположим, что в функционале

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2)$$

мы хотим аргументом считать кривую, заданную не в виде

$$y = y(x),$$

а в параметрической форме

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (3)$$

Тогда функционал (2) запишется в виде

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \quad (4)$$

(точка означает дифференцирование по t), т. е. в виде функционала, зависящего от двух неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$.

Функция Φ , стоящая здесь под знаком интеграла, положительно однородна первой степени относительно $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ *) и не содержит t явно.

Обратно, пусть дан функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt,$$

где подинтегральная функция Φ не зависит от t явно и является положительно однородной первой степени относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Покажем, что значение такого функционала зависит лишь от кривой (в плоскости (x, y)), определяемой параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а не от самих функций $x(t)$ и $y(t)$, т. е. если перейти от t к какому-либо новому параметру τ , положив

$$t = \chi(\tau),$$

то будет иметь место равенство

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.$$

*) То есть она удовлетворяет условию

$$\Phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

при всяком $k > 0$.

Действительно, воспользовавшись однородностью функции Φ по $\dot{x}$ и $\dot{y}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi \left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) d\tau &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi \left(x, y, \dot{x} \frac{dt}{d\tau}, \dot{y} \frac{dt}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt, \end{aligned}$$

что и требовалось. Итак, мы получили следующий результат.

Для того чтобы значения функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

зависели только от кривой, определяемой в плоскости (x, y) параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, но не от выбора ее параметрического представления, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральная функция Φ не зависела от t явно, а по отношению к $\dot{x}$ и $\dot{y}$ была бы положительно однородной функцией первой степени однородности.

Если мы функционал (2) приведем с помощью того или иного параметрического представления кривой $y = y(x)$ к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} F \left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \dot{x} dt = \int \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt,$$

то для функционала (2) мы можем написать два уравнения Эйлера:

$$\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0, \quad \Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{y}} = 0.$$

Эти два уравнения должны быть эквивалентны одному уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

отвечающему функционалу (2), и следовательно, не могут быть независимы. Действительно, легко проверить, что они связаны тождественным соотношением

$$\dot{x} \left(\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} \right) + \dot{y} \left(\Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{y}} \right) = 0.$$

К этому вопросу мы еще вернемся в гл. VII.

Задача. Написать условия независимости от выбора параметра для функционала $\int F(t, y_i(t), y'_i(t)) dt$, т. е. для функционала, заданного на кривых n -мерного пространства.

§ 9. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

До сих пор мы рассматривали функционалы вида

$$\int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx,$$

зависящие от y_i и их первых производных. В ряде задач, например в теории упругости, встречаются функционалы, для которых подынтегральное выражение содержит производные от искомой функции не только первого, но и более высоких порядков. Изложенные выше методы нахождения экстремумов функционалов (в рамках необходимых условий) могут быть перенесены без существенных изменений на этот более общий случай. Для простоты записи мы ограничимся случаем одной неизвестной функции.

Итак, рассмотрим функционал вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \quad (1)$$

и поставим для него следующую задачу.

Среди всех кривых $y = y(x)$, принадлежащих пространству D_n на отрезке $[a, b]$ (см. § 2) и удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} y(a) &= A_0, & y'(a) &= A_1, & \dots, & y^{(n-1)}(a) &= A_{n-1}, \\ y(b) &= B_0, & y'(b) &= B_1, & \dots, & y^{(n-1)}(b) &= B_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

найти ту, вдоль которой интеграл (1) принимает экстремальное значение.

При решении этой задачи будем исходить из общей теоремы, установленной в § 3 гл. I: *для того чтобы функционал $J[y]$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его вариация обращалась в нуль.*

Вычислим вариацию функционала (1), понимая под вариацией функционала (1) главную часть его приращения, линейную относительно $h(x)$ (т. е. вариации $y(x)$) и ее производных $h'(x), \dots, h^{(n-1)}(x)$. Для того чтобы провариированная функция $y(x) + h(x)$ тоже удовлетворяла граничным условиям (2), нужно, очевидно, предположить, что

$$\left. \begin{aligned} h(a) &= h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0, \\ h(b) &= h'(b) = \dots = h^{(n-1)}(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} J[y+h] - J[y] &= \int_a^b [F(x, y+h, y'+h', \dots, y^{(n)}+h^{(n)}) - \\ &\quad - F(x, y, y', \dots, y^{(n)})] dx = \\ &= \int_a^b (F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)}) dx + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие означает совокупность членов, имеющих порядок выше первого относительно $h, h', \dots, h^{(n)}$.

Следовательно, выражение

$$\int_a^b (F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)}) dx$$

и есть вариация функционала (1). Таким образом, для экстремума необходимо

$$\delta J = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)}) dx = 0. \quad (4)$$

Отсюда с помощью интегрирования по частям, используя граничные условия (3) для $h(x)$, получаем

$$\delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) h(x) dx = 0 \quad (5)$$

для любой функции $h(x)$, имеющей n непрерывных производных и удовлетворяющей условиям (3).

В силу леммы 1 § 3 отсюда следует, что

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется уравнением Эйлера — Пуассона. Оно представляет собой дифференциальное уравнение порядка $2n$ и, следовательно, его общее решение содержит $2n$ произвольных постоянных. Значения этих постоянных могут быть определены из краевых условий (2).

Замечание. Приведенный выше вывод уравнения Эйлера — Пуассона не вполне строг, так как переход от (4) к (5) с помощью интегрирования по частям предполагает существование производных

$$\frac{d}{dx} F_{y'}, \dots, \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}. \quad (7)$$

Можно, однако, несколько усложнив рассуждения, доказать, что из (4) вытекает уравнение (6) и без этих дополнительных предположений (при этом само существование производных (7) также доказывается, ср. с леммой 2 § 3).

§ 10. Изопериметрическая задача. Условный экстремум

1. В простейшей задаче вариационного исчисления, которую мы рассматривали в гл. I, класс допустимых линий, помимо тех или иных требований гладкости, определялся условиями, задаваемыми на концах этих линий. Однако ряд приложений вариационного исчисления приводит к задачам, в которых на допустимые кривые, кроме граничных условий, накладываются условия совсем иного типа. Рассмотрим в качестве примера так называемую изопериметрическую задачу. Эта задача формулируется следующим образом.

Среди всех кривых, удовлетворяющих условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, на которых функционал

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx \quad (1)$$

принимает заданное значение I , найти ту, для которой другой функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2)$$

достигает экстремума *).

При решении этой задачи мы предположим, что функции G и F , определяющие функционалы (1) и (2), имеют непрерывные производные первого и второго порядков при $a \leq x \leq b$ и при произвольных значениях y и y' . Кроме того, мы предположим, что искомая кривая не является экстремалью функционала (1). Решение поставленной задачи дает следующая

Теорема **) 1. Если кривая $y = y(x)$ дает экстремум интегралу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

*) Первоначально под изопериметрической задачей понималась следующая частная задача: среди всех замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти ту, которая охватывает наибольшую площадь. Отсюда и само название «изопериметрическая задача» (т. е. задача с фиксированным периметром).

**) Читатель легко обнаружит аналогию между формулируемой ниже теоремой и известным из анализа методом множителей Лагранжа для условных экстремумов функций нескольких переменных.

удовлетворяет условиям

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx = l, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

и не является экстремалью функционала (1), то существует такая постоянная λ , что эта кривая $y(x)$ является экстремалью функционала

$$\int_a^b (F + \lambda G) dx.$$

Доказательство. Пусть кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу $J[y]$ при условии, что $K[y] = l$. Возьмем в интервале $[a, b]$ две произвольные точки x_1 и x_2 и придадим $y(x)$ приращение $h(x) = \delta_{x_1} y + \delta_{x_2} y$, отличное от нуля лишь в окрестностях этих точек. Соответствующее приращение ΔJ функционала J можно представить в виде *)

$$\Delta J = \left\{ \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right]_{x=x_1} + \epsilon_1 \right\} \sigma_1 + \left\{ \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right]_{x=x_2} + \epsilon_2 \right\} \sigma_2, \quad (3)$$

где

$$\sigma_1 = \int_a^b \delta_{x_1} y dx, \quad \sigma_2 = \int_a^b \delta_{x_2} y dx$$

и $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ при $\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0$.

Потребуем теперь, чтобы провариированная кривая

$$y_1(x) = y(x) + \delta_{x_1} y + \delta_{x_2} y$$

удовлетворяла условию

$$K[y_1] = K[y].$$

ΔK можно представить в виде, аналогичном (3). Таким образом, получаем

$$\Delta K = K[y_1] - K[y] =$$

$$= \left\{ \left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x_1} + \epsilon'_1 \right\} \sigma_1 + \left\{ \left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x_2} + \epsilon'_2 \right\} \sigma_2 = 0, \quad (4)$$

где $\epsilon'_1, \epsilon'_2 \rightarrow 0$ при $\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0$. Выберем теперь точку x_2 так, что

$$\left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x=x_2} \neq 0.$$

*) См. замечание на стр. 36.

Такая точка существует, так как по условию $y = y(x)$ не является экстремалью функционала K . При таком выборе точки x_2 условию (4) можно придать вид

$$\sigma_2 = - \left\{ \frac{\left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x=x_1}}{\left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x=x_2}} + \varepsilon' \right\} \sigma_1, \quad (5)$$

где $\varepsilon' \rightarrow 0$ при $\sigma_2 \rightarrow 0$.

Положив

$$\lambda = - \frac{\left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right]_{x=x_2}}{\left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x=x_2}}, \quad (6)$$

и подставив в формулу (3) для ΔJ вместо σ_2 выражение (5), получим

$$\Delta J = \left\{ \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right]_{x=x_1} + \lambda \left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right]_{x=x_1} \right\} \sigma_1 + \varepsilon \sigma_1.$$

Первое слагаемое справа представляет собой главную линейную относительно $h(x)$ часть ΔJ , т. е. вариацию функционала J . Так как равенство вариации нулю есть необходимое условие экстремума и так как σ_1 отлично от нуля, то

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) = 0, \quad (7)$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат используется при решении той или иной изопериметрической задачи следующим образом. Составив дифференциальное уравнение (7), находим его общее решение, которое будет содержать параметр λ и еще две произвольные постоянные. Эти три величины определяются из граничных условий $y(a) = A$, $y(b) = B$ и условия $K[y] = l$.

Все сказанное выше непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций и нескольких связей вида (1). Именно пусть ищется экстремум функционала

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx \quad (8)$$

при условиях

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

и

$$\int_a^b G_j(x, y_i, y'_i) dx = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (10)$$

В этом случае необходимым условием экстремума будет

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i'} \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right) \right\} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

$2n$ произвольных постоянных, входящих в решение этой системы, и значения k параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ определяются из граничных условий (9) и условий (10). Доказательство для этого общего случая по существу не отличается от изложенного выше, и мы не будем его приводить.

2. В изопериметрической задаче дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции $y_1, \dots, y_n$, имеют вид (10), т. е. задаются с помощью функционалов. Сейчас мы рассмотрим задачу несколько иного типа, а именно:

Найти экстремум функционала

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx,$$

причем допустимые функции удовлетворяют граничным условиям

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и k условиям связи вида

$$g_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (12)$$

Иначе говоря, функционал (8) рассматривается здесь не на всех кривых, удовлетворяющих граничным условиям (9), а только на тех из них, которые лежат на некотором $n - k$ -мерном многообразии.

Эта вариационная задача называется *задачей Лагранжа*, или задачей на условный экстремум.

Ограничимся для простоты записи случаем $n = 2, k = 1$, т. е. будем искать экстремум функционала

$$\int_a^b F(x, y, z, y', z') dx \quad (13)$$

на пространственных кривых

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

принадлежащих фиксированной поверхности

$$g(x, y, z) = 0. \quad (14)$$

Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 2. Если кривая

$$y = y(x), \quad z = z(x) \quad (15)$$

дает условный экстремум функционалу (13) в классе кривых, лежащих на поверхности

$$g(x, y, z) = 0,$$

причем ни в одной ее точке g_y и g_z не обращаются в нуль одновременно, то существует такая функция $\lambda(x)$, что кривая (15) является экстремалью функционала

$$\int_a^b (F + \lambda(x) g) dx, \quad (16)$$

т. е. удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$F_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad F_z + \lambda g_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

— кривая, реализующая экстремум функционала (13) при указанных условиях, а $y = \bar{y}(x)$, $z = \bar{z}(x)$ — близкая к ней допустимая кривая*). Пусть, далее, функции

$$\delta y(x) = \bar{y} - y \quad \text{и} \quad \delta z(x) = \bar{z} - z$$

отличны от нуля лишь в малой окрестности (x_0, x_1) некоторой точки $x^{(1)}$, лежащей между a и b . Положим

$$\sigma_1 = \int \delta y dx, \quad \sigma_2 = \int \delta z dx.$$

Так как $y = \bar{y}(x)$, $z = \bar{z}(x)$ — допустимая кривая, то

$$\begin{aligned} \int_a^b [g(x, \bar{y}, \bar{z}) - g(x, y, z)] dx &= \int_{x_0}^{x_1} (\bar{g}_y \delta y + \bar{g}_z \delta z) dx = \\ &= g_y|_{x=x^{(1)}} \sigma_1 + g_z|_{x=x^{(1)}} \sigma_2 + \varepsilon_1 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где ε_1 — величина выше первого порядка малости по сравнению с σ_1 и σ_2 .

*) Существование таких кривых вытекает из теоремы о неявных функциях. Действительно, если, например, в данной точке $g_z \neq 0$, то в окрестности этой точки z есть функция от x и y , поэтому, задав в этой окрестности y как функцию x , мы можем определить из уравнения $g(x, y, z) = 0$ и z как функцию x .

Предположим, что из коэффициентов при σ_1 и σ_2 хотя бы один, например g_z , отличен от нуля. Тогда

$$\sigma_2 = -\frac{g_y}{g_z} \sigma_1 + \varepsilon_2.$$

Воспользовавшись равенством (18), мы можем представить приращение

$$\Delta J = \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \Big|_{x=x^{(1)}} \sigma_1 + \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \Big|_{x=x^{(1)}} \sigma_2 + \varepsilon_3$$

функционала (13) в виде

$$\Delta J = \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \frac{g_y}{g_z} \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \right]_{x=x^{(1)}} \sigma_1 + \varepsilon_4$$

(ε_2 , ε_3 , ε_4 — величины порядка выше первого относительно σ_1). Для того чтобы имел место экстремум, необходимо, чтобы главная линейная часть этого приращения равнялась нулю. Таким образом получаем

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \frac{g_y}{g_z} \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) = 0,$$

или

$$\frac{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}}{g_y} = \frac{F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}}{g_z}. \quad (19)$$

Вдоль рассматриваемой кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$ общее значение отношений (19) есть некоторая функция от x . Обозначив ее $\lambda(x)$, мы и приходим к уравнениям (17). Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим без доказательства, что установленная выше теорема остается в силе и в том случае, когда за допустимые линии принимаются гладкие пространственные кривые, удовлетворяющие дифференциальному уравнению *)

$$g(x, y, y', z, z') = 0. \quad (20)$$

Точнее говоря, если кривая γ_0 дает экстремум функционалу J при условии (20) и если вдоль γ_0 производные g_y и g_z не обращаются в нуль одновременно, то существует такая функция $\lambda(x)$, что γ_0 является интегральной кривой системы

$$\Phi_y - \frac{d}{dx} \Phi_{y'} = 0, \quad \Phi_z - \frac{d}{dx} \Phi_{z'} = 0,$$

*) В механике условия вида (20), т. е. содержащие производные, называются неголономными связями, а условия вида (14) — голономными связями.

где

$$\Phi = F + \lambda g.$$

Замечание 2. Задачу Лагранжа можно рассматривать в некотором смысле как предельный случай изопериметрической задачи. Действительно, если мы предположим, что условие (14) выполняется не всюду, а лишь в некоторой фиксированной точке

$$g(x_0, y, z) = 0,$$

то мы получим условие, левую часть которого можно рассматривать как функционал от y, z , т. е. условие того типа, который участвует в изопериметрической задаче. Таким образом, условие (14) можно рассматривать как совокупность бесконечного множества условий типа функционала. В изопериметрической задаче, как мы видели, число множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ равно числу условий связи. В задаче Лагранжа, в соответствии с только что сказанным, появляется функция $\lambda(x)$, т. е. свой множитель λ в каждой точке x .

Примеры 1. Найти кривую в верхней полуплоскости, проходящую через точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, имеющую заданную длину $2l$ ($l > a$) и охватывающую вместе с отрезком $[-a, a]$ максимальную площадь.

Решение. Мы ищем функцию $y = y(x)$, для которой

$$L(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = 2l, \quad y(-a) = y(a) = 0,$$

а интеграл $J(y) = \int_{-a}^a y dx$ принимает максимальное значение. Мы имеем,

таким образом, изопериметрическую задачу. В соответствии с изложенным выше составляем функционал

$$J(y) + \lambda L(y) = \int_{-a}^a (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx$$

и пишем для него уравнение Эйлера

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0;$$

отсюда находим

$$x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

Интегрируя, получаем уравнение $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$ семейства окружностей. Значения C_1 , C_2 и λ определяются из условий $y(-a) = y(a) = 0$ и условия $L(y) = 2l$.

2. Из всех кривых, лежащих на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и проходящих через две заданные точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) , найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Решение. Длина кривой записывается интегралом

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx.$$

Составляем вспомогательный функционал

$$\int_{x_0}^{x_1} (V \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(x^2 + y^2 + z^2)) dx$$

и пишем соответствующие уравнения Эйлера

$$2\lambda(x) \cdot y - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

$$2\lambda(x) \cdot z - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

Решая эти уравнения, мы получим семейство линий, зависящее от четырех постоянных, значения которых определяются из граничных условий $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ и $y(x_1) = y_1$, $z(x_1) = z_1$.

Замечание 3. Задачу на нахождение условного экстремума функции нескольких переменных можно, как известно, свести к задаче на безусловный экстремум, выразив переменные, на которые наложены связи, через соответствующее число независимых переменных. Аналогичным образом обстоит дело и в вариационных задачах. Например, задачу о нахождении геодезических на некоторой поверхности можно рассматривать как задачу на условный экстремум (пример 2), но можно, представив координаты x , y , z как функции двух параметров, свести эту задачу к отысканию безусловного экстремума (см. конец § 7).

ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА. ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

§ 11. Основная формула для вариации функционала

Выведем прежде всего общую формулу для вариации функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx.$$

Начнем с того случая, когда рассматриваемый функционал зависит лишь от одной функции, т. е. имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad (1)$$

при этом, однако, в отличие от простейшей задачи, мы будем считать, что концы тех кривых, на которых определен этот функционал, могут сдвигаться произвольным образом. Все рассматриваемые кривые мы будем предполагать гладкими, а расстоянием между двумя кривыми $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ мы назовем величину

$$\rho(y, \bar{y}) = \max |y - \bar{y}| + \max |y' - \bar{y}'| + \rho(p_0, \bar{p}_0) + \rho(p_1, \bar{p}_1), \quad (2)$$

где p_0 , $\bar{p}_0$ и p_1 , $\bar{p}_1$ — левые, соответственно правые концы кривых y и $\bar{y}$. Так как функции y и $\bar{y}$ определены, вообще говоря, на разных интервалах, то для того чтобы формула (2) всегда имела смысл, эти кривые нужно продолжить на интервал, содержащий те интервалы, на которых определены y и $\bar{y}$, проведя, например, для этого касательные в конечных точках кривых (рис. 4).

Определим вариацию функционала (1) как выражение, линейное относительно приращения h функции y и относительно приращений координат концов и отличающееся от полного приращения функционала $J[y]$ на величину выше первого порядка малости по сравнению с расстоянием между функциями y и $y + h$.

Обозначим координаты концов кривой $y(x)$ через (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , а координаты концов провариированной кривой $y+h$ через $(x_0+\delta x_0, y_0+\delta y_0)$ и $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ соответственно.

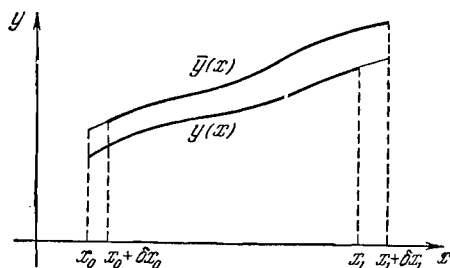


Рис. 4.

Найдем явное выражение для вариации. Для этого сперва найдем приращение функционала $J[y]$. Имеем *)

$$\begin{aligned} J[y+h] - J[y] &= \\ &= \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, y'+h') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y')] dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, y'+h') dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+h, y'+h') dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим отсюда, что

$$\begin{aligned} J[y+h] - J[y] &\sim \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx + \\ &+ F(x, y, y')|_{x=x_1}\delta x_1 - F(x, y, y')|_{x=x_0}\delta x_0 = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + F_{y'} h|_{x_0}^{x_1} + F|_{x=x_1}\delta x_1 - F|_{x=x_0}\delta x_0. \end{aligned}$$

*) Нас не должно смущать, что в подынтегральные выражения здесь входят функции, определенные на разных интервалах. Мы ведь условились продолжать их, например, с помощью линейной экстраполяции!

где $\sim$ означает равенство с точностью до величин порядка выше первого относительно $\rho(y, y+h)$. Но, как это ясно из рисунка 4,

$$h(x_0) \sim \delta y_0 - y' \delta x_0; \quad h(x_1) \sim \delta y_1 - y' \delta x_1 \quad (3)$$

(где $\sim$ опять-таки означает равенство с точностью до бесконечно малых порядка выше первого). Поэтому окончательно

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + \\ & + (F - F_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 - (F - F_{y'} y')|_{x=x_0} \delta x_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы получили общую формулу вариации для функционала, зависящего от одной функции. Она содержит в качестве частных случаев формулу вариации для задачи со свободными концами (в этом случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$) и формулу вариации для простейшей задачи (в этом случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ и $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$). Найдем теперь вариацию функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx, \quad (5)$$

зависящего от n функций $y_1, \dots, y_n$, причем опять-таки для этих функций никаких условий на концах ставить не будем. Поскольку всякую систему n функций можно интерпретировать как кривую в $n+1$ -мерном пространстве, функционал (5) можно рассматривать как определенный на некотором множестве кривых в пространстве размерности $n+1$.

Вариацию функционала (5) мы определим как главную линейную (относительно всех приращений $h_i(x)$ функций $y_i(x)$) часть приращения функционала. Найдем сперва это приращение:

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y_i + h_i, y'_i + h'_i) dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y_i + h_i, y'_i + h'_i) - F(x, y_i, y'_i)] dx + \\ & + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y_i + h_i, y'_i + h'_i) dx - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F(x, y_i + h_i, y'_i + h'_i) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Главную линейную (относительно h_i) часть этого приращения можно, воспользовавшись формулой Тейлора, представить в виде

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{i=1}^n F_{y_i} h_i + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} h'_i \right] dx + F|_{x=x_1} \delta x_1 - F|_{x=x_0} \delta x_0. \quad (7)$$

Интегрируя здесь слагаемые, содержащие h'_i , по частям, получим, что приращение функционала (5) с точностью до бесконечно малых порядка выше первого равно

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) h_i(x) dx + F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} h_i \Big|_{x=x_1} - \\ - F \Big|_{x=x_0} \delta x_0 - \sum_{i=1}^n F_{y'_i} h_i \Big|_{x=x_0}.$$

Обозначим δy_{i0} приращение координаты y_i на одном из концов кривой, а δy_{i1} — приращение координаты y_i на другом конце. Аналогично случаю функционала, зависящего от одной функции, получаем

$$\delta y_{i0} \sim h_i(x_0) + y'_i(x_0) \delta x_0,$$

$$\delta y_{i1} \sim h_i(x_1) + y'_i(x_1) \delta x_1.$$

Поэтому мы можем окончательно написать

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) h_i(x) dx + \\ + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} + \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - \\ - \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_0} \delta y_{i0} - \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_0} \delta x_0,$$

или, короче,

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) h_i(x) dx + \\ + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \delta y_i \Big|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1}, \quad (8)$$

где символ $\Big|_{x_0}^{x_1}$ показывает, что нужно взять разность между значениями соответствующей величины в конечной точке дуги и в начальной.

Это выражение линейно относительно величин h_i , δy_i , δx и отличается на бесконечно малую порядка выше первого от приращения функционала, т. е. представляет собой его вариацию. Выражение (8) и представляет собой ту основную формулу вариации функционала (5), которую мы хотели получить.

Введем следующие обозначения:

$$F_{y'_i} = p_i; -F + \sum y'_i F_{y'_i} \equiv -F + \sum y'_i p_i = H. \quad (9)$$

В этих новых обозначениях основная формула (8) для вариации функционала запишется следующим образом:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{y_i} - \frac{dp_i}{dx} \right) h_i(x) dx + \left(\sum p_i \delta y_i - H \delta x \right) \Big|_{x_0}^{x_1}. \quad (10)$$

Заметим, что если детерминант, составленный из производных

$$F_{y'_i y'_k}$$

отличен от нуля, то величины y'_i можно выразить из равенств

$$F_{y'_i} = p_i$$

через p_i и y_i , и мы можем в рассматриваемом функционале перейти (локально) от переменных $x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n$ и функции F к переменным $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ и функции H . Переменные $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ и H называются *каноническими переменными*. Они играют важную роль в самых разных вопросах вариационного исчисления, и мы будем еще неоднократно с ними встречаться.

Пусть кривая, соединяющая точки $(x_0, y_0^0, \dots, y_n^0)$ и $(x, y'_1, \dots, y'_n)$, является экстремалью. Тогда в выражении для вариации интегральный член обращается в нуль, и мы получаем

$$\delta J = \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \delta y_i + \left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (11)$$

или, в других обозначениях,

$$\delta J = \left(\sum p_i \delta y_i - H \delta x \right) \Big|_{x_0}^{x_1}. \quad (12)$$

Равенство

$$\delta J = 0$$

является необходимым условием экстремума для функционала (5) при любых граничных условиях.

В следующих двух параграфах мы применим полученную выше общую формулу вариации к исследованию некоторых типов вариационных задач.

§ 12. Задача с подвижными концами

В простейшей задаче, которой мы в основном до сих пор занимались в качестве граничных условий, определяющих класс допустимых кривых, берутся условия закрепления концов. Сейчас мы рассмотрим задачу иного типа. Чтобы не усложнять дело, ограничимся случаем одной неизвестной функции.

Пусть дан функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

определенный на гладких кривых, концы которых p_0 и p_1 лежат на двух фиксированных линиях $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Требуется найти экстремум такого функционала.

Примером подобной задачи может служить нахождение расстояния между двумя линиями.

Воспользуемся тем выражением вариации, которое было получено нами в предыдущем параграфе. При $n = 1$ оно имеет вид

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h(x) dx + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + (F - F_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 - \\ - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 - (F - F_{y'} y')|_{x=x_0} \delta x_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если некоторая кривая дает экстремум рассматриваемому функционалу среди всех допустимых кривых, то она тем более будет давать экстремум и по отношению ко всем кривым, имеющим те же концевые точки. Следовательно, эта кривая должна быть экстремалью, т. е. удовлетворять уравнению Эйлера. Поэтому в выражении (2) первый член обращается в нуль, и мы получаем

$$\begin{aligned} \delta J = F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + (F - F_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 - \\ - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 - (F - F_{y'} y')|_{x=x_0} \delta x_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как (рис. 5)

$$\delta y_1 = \psi' \delta x_1 + \alpha_1, \quad \delta y_0 = \varphi' \delta x_0 + \alpha_0,$$

где α_1 и α_0 — бесконечно малые величины порядка выше первого, то окончательно условие экстремума $\delta J = 0$ можно переписать так:

$$\delta J = (F_{y'} \psi' + F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 - (F_{y'} \varphi' + F - y' F_{y'})|_{x=x_0} \delta x_0 = 0.$$

Так как δx_1 и δx_0 — независимые приращения, то отсюда получаем

$$F_{y'} \psi' + F - y' F_{y'}|_{x=x_1} = 0,$$

$$F_{y'} \varphi' + F - y' F_{y'}|_{x=x_0} = 0,$$

т. е.

$$F + F_{y'}(\psi' - y')|_{x=x_1} = 0,$$

$$F + F_{y'}(\varphi' - y')|_{x=x_0} = 0.$$

Эти граничные условия называются *условиями трансверсальности*.

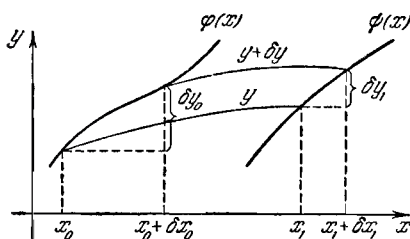


Рис. 5.

Про кривую $y = y(x)$, удовлетворяющую этим условиям, говорят, что она *трансверсальна* кривым $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Итак, для решения вариационной задачи с подвижными концами нужно сперва написать и решить соответствующее уравнение Эйлера, а затем найти значения входящих в его общее решение двух произвольных постоянных из условий трансверсальности.

В вариационных задачах часто встречаются функционалы вида

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4)$$

Для них условия трансверсальности выглядят особенно просто. Действительно, в этом случае

$$F_{y'} = f(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{F y'}{1 + y'^2},$$

и следовательно, условие трансверсальности принимает вид

$$F + F_{y'}(\psi' - y') = \frac{F(1 + y'\psi')}{1 + y'^2} = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{\psi'};$$

аналогично на втором конце

$$y' = -\frac{1}{\varphi'},$$

т. е. для функционалов вида (4) трансверсальность сводится к ортогональности.

Можно рассматривать задачу с подвижными концами и для функционалов, зависящих от нескольких функций, например, в случае двух функций эту задачу можно сформулировать так:

Среди всевозможных кривых, концы которых лежат на двух фиксированных поверхностях $x = \varphi(y, z)$ и $x = \psi(y, z)$, найти ту,

которая дает экстремум функционалу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx.$$

Воспользовавшись общей формулой для вариации (8) (при $n=2$) и проводя те же самые рассуждения, что и в случае одной неизвестной функции, получаем, что функции $y(x)$ и $z(x)$, определяющие искомую кривую, опять-таки должны удовлетворять уравнениям Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0,$$

а в концевых точках должны выполняться условия

$$F_{y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (F - y' F_{y'} - z' F_{z'}) \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$F_{z'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} (F - y' F_{y'} - z' F_{z'}) \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$F_{y'} + \frac{\partial \psi}{\partial y} (F - y' F_{y'} - z' F_{z'}) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

$$F_{z'} + \frac{\partial \psi}{\partial z} (F - y' F_{y'} - z' F_{z'}) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

которые также называются условиями трансверсальности.

§ 13. Случай не гладких экстремалей. Условия Вейерштрасса — Эрдмана

В § 4 мы показали (теорема 2), что экстремаль $y = y(x)$ функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, если производная

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$$

не обращается в нуль. Существуют, однако, вариационные задачи, в которых экстремум достигается на кривой, являющейся лишь кусочно-гладкой. Примером таких задач может служить рассмотренная нами в § 4 задача о нахождении кривой, проходящей через две заданные точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и образующей при своем вращении вокруг оси x поверхность возможно меньшей площади.

Действительно, как уже указывалось в § 4, если две заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) расположены так, что y_0 и y_1 достаточно малы по сравнению с $x_1 - x_0$, то кривая, представляющая собой решение этой задачи, состоит из отрезка (x_0, x_1) на оси x и двух вертикальных отрезков.

Итак, рассмотрим задачу о нахождении экстремума функционала (1), считая, что допустимые кривые удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

и могут иметь излом в некоторой точке c ($a < c < b$). (В силу упоминавшейся выше теоремы 2 § 4 излом возможен лишь там, где $F_{y'y'} = 0$.)

На каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ та кривая, на которой функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

достигает экстремума, удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Представим рассматриваемый функционал в виде суммы двух функционалов

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b F(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^c F(x, y, y') dx + \int_c^b F(x, y, y') dx = J_1[y] + J_2[y] \end{aligned}$$

и вычислим вариацию для каждого из этих двух функционалов в отдельности. На каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ граничные условия состоят в том, что один конец допустимой кривой закреплен, а другой свободен. Поэтому, принимая во внимание уравнение Эйлера, получаем с помощью формулы (3) § 12, что

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= F_{y'}|_{x=c-0} \delta y_1 + (F - y'F_{y'})|_{x=c-0} \delta x_1, \\ \delta J_2 &= -F_{y'}|_{x=c+0} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0} \delta x_1. \end{aligned}$$

Если имеет место экстремум, то

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (F_{y'}|_{x=c-0} - F_{y'}|_{x=c+0}) \delta y_1 + \\ + [(F - y'F_{y'})|_{x=c-0} - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0}] \delta x_1 = 0, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности δy_1 и δx_1 получаем

$$\left. \begin{aligned} F_{y'}|_{x=c-0} - F_{y'}|_{x=c+0} &= 0, \\ (F - y'F_{y'})|_{x=c-0} - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

На каждом из двух отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ экстремаль $y(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. дифференциальному уравнению второго порядка. При решении этих двух уравнений получаются четыре произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий

$$y(a) = A; \quad y(b) = B$$

и условий (*) в точке излома, называемых условиями Вейерштрасса — Эрдмана.

Эти условия выглядят особенно просто, если воспользоваться введенными в § 11 каноническими переменными $p = F_{y'}$ и $H = -F + y'F_{y'}$. Действительно, условия Вейерштрасса — Эрдмана просто означают, что канонические переменные должны быть в точке излома непрерывны.

Условия Вейерштрасса — Эрдмана (*), которым должна удовлетворять экстремаль в точке излома, допускает следующую геометрическую интерпретацию.

Фиксируем x и y и будем на одной из координатных осей откладывать значения y' , а на другой — значения $F(x, y, y')$. Мы получим некоторую кривую, изображающую $F(x, y, y')$ как функцию от y' . Тогда первое из условий (*) означает, что касательные к этой кривой в точках $y'(c-0)$ и $y'(c+0)$ параллельны между собой, а второе из этих условий, которое можно переписать в виде

$$F|_{c-0} - F|_{c+0} = F_{y'}y'|_{c+0}^{c-0},$$

означает, что эти две касательные не только параллельны, но даже совпадают.

Одновременно здесь получается и наглядная интерпретация условия $F_{y'y'} \neq 0$, исключающего возможность излома экстремали. Действительно, если, например, функция F такова, что $F_{y'y'} > 0$, то экстремаль не может иметь излома, так как при этом условии кривая, изображающая зависимость F от y' , выпукла и касательные к ней, проведенные в двух разных точках, не могут совпадать (ср. с теоремой 2 § 4).

Задача. Найти кривую, проходящую через точки $(-1, 0)$ и $(1, 1)$ и дающую минимум функционалу

$$\int_{-1}^1 y^2(1 - y'^2) dx.$$

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

Как было отмечено еще во введении, многие физические закономерности выражаются в экстремальных свойствах некоторых функционалов. В этой главе мы рассмотрим применение методов вариационного исчисления к вопросам классической механики системы конечного числа материальных точек. Мы увидим, например, что траектории некоторой механической системы в фазовом пространстве, описывающие эволюцию этой системы с течением времени, можно находить как экстремали некоторого функционала. С помощью вариационного исчисления можно также указывать те величины, связанные с данной физической системой, которые при эволюции рассматриваемой системы не меняются с течением времени. Этот круг вопросов и составляет основное содержание настоящей главы. В первых параграфах этой главы вводится важное для дальнейшего понятие канонических переменных и излагается приведение уравнений Эйлера к каноническому виду. С содержанием этой главы тесно связано Дополнение I, в котором содержится другой независимый вывод канонических уравнений и уравнения Гамильтона — Якоби, а также их геометрическая интерпретация.

§ 14. Канонический вид уравнений Эйлера. Первые интегралы

1. Уравнения Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad (1)$$

отвечающие функционалу $\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx$, зависящему от n функ-

ций, образуют систему n уравнений второго порядка. Такую систему можно, и притом различными способами, свести к системе $2n$ уравнений первого порядка; например, можно принять $y'_1, \dots, y'_n$ за n новых неизвестных функций и рассматривать систему*)

$$\left. \begin{aligned} F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} &= 0, \\ \frac{dy_i}{dx} &= y'_i, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n$ — неизвестные функции, а x — независимое переменное. Мы получим, однако, для уравнений Эйлера гораздо более удобную и симметричную форму, введя вместо $x, y_1, \dots, y_n$ другую систему переменных — так называемые канонические переменные.

В § 11 при выводе основной формулы вариации функционала мы ввели следующие величины:

$$p_i = F_{y'_i}, \quad H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i. \quad (3)$$

С их помощью мы получили компактное выражение для вариации функционала, а также (§ 13) наглядную интерпретацию условий Вейерштрасса — Эрдмана. Однако особенно ясной становится их роль именно в связи с канонической формой уравнений Эйлера.

Выразив из равенств

$$p_i = F_{y'_i} \quad (4)$$

величины $y'_1, \dots, y'_n$ через $x, y_1, \dots, y_n$ и $p_1, \dots, p_n$, мы можем величины

$$x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$$

принять за новые переменные вместо прежних переменных

$$x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n.$$

Именно эту замену переменных мы и сделаем в уравнениях Эйлера (2). Одновременно функцию $F(x, y_i, y'_i)$, входящую в уравнения Эйлера,

*) Таким образом, здесь (и далее в этой главе) под y'_i будут пониматься новые переменные. Было бы правильнее, чтобы не смущать читателя, вместо y'_i писать z_i . Мы будем, однако, пользоваться общепринятыми обозначениями, а в тех случаях, когда речь будет идти именно о производной некоторой функции y_i , мы будем подчеркивать это, пользуясь обозначением $\frac{dy_i}{dx}$, а не y'_i .

мы выразим через новую функцию $H(x, y_i, p_i)$, связанную с F равенством

$$H = -F + \sum y'_i p_i$$

(здесь y'_i означает соответствующие функции от x, y_i, p_i). Определенная этим равенством функция $H(x, y_i, p_i)$ называется *функцией Гамильтона*, отвечающей данному функционалу

$$\int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx.$$

Переменные x, y_i, p_i, H , связанные со старыми переменными x, y_i, y'_i, F соотношениями (3) и (4), называются каноническими переменными (отвечающими данному функционалу $\int F(x, y_i, y'_i) dx$). Переход от старых переменных к новым возможен, если функциональный детерминант $\frac{D(p_1, \dots, p_n)}{D(y'_1, \dots, y'_n)}$, т. е. детерминант матрицы, составленной из производных

$$\left\| F_{y'_i y'_k} \right\|,$$

отличен от нуля. Мы будем предполагать это условие выполненным *).

Выясним теперь, как преобразуются уравнения Эйлера (2) при переходе к каноническим переменным. Чтобы сделать в уравнениях Эйлера указанную замену, нужно частные производные F_{y_i} (т. е. частные производные от F по y_i , взятые при постоянных $y'_1, \dots, y'_n$) выразить через частные производные H_{y_i} (которые берутся при постоянных значениях $p_i, \dots, p_n$) **).

Непосредственное вычисление этих производных было бы несколько громоздко. Мы избежим длинных выкладок, воспользовавшись выражением дифференциала функции H . При этом в силу независимости (инвариантности) первого дифференциала от выбора независимых переменных, нам нет необходимости помнить о том, перешли мы уже к новым переменным или нет.

*) Следует иметь в виду, что это условие обеспечивает лишь *локальную* разрешимость уравнений $p_i = F_{y'_i}$ относительно $y'_1, \dots, y'_n$, но не га-

рантирует возможности представить $y'_1, \dots, y'_n$ в виде функций от x, y_i, p_i , определенных во всей рассматриваемой области. Таким образом, все наши рассуждения носят *локальный* характер.

**) Обычно употребляемые в анализе обозначения частных производных обладают известным несовершенством: в них не содержатся указания на то, какие именно переменные фиксируются.

Из определения H получаем

$$dH = -dF + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i,$$

т. е.

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} dy'_i + \\ + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (5)$$

Для того чтобы получить отсюда выражения для частных производных функции H , следовало бы выразить dy'_i через x , y_i и p_i . Однако (в этом по существу и состоит важная особенность канонических переменных) в силу равенств

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

члены, содержащие dy'_i в (5), взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (7)$$

Для получения частных производных функции H остается выписать коэффициенты при соответствующих дифференциалах справа. Таким образом,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i.$$

Итак, величины $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ и y'_i выражаются через частные производные функции H по формулам

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad y'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (8)$$

Пользуясь этими выражениями, можно уравнения Эйлера (2) переписать в виде

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (9)$$

Эти $2n$ уравнений первого порядка образуют систему, эквивалентную (2) и называемую *канонической системой уравнений Эйлера* рассматриваемого функционала $\int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx$.

2. Первые интегралы уравнений Эйлера. Напомним, что первым интегралом некоторой системы дифференциальных уравнений называется функция, сохраняющая постоянные значения вдоль каждой интегральной кривой этой системы. Выясним, какие первые интегралы может иметь каноническая система (9) (а следовательно, и эквивалентная ей первоначальная система (2)).

Рассмотрим сначала тот случай, когда функция F , определяющая функционал, не зависит от x явно, т. е. $F(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$. Тогда функция $H = -F + \sum y'_i p_i$ тоже не содержит x явно и, следовательно,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx}. \quad (10)$$

Воспользовавшись каноническими уравнениями Эйлера (9), получаем

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} = 0,$$

откуда

$$H = \text{const}$$

вдоль каждой экстремали*). Таким образом, если F не зависит от x явно, то функция $H(y_i, p_i)$ является первым интегралом уравнений Эйлера**).

Рассмотрим теперь некоторую произвольную функцию вида

$$\Phi(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$$

и выясним, при каких условиях она будет первым интегралом системы (9). При этом мы уже не будем предполагать, что F не зависит от x явно, а рассмотрим общий случай. Вдоль каждой интегральной кривой системы (9) имеем

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right).$$

Выражение

$$[\Phi, H] = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) \quad (11)$$

*) Если H зависит от x , то имеет место формула

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

которая получается таким же рассуждением.

**) См. в § 4 интегрирование уравнения Эйлера для функционала, не зависящего от x .

называется скобкой Пуассона функций Φ и H . Мы получаем следующую формулу:

$$\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, H].$$

Таким образом, для того чтобы $\Phi(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$ была первым интегралом системы уравнений Эйлера (9), необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона

$$[\Phi, H]$$

была тождественно равна нулю*).

Если же не только H , но и Φ может явно зависеть от x , то справедлива, как легко проверить, следующая формула:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H].$$

§ 15. Преобразование Лежандра. Канонические преобразования

Рассмотрим еще один метод приведения уравнений Эйлера к каноническому виду, отличный от изложенного в предыдущем параграфе. Идея этого нового вывода состоит в том, что рассматриваемая вариационная задача заменяется другой, ей эквивалентной и такой, что уравнения Эйлера для этой новой задачи совпадают с каноническими уравнениями Эйлера для первоначальной задачи.

1. Сначала рассмотрим некоторые соображения, относящиеся к задаче о нахождении экстремума функции конечного числа переменных.

Начнем со случая одного переменного. Пусть ищется экстремум (скажем, минимум) функции $t = f(\xi)$, причем $f(\xi)$ выпукла, т. е.

$$f''(\xi) > 0. \quad (1)$$

Введем новую независимую переменную p (называемую тангенциальной координатой), положив

$$p = f'(\xi) **). \quad (2)$$

*) Так как в силу теоремы существования через каждую точку $(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$ проходит интегральная кривая системы (9), из того, что $[\Phi, H] = 0$, вдоль каждой интегральной кривой действительно следует, что $[\Phi, H] \equiv 0$.

**) Таким образом, за независимую переменную принимается угловой коэффициент касательной, проходящей через данную точку кривой. Если кривая выпукла, то точка на ней определяется по угловому коэффициенту касательной однозначно (см. рис. 6). То же самое верно, конечно, и для вогнутой кривой (т. е. такой, у которой всюду $f''(\xi) < 0$).

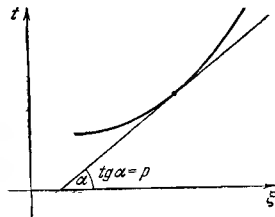


Рис. 6.

Так как, по условию, $\frac{dp}{d\xi} = f''(\xi) \neq 0$, то из (2) можно выразить ξ через p . Введем теперь новую функцию

$$H(p) = -f(\xi) + p\xi \quad (3)$$

(здесь ξ есть функция от p , определяемая равенством (2)). Преобразование, определяемое формулами (2) и (3), называется *преобразованием Лежандра*. Таким образом, преобразование Лежандра — это переход от переменной и функции

$$\left. \begin{array}{l} \xi, f(\xi) \\ p, H(p). \end{array} \right\} \text{ к переменной и функции}$$

Легко проверить, что из выпуклости $f(\xi)$ вытекает выпуклость $H(p)$. Действительно,

$$dH = -f'(\xi) d\xi + p d\xi + \xi dp = \xi dp,$$

откуда

$$\frac{dH}{dp} = \xi \quad (4)$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2H}{dp^2} = \frac{d\xi}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{d\xi}} = \frac{1}{f''(\xi)} > 0,$$

поскольку $f''(\xi) > 0$.

Пример. Пусть $f(\xi) = \frac{\xi^a}{a}$ ($a > 1$).

Тогда

$$f'(\xi) = p = \xi^{a-1},$$

т. е.

$$\xi = p^{\frac{1}{a-1}},$$

и следовательно,

$$H = -\frac{\xi^a}{a} + p\xi = -\frac{p^{\frac{a}{a-1}}}{\frac{a}{a-1}} + p \cdot p^{\frac{1}{a-1}} = p^{\frac{a}{a-1}} \left(-\frac{1}{a} + 1 \right),$$

т. е.

$$H(p) = \frac{p^b}{b},$$

где b связано с a соотношением

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Функция $H(p)$, определенная равенством (3), иногда называется двойственной по Юнгу к функции $f(\xi)$. Легко проверить, что пре-

образование Лежандра, примененное к p и $H(p)$, приводит снова к ξ и $f(\xi)$ *). Действительно, согласно (4) $\frac{dH}{dp} = \xi$ и, кроме того,

$$-H(p) + pH'(p) = f(\xi) - pH'(p) + pH'(p) = f(\xi). \quad (5)$$

Посмотрим теперь, как связан переход от функции $f(\xi)$ к $H(p)$ с задачей о нахождении экстремума функции $f(\xi)$. Рассмотрим выражение

$$-H(p) + \xi p, \quad (6)$$

которое при $\xi = H'(p)$ совпадает с $f(\xi)$, как функцию двух независимых переменных. Покажем, что

$$\min_p [-H(p) + \xi p] = f(\xi). \quad (7)$$

Действительно, из условия

$$\frac{\partial}{\partial p} (-H(p) + \xi p) = -H'(p) + \xi = 0$$

получаем

$$\xi = H'(p),$$

откуда в силу (5) и вытекает (7). Таким образом, задача об отыскании минимума функции $f(\xi)$ равносильна задаче о нахождении минимума выражения $-H(p) + \xi p$ как функции двух переменных. Говоря более точно, мы получаем из (7), что

$$\min_{\xi} f(\xi) = \min_{p, \xi} [-H(p) + \xi p] **).$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для функций нескольких независимых переменных. Пусть

$$F(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

— функция n переменных, для которой детерминант, составленный из производных,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k}$$

не обращается в нуль. Положим

$$p_i = F_{\xi_i} \quad (8)$$

и

$$H = -F + \sum \xi_i p_i. \quad (9)$$

*) Преобразование, двукратное повторение которого есть тождественное преобразование, называется обычно *инволютивным*. Таким образом, преобразование Лежандра инволютивно.

**) Эта формула дает возможность определить переход от $H(p)$ к $f(\xi)$, т. е. преобразование Лежандра для любых выпуклых функций.

Выразив ξ_i через p_i из (8) и подставив эти выражения в (9), получим функцию

$$H = H(p_1, \dots, p_n).$$

Как и в случае одного независимого переменного, непосредственная проверка показывает, что

$$\min_{p_1, \dots, p_n} \left[-H(p_1, \dots, p_n) + \sum_{i=1}^n p_i \xi_i \right] = F(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

и потому отыскание минимума функции $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ равносильно отысканию минимума выражения

$$-H(p_1, \dots, p_n) + \sum p_i \xi_i,$$

в котором p_i и ξ_k рассматриваются как независимые переменные.

Замечание. Мы показали, что

$$\min_{p_1, \dots, p_n} \left[-H(p_1, \dots, p_n) + \sum p_i \xi_i \right] = F(\xi_1, \dots, \xi_n);$$

следовательно, при произвольных значениях $p_1, \dots, p_n$

$$-H(p_1, \dots, p_n) + \sum p_i \xi_i \geq F(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n p_i \xi_i \geq H(p_1, \dots, p_n) + F(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

где $p_1, \dots, p_n$ и $H(p_1, \dots, p_n)$ определяются формулами (8) и (9). Полученное нами неравенство называется неравенством Юнга. Для функций одного переменного его геометрический смысл непосредственно виден из рис. 6.

2. Применим эти рассуждения к функционалам. Пусть дан функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (10)$$

Положим

$$p = F_{y'}(x, y, y') \quad (11)$$

и

$$H(x, y, p) = -F + py' \quad (11')$$

(считая, что в правой части этого равенства y' представляет собой функцию от x , y и p , определенную равенством (11)).

Введем новый функционал

$$J[y, p] = \int_a^b (-H(x, y, p) + py') dx, \quad (12)$$

в котором y и p рассматриваются как две независимые функции, а y' есть производная от y . Этот функционал совпадает, очевидно, с исходным функционалом (10), если за p взять выражение (11). Напишем для функционала (12) уравнения Эйлера. Получим

$$-\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{dp}{dx} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{dy}{dx} = 0. \quad (13)$$

Это не что иное, как канонические уравнения для функционала $\int_a^b F(x, y, y') dx$. Мы докажем эквивалентность этих уравнений с уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (14)$$

(и, следовательно, получим новый, независимый от первоначального, вывод канонических уравнений), если докажем, что функционалы (10) и (12) принимают экстремальные значения на одних и тех же кривых.

Для этого заметим прежде всего, что определяемый формулами (11) и (11') переход от функции F переменных x, y, y' к функции H переменных x, y, p инволютивен, т. е., проделав преобразование Лежандра для H , мы снова вернемся к функции $F(x, y, y')$. Действительно, так как *)

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \frac{\partial F}{\partial y} dy + y' dp,$$

то

$$\frac{\partial H}{\partial p} = y',$$

поэтому

$$-H + p \frac{\partial H}{\partial p} = F - py' + py' = F. \quad (15)$$

Докажем теперь эквивалентность вариационных задач (10) и (12). Это будет доказано, если мы докажем, что минимум $J[y, p]$ по p при фиксированном y есть $J[y]$. Действительно, тогда минимум $J[y, p]$ при изменении как p , так и y будет совпадать с минимумом $J[y]$. Докажем, что $\min_p J[y, p] = J[y]$. Так как $J[y, p]$ не содержит p' , то для нахождения минимума $J[y, p]$ достаточно найти минимум подынтегрального выражения в каждой точке, т. е. положить

$$\frac{\partial}{\partial p} [-H + py'] = 0.$$

Отсюда

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

*) См. формулу (7) предыдущего параграфа.

Но тогда, согласно (15),

$$-H + p \frac{\partial H}{\partial p} = F,$$

и значит $\min_p J[y, p] = J[y]$.

Итак, эквивалентность вариационных задач (10) и (12), а следовательно, и отвечающих им уравнений Эйлера (14) и (13) доказана.

Мы рассмотрели функционалы, зависящие от одной функции. Те же рассуждения остаются в силе и в случае n функций.

Пример³. Рассмотрим функционал

$$\int_a^b (Py'^2 + Qy^2) dx, \quad (16)$$

где P и Q — функции от x . Для него $p = 2Py'$, $H = Py'^2 - Qy^2$, откуда

$$H = \frac{p^2}{4P} - Qy^2.$$

Соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\frac{dp}{dx} = 2Qy, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2P}.$$

Уравнение Эйлера в обычной форме для функционала (16) имеет вид

$$2yQ - \frac{d}{dx}(2Py') = 0.$$

3. Рассмотрим теперь следующий вопрос: при каких преобразованиях переменных канонические уравнения Эйлера сохраняют свою каноническую форму?

В конце первой главы мы показали, что уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

инвариантно по отношению к преобразованию координат, т. е. переходу от переменных x, y к любым другим переменным $\xi = \xi(x), \eta = \eta(y)$. При этом y' в функционале заменяется на $\frac{d\eta}{d\xi}$. Этим свойством инвариантности обладают и канонические уравнения Эйлера. Однако в силу той симметрии, которая имеется в канонических уравнениях между переменными p_i и y_i , здесь замену переменных можно понимать в более широком смысле, а именно как переход от переменных y_i, p_i к новым переменным

$$Y_i = Y_i(y_i, p_i, x), \quad P_i = P_i(y_i, p_i, x), \quad (17)$$

(т. е. p_i преобразуются по собственным формулам, не зависящим от того, как преобразуются переменные y_i). Однако не при любой замене (17) канонические уравнения сохраняют свой вид. Посмотрим, какие условия нужно наложить на функции (17) для того, чтобы в новых переменных уравнения Эйлера снова имели канонический вид, т. е. чтобы эти новые переменные удовлетворяли уравнениям

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dx} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Y_i}, \quad (18)$$

где $\tilde{H} = \tilde{H}(x, Y_i, P_i)$ — некоторая новая функция. Те преобразования вида (17), которые сохраняют канонический вид уравнений Эйлера, называются *каноническими преобразованиями*. Для нахождения канонических преобразований воспользуемся тем, что канонические уравнения

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (19)$$

представляют собой уравнения Эйлера для функционала

$$J[y_i, p_i] = \int_a^b \left(\sum p_i y'_i - H \right) dx, \quad (20)$$

в котором p_i и y_i рассматриваются как $2n$ независимых функций. Мы хотим, чтобы новые переменные Y_i и P_i удовлетворяли уравнениям (18) с некоторой функцией $\tilde{H}$. Напишем тот функционал, для которого уравнения (18) служат уравнениями Эйлера. Это будет

$$J[Y_i, P_i] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum P_i Y'_i - \tilde{H} \right) dx. \quad (21)$$

Здесь Y_i и P_i — функции от x , p_i и y_i , определяемые равенствами (17), а Y'_i — производная от Y_i ; таким образом, функционалы (20) и (21) представляют собой две различные вариационные задачи для одних и тех же переменных y_i, p_i .

Мы требуем, чтобы новая система (18) получалась бы из старой системы (19) некоторой заменой переменных, т. е. была бы ей эквивалентна. Это равносильно требованию эквивалентности между вариационными задачами (21) и (20). В гл. II (см. замечание в конце § 7) было показано, что две вариационные задачи эквивалентны (т. е. имеют одни и те же экстремали), если подынтегральные выражения в соответствующих функционалах отличаются друг от друга на некоторый

полный дифференциал, т. е. если

$$\sum_{i=1}^n p_i dy_i - H dx = \sum_{i=1}^n P_i dY_i - \tilde{H} dx + d\Phi(x, y_i, p_i), \quad (22)$$

где Φ — некоторая функция.

Таким образом, если преобразование (17) переменных x, y_i, p_i в переменные x, Y_i, P_i таково, что существует функция Φ , удовлетворяющая условию (22), то преобразование (17) каноническое. Определяемая *) условием (22) функция Φ называется *производящей функцией* данного канонического преобразования.

Покажем, что название «производящая функция» здесь действительно оправдано; а именно покажем, что по заданной производящей функции Φ можно найти соответствующее каноническое преобразование. Для этого перепишем равенство (22) в виде

$$d\Phi = \sum p_i dy_i - \sum P_i dY_i + (\tilde{H} - H) dx,$$

откуда получаем **)

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (23)$$

Но это и есть соответствующее каноническое преобразование. Действительно, $2n + 1$ равенств (23) устанавливают связь между переменными (y_i, p_i) и (Y_i, P_i) , а также дают выражение для новой функции Гамильтона $\tilde{H}$. Очевидно, что условие (22) при этом выполнено, т. е. преобразование (23) действительно каноническое.

Мы считали, что производящая функция задана как функция старых координат y_i , новых координат Y_i и переменной x , т. е. $\Phi = \Phi(y_i, Y_i, x)$. Может оказаться удобным выразить производящую функцию не через y_i и Y_i , а, например, через y_i и P_i . Для этого перепишем соотношение (22) в виде

$$d(\Phi + \sum P_i Y_i) = \sum p_i dy_i + \sum Y_i dP_i + (\tilde{H} - H) dx.$$

Выражение $\Phi + \sum P_i Y_i$ (представленное как функция переменных x, y_i и P_i) и будет новой производящей функцией. Обозначив ее $\Psi(x, y_i, P_i)$, мы можем записать соответствующее ей каноническое преобразование в виде

$$p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}, \quad Y_i = \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (24)$$

*) Как известно, функция определяется по ее полному дифференциалу однозначно с точностью до постоянного слагаемого; следовательно, если при заданном преобразовании (17) функция Φ , удовлетворяющая условию (22), существует, то она единственна с точностью до постоянного слагаемого.

**) Φ есть функция от x, y_i, p_i . Мы можем, однако, пользуясь равенствами (17), преобразовать ее к переменным x, y_i, Y_i .

Если производящая функция канонического преобразования не зависит от времени, то $\tilde{H} \Rightarrow H$, т. е. в этом случае для получения новой функции Гамильтона достаточно в H подставить вместо y_i и p_i их выражения через Y_i и P_i .

Задача. Проверить, что замена $Y_i = p_i$, $P_i = y_i$ является каноническим преобразованием. Написать соответствующую производящую функцию.

§ 16. Связь между инвариантностью интеграла $\int_a^b F dx$ и первыми интегралами уравнений Эйлера (теорема Нетер)

В § 14 мы установили, что система уравнений Эйлера, отвечающая функционалу

$$\int_a^b F(y_i, y'_i) dx \quad (1)$$

(F не зависит от x явно), имеет первый интеграл

$$H = \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} - F.$$

Тот факт, что F не зависит от x явно, равносильно, очевидно, следующему: если ввести новое переменное x^* , положив

$$x^* = x + \alpha, \quad (2)$$

то функция F , а следовательно, и интеграл (1) при этом не изменятся. Таким образом, H является первым интегралом системы уравнений Эйлера в том и только том случае *), если функционал $\int_a^b F dx$ не меняется при преобразовании (2).

Мы покажем сейчас, что связь между первыми интегралами системы уравнений Эйлера и инвариантностью соответствующего функционала относительно некоторых определенных преобразований переменных x и $y_1, \dots, y_n$ существует и в общем случае.

Уточним прежде всего само понятие инвариантности функционала относительно той или иной совокупности преобразований.

*) Что H будет первым интегралом *только* в том случае, видно из формулы $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$, полученной в § 14, так как $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, лишь если $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$,

Пусть дан функционал

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx.$$

Рассмотрим некоторое преобразование

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \varphi_0(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

гочек $n+1$ -мерного пространства.

Это преобразование переводит некоторую кривую γ , заданную уравнениями

$$y_i = \eta_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

в другую кривую γ^* , уравнения которой можно получить, подставив в равенства (3), связывающие x, y_i с x^*, y_i^* вместо $y_i, \dots, y_n$ функции $\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)$, задающие уравнения кривой γ , и исключив x из полученных таким образом $n+1$ равенств. В результате этой операции мы получим n уравнений вида

$$y_i^* = \eta_i^*(x^*),$$

которые и будут уравнениями кривой γ^* . Функционал $J[y]$ мы назовем инвариантным относительно данного преобразования, если

$$J[\gamma] = J[\gamma^*],$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_i, \frac{dy_i}{dx}\right) dx = \int_{x_0^*}^{x_1^*} F\left(x^*, y_i^*, \frac{dy_i^*}{dx^*}\right) dx^*.$$

Приведем простейшие примеры.

1. Функционал

$$J[\gamma] = \int_a^b y'^2 dx$$

инвариантен относительно преобразования

$$x^* = x + c, \quad y^* = y. \quad (4)$$

Действительно, если кривая γ задана уравнением

$$y = \eta(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

то преобразованная кривая γ^* задается уравнением

$$y^* = \eta(x^* - c) \equiv \eta^*(x^*) \quad (a \leq x^* - c \leq b).$$

Имеем

$$\begin{aligned} J[\gamma^*] &= \int_{a+c}^{b+c} \left(\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c} \left(\frac{d\eta(x^* - c)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \\ &= \int_a^b \left(\frac{d\eta(x)}{dx} \right)^2 dx = J[\gamma]. \end{aligned}$$

2. Интеграл

$$J[\gamma] = \int_a^b xy'^2 dx$$

может служить примером функционала, не инвариантного относительно преобразования (4). Посмотрим, как он меняется при применении к нему этого преобразования. Проведя те же выкладки, что и в предыдущем примере, получим

$$\begin{aligned} J[\gamma^*] &= \int_{a+c}^{b+c} x^* \left(\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c} x^* \left(\frac{d\eta(x^* - c)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \\ &= \int_a^b (x+c) \left(\frac{d\eta(x)}{dx} \right)^2 dx = J[\gamma] + c \int_a^b \left(\frac{d\eta(x)}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Пусть теперь имеется совокупность обратимых преобразований переменных $x, y_1, \dots, y_n$, зависящая от некоторого параметра α :

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi_0(x, y_1, \dots, y_n, \alpha), \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, \alpha), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

причем функции φ_0 и φ_i дифференцируемы, а значению $\alpha = 0$ отвечает тождественное преобразование, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y_1, \dots, y_n, 0) &\equiv x, \\ \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, 0) &\equiv y_i. \end{aligned}$$

Имеет место следующая

Теорема (Нетер). Каждому преобразованию вида (5), оставляющему интеграл (1) инвариантным, отвечает некоторый первый интеграл системы уравнений Эйлера.

Явный вид этого первого интеграла будет указан ниже.

Доказательство этой теоремы мы проведем сейчас для частного случая преобразований вида

$$\begin{aligned} x^* &= x, \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, \alpha). \end{aligned} \quad (5')$$

(Доказательство теоремы Нетер в общем случае, в том числе и для функционалов, содержащих несколько независимых переменных, будет дано в гл. VII. Заметим, что для нескольких независимых переменных сама формулировка этой теоремы несколько изменяется.) Считая величину α бесконечно малой, имеем

$$y_i^* - y_i = \varphi'_{i\alpha}(x, y_k, 0)\alpha + o(\alpha).$$

Положим

$$\left. \frac{\partial \varphi_i(x, y_k, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \psi_i(x, y_k),$$

т. е.

$$y_i^* - y_i = \alpha \psi_i + o(\alpha).$$

Считая, что кривая, определяемая уравнениями

$$y_i = y_i(x),$$

есть экстремаль, напомним выражение для вариации функционала (1), отвечающее переходу от y_i к $y_i + \alpha \psi_i$. Воспользуемся полученной в § 11 формулой (11) для вариации. Учтя, что в нашем случае x не варьируется, т. е. $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, а $\delta y_i = \alpha \psi_i$, получаем *):

$$\delta J = \alpha \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Так как по условию функционал (1) инвариантен относительно преобразования (5), то вариация δJ этого функционала, отвечающая $\delta y_i = \alpha \psi_i$, равна нулю.

Приравнявая δJ нулю, получаем

$$\sum F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x_0}^{x_1} = 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \psi_i \Big|_{x=x_1}.$$

*) Здесь мы под δy_i понимаем главную линейную относительно α часть приращения y_i , а не само это приращение (как было выше). Легко видеть, что это не оказывает влияния на результат, но зато сразу избавляет нас от возни с малыми высших порядков.

Так как это справедливо для любых двух точек x_0 и x_1 , то это означает, что вдоль каждой экстремали

$$\sum_{i=1}^n F_{y'_i} \psi_i = \text{const}, \quad (6)$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n F_{y'_i} \frac{\partial \varphi_i(x, y_k, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const}.$$

Итак, мы построили по заданному преобразованию (3), оставляющему инвариантным функционал (1), выражение, сохраняющее постоянное значение вдоль каждой экстремали, т. е. построили некоторый первый интеграл системы уравнений Эйлера. Теорема доказана.

Посмотрим, что дает нам теорема Нетер в уже знакомом нам случае, когда подынтегральная функция F не зависит от x явно.

Независимость F от x означает, что интеграл (1) инвариантен относительно преобразования

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x + \alpha, \\ y_i^* &= y_i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Действительно, оно переводит интеграл

$$\int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx$$

в

$$\int_a^b F(x + \alpha, y_i, y'_i) dx.$$

Эти два интеграла равны между собой для произвольного интервала (a, b) в том и только том случае, если F не зависит от x явно. Вычислив вариацию функционала (1), отвечающую преобразованию (7), получим

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) \delta y_i dx - H \cdot (-\alpha) \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Приравнявая это выражение нулю и рассматривая его лишь на кривых, удовлетворяющих уравнениям Эйлера, получаем

$$H(y_i, p_i) \Big|_{x=x_0} = H(y_i, p_i) \Big|_{x=x_1}, \quad \text{т. е.} \quad H = \text{const}$$

вдоль интегральной кривой. Таким образом, мы снова получаем уже установленный в § 13 результат: для функционалов, не зависящих от времени явно, функция H представляет собой первый интеграл соответствующей системы уравнений Эйлера.

§ 17. Принцип наименьшего действия

Рассмотрим некоторые применения полученных в предыдущих параграфах общих результатов к задачам механики.

Пусть нам дана некоторая система материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и координатами x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Будем предполагать при этом, что никаких связей на рассматриваемую систему не наложено. Кинетическая энергия такой системы равна

$$T = \sum \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (1)$$

Предположим также, что система обладает потенциальной энергией, т. е. что существует такая функция *)

$$U = U(t, x_i, y_i, z_i), \quad (2)$$

что компоненты силы, действующей на i -ю точку, равны

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Положим

$$L = T - U. \quad (3)$$

Это выражение мы будем называть *функцией Лагранжа* рассматриваемой механической системы. L представляет собой, очевидно, функцию от координат и скоростей частиц, составляющих рассматриваемую систему, и времени.

Пусть в момент времени t_0 система находится в некотором фиксированном положении. Эволюция рассматриваемой системы с течением времени описывается некоторой кривой в $3n$ -мерном пространстве, определяемой уравнениями

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Среди всех кривых, проходящих через начальную точку, та, которая описывает фактическое движение рассматриваемой системы под влиянием действующих на нее сил, удовлетворяет следующему условию, называемому принципом наименьшего действия:

Движение системы за промежуток времени (t_0, t_1) описывается теми функциями $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые дают минимум интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (4)$$

Сам интеграл (4) называется *действием*.

*) Здесь t означает время, а точка — дифференцирование по t .

Покажем, что этот принцип эквивалентен обычным уравнениям движения системы n точек.

Если функционал (4) достигает минимума, то должны удовлетворяться уравнения Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Принимая во внимание, что потенциальная энергия U зависит только от x_i , y_i , z_i (и не зависит от $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$), а T представляет собой сумму квадратов скоростей с коэффициентами $\frac{m_i}{2}$, мы можем переписать уравнения (5) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i &= 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{y}_i &= 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{z}_i &= 0. \end{aligned}$$

Так как производные $-\frac{\partial U}{\partial x_i}$, $-\frac{\partial U}{\partial y_i}$, $-\frac{\partial U}{\partial z_i}$ представляют собой компоненты силы, действующей на i -ю частицу, окончательно получаем

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i,$$

а это и есть обычные уравнения движения для системы из n свободных материальных точек.

Принцип наименьшего действия справедлив и в том случае, когда на рассматриваемую систему наложены некоторые связи. В этом случае допустимые кривые, на которых рассматривается функционал (4), должны удовлетворять наложенным связям, т. е. применение принципа наименьшего действия к системе со связями, приводит к вариационной задаче на условный экстремум.

§ 18. Законы сохранения

Рассмотрим снова механическую систему из n материальных точек с кинетической энергией

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (1)$$

потенциальной энергией

$$U = U(t, x_i, y_i, z_i) \quad (2)$$

и функцией Лагранжа

$$L = T - U. \quad (3)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, уравнения движения этой системы могут быть получены из принципа наименьшего действия, т. е. из условия минимума интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt. \quad (4)$$

Посмотрим, что представляют собой для этого интеграла канонические переменные (см. § 14).

Для нашего случая имеем

$$p_x^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad p_y^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad p_z^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i,$$

т. е. p_x^i, p_y^i, p_z^i представляют собой компоненты импульса i -й частицы, и

$$H = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i p_x^i + \dot{y}_i p_y^i + \dot{z}_i p_z^i) - L = 2T - (T - U) = T + U,$$

т. е. H есть полная энергия системы.

Замечание. Утверждение, что H есть полная энергия, будет справедливо и в том случае, если мы вместо декартовых координат введем обобщенные координаты q_i (докажите это). Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ в этом случае называются обобщенными импульсами системы (они, конечно, отличаются от обычных импульсов).

Пользуясь видом подынтегральной функции в функционале (4), мы можем найти те или иные функции, сохраняющие постоянные значения вдоль каждой из траекторий системы, т. е. получим так называемые законы сохранения.

1. Закон сохранения энергии. Пусть рассматриваемая система консервативна, т. е. ее функция Лагранжа L не зависит явно от времени (это означает, что U не зависит от времени). В этом случае, как было показано выше, $H = \text{const}$ вдоль каждой экстремали, т. е. полная энергия консервативной системы остается при движении постоянной.

2. Закон сохранения импульса. Пусть L не меняется при параллельном переносе, т. е. при замене x_i, y_i, z_i на

$x_i + a$, $y_i + b$, $z_i + c$ соответственно. Согласно теореме Нетер (§ 16) из инвариантности интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx$$

относительно преобразования

$$x^* = x, \quad y_i^* = \varphi_i(x, y_k, \alpha)$$

следует, что соответствующая система уравнений Эйлера имеет первый интеграл

$$\sum \frac{\partial F}{\partial y_i} \psi_i(x, y_k) = \text{const},$$

где

$$\psi_i(x, y_k) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Поэтому из инвариантности интеграла (4) относительно преобразования

$$x_i^* = x_i + a, \quad y_i^* = y_i, \quad z_i^* = z_i$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{i=1}^n p_x^i = \text{const}.$$

Аналогично из инвариантности (4) относительно сдвига вдоль оси y следует, что

$$\sum_{i=1}^n p_y^i = \text{const},$$

а из инвариантности (4) относительно сдвига вдоль оси z следует, что

$$\sum_{i=1}^n p_z^i = \text{const}.$$

Вектор P с компонентами

$$P_x = \sum_{i=1}^n p_x^i, \quad P_y = \sum_{i=1}^n p_y^i, \quad P_z = \sum_{i=1}^n p_z^i$$

называется полным импульсом системы. Итак, мы показали, что если интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

инвариантен относительно параллельного переноса, то полный импульс системы не меняется с течением времени. Это и есть *закон сохранения импульса*.

З а м е ч а н и е. Инвариантность $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ относительно сдвига в каком-либо одном направлении (например, в направлении оси x) влечет за собой, как видно из сказанного выше, сохранение соответствующей компоненты полного импульса системы.

3. **Закон сохранения момента количества движения.** Предположим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt$$

инвариантен относительно вращения вокруг оси z , т. е. относительно следующего преобразования координат:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha, \\ y_i^* &= -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \\ z_i^* &= z_i. \end{aligned}$$

Воспользуемся снова теоремой Нетер. В данном случае

$$\psi_x^i = \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = y_i, \quad \psi_y^i = \frac{\partial y_i^*}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -x_i, \quad \psi_z^i = 0.$$

Таким образом, из теоремы Нетер вытекает, что

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} y_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} x_i \right) = \text{const},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n (p_x^i y_i - p_y^i x_i) = \text{const}. \quad (5)$$

В этой сумме каждое слагаемое представляет собой z -ю компоненту векторного произведения $[\mathbf{p}^i, \mathbf{r}_i]$, где $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — радиус-вектор, а $\mathbf{p}^i = (p_x^i, p_y^i, p_z^i)$ — импульс i -й частицы.

Вектор $[\mathbf{p}^i, \mathbf{r}^i]$ называется моментом количества движения i -й частицы относительно начала координат. Равенство (5) означает, что сумма z -х компонент моментов количества движения отдельных частиц, т. е. z -я компонента момента количества движения всей системы, есть постоянная величина. Аналогичные утверждения верны и для x - и y -компонент при условии, что $\int L dt$ инвариантен относительно вращений вокруг соответствующих осей.

Итак, если $\int L dt$ инвариантен относительно вращений, то момент количества движения системы с течением времени не меняется.

Примеры. 1. Рассмотрим движение материальной точки, притягиваемой по некоторому закону неподвижным центром. В этом случае имеют место закон сохранения энергии (так как L не зависит явно от времени) и закон сохранения момента количества движения. Импульс при таком движении не сохраняется.

2. Материальная точка притягивается однородной материальной прямой (которую примем за ось z). В этом случае сохраняются следующие величины:

- а) энергия (так как L не зависит от времени),
- б) компонента импульса в направлении оси z ,
- в) момент количества движения относительно оси z .

§ 19. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби

Рассмотрим функционал

$$J = \int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx, \quad (1)$$

определенный на кривых, лежащих в некоторой области G , и предположим, что через любые две точки A, B из G проходит одна и только одна экстремаль функционала (1). Величину

$$S = \int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx, \quad (2)$$

где интеграл берется вдоль экстремали, соединяющей точки $A = (x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ и $B = (x_1, y_1^1, \dots, y_n^1)$, назовем геодезическим расстоянием между этими точками. S представляет собой, очевидно, однозначную функцию координат точек A и B .

Рассмотрим простейшие примеры.

1. Пусть функционал J означает длину кривой, тогда S — расстояние (в обычном смысле) между A и B .

2. Рассмотрим процесс распространения света в неоднородной среде. Скорость света в каждой точке предполагается зависящей от координат точки и от направления.

$$v = v(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Время, в течение которого свет идет вдоль некоторой кривой от точки A до точки B , равно

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{v} d\tau. \quad (3)$$

Согласно принципу Ферма свет распространяется во всякой среде вдоль той кривой, для которой время его прохождения является наименьшим, т. е. вдоль экстремали функционала (3). Итак, в случае функционала (3) S есть время распространения света из точки A в точку B .

3. Рассмотрим механическую систему с некоторой функцией Лагранжа L . Интеграл

$$J[y] = \int_b^a L dt,$$

взятый вдоль экстремали, проходящей через заданные точки A и B , представляет собой согласно сказанному в § 17 действие, отвечающее переходу рассматриваемой системы из одного состояния в другое.

Будем считать начальную точку A фиксированной, а точку B переменной. Тогда S будет представлять собой в области G однозначную функцию

$$S = S(x, y_1, \dots, y_n)$$

координат точки B .

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x, y_1, \dots, y_n)$. Вычислим с этой целью ее частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для этого найдем полный дифференциал функции S , т. е. главную линейную часть приращения

$$\Delta S = S(x + dx, y_1 + dy_1, \dots, y_n + dy_n) - S(x, y_1, \dots, y_n).$$

Но ΔS есть, по определению, разность

$$J[\tilde{\gamma}] - J[\gamma],$$

где γ — экстремаль, идущая из A в точку $(x, y_1, \dots, y_n)$, а $\tilde{\gamma}$ — экстремаль, идущая в точку $(x + dx, y_1 + dy_1, \dots, y_n + dy_n)$, и следовательно,

$$dS = \delta J,$$

где за начальную кривую берется экстремаль γ , а начальная точка A остается неподвижной*).

Воспользовавшись выведенной в § 11 формулой для вариации (12), получаем

$$dS(x, y_1, \dots, y_n) = \delta J = \sum p_i \delta y_i - H \delta x$$

(все величины берутся в точке B).

*) То обстоятельство, что проварианрованная кривая $\tilde{\gamma}$ тоже является экстремалью, здесь не существенно.

Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = p_i, \quad (4б)$$

где под $p_i = p_i(x, y_1, \dots, y_n)$ понимается выражение $F_{y'_i}$, в котором y'_i — значение производной $\frac{dy_i}{dx}$ в точке B для идущей из A в B экстремали, и

$$H = H(x, y_1, \dots, y_n, p_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, p_n(x, y_1, \dots, y_n))$$

тоже является функцией от $x, y_1, \dots, y_n$.

Из равенств (4a) и (4б) получаем, что S как функция от координат точки B удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H\left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n}\right) = 0. \quad (5)$$

Это уравнение в частных производных (вообще говоря, нелинейное) называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Существует тесная связь между уравнением Гамильтона — Якоби и каноническими уравнениями Эйлера. Именно эти канонические уравнения представляют собой так называемую характеристическую систему для уравнения (5)*.

Мы рассмотрим этот вопрос с несколько иной точки зрения, а именно выясним связь между решениями уравнения Гамильтона — Якоби и первыми интегралами системы уравнений Эйлера.

Теорема 1. Пусть $S = S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — некоторое решение уравнения Гамильтона — Якоби, зависящее от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Тогда каждая из производных

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_l} \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

является первым интегралом системы уравнений Эйлера

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},$$

т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_l} = \text{const}$$

вдоль каждой экстремали.

*) По этому поводу см., например, Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных.

Доказательство. Нам нужно показать, что вдоль каждой экстремали

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = 0.$$

Вычислим эту производную. Имеем

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \alpha_i} \cdot \frac{dy_j}{dx}. \quad (6)$$

Далее, подставив $S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ в уравнение Гамильтона — Якоби и продифференцировав полученное равенство по α_i , находим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha_i} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \alpha_i}.$$

Подставляя это выражение в (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \alpha_i} \frac{dy_j}{dx} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \alpha_i} \left(\frac{dy_j}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right). \end{aligned}$$

Так как $\frac{dy_j}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$ вдоль экстремалей, то действительно

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = 0$$

на каждой экстремали. Теорема доказана.

Если нам известен полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, т. е. его решение

$$S = S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

зависящее от n параметров, то мы можем согласно сказанному выше написать n первых интегралов

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

канонической системы уравнений Эйлера, которых, вообще говоря, достаточно для получения общего решения канонической системы (4). Действительно, пусть эти первые интегралы независимы, т. е. детерминант матрицы, составленной из производных,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_k}$$

отличен от нуля. Тогда из соотношений (7) мы можем определить функции

$$y_i = y_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

положив затем

$$p_i = \frac{\partial}{\partial y_i} S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

мы получим общее решение канонической системы

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 2 (Якоби). Пусть

$$S = S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

— полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n}) = 0$$

и пусть детерминант матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_j} \right\|$$

отличен от нуля. Пусть, наконец,

$$\beta_1, \dots, \beta_n$$

— n произвольных постоянных. Тогда функции

$$y_i = y_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

определяемые соотношениями

$$\frac{\partial S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

вместе с функциями

$$p_i = \frac{\partial}{\partial y_i} S(x, y_k(x, \alpha_j, \beta_j), \alpha_k)$$

образуют общее решение канонической системы

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Приведем еще одно доказательство теоремы Якоби, основанное на использовании канонических преобразований.

Пусть

$$S = S(t, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

— полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Сделаем в уравнениях

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$$

каноническое преобразование, приняв функцию $S(t, y_i, \alpha_i)$ за производящую функцию, а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — за новые импульсы. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_n$ — новые координаты. Тогда в силу формул (24) § 15 имеем

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Но поскольку функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, имеем

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Поэтому для новых переменных канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\alpha_i}{dx} = 0, \quad \frac{d\beta_i}{dx} = 0,$$

откуда $\alpha_i = \text{const}$, $\beta_i = \text{const}$ вдоль каждой экстремали. Мы снова получили те же самые n первых интегралов

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

системы уравнений Эйлера. Если из них определить $y_1, \dots, y_n$ как функции от t и от $2n$ параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ и, как и выше, положить

$$p_i = \frac{\partial}{\partial y_i} S(x, y_k(x, \alpha_j, \beta_j), \alpha_k),$$

то мы получим $2n$ функций

$$y_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

$$p_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

которые образуют общее решение канонической системы

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

ГЛАВА V

ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЭКСТРЕМУМА

До сих пор, рассматривая задачу о нахождении экстремума функционала, мы занимались лишь необходимым условием экстремума, состоящим в том, что вариация функционала на экстремальной кривой обращается в нуль.

В этой главе будут изложены достаточные условия слабого экстремума функционалов.

Для нахождения достаточных условий экстремума нам нужно будет ввести понятие второй вариации функционала и изучить ее свойства. Одновременно мы установим и некоторые новые необходимые условия экстремума.

Как будет видно из дальнейшего изложения, существуют удобные для применения достаточные условия экстремума, весьма близкие к необходимым. Достаточные условия экстремума функционалов, излагаемые ниже, отличаются от приводимых в этой же главе необходимых примерно так же, как достаточные условия $y' = 0$, $y'' > 0$ экстремума для функций отличаются от соответствующих необходимых условий $y' = 0$, $y'' \geq 0$.

§ 20. Квадратичные функционалы. Вторая вариация функционала

Введем некоторые необходимые для дальнейшего изложения общие понятия. Функционал

$$J[x, y],$$

зависящий от двух элементов x и y (принадлежащих некоторому линейному пространству) называется *билинейным*, если при фиксированном x он представляет собой линейный функционал от y , а при фиксированном y — линейный функционал от x . Таким образом, функционал $J[x, y]$ билинеен, если

$$J[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha J[x_1, y] + \beta J[x_2, y],$$

$$J[x, \gamma y_1 + \delta y_2] = \gamma J[x, y_1] + \delta J[x, y_2].$$

Полагая в билинейном функционале $y = x$, получаем выражение, называемое квадратичным функционалом.

Билинейный функционал в конечномерном пространстве называется билинейной формой. Каждая билинейная форма $A(x, y)$ может быть записана в виде $\sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k$, где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — координаты векторов x и y в некотором базисе. Полагая здесь $y = x$, получим квадратичную форму $A(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k$.

Квадратичный функционал $J[x, x]$ называется положительно определенным, если $J[x, x] > 0$ для любого ненулевого элемента x .

Примеры. 1. Выражение

$$\int_a^b x(t) y(t) dt$$

представляет собой билинейный функционал, а

$$\int_a^b x^2(t) dt$$

— квадратичный функционал в пространстве $C_{[a, b]}$.

Более общим примером билинейного функционала является

$$J[x, y] = \int_a^b A(t) x(t) y(t) dt,$$

где $A(t)$ — фиксированная функция. Если $A(t) > 0$ при всех t , $a \leq t \leq b$, то соответствующий квадратичный функционал

$$\int_a^b A(t) x^2(t) dt$$

будет положительно определенным.

2. Выражение

$$\int_a^b [A(t) x^2(t) + B(t) x(t) x'(t) + C(t) x'^2(t)] dt$$

представляет собой пример квадратичного функционала, определенного для всех функций из пространства D_1 .

3. Интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) x(s) y(t) ds dt,$$

где $K(s, t)$ — фиксированная функция двух переменных, является билинейным функционалом в $C_{[a, b]}$. Заменяя здесь $y(t)$ на $x(t)$, получим квадратичный функционал.

Введем теперь понятие второй вариации (второго дифференциала) функционала.

Пусть $J[y]$ — функционал, определенный в каком-либо линейном нормированном пространстве R . В гл. I мы называли функционал $J[y]$ дифференцируемым, если его приращение

$$\Delta J = J[y + h] - J[y]$$

можно представить в виде

$$\Delta J = l_1(h) + \alpha \|h\|,$$

где $l_1(h)$ — линейный функционал и $\alpha \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Величину $l_1(h)$ — главную линейную часть приращения функционала $J[y]$ — мы называли дифференциалом (вариацией) этого функционала и обозначили $\delta J[h]$.

Мы скажем, что функционал $J[y]$ имеет вторую вариацию, если его приращение можно записать в виде

$$\Delta J = l_1(h) + l_2(h) + \beta \|h\|^2, \quad (1)$$

где $l_1(h)$ — линейный функционал (вариация), $l_2(h)$ — квадратичный функционал, а $\beta \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Квадратичный функционал $l_2(h)$ мы будем называть *второй вариацией* (вторым дифференциалом) функционала $J[y]$ и обозначать $\delta^2 J[h]$. В дальнейшем мы будем предполагать у рассматриваемых функционалов существование второй вариации, не оговаривая это особо. Вторая вариация функционала (если она существует) определяется однозначно. Это доказывается в точности так же, как и однозначность первой вариации (§ 3).

Легко доказывается следующая

Теорема 1. *Для того чтобы функционал $J[y]$ при $y = y_0$ имел минимум (максимум), необходимо, чтобы при $y = y_0$ выполнялось условие*

$$\delta^2 J[h] \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (2)$$

для всех допустимых h .

Действительно, в точке экстремума $\delta J[h] = 0$, поэтому если $\delta^2 J[h] \neq 0$, то при достаточно малом $\|h\|$ знак выражения

$$\Delta J = \delta^2 J[h] + \beta \|h\|^2$$

будет совпадать со знаком $\delta^2 J[h]$. Пусть $\delta^2 J[h_0] < 0$ при некотором h_0 . Тогда при любом $\varepsilon \neq 0$ имеем

$$\delta^2 J[\varepsilon h_0] = \varepsilon^2 \delta^2 J[h_0] < 0,$$

и следовательно, $\Delta J = J[y_0 + \varepsilon h_0] - J[y_0] < 0$ при достаточно малом ε , т. е. при $y = y_0$ минимума нет. Аналогичные рассуждения проводятся и в случае максимума.

Неотрицательность второй вариации необходима, но, конечно, не достаточна для того, чтобы функционал $J[y]$ достигал на данной кривой минимума. Для получения достаточного условия минимума введем следующее понятие. Мы скажем, что квадратичный функционал $l_2(h)$, заданный в некотором нормированном пространстве, *сильно положителен*, если существует такое постоянное $k > 0$, что

$$l_2(h) \geq k \|h\|^2$$

для всех h .

Теорема 2. Для того чтобы функционал $J[y]$, определенный в нормированном пространстве E , имел в точке $y = y_0$, в которой $\delta J = 0$, минимум, достаточно, чтобы при $y = y_0$ его вторая вариация была сильно положительна, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\delta^2 J[h] \geq k \|h\|^2, \quad (3)$$

где $k = \text{const} > 0^*$.

Действительно, выберем ε настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина β в равенстве (1) удовлетворяла условию $|\beta| < \frac{k}{2}$. Тогда

$$\Delta J = \delta^2 J[h] + \beta \|h\|^2 > \frac{k}{2} \|h\|^2 > 0 \quad \text{при} \quad \|h\| < \varepsilon,$$

т. е. имеет место минимум.

§ 21. Формула для второй вариации. Условие Лежандра

Найдем явное выражение второй вариации в случае простейшей задачи, т. е. для функционала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

определенного на кривых $y(x)$ с закрепленными концами

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (2)$$

Дадим функции $y(x)$ приращение $h(x)$, удовлетворяющее условиям

$$h(a) = h(b) = 0.$$

*) В конечномерном пространстве сильная положительность квадратичной формы равносильна просто ее положительной определенности. Поэтому функция конечного числа переменных имеет минимум (в точке, где первый дифференциал равен нулю), если в этой точке ее второй дифференциал положителен. В общем случае сильная положительность есть условие более сильное, чем положительная определенность.

Воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем представить приращение функционала $J[y]$ в следующем виде:

$$J[y+h] - J[y] = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx + \\ + \frac{1}{2} \int_a^b (\bar{F}_{yy} h^2 + 2\bar{F}_{yy'} h h' + \bar{F}_{y'y'} h'^2) dx,$$

где

$$\bar{F}_{yy} = F_{yy}(x, y(x) + \theta h(x), y'(x) + \theta h'(x)) \quad (|\theta| \leq 1)$$

и аналогично определяются $\bar{F}_{yy'}$ и $\bar{F}_{y'y'}$.

Заменив $\bar{F}_{yy}$, $\bar{F}_{yy'}$ и $\bar{F}_{y'y'}$ производными F_{yy} , $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$, взятыми в точке $(x, y(x), y'(x))$, запишем ΔJ в виде

$$J[y+h] - J[y] = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx + \\ + \frac{1}{2} \int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2) dx + \varepsilon. \quad (3)$$

Величина ε может быть представлена как

$$\int_a^b (\varepsilon_1 h^2 + \varepsilon_2 h h' + \varepsilon_3 h'^2) dx; \quad (3')$$

из непрерывности производных F_{yy} , $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$ следует, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$, откуда видно, что ε есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\|h\|^2$. Первое из стоящих в (3) справа выражений есть $\delta J[h]$, а второе — квадратичное относительно h — представляет собой $\delta^2 J[h]$, т. е. вторую вариацию.

Таким образом, для функционала (1) имеем

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2} \int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2) dx. \quad (4)$$

Приведем это выражение второй вариации к более удобному виду. Интегрируя по частям и учитывая, что $h(a) = h(b) = 0$, получаем

$$\int_a^b 2F_{yy'} h h' dx = - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} F_{yy'} \right) h^2 dx.$$

Следовательно, формулу (4) можно переписать в виде

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Qh^2 + Ph'^2) dx, \quad (5)$$

где

$$Q = \frac{1}{2} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right), \quad P = \frac{1}{2} F_{y'y'}. \quad (5')$$

Этим выражением для второй вариации мы и будем в дальнейшем пользоваться.

Отметим еще следующий факт, вытекающий из формул (3) и (3').

Если $y(x)$ — экстремаль и $y(x) + h(x)$ — некоторая допустимая кривая, то

$$J[y+h] - J[y] = \int_a^b (Qh^2 + Ph'^2) dx + \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx, \quad (6)$$

где $|\xi| \rightarrow 0$ и $|\eta| \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Действительно, так как $y(x)$ — экстремаль, то в правой части равенства (3) линейные члены обращаются в нуль, а величина ϵ , даваемая

формулой (3'), может быть приведена к виду $\int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx$

интегрированием члена $\epsilon_2 h h'$ по частям с учетом граничных условий $h(a) = h(b) = 0$. Формулой (6) мы воспользуемся в § 23 при выводе достаточных условий слабого экстремума.

В предыдущем параграфе было показано, что неравенство $\delta^2 J[h] \geq 0$ есть необходимое условие минимума функционала $J[y]$. Полученная нами формула (5) позволяет установить некоторые условия неотрицательности второй вариации. Нахождение этих условий основано на следующих соображениях. Квадратичный функционал (5) рассматривается для функций $h(x)$, удовлетворяющих условию $h(a) = 0$. При этом условии, если мала производная функция $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, то мала на этом отрезке и сама функция $h(x)$. Обратное, однако, неверно: мы можем построить такую функцию $h(x)$, что она сама мала, а ее производная $h'(x)$ велика. Отсюда следует, что в квадратичном функционале (5) слагаемое Ph'^2 играет основную роль в том смысле, что оно может быть намного больше, чем второе слагаемое Qh^2 , но не может быть намного меньше его (при $P \neq 0$). Поэтому от коэффициента $P(x)$ в первую очередь зависит, будет ли функционал (5) принимать значения только одного знака или разных.

Сформулируем теперь точно соответствующее утверждение. Для того чтобы квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \quad (P = P(x), Q = Q(x)), \quad (7)$$

определенный на функциях $h(x)$ таких, что

$$h(a) = h(b) = 0$$

был неотрицательным, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$P(x) \geq 0 \quad (a \leq x \leq b). \quad (8)$$

Действительно, пусть (8) не выполнено, т. е. в некоторой точке x_0 пусть $P(x_0) < 0$. Покажем, что в этом случае функционал (7) примет при соответствующем выборе $h(x)$ отрицательное значение. Для этого подберем $h(x)$ так, чтобы в выражении (5) основной вклад давался бы слагаемым Ph'^2 , а член Qh^2 был бы мал. Положим

$$h(x) = \begin{cases} V_{\sigma}^{-} \left(1 + \frac{x-x_0}{\sigma} \right) & \text{при } x_0 - \sigma \leq x \leq x_0, \\ V_{\sigma}^{-} \left(1 - \frac{x-x_0}{\sigma} \right) & \text{при } x_0 \leq x \leq x_0 + \sigma, \\ 0 & \text{при всех остальных } x. \end{cases}$$

На интервале $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ имеем

$$h'^2(x) = \frac{1}{\sigma}, \quad h^2(x) \leq \sigma. \quad (9)$$

При таком выборе $h(x)$ в выражении

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b Qh^2 dx + \int_a^b Ph'^2 dx \quad (10)$$

остается интегрирование по отрезку $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$. Если положить, что $\sigma \rightarrow 0$, то в силу (9) первое слагаемое в правой части равенства (10) будет стремиться к нулю, а второе — к $P(x_0)$. Но так как, по предположению, $P(x_0) < 0$, то мы получаем, что

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx < 0$$

при указанном выше $h(x)$ (и достаточно малом σ). Тем самым наше утверждение доказано.

Отсюда и из установленного в предыдущем параграфе необходимого условия минимума ($\delta^2 J[h] \geq 0$) сразу вытекает следующая

Теорема 1 (Лежандр). Для того чтобы функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

достигал на кривой $y = y(x)$ минимума, необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие

$$F_{y'y'} \geq 0$$

(условие Лежандра).

Лежандр пытался доказать, что выполнение строгого неравенства $F_{y'y'} > 0$ в каждой точке экстремали $y(x)$ является достаточным условием того, что эта экстремаль дает функционалу (1) минимум (слабый). Для этого он проводил следующее рассуждение. Так как $h(a) = h(b) = 0$, то для любой дифференцируемой функции $w(x)$ имеем

$$\int_a^b (h^2 w' + 2hh'w) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (h^2 w) dx = 0.$$

Поэтому выражение для второй вариации можно переписать так:

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b [Ph'^2 + 2hh'w + (Q + w')h^2] dx.$$

Достаточность условия $F_{y'y'} > 0$ для минимума можно было бы доказать, если бы удалось подобрать функцию w так, чтобы выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, представляло собой полный квадрат. Это, однако, не всегда возможно (как впервые указал Лагранж). Действительно, для этого функция w должна удовлетворять уравнению

$$P(Q + w') = w^2.$$

Это уравнение всегда, конечно, разрешимо локально, но на достаточно большом отрезке может и не иметь решения*).

В том, что выполнение неравенства

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0 \quad (11)$$

во всех точках экстремали $y = y(x)$ не может быть достаточным условием того, что эта экстремаль реализует минимум функционала (1), можно убедиться следующим образом. Это условие так же, как и условие

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

характеризующее экстремаль, носит локальный характер, т. е. оно относится не ко всей кривой в целом, а к ее отдельным точкам.

*) Например, если $P = -1$, $Q = 1$, то получаем уравнение $w' + 1 + w^2 = 0$, откуда $w(x) = \operatorname{tg}(c - x)$. Если $b - a > \pi$, то на всем отрезке $[a, b]$ решения не существует.

Поэтому, если условие (11) выполняется для двух каких-либо дуг AB и BC , то оно выполняется и для составленной из них кривой AC . В то же время из того, что две части AB и BC некоторой кривой доставляют экстремум рассматриваемому функционалу вида (1), не следует, что вся кривая AC будет доставлять экстремум. Например, дуга большого круга на сфере есть кратчайшая из линий, соединяющих концы дуги, если эта дуга составляет меньше половины окружности и не будет кратчайшей (даже среди кривых, достаточно близких к ней), если она превышает половину окружности. Вместе с тем всякая дуга большого круга на сфере является экстремалью функционала, представляющего собой длину кривой на сфере, и в каждой точке такой дуги выполнено, как легко проверить, для этого функционала условие $F_{y'y'} > 0$. Следовательно, это условие (как и *любой* набор одних только *локальных* условий) не может быть достаточным для экстремума.

Несмотря на то, что условие $F_{y'y'} > 0$ не обеспечивает минимум, сама идея приведения подынтегрального выражения в формуле для второй вариации к полному квадрату (с целью получения достаточных условий экстремума) оказалась очень полезной, а дифференциальное уравнение $P(Q + w') = w^2$, возникающее при попытке осуществить эту идею, приводит к новым необходимым условиям экстремума (уже не локальным!). Мы вернемся к этим вопросам в §§ 22 и 23.

§ 22. Исследование квадратичного функционала

$$\int_a^b (Ph^2 + Qh'^2) dx$$

В § 20 уже была показана важная роль второй вариации в задаче о нахождении экстремума функционала. В частности, там было установлено, что если кривая $y = y(x)$ реализует минимум некоторого функционала, то вторая вариация этого функционала неотрицательна. Для функционала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (y(a) = A, y(b) = B) \quad (1)$$

вторая вариация представляет собой квадратичный функционал. Поэтому для дальнейшего изучения вариационной задачи (1) нам нужно предварительно исследовать свойства квадратичных функционалов, подобно тому, как исследование экстремумов функций нескольких переменных (в том числе нахождение достаточных

условий) опирается на изучение свойств квадратичных форм (второго дифференциала).

Итак, будем рассматривать квадратичный функционал *)

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \quad (2)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям

$$h(a) = h(b) = 0.$$

В § 21 мы показали, что для неотрицательности такого квадратичного функционала необходимо (но не достаточно) условие

$$P(x) \geq 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

В этом параграфе мы найдем условия (необходимые и достаточные), при которых квадратичный функционал (2) будет положительно определен (т. е. строго положителен для всех допустимых $h(x)$, кроме $h(x) \equiv 0$).

Напишем для нашего квадратичного функционала уравнение Эйлера **). Получим

$$-\frac{d}{dx}(Ph') + Qh = 0. \quad (3)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнению (3) и граничным условиям

$$h(a) = h(b) = 0$$

удовлетворяет, очевидно, функция $h(x) \equiv 0$. Однако оно может, вообще говоря, иметь и другие решения, удовлетворяющие тем же граничным условиям.

Введем следующее важное

Определение. Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной с точкой $x = a$, если уравнение (3) имеет решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при $x = a$ и при $x = \tilde{x}$.

Замечание. Если $h(x)$ — некоторое ненулевое решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям $h(a) = h(b) = 0$, то и $ch(x)$, где $c = \text{const} \neq 0$, будет таким же решением.

*) Сейчас мы можем не помнить о том, что этот квадратичный функционал представляет собой вторую вариацию, и рассматривать его совершенно независимо.

**) Не следует думать, что это делается с целью нахождения минимума функционала (2). Ввиду однородности этого функционала его минимум равен или 0 (в случае положительной определенности), или $-\infty$ (в противном случае). В последнем случае этот минимум, очевидно, из уравнения Эйлера найти нельзя. Важную роль уравнения Эйлера (3) в исследовании квадратичного функционала показывает формулируемая ниже теорема 1.

Мы можем поэтому для определенности наложить на $h(x)$ некоторое условие нормировки, например $h'(a) = 1$ (если $h(x) \not\equiv 0$ и $h(a) = 0$, то обязательно $h'(a) \neq 0$). Это мы и будем делать в дальнейшем.

Теорема 1. Если

$$P(x) > 0 \quad \text{при} \quad a \leq x \leq b$$

и отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a , то квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph^2 + Qh'^2) dx$$

положительно определен для всех $h(x)$ таких, что

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Доказательство. Мы докажем положительность функционала

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \quad (P(x) > 0), \quad (2')$$

если сможем привести его к виду

$$\int_a^b P(x) \varphi^2(\dots) dx,$$

где $\varphi(\dots)$ — некоторое выражение, не равное нулю тождественно при $h(x) \not\equiv 0$. Для этой цели добавим к выражению, стоящему под знаком интеграла (2'), величину вида $d(\omega h^2)$, где $\omega(x)$ — некоторая дифференцируемая функция. Так как

$$\int_a^b d(\omega h^2) dx = 0 \quad (\text{в силу } h(a) = h(b) = 0),$$

то от этого значение рассматриваемого квадратичного функционала не изменится. Постараемся теперь подобрать функцию $\omega(x)$ так, чтобы выражение

$$Ph'^2 + Qh^2 + \frac{d}{dx}(\omega h^2) = (Q + \omega')h^2 + 2\omega h h' + Ph'^2 \quad (4)$$

стало полным квадратом. Это требование будет выполнено, если за $\omega(x)$ взять какое-либо решение уравнения

$$P(Q + \omega') = \omega^2, \quad (5)$$

Действительно, при этих условиях выражение (4) можно переписать в виде

$$P\left(h' + \frac{w}{P} h\right)^2.$$

Итак, если уравнение (5) имеет решение, определенное на всем отрезке $[a, b]$, то квадратичный функционал (2') может быть приведен к виду

$$\int_a^b P\left(h' + \frac{w}{P} h\right)^2 dx, \quad (6)$$

и следовательно, он неотрицателен.

Если функция $h(x)$ обращает этот функционал в нуль, то она очевидно является его экстремалью, т. е. решением уравнения (3). Вместе с тем она должна удовлетворять условию $h'(x) + \frac{w}{P} h(x) \equiv 0$, откуда, положив $x = a$ и вспомнив, что $h(a) = 0$, получаем $h'(a) = 0$. Но, в силу теоремы единственности для дифференциальных уравнений решение (3), удовлетворяющее условиям $h(a) = h'(a) = 0$, есть тождественный нуль. Это означает, что функционал (6) — положительно определенный.

Остается показать, что при отсутствии на отрезке $[a, b]$ сопряженных с a точек уравнение (5) имеет решение, определенное на всем этом отрезке. Это уравнение представляет собой так называемое уравнение Риккати. Заменой переменных его можно свести к линейному уравнению второго порядка. Действительно, положив

$$w = -\frac{u'}{u} P, \quad (7)$$

где u — новая неизвестная функция, мы получим уравнение

$$-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0,$$

т. е. уравнение Эйлера для функционала (2'). Если на отрезке нет точек, сопряженных с a , то это уравнение имеет решение $u(x)$, не обращающееся в нуль на отрезке $[a, b]$ *), а тогда существует и определенное на всем отрезке $[a, b]$ решение уравнения (5), определяемое формулой (7).

*) Если отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a , то, в силу непрерывности зависимости решения уравнения от начальных условий, найдется столь малое $\epsilon > 0$, что отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с $a - \epsilon$. Тогда решение, удовлетворяющее начальным условиям $h(a - \epsilon) = 0$, $h'(a - \epsilon) = 1$, не обращается в нуль на отрезке $[a, b]$.

Итак, если отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a , то функционал (2') положительно определен. Теорема доказана.

Приведение квадратичного функционала

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$$

к виду (6) представляет собой континуальный аналог приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Отсутствие на отрезке $[a, b]$ сопряженных точек — это аналог известных условий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. (Подробнее об этом будет сказано в § 26.)

Теорема 1 представляет собой, собственно говоря, реализацию той идеи Лежандра, о которой мы упоминали на стр. 102.

Покажем, что отсутствие на отрезке $[a, b]$ сопряженных точек не только достаточно, но и необходимо для положительной определенности функционала

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx.$$

Теорема 2. Если квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx,$$

где $P(x) > 0$ ($a \leq x \leq b$), положительно определен для всех $h(x)$ таких, что

$$h(a) = h(b) = 0,$$

то отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a .

Идея доказательства состоит в следующем. Мы строим семейство положительно определенных квадратичных функционалов, зависящее от некоторого параметра t , которое при $t=1$ дает наш функционал (2), а при $t=0$ — простейший квадратичный функционал

$$\int_a^b h'^2 dx,$$

для которого вообще не существует сопряженных точек. Затем мы доказываем, что при непрерывном изменении параметра t от 0 до 1 сопряженные точки на отрезке $[a, b]$ не могут возникнуть.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма. Если функция $h = h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dx}(Ph') + Qh = 0$$
 и граничным условиям

$$h(a) = h(b) = 0, \quad (8)$$

то для нее

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx = 0.$$

Доказательство леммы непосредственно вытекает из равенства

$$0 = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}(Ph') + Qh \right) h dx = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx,$$

которое получается интегрированием по частям с учетом (8).

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Если функционал

$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$ положительно определен, то и функционал

$$\int_a^b [(Ph'^2 + Qh^2)t + h'^2(1-t)] dx, \quad (9)$$

очевидно, положительно определен при всех t , $0 \leq t \leq 1$. Рассмотрим, далее, отвечающее функционалу (9) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dx} \{ [tP + (1-t)] h' \} + tQh = 0, \quad (10)$$

и пусть $h(x, t)$ — решение этого уравнения такое, что $h(a, t) = 0$, $h'_x(a, t) = 1$. Это решение представляет собой непрерывную функцию параметра t . При $t = 1$ оно переходит в решение $h(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$, а при $t = 0$ — в удовлетворяющее тем же начальным условиям решение уравнения $h'' = 0$, т. е. в функцию $h = x - a$.

Заметим, что если $h(x_0, t_0) = 0$ в некоторой точке (x_0, t_0) , то в этой точке $h'_x(x_0, t_0) \neq 0$. Действительно, $h(x, t)$ при каждом фиксированном t удовлетворяет уравнению (10), и если бы равенства $h(x_0, t_0) = 0$ и $h'_x(x_0, t_0) = 0$ выполнялись одновременно, то, в силу теоремы единственности для дифференциальных уравнений, было бы $h(x, t_0) = 0$ при всех x , $a \leq x \leq b$; это же невозможно, так как по условию $h'_x(a, t) = 1$ при всех t , $0 \leq t \leq 1$. Допустим теперь, что на отрезке $[a, b]$ есть точка, сопряженная с a , т. е. что функция $h(x, 1)$ обращается в нуль в некоторой точке $x_0^{(1)}$, лежащей внутри отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим совокупность всех точек (x, t) , удовлетворяющих условию $h(x, t) = 0$. Это некоторая кривая в плоскости (x, t) . Действительно, в каждой точке, в которой $h(x, t) = 0$, производная $h_x(x, t)$ отлична от нуля и по теореме о неявных функциях, равенство $h(x, t) = 0$, определяет в окрестности каждой такой точки непрерывную функцию $x = x(t)$. На этой кривой лежит, по предположению, точка $x_0^{(1)}$. Но такая кривая, начавшись в точке $(x_0^{(1)}, 1)$:

а) не может окончиться внутри прямоугольника $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq 1$, так как это противоречило бы непрерывной зависимости решения $h(x, t)$ от параметра t ;

б) не может пересечь отрезок $x = b$, так как тогда мы в силу леммы получили бы противоречие с положительной определенностью функционала (9) при всех t ;

в) не может пересечь сторону $t = 1$, так как тогда при некотором t мы получили бы, что $h(x, t) = 0$ и $h'_x(x, t) = 0$ одновременно;

г) не может пересечь сторону $t = 0$, так как при $t = 0$ уравнение сводится к

$$h'' = 0,$$

а соответствующим решением является функция $h = x - a$, которая нигде, кроме точки $x = a$, в нуль не обращается;

д) не может пересечь сторону $x = a$, так как тогда при некотором t было бы $\left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$ в противоречие с предположением.

Но отсюда следует, что такой кривой вообще не существует. Наконец, точка $x_0^{(1)}$ не может совпадать и с $x = b$, иначе мы полу-

чили бы, в силу доказанной леммы, что $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx = 0$ для некоторой ненулевой функции, удовлетворяющей условию $h(a) = h(b) = 0$. Но это противоречит положительной определенности нашего функционала. Теорема доказана.

Теми же самыми рассуждениями, которые мы провели при доказательстве теоремы 2, устанавливается следующий результат.

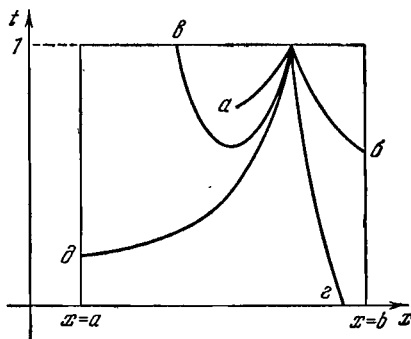


Рис. 7.

Теорема 2'. Если квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \quad (h(a) = h(b) = 0)$$

неотрицателен, то решение уравнения

$$-\frac{d}{dx}(Ph') + Qh = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$, не обращается в нуль ни в какой внутренней точке отрезка $[a, b]$.

Действительно, если функционал $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$ неотрицателен, то квадратичный функционал (9) положительно определен при всех t , кроме, может быть, $t = 1$. Доказательство теоремы 2 при этом остается в силе, за исключением последнего абзаца (ссылка на лемму). Поэтому при условиях теоремы 2' равенство $h(b) = 0$ не исключается.

Объединив теоремы 1 и 2, мы можем сформулировать следующий окончательный результат.

Для того чтобы квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \quad (P(x) > 0 \text{ при } a \leq x \leq b)$$

был положительно определен для всех $h(x)$ таких, что

$$h(a) = h(b) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы отрезок $[a, b]$ не содержал точек, сопряженных с a .

§ 23. Сопряженные точки. Необходимое условие Якоби

1. Применим результаты, полученные в предыдущем параграфе для квадратичного функционала, к простейшей задаче вариационного исчисления, т. е. к исследованию функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (2)$$

Рассмотрим некоторую экстремаль $y = y(x)$ этого функционала и вычислим его вторую вариацию в окрестности этой экстремали. Как было показано в § 21, вторая вариация функционала (1) записывается в виде

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx, \quad (3)$$

где

$$P = \frac{1}{2} F_{y'y'}, \quad Q = \frac{1}{2} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right). \quad (4)$$

Определение 1. Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dx}(Ph') + Qh = 0 \quad (5)$$

квадратичного функционала (3) называется уравнением Якоби исходного функционала (1).

Определение 2. Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной с точкой $x = a$ по отношению к функционалу (1), если она сопряжена с $x = a$ по отношению к квадратичному функционалу (3), представляющему собой вторую вариацию функционала (1).

Воспользовавшись теоремой 2' предыдущего параграфа, получаем непосредственно следующий важный результат.

Теорема (необходимое условие Якоби). Для того чтобы экстремаль $y = y(x)$ давала минимум функционалу

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

необходимо, чтобы интервал (a, b) не содержал точек, сопряженных с a .

Доказательство. В § 20 было доказано, что неотрицательность второй вариации есть необходимое условие минимума. Далее, в силу теоремы 2' § 22, если квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$$

неотрицателен, то интервал (a, b) не содержит точек, сопряженных с a . Из сопоставления этих двух фактов вытекает утверждение теоремы.

2. Мы определили уравнение Якоби для функционала (1) как уравнение Эйлера для квадратичного функционала

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx,$$

представляющего собой вторую вариацию. Это же уравнение можно получить и с помощью следующего рассуждения.

Пусть $y = y(x)$ — экстремаль. Выясним, какие условия нужно наложить на $h(x)$, чтобы провариированная функция $y(x) + h(x)$ тоже была экстремалью. Подставим $y(x) + h(x)$ в уравнение Эйлера

$$F_y(x, y + h, y' + h') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y + h, y' + h') = 0.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и учтя, что $y(x)$ — решение уравнения Эйлера, имеем

$$F_{yy}h + F_{yy'}h' - \frac{d}{dx} (F_{y'y'}h' + F_{yy'}h) = o(h),$$

где $o(h)$ — величина выше первого порядка малости относительно h . Отбросив $o(h)$ и приведя слева подобные члены, получим

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right)h - \frac{d}{dx} (F_{y'y'}h') = 0.$$

Но это и есть уравнение Якоби, которое мы выше, пользуясь обозначениями

$$\frac{1}{2} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right) = Q, \quad \frac{1}{2} F_{y'y'} = P,$$

писали в виде

$$Qh - \frac{d}{dx} (Ph') = 0.$$

Итак, уравнение Якоби — это дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет с точностью до величин выше первого порядка малости разность между двумя бесконечно близкими экстремалью.

Уравнение, которому удовлетворяет с точностью до малых выше первого порядка разность двух бесконечно близких решений некоторого исходного дифференциального уравнения, называется уравнением в вариациях (для этого исходного уравнения *).

*) В общем случае уравнение в вариациях определяется следующим образом. Пусть дано некоторое дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (*)$$

и пусть $y(x)$ и $y(x) + \delta y$ — два его бесконечно близких решения.

Подставив $y(x) + \delta y$ в (*) вместо $y(x)$ и воспользовавшись формулой Тейлора, получим (учтя, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (*))

$$F_y \delta y + F_{y'} (\delta y)' + \dots + F_{y^{(n)}} (\delta y)^{(n)} + \varepsilon = 0,$$

Таким образом, уравнение Якоби — это уравнение в вариациях для уравнения Эйлера.

Мы определили сопряженную точку (к данной точке a) как точку, в которой обращается в нуль решение уравнения Якоби, удовлетворяющее начальным условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$. Теперь мы можем дать другое определение сопряженной точки. Мы выяснили, что разность $z(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$ между двумя бесконечно близкими экстремальми, выходящими из одной и той же точки, удовлетворяет условию

$$-\frac{d}{dx}(Pz') + Qz = o(z),$$

где $o(z)$ — величина выше первого порядка малости относительно z . Отсюда видно, что $\tilde{y}(x) - y(x)$ совпадает с точностью до величин выше первого порядка малости с некоторым ненулевым решением уравнения Якоби. Поэтому второе определение сопряженной точки можно сформулировать так:

Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной к точке $x = a$, если в ней разность между данной экстремалью $y(x)$ и произвольной близкой экстремалью $\tilde{y}(x)$, выходящей из той же начальной точки, есть величина выше первого порядка малости по сравнению с $\|\tilde{y}(x) - y(x)\|$.

Можно дать еще и третье определение сопряженной точки, а именно:

Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной к точке $x = a$, если она есть предел точек пересечения данной экстремали $y(x)$ близкими экстремальми $\tilde{y}(x)$, выходящими из той же начальной точки, при $\tilde{y}(x) - y(x) \rightarrow 0$.

Покажем, что это определение действительно равносильно первым двум. Ясно, что если точка $\tilde{x}$ сопряжена к a в смысле последнего определения (экстремали пересекаются), то она будет сопряженной и в первоначальном смысле. Остается проверить, что верно и обратное. Пусть $y(x)$ — рассматриваемая экстремаль, удовлетворяющая

где ϵ обозначает остаточный член, представляющий собой величину выше первого порядка относительно δy и ее производных. Ограничиваясь членами первого порядка, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$F_y \delta y + F_{y'} (\delta y)' + \dots + F_{y^{(n)}} (\delta y)^{(n)} = 0,$$

называемое уравнением в вариациях.

Это уравнение определяет при начальных условиях, достаточно близких к нулевым, функцию, представляющую собой главную часть разности двух бесконечно близких решений исходного уравнения (*), отвечающих бесконечно близким между собой начальным условиям.

начальному условию

$$y(a) = A$$

и пусть $\tilde{y}_\alpha(x)$ — экстремаль, выходящая из той же точки a и удовлетворяющая условию

$$\tilde{y}'_\alpha(a) - y'(a) = \alpha.$$

Тогда $\tilde{y}_\alpha(x)$ можно представить в виде

$$\tilde{y}_\alpha(x) = y(x) + \alpha h(x) + \varepsilon, \quad (6)$$

где $h(x)$ — решение соответствующего уравнения Якоби, удовлетворяющее условиям

$$h(a) = 0, \quad h'(a) = 1,$$

а ε — величина выше первого порядка малости относительно α .

Пусть $h(\tilde{x}) = 0$ и пусть $\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}$. Ясно, что $h(\tilde{x}) \neq 0$ (поскольку $h(x) \neq 0$). Воспользовавшись формулой Тейлора легко проверить, что при достаточно малом α выражение

$$\tilde{y}_\alpha(x) - y(x) = \alpha h(x) + o(\alpha)$$

в точках $\tilde{x} - \beta$ и $\tilde{x} + \beta$ принимает значения разных знаков. Так как $\beta \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, то это и означает, что $\tilde{x}$ есть предел точек пересечения экстремалей $\tilde{y}_\alpha(x)$ и $y(x)$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Пример. Рассмотрим геодезические линии на сфере. Это — дуги больших кругов. Каждая такая дуга есть экстремаль функционала, представляющего собой длину линии на сфере. Для каждой точки M на сфере сопряженной с ней будет диаметрально противоположная точка сферы. Если данная экстремаль вместе с точкой M содержит и диаметрально противоположную ей точку $\tilde{M}$, то через точку $\tilde{M}$ проходит *любая* другая экстремаль, проходящая через M (а не только бесконечно близкая к первоначальной). Это связано с тем, что сфера имеет постоянную кривизну. Положение изменится, если рассмотреть, например, близкий к сфере эллипсоид.

В заключение этого параграфа приведем сводку всех установленных выше необходимых условий экстремума. Если вдоль кривой $y = y(x)$ функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

достигает экстремума, то:

1. Кривая $y = y(x)$ является экстремалью, т. е. удовлетворяет уравнению Эйлера (§ 4)

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

2. Вдоль этой кривой

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0$$

в случае минимума и $F_{y'y'} \leq 0$ в случае максимума (§ 21).

3. Интервал (a, b) не содержит точек, сопряженных с a (§ 23).

§ 24. Достаточные условия слабого экстремума

В этом параграфе мы сформулируем систему условий, достаточных для того, чтобы допустимая кривая $y = y(x)$ реализовала слабый экстремум функционала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (y(a) = A, y(b) = B). \quad (1)$$

Эта совокупность условий состоит в следующем:

1. $y = y(x)$ является экстремалью, т. е. удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

2. Вдоль этой кривой

$$P(x) \equiv \frac{1}{2} F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0$$

(усиленное условие Лежандра).

3. Отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с точкой $x = a$ (усиленное условие Якоби)*).

Теорема. Если допустимая кривая $y = y(x)$ функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

удовлетворяет условиям 1—3, то эта кривая реализует слабый минимум данного функционала.

Доказательство. Если отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a , и если на нем $P(x) > 0$, то, в силу непрерывности решения уравнения Якоби и функции $P(x)$, можно указать такой больший отрезок $[a, b + \epsilon]$, который также не содержит точек, сопряженных с a , и на котором $P(x) > 0$.

*) Отметим, что эти достаточные условия весьма близки к рассматривавшимся ранее необходимым условиям (см. выше). Необходимые условия мы рассматривали по отдельности (поскольку каждое из них само по себе необходимо). Достаточные же условия следует рассматривать в совокупности, так как лишь выполнение всех их одновременно обеспечивает наличие экстремума.

Рассмотрим квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx - \alpha^2 \int_a^b h'^2 dx \quad (2)$$

и соответствующее ему уравнение

$$-\frac{d}{dx} [(P - \alpha^2) h'] + Qh = 0. \quad (3)$$

Так как функция $P(x)$ на отрезке $[a, b + \varepsilon]$ положительна и, следовательно, имеет на этом отрезке положительную нижнюю грань и так как решение уравнения (3), определяемое начальными условиями $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$, непрерывно зависит от параметра α , то при всех достаточно малых значениях α будем иметь:

1) $P(x) - \alpha^2 > 0$, $a \leq x \leq b$.

2) Решение уравнения (3), определяемое начальными условиями $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$, не обращается в нуль на полусегменте $(a, b]$.

Как было показано в § 22 (см. теорему 1), из этих двух условий следует, что квадратичный функционал (2) положительно определен при всех достаточно малых α . Иначе говоря, существует такое постоянное число $c > 0$, что

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx > c \int_a^b h'^2 dx. \quad (4)$$

Из этого неравенства уже легко следует, что на рассматриваемой экстремали минимум действительно достигается. В самом деле, если $y = y(x)$ — данная экстремаль и $y(x) + h(x)$ — достаточно близкая к ней кривая, то по формуле (6) § 21

$$J[y + h] - J[y] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx + \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx, \quad (5)$$

где $|\xi|$ и $|\eta|$ стремятся к нулю, равномерно на отрезке $a \leq x \leq b$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Далее, в силу неравенства Коши — Буняковского

$$h^2(x) = \left(\int_a^x h' dx \right)^2 \leq (x - a) \int_a^x h'^2 dx \leq (x - a) \int_a^b h'^2 dx, \quad (6)$$

т. е.

$$\int_a^b h^2 dx \leq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b h'^2 dx. \quad (7)$$

Поэтому, если $|\xi(x)| \leq \varepsilon$ и $|\eta(x)| \leq \varepsilon$, то

$$\left| \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx \right| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) \int_a^b h'^2 dx. \quad (8)$$

Так как $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым, если $\|h\|$ достаточно мала, то в силу (4) и (8) получим

$$J[y+h] - J[y] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx + \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx > 0$$

при всех достаточно малых $\|h\|$. Таким образом, экстремаль $y = y(x)$ действительно реализует слабый минимум (в некоторой достаточно малой окрестности этой кривой) функционала (1). Теорема доказана.

Итак, мы установили достаточные условия слабого экстремума в случае простейшей задачи вариационного исчисления.

§ 25. Условия Якоби для функционалов, зависящих от нескольких функций

Понятие сопряженной точки и связанные с ним условия Якоби могут быть обобщены на тот случай, когда рассматривается функционал, зависящий от нескольких функций.

В этом параграфе мы изложим применительно к функционалам, зависящим от нескольких функций, те определения и факты, которые в предыдущих параграфах этой главы были изложены для функционалов от одной функции. Здесь мы будем широко пользоваться векторными обозначениями, в частности, рассматриваемый функционал будем записывать в виде

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

понимая под y вектор $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

В тех случаях, когда переход от одной функции к нескольким не связан с какими-либо затруднениями, мы не останавливаемся на подробностях.

Вторая вариация функционала. Условие Лежандра. Если приращение $\Delta J(h)$ функционала (1), отвечающее переходу от y к $y+h$, можно записать в виде

$$\Delta J(h) = l_1(h) + l_2(h) + \beta \|h\|^2, \quad (2)$$

где $\beta \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$, l_1 — линейный функционал, а l_2 — квадратичный, то квадратичный функционал $l_2(h)$ называется второй вариацией исходного функционала (1) и обозначается $\delta^2 J$

$(l_1(h))$ представляет собой при этом, очевидно, первую вариацию функционала (1)).

Применив формулу Тейлора, легко получаем, что при

$$h_i(a) = h_i(b) = 0$$

(т. е. в случае закрепленных концов) вторая вариация функционала (1) имеет вид

$$\delta^2 J[h_i] = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\sum_{i,k=1}^n F_{y_i y_k} h_i h_k + \sum_{i,k=1}^n F_{y_i y_k'} h_i h_k' + \sum_{i,k=1}^n F_{y_i' y_k'} h_i' h_k' \right) dx. \quad (3)$$

Полагая

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

и рассматривая матрицы F_{yy} , $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$, составленные из производных $F_{y_i y_k}$, $F_{y_i y_k'}$, $F_{y_i' y_k'}$ как линейные операторы, мы можем переписать выражение (3) в следующей компактной форме:

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2} \int_a^b [(F_{yy}h, h) + (F_{yy'}h, h') + (F_{y'y'}h', h')] dx.$$

Интегрируя по частям *), приведем выражение второй вариации функционала (1) к виду

$$\int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h)] dx,$$

где

$$P = \frac{1}{2} F_{y'y'}, \quad Q = \frac{1}{2} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right).$$

Как и в случае одной неизвестной функции, легко проверить, что в квадратичном функционале

$$\int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h)] dx \quad (4)$$

«основной вклад» дает член (Ph', h') , точнее говоря, верна следующая теорема: для того чтобы квадратичный функционал (4) принимал неотрицательные значения для всех $h(x)$ таких, что

$$h(a) = h(b) = 0,$$

*) Легко проверить, что обычная формула интегрирования по частям справедлива для скалярных произведений.

необходимо, чтобы квадратичная форма

(Ph', h')

не принимала отрицательных значений.

Условие Якоби. Напишем теперь для квадратичного функционала (4) систему уравнений Эйлера

$$\sum_{i=1}^n Q_{ik} h_i - \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n P_{ik} h_i' \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

или, в сокращенных обозначениях,

$$Qh - \frac{d}{dx}(Ph') = 0.$$

Здесь Q_{ik} и P_{ik} — элементы матриц P и Q соответственно. Систему (5) уравнений Эйлера для квадратичного функционала, представляющего собой вторую вариацию функционала (1), назовем *системой Якоби* этого исходного функционала.

Определение 1. Пусть

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= \{h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1n}\}, \\ &\vdots \\ h^{(n)} &= \{h_{n1}, h_{n2}, \dots, h_{nn}\} \end{aligned} \quad (6)$$

— решения системы (5), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$h^{(l)}(a) = \{0, 0, \dots, 0\}, \quad (7a)$$

$$h^{(l)'}(a) = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\} \quad (76)$$

(т. е. $h^{(i)}(a)$ образуют строки нулевой, а $h^{(i)'}(a)$ — единичной матриц). Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной с точкой $x = a$, если в ней обращается в нуль детерминант

$$\begin{vmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) & \dots & h_{1n}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & \dots & h_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(x) & h_{n2}(x) & \dots & h_{nn}(x) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Если отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a , и матрица P положительно определена, то квадратичный функционал (4) положительно определен.

Доказательство этой теоремы проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 1 § 22. Пусть W — произвольная

дифференцируемая матрица, удовлетворяющая условию самосопряженности

$$W^* = W.$$

Тогда

$$\int_a^b \frac{d}{dx} (Wh, h) dx = \int_a^b (W'h, h) + 2 \int_a^b (Wh, h') = 0$$

для всякого h , удовлетворяющего граничным условиям (7а). Поэтому мы можем к выражению, стоящему под знаком интеграла (4), прибавить

$$(W'h, h) + 2(Wh, h'),$$

не изменив значения этого интеграла. При этом получим

$$\int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h) + 2(Wh, h') + (W'h, h)] dx. \quad (9)$$

Постараемся теперь подобрать матрицу W так, чтобы выражение, стоящее в (9) под знаком интеграла, стало полным квадратом. Для этого достаточно потребовать, чтобы матрица W удовлетворяла следующему уравнению:

$$W' - WP^{-1}W + Q = 0, \quad (10)$$

которое мы назовем «матричным уравнением Риккати». Действительно, при этом подынтегральное выражение в (9) приводится к виду

$$(Ph', h') + 2(Wh, h') + (WP^{-1}Wh, h),$$

т. е.

$$(P^{1/2}h' + P^{-1/2}Wh, P^{1/2}h' + P^{-1/2}Wh)$$

(так как P — положительно определенная симметричная матрица, то $P^{1/2}$ существует, является симметричной и положительно определенной и имеет обратную матрицу $P^{-1/2}$). Повторив рассуждения, проведенные в случае скалярной функции $h(x)$ (стр. 106), можно показать, что

$$P^{1/2}h' + P^{-1/2}Wh$$

не может быть равно нулю при всех x , $a \leq x \leq b$, если только $h \neq 0$. Поэтому функционал (9), а значит и (4), принимающий те же значения, что и (9), положительно определенный.

Наконец, если отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a , то в матричном уравнении Риккати (10) можно сделать замену, положив

$$W = -PU'U^{-1}. \quad (11)$$

Получим

$$-(PU')' + QU = 0. \quad (12)$$

Это — матричная форма системы Якоби. Решение уравнения (12), удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad U'(0) = E,$$

и есть система (6) решений уравнений (5) с начальными условиями (7). Если нет сопряженных точек, т. е. детерминант (8) не обращается в нуль на отрезке $[a, b]$, то по формуле (11) находится матрица W , с помощью которой выражение, стоящее под знаком интеграла в функционале (4), приводится к сумме квадратов. Это означает положительную определенность функционала (4). Теорема доказана.

Теорема 2. Если квадратичный функционал

$$\int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h)] dx,$$

где P — положительно определенная симметричная матрица, положительно определен для всех $h(x)$ таких, что

$$h(a) = h(b) = 0,$$

то отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a .

Доказательство этой теоремы опирается, как и в случае одной неизвестной функции, на следующую лемму:

Лемма. Если

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$$

— решение системы (5), обращающееся в нуль в точках a и b , то

$$\int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h)] dx = 0.$$

Ее справедливость вытекает из равенства

$$\int_a^b \left(-\frac{d}{dx} (Ph') + Qh, h \right) dx = \int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h)] dx,$$

получающегося интегрированием по частям с учетом граничных условий для h .

Далее доказательство теоремы 2 проводится следующим образом. Рассмотрим положительно определенный квадратичный функционал

$$\int_a^b \{ t [(Ph', h') + (Qh, h)] + (1-t)(h', h') \} dx. \quad (13)$$

Ему отвечает система уравнений Эйлера

$$t \left(\sum_{i=1}^n Q_{ik} h_i - \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n P_{ik} h'_i \right) \right) - (1-t) h''_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

которая при $t=1$ переходит в систему (5), а при $t=0$ — в систему

$$h''_k = 0.$$

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ существует точка x_0 , сопряженная с a , т. е. такая, в которой обращается в нуль детерминант (8). Это равносильно тому, что найдется линейная комбинация решений (6), не равная нулю тождественно и обращающаяся в нуль при $x = x_0$. Далее, предположив, что система (14) имеет ненулевое решение, обращающееся в нуль в некоторой точке (x, t) , где $a < x < b$, и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2 § 22, получаем, что наличие такой точки противоречит положительной определенности функционала (13). В частности, при $t=1$ получаем, что нетривиальное решение системы (5) не может обращаться в нуль при $a < x < b$. Наконец из леммы вытекает, что при условии положительной определенности функционала (4) точка b тоже не может быть нулем какого-либо нетривиального решения системы (5). Тем самым доказательство заканчивается.

Те же самые рассуждения показывают, что если от функционала (4) потребовать лишь неотрицательность (а не положительную определенность), то при этом ни одна из *внутренних* точек отрезка $[a, b]$ не может быть сопряженной с a .

Соединив теоремы 1 и 2, получаем следующий результат. Квадратичный функционал

$$\int_a^b [(Ph', h') + (Qh, h)] dx \quad ((Ph', h') \geq 0)$$

положительно определен в том и только том случае, если отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a .

Все сказанное выше относилось к квадратичному функционалу. Вернемся теперь к произвольному функционалу вида

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \quad (15)$$

и рассмотрим некоторую его экстремаль.

Точку $\tilde{x}$, сопряженную с a по отношению к квадратичному функционалу, представляющему собой вторую вариацию данного

функционала, мы будем называть сопряженной с a и по отношению к функционалу (15), а систему уравнений Эйлера для второй вариации назовем системой Якоби данного функционала. Так как неотрицательность второй вариации есть необходимое условие минимума для любого функционала, то с помощью только что сформулированного следствия непосредственно получается

Теорема 3 (необходимое условие Якоби для функционалов, зависящих от нескольких функций). *Для того чтобы экстремаль*

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

доставляла минимум функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

необходимо, чтобы интервал (a, b) не содержал точек, сопряженных с a .

Мы определили точку, сопряженную с a , как ту точку, в которой обращается в нуль детерминант, составленный из n независимых решений системы Якоби, выходящих из данной начальной точки. Этому основному определению равносильны следующие два, в формулировке которых участвуют лишь экстремали рассматриваемого функционала (12) (а не решения системы Якоби).

Определение 2. Пусть из начальной точки выходит n экстремалей

$$\{y_{11}(x), y_{12}(x), \dots, y_{1n}(x)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

под близкими между собой, но линейно независимыми направлениями. Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной с a , если в этой точке детерминант

$$\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка, чем при $a < x < \tilde{x}$.

Определение 3. Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной к a , если существует последовательность экстремалей, выходящих из той же начальной точки и бесконечно близких к данной экстремали, такая, что каждая из этих экстремалей пересекает данную экстремаль и эти точки пересечения имеют точку $\tilde{x}$ своим пределом.

Эквивалентность этих определений устанавливается с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в случае одной функции (§ 24)

Достаточные условия. Сформулируем в заключение совокупность условий, достаточных для того, чтобы кривая

$$y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

доставляла функционалу

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

слабый минимум.

1. Данная кривая является экстремалью, т. е. удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$F_{y_l} - \frac{d}{dx} F_{y_l'} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

2. Матрица, составленная из производных

$$F_{y_i' y_k'},$$

положительно определена при $a \leq x \leq b$.

3. Отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a .

Доказательство достаточности этих условий опирается на теорему 2 настоящего параграфа и проводится аналогично доказательству достаточности соответствующих условий для случая одной функции.

§ 26. Связь условий Якоби с теорией квадратичных форм в конечномерном пространстве *)

В § 22 было доказано, что квадратичный функционал

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \quad (P(x) > 0) \quad (1)$$

положительно определен для всех $h(x)$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$, в том и только том случае, когда отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a . Функционал (1) представляет собой бесконечномерный аналог квадратичной формы. Естественно поэтому попытаться получить условия положительной определенности этого функционала из условий положительной определенности квадратичной формы с помощью предельного перехода.

*) Этот параграф не связан непосредственно с дальнейшим изложением и, при желании, может быть пропущен. Как и § 25 он написан несколько более конспективно, чем остальной текст книги.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ и рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[P_i \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} \right)^2 + Q_i h_i^2 \right] \Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n} \right), \quad (2)$$

где P_i, Q_i, h_i — значения функций $P(x), Q(x)$ и $h(x)$ в точке x_i . Эта квадратичная форма представляет собой конечномерное приближение функционала (1). Сгруппировав в форме (2) подобные члены и положив $h_0 = h(a) = 0$ и $P_n = Q_n = 0$, перепишем ее в виде

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(Q_i \Delta x + \frac{P_{i-1} + P_i}{\Delta x} \right) h_i^2 - 2 \frac{P_{i-1}}{\Delta x} h_i h_{i-1} \right]. \quad (3)$$

Таким образом, квадратичный функционал (1) приближенно записывается в виде квадратичной формы от $h_1, \dots, h_n$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$a_i = Q_i \Delta x + \frac{P_{i-1} + P_i}{\Delta x} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5)$$

$$b_i = - \frac{P_i}{\Delta x} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Симметричная матрица, в которой равны нулю все элементы, кроме стоящих на главной диагонали и на двух соседних с ней диагоналях, называется *матрицей Якоби*. Квадратичную форму с такой матрицей будем называть *формой Якоби*. Выведем рекуррентное соотношение, связывающее главные миноры любой матрицы Якоби. Пусть

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_k & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad (7)$$

— один из таких миноров. Разложив его по элементам последней строки, получим

$$D_{k+1} = a_k D_k - b_{k-1}^2 D_{k-1}. \quad (8)$$

Сформулируем с помощью этого рекуррентного соотношения условие положительной определенности для квадратичной формы Якоби. Соотношение (8) позволяет определить все миноры матрицы Якоби

по двум ее первым минорам D_1 и D_2 . Если мы еще положим $D_0 = 1$ и $D_{-1} = 0$, то соотношение (8) будет справедливо при всех $k = 0, 1, \dots, n-1$, и значения $D_1, D_2, \dots, D_n$ будут определяться этим соотношением однозначно.

Воспользуемся следующим критерием положительной определенности квадратичной формы (критерий Сильвестра): квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k$$

положительно определена в том и только том случае, если все миноры

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

положительны.

Применительно к квадратичной форме Якоби этот критерий можно сформулировать так: квадратичная форма Якоби положительно определена в том и только том случае, если все величины, определяемые рекуррентным соотношением $D_{k+1} = a_k D_k - b_{k-1}^2 D_{k-1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), и условиями $D_0 = 1, D_{-1} = 0$, положительны.

Чтобы получить отсюда критерий положительной определенности квадратичного функционала, посмотрим, во что превращается рекуррентное соотношение (8) при $n \rightarrow \infty$.

В нашем случае, когда коэффициенты a_k и b_k определяются равенствами (5) и (6), рекуррентное соотношение, связывающее миноры матрицы Якоби, принимает вид

$$D_{k+1} = \left(Q_k \Delta x + \frac{P_{k-1} + P_k}{\Delta x} \right) D_k - \frac{P_{k-1}^2}{\Delta x^2} D_{k-1}. \quad (9)$$

Непосредственный предельный переход при $n \rightarrow \infty$ (т. е. при $\Delta x \rightarrow 0$) здесь, очевидно, невозможен, так как коэффициенты при D_k и D_{k-1} при этом обратятся в бесконечность. Чтобы избежать этого, сделаем «замену переменных», положив *)

$$D_k = \frac{P_0 P_1 \dots P_{k-1} Z_k}{(\Delta x)^{k+1}} \quad (k = 1, \dots, n);$$

$$D_0 = \frac{Z_0}{\Delta x}; \quad D_{-1} = Z_{-1}. \quad (10)$$

*) Непосредственное вычисление показывает, что минор k -го порядка D_k матрицы Якоби с элементами, определяемыми формулами (5) и (6), имеет вид

$$D_k = O\left(\frac{1}{(\Delta x)^k}\right).$$

Таким образом, вводимые нами величины Z_k имеют вид

$$Z_k = o(\Delta x).$$

Тогда рекуррентное соотношение (9) примет вид

$$\frac{P_0 P_1 \dots P_k Z_{k+1}}{(\Delta x)^{k+2}} = \left(Q_k \Delta x + \frac{P_{k-1} + P_k}{\Delta x} \right) \frac{P_0 P_1 \dots P_{k-1} Z_k}{(\Delta x)^{k+1}} - \frac{P_{k-1}^2 Z_{k-1} P_0 P_1 \dots P_{k-2}}{(\Delta x)^2 (\Delta x)^k},$$

т. е.

$$Z_k Q_k \Delta x^2 + P_{k-1} Z_k + P_k Z_k - P_k Z_{k+1} - P_{k-1} Z_{k-1} = 0.$$

Деля это равенство на Δx^2 , получаем

$$Z_k Q_k - \frac{1}{\Delta x} \left\{ P_k \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\Delta x} - P_{k-1} \frac{Z_k - Z_{k-1}}{\Delta x} \right\} = 0. \quad (11)$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, мы получим дифференциальное уравнение

$$ZQ - \frac{d}{dx} (PZ') = 0, \quad (12)$$

т. е. уравнение Якоби.

Условие положительности величин D_k , удовлетворяющих соотношению (9), равносильно условию положительности величин Z_k , удовлетворяющих разностному уравнению (11), поскольку множитель

$$\frac{P_0 P_1 \dots P_{k-1}}{(\Delta x)^{k+1}}$$

всегда положителен (в силу условия $P(x) > 0$). Поэтому условие положительности квадратичной формы (3) можно сформулировать так: эта форма положительно определена в том и только том случае, если величины Z_k ($k = -1, 0, 1, \dots, n$), удовлетворяющие разностному уравнению (11), условию $Z_{-1} = 0$ (в которое переходит условие $D_{-1} = 0$) и условию $Z_0 = \Delta x$ (вытекающему из условия $D_0 = 1$), все положительны *).

Рассмотрим ломаную Ψ_n с вершинами

$$(a, Z_0), (x_1, Z_1), \dots, (b, Z_n);$$

условия $Z_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $Z_0 = 0$ означают, что эта ломаная не пересекает отрезок $[a, b]$ оси абсцисс. При $\Delta x \rightarrow 0$ разностное уравнение (11) переходит в дифференциальное уравнение Якоби, а ломаная Ψ_n — в решение $Z = Z(x)$ этого дифференциального уравнения, не равное нулю тождественно, удовлетворяющее начальным

*) Заметим, что уравнения (11) вместе с уравнениями $Z_{-1} = 0$, $Z_0 = \Delta x$ представляют собой систему $n+2$ независимых линейных уравнений с $n+2$ неизвестными. Решение такой системы определено однозначно.

условиям $Z(a)=0$, $Z'(a)=1$ и не пересекающее отрезка $[a, b]$ (т. е. не обращающееся на этом отрезке в нуль). Таким образом, при предельном переходе от квадратичной формы Якоби (3) к квадратичному функционалу (1) условие положительной определенности квадратичной формы переходит в следующее условие для функционала.

Для того чтобы квадратичный функционал

$$\int_a^b (Py'^2 + Qy^2) dx$$

был положительно определен, необходимо и достаточно, чтобы решение соответствующего уравнения Якоби

$$Qy - \frac{d}{dx}(Py') = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(a)=0$, $y'(a)=1$, не обращалось в нуль при $a \leq x \leq b$, т. е. чтобы отрезок $[a, b]$ не содержал точек, сопряженных с a .

А это и есть то условие положительной определенности квадратичного функционала, которое было доказано в § 22 (теорема 1).

Законность описанного выше предельного перехода можно строго обосновать. Мы, однако, не будем на этом останавливаться.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СИЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА

В предыдущей главе, рассматривая достаточные условия слабого экстремума, мы ввели важное понятие сопряженной точки. Это понятие вводится наиболее простым и естественным путем с помощью рассмотрения пучка экстремалей. (Тогда сопряженная точка определяется как точка пересечения данной экстремали бесконечно близкой к ней экстремалью, выходящей из той же самой начальной точки.)

Целесообразность рассмотрения не отдельных экстремалей, а некоторых их семейств становится особенно отчетливой при переходе к достаточным условиям сильного экстремума. Рассмотрение таких семейств экстремалей тесно связано с важным понятием поля, с которого мы и начнем эту главу. По-видимому, понятие поля может быть полезно в разных вопросах, поэтому мы сперва сформулируем его в общей форме, непосредственно не связанной с вариационными задачами.

§ 27. Согласованные граничные условия. Общее определение поля

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$y_i'' = f_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'), \quad (1)$$

разрешенную относительно старших производных.

Для того чтобы выделить некоторое определенное решение этой системы, нужно задать $2n$ условий, например, граничные условия вида

$$y_i' = \psi_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

при двух значениях x , скажем x_1 и x_2 . (Именно такие граничные условия встречаются обычно в вариационных задачах.) Если требовать выполнения граничных условий (2) только в одной точке, то они выделяют решение системы (1), зависящее от n параметров.

Введем следующие определения:

Определение 1. *Граничные условия*

$$y'_i = \psi_i^{(1)}(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\alpha)$$

заданные при $x = x_1$, и граничные условия

$$y'_i = \psi_i^{(2)}(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\beta)$$

заданные при $x = x_2$, называются согласованными между собой, если каждое решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (α), поставленным при $x = x_1$, удовлетворяет и граничным условиям (β), поставленным при $x = x_2$, и обратно).*

Определение 2. Пусть при каждом значении x из некоторого сегмента $[a, b]$ заданы граничные условия

$$y'_i = \psi_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

причем граничные условия, отвечающие двум любым значениям x , согласованы между собой. Совокупность таких согласованных между собой граничных условий называется полем (отвечающим данной системе (1)).

Граничные условия (3), заданные при каждом x , это система дифференциальных уравнений первого порядка. Требование согласованности их при разных x означает, что решения системы (3) должны удовлетворять и системе (1), т. е. что система (1) есть следствие системы (3).

В силу теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений, через каждую точку $(x, y_1, \dots, y_n)$ той области, в которой заданы функции $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n)$, проходит одна и только одна интегральная кривая системы уравнений (3) (мы будем называть их траекториями поля). Согласно сказанному выше, каждая из этих кривых будет в то же время и решением исходной системы (1). Таким образом, заданием поля (3) системы (1) в некоторой области G определяется n -параметрическое семейство решений системы (1) такое,

*) Таким образом, можно сказать, что граничные условия в точке x_2 , согласованные с граничными условиями, заданными в точке x_1 , заменяют влияние отрезка $[x_1, x_2]$ и граничных условий, имеющих в точке x_1 . Во всякой краевой задаче граничные условия — это учет влияния внешней среды. Но в каждой конкретной задаче мы можем вопрос о том, что отнести к внешней среде, а что — к рассматриваемой системе, решить по собственному усмотрению. Например, если речь идет о колебаниях струны (с некоторыми граничными условиями на концах), то можно рассматривать не всю струну, а некоторую ее часть, отнеся остальную ее часть к внешней среде. При этом можно влияние отбрасываемой части струны заменить соответствующими граничными условиями, задаваемыми на концах рассматриваемой части.

что через каждую точку этой области проходит одна и только одна кривая из этого семейства *).

Посмотрим, каковы должны быть функции $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) для того, чтобы система (3) была полем для системы (1).

Продифференцировав (3) по x , получаем

$$y_i'' = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dx},$$

т. е.

$$y_i'' = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \psi_k.$$

Итак, система (1) есть следствие системы (3), если

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \psi_k = f_i(x, y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Система первого порядка

$$y_i' = \psi_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (a \leq x \leq b, i = 1, 2, \dots, n),$$

представляет собой поле для системы

$$y_i'' = f_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n').$$

если функции $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n)$ удовлетворяют следующей системе уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \psi_k = f_i(x, y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_n). \quad (4)$$

Систему (4) будем называть *системой Гамильтона — Якоби* **) для исходной системы (1). Таким образом, каждое решение системы Гамильтона — Якоби (4) задает некоторое поле для исходной системы (1).

*) Обычно поле определяется не как система (3) согласованных между собой в каждой двух точках граничных условий, а как совокупность интегральных кривых системы (1), удовлетворяющих в каждой точке условиям (3), т. е., иными словами, как общее решение системы (3). Нам представляется, что наше определение имеет известные преимущества, в частности, при применении понятия поля к вариационным задачам с частными производными.

**) Связь между системой (4) и данным в гл. IV определением уравнения Гамильтона — Якоби будет выяснена в следующем параграфе.

Рассмотрим в качестве примера одно линейное уравнение

$$y'' = p(x) y. \quad (5)$$

Для него система Гамильтона — Якоби сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \psi = p(x) y,$$

т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial y} = p(x) y. \quad (6)$$

Совокупность решений такого уравнения зависит от произвольной функции и каждое из них определяет, согласно сказанному выше, некоторое поле уравнения (5).

Рассмотрим среди решений уравнения (6) простейшие, а именно те, которые линейны относительно y .

Положим

$$\psi(x, y) = a(x) y.$$

Получим

$$a'(x) y + a^2(x) y = p(x) y,$$

т. е.

$$a'(x) + a^2(x) = p(x).$$

Мы получили для $a(x)$ уравнение Риккати. Решив его и положив

$$y' = a(x) y,$$

получаем поле уравнения (5), линейное по y .

Аналогичным образом можно найти простейшее поле для системы линейных уравнений

$$Y'' = P(x) Y, \quad (7)$$

где $Y = (y_1, \dots, y_n)$, а $P(x) = \|p_{ik}(x)\|$ — матрица. Напишем соответствующую (7) систему уравнений Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \psi_k = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x) y_k. \quad (8)$$

Будем опять искать здесь решение, линейное по Y , т. е. имеющее вид

$$\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x) y_k \quad (9)$$

или, в векторных обозначениях,

$$\Psi = AY.$$

Подставив это выражение в уравнение (8), получим

$$\sum_{k=1}^n a'_{ik}(x) y_k + \sum_{k=1}^n a_{ik}(x) \sum_{j=1}^n a_{kj}(x) y_j = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x) y,$$

т. е.

$$\left(\frac{d}{dx} A(x)\right) Y + A^2(x) Y = P(x) Y.$$

Таким образом, функции (9) определяют поле системы (7), линейное по y , если матрица $A(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} A(x) + A^2(x) = P(x),$$

которое естественно назвать матричным уравнением Риккати.

Отметим, хотя это нам и не понадобится в дальнейшем, что понятие поля тесно связано с решением краевых задач для системы уравнений второго порядка методом так называемой *прогонки*. Поясним этот метод на простейшем примере одного уравнения

$$y'' = p(x)y + f(x) \quad (10)$$

с граничными условиями

$$y'(a) = c_0 y(a) + d_0, \quad (11a)$$

$$y'(b) = c_1 y(b) + d_1. \quad (11b)$$

Построим сначала уравнение первого порядка

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + \beta(x), \quad (12)$$

все решения которого удовлетворяют: 1) граничному условию (11a) и 2) уравнению (10). Для выполнения первого требования нужно положить, очевидно,

$$\alpha(a) = c_0 \quad \text{и} \quad \beta(a) = d_0. \quad (13)$$

Чтобы удовлетворить второму требованию, продифференцируем уравнение (12); получим

$$y''(x) = \alpha(x)y'(x) + \alpha'(x)y(x) + \beta'(x).$$

Подставив сюда вместо $y'(x)$ правую часть равенства (12), находим

$$y''(x) = [\alpha^2(x) + \alpha'(x)]y(x) + \beta'(x) + \alpha(x)\beta(x),$$

откуда ясно, что уравнение (10) представляет собой следствие уравнения (12), если

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2(x) + \alpha'(x) &= p(x), \\ \beta'(x) + \alpha(x)\beta(x) &= f(x). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Пусть теперь $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — решение системы (14), удовлетворяющее

начальным условиям (13). Найдя функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, мы получаем, таким образом, в каждой точке x_0 отрезка $[a, b]$ граничное условие

$$y'(x_0) = \alpha(x_0)y(x_0) + \beta(x_0).$$

Этот процесс переноса граничных условий, заданных первоначально при $x=a$, в каждую из точек отрезка $[a, b]$ называют *прямой прогонкой*. Положив, в частности, $x=b$, получим равенство

$$y'(b) = \alpha(b)y(b) + \beta(b),$$

которое вместе с граничным условием (11б) образует систему, определяющую $y(b)$ и $y'(b)$. Если эти значения определяются однозначно, то наша первоначальная краевая задача имеет единственное решение, которое теперь можно найти как решение уравнения (12), принимающее при $x=b$ полученное нами значение $y(b)$. Этот второй этап решения краевой задачи называется *обратной прогонкой*.

Мы рассмотрели случай одного уравнения. Аналогичный метод можно применить и к системе уравнений второго порядка.

Решение краевой задачи (10), (11) методом прогонки имеет серьезные преимущества по сравнению с более традиционным методом, состоящим в том, что сперва отыскивается общее решение уравнения (10), а потом в нем значения произвольных постоянных подбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия (11а) и (11б). Эти преимущества видны особенно отчетливо в тех случаях, когда приходится при решении задачи прибегать к тем или иным приближенным численным методам. (См. И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы приближенных вычислений, ч. II, стр. 386—389.)

Совершенно очевидна связь метода прогонки с введенным выше понятием поля системы уравнений второго порядка. Действительно, прямая прогонка и представляет собой не что иное, как построение для уравнения (10) поля, линейного относительно y , а уравнения (14) — это та система обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится система Гамильтона — Якоби (4) в том случае, когда для одного уравнения второго порядка ищется поле, линейное относительно y . (Выше мы рассматривали в качестве примера однородное линейное уравнение и в соответствии с этим искали поле в однородной форме $y'(x) = a(x)y(x)$. При этом мы получили для функции $a(x)$ уравнение Риккати, совпадающее с первым из уравнений (14).)

Мы могли бы строить поле, исходя не из левого конца промежутка $[a, b]$, а из правого; таким образом, в краевой задаче мы фактически имеем дело с двумя полями для уравнения (10), одно из которых получается переносом вдоль $[a, b]$ граничных условий (11а), а другое — переносом от b к a граничных условий (11б). Решение краевой задачи, состоящей из уравнения (10) и граничных условий

(11a) и (11б), — это кривая, являющаяся общей траекторией этих двух полей. Таким образом, метод прогонки состоит из построения одного поля (прямая прогонка) и затем выбора из его траекторий такой, которая является одновременно траекторией и второго поля.

§ 28. Поле функционала

Применим сказанное в предыдущем параграфе к вариационным задачам. Уравнения Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0,$$

отвечающие функционалу

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx,$$

образуют систему n уравнений второго порядка. Для того чтобы выделить некоторое определенное решение этой системы, нужно задать $2n$ дополнительных условий, которые обычно задаются в виде граничных условий, т. е. соотношений, связывающих значения y_i и y_i' в концах интервала $[a, b]$ (по n условий в каждом из концов). Во многих случаях эти граничные условия, естественно, определяются самим рассматриваемым функционалом. Рассмотрим, например, задачу со свободными концами для функционала

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i') dx + g^{(1)}(a, y_1, \dots, y_n) + g^{(2)}(b, y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

отличающегося от рассматривавшихся ранее членами $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$, представляющими собой функции координат концов дуги, на которой рассматривается функционал.

Вычислив вариацию функционала (1), получим

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) h_i dx + \sum_{i=1}^n F_{y_i'} h_i \Big|_a^b + \sum_{i=1}^n g_{y_i}^{(1)} h_i(a) + \sum_{i=1}^n g_{y_i}^{(2)} h_i(b).$$

Приравняв ее нулю и считая, что кривая $y_i = y_i(x)$ есть экстремаль, получим

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i'} h_i \Big|_a^b + \sum_{i=1}^n g_{y_i}^{(1)} h_i(a) + \sum_{i=1}^n g_{y_i}^{(2)} h_i(b) = 0.$$

Так как $h_i(a)$ и $h_i(b)$ произвольны, то отсюда получаем *)

$$F_{y'_i}(x, y_i, y'_i) - g_{y'_i}^{(1)}(x, y_i)|_{x=a} = 0, \quad (2)$$

$$F_{y'_i}(x, y_i, y'_i) - g_{y'_i}^{(2)}(x, y_i)|_{x=b} = 0. \quad (2')$$

Будем рассматривать граничные условия, отвечающие одному из концов, например $x=a$. При этом вместо $g^{(1)}(x, y_i)$ будем писать просто $g(x, y_i)$.

Положим, как обычно,

$$F_{y'_i}(x, y_i, y'_i) = p_i(x, y_i, y'_i)$$

и запишем граничные условия (2) в виде

$$p_i(x, y_i, y'_i) - g_{y'_i}(x_i, y_i)|_{x=a} = 0. \quad (3)$$

Эти соотношения определяют $y'_i(a)$ как функции от $y_1(a), \dots, y_n(a)$, т. е. задают на гиперплоскости $x=a$ поле направлений (граничные условия), которое будем записывать в виде

$$y'_i(a) = \psi_i(y).$$

Определение 1. Пусть дан функционал **)

$$\int_a^b F(x, y, y') dx.$$

*) Если $g^{(1)} = g^{(2)} \equiv 0$, то получим

$$F_{y'_i}(x, y_i, y'_i)|_{x=a} = F_{y'_i}(x, y_i, y'_i)|_{x=b} = 0,$$

т. е. граничные условия для задачи со свободными концами, уже встречавшиеся в § 5. Заметим, что условия закрепления концов можно рассматривать как предельный случай граничных условий (2), (2'), получающихся с помощью добавочных членов. Действительно, взяв, например, функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx - k(y(a) - A)^2,$$

получим на левом конце граничное условие

$$F_{y'}(x, y, y') - 2k(y - A)|_{x=a} = 0,$$

т. е.

$$y = A + \frac{F_{y'}(x, y, y')}{2k} \Big|_{x=a}.$$

Если теперь положить $k \rightarrow \infty$, то в пределе получим граничное условие $y(a) = A$. То же самое верно и в случае нескольких функций $y_1, \dots, y_n$.

**) Ниже мы будем, для упрощения записи, символами y, y' и т. д. обозначать векторы $(y_1, \dots, y_n), (y'_1, \dots, y'_n)$ и т. д.

Граничные условия

$$y'_i(a) = \psi_i(y),$$

заданные в точке $x=a$, называются самосопряженными, если существует такая функция $g(x, y)$, что

$$F_{y'_i}(x, y, \psi(y)) \equiv g_{y_i}(a, y). \quad (4)$$

Теорема 1. Граничные условия $y'_i = \psi_i(y)|_{x=a}$ являются самосопряженными в том и только том случае, если они удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial p_i(x, y, \psi(y))}{\partial y_k} = \frac{\partial p_k(x, y, \psi(y))}{\partial y_i} \Big|_{x=a} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Систему этих равенств мы будем называть *условием самосопряженности*.

Доказательство. Если граничные условия

$$y'_i = \psi_i(y)|_{x=a}$$

самосопряженные, т. е. определяются равенствами (3), то

$$p_i(x, y, \psi(y)) = g_{y_i}(x, y)|_{x=a},$$

откуда получаем

$$\frac{\partial p_i(x, y, \psi(y))}{\partial y_k} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y_i \partial y_k} = \frac{\partial p_k(x, y, \psi(y))}{\partial y_i}.$$

Обратно, если граничные условия

$$y'_i = \psi_i(y)|_{x=a}$$

таковы, что функции $p_i(x, y, \psi(y))$ удовлетворяют условиям самосопряженности (4), то p_i представляют собой (при $x=a$) частные производные по y_i некоторой функции $g(y)$. Ясно, что, рассмотрев функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx + g(y(a))$$

и приравняв его вариацию нулю, мы придем к исходным граничным условиям $y'_i = \psi_i(y)|_{x=a}$, которые, таким образом, будут самосопряженными.

Теорема доказана.

Замечание. При $n=1$, т. е. в случае вариационных задач с одной неизвестной функцией, условия самосопряженности (5) отпадают. Непосредственно ясно, что в случае $n=1$ любое граничное условие является самосопряженным.

В предыдущем параграфе мы ввели понятие поля для системы уравнений второго порядка. Сейчас мы сформулируем определение поля для функционала.

Рассмотрим функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \quad (6)$$

и отвечающую ему систему уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0. \quad (7)$$

Мы скажем, что граничные условия

$$y'_i = \psi_i^{(1)}(x, y), \quad (\alpha)$$

заданные при $x = x_1$, и граничные условия

$$y'_i = \psi_i^{(2)}(x, y), \quad (\beta)$$

заданные при $x = x_2$, согласованы между собой (по отношению к функционалу (6)), если они согласованы между собой по отношению к системе (7), т. е. если каждая экстремаль, удовлетворяющая при $x = x_1$ граничным условиям (α) , удовлетворяет при $x = x_2$ условиям (β) и обратно.

Определение 2. Совокупность граничных условий

$$y'_i = \psi_i(x, y), \quad (8)$$

заданных при всех x , $a \leq x \leq b$, называется полем функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

если

- а) при каждом значении x эти условия самосопряжены;
- б) при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ эти условия согласованы между собой (по отношению к рассматриваемому функционалу).

Иначе говоря, полем функционала (6) называется поле системы отвечающих ему уравнений Эйлера (7), удовлетворяющее в каждой точке x условиям самосопряженности.

Равенства (8) представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. Ее общее решение (т. е. совокупность траекторий поля) есть n -параметрическое семейство экстремалей такое, что

через каждую точку $(x, y_1, \dots, y_n)$ той области, в которой задано поле, проходит одна и только одна экстремаль из этого семейства *).

Укажем теперь эффективный критерий того, что данная совокупность граничных условий

$$y'_i = \psi_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, n, a \leq x \leq b),$$

образует поле функционала.

Теорема 2. Для того чтобы граничные условия

$$y'_i = \psi_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

заданные при каждом x , $a \leq x \leq b$, образовывали поле функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial p_i(x, y, \psi(x, y))}{\partial y_k} = \frac{\partial p_k(x, y, \psi(x, y))}{\partial y_i} \quad (5)$$

(условия самосопряженности) и

$$\frac{\partial p_i(x, y, \psi(x, y))}{\partial x} = - \frac{\partial H(x, y, \psi(x, y))}{\partial y_i} \quad (9)$$

(условия согласованности), где

$$p_i(x, y, y') = F_{y'_i}(x, y, y'),$$

а H — функция Гамильтона, т. е.

$$H(x, y, y') = -F(x, y, y') + \sum_{k=1}^n p_k(x, y, y') y'_k. \quad (10)$$

Доказательство. Мы уже показали выше (теорема 1), что равенства (5) необходимы и достаточны для того, чтобы в каждой точке x граничные условия (8) были самосопряженными. Поэтому остается лишь показать, что, при выполнении равенств (5) в каждой точке, равенства (9) необходимы и достаточны, чтобы граничные условия

$$y'_i = \psi_i(x, y)$$

были при $a \leq x \leq b$ согласованы. Для доказательства этого утверждения подставим в условие (8) вместо функции $H(x, y, \psi(x, y))$

*) Обычно в вариационном исчислении полем функционала называется само n -параметрическое семейство экстремалей (удовлетворяющее некоторым определенным условиям). Как уже было указано (см. сноску на стр. 131), несколько иной подход к этому понятию нам представляется более удобным.

ее выражение (10) (заменяв в нем y'_i на $\psi_i(x, y)$), а вместо $p_i(x, y, \psi(x, y))$ подставим $F_{y'_i}(x, y, \psi(x, y))$. Выполнив после этого в равенстве (9) дифференцирование, получим (аргументы для сокращения записи опускаем)

$$F_{y'_i x} + \sum_{k=1}^n F_{y'_i y'_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = F_{y_i} + \sum_{k=1}^n F_{y'_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} F_{y'_k} - \sum_{k=1}^n \psi_k F_{y'_k y'_i}.$$

Так как должны выполняться условия самосопряженности

$$\frac{\partial F_{y'_k}}{\partial y_i} = \frac{\partial F_{y'_i}}{\partial y_k},$$

то это равенство можно переписать следующим образом:

$$F_{y_i} = F_{y'_i x} + \sum_{k=1}^n \psi_k F_{y'_k y'_i} + \sum_{k=1}^n F_{y'_i y'_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x}. \quad (11)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial y_k} F_{y'_i} = F_{y'_i y'_k} + \sum_{j=1}^n F_{y'_i y'_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k},$$

то равенству (11) можно придать вид

$$F_{y_i} = F_{y'_i x} + \sum_{k=1}^n F_{y'_i y'_k} \psi_k + \sum_{k=1}^n F_{y'_i y'_k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j} \right). \quad (12)$$

Вдоль траекторий поля имеем:

$$\frac{dy_k}{dx} = \psi_k$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j} \psi_j,$$

поэтому вдоль траекторий поля равенство (12) принимает вид

$$F_{y_i} = F_{y'_i x} + \sum_{k=1}^n F_{y'_i y'_k} \frac{dy_k}{dx} + \sum_{k=1}^n F_{y'_i y'_k} \frac{d^2 y_k}{dx^2},$$

т. е.

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad (13)$$

а это и означает, что траектории поля направлений (8) суть экстремали, т. е. что это поле есть поле рассматриваемого функционала.

Тем самым достаточность сформулированного условия доказана. Так как выкладки, приводящие от (9) к (13), могут быть проведены в обратном порядке, то это условие и необходимо.

Теорема доказана.

Заметим, что равенства (9), представляющие собой систему уравнений в частных производных — это, собственно говоря, то, что в § 27 мы назвали системой Гамильтона — Якоби.

В связи с доказанной теоремой сделаем несколько замечаний.

Если граничные условия

$$y'_i = \psi_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, n, a \leq x \leq b), \quad (8)$$

являются согласованными (т. е. решения системы (8) суть экстремали функционала $\int_a^b F(x, y, y') dx$), то проверять их самосопряженность достаточно в какой-либо одной точке. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. Выражение

$$\frac{\partial p_i(x, y, y')}{\partial y_k} - \frac{\partial p_k(x, y, y')}{\partial y_i} \quad (14)$$

сохраняет постоянное значение вдоль каждой экстремали.

Доказательство получается непосредственным вычислением производной $\frac{d}{dx}$ от выражения (14) вдоль произвольной экстремали.

Согласно сказанному выше, граничные условия

$$y'_i = \psi_i(x, y)$$

самосопряженны в каждой точке, если они определяются равенствами

$$F_{y'_i}(x, y, y') = g_{y_i}(x, y).$$

Поставим следующий вопрос: какие дополнительные условия нужно наложить на функцию $g(x, y)$ для того, чтобы граничные условия, определяемые этими равенствами, были не только самосопряженными в каждой точке, но и согласованными, т. е. чтобы они представляли собой поле функционала. Ответ дает следующая

Теорема 4. Граничные условия $y'_i = \psi_i(x, y)$, определяемые при $a \leq x \leq b$ равенствами

$$F_{y'_i}(x, y, y') = g_{y_i}(x, y),$$

согласованы, если функция $g(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial g}{\partial x} + H\left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_n}\right) = 0. \quad (15)$$

Доказательство. Принимая во внимание, что

$$p_i(x, y, \psi(x, y)) = g_{y_i}(x, y), \quad (16)$$

можно уравнение Гамильтона — Якоби (15) переписать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -H(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n), \quad (17)$$

где $p_i = p_i(x, y, \psi(x, y))$. Продифференцировав это равенство по y_i , получим

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y_i} = - \frac{\partial H(x, y_1, \dots, y_n, \psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y))}{\partial y_i}, \quad (18)$$

т. е.

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} = - \frac{\partial H(x, y_1, \dots, y_n, \psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y))}{\partial y_i}, \quad (19)$$

а это и есть не что иное, как условия согласованности.

Сейчас уже легко усмотреть связь между введенной нами в § 27 системой Гамильтона — Якоби, которая для случая вариационной задачи переходит в условия согласованности (9), и уравнением Гамильтона — Якоби (15), рассмотренным еще в § 19. Для произвольной системы уравнений второго порядка поле представляет собой, как мы видели в § 27, систему n уравнений вида

$$y'_i = \psi_i(x, y),$$

где функции $\psi_i(x, y)$ удовлетворяют системе Гамильтона — Якоби. Для случая вариационной задачи эта система Гамильтона — Якоби превращается в условия согласованности (9). На поле функционала мы наложили еще условие самосопряженности граничных условий в каждой точке. Это приводит к тому, что поле функционала определяется уже не n функциями $\psi_i(x, y)$, а одной функцией $g(x, y)$, по которой функции $\psi_i(x, y)$ определяются посредством равенств $p_i(x, y, \psi(x, y)) = g_{y_i}(x, y)$. Функция $g(x, y)$ играет, таким образом, по отношению к полю функционала роль своего рода потенциала. При этом, поскольку для функционала поле определяется уже не n функциями, а одной, то и условия согласованности для такого поля задаются не n уравнениями, а одним уравнением, т. е. система Гамильтона — Якоби заменяется уравнением Гамильтона — Якоби (15).

Рассмотрим в $(n+1)$ -мерном пространстве некоторую область G , и пусть $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ — точка, лежащая вне этой области.

Рассмотрим, далее, семейство экстремалей функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

выходящих из точки c , и такое, что через каждую точку области G проходит одна и только одна экстремаль из этого семейства. Тем самым в каждой точке $(x, y_1, \dots, y_n)$ области G задано направление

$$y'_i = \psi_i(x, y). \quad (20)$$

Определенное таким образом на G поле направлений мы назовем *центральной полем*.

Теорема 5. *Всякое центральное поле представляет собой поле функционала*

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

(т. е. удовлетворяет условиям согласованности и самосопряженности).

Доказательство. Нужно показать, что поле направлений (20), полученное указанным выше способом, при каждом значении x удовлетворяет условиям самосопряженности. Пусть

$$g(x, y) = \int_c^{(x, y)} F(x, y, y') dx, \quad (21)$$

где интеграл берется вдоль экстремали, соединяющей точку $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ с точкой $(x, y_1, \dots, y_n)$. Определим в области G поле направлений, положив

$$F_{y'_i}(x, y, y') = g_{y_i}(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Покажем, что это поле направлений совпадает с исходным полем. Тем самым теорема будет доказана, так как исходное поле удовлетворяет условию согласованности (поскольку его траектории — экстремали), а поле, определяемое равенствами (22), самосопряженно в каждой точке в силу теоремы 1.

В § 19 мы уже рассматривали функцию (21) (там мы ее обозначали $S(x, y_1, \dots, y_n)$) и показали, что

$$g_{y_i}(x, y) = F_{y'_i}(x, y, z), \quad (23)$$

где z — вектор, касательный к экстремали, проходящей через точку $(x, y_1, \dots, y_n)$ (см. стр. 91, формула (46)). Отсюда видно, что поле направлений, определяемое равенствами (22), действительно совпадает с исходным полем.

Мы скажем, что данная экстремаль γ *окружена полем*, если существует такая область G , содержащая экстремаль γ , что во всех точках этой области определено поле рассматриваемого функционала, причем такое, что данная экстремаль γ является одной из траекторий этого поля.

Из теоремы 5 вытекает важное

Следствие. Если некоторая экстремаль γ , заданная уравнениями

$$y_i = y_i(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

не содержит точек, сопряженных с a , то эту экстремаль можно окружить полем.

Действительно, в этом случае можно выбрать настолько малое $\varepsilon > 0$, что

1) экстремаль γ можно продолжить на весь отрезок $[a - \varepsilon, b]$;

2) отрезок $[a - \varepsilon, b]$ не содержит точек, сопряженных с $a - \varepsilon$.

Рассмотрим совокупность экстремалей, выходящих из точки с координатами

$$a - \varepsilon, \quad y_i(a - \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Из отсутствия на отрезке $[a - \varepsilon, b]$ точек, сопряженных с $a - \varepsilon$, следует, что никакие две экстремали из этого семейства, достаточно близкие к исходной экстремали γ , не пересекаются при $a \leq x \leq b$. Эти достаточно близкие к γ экстремали определяют в некоторой, содержащей γ , области G центральное поле, окружающее γ .

§ 29. Инвариантный интеграл Гильберта

Пусть G — некоторая односвязная область в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных $x, y_1, \dots, y_n$ и пусть в G определено поле

$$y_i = \psi_i(x, y) \quad (1)$$

функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (2)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, поле направлений (1) представляет собой поле функционала (2) в том и только том случае, если функции $\psi_i(x, y)$ удовлетворяют условиям самосопряженности

$$\frac{\partial p_i(x, y, \psi(x, y))}{\partial y_k} = \frac{\partial p_k(x, y, \psi(x, y))}{\partial y_i} \quad (3)$$

и согласованности

$$\frac{\partial H(x, y, \psi(x, y))}{\partial y_i} = - \frac{\partial p_i(x, y, \psi(x, y))}{\partial x}. \quad (4)$$

Условия (3) и (4) в совокупности означают, что величина

$$-H(x, y, \psi(x, y)) dx + \sum_{i=1}^n p_i(x, y, \psi(x, y)) dy_i$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции

$g(x, y_1, \dots, y_n)$. Как известно из анализа, эта функция (определенная с точностью до постоянного слагаемого) может быть записана с помощью криволинейного интеграла

$$g(x, y_1, \dots, y_n) = \int_C -H dx + \sum_{i=1}^n p_i dy_i, \quad (5)$$

взятого вдоль кривой C , идущей из некоторой фиксированной точки $M_0 = (x^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ в точку $M = (x, y_1, \dots, y_n)$. Так как под знаком интеграла в (5) стоит полный дифференциал, то выбор кривой C не играет роли: значение интеграла зависит только от точек M_0 и M , а не от выбора кривой C . Этот интеграл (5) называется *инвариантным интегралом Гильберта*.

С помощью уравнений поля

$$y'_i = \psi_i(x, y)$$

и функции F , определяющей функционал (1), интеграл Гильберта можно записать следующим образом:

$$\int_C \left[F(x, y, \psi(x, y)) - \sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) F_{y'_i}(x, y, \psi(x, y)) \right] dx + \\ + \sum_{i=1}^n F_{y'_i}(x, y, \psi(x, y)) dy_i. \quad (6)$$

Итак, окончательно: инвариантным интегралом Гильберта (отвечающим данному полю) называется выражение (6), где $\psi_i(x, y)$ — функции, определяющие поле функционала.

Если кривая C , по которой берется интеграл, является одной из траекторий поля, то вдоль нее

$$dy_i = \psi_i(x, y) dx,$$

и интеграл (6) сводится к интегралу

$$\int_C F(x, y, y') dx,$$

взятому вдоль этой траектории.

Подчеркнем следующее, важное для дальнейшего обстоятельство. Если γ — некоторая экстремаль, являющаяся одной из траекторий поля, то интеграл Гильберта позволяет значение функционала (2) для этой экстремали записать в виде интеграла, который можно брать по *любой* кривой, соединяющей концы экстремали γ .

§ 30. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия сильного экстремума

Определение. Пусть дан функционал

$$\int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (1)$$

Функцией Вейерштрасса $E(x, y, z, w)$ этого функционала называется следующая функция $3n+1$ переменных:

$$E(x, y, z, w) = F(x, y, w) - F(x, y, z) - \sum_{i=1}^n (w_i - z_i) F_{y'_i}(x, y, z). \quad (2)$$

Таким образом, функция Вейерштрасса представляет собой разность между значением функции F (рассматриваемой как функция последних n аргументов) в точке w и первыми двумя членами ее разложения Тейлора с центром в точке z . Отсюда видно, что функция Вейерштрасса может быть записана в виде

$$E(x, y, z, w) = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n (w_i - z_i)(w_k - z_k) F_{y'_i y'_k}(x, y, z + \theta(w - z)), \quad (3)$$

т. е. как остаточный член формулы Тейлора.

При $n=1$ функция Вейерштрасса допускает следующую наглядно-геометрическую интерпретацию: рассмотрим $F(x, y, z)$ как функцию от z . Тогда

$$F(x, y, w) - F(x, y, z) - (w - z) F_{y'}(x, y, z)$$

представляет собой расстояние (по вертикали) от кривой, изображающей функцию $F(x, y, z)$ до касательной к этой кривой, проведенной через фиксированную точку этой кривой.

Целью данного параграфа является установление достаточных условий сильного экстремума для функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Напомним (см. §§ 24 и 25), что для достижения слабого экстремума достаточна следующая совокупность условий:

- 1) кривая $y_i = y_i(x)$ является экстремалью,
- 2) вдоль нее матрица $\|F_{y'_i y'_k}\|$ положительно определена,
- 3) отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a .

Каждый сильный экстремум является одновременно и слабым экстремумом, но, вообще, говоря, не наоборот, поэтому достаточные условия для сильного экстремума естественно искать следующим образом: «взять за основу» приведенные выше условия и затем дополнить их так, чтобы получить совокупность условий, обеспечивающих наличие не только слабого, но и сильного экстремума. Для нахождения этих дополнительных условий напомним прежде всего, что отсутствие сопряженных точек на рассматриваемой экстремали $y_i = y_i(x)$ позволяет окружить эту экстремаль полем функционала (1) (следствие из теоремы 5 § 28). Далее, по этому полю

$$y'_i = \psi(x, y)$$

можно согласно § 29 построить инвариантный интеграл Гильберта

$$\int_C \left[F(x, y, \psi(x, y)) - \sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) F_{y'_i}(x, y, \psi(x, y)) \right] dx + \\ + \sum_{i=1}^n F_{y'_i}(x, y, \psi(x, y)) dy_i.$$

Сравним теперь значение рассматриваемого функционала на данной экстремали $y_i = y_i(x)$, обозначим ее γ , с его значением на произвольной кривой $\tilde{\gamma}$, заданной уравнениями $y_i = \tilde{y}_i(x)$ и удовлетворяющей граничным условиям. Воспользовавшись тем (см. конец § 29), что величину

$$\int_{\gamma} F(x, y, y') dx$$

можно представить в виде интеграла Гильберта, взятого по кривой $\tilde{\gamma}$:

$$\int_{\gamma} F(x, y, y') dx = \int_{\tilde{\gamma}} \left[F(x, y, \psi) - \sum_{i=1}^n \psi_i F_{y'_i}(x, y, \psi) \right] dx + \\ + \sum_{i=1}^n F_{y'_i}(x, y, \psi) dy_i,$$

запишем разность

$$\int_{\tilde{\gamma}} F(x, y, y') dx - \int_{\gamma} F(x, y, y') dx \quad (4)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} F(x, y, y') dx - \int_{\gamma} F(x, y, y') dx &= \int_{\tilde{\gamma}} F(x, y, y') dx - \\ &- \int_{\tilde{\gamma}} \left[F(x, y, \psi) - \sum_{i=1}^n \psi_i F_{y'_i}(x, y, \psi) \right] dx + \sum_{i=1}^n F_{y'_i}(x, y, \psi) dy_i = \\ &= \int_a^b \left[F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - F(x, \tilde{y}, \psi) + \sum_{i=1}^n (\psi_i - \tilde{y}'_i) F_{y'_i}(x, \tilde{y}, \psi) \right] dx. \quad (5) \end{aligned}$$

Экстремаль γ реализует сильный минимум, если разность (4) неотрицательна для любой допустимой кривой $\tilde{\gamma}$, достаточно близкой (в смысле метрики C) к γ . Это условие будет, очевидно, выполнено, если выражение, стоящее в правой части равенства (5) под знаком интеграла, неотрицательно. Но это выражение представляет собой не что иное, как функцию Вейерштрасса

$$E(x, y, z, \omega),$$

в которой вместо ω_i представлены компоненты поля $\psi_i(x, y)$, вместо y_i — функции $\tilde{y}_i(x)$, определяющие произвольную допустимую кривую $\tilde{\gamma}$, а z_i заменены на $\frac{d\tilde{y}_i}{dx}$.

Поэтому экстремаль γ будет давать функционалу (1) сильный минимум, если мы к условиям 1—3 присоединим следующее требование:

$$E(x, y, z, \psi(x, y)) \geq 0 \quad (6)$$

для любых конечных z , в каждой точке $(x, y_1, \dots, y_n)$ некоторой области D , в которой задано поле

$$y'_i = \psi_i(x, y).$$

Так как функция Вейерштрасса E непрерывна по x и y , то условие (6) будет выполнено во всех точках, достаточно близких к экстремали γ , если в каждой точке этой экстремали выполнено строгое неравенство

$$E\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) > 0$$

при всех конечных z .

Заметим одновременно, что ослабленное условие

$$E\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) \geq 0$$

вдоль экстремали γ необходимо для того, чтобы эта экстремаль γ

давала функционалу (1) сильный минимум. Действительно, если в какой-либо точке экстремума γ выполнено противоположное неравенство

$$E\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) < 0,$$

то $E\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)$ отрицательно и в некоторой окрестности этой точки. А тогда уже приведенная выкладка (5) приводит нас к тому, что кривую γ можно в этой окрестности изменить так, чтобы полученная из γ в результате этого изменения кривая $\tilde{\gamma}$ удовлетворяла условию

$$\int_{\tilde{\gamma}} F(x, y, y') dx - \int_{\gamma} F(x, y, y') dx < 0.$$

Это означает, что на кривой γ минимум не достигается.

Итак, к установленным ранее необходимым условиям экстремума (как сильного, так и слабого), перечисленным в § 24, мы сейчас можем добавить еще следующее необходимое условие *сильного* экстремума (условие Вейерштрасса).

Если экстремаль γ доставляет функционалу

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

сильный экстремум, то вдоль нее (т. е. при $y = y(x)$, $y' = y'(x)$) при любых z функция Вейерштрасса

$$E\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) \equiv$$

$$\equiv F(x, y, z) - F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{dx} - z_i\right) F_{y'_i}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

неотрицательна.

Вернемся теперь к достаточным условиям сильного экстремума и сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Кривая $y_i = y_i(x)$ доставляет функционалу*

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \quad (y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i)$$

сильный минимум, если

- 1) *эта кривая является экстремалью,*
- 2) *матрица*

$$\|F_{y'_i y'_k}(x, y(x), y'(x))\|$$

положительно определена при $a \leq x \leq b$,

- 3) *отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряженных с a ,*

4) вдоль экстремали $y_i = y_i(x)$ выполнено неравенство

$$E\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) \equiv$$

$$\equiv F(x, y, z) - F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{dx} - z_i\right) F_{y'_i}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) > 0$$

при любых конечных $z \neq \frac{dy}{dx}$.

Действительно, из условий 2) и 3) следует, что экстремаль $y_i = y_i(x)$ можно окружить полем и, следовательно, построить интеграл Гильберта. Как уже было сказано выше, условие 4) гарантирует неотрицательность выражения, стоящего в равенстве (5) справа под знаком интеграла в некоторой области, окружающей рассматриваемую экстремаль, а это и обеспечивает сильный минимум функционала.

Так как, согласно сказанному выше, функция Вейерштрасса может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n (w_i - z_i)(w_k - z_k) F_{y'_i y'_k}(x, y, z + \theta(w - z)),$$

то условие 4) вытекает из следующего, более грубого условия:

4') матрица

$$\|F_{y'_i y'_k}(x, y, z)\|$$

для любых конечных z положительно определена в некоторой области, содержащей экстремаль $y_i = y_i(x)$.

Ясно, что это последнее условие влечет за собой не только условие 4), но и 2).

В случае $n = 1$ условие 4') означает, что

$$F_{y' y'}(x, y, z) \geq 0$$

при всех z и при (x, y) , принадлежащих некоторой области, которая содержит рассматриваемую экстремаль, т. е. выпуклость $F(x, y, z)$ как функции от z .

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой главе мы изложим ряд вопросов, относящихся к функционалам, зависящим от функций двух или большего числа переменных.

К рассмотрению таких функционалов приводят, в частности, задачи механики, относящиеся к системам с бесконечным числом степеней свободы (струна, мембрана и т. п.). Мы рассмотрим здесь, применительно к таким задачам, принцип наименьшего действия и общие методы получения законов сохранения (теорему Нетер), которые в гл. IV излагались для систем, состоящих из конечного числа материальных точек.

§ 31. Основная формула для вариации функционала в случае фиксированной области

Рассмотрим функционал

$$J[u] = \int \dots \int_G F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

зависящий от функции u переменных $x_1, \dots, x_n$ и ее частных производных первого порядка, и вычислим его вариацию, считая, что область интегрирования G не варьируется, а функция $u(x_1, \dots, x_n)$ переходит в

$$u^*(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \psi(x_1, \dots, x_n) + \dots, \quad (2)$$

где многоточие означает члены выше первого порядка малости по ε . При этом под вариацией функционала (1) мы понимаем главную линейную относительно ε часть разности

$$J[u^*] - J[u].$$

Вычислим эту разность. Для сокращения записи будем писать $u(x)$, $\psi(x)$ вместо $u(x_1, \dots, x_n)$, $\psi(x_1, \dots, x_n)$, dx вместо $dx_1 \dots dx_n$.

и т. п. Получим

$$\begin{aligned} J[u^*] - J[u] &= \\ &= \int_G [F(x, u(x) + \varepsilon \psi(x), u_{x_1}(x) + \varepsilon \psi_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x) + \varepsilon \psi_{x_n}(x)) - \\ &\quad - F(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x))] dx = \\ &= \varepsilon \int_G \left[F_u \psi(x) + \sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}} \psi_{x_k} \right] dx + \dots, \end{aligned}$$

где опять многоточие справа означает совокупность членов выше первого порядка относительно ε . Выражение

$$\delta J = \varepsilon \int_G \left[F_u \psi(x) + \sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}} \psi_{x_k} \right] dx \quad (3)$$

и есть вариация функционала (1).

Поставим следующую задачу, важную для дальнейшего: представить вариацию функционала (1) как интеграл от выражения вида

$$B(x) \psi(x) + \operatorname{div}(\dots);$$

иначе говоря, мы хотим преобразовать выражение (3) так, чтобы производные ψ_{x_k} содержались лишь в такой комбинации членов, которую можно представить в виде дивергенции. Для этой цели в формулу (3) вместо

$$F_{u_{x_k}} \psi_{x_k}(x)$$

подставим

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \psi(x)) - \frac{\partial F_{u_{x_k}}}{\partial x_k} \psi(x).$$

Получим

$$\delta J = \varepsilon \int_G \left[F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right] \psi(x) dx + \varepsilon \int_G \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \psi(x)) dx. \quad (4)$$

Эта формула для вариации является основной. Ее значение основано на том, что последнее слагаемое, представляющее собой интеграл от дивергенции, может быть сведено к интегралу по границе Γ области G .

В результате этого под знаком интеграла, взятого по G , будет стоять выражение, зависящее только от функции $\psi(x)$, но не от ее

производных, а члены с производными войдут лишь в граничные условия *).

Если функция $\psi(x)$, определяющая вариацию функции $u(x)$, обращается в нуль на границе области G , то интеграл

$$\int_G \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \psi(x)) dx$$

обращается, в силу формулы Грина (*), в нуль, т. е. формула для вариации сводится к

$$\delta J = \int_G \left(F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \psi(x) dx. \quad (*)$$

Из общего необходимого условия экстремума функционала

$$\delta J = 0$$

вытекает, как это уже было изложено в гл. I, уравнение Эйлера

$$F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0,$$

представляющее собой основное необходимое условие экстремума для функционала (1).

Мы вывели формулу (4) для вариации, считая область интегрирования G фиксированной. Обобщение этой формулы на тот случай, когда в функционале (1) область интегрирования тоже варьируется, будет сделано в § 33.

*) Для этого достаточно воспользоваться n -мерной формулой Грина, которая в данном случае может быть записана так:

$$\begin{aligned} \int_G \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \psi(x)) dx = \\ = \int_{\Gamma} F_{u_{x_1}} \psi(x) dx_2 \dots dx_n - \dots + (-1)^n F_{u_{x_n}} \psi(x) dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (*) \end{aligned}$$

Этим приемом формула для вариации (4) приводится к виду, вполне аналогичному формуле для вариации функционала, зависящего от линий, которая тоже записывается как интеграл от $\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h(x)$ плюс граничные члены (см. § 11).

§ 32. Вариационный вывод уравнений колебаний струны, мембраны и пластинки

В этом параграфе мы рассмотрим применение полученной в § 31 основной формулы для вариации к выводу уравнений движения некоторых механических систем с бесконечным числом степеней свободы. С дальнейшим изложением содержание этого параграфа не связано.

В § 17 было показано, что уравнения движения для механической системы, состоящей из n материальных точек, могут быть получены из так называемого принципа наименьшего действия, который состоит в следующем: если U — потенциальная энергия системы материальных точек, а T — ее кинетическая энергия, то траектория этой системы в фазовом пространстве доставляет минимум функционалу

$$\int_a^b (T - U) dt, \quad (1)$$

который называется действием.

В этом параграфе мы рассмотрим применение принципа наименьшего действия к выводу уравнений колебаний (и соответствующих краевых условий) для некоторых простейших систем с бесконечным числом степеней свободы, а именно для струны, мембраны и пластинки.

1. Струна. Рассмотрим движение струны, т. е. гибкой материальной нити с линейной плотностью $\rho = \text{const.}$ Предположим, что концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены упруго, т. е. что при отклонении их от положения равновесия возникает сила, пропорциональная этому отклонению *).

Обозначим $u(x, t)$ отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t . Кинетическая энергия струны равна, очевидно,

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^l u_t^2(x, t) dx. \quad (2)$$

Найдем теперь выражение для потенциальной энергии струны, находящейся в момент t в положении, описываемом некоторой определенной функцией $u(x, t)$ (при фиксированном t). Эта потенциальная энергия равна той работе, которую нужно затратить для того, чтобы перевести струну из положения

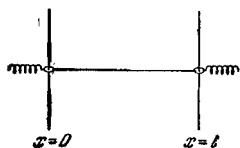


Рис. 8.

*) Такое закрепление можно осуществить, например, следующим образом: концы струны закреплены с помощью двух колечек на параллельных стержнях, а сами эти колечки удерживаются в начальном положении двумя пружинками (рис. 8).

равновесия в рассматриваемое положение. Подчеркнем, что струна считается абсолютно гибкой, т. е. вся работа идет на ее растяжение (а не на изгиб). Пусть натяжение струны равно $T_0 = \text{const.}$ Рассмотрим некоторый элемент струны в двух положениях: начальном и конечном (рис. 9). Мы рассматриваем малые колебания струны,

поэтому можно считать, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ есть малая величина при всех значениях t . Работа, которая при этом совершается, равна произведению силы (натяжения струны) T_0 на путь, который проделывает один из концов рассматриваемого элемента, и на косинус угла между силой натяжения и направлением перемещения.

Это произведение равно, очевидно, произведению T_0 на удлинение рассматриваемого элемента струны, т. е. равно

$$T_0 \sqrt{du^2 + dx^2} - T_0 dx = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \dots,$$

где многоточие означает члены более высокого (по сравнению с выписанными) порядка малости. Мы нашли работу, отвечающую элементу струны. Для всей струны эта работа равна

$$\frac{T_0}{2} \int_0^l u_x^2(x, t) dx.$$

Сюда нужно еще прибавить работу, затрачиваемую на смещение упруго закрепленных концов. Она равна *)

$$\frac{\sigma_1}{2} u^2(0, t) + \frac{\sigma_2}{2} u^2(l, t), \quad (3)$$

где σ_1 и σ_2 — постоянные. Поэтому потенциальная энергия струны, находящейся в момент времени t в положении, описываемом функцией $u(x, t)$, равна

$$U = \frac{T_0}{2} \int_0^l u_x^2(x, t) dx + \frac{\sigma_1}{2} u^2(0, t) + \frac{\sigma_2}{2} u^2(l, t), \quad (4)$$

*) При упругом закреплении конца $x=0$ сила, действующая на него в момент t , пропорциональна его отклонению от положения равновесия, т. е. равна $\sigma_1 u(0, t)$. Следовательно, работа, совершаемая при его перемещении из нулевого положения в положение $u(0, t)$, равна $\frac{\sigma_1}{2} u^2(0, t)$. Аналогично для второго конца.

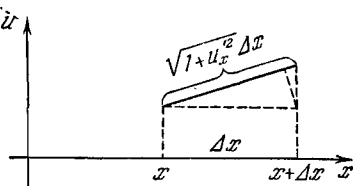


Рис. 9.

а действие за некоторый промежуток времени $[t_0, t_1]$ имеет вид

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [\rho u_t^2(x, t) - T_0 u_x^2(x, t)] dx dt + \\ + \frac{\sigma_1}{2} \int_{t_0}^{t_1} u^2(0, t) dt + \frac{\sigma_2}{2} \int_{t_0}^{t_1} u^2(l, t) dt. \quad (5)$$

Согласно принципу наименьшего действия, функция $u(x, t)$, описывающая реальное движение струны, должна быть экстремалью функционала (5).

Выпишем для этого функционала основное необходимое условие экстремума

$$\delta J = 0.$$

Воспользовавшись полученной в предыдущем параграфе формулой (4) для вариации и тем, что вариация суммы равна сумме вариаций, получим

$$\delta J = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [-\rho u_{tt}(x, t) + T_0 u_{xx}(x, t)] \psi(x, t) dx dt + \right. \\ + \sigma_1 \int_{t_0}^{t_1} u(0, t) \psi(0, t) dt + \sigma_2 \int_{t_0}^{t_1} u(l, t) \psi(l, t) dt + \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} (-T_0 u_x(x, t) \psi(x, t)) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t(x, t) \psi(x, t)) \right] dx dt \right\} \quad (6)$$

(эта вариация отвечает переходу от функции $u(x, t)$ к функции

$$u^*(x, t) = u(x, t) + \varepsilon \psi(x, t) + \dots).$$

Относительно функции $\psi(x, t)$ мы предположим, что

$$\psi(x, t_0) = \psi(x, t_1) \equiv 0,$$

т. е. будем считать, что в начальный и конечный моменты функция $u(x, t)$ не варьируется. Тогда последнее слагаемое в (6) можно преобразовать так:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (-T_0 u_x(x, t) \psi(x, t)) dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t(x, t) \psi(x, t)) dx dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} [T_0 u_x(0, t) \psi(0, t) - T_0 u_x(l, t) \psi(l, t)] dt,$$

и затем переписать выражение вариации (6) следующим образом:

$$\delta J = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\sigma_1 u(0, t) + T_0 u_x(0, t)] \psi(0, t) dt + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} [\sigma_2 u(l, t) - T_0 u_x(l, t)] \psi(l, t) dt + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [T_0 u_{xx}(x, t) - \rho u_{tt}(x, t)] \psi(x, t) dx dt \right\}. \quad (7)$$

Согласно принципу наименьшего действия, это выражение должно быть равно нулю для той функции, которая отвечает реальному движению струны.

Пусть сначала $\psi(x, t)$ обращается в нуль на концах, т. е. при $x=0$ и при $x=l$. Тогда выражение (7) для δJ сводится к одному двойному интегралу. Приравнявая его нулю, получаем (см. лемму 1' § 5)

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho} > 0. \quad (8)$$

Это и есть уравнение колебаний струны. Оно представляет собой уравнение Эйлера для функционала

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [\rho u_t^2(x, t) - T_0 u_x^2(x, t)] dx dt.$$

Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению колебаний струны (8). Для такой функции выражение (7) для вариации δJ сводится к

$$\int_{t_0}^{t_1} [\sigma_1 u(0, t) + T_0 u_x(0, t)] \psi(0, t) dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} [\sigma_2 u(l, t) - T_0 u_x(l, t)] \psi(l, t) dt.$$

Это выражение должно быть равно нулю. В силу произвольности $\psi(0, t)$ и $\psi(l, t)$ это требование приводит к двум равенствам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 u(0, t) + T_0 u_x(0, t) &= 0, \\ \sigma_2 u(l, t) - T_0 u_x(l, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, функция $u(x, t)$, описывающая колебания струны, должна удовлетворять уравнению (8) и граничным условиям

$$\alpha u(0, t) + u_x(0, t) = 0 \quad \left(\alpha = \frac{\sigma_1}{T_0} \right), \quad (9_1)$$

$$\beta u(l, t) + u_x(l, t) = 0 \quad \left(\beta = -\frac{\sigma_2}{T_0} \right), \quad (9_2)$$

связывающим отклонение каждого из концов струны от положения равновесия с направлением касательной к струне на этом же конце.

Если концы струны свободны*), то $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, и граничные условия (9) принимают вид

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0,$$

т. е. на свободном конце касательная к струне сохраняет все время то направление, которое она имеет в положении равновесия. Жесткое закрепление концов струны, т. е. граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (10)$$

можно рассматривать как предельный случай упругого закрепления их. Действительно, если считать, что жесткость удерживающих концы струны пружин неограниченно возрастает, то это означает, что $\sigma_1 \rightarrow \infty$ и $\sigma_2 \rightarrow \infty$, т. е. $\alpha \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow -\infty$. Деля (9₁) на α и (9₂) на β и переходя к пределу, получаем условия (10).

2. Замечание о принципе наименьшего действия. Принцип наименьшего действия широко используется не только в механике, но и в других областях физики: электродинамике, теории поля и т. д. Вместе с тем следует иметь в виду, что этот принцип, в известном смысле, не вполне верен.

Рассмотрим простейшую механическую систему — материальную точку, колеблющуюся вокруг положения равновесия под действием упругой силы (осциллятор). Потенциальная энергия такой материальной точки равна

$$U = kx^2,$$

а кинетическая

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

поэтому для нее действие имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - kx^2 \right) dt. \quad (11)$$

*) Мы называем концы струны свободными, если в схеме, указанной в сноске на стр. 154, пружинки отсутствуют. Колечки, с помощью которых струны закреплены на прямых $x=0$ и $x=l$, в этом случае свободно передвигаются вверх и вниз.

Уравнение движения осциллятора

$$m\ddot{x} + 2kx = 0. \quad (12)$$

Каждое его решение записывается в виде

$$x = A \sin \omega(t + \alpha), \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \quad (13)$$

значения постоянных A и α определяются из граничных условий.

Уравнение (12) представляет собой уравнение Эйлера для функционала (11). Однако утверждать, что его решение (13) обязательно реализует минимум функционала (11), мы, вообще говоря, не можем. Действительно, рассмотрим, например, решение

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t; \quad (14)$$

оно проходит через точку $x=0$, $t=0$ и удовлетворяет условию $\dot{x}(0)=1$. С точкой $(0, 0)$ сопряжена точка $t=\frac{\pi}{\omega}$ (в этой точке экстремаль (14) пересекается с каждой из экстремалей, удовлетворяющих условию $x(0)=0$). Так как для рассматриваемого функционала (11)

$$F_{\dot{x}\dot{x}} = m > 0,$$

то при $t_0 < \frac{\pi}{\omega}$ экстремаль

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

удовлетворяет достаточным условиям минимума (не только слабого, но и сильного). Однако если рассматривать интервал времени, больший чем $\frac{\pi}{\omega}$, то утверждать, что соответствующая экстремаль обязательно будет давать минимум функционалу (11), нельзя.

Рассмотрим теперь систему n осцилляторов; ее кинетическая энергия записывается в виде квадратичной формы от скоростей

$$T = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (15)$$

а потенциальная энергия — в виде квадратичной формы от координат

$$U = \sum_{i, k=1}^n b_{ik} x_i x_k. \quad (16)$$

Так как квадратичная форма (15), представляющая кинетическую энергию, положительно определена, то формы (15) и (16) можно

линейной заменой переменных одновременно привести к сумме квадратов *), т. е. к виду

$$T = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2, \quad U = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i^2.$$

В этих новых переменных действие записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i^2 - \lambda_i q_i^2) dt.$$

Напишем соответствующие уравнения Эйлера

$$\ddot{q}_i + \lambda_i q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Это — уравнение движения системы n осцилляторов. Будем считать все λ_i положительными (это означает, что рассматриваются колебания системы вокруг положения устойчивого равновесия). Тогда решения системы (17) имеют вид

$$q_i(t) = A_i \sin \omega_i(t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где A_i и α_i — постоянные, определяемые из начальных условий, а $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Рассуждения, аналогичные проведенным выше для одного осциллятора, показывают, что отрезок траектории (задается уравнениями вида (17)), временная длина которого не превосходит $\frac{\pi}{\omega}$, где $\omega = \max_i \omega_i$, не содержит сопряженных точек и удовлетворяет всем остальным достаточным условиям минимума. Однако, если рассматривается интервал времени, больший чем $\frac{\pi}{\omega}$, то гарантировать, что отрезок экстремали, отвечающий этому интервалу, действительно реализует минимум действия, нельзя.

Рассмотрим теперь колебания струны. Мы не будем приводить здесь такой анализ, как для одного или нескольких осцилляторов, а ограничимся следующим элементарным рассуждением.

Решение уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

может быть записано в виде **)

$$u(x, t) = \sum_n a_n(x) \sin \omega_n(t + \alpha_n),$$

*) Подробнее об этом см., например, Г. Е. Ш и л о в, Введение в теорию линейных пространств.

**) См., например, И. Г. П е т р о в с к и й, Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1950, § 20.

где $a_n(x)$ и α_n определяются из начальных и краевых условий, а

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Поэтому струну можно рассматривать, в известном смысле, как систему бесконечного числа осцилляторов, имеющих собственные частоты $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$. Но числа $\frac{n\pi}{l}$ не ограничены сверху, поэтому аналогия с осцилляторами заставляет думать, что для струны нет временного интервала, настолько малого, чтобы на нем решение $u(x, t)$ уравнения струны непременно реализовывало бы минимум функционала, представляющего собой действие для колеблющейся струны длины l . Аналогичные рассуждения можно провести и для других систем с бесконечным числом степеней свободы.

Исходя из изложенных соображений, лучше говорить не о принципе *наименьшего*, а о принципе *стационарного* действия, понимая под этим обращение в нуль вариации действия вдоль истинной траектории движения.

3. Мембрана. Рассмотрим задачу о колебаниях мембраны. Обозначим $u(x, y, t)$ отклонение точки (x, y) мембраны от равновесия в момент времени t . Кинетическая энергия мембраны в момент t

$$\frac{\rho}{2} \int_G \int u_t^2(x, y, t) dx dy,$$

где ρ — плотность мембраны, а интеграл берется по всей занимаемой мембраной области. Найдем потенциальную энергию мембраны в состоянии, описываемом функцией $u(x, y, t)$, где t фиксировано. Она равна работе, которую нужно затратить для того, чтобы перевести мембрану из положения равновесия $u \equiv 0$ в рассматриваемое положение. Эта работа складывается из работы смещения края мембраны (который мы будем считать закрепленным упруго) и работы, затрачиваемой на деформацию мембраны. Первое слагаемое равно

$$\frac{1}{2} \int_L \sigma(s) u^2(s, t) ds,$$

где L — граница мембраны, $u(s, t)$ — ее отклонение от положения равновесия, а $\sigma(s)$ — коэффициент упругости в точке s . Второе слагаемое может быть записано в виде

$$\frac{T_0}{2} \int_G \int (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

Действительно, подобно тому, как работа, затрачиваемая на деформацию элемента струны, равна произведению натяжения на изменение его длины, работа, затрачиваемая на деформацию элемента мембраны,

равна произведению натяжения мембраны на изменение площади этого элемента. При деформации мембраны элемент площади $dx dy$ переходит в $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy$. Ограничиваясь в выражении

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy - dx dy$$

главными членами получаем, приращение элемента площади

$$\frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

Работа, совершаемая при деформации элемента мембраны, равна

$$\frac{T_0}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy,$$

а работа, затрачиваемая на деформацию всей мембраны, есть

$$\frac{T_0}{2} \int_G \int (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

Таким образом, для мембраны действие имеет вид

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_L \sigma(s) u^2(s, t) ds dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int [\rho u_t^2(x, y, t) - T_0(u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t))] dx dy dt.$$

Воспользовавшись формулой (4) предыдущего параграфа, найдем вариацию этого функционала, считая, что функция $u(x, y, t)$ переходит в

$$u^*(x, y, t) = u(x, y, t) + \varepsilon \psi(x, y, t) + \dots$$

Получаем

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_L \sigma(s) u(s, t) \psi(s, t) ds dt + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int [-\rho u_{tt}(x, y, t) + \\ + T_0(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t))] \psi(x, y, t) dx dy dt + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t(x, y, t) \psi(x, y, t)) - \frac{\partial}{\partial x} (T_0 u_x(x, y, t) \psi(x, y, t)) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} (T_0 u_y(x, y, t) \psi(x, y, t)) \right] dx dy dt. \quad (18)$$

Как и в случае струны, будем считать, что функция ψ , определяющая вариацию, равна нулю в начальный и конечный моменты

$$\psi(x, y, t_0) = \psi(x, y, t_1) \equiv 0. \quad (19)$$

Воспользовавшись формулой Остроградского и приняв во внимание условие (19), мы можем переписать последнее слагаемое в выражении для вариации (18) следующим образом (здесь и далее мы для сокращения записи опускаем аргументы) в виде поверхностного интеграла:

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_L \rho u_t \psi \, dx \, dy - T_0 u_x \psi \, dt \, dy - T_0 u_y \psi \, dt \, dx. \quad (20)$$

Так как интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_L \rho u_t \psi \, dx \, dy \quad (21)$$

равен нулю (как интеграл по цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси t), а

$$\begin{aligned} \int_L u_x \, dy + u_y \, dx = \\ = \int_L \left[\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \sin(\widehat{n, x}) + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \cos(\widehat{n, x}) \right] ds = \int_L \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \end{aligned}$$

(где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению нормали к L), то окончательно выражение (18) для вариации можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_L \left(\sigma(s) u - T_0 \frac{\partial u}{\partial n} \right) \psi \, ds \, dt + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_L (T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - \rho u_{tt}) \psi \, dx \, dy \, dt. \quad (22) \end{aligned}$$

Предположим сначала, что на границе мембраны $\psi \equiv 0$, т. е. что в граничных точках функция u не варьируется. Тогда в полученном выражении для δJ остается лишь тройной интеграл, и условие $\delta J = 0$ приводит к уравнению

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \quad (23)$$

Это и есть уравнение колебаний мембраны. Если функция u удовлетворяет этому уравнению, то выражение (22) для δJ сводится к

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_L \left(\sigma(s) u(s, t) - T_0 \frac{\partial u(s, t)}{\partial n} \right) \psi(s, t) ds dt.$$

Приравнявая это выражение к нулю, получаем, в силу произвольности интервала (t_0, t_1) и $\psi(s, t)$, что

$$\sigma(s) u(s, t) - T_0 \frac{\partial u(s, t)}{\partial n} = 0.$$

Это — граничное условие для уравнения мембраны, отвечающее упругому закреплению ее границы. В частности, если эта граница свободна, то $\sigma(s) \equiv 0$, и мы получаем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

— граничное условие для свободной мембраны; жесткому закреплению границы отвечает $\sigma(s) = \infty$, т. е. условие

$$u(s, t) = 0.$$

4. Пластика. Применим в заключение принцип стационарного действия к выводу уравнения и краевых условий для колебаний пластинки. Пусть $u(x, y, t)$ — отклонение пластинки от положения равновесия в точке (x, y) в момент времени t . Потенциальная энергия пластинки определяется ее изгибом, следовательно, она должна выражаться через вторые производные *) функции $u(x, y, t)$ по пространственным переменным x и y . Далее, выражение для потенциальной энергии должно быть квадратично относительно производных (для получения линейного уравнения колебаний) и не должно зависеть от выбора системы координат. Этим условиям удовлетворяют лишь детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} \quad (24)$$

и квадрат ее следа. Поэтому потенциальная энергия U_1 деформации пластинки должна записываться в виде интеграла от

$$A(u_{xx} + u_{yy})^2 + B(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2).$$

Обычно полагают

$$U_1 = \frac{k}{2} \int_Q \int \left[(u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) \right] dx dy, \quad (25)$$

*) Считается, что пластинка «не работает на растяжение», поэтому первые производные в выражение для потенциальной энергии пластинки не входят.

где k — коэффициент, зависящий от выбора единиц (в дальнейшем мы будем его считать равным 1). К энергии U_1 нужно прибавить еще энергию внешних сил $f(x, y)$ и $p(s)$ (если такие есть), действующих на поверхность пластинки и на границу L , а также и энергию заданных на границе изгибающих моментов $m(s)$. Суммарное выражение для этих энергий имеет вид

$$U_2 = \int_G \int f(x, y) u \, dx \, dy + \int_L p(s) u \, ds + \int_L m(s) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Кинетическая энергия пластинки записывается, очевидно, в виде

$$\frac{\rho}{2} \int_G \int u_t^2 \, dx \, dy,$$

где ρ — плотность.

Таким образом, для действия получаем следующее выражение:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_G \int \left[\frac{1}{2} (u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1 - \mu) (u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + f(x, y) u \right] dx \, dy + \int_L p(s) u \, ds + \int_L m(s) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \right\} dt. \quad (26)$$

Заметим, что выражение (26) представляет собой функционал более общего вида, чем те, которые мы рассматривали выше (струна, мембрана), так как подынтегральное выражение зависит от производных неизвестной функции порядка выше первого. Вариацию функционала (26), отвечающую переходу от функции u к функции $u + \varepsilon \psi + \dots$, можно представить в следующем виде (промежуточные выкладки мы опускаем):

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_G \int [\Delta \Delta u + f(x, y) - u_{tt} \rho] \psi \, dx \, dy - \right. \\ \left. - \int_L (P(u) - p(s)) \psi \, ds - \int_L (M(u) - m(s)) \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds \right\} dt,$$

где

$$\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

и

$$M(u) = -[\mu \Delta u + (1 - \mu)(u_{xx} x_n^2 + 2u_{xy} x_n y_n + u_{yy} y_n^2)],$$

$$P(u) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \tau} (u_{xx} x_n x_\tau + u_{xy} (x_n y_\tau + x_\tau y_n) + u_{yy} y_n y_\tau).$$

(здесь x_n , y_n и x_τ , y_τ — направляющие косинусы внешней нормали n и касательной τ). Считая, что на границе пластинки функция u и ее нормальная производная не варьируются, получаем, в силу произвольности как интервала (t_0, t_1) , так и выбора ψ внутри области G , уравнение

$$\rho u_{tt} = \Delta u + f(x, y), \quad (27)$$

представляющее собой уравнение вынужденных колебаний пластинки. При отсутствии внешних сил (т. е. при $f \equiv 0$) получаем уравнение свободных колебаний пластинки

$$\rho u_{tt} = \Delta u. \quad (28)$$

Наконец, полагая в уравнении (27) $u_{tt} = 0$, получим уравнение для нахождения положения равновесия упругой пластинки, нагруженной внешними силами:

$$\Delta u + f(x, y) = 0. \quad (29)$$

Это последнее уравнение может быть получено непосредственно из условия обращения в минимум потенциальной энергии пластинки.

Если $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (27), то выражение для вариации действия принимает вид

$$-\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_L (P(u) - p(s)) \psi ds + \int_L (M(u) - m(s)) \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \right] dt.$$

В силу произвольности интервала $[t_0, t_1]$, функций ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, получаем, что

$$P(u) - p(s) = 0 \quad \text{и} \quad M(u) - m(s) = 0. \quad (30)$$

Это — так называемые *естественные граничные условия*. Если граница пластинки закреплена, т. е. если на границе

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (31)$$

то естественные граничные условия заменяются условиями (31). Если же рассматривается опертая пластинка, т. е. сама граница пластинки неподвижна, но направление нормали к ней в точках границы может меняться, то получаем следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad \mu \Delta u + (1 - \mu)(u_{xx}x_n^2 + 2u_{xy}x_ny_n + u_{yy}y_n^2) = 0. \quad (32)$$

Следует обратить внимание на то, что выражение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2,$$

которое, очевидно, представляет собой дивергенцию вектора $(u_x u_{yy}, -u_x u_{xy})$, не участвует в уравнении (27), а входит лишь

в граничные условия. В силу этого в уравнение (27) не входит и коэффициент μ .

Как выше было указано, применительно к пластинке, при отыскании положения равновесия той или иной системы, условие стационарности действия переходит в условие стационарности потенциальной энергии (поскольку для тела, находящегося в положении равновесия, кинетическая энергия равна нулю). При этом устойчивое положение равновесия (а только такие и могут быть реализованы физически) отвечает минимуму потенциальной энергии. В теории упругости для нахождения состояния равновесия упругого тела часто используется вместо принципа минимума потенциальной энергии принцип минимума работы деформации, называемой также принципом Кастилиано. Изложение этого принципа и доказательство эквивалентности его принципу минимума потенциальной энергии читатель может найти, например, в книге Р. Куранта и Д. Гильберта, Методы математической физики, т. I, гл. IV, § 11.

§ 33. Основная формула для вариации в случае переменной области. Теорема Нетер

1. Постановка задачи. В § 31 мы вывели формулу для вариации функционала

$$\int_G \dots \int F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

считая, что в нем варьируется лишь функция u (а значит, и ее производные), а независимые переменные (следовательно, и область интегрирования G) никак не меняются. Сейчас мы рассмотрим задачу о нахождении вариации функционала (1) в самом общем случае, т. е. когда варьируется не только функция u (и ее производные), но и независимые переменные

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Уточним постановку задачи.

Пусть задано преобразование

$$x_i^* = \Phi_i(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$u^* = \Psi(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon). \quad (2')$$

Если $u = u(x_1, \dots, x_n)$, то u^* можно рассматривать как функцию от $x_1^*, \dots, x_n^*$. Действительно, из соотношений (2) можно в этом случае выразить $x_1, \dots, x_n$ через $x_1^*, \dots, x_n^*$; подставив эти выражения в (2'), представим u^* в виде

$$u^* = u^*(x_1^*, \dots, x_n^*).$$

Соотношения (2) (при условии, что $u = u(x_1, \dots, x_n)$) переводят область G изменения переменных $x_1, \dots, x_n$ в некоторую область G^* изменения переменных $x_1^*, \dots, x_n^*$. Мы предположим, что преобразование (2), (2') при $\varepsilon = 0$ сводится к тождественному преобразованию

$$x_i^* = x_i, \quad u^* = u.$$

Введем для упрощения записи сокращенные обозначения: будем писать x вместо $x_1, \dots, x_n$ и x^* вместо $x_1^*, \dots, x_n^*$. Формулы (2), (2') дают возможность каждой функции $u(x)$ и области G сопоставить функцию $u^*(x^*)$ и область G^* . Тем самым интегралу

$$J[u(x)] = \int_G F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx$$

ставится в соответствии интеграл

$$J[u^*(x^*)] = \int_{G^*} F(x^*, u^*, u_{x_1^*}, \dots, u_{x_n^*}) dx^*.$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить вариацию функционала (1), отвечающую переходу от x и $u(x)$ к x^* и $u^*(x^*)$, т. е. главную линейную (относительно ε) часть разности

$$J[u^*(x^*)] - J[u(x)].$$

Проиллюстрируем постановку задачи на простом примере, относящемся к функционалам, зависящим от функций одного переменного.

Пусть

$$u = u(x)$$

— некоторая кривая γ , лежащая в плоскости (x, u) , и пусть рассматриваемое преобразование представляет собой поворот плоскости (x, u) на угол ε . При этом каждая точка (x, u) переходит в некоторую другую точку (x^*, u^*) . В частности, каждая точка кривой γ переходит в точку кривой γ^* , получающейся из данной кривой с помощью поворота.

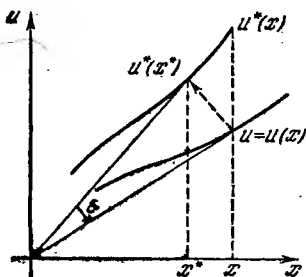


Рис. 10.

2. Формулы для вариаций переменных x и u . Рассмотрим предварительно более подробно переход от x к x^* и от u к u^* . Положим

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \varphi_i(x) + \text{члены высшего порядка} \quad (3)$$

и

$$u^*(x^*) = u(x) + \varepsilon \psi(x) + \text{члены высшего порядка}. \quad (3')$$

Здесь, очевидно,

$$\varphi_l = \frac{\partial x_l}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \psi = \frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Введем обозначения

$$\delta x_l = \varepsilon \varphi_l, \quad (4)$$

$$\delta u = \varepsilon \psi. \quad (4')$$

Нам понадобится еще разность

$$u^*(x) - u(x);$$

мы представим ее в виде

$$u^*(x) - u(x) = \varepsilon \bar{\psi}(x) + \text{члены высшего порядка по } \varepsilon$$

и положим

$$\bar{\delta u} = \varepsilon \bar{\psi}. \quad (5)$$

Прежде, чем двигаться дальше, рассмотрим смысл введенных нами величин δx_l , δu и $\bar{\delta u}$ на указанном выше примере поворота на угол ε вокруг начала координат. В этом случае каждая точка (x, u) переходит в точку с координатами

$$x^* = x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon,$$

$$u^* = x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon.$$

В частности, точка $(x, u(x))$, лежащая на кривой γ , переходит в точку, лежащую на γ^* и имеющую координаты

$$x^* = x \cos \varepsilon - u(x) \sin \varepsilon,$$

$$u^*(x^*) = x \sin \varepsilon + u(x) \cos \varepsilon,$$

поэтому

$$x^* = x - \varepsilon u(x) + \text{члены высшего порядка},$$

$$u^*(x^*) = u(x) + \varepsilon x + \text{члены высшего порядка},$$

т. е., в соответствии с (3) и (3'),

$$\varphi = -u(x), \quad \psi = x,$$

и, значит (см. (4) и (4')),

$$\delta x = -\varepsilon u(x), \quad \delta u = \varepsilon x.$$

То, что вектор, соединяющий точки $(x, u(x))$ и $(x^*, u^*(x^*))$, имеет именно компоненты $-\varepsilon u(x)$ и εx , видно и непосредственно из чертежа.

Далее, в нашем случае,

$$u^*(x) = u^*(x^* + \varepsilon u(x)) = u^*(x^*) + \varepsilon u^{*'}(x^*) u(x) + o(\varepsilon);$$

но так как

$$u^{*'}(x^*) = u'(x) + \text{величина порядка } \epsilon,$$

то

$$u^*(x) = u^*(x^*) + \epsilon u'(x) u(x) + o(\epsilon),$$

т. е. в данном случае

$$\bar{\delta}u = \epsilon (x + u'(x) u(x))$$

или

$$\bar{\psi}(x) = x + u'(x) u(x).$$

Вернемся теперь к общему случаю. Найдем связь между δu и $\bar{\delta}u$. Имеем

$$\begin{aligned} u^*(x^*) - u(x) &= u^*(x^*) - u^*(x) + u^*(x) - u(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \varphi_i(x) + \bar{\delta}u + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Так как $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ отличаются друг от друга на величину порядка ϵ , то окончательно

$$u^*(x^*) - u(x) \sim \sum_{i=1}^n \epsilon \varphi_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \bar{\delta}u = \bar{\delta}u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta x_i$$

(здесь и ниже символ $\sim$ означает равенство с точностью величин выше первого порядка малости относительно ϵ). Но главная линейная относительно ϵ часть разности $u^*(x^*) - u(x)$ есть δu , поэтому

$$\delta u = \bar{\delta}u + \epsilon \sum_{i=1}^n \varphi_i u_{x_i} \equiv \bar{\delta}u + \sum_{i=1}^n u_{x_i} \delta x_i \quad (6)$$

или

$$\psi = \bar{\psi} + \sum_{i=1}^n \varphi_i u_{x_i}.$$

Для того чтобы вычислить разность

$$J[u^*(x^*)] - J[u(x)],$$

нам нужно еще сосчитать

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_i^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \quad (7)$$

Точнее говоря, нам нужно вычислить главную линейную относительно ϵ часть этого выражения. Мы обозначим ее символом δu_{x_i} .

Запишем прежде всего $\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k}$. Это нам понадобится не только для нахождения δu_{x_i} , но еще и для выражения элемента объема области G^* через переменные $x_1, \dots, x_n$. Из формулы (3) получаем, что

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} = \delta_{ik} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Далее, отсюда мы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\delta_{ik} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k^*} + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i^*}; \end{aligned} \quad (8)$$

и значит

$$\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k^*} = \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i^*}. \quad (9)$$

Вернемся к вычислению δu_{x_i} . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} &= \\ &= \frac{\partial [u^*(x^*) - u(x^*)]}{\partial x_k^*} + \frac{\partial [u(x^*) - u(x)]}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим каждое из стоящих справа трех слагаемых в отдельности.

Разность $u^*(x^*) - u(x^*)$ представляет собой величину порядка ε , поэтому в первом слагаемом можно дифференцирование по x_k^* заменить дифференцированием по x_k (в силу (9) результат от этого изменится на величину порядка ε^2). Таким образом, вспоминая, что $u^*(x) - u(x) \sim \varepsilon \bar{\psi}(x)$, получаем

$$\frac{\partial [u^*(x^*) - u(x^*)]}{\partial x_k^*} \sim \frac{\partial [u^*(x^*) - u(x^*)]}{\partial x_k} \sim \varepsilon \frac{\partial \bar{\psi}(x^*)}{\partial x_k};$$

но $\frac{\partial \bar{\psi}(x^*)}{\partial x_k}$ отличается на величину порядка ε от $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k}$. Поэтому окончательно *):

$$\frac{\partial [u^*(x^*) - u(x^*)]}{\partial x_k^*} \sim \varepsilon \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_k}. \quad (10)$$

Далее

$$\frac{\partial [u(x^*) - u(x)]}{\partial x_k} \sim \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} (x_i^* - x_i) \right) \sim \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x). \quad (11)$$

И наконец

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k^*} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u(x^*) \sim \left(\frac{\partial}{\partial x_k^*} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u(x) \sim -\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \quad (12)$$

Собирая вместе полученные нами формулы (10), (11) и (12), находим

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \sim \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right). \quad (13)$$

Главную линейную относительно ε часть разности $\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$ мы обозначили δu_{x_k} . Пользуясь этим обозначением и обозначениями (4) и (5), мы можем соотношение (13) переписать в таком виде:

$$\delta u_{x_k} = \frac{\partial (\bar{\delta} u)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_k} \delta x_i. \quad (14)$$

Итак, соберем вместе полученные нами формулы. Имеем

$$x_i^* - x_i \sim \varepsilon \varphi_i(x) = \delta x_i,$$

$$u^*(x^*) - u(x) \sim \varepsilon \psi = \delta u,$$

$$u^*(x) - u(x) \sim \varepsilon \bar{\psi} = \bar{\delta} u,$$

$$\bar{\psi} = \psi - \sum_{i=1}^n \varphi_i u_{x_i}, \quad \text{т. е.} \quad \bar{\delta} u = \delta u - \sum_{i=1}^n u_{x_i} \delta x_i,$$

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial (\bar{\delta} u)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_k} \delta x_i,$$

*) Следует помнить, что u считается функцией от x , т. е. при вычислении $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$ значение u не фиксируется. (К сожалению, несовершенство общепринятых обозначений для частных производных опять-таки не позволяет нам отразить это в самих формулах!)

где $\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ — главная линейная часть выражения

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}.$$

Для частного примера, приведенного на стр. 169, все эти соотношения легко усмотреть непосредственно из рис. 10.

3. Основная формула для вариации функционала. Теперь мы уже можем вычислить интересующую нас разность

$$\Delta J = J[u^*(x^*)] - J[u(x)].$$

Для этого сведем прежде всего в выражении для $J[u^*(x)]$ интегрирование по G^* к интегрированию по области G . Так как

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} = \delta_{ik} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},$$

то якобиан $\frac{D(x_1^*, \dots, x_n^*)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ равен (с точностью до величин выше первого порядка относительно ε))

$$1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

Поэтому

$$\Delta J \sim \int_G \left[F(x^*, u^*, u_{x_1}^*, \dots, u_{x_n}^*) \left(1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) - F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \right] dx.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и выписывая лишь члены первого порядка относительно ε , получаем

$$\Delta J = \int_G \left[\sum_{k=1}^n F_{x_k} \delta x_k + F_u \delta u + \sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}} \delta u_{x_k} + \varepsilon F \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \right] dx + \dots$$

*) Действительно,

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \dots & 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{array} \right| = \prod_{i=1}^n \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) + o(\varepsilon^2) =$$

$$= 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + o_1(\varepsilon^2).$$

Выписанные члены представляют собой главную линейную относительно δJ , т. е. вариацию δJ функционала $J[u]$. Заменяя здесь δu на $\overline{\delta u} + \sum_{i=1}^n u_{x_i} \delta x_i$ и δu_{x_k} на

$$(\overline{\delta u})_{x_k} + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_k} \delta x_i$$

(см. (6) и (14)), получим

$$\begin{aligned} \delta J = \int_G \left[\sum_{k=1}^n F_{x_k} \delta x_k + F_u \overline{\delta u} + F_u \sum_{k=1}^n u_{x_k} \delta x_k + \sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}} (\overline{\delta u})_{x_k} + \right. \\ \left. + \sum_{i,k=1}^n F_{u_{x_k} u_{x_i}} \delta x_i + F \sum_{k=1}^n \frac{\partial (\delta x_k)}{\partial x_k} \right] dx. \quad (15) \end{aligned}$$

Как и в рассмотренном в § 31 случае фиксированной области G , поставим задачу: записать вариацию как интеграл от выражения вида *)

$$A(x) \overline{\delta u} + \operatorname{div} (\dots).$$

Для этого в выражении (15) сумму

$$\sum_{k=1}^n F_{x_k} \delta x_k + \sum_{k=1}^n F (\delta x_k)_{x_k} + \sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}} u_{x_k} \delta x_k + \sum_{i,k=1}^n F_{u_{x_k} u_{x_i}} \delta x_i$$

запишем как **)

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F \delta x_k),$$

а

$$\sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}} (\overline{\delta u})_{x_k}$$

заменяем на

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \overline{\delta u}) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}}) \overline{\delta u}$$

*) Иными словами (поскольку интеграл от дивергенции сводится к интегралу, взятому по границе области), мы приводим выражение для вариации к такому виду, чтобы производные от вариаций δu входили лишь в граничные члены.

**) См. сноску на стр. 172.

(аналог интегрирования по частям). Окончательно получаем

$$\delta J = \int_G \left[\left(F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \bar{\delta} u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \bar{\delta} u) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F \delta x_k) \right] dx. \quad (16)$$

Это и есть основная формула для вариации. Перепишем ее еще раз, подставив вместо $\bar{\delta} u$ и δx_k их выражения (5) и (4). Получим

$$\delta J = \varepsilon \int_G \left[\left(F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \bar{\psi} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \bar{\psi} + F \varphi_k) \right] dx. \quad (17)$$

Итак, если дан функционал

$$J[u] = \int_G F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx$$

и дано преобразование

$$\begin{aligned} x_i^* &= \Phi_i(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ u^* &= \Psi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon), \end{aligned}$$

то вариация δJ функционала J , т. е. главная линейная относительно ε часть разности

$$J[u^*(x^*)] - J[u(x)]$$

представляется формулой (17), где

$$\varphi_i(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi_i(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

и

$$\psi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Psi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Заметим, что в том частном случае, когда независимые переменные x_i не варьируются, а варьируется только функция u (и ее производные), в форме (16) последнее слагаемое исчезает, и мы получаем несколько более простое выражение

$$\delta J = \int_G \left\{ \left[F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right] \bar{\delta} u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \bar{\delta} u) \right\} dx,$$

совпадающее с формулой (4) § 31.

Обычно формулой вариации функционала приходится пользоваться тогда, когда $u(x)$ представляет собой экстремальную поверхность

этого функционала, т. е. удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера

$$F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0.$$

В этом случае выражение для вариации сводится к

$$\delta J = \int_G \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \bar{\delta} u) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F \delta x_k) \right] dx \quad (18)$$

в общем случае и к

$$\delta J = \int_G \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}} \bar{\delta} u) \right] dx \quad (19)$$

в случае, когда независимые переменные x_i не варьируются.

4. Обобщения на случай нескольких функций или нескольких параметров. Формулы, аналогичные формулам (16) — (19), можно, конечно, получить и в том случае, когда рассматриваемый функционал зависит не от одной функции u , а от нескольких, т. е. если u является не скалярной величиной, а векторной. Если $u = (u_1, \dots, u_m)$, то, например, формула (16) для вариации принимает вид

$$\delta J = \int_G \left\{ \sum_{i=1}^m \left[F_{u_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \right) \right] \bar{\delta} u_i + \right. \\ \left. + \sum_{i,k=1}^{m,n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \bar{\delta} u_i \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F \delta x_k) \right\} dx. \quad (16_m)$$

Другое, также часто полезное для приложений обобщение полученных нами выше формул для вариации состоит в следующем. Будем считать, что совокупность преобразований, переводящих x и u в x^* и u^* , зависит не от одного параметра ε , а от нескольких. Иначе говоря, будем считать, что величина ε также представляет собой вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Если соответствующие преобразования писать в виде

$$x_k^* = \Phi_k \left(x, u, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \varepsilon \right) \sim x_k + \sum_{\alpha=1}^p \varepsilon_\alpha \varphi_k^{(\alpha)}(x, u), \\ u_i^* = \Psi_i \left(x, u, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \varepsilon \right) \sim u_i + \sum_{\alpha=1}^p \varepsilon_\alpha \psi_i^{(\alpha)}(x, u)$$

и под δx_k , δu_i , $\overline{\delta u_i}$ понимать следующие выражения:

$$\delta x_k = \sum_{\alpha=1}^p \varepsilon_{\alpha} \varphi_k^{(\alpha)}(x, u),$$

$$\delta u_i = \sum_{\alpha=1}^p \varepsilon_{\alpha} \psi_i^{(\alpha)}(x, u),$$

$$\overline{\delta u_i} = \delta u_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k,$$

то формула (16_m) сохранится без всяких изменений и в рассматриваемом общем случае.

5. Теорема Нетер. Из полученной нами формулы вариации функционала вытекает одна из важных теорем вариационного исчисления — теорема Нетер об инвариантных вариационных задачах, которая для случая одного независимого переменного была доказана нами в § 16. Сформулируем прежде всего определение инвариантности функционала.

Пусть дан функционал

$$J[u] = \int_G F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx. \quad (20)$$

Будем рассматривать преобразования независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ и функции $u = u(x)$, имеющие вид *)

$$x_k^* = \Phi_k(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad (21a)$$

$$u^* = \Psi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}). \quad (21б)$$

Интеграл (20) мы назовем инвариантом данной совокупности преобразований, если

$$\int_G F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx = \int_{G^*} F(x^*, u^*, u_{x_1}^*, \dots, u_{x_n}^*) dx^*$$

для каждого из преобразований, принадлежащих этой совокупности. Здесь интеграл слева берется по любой области изменения переменных $x_1, \dots, x_n$, а справа — по соответствующей области изменения переменных $x_1^*, \dots, x_n^*$.

) Подчеркнем еще раз, что при таком преобразовании функция u переменных $x_1, \dots, x_n$ переходит в функцию u^ переменных $x_1^*, \dots, x_n^*$, так как из равенств (21a) мы можем определить $x_1, \dots, x_n$ (а следовательно, и $u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$) как функции от $x_1^*, \dots, x_n^*$ и затем подставить эти выражения в (21б).

Иными словами, если σ — поверхность, заданная уравнением $u = u(x)$, а σ^* — поверхность, заданная уравнением $u^* = u^*(x^*)$, в которую σ переводится преобразованием (21), то инвариантность функционала (20) означает, что

$$J[\sigma^*] = J[\sigma].$$

Для случая $n = 1$, т. е. применительно к функционалам от линий, понятие инвариантности уже вводилось в § 16. Там же были рассмотрены и простейшие примеры. Приведем еще один пример.

Функционал

$$\int_{\sigma} \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (22)$$

инвариантен относительно преобразований

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y^* &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ u^* &= u. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Действительно, пусть σ — поверхность, заданная уравнением $u = f(x, y)$. Найдем уравнение поверхности σ^* , получающейся из σ преобразованием (23). Из первых двух равенств (23) получаем, что

$$x = x^* \cos \alpha - y^* \sin \alpha, \quad y = x^* \sin \alpha + y^* \cos \alpha,$$

следовательно, σ^* задается уравнением

$$u^* = f(x^* \cos \alpha - y^* \sin \alpha, x^* \sin \alpha + y^* \cos \alpha).$$

Запишем это уравнение так:

$$u^* = f^*(x^*, y^*).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} J[\sigma^*] &= \int_{\sigma^*} \int \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] dx^* dy^* = \\ &= \int_{\sigma} \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right)^2 + \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Вернувшись в этом интеграле к прежним переменным x и y , получим

$$J[\sigma^*] = \int_{\sigma} \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = J[\sigma].$$

У п р а ж н е н и е. Пусть

$$J[\sigma] = \int_{\sigma} \int \frac{\partial u}{\partial x} dx dy,$$

вычислить $J[\sigma]$, если σ^* получается из σ преобразованием (23).

Теорема Нетер. Пусть задана совокупность преобразований

$$\left. \begin{aligned} x_k^* &= \Phi_k(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) \sim x_k + \varepsilon \varphi_k, \\ u^* &= \Psi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) \sim u + \varepsilon \psi. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Тогда из инвариантности функционала

$$J[u] = \int_G F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx \quad (25)$$

относительно преобразований (24) следует, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_{u_{x_k}} \bar{\psi} + F_{\varphi_k}] = 0, \quad (26)$$

где

$$\bar{\psi} = \psi - \sum_{k=1}^n \varphi_k u_{x_k}.$$

Здесь $\varphi_k = \varphi_k(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ и $\psi = \psi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ определяются формулами (24), и u — произвольная экстремальная поверхность функционала (25).

Если преобразования (24) зависят не от одного параметра, а от ρ параметров $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\rho)$, то из инвариантности функционала (25) относительно такой совокупности преобразований следует существование ρ линейно независимых соотношений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_{u_{x_k}} \bar{\psi}^{(\alpha)} + F_{\varphi_k^{(\alpha)}}] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \rho, \quad (26\rho)$$

где

$$\varphi_k^{(\alpha)} = \left. \frac{\partial x_k^*}{\partial \varepsilon_\alpha} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \psi^{(\alpha)} = \left. \frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_\alpha} \right|_{\varepsilon=0} \quad \text{и} \quad \bar{\psi}^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)} - \sum_{k=1}^n \varphi_k^{(\alpha)} u_{x_k},$$

а u — любая экстремальная поверхность. Наконец, если функционал (25) зависит от векторной функции $u = (u_1, \dots, u_m)$, то соотношения (26\rho) заменяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \psi_i^{(\alpha)} + F_{\varphi_k^{(\alpha)}} \right) = 0.$$

Доказательство теоремы Нетер сразу же вытекает из общей формулы (17) для вариации. Действительно, если функционал (25) инвариантен относительно преобразований (24), то вариация этого

функционала (отвечающая переходу от x, u к x^*, u^*) равна нулю. Если $u = u(x)$ — экстремальная поверхность, то для нее

$$F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0,$$

и формула (17) принимает вид

$$\int_G \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_{u_{x_k}} \bar{\psi} + F_{\varphi_k}] \right\} dx.$$

Так как область G здесь произвольна, то отсюда следует

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_{u_{x_k}} \bar{\psi} + F_{\varphi_k}] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Для случая преобразований, зависящих от нескольких параметров, доказательство не содержит ничего нового, поэтому мы его опускаем.

Замечание 1. Если $u = u(x)$ — произвольная функция (не экстремаль), то для нее из инвариантности функционала (25) относительно преобразований (24) вытекает соотношение

$$\left[F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right] \bar{\psi} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_{u_{x_k}} \bar{\psi} + F_{\varphi_k}]. \quad (27)$$

Замечание 2. Если $n = 1$, то соотношение (26) принимает вид

$$\frac{d}{dx} [F_{u_x} \bar{\psi} + F_{\varphi}] = 0,$$

т. е.

$$F_{u_x} \bar{\psi} + F_{\varphi} = \text{const} \quad (28)$$

вдоль каждой экстремали $u = u(x)$. Иначе говоря, соотношение (28) представляет собой первый интеграл системы уравнений Эйлера, отвечающих функционалу

$$\int_a^b F(x, u, u') dx.$$

Если этот функционал инвариантен относительно совокупности преобразований зависящих от r параметров, то отвечающая ему система уравнений Эйлера имеет r линейно независимых первых интегралов

вида (28). Мы пришли к тому частному случаю теоремы Нетер, который был изложен в § 16.

Пусть некоторый функционал $\int_G F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx$ инвариантен относительно группы преобразований, зависящих не от нескольких параметров, а от некоторого числа произвольных функций. Тогда имеет место вторая теорема Нетер, согласно которой между левыми частями уравнений Эйлера, отвечающих вариационной задаче, инвариантной относительно группы преобразований, зависящих от p произвольных функций, существует p тождественных соотношений, т. е. p этих уравнений являются следствиями остальных. Простейший пример такой инвариантности дают параметрические задачи, рассмотренные нами в § 8. Действительно, преобразования, оставляющие инвариантной соответствующую вариационную задачу, — это всевозможные замены параметра. В случае параметрической задачи на плоскости рассматривается функционал

$$\int_a^b F(t, x, y, x', y') dt, \quad (29)$$

инвариантный относительно преобразований

$$t = t(\tau), \quad x = x, \quad y = y.$$

Группа этих преобразований зависит от одной произвольной функции $t(\tau)$, поэтому между левыми частями отвечающих этой задаче уравнений Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \quad \text{и} \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0$$

должно существовать одно тождественное соотношение. Действительно, в этом случае имеет место равенство

$$x' \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right) + y' \left(F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} \right) = 0,$$

которое было доказано непосредственной проверкой еще в § 8.

Еще один интересный пример преобразований, зависящих от произвольной функции (так называемое градиентное преобразование в электродинамике), мы рассмотрим в следующем параграфе.

Мы не будем останавливаться на доказательстве теоремы Нетер для групп преобразований, зависящих от произвольных функций, и не будем выписывать в общем виде тех соотношений между уравнениями Эйлера, существование которых утверждает вторая теорема Нетер.

§ 34. Принцип стационарного действия для полей. Законы сохранения

1. Выше уже указывалось, что принцип стационарного действия может быть применен к системам с бесконечным числом степеней свободы. В § 35 это было показано на примерах струны, мембраны и пластинки. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим применения принципа стационарного действия и теоремы Нетер к теории поля.

Состояние всякого поля характеризуется некоторой функцией $u = u(x, y, z, t)$ координат и времени, называемой функцией поля. Эта функция может быть величиной различной природы — скаляром, вектором, тензором и т. д. В зависимости от этого различают скалярные, векторные, тензорные и т. д. поля. Если функция u имеет несколько компонент, то их обозначим $u_1, \dots, u_m$.

При выводе уравнений поля обычно, так же как мы делали это выше для струны или мембраны, вводится соответствующая функция Лагранжа, из которой и получаются уравнения поля.

В случае системы с конечным числом степеней свободы функция Лагранжа пишется обычно в виде суммы, взятой по всем материальным точкам, входящим в рассматриваемую систему. Для поля такая сумма заменяется, естественно, интегралом по пространственным переменным x, y, z от некоторой функции, называемой плотностью функции Лагранжа или, короче, лагранжианом*)

$$L(t) = \int L(t, x, y, z) dx dy dz. \quad (1)$$

Интеграл от лагранжиана по всем четырем переменным, т. е.

$$A = \int L(t, x, y, z) dx dy dz dt, \quad (2)$$

представляет собой действие. Здесь интеграл берется по некоторой области четырехмерного пространства — времени.

Ниже, для придания большей симметрии формулам, мы будем вместо обозначений x, y, z и t пользоваться обозначениями x_1, x_2, x_3 и x_0 , а интегрирование по этим переменным будем обозначать символом $\int \dots dx$.

Обычно во всех физических теориях считают лагранжиан функцией от функций поля $u_i(x_1, x_2, x_3, x_0)$ и их первых производных:

$$L = L\left(u, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right). \quad (3)$$

*) С этим положением дел мы уже фактически встречались в § 35, хотя термин «лагранжиан» там не вводился.

Принцип стационарного действия

$$\delta A = 0$$

приводит к уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} = 0, \quad (4)$$

определяющим функции u_i , т. е. представляющим собой уравнения поля.

2. Законы сохранения для полей. Теорема Нетер, изложенная в предыдущем параграфе, дает общий способ вывода законов сохранения, т. е. построения таких величин, представляющих собой комбинации функций поля, которые не меняют со временем. Такие величины называются инвариантами поля.

Пусть интеграл

$$\int L \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx$$

инвариантен относительно совокупности преобразований

$$\left. \begin{aligned} x_i^* &= \Phi_i(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) = x_i + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \varphi_i^{(\alpha)} + \dots, \\ u_k^* &= \Psi_k(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \varepsilon) = u_k + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \psi_k^{(\alpha)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

зависящих от p параметров $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$. Тогда согласно теореме Нетер имеют место p соотношений вида

$$\operatorname{div} A_{\alpha} = 0, \quad (6)$$

где

$$A_{\alpha} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)} \bar{\psi}_k^{(\alpha)}(x, u) + L \varphi_l^{(\alpha)}(x, u) = 0. \quad (7)$$

Из каждого такого соотношения может быть получен некоторый инвариант поля. Действительно, проинтегрируем равенство (6) по некоторому четырехмерному объему, ограниченному двумя плоскостями $x_0 = a$ и $x_0 = b$ (т. е. отвечающим двум фиксированным моментам времени) и цилиндрической поверхностью $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$. Поскольку выражение (6) есть дивергенция, этот интеграл, взятый по четырехмерной области, можно преобразовать в интеграл, взятый по границе этой области. Получим

$$0 = \int \operatorname{div} A_{\alpha} dx = \int (A_{\alpha}, n) d\sigma, \quad (8)$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности, ограничивающей рассматриваемую четырехмерную область, а n — нормаль к этой поверхности.

Считая в соответствии с обычными физическими представлениями, что на бесконечности поле достаточно быстро убывает, мы можем, положив $R \rightarrow \infty$, отбросить в правой части (8) интеграл по боковой цилиндрической поверхности. При этом останется лишь интеграл по двум трехмерным плоскостям $x_0 = a$ и $x_0 = b$. На этих плоскостях (A_α, n) сводится к временной компоненте A_α^0 вектора A_α , а интегрирование по $d\sigma$ — к интегрированию по пространственным координатам. Таким образом, из (8) получаем

$$\int A_\alpha^0(x_1, x_2, x_3, b) dx_1 dx_2 dx_3 - \int A_\alpha^0(x_1, x_2, x_3, a) dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

т. е. величина

$$\int A_\alpha^0 dx_1 dx_2 dx_3 = \int \left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_0} \right)} \bar{\psi}_k^{(\alpha)}(x, u) + L\varphi_0^{(\alpha)}(x, u) \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (9)$$

не зависит от времени. Итак, мы показали, что из инвариантности действия (2) относительно совокупности преобразований (5) действительно вытекает наличие соответствующего числа инвариантов поля, представимых формулами (9).

Рассмотрим конкретные законы сохранения, отвечающие тем преобразованиям переменных, которые фактически встречаются в физике. Обычно во всех физических теориях предполагается, что функционал, представляющий собой действие, инвариантен относительно параллельных переносов (по всем четырем осям) и относительно преобразований, образующих полную группу Лоренца *).

Выясним, к каким законам сохранения приводит эта инвариантность.

Тензор энергии-импульса. Пусть лагранжиан

$$L(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_0})$$

инвариантен относительно параллельных переносов, т. е. относительно преобразований

$$x_i^* = x_i + \varepsilon_i, \quad u_k^*(x^*) = u_k(x).$$

*) Полной группой Лоренца называется совокупность преобразований четырехмерного пространства, оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$$

и не меняющих направления времени. Детерминант матрицы такого преобразования равен ± 1 . Совокупность тех преобразований, для которых этот детерминант равен $+1$, образует подгруппу, называемую собственной группой Лоренца.

В этом случае имеем

$$\delta x_i = \varepsilon_i, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_i^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = \alpha, \\ 0 & \text{при } i \neq \alpha, \end{cases}$$

$$\delta u_k = 0, \quad \text{т. е.} \quad \psi_k^{(\alpha)} = 0,$$

и

$$\overline{\delta u_k} = - \sum_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta x_i = - \sum_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varepsilon_i.$$

Следовательно, соотношения (6), вытекающие из теоремы Нетер, в этом случае имеют вид

$$\operatorname{div} \left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - L \delta_{i\alpha} \right] = 0,$$

а соответствующие инварианты (9) поля записываются следующим образом:

$$\int \left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - L \delta_{0\alpha} \right] dx_1 dx_2 dx_3.$$

Величина

$$T_\alpha^i = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - L \delta_{i\alpha} \quad (10)$$

называется тензором энергии-импульса, а не зависящий от времени интеграл

$$P_\alpha = \int T_\alpha^0 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (11)$$

носит название вектора энергии-импульса. Его нулевая компонента P_0 есть энергия поля, а остальные три компоненты суть компоненты импульса.

Замечание. Если рассматриваемое поле скалярно, т. е. если u имеет лишь одну компоненту, то тензор энергии-импульса удовлетворяет, очевидно, условию симметрии

$$T_\alpha^i = T_i^\alpha.$$

Если же u имеет несколько компонент, то полученное нами выражение (10) уже не будет, вообще говоря, симметричным тензором*). Однако, его можно заменить симметричным тензором, отличающимся

*) Условие симметрии тензора энергии-импульса существенно с физической точки зрения. Здесь, однако, мы не имеем возможности подробно обсуждать этот вопрос.

от полученного нами выражения (10) лишь на величину, дающую при интегрировании по x_1, x_2, x_3 нуль. Так как в физические рассуждения входит всегда не сам тензор энергии-импульса, а его интеграл по x_1, x_2, x_3 , то такая замена всегда возможна.

Тензор момента количества движения. Как уже было сказано выше, функционал

$$\int L(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_3}) dx$$

для каждого поля, имеющего определенный физический смысл, должен быть инвариантен относительно преобразований Лоренца. Каждое из этих преобразований можно записать следующим образом:

$$x_i^* = x_i + \sum_{j \neq i} g^{jj} x_j \omega_{ij}, \quad (12)$$

где

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

— параметры, определяющие данное преобразование*), а

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1, \quad g^{00} = -1.$$

Таким образом,

$$\delta x_i = \sum_{j \neq i} g^{jj} x_j \omega_{ij}. \quad (13)$$

Двенадцать величин $\omega_{ij} (i \neq j)$ связаны соотношениями $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$; следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых. За эти независимые параметры можно взять те ω_{ij} , для которых $i < j$. В соответствии с этим равенство (13) преобразуем так:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{l \neq i} g^{ll} x_l \omega_{il} = \sum_{l \neq j} g^{ll} x_l \omega_{jl} \delta_j^l = \\ &= \sum_{j < l} g^{ll} x_l \omega_{jl} \delta_j^l + \sum_{j > l} g^{ll} x_l \omega_{jl} \delta_j^l = \sum_{j < l} \omega_{jl} (g^{ll} x_l \delta_j^l - g^{jj} x_j \delta_l^l), \end{aligned}$$

где сумма берется по всем парам j, l , для которых $j < l$ и, как обычно,

$$\delta_j^l = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq j, \\ 1 & \text{при } l = j. \end{cases}$$

Формулы (12) определяют преобразование независимых переменных x_1, x_2, x_3, x_0 . Нужно еще указать, каким образом преобразуются функции поля $u(x)$. Если рассматриваемое поле скалярное, то преобразования Лоренца никак не действуют на $u(x)$, т. е. имеет место равенство

$$u^*(x^*) = u(x). \quad (14)$$

*) Каждая из величин ω_{ij} представляет собой угол поворота в плоскости (x_i, x_j) .

Следовательно, для скалярного поля

$$\bar{\delta}u = - \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Перейдем от δx_i и $\bar{\delta}u$ к функциям $\varphi^{(a)}$ и $\bar{\psi}^{(a)}$ в соответствии с формулами (4), (5) предыдущего параграфа. Получим

$$\varphi_i^{(j,l)} = g^{ll} x_l \delta_j^l - g^{jj} x_j \delta_l^l, \quad (15)$$

$$\bar{\psi}^{(j,l)} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} (g^{jj} x_j \delta_l^i - g^{ll} x_l \delta_j^i). \quad (15')$$

Преобразования (12) зависят от шести параметров. Следовательно, из инвариантности функционала (2) относительно этих преобразований вытекает шесть равенств вида (6), где вместо индекса α нужно брать все шесть комбинаций индексов j и l такие, что $j < l$, а вместо φ_i^α и $\bar{\psi}^\alpha$ — их выражения (15) и (15'). Мы получаем окончательно:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_l} g^{jj} x_j - \frac{\partial u}{\partial x_j} g^{ll} x_l \right] + L [g^{ll} x_l \delta_j^l - g^{jj} x_j \delta_l^l] \right\} = 0.$$

Введем обозначение

$$M_i^{j,l} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_l} g^{jj} x_j - \frac{\partial u}{\partial x_j} g^{ll} x_l \right] + L [g^{ll} x_l \delta_j^l - g^{jj} x_j \delta_l^l].$$

Определим, далее, величины M_i^{jl} при $j > l$, положив

$$M_i^{jl} = -M_i^{lj}.$$

Выражения M_i^{jl} образуют тензор третьего ранга, антисимметричный по j и l . Он называется тензором момента количества движения. Воспользовавшись полученным выше выражением (10) для тензора энергии-импульса, мы можем записать тензор момента количества движения следующим образом:

$$M_i^{jl} = g^{jj} x_j T_l^i - g^{ll} x_l T_j^i.$$

Закон сохранения момента количества движения состоит в том, что в соответствии со сказанным выше (стр. 184) интеграл

$$\int M_0^{jl} dx_1 dx_2 dx_3$$

не зависит от времени, т. е. представляет собой инвариант поля.

Если рассматривается не скалярное, а какое-нибудь другое поле, например векторное, то преобразование Лоренца действует не только на координаты

(x_1, x_2, x_3, x_0) , но и на компоненты функции поля. В случае векторного поля $u = (u_1, u_2, u_3, u_0)$:

$$u_k^*(x^*) = u_k(x) + \sum_{j,r \neq l} S_{k,r}^{j,l} u_r(x) \omega_{jl}.$$

Следовательно, для векторного поля

$$\delta u_k = \sum_{j,r \neq l} S_{k,r}^{j,l} u_r(x) \omega_{jl}$$

и

$$\overline{\delta u_k} = \delta u_k - \sum_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \delta x_l.$$

Проведя выкладки, аналогичные проделанным выше для скалярного поля, получим для тензора момента количества движения векторного поля следующее выражение:

$$M_i^{jl} = g^{jj} x_j T_i^l - g^{ll} x_l T_j^i - \sum_{k,r} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)} S_{kr}^{jl} u_r(x),$$

где T_i^l и T_j^l — компоненты тензора энергии-импульса.

§ 35. Примеры: уравнение Клейна — Гордона и уравнения Максвелла

В этом параграфе мы рассмотрим кратко в качестве иллюстраций два вида полей: поле скалярных нейтральных частиц и электромагнитное поле.

1. Рассмотрим так называемое уравнение Клейна — Гордона

$$(\square - m^2) u(x) = 0, \quad (1)$$

где $\square$ — оператор Даламбера

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}.$$

Это уравнение, с помощью которого в теоретической физике описывается поле нейтральных (т. е. не заряженных) скалярных частиц со спином нуль (например, π_0 -мезонов), может быть получено из принципа стационарного действия как уравнение, отвечающее лагранжиану

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 g^{kk} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{m^2}{2} u^2(x). \quad (2)$$

Для этого лагранжиана общее выражение тензора энергии-импульса принимает вид

$$T^{kl} = g^{kk} g^{ll} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_l} - L \delta_{kl}.$$

откуда плотность энергии рассматриваемого поля равна

$$T^{00} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{m^2}{2} u^2(x),$$

а плотность вектора импульса равна

$$T^{0\alpha} = - \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Тензор момента количества движения для лагранжиана (2) принимает вид

$$M_{lm}^k = g^{kk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(g^{mm} x_m \frac{\partial u}{\partial x_l} - g^{ll} x_l \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + L (g^{ll} x_l \delta_m^k - g^{mm} x_m \delta_l^k).$$

2. Уравнения Максвелла. В качестве второго конкретного примера возьмем уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле. Состояние электромагнитного поля задается вектором электрического поля E и вектором электромагнитного поля H . Эти величины связаны между собой (при отсутствии зарядов) известными уравнениями Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= - \frac{\partial H}{\partial x_0}, & \operatorname{rot} H &= \frac{\partial F}{\partial x_0}, \\ \operatorname{div} H &= 0, & \operatorname{div} E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эти уравнения можно свести к одному уравнению, если выразить E и H через компоненты четырехмерного вектора (A_1, A_2, A_3, A_0) электромагнитного потенциала, положив

$$E = \operatorname{grad} A_0 - \frac{\partial A}{\partial x_0}, \quad H = \operatorname{rot} A \quad (4)$$

(здесь $A = (A_1, A_2, A_3)$). По заданным E и H потенциал (A_1, A_2, A_3, A_0) определяется этими соотношениями неоднозначно. Величины E и H не меняются, если потенциал (A_1, A_2, A_3, A_0) заменить потенциалом (A'_1, A'_2, A'_3, A'_0) по формуле

$$A'_k(x) = A_k(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3, 0), \quad (5)$$

где $f(x)$ — некоторая функция. Преобразование (5) называется *градиентным преобразованием второго рода*. Для того чтобы избежать такой неоднозначности, на четырехмерный вектор $\{A_k\}$ можно наложить некоторые дополнительные условия. Обычно в качестве такого дополнительного условия берется так называемое *условие Лоренца*

$$\sum_{k=0}^3 g^{kk} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6)$$

Компоненты векторов E и H удобно рассматривать как составляющие тензорного поля

$$H_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Через электромагнитный потенциал $\{A_k\}$ эти составляющие выражаются следующим образом:

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}. \quad (8)$$

С помощью тензора H_{kl} уравнения Максвелла записываются в виде

$$\sum_{k=0}^3 g^{kk} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_k} = 0 \quad (l=0, 1, 2, 3), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial H_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial H_{lm}}{\partial x_k} = 0, \quad k, l, m = \begin{cases} 0, 1, 2, \\ 1, 2, 3, \\ 2, 3, 0, \\ 3, 0, 1. \end{cases} \quad (10)$$

Переходя здесь к потенциалу $\{A_k\}$, получаем, что уравнения (10) являются следствием равенств (8), а уравнение (9) с учетом условия Лоренца (6) приводится к виду

$$\square A_k = 0, \quad (11)$$

где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}.$$

Покажем, как это уравнение для $\{A_k\}$ получается с помощью принципа стационарного действия. Для электромагнитного поля лагранжиан имеет следующий вид *):

$$L = \frac{1}{4\pi} (E^2 - H^2). \quad (12)$$

*) Это выражение для лагранжиана электромагнитного поля может быть получено из следующих общих соображений. Оно представляет собой единственную с точностью до постоянного множителя комбинацию E и H , инвариантную относительно преобразований Лоренца и градиентного преобразования, не содержащую членов выше второй степени (последнее условие обеспечивает получение в качестве соответствующих уравнений Эйлера линейных уравнений).

Заменив здесь E и H их выражениями (4) через вектор электромагнитного потенциала $\{A_k\}$, получим

$$L = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\text{grad } A_0 - \frac{\partial A}{\partial x_0} \right)^2 - (\text{rot } A)^2 \right\}. \quad (13)$$

Уравнения Эйлера

$$\sum_{r=0}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_r} \right)} \right\} - \frac{\partial L}{\partial A_k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (14)$$

отвечающие этому лагранжиану, могут быть приведены к виду (11). Проверим это, например, для компоненты A_0 (для остальных выкладки аналогичны). Из (13) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_0} \right)} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_1} \right)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_0} \right), \\ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_2} \right)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_0} \right), \\ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_3} \right)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_0} \right), & \frac{\partial L}{\partial A_0} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_r} \right)} - \frac{\partial L}{\partial A_0} &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Из условия Лоренца (6) получаем, что

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_0}{\partial x_0}.$$

Поэтому

$$\sum_{r=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_r} \right)} - \frac{\partial L}{\partial A_0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2} \right),$$

т. е. для $k=0$ уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2} = 0. \quad (15_0)$$

Аналогично при $k=1, 2, 3$ получаем

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_0^2} = 0. \quad (15_k)$$

Но это и есть не что иное, как записанное в компонентах уравнение (11).

Приводя уравнение (14) к виду (15), мы воспользовались условиями Лоренца. Вместо этого мы могли бы заранее ввести в лагранжиан дополнительный член, а именно положить

$$L = \frac{1}{8\pi} \left\{ (\text{grad } A_0 - \frac{\partial A}{\partial x_0})^2 - (\text{rot } A)^2 - \left(\text{div } A - \frac{\partial A_0}{\partial x_0} \right)^2 \right\}. \quad (16)$$

Уравнения Эйлера для такого лагранжиана приводятся к виду (15) при произвольном $\{A_k\}$. Налагая условия Лоренца, мы сводим (16) к (13).

Лагранжиан (13), отвечающий уравнениям Максвелла, инвариантен относительно градиентных преобразований, образующих группу, зависящую от одной произвольной функции, а также относительно параллельных переносов и преобразований Лоренца. В силу теоремы Нетер инвариантность лагранжиана относительно указанных преобразований приводит к соответствующим законам сохранения. Именно инвариантность относительно параллельных переносов приводит к сохранению энергии и трех компонент импульса, а инвариантность относительно лоренцевых преобразований дает сохранение момента количества движения *).

Инвариантность лагранжиана (13) относительно группы градиентных преобразований, зависящих от произвольной функции, означает в соответствии со второй теоремой Нетер наличие линейной зависимости между соответствующими уравнениями Эйлера, т. е., иначе говоря, неоднозначность их решения. Действительно, уравнениями Максвелла электромагнитный потенциал $\{A_k\}$ не определяется однозначно. Для получения однозначного решения к уравнениям Максвелла следует присоединить еще одно уравнение, в качестве которого обычно берется уже упоминавшееся выше условие Лоренца

$$\text{div } A - \frac{\partial A_0}{\partial x_0} = 0.$$

*) Отметим, что уравнения Максвелла инвариантны не только относительно параллельных переносов и преобразований Лоренца, но и относительно некоторой более обширной группы преобразований, зависящих от 15 параметров. Инвариантность относительно этой группы приводит к тому, что, кроме упоминавшихся выше 10 законов сохранения, имеют место еще 5, не имеющие, впрочем, непосредственного физического смысла. Подробно вопрос о законах сохранения для уравнений Максвелла рассмотрен, например, в работе Бессель-Хаген, *Mathematische Annalen*, 84, 1921, 258.

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

§ 36. Понятие о прямых методах вариационного исчисления

Основным методом доказательства существования и фактического нахождения решения той или иной вариационной задачи, которыми мы пользовались в предыдущих главах, было сведение этого вопроса к вопросу о существовании решения некоторого дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений). Этот метод, однако, не всегда приводит к желаемому результату. Его применение осложняется еще тем, что для решения задач вариационного исчисления требуется нахождение решения соответствующих дифференциальных уравнений не в малой окрестности некоторой точки (как это обычно делается в теории дифференциальных уравнений), а в некоторой фиксированной области, на границе которой искомое решение должно удовлетворять определенным граничным условиям. Возникающие на этом пути трудности заставили искать в вариационном исчислении другие, так называемые прямые методы (т. е. не сводящие вариационную задачу к дифференциальным уравнениям).

Развитие прямых методов вариационного исчисления оказалось полезным не только непосредственно для вариационных задач, но и для других областей математики, в частности, они нашли широкое применение в теории дифференциальных уравнений. Основная идея использования вариационных методов в дифференциальных уравнениях состоит в следующем.

Если данное дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера для некоторого функционала и если установлено тем или иным путем, что этот функционал имеет экстремум в классе достаточно гладких функций, то тем самым устанавливается, что исходное уравнение имеет решение, удовлетворяющее крайним условиям, отвечающим рассматриваемой вариационной задаче. Как будет показано ниже, прямые методы вариационного исчисления дают возможность не только доказывать существование соответствующего решения, но и фактически находить его с любой степенью точности.

Существует много различных приемов, объединяемых общим названием «прямые методы». Один из наиболее употребительных среди них — так называемый метод Ритца — мы рассмотрим ниже. Однако большинство всех этих методов основано на одной и той же общей идее, которая состоит в следующем.

Рассмотрим, для определенности, задачу о нахождении минимума некоторого функционала $J[y]$, определенного на каком-то классе $\mathfrak{M}$ допустимых кривых. Для того чтобы задача имела смысл, следует предположить, что в классе $\mathfrak{M}$ существуют кривые, для которых $J[y] < +\infty$, и что

$$\inf J[y] = \mu > -\infty. \quad (1)$$

В этом случае, по определению точной нижней грани, существует такая последовательность кривых $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ — мы назовем ее *минимизирующей последовательностью*, — что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n] = \mu. \quad (2)$$

Если для последовательности $\{y_n\}$ существует предельная кривая $y^{(0)}$ и если окажется законным предельный переход

$$J[y^{(0)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n], \quad (3)$$

то тогда

$$J[y^{(0)}] = \mu,$$

т. е. предельная кривая $y^{(0)}$ и будет решением рассматриваемой задачи.

Таким образом, решение вариационной задачи прямым методом сводится к

- 1) построения минимизирующей последовательности $\{y_n\}$,
- 2) доказательства существования у этой последовательности предельной кривой $y^{(0)}$,
- 3) доказательства законности предельного перехода (3).

Сами члены минимизирующей последовательности можно рассматривать как приближенные решения соответствующей вариационной задачи.

Подчеркнем следующее.

1. Построение минимизирующей последовательности, очевидно, возможно всегда, если только $\inf J[y] > -\infty$. Каждый из употребляемых в вариационном исчислении прямых методов характеризуется, собственно говоря, именно способом построения минимизирующих последовательностей. Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе.

2. Хотя минимизирующую последовательность можно построить во всякой вариационной задаче, предельная кривая такой последова-

тельности может не существовать. Рассмотрим, например, функционал

$$J[y] = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1;$$

он принимает положительные значения и для него

$$\inf J[y] = 0.$$

В качестве минимизирующей последовательности здесь можно взять последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\operatorname{arctg} n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Действительно,

$$J[y_n] = \int_{-1}^1 \frac{nx^2 dx}{\operatorname{arctg} n (1 + n^2 x^2)} = \frac{1}{2n \operatorname{arctg} n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Но последовательность (4), очевидно, в классе непрерывных функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$, никакого предела не имеет.

3. Вопрос о законности предельного перехода (3) в предположении существования предела минимизирующей последовательности (если $y_n \rightarrow y$ понимается как сходимость самих только функций без производных) для функционалов тоже не тривиален, поскольку рассматриваемые в вариационном исчислении функционалы, вообще говоря, не непрерывны в метрике C , и следовательно, значение функционала J для функции $y^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, вообще говоря, отлично от $\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n]$.

В ряде случаев обосновать предельный переход (3) можно с помощью следующих соображений.

Для справедливости равенства (3) непрерывность функционала $J[y]$ не обязательна, а достаточно, чтобы он был полунепрерывен снизу*).

*) Напомним определение полунепрерывности снизу (для обычных функций действительного переменного). Неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| < \epsilon,$$

с помощью которого определяется непрерывность в точке x , равносильно двум неравенствам

$$f(x+h) - f(x) > -\epsilon, \quad (a)$$

$$f(x+h) - f(x) < \epsilon. \quad (b)$$

Если для любого $\epsilon > 0$ существует такое δ , что при всех $|h| < \delta$ выполнено первое неравенство, то функция называется полунепрерывной снизу в точке x . Заменяя неравенство (a) неравенством (b), мы получим определение полунепрерывности сверху (которое было бы существенно при рассмотрении вопроса о максимуме функционала).

Действительно, тогда, с одной стороны,

$$J[y^{(0)}] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n] = \inf J[y], \quad (5)$$

а с другой, в силу полунепрерывности снизу, при всех достаточно больших n ,

$$J[y_n] - J[y^0] > -\varepsilon,$$

откуда при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$J[y^0] \leq \lim J[y_n] + \varepsilon,$$

т. е., в силу произвольности $\varepsilon > 0$,

$$J[y^0] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n]. \quad (6)$$

Таким образом,* из (5) и (6) получаем, что действительно

$$J[y^0] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n],$$

если только функционал J полунепрерывен снизу. Аналогичным образом при нахождении с помощью прямых методов максимума функционала достаточно для законности соответствующего предельного перехода, чтобы рассматриваемый функционал был полунепрерывен сверху.

§ 37. Метод Ритца и метод ломаных

Как было сказано выше, основой так называемых прямых методов вариационного исчисления является построение минимизирующих последовательностей функций. Одним из наиболее распространенных прямых методов является метод Ритца, который состоит в следующем. Пусть ищется минимум функционала

$$J[y], \quad (1)$$

заданного на каком-то многообразии, лежащем в некотором линейном нормированном пространстве E .

Рассмотрим некоторую последовательность функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (2)$$

из E такую, что как сами функции, так и их линейные комбинации

$$y_n = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n \quad (3)$$

являются допустимыми для функционала (1). Поставим задачу: при заданном n выбрать коэффициенты c_k , $k = 1, 2, \dots, n$ так, чтобы значение

$$J[c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n] \quad (4)$$

было возможно меньше. Это — задача о нахождении минимума функции от n переменных (которыми являются $c_1, c_2, \dots, c_n$), т. е. несравненно более простая, чем нахождение минимума функционала (1). Таким образом, при каждом n мы получим соответствующий минимум μ_n . Ясно, что при увеличении n этот минимум не может возрастать, т. е.

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots,$$

поскольку среди линейных комбинаций первых $n+1$ функций содержатся все линейные комбинации первых n функций.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких условиях можно утверждать, что получающаяся таким образом последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ — минимизирующая, т. е. что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$$

есть минимум функционала (1).

Теорема. Если функционал (1) непрерывен), а система функций (2) — полная (т. е. линейные комбинации (3) этих функций образуют множество, всюду плотное в пространстве, на котором задан (1)), то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu,$$

где μ — минимум функционала (1).

Доказательство. Пусть y^* — кривая, на которой реализуется минимум функционала (1), и пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Так как функционал (1) предполагается непрерывным, то найдется такое $\delta > 0$, что

$$|J[y] - J[y^*]| < \varepsilon, \quad (5)$$

как только $\|y - y^*\| < \delta$. Среди линейных комбинаций вида (3) найдется такая, обозначим ее y_n , что

$$\|y_n - y^*\| < \delta.$$

Тогда согласно (5)

$$J[y_n] \leq \mu + \varepsilon.$$

Если теперь $\bar{y}_n$ — та линейная комбинация, на которой функция (4) при данном n достигает минимума, то

$$J[\bar{y}_n] \leq J[y_n] \leq \mu + \varepsilon,$$

*) В смысле метрики того пространства E , на котором он рассматривается.

откуда в силу произвольности ε получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[\bar{y}_n] = \mu.$$

Теорема доказана.

Эта теорема применима, например, в том случае, когда функционал вида

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

рассматривается на некотором множестве, лежащем в D_1 , поскольку в этом пространстве функционал указанного вида непрерывен.

Замечание 1. Во многих задачах математической физики приходится рассматривать такие функционалы

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

в которых подынтегральное выражение $F(x, y, y')$ квадратично относительно y и y' . В этом случае уравнения, которые получаются для определения коэффициентов c_k , будут линейными, и следовательно, нахождение этих коэффициентов не представляет существенных трудностей.

Замечание 2. Быстрота сходимости метода Ритца для данной вариационной задачи зависит, очевидно, как от самой рассматриваемой задачи, так и от выбора функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

Следует подчеркнуть, что во многих случаях достаточно взять линейную комбинацию совсем небольшого числа функций φ_n (3—4, иногда даже меньше) для того, чтобы получить вполне удовлетворительное приближение к точному решению.

Пользуясь геометрическим языком, основную идею метода Ритца можно пояснить следующим образом. Нам нужно найти минимум функционала $J[y]$, рассматриваемого на некотором многообразии Φ , имеющем бесконечное число измерений. Мы заменяем это многообразие совокупностью линейных комбинаций n первых функций из некоторой фиксированной последовательности $\{\varphi_n\}$, т. е. многообразием не более чем n измерений (полагая $n = 1, 2, \dots$), и ищем минимум нашего функционала на этом конечномерном многообразии, т. е., иначе говоря, ищем в этом конечномерном многообразии тот вектор, который является возможно лучшим приближением решения исходной вариационной задачи. Беря последовательно линейные комбинации одной, двух и т. д. функций, мы получаем последовательность вложенных друг в друга многообразий Φ_n возрастающей размерности. Если линейные

комбинации функций $\{\varphi_n\}$ всюду плотны в многообразии Φ , то это означает, что векторами из Φ_n (при различных n) можно сколь угодно точно аппроксимировать любой элемент из Φ , в частности тот, который дает решение рассматриваемой вариационной задачи (если такой существует).

Аппроксимация бесконечномерного многообразия конечномерными лежит в основе многих прямых методов вариационного исчисления. Укажем из них еще один, встречающийся, по существу, уже у Эйлера.

Еще в гл. I мы упоминали в связи с выводом уравнения Эйлера о том, что каждую задачу о нахождении экстремума функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \quad (6)$$

можно (приближенно) заменить задачей о нахождении экстремума для функции конечного числа переменных, если искомую функцию заменить ломаной, вершины которой имеют фиксированные абсциссы

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

а ее производную $y'(x)$ — разностным отношением

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x_i}.$$

При этом функционал (6) заменяется функцией конечного числа переменных

$$y_i = y_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Найдя при каждом n ту ломаную, которая дает минимум соответствующей функции n переменных, мы построим последовательность ломаных, которые можно рассматривать как приближенные решения исходной вариационной задачи.

Говоря о методе Ритца и о методе ломаных, мы ограничились здесь указанием способов фактического построения приближенных решений, оставив в стороне вопросы сходимости и вопросы существования точного решения.

Подробное изложение прямых методов и их применений читатель найдет, например, в книгах: Л. В. Канторович и В. И. Крылов, «Приближенные методы высшего анализа» и С. Г. Михлин, «Прямые методы математической физики».

§ 38. Собственные функции и собственные значения краевой задачи Штурма — Лиувилля

Рассмотрим применение прямых методов вариационного исчисления к дифференциальным уравнениям на примере следующей задачи. Дано дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля

$$-(Py')' + Qu = \lambda y, \quad (1)$$

где $P(x) > 0$ имеет непрерывную производную и даны граничные условия

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (2)$$

Требуется найти решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), определив при этом те значения параметра λ , при которых эта задача имеет решения, отличные от тождественного нуля.

Совокупность уравнения (1) и граничных условий (2) мы будем называть краевой задачей Штурма — Лиувилля. Те значения параметра, при которых уравнение (1) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие условиям (2), называются *собственными значениями*, а сами эти решения — *собственными функциями* данной краевой задачи.

В этом параграфе мы с помощью прямых методов вариационного исчисления установим следующую теорему.

Для краевой задачи (1), (2) существует бесконечная последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, причем каждому из λ_n отвечает единственная, с точностью до постоянного множителя, собственная функция.

Одновременно с доказательством сформулированного утверждения мы получим и способ приближенного нахождения этих собственных значений и отвечающих им собственных функций.

Заметим прежде всего, что уравнение (1) есть уравнение Эйлера, отвечающее следующей задаче на условный экстремум: найти минимум функционала

$$J[y] = \int_a^b (Py'^2 + Qy^2) dx \quad (3)$$

при условиях

$$\int_a^b y^2 dx = 1 \quad (4)$$

и

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (2)$$

Поэтому, если некоторая функция $y(x)$ будет решением этой вариационной задачи, то она будет решением и уравнения (1) (отличным, очевидно, от тождественного нуля в силу условия (4)).

Для применения к этой вариационной задаче прямых методов покажем прежде всего, что интеграл (3) ограничен снизу. Так как $P(x) > 0$, то

$$\int_a^b (Py'^2 + Qy^2) dx \geq \int_a^b Qy^2 dx;$$

по

$$\int_a^b Qy^2 dx \geq M \int_a^b y^2 dx = M,$$

где

$$M = \min_{a \leq x \leq b} Q(x).$$

Таким образом, интеграл (2) действительно ограничен снизу.

Воспользуемся теперь изложенным в предыдущем параграфе методом Ритца. Для упрощения записи будем вместо интервала (a, b) рассматривать интервал $(0, \pi)$. Возьмем на этом интервале какую-либо полную ортогональную систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющих граничным условиям (2), например $\{\sin nx\}$.

Рассмотрим всевозможные линейные комбинации первых m функций этой системы

$$y_m(x) = \sum_{n=1}^m a_n \sin nx \quad (5)$$

и будем искать минимум функционала (3) только на этих функциях. Сам функционал (3) при этом запишется в виде квадратичной формы

$$\begin{aligned} J_m &\equiv J[a_1, a_2, \dots, a_m] = \\ &= \int_0^\pi \left(P \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right)^2 + Q \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right)^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

а условие (4) — в виде

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right)^2 dx = 1. \quad (7)$$

Граничные условия выполняются автоматически в силу самого выбора функций $\varphi_n(x) = \sin nx$.

Выполнив в левой части равенства (7) интегрирование почленно, получим

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^m a_n^2 = 1. \quad (8)$$

Это равенство означает, что квадратичная форма (6), к которой сводится функционал (3) на множестве функций вида (5), рассматривается на поверхности сферы в m -мерном пространстве. По теореме Вейерштрасса форма (6) достигает на сфере (8) минимума в некоторой точке. Пусть это будет точка $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и пусть

$$y_m = \sum_{n=1}^m a_n \sin nx.$$

Полагая $m = 1, 2, \dots$, получим последовательность минимумов

$$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots \quad (9)$$

соответствующих квадратичных форм. Легко видеть, что всегда

$$\lambda_{m+1}^{(1)} \leq \lambda_m^{(1)}. \quad (10)$$

Действительно,

$$J_m = J[a_1, \dots, a_m] = J[a_1, \dots, a_m, 0],$$

а добавление еще одного аргумента может только уменьшить минимум функции. Отсюда и из установленной выше ограниченности функционала J снизу следует, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^{(1)} = \lambda^{(1)}. \quad (11)$$

Мы доказали сходимость числовой последовательности $\{\lambda_m^{(1)}\}$, составленной из минимумов функционала

$$\int_0^\pi (Py'^2 + Qy^2) dx,$$

на совокупностях функций вида

$$\sum_{n=1}^m a_n \sin nx$$

при $m = 1, 2, \dots$. Теперь естественно было бы попытаться доказать сходимость последовательности тех функций

$$y_m(x) = \sum_{n=1}^m a_n \sin nx,$$

на которых соответствующие минимальные значения принимаются. Сначала мы сделаем несколько меньше, а именно покажем, что последовательность $\{y_m(x)\}$ содержит некоторую равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Покажем для этого, что совокупность функций $\{y_m(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна*).

Действительно, из сходимости последовательности

$$\lambda_m^{(1)} = \int_0^\pi (Py_m'^2 + Qy_m^2) dx$$

*) Семейство функций Ψ , заданных на $[a, b]$, называется равномерно ограниченным, если существует такая постоянная C , что $|\psi(x)| \leq C$ для всех $\psi \in \Psi$ и всех $a \leq x \leq b$. Оно называется равностепенно непрерывным, если для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (одно и то же для всех ψ), что $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \epsilon$, как только $|x_1 - x_2| < \delta$ для всех $\psi \in \Psi$.

следует ее ограниченность. Таким образом, при всех m ,

$$\left| \int_0^{\pi} (Py_m'^2 + Qy_m^2) dx \right| < M,$$

где M — некоторое постоянное число. Поэтому

$$\int_0^{\pi} Py_m'^2 dx \leq M + \left| \int_0^{\pi} Qy_m^2 dx \right| \leq M + |Q|_{\max} = M_1,$$

и так как $P(x) > 0$,

$$\int_0^{\pi} y_m'^2 dx \leq \frac{M_1}{P_{\min}} = M_2. \quad (12)$$

Из этого неравенства легко получаем, что функции y_m равномерно непрерывны и равномерно ограничены. Действительно, из условия

$$y_m(0) = 0$$

вытекает, что

$$|y_m(x)|^2 = \left| \int_0^x y_m'(x) dx \right|^2.$$

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, отсюда получаем

$$|y_m(x)|^2 = \left[\int_0^x y_m'(x) dx \right]^2 \leq \int_0^x y_m'^2(x) dx \leq M_2 \pi,$$

т. е. $\{y_m(x)\}$ равномерно ограничены. Далее, так как

$$\begin{aligned} |y_m(x_1) - y_m(x_2)|^2 &= \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} y_m'(x) dx \right|^2 \leq \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{x_2} y_m'^2(x) dx \leq M_2 |x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

то $\{y_m(x)\}$ равномерно непрерывны. Согласно теореме Арцела*) из последовательности $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$y_{m_1}, y_{m_2}, \dots, y_{m_k}, \dots \quad (13)$$

Положим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k}(x) = y(x) \quad (14)$$

*) Теорема Арцела состоит в том, что из каждой равномерно ограниченной и равномерно непрерывной последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

и покажем, что эта предельная функция удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля (1).

Трудность здесь состоит в том, что в интеграле

$$\int_0^{\pi} (Py_{m_k}'^2 + Qy_{m_k}^2) dx \quad (15)$$

мы не можем непосредственно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$, так как нам ничего не известно о сходимости производных $y_{m_k}'(x)$. Поэтому из того, что при каждом k функция $y_{m_k}(x)$ реализует минимум интеграла (15) в соответствующем конечномерном пространстве, еще не вытекает сразу, что предельная функция $y(x)$ дает минимум функционала (1). Для того чтобы обойти указанное затруднение, докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. Если для любой функции $\zeta(x)$, имеющей непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяющей граничным условиям (2), выполнено равенство

$$\int_0^{\pi} (L[\zeta] y) dx = 0,$$

где

$$L[\zeta] = -(P\zeta')' + Q_1\zeta,$$

то y дважды дифференцируема и $L[y] = 0$.

Доказательство. Проинтегрируем выражение

$$\int_0^{\pi} [-(P\zeta')' + Q_1\zeta] y dx = 0$$

по частям. Получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} -P\zeta'' y dx + \int_0^{\pi} -P'\zeta' y dx + \int_0^{\pi} Q_1\zeta y dx = \\ & = \int_0^{\pi} -P\zeta'' y dx + \int_0^{\pi} \zeta'' \left(\int_0^x P'y dt \right) dx + \int_0^{\pi} \zeta'' \left[\int_0^x \left(\int_0^t Q_1 y dz \right) dt \right] dx - \\ & \quad - \zeta'(\pi) \int_0^{\pi} P'y dx - \zeta'(\pi) \int_0^{\pi} \left(\int_0^x Q_1 y dt \right) dx. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta(x)$ выбрана так, что $\zeta'(\pi) = 0$. Тогда два последних члена в полученном выражении обращаются в нуль, и мы получаем равенство

$$\int_0^{\pi} \zeta'' \left[-Py + \int_0^x P'y \, dx + \int_0^x \left(\int_0^t Q_1 y \, dz \right) dt \right] dx = 0$$

для любой дважды непрерывно дифференцируемой $\zeta(x)$, удовлетворяющей условиям $\zeta(0) = \zeta(\pi) = 0$ и $\zeta'(\pi) = 0$. Отсюда с помощью интегрирования по частям легко получается, что выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, представляет собой многочлен первой степени

$$-Py + \int_0^x P'y \, dx + \int_0^x \left(\int_0^t Q_1 y \, dz \right) dt = c_0 + c_1 x. \quad (16)$$

Так как в этом равенстве как правая часть, так и второе и третье слагаемые в левой части имеют производные, то имеет производную и выражение $-Py$. Поэтому равенство (16) можно продифференцировать почленно. Получаем

$$-(Py)' + P'y + \int_0^x Q_1 y \, dx = c_1.$$

Так как функция $P(x)$ не обращается в нуль и дифференцируема, то существует y' . Поэтому, дифференцируя Py как произведение и приводя подобные члены, окончательно получаем

$$-Py' + \int_0^x Q_1 y \, dx = c_1. \quad (17)$$

Так как здесь правая часть и второе слагаемое в левой части равенства дифференцируемы, то существует $(Py')'$. Дифференцируя (17) почленно, получаем

$$-(Py')' + Q_1 y = 0.$$

Лемма доказана.

Вернемся теперь к нашей основной задаче и покажем, что функция $y(x)$, представляющая собой предел построенной нами подпоследовательности $\{y_{m_k}(x)\}$, удовлетворяет уравнению (1) при λ , равном

$$\lambda^1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^{(1)}.$$

Точка $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, в которой квадратичная форма J_m достигает минимума, определяется, согласно теории условного экстремума, из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_k} \left(J[y_m] - \lambda_m \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right)^2 dx \right) = \\ = \int_0^\pi \left\{ P(x) \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin' nx \right) \sin' kx + \right. \\ \left. + (Q(x) - \lambda_m) \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right) \sin kx \right\} dx = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (18)$$

Умножив каждое из этих равенств на произвольное постоянное $A_k^{(m)}$ и просуммировав по k от 1 до m , получим

$$\int_0^\pi \{ P y'_m \zeta'_m + (Q - \lambda_m^{(1)}) y_m \zeta_m \} dx = 0, \quad (19)$$

где

$$\zeta_m(x) = \sum_{k=1}^m A_k^{(m)} \sin kx. \quad (20)$$

Пусть ζ — произвольная дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям (2). Тогда коэффициенты $A_k^{(m)}$ можно при каждом $m = 1, 2, \dots$ выбрать так, что

$$\zeta_m \rightarrow \zeta, \quad \zeta'_m \rightarrow \zeta', \quad \zeta''_m \rightarrow \zeta''.$$

Отсюда следует, что

$$L[\zeta_m] \rightarrow L[\zeta] \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Пусть теперь в равенстве (19), которое можно переписать в виде

$$\int_0^\pi L[\zeta_m] y_m dx = \lambda_m \int_0^\pi y_m \zeta_m dx, \quad (21)$$

m пробегает последовательность значений m_k , отвечающую сходящейся к функции $y(x)$ подпоследовательности $\{y_{m_k}(x)\}$. Мы можем при этом в равенстве (21) перейти к пределу. Получим

$$\int_0^\pi L[\zeta] y dx = \lambda^{(1)} \int_0^\pi y \zeta dx \quad (22)$$

для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\zeta(x)$. В силу доказанной выше леммы отсюда получаем, что $y(x)$ имеет две непрерывные производные и

$$L[y] = \lambda^{(1)} y.$$

Действительно, достаточно в указанной лемме положить

$$Q_1(x) = Q(x) - \lambda^{(1)}.$$

Итак, мы показали, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1).

Выше мы определили $y(x)$ как предел некоторой подпоследовательности $\{y_{m_k}(x)\}$ последовательности $\{y_m(x)\}$. Покажем, что последовательность $\{y_m(x)\}$ сама сходится к $y(x)$. Для этого воспользуемся тем, что если λ задано, то решение уравнения

$$-(Py')' + Qy = \lambda y,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

и условию нормировки

$$\int_0^\pi y^2(x) dx = 1,$$

определено с точностью до знака. Рассмотрим такое решение, и пусть в точке x_0 это решение отлично от нуля $y(x_0) \neq 0$. Выберем знак у $y(x)$ так, что $y(x_0) > 0$. Знак $y_m(x)$ будем выбирать так, что $y_m(x_0) \geq 0$ при каждом m . Если $\{y_m(x)\}$ не сходится к $y(x)$, то из $\{y_m(x)\}$ можно выбрать вторую подпоследовательность, сходящуюся к некоторому другому решению $\bar{y}(x) \neq y(x)$. В силу указанной выше единственности (с точностью до знака) решения, удовлетворяющего условиям (2) и (4), $\bar{y}(x) = -y(x)$, но тогда $\bar{y}(x_0) < 0$, что невозможно, так как $y_m(x_0) \geq 0$. Таким образом, $y_m(x) \rightarrow y(x)$ (равномерно), если только выбирать соответствующий знак у $y_m(x)$.

Мы доказали существование функции $y(x)$, которую обозначим теперь $y^{(1)}(x)$, отвечающей одному собственному значению уравнения Штурма — Лиувилля. Следующая собственная функция $y^{(2)}(x)$ и отвечающее ей собственное значение $\lambda^{(2)}$ могут быть найдены так. Будем искать минимум интеграла (3) при условиях (2) и (4) и дополнительном условии ортогональности

$$\int_0^\pi y^{(1)}(x) y^{(2)}(x) dx = 0.$$

Положим

$$y_m^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin kx.$$

Подставив это выражение в интеграл (3) вместо $y(x)$, мы снова получим некоторую квадратичную форму. Будем рассматривать эту квадратичную форму на совокупности функций вида

$$\sum_{k=1}^m b_k \sin kx,$$

удовлетворяющих условию ортогональности их к построенным выше функциям $y_m(x)$, т. е. равенству

$$\sum_{k=1}^m b_k \int_0^{\pi} \sin kx \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right) dx = 0. \quad (23)$$

Равенство (23) представляет собой уравнение $(m-1)$ -мерной плоскости в m -мерном пространстве, проходящей через начало координат. Ее пересечение со сферой, определяемой условием (4) есть сфера размерности $m-1$. На этой сфере наш функционал (1) сводится опять-таки к квадратичной форме. Применяя теорему Вейерштрасса, видим, что эта квадратичная форма достигает на этой $(m-1)$ -мерной сфере минимума, который мы обозначим $\lambda_m^{(2)}$. Ясно, что

$$\lambda_{m+1}^{(2)} \leq \lambda_m^{(2)},$$

и так как функционал (3) ограничен снизу, то существует предел

$$\lambda^{(2)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^{(2)}.$$

При этом, очевидно,

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}.$$

Построив последовательность функций

$$y_m^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin kx \quad (m = 1, 2, \dots),$$

каждая из которых реализует соответствующий минимум $\lambda_m^{(2)}$ и удовлетворяет условию ортогональности

$$\sum_{k=1}^m b_k \int_0^{\pi} \sin kx \left(\sum_{n=1}^m a_n \sin nx \right) dx = 0,$$

мы можем показать, что эта последовательность равномерно сходится к некоторой предельной функции $y^{(2)}(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$-(Py')' + Qy = \lambda^{(2)}y,$$

граничным условиям

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

условию нормировки

$$\int_0^{\pi} y^2(x) dx = 1$$

и условию ортогональности к $y^{(1)}(x)$:

$$\int_0^{\pi} y^{(1)}(x) y(x) dx = 0. \quad (24)$$

Таким образом, $y^{(2)}(x)$ представляет собой собственную функцию уравнения (1), отвечающую собственному значению $\lambda^{(2)}$. Так как ортогональные между собой функции не могут быть линейно зависимы, а каждому собственному значению λ отвечает лишь одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция, то имеет место строгое неравенство

$$\lambda_2 > \lambda_1.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, можно получить собственные значения $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ и отвечающие им собственные функции $y^{(3)}(x), y^{(4)}(x)$ и т. д.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ*)

Рассмотрим распространение возбуждения в некоторой среде, которую мы будем считать неоднородной и анизотропной; таким образом, скорость распространения возбуждения зависит, вообще говоря, от точки и от направления. Относительно рассматриваемого процесса мы будем предполагать следующее:

а) каждая точка может находиться лишь в одном из двух состояний: возбуждения или покоя. Таким образом, понятие интенсивности возбуждения мы не вводим;

б) каждая точка, до которой возбуждение дошло в момент времени t , сама становится, начиная с этого момента, источником дальнейшего распространения возбуждения.

Наша цель — показать, что рассмотрение такого процесса позволит получить из геометрических соображений такие основные понятия вариационного исчисления, как канонические уравнения, функцию Гамильтона, уравнение Гамильтона-Якоби и т. д. Проводимые ниже рассуждения не опираются на тот вывод этих понятий, который содержится в основном тексте книги (§§ 14, 19), и, по существу, могут его заменить.

1. Постановка задачи. Пусть среда, в которой распространяется возбуждение, представляет собой n -мерное многообразие X , в котором введена некоторая система координат. Таким образом, каждая точка x из X определяется системой n чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$. Выбрав в X некоторую фиксированную точку, рассмотрим совокупность всевозможных гладких кривых

$$x = x(s), \quad (1)$$

проходящих через эту точку. Совокупность векторов, касательных к этим кривым в данной точке, т. е. векторов

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad (2)$$

*) Вопросы, излагаемые в настоящем дополнении, авторы обсуждали с М. Л. Цетлиным.

представляет собой n -мерное линейное пространство, называемое касательным пространством. Мы обозначим его $T(x)$.

Отметим, что при переходе в X к новым координатам по формулам

$$x^* = x^*(x) \quad (3)$$

векторы x' касательного пространства $T(x)$ преобразуются по закону

$$\frac{dx^{i*}}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^{i*}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds}. \quad (4)$$

Пусть $x(s)$ и $x(s+ds)$ — две близкие точки, лежащие на некоторой кривой

$$x = x(s).$$

Согласно сказанному выше, скорость распространения возбуждения в X зависит от точки и от направления, т. е. от x и x' . Обозначим через $f(x, x')$ величину, обратную этой скорости; тогда время dt , за которое возбуждение пройдет из точки $x(s)$ в точку $x(s+ds)$, можно представить в виде

$$dt = f\left(x, \frac{dx}{ds}\right) ds, \quad (5)$$

а время, за которое возбуждение распространится вдоль некоторой конечной дуги, соединяющей точки $x_1 = x(s_1)$ и $x_2 = x(s_2)$, равно

$$\int_{s_1}^{s_2} f\left(x, \frac{dx}{ds}\right) ds. \quad (6)$$

Если точка x_1 возбуждена, то время, через которое возбужденной окажется некоторая точка x_2 , равно

$$\min_{s_1} \int_{s_1}^{s_2} f\left(x, \frac{dx}{ds}\right) ds, \quad (7)$$

где минимум берется по всем кривым $x = x(s)$, соединяющим точки x_1 и x_2 . Действительно, если возбуждение, распространяясь из точки x_1 по всевозможным направлениям, уже дошло по какому-либо пути до точки x_2 , то все другие соединяющие эти точки пути, по которым возбуждение распространяется за большее время, уже не играют роли. Таким образом, процесс распространения возбуждения в некоторой среде всегда подчиняется известному принципу Ферма: возбуждение распространяется из одной точки в другую всегда вдоль того соединяющего эти точки пути, который оно проходит за наименьшее время. Эти пути мы будем называть траекториями возбуждения.

Вернемся к введенной нами функции $f(x, x')$. Так как время распространения возбуждения вдоль любой кривой положительно, то

$$f(x, x') > 0, \text{ если } x' \neq 0. \quad (8)$$

Далее, время распространения возбуждения вдоль некоторой кривой, т. е. величина (6), должно зависеть только от этой кривой (а не от выбора ее параметризации). Как известно (см. гл. II § 8), это имеет место в том случае, если функция $f(x, x')$ положительно однородна первой степени относительно x' , т. е. если

$$f(x, kx') = kf(x, x') \text{ при } k > 0. \quad (9)$$

Поскольку при изменении направления на противоположное скорость распространения возбуждения не меняется, то

$$f(x, -x') = f(x, x'). \quad (10)$$

Функция $f(x, x')$ удовлетворяет условию *выпуклости*

$$f(x, x' + \bar{x}') \leq f(x, x') + f(x, \bar{x}'). \quad (11)$$

Действительно, пусть рассматриваемая среда однородна, т. е. f зависит только от x' (но не от точки x). Пусть x' и $\bar{x}'$ — два вектора из $T(x)$; возбуждение за время $f(x')$ распространяется вдоль x' и за время $f(\bar{x}')$ — вдоль $\bar{x}'$. Тогда оно распространится вдоль $x' + \bar{x}'$ за время, не превышающее $f(x') + f(\bar{x}')$, т. е.

$$f(x' + \bar{x}') \leq f(x') + f(\bar{x}').$$

Если же f зависит от x , но эта зависимость достаточно гладкая (скажем, существуют производные $\frac{\partial f}{\partial x^i}$), то те же рассуждения показывают, что условие выпуклости будет выполняться для достаточно малых x' и $\bar{x}'$, а отсюда, в силу однородности функции f по x' , оно будет выполнено и для всех $x', \bar{x}'$.

Мы будем предполагать функцию f удовлетворяющей несколько более сильному, чем (11), условию *строгой выпуклости*, а именно знак $=$ в (11) имеет место *только* в том случае, когда $\bar{x}' = \lambda x'$, где $\lambda > 0$.

Пусть имеется возбуждение, которое в момент $t=0$ занимает некоторую область и затем распространяется дальше. Границу зоны возбуждения мы будем называть фронтом волны. Уравнение фронта волны в момент t можно записать в виде $S(x, t) = 0$.

Задачу нашу можно теперь сформулировать следующим образом: найти уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x, t)$, описывающая фронт волны, и уравнения траекторий возбуждения.

2. Сформулируем поставленную задачу в терминах теории нормированных пространств.

В n -мерном линейном пространстве $T(x)$ введем норму, положив

$$\|x'\| = f(x, x').$$

Из условий (8) — (11) следует, что $f(x, x')$ действительно обладает всеми свойствами нормы (определение нормы см. в § 2). Совокупность векторов из $T(x)$, удовлетворяющих условию

$$f(x, x') \leq \alpha, \quad \text{т. е. } \|x'\| \leq \alpha,$$

будем называть сферой радиуса α в $T(x)$ (с центром в точке x). Таким образом, сфера радиуса α — это та область пространства $T(x)$, на которую распространится за время α возбуждение, в начальный момент сосредоточенное в точке x .

Мы можем теперь рассматриваемую задачу сформулировать так: дано n -мерное многообразие X , в каждой точке x которого определено касательное пространство $T(x)$. В $T(x)$ задана норма $f(x, x')$, удовлетворяющая, кроме обычных аксиом нормы, условию строгой выпуклости. Найти уравнения, описывающие процесс возбуждения, который из каждой точки x за время dt распространяется по сфере

$$f(x, x') \leq dt.$$

3. Рассмотрим, наряду с нормированным пространством $T(x)$, пространство $\tilde{T}(x)$ линейных функционалов на нем (определение линейного функционала см. в § 3). $\tilde{T}(x)$ представляет собой n -мерное пространство, элементами которого являются векторы $p = (p_1, \dots, p_n)$, называемые *контраградиентными* векторам из $T(x)$. Пространство линейных функционалов на некотором линейном нормированном пространстве называется пространством, сопряженным к данному*).

В сопряженном пространстве норма вектора p определяется следующим образом:

$$\|p\| = \sup \frac{(p, x')}{\|x'\|},$$

где $\sup$ берется по всем $x' \neq 0$ из $T(x)$, а (p, x') означает

$\sum_{i=1}^n p_i x_i'$, т. е. значение линейного функционала $p \in \tilde{T}(x)$ в точке $x' \in T(x)$.

Обозначим норму элемента $p \in \tilde{T}(x)$ через $H(x, p)$. Таким образом, по определению

$$H(x, p) = \sup_{x'} \frac{(p, x')}{f(x, x')}. \quad (12)$$

*) О понятии сопряженного пространства см., например, И. М. Гельфанд, «Лекции по линейной алгебре», § 22.

Можно показать, что переход от функции $f(x, x')$ к функции $H(x, p)$, определяемый формулой (12), представляет собой не что иное, как преобразование Лежандра (рассмотренное нами в гл. IV, § 15), но только в параметрической форме.

4. Уравнение Гамильтона—Якоби. Пусть $S(x, t) = 0$ — уравнение фронта волны в момент t . Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x, t)$. Для этого посмотрим, как происходит распространение возбуждения за некоторый малый промежуток времени dt . Каждая точка поверхности $S(x, t) = 0$ сама служит источником возбуждения, которое за время dt распространится по сфере

$$f(x, dx) \leq dt.$$

Фронт волны в момент $t + dt$ представляет собой огибающую этих сфер; действительно, эта огибающая отделяет точки, в которые возбуждение за время, не превышающее dt , может прийти от какой-либо точки фронта $S(x, t) = 0$, от точек, до которых возбуждение за время dt прийти не успеет. Но такая «поверхность раздела» и есть фронт волны. Следовательно, эта огибающая определяется уравнением $S(x, t + dt) = 0$. Сказанное означает, что гиперплоскость, касательная к поверхности $S(x, t + dt)$, является касательной и к некоторой сфере

$$f(x, dx) \leq dt$$

с центром в точке x , принадлежащей поверхности $S(x, t) = 0$. Уравнение каждой гиперплоскости в пространстве $T(x)$ может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^n p_i dx^i = \text{const},$$

где $p = (p_1, \dots, p_n) \in \tilde{T}(x)$.

В частности, уравнение гиперплоскости, касательной к поверхности $S(x, t + dt) = 0$, имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i} dx^i = C. \quad (13)$$

Если гиперплоскость (13) является в то же время касательной к сфере радиуса dt с центром в точке x , то постоянная C равна радиусу сферы, умноженному на норму вектора $\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n}\right)$, т. е. на $H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right)$. Таким образом, уравнение гиперплоскости, касательной к фронту волны и к сфере радиуса dt , проходящей через точку

касания, имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i} dx^i = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) dt. \quad (14)$$

Но из уравнения фронта волны $S(x, t) = 0$ имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i} dx^i = 0. \quad (15)$$

Из двух последних равенств окончательно получаем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) = 0. \quad (16)$$

Мы получили уравнение, описывающее изменение фронта волны со временем. Это уравнение (16) представляет собой не что иное, как уравнение Гамильтона — Якоби, рассмотренное нами в § 19.

5. Траектории возбуждения. Выше было сказано, что возбуждение распространяется из одной точки в другую вдоль той линии, которая реализует минимум функционала

$$\int_{s_1}^{s_2} f(x, x') ds$$

среди всех линий, соединяющих две данные точки. Поэтому дифференциальные уравнения траекторий возбуждения можно получить, например, как уравнения Эйлера для функционала (6). Мы, однако, выведем эти уравнения, опираясь лишь на следующие геометрические соображения.

Так как функция $f(x, x')$, отвечающая рассматриваемому процессу, предполагается дифференцируемой и строго выпуклой, то через каждую точку сферической поверхности

$$f(x, x') = \text{const}$$

проходит единственная касательная гиперплоскость, и эта гиперплоскость имеет со сферой только одну общую точку. Отсюда следует, что для двух поверхностей

$$S(x, t) = 0, \quad (a)$$

$$S(x + dx, t + dt) = 0, \quad (б)$$

представляющих собой фронт волны в близкие моменты t и $t + dt$, можно говорить о том, в какую именно точку $x + dx$ поверхности (б) приходит за время dt возбуждение из данной точки x поверхности (а). Действительно, это та точка $x + dx$, через кото-

рую проходит гиперплоскость, касательная одновременно к поверхности (б) и к сфере радиуса dt , с центром в точке x . До остальных точек поверхности (б) возбуждение за время dt не успеет дойти из точки x^*). Таким образом, в каждой точке поверхности $S(x, t)$, представляющей собой фронт волны в данный момент, определено некоторое направление распространения возбуждения.

Итак, направление распространения возбуждения это то направление, по которому возбуждение, идущее из данной точки поверхности $S(x, t) = 0$, достигает поверхности $S(x + dx, t + dt) = 0$ быстрее, чем по какому-либо другому направлению.

Пусть γ — траектория, по которой возбуждение проходит из точки x_0 поверхности $S(x, t_0) = 0$ до точки x_1 , лежащей на поверхности $S(x, t_1) = 0$. Тогда в каждой точке направление кривой есть направление распространения возбуждения в том смысле, как это было только что определено. Действительно, вдоль той кривой, направление которой в каждой точке есть направление распространения возбуждения от данной поверхности $S(x, t) = 0$ к близкой, возбуждение проходит быстрее, чем вдоль какой-либо другой кривой.

Таким образом, фиксируя однопараметрическое семейство поверхностей $S(x, t) = 0$ и точку x_0 , мы получим некоторую траекторию возбуждения. Выбирая точку x_0 произвольно, мы получим, что однопараметрическое семейство поверхностей $S(x, t) = 0$ определяет семейство траекторий возбуждения, зависящее от $n - 1$ параметров; при этом через каждую точку x пространства X проходит одна и только одна траектория из этого семейства.

Рассмотрим теперь полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, т. е. его решение

$$S(x, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

зависящее от n параметров. Этот полный интеграл определяет $(n + 1)$ -параметрическое **) семейство поверхностей

$$S(x, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Это семейство поверхностей определяет $(2n - 1)$ -параметрическое семейство траекторий возбуждения. Так как траектории возбуждения — это экстремали функционала (6), то полученный результат представляет собой геометрическую интерпретацию теоремы Якоби

*) Физически это означает следующее. Если поверхность (а) изменить лишь в малой окрестности точки x , то поверхность (б) при этом изменится также лишь в некоторой малой области.

**) Так как $S(x, t + t_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ при всяком t_0 тоже представляет собой интегральную поверхность, то данное семейство действительно зависит от $n + 1$ параметров.

о построении общего решения системы уравнений Эйлера по полному интегралу уравнения Гамильтона — Якоби *).

6. Уравнения траекторий возбуждения. Выведем теперь дифференциальные уравнения траекторий распространения возбуждения. Примем за параметр вдоль каждой из таких траекторий время t . Тогда из равенства

$$dt = f(x, dx)$$

и однородности функции f по dx получаем:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 1,$$

т. е. норма вектора $\frac{dx}{dt}$ тождественно равна единице. Из соотношения (14) следует, что в каждой точке x вектор $\frac{dx}{dt}$ (касательный к траектории, вдоль которой распространяется возбуждение) связан с ковариантным вектором p (определяющим гиперплоскость, касательную к фронту волны) соотношением

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{dx^i}{dt} = H(x, p).$$

Для любого другого вектора p , по определению нормы вектора в сопряженном пространстве, имеем:

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{dx^i}{dt} \leq H(x, p).$$

Таким образом, выражение

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{dx^i}{dt} - H(x, p),$$

рассматриваемое как функция от p , достигает максимума в том случае, когда p определяет гиперплоскость, касательную к фронту волны. Поэтому вдоль траектории распространения возбуждения выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^n p_i \frac{dx^i}{dt} - H(x, p) \right] = 0,$$

*) Мы рассматриваем параметрическую задачу; в этом случае между уравнениями Эйлера имеется зависимость (см. гл. II, § 8 и гл. VII, § 33), поэтому общее решение получающихся здесь $2n$ уравнений содержит только $2n - 1$ произвольных постоянных.

т. е.

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}. \quad (17)$$

Мы получили систему n обыкновенных уравнений 1-го порядка. Так как в них входит $2n$ неизвестных функций $x^1, \dots, x^n$ и $p_1, \dots, p_n$, то для полного описания траекторий нужно получить еще n уравнений. Для получения недостающих уравнений воспользуемся тем, что поверхности, представляющие собой фронт волны в различные моменты времени, не произвольны, а удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) = 0,$$

а значения $p_1, \dots, p_n$ в каждой точке траектории — это компоненты $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ вектора, определяющего гиперплоскость, касательную к фронту волны. Поэтому вдоль каждой траектории имеем:

$$p_i = p_i(t) = \frac{\partial}{\partial x^i} S(x^1(t), \dots, x^n(t), t),$$

следовательно,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^i} \frac{dx^j}{dt}. \quad (18)$$

Введем теперь следующие обозначения. Если функция

$$H(x, p)$$

рассматривается при $p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$ как функция от $x^1, \dots, x^n$ и t , то соответствующую частную производную ее по x^i будем обозначать символом

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{t=\text{const}}.$$

Если же $H(x, p)$ рассматривается как функция $2n$ переменных $p_1, \dots, p_n, x^1, \dots, x^n$, то соответствующую частную производную обозначим

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{p=\text{const}}.$$

Воспользовавшись уравнением Гамильтона — Якоби, мы можем равенство (18) переписать в виде

$$\frac{dp_i}{dt} = - \left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{t=\text{const}} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^i} \frac{dx^j}{dt}. \quad (19)$$

Найдем связь между значениями производных

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{t=\text{const}} \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{p=\text{const}}$$

вдоль каждой траектории. Имеем:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{t=\text{const}} = \left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{p=\text{const}} + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{x=\text{const}} \frac{\partial p_j}{\partial x^i}.$$

Так как вдоль каждой траектории $p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}$ и $\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, то из (19) получаем:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \left. \frac{\partial H}{\partial x^i} \right|_{p=\text{const}}.$$

Мы получили таким образом n уравнений, которые вместе с уравнениями (17) образуют систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H(x, p)}{\partial x^i}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

интегральными кривыми которой являются линии распространения возбуждения, т. е. экстремали функционала (6). Система (20) представляет собой систему канонических уравнений для вариационной задачи (6). По отношению к уравнению Гамильтона — Якоби (16) система (20) является системой уравнений характеристик.

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕГУЛИРОВАНИИ

1. Здесь мы кратко изложим некоторые результаты, относящиеся к так называемой теории оптимальных процессов. Эти результаты принадлежат Л. С. Понтрягину и его ученикам; они содержатся в монографии Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко «Математическая теория оптимальных процессов» *). Рассмотрим связь этой теории с классическими вариационными задачами.

Нахождение для некоторой системы режима работы, наивыгоднейшего с той или иной точки зрения, приводит к математической задаче, которую можно сформулировать так.

Пусть закон изменения состояния некоторого объекта с течением времени дается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k), \quad (1)$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (2)$$

где $x^1, \dots, x^n$ — функции времени t , а $f^i(x, u)$ — функции, определенные и непрерывные для всех $x \in X$ и всех $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, принадлежащих некоторой фиксированной области Ω k -мерного пространства **). Задав функцию $u = u(t)$ (со значениями из Ω), мы получим вместо системы (1) систему

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n; u_1(t), \dots, u_k(t)), \quad (3)$$

*) См. также Л. С. Понтрягин, Оптимальные процессы регулирования, Успехи матем. наук, 14, № 1 (85), 1959, стр. 3—20; В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и Л. С. Понтрягин, Теория оптимальных процессов. I, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, стр. 3—42.

**) В указанных в предыдущей сноске работах рассматривается более общий случай произвольного топологического пространства Ω .

которая при заданном начальном значении $x(t_0) = x_0$ имеет некоторое определенное решение.

Функции

$$u_1(t), \dots, u_k(t)$$

мы будем называть *функциями управления*. Задав эти функции на отрезке $[t_0, t_1]$ и начальное значение $x_0 = x(t_0)$, мы получим некоторую траекторию, т. е. решение системы (1).

Мы будем называть «управлением» совокупность функций $u_i(t)$ отрезка $[t_0, t_1]$ и начальной точки x_0 . В соответствии с этим управление будет обозначаться символом

$$U = (u(t), t_0, t_1, x_0).$$

Пусть далее $f^0(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_k)$ — некоторая функция, определенная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^0}{\partial x^j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

при всех $x \in X$ и всех $u \in \Omega$. Каждому управлению U поставим в соответствие число

$$J[U] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt. \quad (4)$$

Таким образом, $J[U]$ есть функционал, определенный на множестве управлений. Управление $U = (u(t), t_0, t_1, x_0)$ назовем *оптимальным*, если, каково бы ни было управление

$$U^* = (u^*(t), t_0^*, t_1^*, x_0),$$

переводящее данную точку x_0 в точку x_1 (т. е. такое, что соответствующая траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условию $x^*(t_1^*) = x_1$), имеет место неравенство

$$J[U] \leq J[U^*]. \quad (5)$$

Траекторию, отвечающую оптимальному управлению, назовем оптимальной траекторией.

Задача состоит в том, чтобы найти необходимые условия оптимальности управления (и соответствующей траектории).

Подчеркнем следующее. Говоря об оптимальности того или иного управления, мы предполагаем, что заранее фиксирован некоторый класс управлений; мы будем называть эти управления *допустимыми*. Здесь мы будем предполагать, что класс допустимых управлений состоит из всех кусочно-непрерывных ограниченных функций с разрывами первого рода, в каждый момент времени принимающих значения из области Ω .

Важным частным случаем задач об оптимальном регулировании является тот случай, когда функционал (4) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} dt,$$

т. е. представляет собой время, за которое совершается переход из точки x_0 в точку x_1 . Таким образом, здесь оптимальность означает переход из x_0 в x_1 за возможно более короткое время.

2. Задача об оптимальном управлении тесно связана с традиционными задачами вариационного исчисления. Действительно, интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt$$

можно рассматривать как функционал, зависящий от $n+k$ функций $x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k$, т. е. как функционал, определенный на некотором классе кривых в $(n+k+1)$ -мерном пространстве. Функции $x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_k$ связаны уравнениями (1). Таким образом, мы имеем здесь задачу на условный экстремум с неголономными связями (см. по этому поводу гл. III, § 10). Граничные условия, состоящие в том, что искомая оптимальная траектория $x(t)$ начинается в точке x_0 и кончается в точке x_1 , означают, что в указанном $(n+k+1)$ -мерном пространстве допустимыми являются те кривые, концы которых лежат на двух $(k+1)$ -мерных плоскостях, определяемых заданными значениями $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ и $(x_1^1, \dots, x_1^n)$ координат $x^1, \dots, x^n$.

Мы видим, что задача об оптимальном регулировании представляет собой видоизменение задачи на условный экстремум. Особенность, характерная для задач об оптимальном регулировании, состоит в том, что заранее фиксируется определенный класс допустимых управлений, причем непрерывность функций управления, вообще говоря, не требуется, но предполагается, что они принимают значения, лежащие в некоторой фиксированной области.

Покажем, что простейшая вариационная задача в n -мерном пространстве, в которой подынтегральное выражение не зависит явно от t^*), является частным случаем задачи об оптимальном регулировании.

Пусть дан функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(x^1, \dots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right) dt; \quad (6)$$

*) Это условие не является ограничением, так как к такому виду можно привести любой функционал, например, перейдя к параметрической форме задачи.

требуется среди кривых, проходящих через точки

$$(x_0^1, \dots, x_0^n) \text{ и } (x_1^1, \dots, x_1^n),$$

найти ту, на которой этот функционал достигает минимума.

Для того чтобы представить эту задачу как задачу об оптимальном регулировании, достаточно функционал (6) переписать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_n) dt, \quad (7)$$

а в качестве системы (1) взять уравнения

$$\frac{dx^i}{dt} = u_i. \quad (8)$$

3. Перейдем теперь к изложению условий, необходимых для того, чтобы данное управление (и отвечающая этому управлению траектория) было оптимальным.

Для этой цели присоединим к системе уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f_i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

еще одно уравнение

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x, u),$$

где $f_0(x, u)$ — функция, определяющая тот функционал (4), который мы должны минимизировать. Одновременно начальные условия

$$x^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

мы дополним условием

$$x^0(t_0) = 0. \quad (10)$$

Ясно, что если U — некоторое допустимое управление и $x = x(t)$ — решение системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (11)$$

отвечающее этому управлению и начальным условиям (9), (10), то

$$J[U] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt = x^0(t_1).$$

Итак, задача об оптимальном регулировании может быть сформулирована так: найти такое допустимое управление U , при котором

решение $x(t)$ системы (11), удовлетворяющее начальным условиям (9), (10), давало бы возможно меньшее значение $x^0(t_1)$.

4. Принцип максимума. Для того чтобы сформулировать основное необходимое условие оптимальности, так называемый принцип максимума, будем, наряду с переменными $x^0, x^1, \dots, x^n$, рассматривать новые переменные $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, которые будем считать подчиненными следующей системе дифференциальных уравнений *):

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \psi_\alpha \quad (12)$$

(ее называют системой, сопряженной системе (11)).

Сформулируем основную теорему.

Теорема (принцип максимума). Пусть $U = (u(t), t_0, t_1, x_0)$ — такое допустимое управление, что отвечающая ему интегральная кривая $x(t)$ системы (11), проходящая при $t = t_0$ через точку $(0, x_0^1, \dots, x_0^n)$, удовлетворяет условиям

$$x^1(t_1) = x_1^1, \dots, x^n(t_1) = x_1^n.$$

Положим

$$\Pi(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha f^\alpha(x, u).$$

Если управление $U = (u(t), t_0, t_1, x_0)$ оптимально, то существует такая непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, что:

1) величины $x(t)$, $\psi(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= f^i(x, u), \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \psi_\alpha, \end{aligned} \right\} i = 0, 1, \dots, n;$$

2) для всех $t, t_0 \leq t \leq t_1$, величина

$$\Pi(\psi(t), x(t), u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha(t) f^\alpha(x(t), u)$$

достигает максимума при $u = u(t)$;

*) Эта система имеет следующий смысл. Рассмотрим в пространстве $\bar{X}$ переменных $x_0, \dots, x_n$ некоторую гиперплоскость Z_0 , проходящую через начальную точку $(0, x_0^1, \dots, x_0^n)$. Пусть эта гиперплоскость определяется вектором $(\psi_0^0, \dots, \psi_n^0)$. Тогда уравнения (12) описывают перенос этой гиперплоскости вдоль траекторий, являющихся решениями уравнений (11).

3) в момент t_1 выполнены соотношения

$$\psi_0(t_1) = 0, \quad \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha}(t_1) f^{\alpha}(x(t_1), u(t_1)) = 0.$$

При этом, если $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2), то функции $\psi_0(t)$ и $\sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha}(t) \cdot f^{\alpha}(x(t), u(t))$ переменного t на самом деле от t не зависят и тогда в условии 3) точку t_1 можно заменить любой другой.

5. Мы не будем приводить здесь доказательство принципа максимума (читатель найдет его в цитированных выше работах), а ограничимся лишь следующими замечаниями.

1°. Часто принцип максимума может быть использован как рецепт для построения оптимальной траектории, состоящий в следующем. Выберем для каждого фиксированных ψ и x то значение u , при котором выражение

$$\sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u)$$

достигает максимума. Если этим требованием u определяется как однозначная функция от ψ и x :

$$u = u(\psi, x),$$

то, подставив ее вместо u в уравнения (11) и (12), мы получим замкнутую систему $2(n+1)$ уравнений с $2(n+1)$ неизвестными функциями. Это и есть те уравнения, которым должна удовлетворять оптимальная траектория.

2°. С помощью функции

$$\Pi(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u)$$

систему уравнений (11), (12) можно записать в виде

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_i}, \quad (11')$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x^i}. \quad (12')$$

Эти уравнения по форме напоминают канонические уравнения Гамильтона. На самом деле они имеют иной смысл: уравнения Гамильтона образуют замкнутую систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных, а уравнения (11), (12) содержат кроме x и ψ неизвестные величины u и превращаются в замкнутую систему лишь при определенном выборе этих последних.

Для того чтобы в задаче об оптимальном регулировании получить уравнения гамильтоновского типа, их нужно писать не с помощью функции $\Pi(\psi, x, u)$, а с помощью функции*)

$$H(\psi, x) = \sup_u \Pi(\psi, x, u).$$

3°. В простейшей задаче вариационного исчисления система (11), (12) или эквивалентная ей система (11'), (12') вместе с условием максимальности функции $\Pi(\psi, x, u)$ представляет собой обычную систему уравнений Эйлера. Действительно, для простейшей задачи, записанной в виде

$$J[U] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_n) dx,$$

$$u_i = \frac{dx^i}{dt},$$

функция $\Pi(\psi, x, u)$ имеет вид

$$\Pi(\psi, x, u) = \psi_0 f^0(x, u) + \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha u_\alpha.$$

Система (11'), (12') при этом перепишется так:

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x, u), \quad \frac{dx^i}{dt} = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial x^i},$$

а условие максимальности $\Pi(\psi, x, u)$ дает:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial u_i} + \psi_i = 0,$$

т. е.

$$\psi_i = - \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial u_i}.$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f^0(x, u)}{\partial u_i} \right] &= \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial x^i}, \\ \frac{dx^i}{dt} &= u_i, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n,$$

но это и есть не что иное, как система уравнений Эйлера, в которой

*) Переход от Π к H представляет собой аналог преобразования Лежандра (о преобразовании Лежандра см. гл. IV, § 15).

для приведения ее к системе уравнений 1-го порядка производная $\frac{dx^i}{dt} = u_i$ принята за новую искомую функцию *).

4°. Мы уже встречались (см. Дополнение I) с тем, что всякий процесс распространения можно описывать двояко: или с помощью траекторий, по которым происходит распространение («лучи» в оптике), или с помощью движения фронта волны. Первый подход приводит к каноническим уравнениям Гамильтона или, как здесь, к уравнениям Эйлера, т. е. к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а второй — к уравнению Гамильтона — Якоби, представляющему собой уравнение с частными производными. Изложенный выше принцип максимума связан с рассмотрением траекторий, т. е. в этом смысле аналогичен методу канонических уравнений. Подход к задачам оптимального регулирования, аналогичный рассмотрению «фронта волны», развивался в работах Беллмана (см., например, Р. Беллман «Динамическое программирование»).

6. Укажем в заключение связь между принципом максимума и вейерштрассовским необходимым условием экстремума (см. гл. VI, стр. 149). Рассмотрим сначала задачу о нахождении минимума функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_n) dt, \quad (13)$$

где

$$u_i = \frac{dx^i}{dt}. \quad (14)$$

Для этого случая, как мы уже знаем, выражение

$$\Pi(\psi, x, u) \equiv \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u)$$

имеет вид

$$\Pi(\psi, x, u) = \psi_0 f^0(x, u) + \sum_{i=1}^n \psi_i u_i. \quad (15)$$

С другой стороны, с помощью уравнений (14) функционал (13) можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, \dots, x^n, x^{1'}, \dots, x^{n'}) dt.$$

Функция Вейерштрасса для такого функционала имеет вид (см. гл. VI)

$$E(x, x', z) = f^0(x, z) - f^0(x, x') - \sum_{i=1}^n (z_i - z'_i) f_{x^i}'^0(x, x'). \quad (16)$$

*) См. по этому поводу гл. IV, стр. 67.

Из формул (15) и (16) получаем:

$$\begin{aligned} \Pi(\psi, x, z) - \Pi(\psi, x, x') - \sum_{i=1}^n (z_i - x^{i'}) \frac{\partial}{\partial u_i} \Pi(\psi, x, x') = \\ = \psi_0 f^0(x, z) - \psi_0 f^0(x, x') + \sum_i \psi_i (z_i - x^{i'}) - \\ - \sum_{i=1}^n (z_i - x^{i'}) (\psi_0 f_{x^{i'}}^0 + \psi_i) = \psi_0 f^0(x, z) - \psi_0 f^0(x, x') - \\ - \sum_{i=1}^n (z_i - x^{i'}) \psi_0 f_{x^{i'}}^0 = \psi_0 \cdot E(x, x', z). \end{aligned} \quad (17)$$

Если функция Π достигает максимума при значениях $u = x'$, являющихся внутренними точками области Ω , то в этих точках

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0.$$

Так как, кроме того, ψ_0 — отрицательная константа, то в этом случае условие максимальности функции H вдоль оптимальной траектории равносильно в силу равенства (17) условию

$$E(x, x', z) \geq 0,$$

т. е. известному условию Вейерштрасса.

Если воспользоваться выражением функции Вейерштрасса для задач на условный экстремум (см., например, Блисс «Лекции по вариационному исчислению», стр. 264), то легко проверить, что соотношение

$$\psi_0 E = \Pi(\psi, x, z) - \Pi(\psi, x, x') - (z_i - x^{i'}) \frac{\partial}{\partial u_i} \Pi(\psi, x, x')$$

остается в силе и в случае условного экстремума, т. е., иначе говоря, для любой задачи об оптимальном управлении.

Из сказанного ясно, что в тех случаях, когда множество допустимых значений управляющих функций открыто (т. е. все его точки — внутренние), принцип максимума равносильен известному необходимому условию Вейерштрасса. Однако в тех случаях, когда оптимальное управление попадает на границу области Ω , условие Вейерштрасса, вообще говоря, не выполняется, в то время как принцип максимума верен и в этом случае. Заметим, что принцип максимума содержит, в частности, иной, независимый от изложенного нами в гл. VI, вывод условия Вейерштрасса.