АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2

А. В. БИЦАДЗЕ

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ
ИНФОРМАЦИИ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИТОГИ НАУКИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА
1959

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

А. В. БИЦАДЗЕ

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА
1959

Посвящаю дорогому учителю
Михаилу Алексеевичу
Лаврентьеву

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория уравнений смешанного типа берет свое начало от фундаментальных исследований итальянского математика Франческо Трикоми, опубликованных в двадцатых годах нашего столетия.

Проблема уравнений смешанного типа в силу ее прикладной важности за последнее десятилетие стала одной из центральных проблем теории уравнений с частными производными.

Данная работа не является итогом всех научных исследований по этой проблеме, тем более, что их число растет с большой быстротой; но читатель все же сможет получить из данной монографии определенное представление о современном состоянии теории уравнений смешанного типа.

Настоящая книга возникла на основе цикла докладов, посвященных некоторым основным вопросам теории уравнений смешанного типа, с которыми выступал автор в научных учреждениях Китайской Народной Республики в конце 1957 и в начале 1958 годов.

Автор приносит свою благодарность М. А. Лаврентьеву, И. Н. Векуа, Л. Д. Кудрявцеву и коллективу сотрудников отдела математической физики Математического института Академии наук Китая во главе с профессором У Син-Мо, которые дали весьма ценные советы при написании настоящей монографии. Автор признателен также М. М. Смирнову, С. А. Терсенову и А. З. Рывкину, которые, ознакомившись с рукописью, сделали ряд полезных замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

В теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \tag{1}$$

где A_{ik}, B_i, C и f — заданные действительные функции в некоторой области D пространства действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, фундаментальную роль играет так называемая характеристическая квадратичная форма

$$k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik} \eta_i \eta_k. \tag{2}$$

Если в рассматриваемой точке $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ области D коэффициенты A_{ik} не все равны нулю, т. е. не имеет места **вырождение порядка** уравнения (1), то при помощи аффинного преобразования

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \xi_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

крадратичную форму (2) в точке P можно привести к каноническому виду

$$k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2,$$

где коэффициенты α_i принимают значения $+1$, -1 или 0, причем число отрицательных коэффициентов (так называемый индекс инерции) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) являются аффинными инвариантами.

В соответствии с этим дается классификация уравнений вида (1) по типам. Говорят, что в точке P уравнение (1): а) *эллиптического типа*, если все α_i положительны или все α_i отрицательны; б) *гиперболического типа*, если один из α_i отрицателен, а остальные положительны (или наоборот); в) *ультрагиперболического типа* (при $n > 3$), если m коэффициентов α_i ($m \neq 0$, 1, $n-1$, n) положительны, а остальные $n-m$ отрицательны; г) *параболического типа*, если хотя бы один из α_i равен нулю.

В области D уравнение (1) *эллиптично*, *гиперболично* или *параболично*, соответственно, если в каждой точке рассматриваемой области оно эллиптично, гиперболично или параболично.

Всегда можно найти действительное неособое преобразование независимых переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} y_k,$$

приводящее главную дифференциальную часть уравнения (1) в каждой фиксированной точке области D к так называемому *каноническому* виду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}.$$

Если число независимых переменных $n > 2$, то, вообще говоря, нельзя достигнуть такой канонической формы с помощью одного и того же преобразования даже в достаточно малой области изменения независимых переменных. Однако при $n=2$, как это хорошо известно, такое преобразование существует при довольно общих предположениях относительно коэффициентов A_{ik} и области D задания уравнения (1).

Для уравнения (1) хорошо исследованы такие классические задачи, как, например, задачи *Дирихле* и *Неймана* (в эллиптическом случае), задачи *Коши* и *Гурса* (в гиперболическом случае), задача Коши (в параболическом случае), а также некоторые так называемые *смешанные задачи* (как в эллиптическом, так и в гиперболическом и параболическом случаях).

В приложениях нередко приходится иметь дело с такими случаями, когда в различных частях области своего задания уравнение (1) принадлежит различным типам или, как еще принято говорить, уравнение (1) является *уравнением смешанного типа.*

Исследование свойств решений уравнений смешанного типа является одной из важных задач математической физики. Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены итальянским математиком Франческо Трикоми в двадцатых годах нашего столетия [1—4].

В настоящее время в математической литературе имеются многочисленные работы как советских, так и зарубежных авторов, в которых поставлен и исследован ряд задач для линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными при наличии изменения типа на границе или внутри рассматриваемой области.

Ниже дается изложение некоторых основных результатов из этой сравнительно новой области современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СМЕШАННОГО ТИПА

§ 1. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пусть имеется линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1\frac{\partial u}{\partial y}+C_1 u=f, \qquad (1.1)$$

коэффициенты которого A, B, C ни в одной точке области D задания этого уравнения одновременно в нуль не обращаются.

Кривые $\varphi(x, y)=\text{const}$, где $\varphi(x, y)$ является решением уравнения

$$A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=0,$$

называются *характеристическими кривыми*, а направление $\frac{dy}{dx}=\lambda(x, y)$, определяемое из уравнения

$$A\,dy^2-2B\,dy\,dx+C\,dx^2=0, \qquad (1.2)$$

характеристическим направлением уравнения (1.1).

В зависимости от того, окажется ли в рассматриваемой области дискриминант $AC-B^2$ квадратичной формы (1.2) больше нуля, меньше нуля или равным нулю, уравнение (1.1) будет *эллиптическим*, *гиперболическим* или *параболическим* соответственно.

Из дифференциального уравнения характеристик (1.2):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A}\pm\frac{1}{A}\sqrt{B^2-AC} \tag{1.3}$$

следует, что в точках эллиптичности уравнения (1.1) действительных характеристических направлений нет, в то время как в каждой точке гиперболичности существует по два характеристических направления, а в каждой точке параболичности — по одному.

Если в рассматриваемой области уравнение (1.1) всюду одного и того же типа, то, как известно, с помощью неособого действительного преобразования независимых переменных $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ главную дифференциальную часть этого уравнения в области D можно привести к следующим каноническим видам:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad \text{(в эллиптическом случае)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad \text{(в гиперболическом случае)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad \text{(в параболическом случае)}.$$

Может случиться, что в различных частях области D своего задания уравнение (1.1) принадлежит различным типам.

Как уже было сказано, точки параболичности уравнения (1.1) характеризуются равенством

$$\Delta(x, y)=AC-B^2=0. \tag{1.4}$$

Предположим, что коэффициенты A, B, C уравнения (1.1) — гладкие функции, а множество точек области D, которое описывается уравнением (1.4), является простой (гладкой) дугой σ.

Если в рассматриваемой области D, содержащей внутри себя дугу σ, вне σ уравнение (1.1) всюду эллиптично или всюду гиперболично, то мы скажем, что область D является, соответственно, *областью эллиптичности* или *областью гиперболичности* этого уравнения с *параболическим вырожде-*

нием вдоль σ. Если же σ делит область D на две части, в одной из которых уравнение (1.1) эллиптично, а в другой — гиперболично, то мы скажем, что в области D уравнение (1.1) *смешанного типа*, причем D часто будем называть *смешанной областью*.

Обозначим через α наименьший угол между направлением касательной дуги σ в точке P и характеристическим направлением (1.3) в этой точке. Ниже мы увидим, что *решения уравнения* (1.1) *около линии вырождения типа* σ *ведут себя существенно по-разному в зависимости от того, будет ли* $\alpha = 0$ *или* $\alpha \neq 0$.

Как известно, исследование эллиптических, гиперболических и параболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными значительно упрощается после приведения этих уравнений к каноническим видам. Естественно, что *приведение к простейшему — каноническому — виду уравнения* (1.1) *с помощью неособого преобразования независимых переменных, при наличии в рассматриваемой области линии вырождения типа, является задачей первоочередной важности*. В этом направлении весьма ценные исследования имеются в работах [1, 2] итальянского математика Чибрарио.

§ 2. ТЕОРИЯ ЧИБРАРИО

Так как тип уравнения второго порядка зависит исключительно от членов, содержащих вторые производные от искомой функции, а задача состоит в приведении к простейшему виду именно суммы этих членов (*главной части уравнения*), то вместо (1.1) естественно рассмотреть уравнение более общего вида:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (1.5)$$

где A, B и C — заданные функции, зависящие только от переменных x и y.

Предположим, что A, B, C являются действительными аналитическими функциями в некоторой области D действительных переменных x и y, а множество точек области D, в которых имеет место параболическое вырождение, является простой (аналитической) кривой σ.

Пусть все частные производные функции $\Delta(x, y)$ до $(n-1)$-го порядка (включительно) равны нулю вдоль дуги σ, а из производных n-го порядка хотя бы одна отлична от нуля. Ввиду того, что производные $\frac{\partial^n \Delta}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial^n \Delta}{\partial y^n}$ вдоль дуги σ не обращаются одновременно в нуль, функцию $\Delta(x, y)$ в некоторой окрестности этой дуги можно представить в виде

$$\Delta = H^n(x, y)\, G(x, y), \tag{1.6}$$

где $H(x, y) = 0$ является уравнением σ, а функция $G(x, y) \neq 0$. Наряду с этим, учитывая то обстоятельство, что вдоль σ производные $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y}$ одновременно в нуль не обращаются, можно найти такую область $\delta \subset D$, содержащую внутри себя дугу σ, в которой имеет место представление (1.6), причем $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y}$ одновременно не равны нулю ни в одной точке области δ.

В результате преобразования независимых переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{1.7}$$

главная часть уравнения (1.5) принимает вид

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} +$$

$$+ \left(A\xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\xi_y\eta_x + C\xi_y\eta_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$+ \left(A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Постараемся подобрать ξ и η так, чтобы преобразование (1.7) было *неособым* и, кроме того, удовлетворялись условия:

$$A\xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\xi_y\eta_x + C\xi_y\eta_y = 0, \tag{1.8}$$

$$A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \neq 0. \tag{1.9}$$

В точках дуги σ возможны два случая: либо

$$AH_x^2 + 2BH_xH_y + CH_y^2 \neq 0 \tag{1.10}$$

либо

$$AH_x^2+2BH_xH_y+CH_y^2=0. \tag{1.11}$$

Неравенство (1.10) означает, что направление характеристики уравнения (1.5) в точках дуги σ не совпадает с направлением касательной этой кривой, в то время как равенство (1.11) указывает на то, что эти направления совпадают.

Предположим сначала, что вдоль σ всюду имеет место неравенство (1.10). В этом случае в качестве переменной $\eta(x, y)$ примем функцию

$$\eta(x, y)=H(x, y),$$

а переменную $\xi(x, y)$ подберем так, чтобы удовлетворялось условие (1.8), т. е.

$$(AH_x+BH_y)\xi_x+(BH_x+CH_y)\xi_y=0. \tag{1.12}$$

Кривые $\xi(x, y)=\text{const}$ являются характеристиками уравнения (1.12). Всегда можно найти подобласть $\delta_1\subset\delta$, содержащую внутри себя дугу σ и обладающую тем свойством, что функция $\rho(x, y)$, удовлетворяющая равенствам

$$\xi_x=\rho(BH_x+CH_y),\quad \xi_y=-\rho(AH_x+BH_y), \tag{1.13}$$

была бы отлична от нуля всюду в области δ_1.

В силу (1.10) и (1.13) заключаем, что якобиан

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}=\rho(AH_x^2+2BH_xH_y+CH_y^2)\neq 0,$$

т. е. подобранное преобразование (1.7) является *неособым.*

Если полученное после такого преобразования уравнение (1.5) разделим на $AH_x^2+2BH_xH_y+CH_y^2$, то главная его часть примет вид

$$\eta^n k(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}, \tag{1.14}$$

где

$$k(\xi, \eta)=\rho^2[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\,G[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)].$$

Образ области δ_1 на плоскости переменных ξ, η обозначим через δ. Вспомним теперь, что n — целое положительное число. В случае, когда $n=2m+1$, без ограничения общности можно полагать, что $k>0$. В самом деле, если $k(\xi, \eta)<0$, то в результате неособого преобразования $\xi_1=\xi$, $\eta_1=-\eta$ выражение (1.14) переходит в выражение

$$\eta_1^{2m+1}k_1(\xi_1, \eta_1)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2},$$

где

$$k_1(\xi_1, \eta_1)=-k(\xi_1, -\eta_1)>0.$$

В области δ характеристическая квадратичная форма

$$\eta^{2m+1}k\,d\eta^2+d\xi^2,$$

соответствующая дифференциальному выражению (1.14), имеет в качестве дискриминанта функцию $\eta^{2m+1}k(\xi, \eta)$, которая положительна при $\eta>0$, равна нулю при $\eta=0$ и отрицательна при $\eta<0$. Следовательно, уравнение (1.5) эллиптично при $\eta>0$, параболично при $\eta=0$ и гиперболично при $\eta<0$, так что *при переходе точки $P(x, y)$ через линию параболичности σ уравнение* (1. 5) *меняет тип.*

В случае же, когда $n=2m$, знак дискриминанта $\eta^{2m}k(\xi, \eta)$ совпадает со знаком функции $k(\xi, \eta)$. Следовательно, *в рассматриваемой области вне линии параболичности σ уравнение* (1. 5) *либо всюду эллиптично* (*при* $k>0$), *либо всюду гиперболично* (*при* $k<0$).

Теперь рассмотрим случай, когда вдоль дуги σ имеет место равенство (1. 11).

Так как A, B и C одновременно в нуль не обращаются, всегда можно найти такие функции $m_1(x, y)$ и $n_1(x, y)$, для которых имеет место неравенство

$$Am_1^2+2Bm_1n_1+Cn_1^2\neq 0. \tag{1.15}$$

Функции $\xi=\xi(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$ подберем так, чтобы кривые $\xi(x, y)=\text{const}$, $\eta(x, y)=\text{const}$ оказались характеристиками уравнений

$$(Am_1+Bn_1)\xi_x+(Bm_1+Cn_1)\xi_y=0,$$

$$n_1\eta_x-m_1\eta_y=0,$$

соответственно.

Очевидно, можно найти такой участок σ_1 дуги σ и область δ, содержащую внутри себя дугу σ_1, в которой имеет место неравенство (1.15) и, наряду с этим, отличны от нуля функции $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \eta_x &= \rho_1 m_1, & \eta_y &= \rho_1 n_1, \\ \xi_x &= \rho_2(Bm_1 + Cn_1), & \xi_y &= -\rho_2(Am_1 + Bn_1). \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

На основании (1.16) заключаем, что

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \rho_1\rho_2\left(Am_1^2 + 2Bm_1n_1 + Cn_1^2\right) \neq 0.$$

Примем обозначение $\bar{H}(\xi, \eta) = H[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. Так как вдоль σ_1 направления касательных кривых $H(x, y) = \text{const}$ и $\xi(x, y) = \text{const}$, в силу (1.11), совпадают, мы можем заключить, что $\bar{H}(\text{const}, \eta) = 0$ и, в частности, $\bar{H}(0, \eta) = 0$. С другой стороны, в силу (1.11) и (1.15), заключаем, что

$$\bar{H}_\xi = \frac{H_x\eta_y - H_y\eta_x}{\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}} = \frac{\rho_1(n_1H_x - m_1H_y)}{\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}} \neq 0.$$

Отсюда следует, что в некоторой окрестности $\delta_1 \subset \delta$ дуги σ_1 имеет место представление

$$\bar{H}(\xi, \eta) = \xi N(\xi, \eta), \quad N(\xi, \eta) \neq 0. \qquad (1.17)$$

Уравнение, полученное из уравнения (1.5) в результате подобранного неособого преобразования (1.7), разделим на $A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = \rho_1^2(Am_1^2 + 2Bm_1n_1 + Cn_1^2)$, после чего его главная часть примет вид

$$\xi^n k(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}, \qquad (1.18)$$

где, в силу (1.17) и принятых выше обозначений,

$$k(\xi, \eta) = N^n(\xi, \eta)\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}G \neq 0.$$

Пусть $\tilde{\delta}$ — область плоскости переменных ξ, η, в которую переходит область δ_1 плоскости x, y.

При $n = 2m + 1$, как и выше, без ограничения общности можно полагать, что $k(\xi, \eta) > 0$. Дискриминант характеристической квадратичной формы, соответствующей дифференциальному выражению (1.18), имеет вид $\xi^n k(\xi, \eta)$ и, следовательно, *в случае* $n = 2m+1$ *уравнение* (1. 5) *в области* $\tilde{\delta}$ *эллиптично при* $\xi > 0$, *параболично при* $\xi = 0$ *и гиперболично при* $\xi < 0$. *В случае же* $n = 2m$ *в области* $\tilde{\delta}$ *вне линии параболичности* $\xi = 0$ *уравнение* (1.5) *либо всюду эллиптично* ($k > 0$), *либо всюду гиперболично* ($k < 0$).

Приступаем к дальнейшему упрощению дифференциальных выражений (1.14) и (1.18).

В результате замены переменных

$$z = z(\xi, \eta), \quad \zeta = \zeta(\xi, \eta) \tag{1.19}$$

главная часть преобразованного дифференциального выражения (1.14) запишется в виде

$$(\eta^n k z_\xi^2 + z_\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\eta^n k z_\xi \zeta_\xi + z_\eta \zeta_\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + (\eta^n k \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}. \tag{1.20}$$

Подберем преобразование (1.19) таким образом, чтобы оно было неособым и, кроме того, удовлетворялись условия:

$$\eta^n k z_\xi \zeta_\xi + z_\eta \zeta_\eta = 0, \tag{1.21}$$

$$\eta^n k z_\xi^2 + z_\eta^2 = \zeta^n (\eta^n k \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2) \operatorname{sgn} k, \tag{1.22}$$

$$\eta^n k \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2 \neq 0. \tag{1.23}$$

Если такое преобразование существует, то дифференциальное выражение (1.20), после удаления множителя $\eta^n k \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2$, примет вид:

$$\zeta^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad \text{при} \quad n = 2m+1,$$

$$\pm \zeta^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad \text{при} \quad n = 2m,$$

где перед $\zeta^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ берется знак, совпадающий со знаком k.

Покажем, что неособое преобразование (1.19), удовлетворяющее условиям (1.21), (1.22) и (1.23), действительно существует.

В силу (1.21), (1.22), (1.23) при $\eta = 0$ мы должны иметь $\zeta = 0$, $z_\eta = 0$, $\zeta_\eta \neq 0$, а из условия, что $\frac{\partial(z, \zeta)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0$ вблизи

$\eta=0$, должно быть $z_\xi \neq 0$. Таким образом, для малых $|\eta|$ мы должны иметь: $z_\xi \neq 0$, $\zeta_\eta \neq 0$.

Введем функцию $\rho(\xi, \eta)$ по формуле

$$z_\xi = \rho \zeta_\eta. \tag{1.24}$$

Для того чтобы (1.21) и (1.22) были удовлетворены, должно быть:

$$z_\eta = -\eta^n k \rho \zeta_\xi, \tag{1.25}$$

$$\zeta = \rho^{\frac{2}{n}} \eta h, \quad h = |k|^{\frac{1}{n}}. \tag{1.26}$$

Из (1.24) и (1.25) имеем

$$(\rho \zeta_\eta)_\eta + (\eta^n k \rho \zeta_\xi)_\xi = 0. \tag{1.27}$$

Подставляя значение ζ из (1.26) в (1.27), получим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\rho(\xi, \eta)$:

$$\left[\frac{2}{n} \rho^{\frac{2}{n}} \eta h \rho_\eta + \rho^{\frac{2+n}{2}} (h + \eta h_\eta)\right]_\eta + \eta^{n+1} \left[\frac{2}{n} k \rho^{\frac{2}{n}} h \rho_\xi + k \rho^{\frac{2+n}{2}} h_\xi\right]_\xi = 0.$$

Это уравнение после преобразования искомой функции $\rho = \tau^{\frac{n}{n+2}}$ принимает вид

$$\left[\frac{2}{n+2} \eta h \tau_\eta + \tau (h + \eta h_\eta)\right]_\eta + \\ + \eta^{n+1} \left[\frac{2}{n+2} k h \tau_\xi + k \tau h_\xi\right]_\xi = 0. \tag{1.28}$$

Уравнение (1. 28) является линейным уравнением второго порядка относительно τ с аналитическими коэффициентами, для которого вдоль прямой $\eta=0$ имеет место вырождение порядка.

Так же как и в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений легко можно убедиться в том, что, по крайней мере в окрестности каждой точки прямой $\eta=0$, существует отличное от нуля аналитическое решение $\tau(\xi, \eta)$ уравнения (1.28). Следовательно, существует функция $\rho(\xi, \eta)$, с помощью которой в некоторой окрестности выбранной точки прямой $\eta=0$ по формулам (1.24), (1.25), (1.26) определяется искомое неособое преобразование (1.19), обладающее свойствами (1.21), (1.22) и (1.23).

Таким образом, *при наличии линии параболического вырождения, если соблюдено условие* (1.10), *всегда можно найти неособое действительное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение* (1. 5) *в окрестности выбранной точки линии вырождения* σ *к одному из следующих простейших* (*канонических*) *видов* (оставляем старые обозначения для независимых переменных):

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_1\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_2\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_3\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

С целью приведения дифференциального выражения (1.18) к более простому виду преобразование (1.19) подчиним условиям

$$\xi^n k z_\xi \zeta_\xi + z_\eta \zeta_\eta = 0, \tag{1.29}$$

$$\xi^n k z_\xi^2 + z_\eta^2 = z^n\left(\xi^n k \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2\right)\operatorname{sgn} k, \tag{1.30}$$

$$\xi^n k \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2 \neq 0. \tag{1.31}$$

В результате такой замены независимых переменных главная часть преобразованного выражения (1.18), после удаления множителя $\xi^n k\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2$, примет один из следующих видов:

$$z^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad \text{при} \quad n=2m+1,$$

$$\pm z^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad \text{при} \quad n=2m.$$

В силу (1.29), (1.30) и (1.31) при $\xi=0$ мы должны иметь: $z=0$, $z_\eta=0$, $\zeta_\eta\neq 0$. Требование того, чтобы преобразование (1.19) было неособым, дает $z_\xi\neq 0$.

Будем искать преобразование (1.19) среди аналитических решений системы

$$z_\xi = \rho\zeta_\eta, \tag{1.32}$$

$$z_\eta = -\rho\xi^n k\zeta_\xi, \tag{1.33}$$

где $\rho(\xi, \eta)$ — регулярная аналитическая функция, отличная от нуля.

В силу (1.32) и (1.33), из (1.30) получим

$$z = \xi\rho^{\frac{2}{n}} h, \quad h = |k|^{\frac{1}{n}}. \tag{1.34}$$

На основании (1.33) и (1.34) заключаем, что

$$\rho^{\frac{2}{n}} h = \xi^{n-1} M(\xi, \eta) + N(\xi). \tag{1.35}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $N(\xi) = \mathrm{const}$, причем $N \neq 0$ при $n > 1$ и $N = 0$ при $n = 1$. В последнем случае остается естественное требование $M(\xi, \eta) \neq 0$.

Принимая во внимание (1.34) и (1.35), из условия интегрируемости системы (1.32), (1.33) получим дифференциальное уравнение для определения функции $M(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + k\xi^n \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \omega\left(\xi, \eta, M, \frac{\partial M}{\partial \xi}, \frac{\partial M}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{1.36}$$

Ввиду того что $\xi^{n-1} M + N \neq 0$ для малых $|\xi|$, выражение $\omega\left(\xi, \eta, M, \frac{\partial M}{\partial \xi}, \frac{\partial M}{\partial \eta}\right)$ является аналитической функцией, регулярной, по крайней мере, для малых $|\xi|$. Поэтому функцию $M(\xi, \eta)$ нужного нам вида можно построить в окрестности $\xi = 0$, например решением задачи Коши для уравнения (1.36), с аналитическими начальными данными: $M(\xi, \eta_0)$, $\left.\frac{\partial M(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_0}$.

Подставляя значение ρ из (1.35) в (1.32) и (1.33), получим линейную систему дифференциальных уравнений с частными производными для определения искомого неособого действительного преобразования независимых переменных (1.19).

Следовательно, *при соблюдении условия* (1.11) *существует неособое действительное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение* (1.5), *в окрестности выбранной точки линии вырождения типа, к одному из следующих про-*

стейших видов (опять оставляем старые обозначения для независимых переменных):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F_4\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F_5\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F_6\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Таким образом, мы имеем *следующие канонические виды линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными смешанного типа:*

$$y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \tag{1.38}$$

и канонические виды линейных уравнений второго порядка с параболическим вырождением, но одного и того же типа всюду вне линии вырождения:

$$y^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \tag{1.39}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm y^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f. \tag{1.40}$$

Очевидно, что *в области, содержащей внутри себя участок линии вырождения типа $y = 0$, с помощью неособого преобразования независимых переменных уже нельзя привести ни одного из уравнений* (1.37), (1.38), (1.39), (1.40) *к другому или к уравнению такого же вида, но с другим показателем при y.*

§ 3. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В настоящем параграфе речь будет идти о системе вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{12} \frac{\partial u_2}{\partial y} = f_1(x, y, u_1, u_2), \\ a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} = f_2(x, y, u_1, u_2), \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

где коэффициенты a_{ik}, b_{ik} являются действительными функциями независимых переменных x, y, а правые части f_1 и f_2 зависят не только от x и y, но и от искомых функций u_1 и u_2 (вообще, нелинейно).

В дальнейшем мы будем предполагать, что в каждой точке области D задания системы (1.41) выражения:

$$C = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad B = a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12},$$
$$A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

одновременно в нуль не обращаются. Этим исключается случай, когда система (1.41), вообще говоря, не совместна.

Рассмотрим так называемый характеристический детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11}, & a_{12} + \lambda b_{12} \\ a_{21} + \lambda b_{21}, & a_{22} + \lambda b_{22} \end{vmatrix} = A + B\lambda + C\lambda^2.$$

В точке (x, y) области D система (1.41) называется, соответственно, *эллиптической*, *гиперболической* или *параболической* в зависимости от того, будет ли функция $AC - B^2$ больше нуля, меньше нуля или равна нулю.

Пусть $C \neq 0$ в области D (аналогично могут быть рассмотрены случаи, когда $A = C = 0$, $B \neq 0$ или $C = B = 0$, но $A \neq 0$). Систему (1.41) мы можем разрешить относительно $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ и записать ее в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} + g_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + g_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = F_1(x, y, u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} + g_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + g_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = F_2(x, y, u_1, u_2). \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

В дальнейшем будет исключен случай, когда главная дифференциальная часть системы (1.42) расщеплена, т. е. когда $g_{12} = g_{21} = 0$.

В предположении, что $g_{12} \neq 0$ в области D, после линейного преобразования искомых функций

$$v_1 = u_1, \quad g_{11}u_1 + g_{12}u_2 = v_2$$

система (1.42) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial x}&=F_1^*(x,\ y,\ v_1,\ v_2),\\ \frac{\partial v_2}{\partial y}+a\frac{\partial v_1}{\partial x}+b\frac{\partial v_2}{\partial x}&=F_2^*(x,\ y,\ v_1,\ v_2). \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

Заметим, что в результате неособых преобразований искомых функций или независимых переменных тип системы (1.41) не меняется. Характеристический детерминант системы (1.43) имеет вид

$$\lambda^2+b\lambda+a. \tag{1.44}$$

Поэтому в точках эллиптичности системы (1.43) дискриминант $\Delta(x,\ y)=4a-b^2$ квадратного трехчлена (1.44) больше нуля, в точках гиперболичности он меньше нуля, а в точках параболичности равен нулю.

Известно, что с помощью соответствующим образом подобранных неособых преобразований искомых функций и независимых переменных система (1.43) приводится к простейшему виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}&=F_1^{**}(\xi,\ \eta,\ u,\ v),\\ \frac{\partial v}{\partial \eta}-\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi}&=F_2^{**}(\xi,\ \eta,\ u,\ v), \end{aligned}$$

где α принимает значения $+1$, -1 или 0 в зависимости от того, является ли система (1.43) эллиптичной, гиперболичной или параболичной в рассматриваемой области.

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты a и b являются аналитическими функциями переменных x и y в области D, а множество точек параболичности системы (1.43) является простой (аналитической) дугой σ.

Аналогично тому, как это было сделано в случае одного уравнения второго порядка, *в окрестности каждой точки линии параболического вырождения σ можно установить канонические виды системы* (1.43).

Пусть все частные производные функции $\Delta(x,\ y)$ до порядка $n-1$ (включительно) равны нулю вдоль σ, в то время как из производных порядка n хотя бы одна отлична от нуля. В этом случае функцию $\Delta(x, y)$ можно представить в виде

$$\Delta = H^n(x, y)\, G(x, y),$$

где $G(x\ \ y) \neq 0$.

Обозначим через δ, содержащую внутри себя дугу σ, подобласть области D, в которой частные производные H_x и H_y одновременно в нуль не обращаются.

Могут иметь место два случая: либо

$$H_y^2 + bH_xH_y + aH_x^2 \neq 0, \tag{1.45}$$

либо

$$H_y^2 + bH_xH_y + aH_x^2 = 0. \tag{1.46}$$

В результате преобразования независимых переменных (1.7), с отличным от нуля якобианом $J = \eta_x\xi_y - \eta_y\xi_x$, и линейного преобразования искомых функций:

$$w_1 = v_1,\ \ w_2 = \frac{1}{d}\left[(\eta_y - b\eta_x)\,\xi_y + a\eta_x\xi_x\right] v_1 - \frac{J}{d} v_2$$

при предположениях:

$$d = \eta_y^2 + b\eta_x\eta_y + a\eta_x^2 \neq 0, \tag{1.47}$$

$$(2a\eta_x + b\eta_y)\,\xi_x + (2\eta_y + b\eta_x) = 0 \tag{1.48}$$

систему (1.43) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \varphi_1(\xi,\ \eta,\ w_1,\ w_2),\\ &\frac{\partial w_2}{\partial \eta} - \left\{\frac{a}{d^2}J^2 + \frac{1}{d^2}\left[(\eta_y + b\eta_x)\,\xi_y + a\eta_x\xi_x\right]\left[\eta_y(\xi_y + b\xi_x) + \right.\right.\\ &\qquad\qquad \left.\left. + a\eta_x\xi_x\right]\right\}\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \varphi_2(\xi,\ \eta,\ w_1,\ w_2). \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

В том случае, когда имеет место неравенство (1.45), в качестве $\eta(x)$ возьмем функцию $H(x, y)$, а $\xi(x, y)$ подчиним условиям

$$\xi_x = \rho\,(2H_y + bH_x),\ \ \xi_y = -\rho\,(2aH_x + bH_y),$$

где $\rho \neq 0$. В этих переменных система (1.49) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \varphi_1(\xi,\ \eta,\ w_1,\ w_2),\\ &\frac{\partial w_2}{\partial \eta} - \eta^n k(\xi,\ \eta)\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \varphi_2(\xi,\ \eta,\ w_1,\ w_2), \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

где

$$k(\xi, \eta)=\rho^2(\xi, \eta)\, G\,[x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)].$$

Теперь рассмотрим случай, когда вдоль σ имеет место равенство (1.46). Подберем аналитические функции $n_1(x, y)$ и $m_1(x, y)$ так, чтобы имело место неравенство

$$n_1^2+bm_1n_1+am_1^2\neq 0. \tag{1.51}$$

Новые независимые переменные ξ и η, в свою очередь, подберем так, чтобы $\xi(x, y)=\text{const}$ и $\eta(x, y)=\text{const}$ были бы характеристиками уравнений:

$$(2am_1+bn_1)\,\xi_x+(2n_1+bm_1)\,\xi_y=0,$$

$$n_1\eta_x-m_1\eta_y=0,$$

соответственно.

Всегда можно найти отличные от нуля функции $\rho(\xi, \eta)$ и $\rho_1(\xi, \eta)$, для которых

$$\eta_x=\rho m_1,\ \eta_y=\rho n_1,\ \xi_x=\rho_1(2n_1+bm_1),\ \xi_y=-\rho_1(2am_1+bn_1).$$

Так как, в силу (1.51) $d=\rho^2(n_1^2+bm_1n_1+am_1^2)\neq 0$, систему (1.43) мы можем привести к виду (1.49)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial\eta}+\frac{\partial w_2}{\partial\xi}&=\varphi_1(\xi, \eta, w_1, w_2),\\ \frac{\partial w_2}{\partial\eta}-\xi^n k(\xi, \eta)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}&=\varphi_2(\xi, \eta, w_1, w_2),\end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

где

$$k(\xi, \eta)=\frac{\rho_1^2}{\rho^2}\,GN^n(\xi, \eta),$$

$$H\,[x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)]=\xi N(\xi, \eta),$$

причем $N(\xi, \eta)\neq 0$.

Подчинив новые независимые переменные $z(\xi, \eta)$ и $\zeta(\xi, \eta)$ условиям (1.21), (1.22) и (1.23) и преобразуя искомые функции по формулам

$$u=w_1,\ v=\frac{\eta^n k z_\xi\zeta_\xi+z_\eta\zeta_\eta}{d}\,w_1+\frac{J}{d}\,w_2,$$

где

$$d=\eta^n k\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2,$$

$$J=z_\eta\zeta_\xi-\zeta_\eta z_\xi,$$

систему (1.50) в окрестности выбранной точки дуги σ приведем к одному из следующих *канонических* видов:

$$\zeta^{2m+1}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial \zeta}=\psi_1(z,\ \zeta,\ u,\ v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial z}=\psi_2(z,\ \zeta,\ u,\ v),$$

или

$$\zeta^{2m}\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{\partial v}{\partial \zeta}=\psi_1(z,\ \zeta,\ u,\ v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial z}=\psi_2(z,\ \zeta,\ u,\ v).$$

Аналогичным образом можно совершить дальнейшее упрощение системы (1.52). Для этого достаточно подчинить $z=z(\xi,\ \eta)$ и $\zeta=\zeta(\xi,\ \eta)$ условиям (1.29), (1.30) и (1.31). В результате такого преобразования система (1.52) примет вид:

$$z^{2m+1}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial \zeta}=\psi_1(z,\ \zeta,\ u,\ v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial z}=\psi_2(z,\ \zeta,\ u,\ v)$$

либо

$$z^{2m}\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{\partial v}{\partial \zeta}=\psi_1(z,\ \zeta,\ u,\ v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial z}=\psi_2(z,\ \zeta,\ u,\ v).$$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим линейную систему уравнений с частными производными второго порядка

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1\frac{\partial u}{\partial y}+C_1 u=f, \quad (1.53)$$

где A, B, C, A_1, B_1, C_1 — заданные в области D переменных x, y действительные квадратные матрицы n-го порядка; $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$ — заданный вектор, а $u=(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — искомый вектор.

Выражение

$$\det|A+2B\lambda+C\lambda^2|,$$

где λ — скалярный параметр, называется *характеристическим детерминантом* системы (1.53). Это выражение относительно λ является полиномом степени $2n$ (*характеристический полином*).

Направление, определенное равенством $\frac{dx}{dy}=\lambda(x, y)$, где λ — корень характеристического полинома, называется *характеристическим направлением*, а кривые, определяемые из уравнения $\frac{dx}{dy}=\lambda(x, y)$ — *характеристическими кривыми* системы (1.53). Заметим, что среди корней λ могут быть и бесконечные.

Если характеристический полином в рассматриваемой точке (x, y) действительных корней не имеет, то система (1.53) называется *эллиптической* в этой точке; если же корни характеристического полинома все действительные и разные, система называется *гиперболической в узком смысле.*

В случае, когда среди корней характеристического полинома имеются как комплексные, так и действительные, говорят, что в рассматриваемой точке система (1.53) *составного типа.*

Если на некотором множестве точек области D все корни характеристического полинома действительны, а в остальной части области D действительных корней нет, то в этом случае (1.53) естественно называть системой *смешанного типа.*

В случае непрерывности коэффициентов при вторых производных от искомых функций в системе (1.53), при переходе через точку изменения типа этой системы, имеет место изменение кратности корня характеристического полинома. Из алгебры известно, что множество точек области D, удовлетворяющих условию

$$\Delta(x, y)=0, \tag{1.54}$$

где Δ — дискриминант характеристического полинома, обладает тем свойством, что именно на этом множестве хотя бы один из корней этого полинома становится по крайней мере двукратным.

Бывают случаи, когда в области своего задания система (1.53) одновременно и составного и смешанного типа. Так, например, для системы

$$\left.\begin{aligned} y\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,\\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.55)$$

характеристический полином имеет вид

$$(\lambda^2-1)(\lambda^2+y); \qquad (1.56)$$

его дискриминант равен $\Delta=y(1+y)$. У характеристического полинома (1.56) в полуплоскости $y>0$ имеются как действительные $+1$, -1, так и мнимые $i\sqrt{y}$, $-i\sqrt{y}$ корни, в то время как в полуплоскости $y<0$ все его четыре корня $+1$, -1, $\sqrt{-y}$, $-\sqrt{-y}$ действительны. Следовательно, на плоскости переменных x, y система (1.55) одновременно и составного и смешанного типа. В этом случае геометрическое место точек, удовлетворяющих условию (1.54), представляет собой прямые $y=0$ и $y=-1$, причем вдоль прямой $y=0$ двукратным является корень $\lambda=0$, а вдоль прямой $y=-1$ — корни $\lambda=1$, и $\lambda=-1$.

Аналогично можно ввести классификацию систем уравнений первого порядка, а также систем уравнений высших порядков, но здесь на этом мы останавливаться не будем.

ГЛАВА II

ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ НА ЛИНИИ ПАРАБОЛИЧНОСТИ

§ 1. ФУНКЦИЯ РИМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Как уже было сказано, линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными, при довольно общих предположениях относительно его коэффициентов, в области своей гиперболичности всегда может быть приведено к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x, y)u=F_1(x, y). \quad (2.1)$$

В характеристических переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ уравнение (2. 1) записывается следующим образом:

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=F, \quad (2.2)$$

где

$$4a=A+B,\ 4b=A-B,\ 4c=C,\ 4F=F_1.$$

Будем предполагать, что в односвязной области D задания уравнения (2. 2) коэффициенты $a(\xi, \eta)$, $b(\xi, \eta)$ непрерывно дифференцируемы, а $c(\xi, \eta)$ и $F(\xi, \eta)$ непрерывны.

Хорошо известно, что в теории уравнения (2. 2) фундаментальную роль играет *функция Римана* $v(\xi, \eta)$, которая однозначно определяется следующими требованиями:

1) $v(\xi, \eta)$ является решением так называемого *сопряженного уравнения*

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0, \tag{2.3}$$

2) на характеристиках $\xi = \xi_1$ $\eta = \eta_1$ функция $v(\xi, \eta)$ принимает значения:

$$v(\xi_1, \eta) = e^{\int\limits_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1, \eta_2)\,d\eta_2}, \quad v(\xi, \eta_1) = e^{\int\limits_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1)\,d\xi_2}, \tag{2.4}$$

где (ξ_1, η_1) — произвольно зафиксированная точка в области D.

Учитывая (2.3) и (2.4), для определения $v(\xi, \eta)$ получим интегральное уравнение

$$v(\xi, \eta) - \int\limits_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta)\,v(\xi_2, \eta)\,d\xi_2 - \int\limits_{\eta_1}^{\eta} a(\xi, \eta_2)\,v(\xi, \eta_2)\,d\eta_2 +$$

$$+ \int\limits_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int\limits_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2, \eta_2)\,v(\xi_2, \eta_2)\,d\eta_2 = 1. \tag{2.5}$$

Введем новую функцию $v_0(\xi, \eta)$, связанную с функцией $v(\xi, \eta)$ соотношением

$$v(\xi, \eta) = v_0(\xi, \eta) + \int\limits_{\xi_1}^{\xi} v_0(t, \eta)\,b(t, \eta)\,e^{\int\limits_{t}^{\xi} b(t_1, \eta)\,dt_1}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta_1}^{\eta} v_0(\xi, \tau)\,a(\xi, \tau)\,e^{\int\limits_{\tau}^{\eta} a(\xi, \tau_1)\,d\tau_1}\,d\tau. \tag{2.6}$$

На основании (2.5) и (2.6) заключаем, что $v_0(\xi, \eta)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$v_0(\xi, \eta) + \int\limits_{\xi_1}^{\xi} dt \int\limits_{\eta_1}^{\eta} k_0(\xi, \eta; t, \tau)\,v_0(t, \tau)\,d\tau = 1, \tag{2.7}$$

где

$$k_0(\xi, \eta; t, \tau) = c(t, \tau) - b(t, \eta)\, a(t, \tau)\, e^{\int_\tau^\eta a(t, \tau_1)d\tau_1} -$$

$$-a(\xi, \tau)\, b(t, \tau)\, e^{\int_t^\xi b(t_1, \tau)\,dt_1} + b(t, \tau)\int_t^\xi c(t_1, \tau)\, e^{\int_t^{t_1} b(t_2, \tau)\,dt_2}\, dt_1 +$$

$$+ a(t, \tau)\int_\tau^\eta c(t, \tau_1)\, e^{\int_\tau^{\tau_1} a(t, \tau_2)\,d\tau_2}\, d\tau$$

Известно, что *уравнение* (2. 7) ***всегда имеет, и притом единственное, решение, которое может быть построено, например, методом последовательных приближений Пикара.***

Таким образом, при принятых предположениях относительно коэффициентов уравнения (2. 2) функция Римана всегда существует, причем, кроме переменных ξ и η, она зависит также и от ξ_1 и η_1. Поэтому для функции Римана примем обозначение

$$v = R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1).$$

Из (2. 4) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} - a(\xi_1, \eta)\, R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = 0,\\ &\frac{\partial R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} - b(\xi, \eta_1)\, R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 0,\\ &\qquad R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 1; \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi, \eta_1)\, R(\xi, \eta; \xi, \eta_1) = 0,\\ &\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi_1, \eta)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1, \eta)\, R(\xi, \eta; \xi_1, \eta) = 0,\\ &\qquad R(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

Для любой дифференцируемой до соответствующего порядка функции $u(\xi_1, \eta_1)$ в области D имеет место тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1\, \partial \eta_1}[u(\xi_1, \eta_1)\, R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)] - R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\, L(u) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial \eta_1} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial \xi_1} - bR\right)\right]. \qquad (2.10)$$

Требуя непрерывности входящих в тождество (2.10) производных, в результате интегрирования по переменным ξ_1 и η_1 в промежутках $\xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi$, $\eta_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta$, из тождества (2.10) в силу (2.8) получим

$$u(\xi, \eta) = u(\xi_0, \eta_0) R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1, \eta_0; \xi, \eta) \left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_0)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1, \eta_0) u(\xi_1, \eta_0) \right] d\xi_1 +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \eta_1; \xi, \eta) \left[\frac{\partial u(\xi_0, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi_0, \eta_1) u(\xi_0, \eta_1) \right] d\eta_1 +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) L[u(\xi_1, \eta_1)] \, d\eta_1, \qquad (2.11)$$

где (ξ_0, η_0) — произвольная точка области D.

В частности, при $u(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, в силу (2.9), из (2.11) имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) L[R(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1)] \, d\eta_1 = 0,$$

откуда сразу следует, что *функция Римана* $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ *относительно последней пары аргументов* ξ_1, η_1 *является решением однородного уравнения*

$$L(u) = 0. \qquad (2.12)$$

В этой главе под *решением* уравнения гиперболического типа внутри рассматриваемой области понимается функция, которая имеет непрерывные производные порядков, входящих в уравнение, и удовлетворяет последнему.

Из приведенных выше свойств функции Римана очевидно, что одно из частных решений неоднородного уравнения (2.2) имеет вид

$$u_0(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) F(\xi_1, \eta_1) \, d\eta_1.$$

Предположив теперь, что $u(\xi, \eta)$ является решением уравнения (2.2), мы из тождества (2.11), после интегрирования по частям, получим

$$u(\xi, \eta) = R(\xi, \eta_0; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta_0) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta)\, u(\xi_0, \eta) -$$

$$- R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\, u(\xi_0, \eta_0) +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} \left[b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; \xi, \eta) - \frac{\partial R(t, \eta_0; \xi, \eta)}{\partial t} \right] u(t, \eta_0)\, dt +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} \left[a(\xi_0, \tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - \frac{\partial R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)}{\partial \tau} \right] u(\xi_0, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta) F(t, \tau)\, d\tau. \qquad (2.13)$$

Принимая во внимание перечисленные выше свойства функции Римана, непосредственно заключаем, что правая часть формулы (2.13), когда в ней $u(\xi_0, \eta)$ и $u(\eta_0, \xi)$ заменены произвольными функциями от η и ξ соответственно, а $u(\xi_0, \eta_0)$ — произвольной постоянной, дает решение уравнения (2.2).

В частности, из (2.13) автоматически получается **существование, единственность и устойчивость решения характеристической задачи Гурса**: *найти решение $u(\xi, \eta)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям*

$$u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi), \quad u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta), \quad \varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0),$$

где φ и ψ — заданные функции.

Решение имеет вид

$$u(\xi, \eta) = R(\xi, \eta_0; \xi, \eta)\, \varphi(\xi) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta)\, \psi(\eta) -$$

$$- R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\, \varphi(\xi_0) +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} \left[a(\xi_0, \tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - \frac{\partial R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)}{\partial \tau} \right] \psi(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} \left[b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; \xi, \eta) - \frac{\partial R(t, \eta_0; \xi, \eta)}{\partial t} \right] \varphi(t)\, dt +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta) F(t, \tau)\, d\tau.$$

Функция Римана позволяет *в квадратурах выписать решение задачи Коши для уравнения* (2.2).

Обозначим через σ, лежащую в области D задания уравнения (2.2), разомкнутую простую дугу Жордана с непрерывно меняющейся нормалью, обладающую дополнительно тем свойством, что ни в одной своей точке она не имеет касания с характеристиками уравнения (2.2).

Предположим, что выходящие из точки $P(\xi, \eta)$ характеристики $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$ уравнения (2.2) пересекаются с дугой σ в точках Q' и Q соответственно. Пусть G — конечная область, ограниченная участком QQ' дуги σ и характеристиками PQ и PQ'.

Для произвольных, дважды непрерывно дифференцируемых в области D функций $u(\xi_1, \eta_1)$ и $v(\xi_1, \eta_1)$ имеет место тождество

$$2[vL(u) - uM(v)] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} v - u \frac{\partial v}{\partial \xi_1} + 2buv\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_1} v - u \frac{\partial v}{\partial \eta_1} + 2auv\right). \quad (2.14)$$

Интегрируя тождество (2.14) по области G, будем иметь

$$2\iint_G [vL(u) - uM(v)]\, d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \int_{PQ+\sigma+Q'P} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_1} v - u \frac{\partial v}{\partial \eta_1} + 2auv\right) d\eta_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} v - u \frac{\partial v}{\partial \xi_1} + 2buv\right) d\xi_1. \quad (2.15)$$

В случае, когда $u(\xi_1, \eta_1)$ — решение уравнения (2.2), а $v(\xi_1, \eta_1) = R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$, в силу свойств функции Римана из формулы (2.15), после интегрирования по частям, получим

$$u(P) = \frac{1}{2} u(Q) R(Q, P) + \frac{1}{2} u(Q') R(Q', P) +$$

$$+ \iint_G F(P') R(P', P)\, d\xi_1\, d\eta_1 + \frac{1}{2}\int_\sigma \left\{ \frac{\partial u(P')}{\partial N'} R(P', P) - \right.$$

$$-u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N'}-2\left[a(P')\frac{\partial \xi_1}{\partial N}+b(P')\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]R(P',P)\,u(P')\Big\}\,ds, \tag{2.16}$$

где N — нормаль дуги σ в точке $P'(\xi_1, \eta_1)$, направленная во внутрь области G, а $\frac{\partial}{\partial N'}=\frac{\partial \xi_1}{\partial N}\frac{\partial}{\partial \eta_1}+\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\frac{\partial}{\partial \xi_1}$.

По заданным на σ значениям искомого решения $u(P)$ и его производной $\frac{\partial u(P)}{\partial l}$, где направление $\vec{l}$ нигде не совпадает с направлением касательной σ, всегда можно вычислить значения $\frac{\partial u}{\partial N'}$ вдоль σ.

Следовательно, *в каждой точке $P(\xi, \eta)$, обладающей тем свойством, что выходящие из нее характеристики пересекаются* (каждая по одному разу, очевидно) *с кривой σ в точках Q и Q', формула* (2.16) *дает значение решения $u(\xi, \eta)$ уравнения* (2.2) *по известным значениям u и $\frac{\partial u}{\partial l}$ на участке QQ' дуги σ, т. е. она дает решение задачи Коши.*

Вид интегрального уравнения, из которого определяется функция Римана, показывает, что при предположениях непрерывной дифференцируемости $a(\xi, \eta)$, $b(\xi, \eta)$ и непрерывности $c(\xi, \eta)$ функция Римана имеет непрерывную вторую смешанную производную. Учитывая это обстоятельство, из формулы (2.16) заключаем, что *при требовании непрерывности кривизны дуги σ, дважды непрерывной дифференцируемости $\tau=u|_\sigma$ и непрерывной дифференцируемости $\nu=\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\sigma$ решение задачи Коши дважды непрерывно дифференцируемо.*

Из формулы (2.16) и из процесса ее получения ясно, что *задача Коши при принятых выше предположениях всегда имеет и, притом, единственное устойчивое решение.*

При требовании достаточной гладкости дуги σ и начальных данных исследование задачи Коши (а также Гурса) можно привести к такому случаю, когда *либо уравнение* (2.2) *является однородным вида* (2.12), *а начальные условия неоднородными, либо начальные условия однородны, а уравнение неоднородно.*

§ 2. ОДИН КЛАСС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Результаты предыдущего параграфа легко обобщаются на случай системы линейных уравнений с частными производными второго порядка следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \sum_{k=1}^{n} \Big[A_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + B_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} +$$

$$+ C_{ik}(x, y) u_k \Big] = F_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.17}$$

где $A_{ik} = A_{ki}$, $B_{ik} = B_{ki}$, $C_{ik} = C_{ki}$.

По принятой в первой главе классификации система (2.17) является **гиперболической**. Общую линейную гиперболическую систему второго порядка, очевидно нельзя привести к виду (2.17).

При исследовании системы (2.17) удобнее пользоваться матричной записью:

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = F, \tag{2.18}$$

где $A = \| A_{ik} \|$, $B = \| B_{ik} \|$, $C = \| C_{ik} \|$ — заданные действительные квадратные симметрические матрицы порядка n; $F = (F_1, \ldots, F_n)$ — заданный вектор, а $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — искомый вектор.

В характеристических переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ система (2.18) принимает вид

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f, \tag{2.19}$$

где $4a = A + B$, $4b = A - B$, $4c = C$, $4f = F$.

В дальнейшем будем предполагать, что в области D задания системы (2.19) матрицы a и b имеют непрерывные производные первого порядка, а матрица c и вектор f непрерывны.

В теории системы (2.19) важную роль играет **сопряженная** с (2.19) однородная система

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(va) - \frac{\partial}{\partial \eta}(vb) + vc = 0. \tag{2.20}$$

Поскольку равенства $va=av$, $vb=bv$, $vc=cv$, вообще, не имеют места, порядок сомножителей в левой части (2.20) существенно надо соблюдать.

Матрицу $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)=\|R_{ik}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)\|$ мы будем называть *матрицей Римана* для системы (2.19), если соблюдены следующие условия: 1) каждая ее строка относительно переменных ξ, η является решением системы (2.20); 2) для матриц $R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)$ и $R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)$ имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} - R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)\, a(\xi_1, \eta) = 0, \\ \frac{\partial R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} - R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)\, b(\xi, \eta_1) = 0, \\ R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = E, \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

где E — единичная диагональная матрица порядка n.

Легко показать, что этими условиями матрица $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ определяется однозначно. В самом деле, требуя удовлетворения условий 1) и 2), для определения $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ получим систему интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\begin{gathered} R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} R(\xi_2, \eta; \xi_1, \eta_1)\, b(\xi_2, \eta)\, d\xi_2 - \\ - \int_{\eta_1}^{\eta} R(\xi, \eta_2; \xi_1, \eta_1)\, a(\xi, \eta_2)\, d\eta_2 + \\ + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} R(\xi_2, \eta_2; \xi_1, \eta_1)\, c(\xi_2, \eta_2)\, d\eta_2 = E. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Доказательство существования и единственности решения системы (2.22) трудности не представляет.

Установим теперь основные свойства матрицы Римана. Так как $R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)$ относительно η является матрицей фундаментальных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{\partial R}{\partial \eta} - Ra = 0$, удовлетворяющей начальному условию $R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = E$, то имеет место равенство

$$\det R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\eta_1}^{\eta} a_{kk}(\xi_1, \eta_2)\, d\eta_2}. \tag{2.23}$$

В силу первого из равенств (2.21) для произвольной непрерывно дифференцируемой матрицы $v(\tau_1)$ справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}[R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)v(\tau_1)] -$$

$$- R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)\left[\frac{dv(\tau_1)}{d\tau_1} + a(\xi, \tau_1)v(\tau_1)\right] = 0;$$

откуда, после интегрирования по τ_1, получим

$$v(\eta) = R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)v(\eta_1) +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta} R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)\left[\frac{dv(\tau_1)}{d\tau_1} + a(\xi, \tau_1)v(\tau_1)\right]d\tau_1.$$

Если в последнем тождестве примем $v(\tau) = R(\xi, \eta_1; \xi, \tau)$, то будем иметь

$$\int_{\eta_1}^{\eta} R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)\left[\frac{\partial R(\xi, \eta_1; \xi, \tau_1)}{\partial\tau_1} + a(\xi, \tau_1)R(\xi, \eta_1; \xi, \tau_1)\right]d\tau_1 = 0.$$

Отсюда, в силу (2.23), получим

$$\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi, \eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi, \eta_1)R(\xi, \eta; \xi, \eta_1) = 0. \tag{2.24}$$

Аналогичным образом заключаем, что

$$\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi_1, \eta)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1, \eta)R(\xi, \eta; \xi_1, \eta) = 0. \tag{2.25}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\tau}[R(t, \tau; \xi, \eta)u(t, \tau)] - R(t, \tau; \xi, \eta)L(u) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial\tau} - Ra\right)u\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial t} - Rb\right)u\right],$$

где u — произвольная квадратная матрица порядка n. Из этого тождества после интегрирования, в силу (2.21), получим

$$u(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)u(\xi_0, \eta_0) +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)L[u(\xi_1, \eta_1)]\,d\eta_1 +$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1, \eta_0; \xi, \eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_0)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1, \eta_0)\, u(\xi_1, \eta_0)\right] d\xi_1 +$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \eta_1; \xi, \eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi_0, \eta_1)\, u(\xi_0, \eta_1)\right] d\eta_1. \quad (2.26)$$

Если в тождестве (2.26) положим $u(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, то, в силу (2.24) и (2.25), будем иметь

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\, L[R(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1)]\, d\eta_1 = 0. \quad (2.27)$$

Из (2.27), в силу (2.23), сразу следует, что *каждый столбец матрицы Римана* $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ *относительно последней пары аргументов* ξ_1, η_1 *является решением однородной системы*

$$L(u) = 0. \quad (2.28)$$

На основании этого обстоятельства заключаем, что вектор

$$u_0(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta)\, f(t, \tau)\, d\tau$$

является частным решением системы (2.19). Отсюда ясно, что *исследование ряда линейных задач для неоднородной системы* (2.19) *можно редуцировать к исследованию соответствующим образом измененных линейных задач для однородной системы* (2.28).

При предположении, что $u(\xi, \eta)$ является решением системы (2.28), из (2.26) после интегрирования по частям получим

$$u(\xi, \eta) = R(\xi, \eta_0; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta_0) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta)\, u(\xi_0, \eta) -$$

$$- R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\, u(\xi_0, \eta_0) -$$

$$-\int_{\xi_0}^{\xi}\left[\frac{\partial R(t, \eta_0; \xi, \eta)}{\partial t} - b(t, \eta_0)\, R(t, \eta_0; \xi, \eta)\right] u(t, \eta_0)\, dt -$$

$$-\int_{\eta_0}^{\eta}\left[\frac{\partial R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)}{\partial \tau} - a(\xi_0, \tau)\, R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)\right] u(\xi_0, \tau)\, d\tau. \quad (2.29)$$

Формула (2.29) дает решение следующей задачи Гурса: *найти решение* $u(\xi, \eta)$ *системы* (2.28), *принимающее на характеристиках* $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ *заданные значения:*

$$u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi),\ u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta),\ \varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0),$$

где $\varphi(\xi)$ *и* $\psi(\eta)$ — *известные векторы.*

С целью дальнейшего применения матрицы Римана заметим, что имеет место векторный аналог тождества (2.14):

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) L[u(\xi_1, \eta_1)] - M[R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)] u(\xi_1, \eta_1) =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[R \frac{\partial u}{\partial \xi_1} - \frac{\partial R}{\partial \xi_1} u + 2Rbu \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[R \frac{\partial u}{\partial \eta_1} - \frac{\partial R}{\partial \eta_1} u + 2Rau \right], \qquad (2.30)$$

где, на этот раз, u является вектором.

Предполагая, что u является решением системы (2.28), после интегрирования по области G, рассмотренной в предыдущем параграфе, из тождества (2.30) получим формулу

$$u(P) = \frac{1}{2} R(Q, P) u(Q) + \frac{1}{2} R(Q', P) u(Q') +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_\sigma \left[R \frac{\partial u}{\partial N'} - \frac{\partial R}{\partial N'} u + 2R \left(a \frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b \frac{\partial \eta_1}{\partial N} \right) u(P') \right] ds, \qquad (2.31)$$

дающую решение задачи Коши:

$$u|_\sigma = \tau, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\sigma = \nu,$$

где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — заданные векторы.

§ 3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ НА ЛИНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

В настоящем параграфе речь будет идти об уравнениях

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \qquad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \qquad (2.33)$$

гиперболического типа в полуплоскости $y > 0$, с параболическим вырождением вдоль прямой $y = 0$.

Согласно результатам § 2 предыдущей главы, общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка, при определенных предположениях относительно его коэффициентов, может быть приведено к видам (2. 32) или (2. 33), причем с целым положительным значением m.

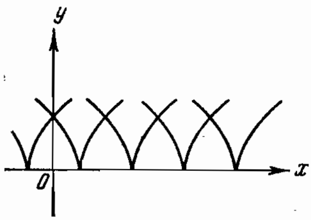

Рис. 1

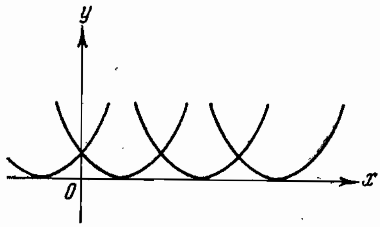

Рис. 2

В дальнейшем мы будем предполагать, что показатель степени m переменного y в уравнениях (2. 32) и (2. 33) — положительное действительное число.

Семейства кривых

$$(x - c_0)^2 - \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 y^{m+2} = 0, \tag{2.34}$$

$$(x - c_0)^2 - \left(\frac{2}{2-m}\right)^2 y^{2-m} = 0, \quad m \neq 2, \quad c_0 = \text{const}, \tag{2.35}$$

являются характеристиками уравнений (2. 32) и (2. 33) соответственно, причем линия вырождения типа $y = 0$ представляет собой геометрическое место точек возврата семейства (2. 34) и огибающую семейства (2. 35) при $m < 2$ (см. соответственно рис. 1 и 2).

Прямая $y = 0$ вместе с кривыми (2. 35) при $m > 2$ и кривыми $(y - e^{c_0+x})(y - e^{c_0-x}) = 0$ при $m = 2$ составляют семейство характеристик уравнения (2. 33).

В характеристических переменных

$$\xi = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \tag{2.36}$$

уравнение (2. 32) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\left[a\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}}(\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}}+\right.$$

$$\left.+b\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}}(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}-\frac{m}{2}\right]\frac{1}{m+2}\,\frac{1}{\xi-\eta}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+$$

$$+\left[a\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}}(\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}}-\right.$$

$$\left.-b\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}}(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}+\frac{m}{2}\right]\frac{1}{m+2}\,\frac{1}{\xi-\eta}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{c}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2m}{m+2}}(\xi-\eta)^{\frac{-2m}{m+2}}u=0. \qquad (2.37)$$

Преобразование (2. 36) является неособым при $y>0$, причем полуплоскости $y>0$ оно ставит в соответствии полуплоскость $\xi>\eta$. Прямая $y=0$, т. е. $\xi-\eta=0$, является особой линией этого преобразования.

При предположении непрерывной дифференцируемости коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$ и непрерывности коэффициента $c(x, y)$ уравнения (2.32) в полуплоскости $y\geqslant 0$ этими же свойствами обладают и коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial\xi}$, $\frac{\partial u}{\partial\eta}$ и u уравнения (2. 37) в полуплоскости $\xi>\eta$, а на прямой $\xi=\eta$ они становятся бесконечными.

В то время как в полуплоскости $\xi\geqslant\eta+\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, функция Римана и решения задачи Коши и Гурса для уравнения (2. 32) строятся обычным образом, как это было сделано в § 1 настоящей главы, задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения $y=0$ требует особого исследования.

Рассмотрим сначала случай, когда в уравнении (2. 32) коэффициенты a, b и c тождественно равны нулю, т. е.

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (2.38)$$

Нашей целью является изучение задачи Коши в следующей постановке: *найти решение* $u(x, y)$ *уравнения* (2. 38), *непрерывное вместе со своими производными до второго порядка* (включительно) *при* $y > 0$ *и удовлетворяющее на некотором участке оси* $y = 0$, *например, на участке* $A(0, 0)\,B(1, 0)$, *условиям*

$$\lim_{y \to +0} u(x, y) = \tau(x), \tag{2.39}$$

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu(x), \tag{2.40}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, причем $\tau(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, а $\nu(x)$ — до первого порядка.

В характеристических переменных (2. 36) уравнение (2. 38) переходит в *уравнение Эйлера—Дарбу:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \tag{2.41}$$

а условия (2. 39) и (2. 40) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\xi - \eta \to +0} u(\xi, \eta) &= \tau(\xi), \\ \lim_{\xi - \eta \to +0} (\xi - \eta)^{\frac{m}{m+2}} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) &= \nu(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

В рассматриваемом случае интегральное уравнение (2. 5), которому удовлетворяет функция Римана $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$, $\xi_1 > \eta_1$, $\xi \geqslant \xi_1$, $\eta_1 \geqslant \eta$, значительно упрощается:

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) + \frac{m}{2(m+2)} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{R(\xi_2, \eta_1; \xi, \eta)}{\xi_2 - \eta_1}\, d\xi_2 -$$

$$- \frac{m}{2(m+2)} \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{R(\xi_1, \eta_2; \xi, \eta)}{\xi_1 - \eta_2}\, d\eta_2 = 1. \tag{2.43}$$

В результате применения метода последовательных приближений для решения интегрального уравнения (2.43) получим выражение

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = [(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)]^{\frac{-m}{2m+4}} (\xi_1 - \eta_1)^{\frac{m}{m+2}} \times$$
$$\times F\left[\frac{m}{2m+4}, \frac{m}{2m+4}, 1, \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)}\right], \qquad (2.44)$$

где F — гипергеометрическая функция.

Обозначим через G область, ограниченную отрезком $Q(\eta+\varepsilon, \eta)\, Q'(\xi, \xi-\varepsilon)$ прямой $\xi_1 = \eta_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и характеристиками QP: $\eta_1 = \eta$, $Q'P$: $\xi_1 = \xi$ (рис. 3).

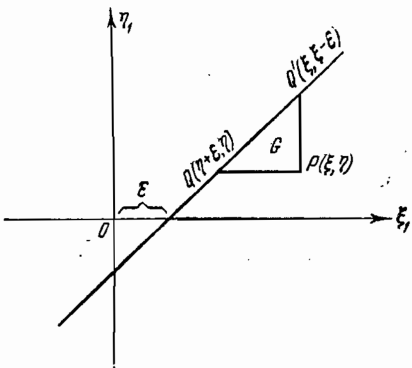

Рис. 3

Для любого, дважды непрерывно дифференцируемого решения $u(\xi, \eta)$ уравнения (2.41), согласно (2.16), имеет место тождество

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} u(\eta+\varepsilon, \eta) R(\eta+\varepsilon, \eta; \xi, \eta) +$$
$$+ \frac{1}{2} u(\xi, \xi-\varepsilon) R(\xi, \xi-\varepsilon; \xi, \eta) -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi} u(\xi_1, \xi_1-\varepsilon)\left[\frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial\eta_1} -\right.$$
$$\left. - \frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi_1 - \eta_1} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\right]_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} d\xi_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial\eta_1}\right]_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} R(\xi_1, \xi_1 - \varepsilon; \xi, \eta)\, d\xi_1. \quad (2.45)$$

Используя известное тождество для гипергеометрических функций

$$F(a, b, c, x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,\ b,\ 1-c+a+b,\ 1-x)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}F(c-b, c-a, 1+c-a-b, 1-x),$$

в силу (2.42) и (2.44) легко убедимся в справедливости следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}-\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\right]_{\eta_1=\xi_1-\varepsilon}=\\
&=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+2}{2m+4}\right)}[(\xi_1-\eta)(\xi-\xi_1)]^{\frac{-m}{2m+4}}\nu(\xi_1),\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\partial R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)}{\partial \xi_1}-\frac{\partial R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)}{\partial \eta_1}-\right.\\
&\left.-\frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi_1-\eta_1}R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\right]_{\eta_1=\xi_1-\varepsilon}u(\xi_1,\ \xi_1-\varepsilon)=\\
&=-\frac{2\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}[(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)]^{\frac{-m-4}{2m+4}}(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}\tau(\xi_1).
\end{aligned}\right\}\quad(2.46)$$

Учитывая (2.46), из формулы (2.45) в пределе при $\varepsilon\to 0$, после очевидной замены переменного интегрирования, получим известную *формулу Дарбу*:

$$u(x,\ y)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}\times$$

$$\times\int_0^1\tau\left[x+(1-2z)\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right][z(1-z)]^{\frac{-m-4}{2m+4}}dz+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)}y\int_0^1\nu\left[x+(1-2z)\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right][z(1-z)]^{\frac{-m}{2m+4}}dz,\quad(2.47)$$

которая дает решение задачи Коши с начальными данными (2.39) *и* (2.40). *Единственность решения этой задачи следует из того, что формула* (2.47) *является результатом тождества* (2.45), *которое имеет место для любого, непрерывного вместе со своими производными до второго порядка, решения уравнения* (2.38) *в полуплоскости* $\xi > \eta$. *Вид формулы* (2.47) *показывает, что полученное решение устойчиво.*

Вернемся теперь к уравнению (2.37). В полуплоскости $\xi > \eta$ функция Римана и в этом случае строится методом, указанным в § 1 настоящей главы. Следовательно, можно выписать тождество

$$
\begin{gathered}
u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} u(\eta + \varepsilon, \eta) R(\eta + \varepsilon, \eta; \xi, \eta) + \\
+ \frac{1}{2} u(\xi, \xi - \varepsilon) R(\xi, \xi - \varepsilon; \xi, \eta) + \\
+ \frac{1}{2} \int_{\eta+\varepsilon}^{\xi} \left\{ \left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1} \right] R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) - \right. \\
- u(\xi_1, \eta_1) \left[\frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \eta_1} \right] + [2b(\xi_1, \eta)_1 - \\
\left. - 2a(\xi_1, \eta_1)] u(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \right\}_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} d\xi_1. \qquad (2.47_1)
\end{gathered}
$$

Ввиду того что функция Римана и ее производные при $\xi_1 = \eta_1$, $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ могут иметь особенность довольно высокого порядка, переходить к пределу в тождестве (2.47_1) при $\varepsilon \to 0$, вообще, нельзя.

Однако, если коэффициент a удовлетворяет условию

$$
\lim_{y \to +0} y^{1 - \frac{m}{2}} a(x, y) = 0 \qquad (2.48)
$$

или, что то же самое,

$$
\lim_{\xi - \eta \to 0} (\xi - \eta)^{\frac{2-m}{2+m}} a = 0,
$$

то в уравнении (2.37), когда $\xi = \eta$, коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ будут иметь такую же полярную особенность, как соответствующие коэффициенты уравнения (2.41), а особенность коэффициента при $u(\xi, \eta)$ в смысле двукратного интегрирования опасности не представляет.

Таким образом, *при соблюдении условия* (2.48) *функция Римана для уравнения* (2.37) *вблизи особой линии* $\xi=\eta$ *ведет себя примерно так же, как и в случае уравнения* (2.41) *и, следовательно, в результате предельного перехода, когда* $\varepsilon \to 0$, *из формулы* (2.47) *мы получим решение задачи Коши для уравнения* (2.32) *с начальными данными* (2.39) *и* (2.40).

Тот факт, что задача Коши для уравнения (2.32) с начальными данными на линии вырождения типа, вообще, может оказаться некорректной, был отмечен еще Гелерстедтом [1], а несколько позже — И. С. Березиным [1]. К условию (2.48), обеспечивающему корректность этой задачи, другим путем пришел Проттер [1].

Приведенный ниже пример показывает, что для корректности задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения условие (2.48) не является необходимым.

Уравнение

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.49}$$

где a — действительная постоянная, гиперболично всюду вне прямой $y=0$, а прямая $y=0$ является линией параболического вырождения. В характеристических переменных $\xi = x + \frac{1}{2} y^2$, $\eta = x - \frac{1}{2} y^2$ уравнение (2.49) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{a-1}{4(\xi-\eta)} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{a+1}{4(\xi-\eta)} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{2.50}$$

Функция Римана для уравнения (2.50) при $\xi > \eta$ выражается с помощью гипергеометрической функции

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = (\xi - \eta_1)^{\frac{a-1}{4}} (\xi_1 - \eta)^{-\frac{a+1}{4}} (\xi_1 - \eta_1)^{1/2} \times$$
$$\times F\left[\frac{1-a}{4}, \frac{1+a}{4}, 1, \frac{(\xi-\xi_1)(\eta_1-\eta)}{(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)}\right]. \tag{2.51}$$

Вид функции Римана (2.51) показывает, что при $|a| < 1$ решение задачи Коши с начальными данными (2.39), (2.40) для уравнения (2.49) может быть получено из формулы (2.47) предельным переходом. В результате простых вычислений для искомого решения получается следующая формула:

$$u(x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-3}{4}} t^{-\frac{a+3}{4}} dt +$$

$$+ y \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} \int_0^1 \nu\left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-1}{4}} t^{-\frac{a+1}{4}} dt.$$

В случае $a = -1$ мы для функции Римана имеем выражение

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = \sqrt{\frac{\xi_1 - \eta_1}{\xi_1 - \eta}},$$

а формула (2.47_1) принимает вид

$$2u(\xi, \eta) = u(\eta + \varepsilon, \eta) + u(\eta, \eta - \varepsilon) +$$
$$+ \sqrt{\varepsilon}\, \frac{u(\xi, \xi - \varepsilon) - u(\eta, \eta - \varepsilon)}{\sqrt{\xi - \eta}} -$$
$$- \int_\xi^{\eta+\varepsilon} \left\{\left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1}\right]\sqrt{\frac{\xi_1 - \eta_1}{\xi_1 - \eta}}\right\}_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} d\xi_1 -$$
$$- \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_\xi^{\eta+\varepsilon} \frac{u(t, t-\varepsilon) - u(\eta, \eta - \varepsilon)}{(t-\eta)^{3/2}}\, dt.$$

Откуда, в пределе, при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$u(x, y) = \tau\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2}\int_0^1 \frac{\nu\left[x + (1-2t)\frac{y^2}{2}\right]}{\sqrt{1-t}}\, dt.$$

В случае же $a = 1$ аналогично находим, что функция

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2}\int_0^1 \nu\left[x + (1-2t)\frac{y^2}{2}\right]\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

является единственным решением уравнения (2.49), удовлетворяющим условиям (2.39) и (2.40).

Таким образом, в рассмотренных случаях коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial x}$ в уравнении (2.49) хотя и не удовлетворяет условию (2.48), но тем не менее задача Коши для этого уравнения с начальными данными на линии параболического вырождения всегда имеет, и притом единственное, устойчивое решение.

В одном весьма частном случае эта задача исследована в работе К. И. Карапетяна [1] (см. также И. Л. Кароль [1]).

Исследование задачи Коши для уравнения (2.49) при требовании повышения гладкости начальных данных (2.39) и (2.40) имеется в работе Чи Минь-ю [1].

В случае уравнения (2.33), как уже было сказано, линия параболического вырождения $y=0$ сама является характеристикой. Поэтому естественно ожидать, что задача Коши для этого уравнения с начальными данными на линии вырождения типа, вообще, не будет корректной.

В этом легко убедиться на следующем простом примере уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2.52}$$

Общее решение этого уравнения в полуплоскости $y>0$ имеет вид

$$u(x, y)=\varphi(x+2y^{1/2})+\psi(x-2y^{1/2}), \tag{2.53}$$

где φ и ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Если от решения $u(x, y)$ уравнения (2.52) мы будем требовать, чтобы оно удовлетворяло условию (2.39) и, кроме того, чтобы выражение

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \tag{2.54}$$

оставалось ограниченным, то этим указанное решение определится единственным образом.

Действительно, в силу (2.39) и (2.54), из (2.53) имеем

$$\varphi(x)+\psi(x)=\tau(x), \quad \varphi'(x)-\psi'(x)=0,$$

т. е.

$$\varphi(x)=\frac{\tau(x)+\text{const}}{2},\quad \psi(x)=\frac{\tau(x)-\text{const}}{2},$$

и, следовательно, для искомого решения получается выражение

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}\tau(x+2y^{1/2})+\frac{1}{2}\tau(x-2y^{1/2}).$$

Теперь заменим условие (2. 40) более слабым условием

$$\lim_{y\to+0} y^{1/2}\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=\nu(x). \tag{2.55}$$

Решение уравнения (2. 52), удовлетворяющее условиям (2. 39) и (2. 55), определяется однозначно. Оно имеет вид

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}\tau(x+2y^{1/2})+\frac{1}{2}\tau(x-2y^{1/2})+\frac{1}{2}\int\limits_{x-2y^{1/2}}^{x+2y^{1/2}}\nu(t)\,dt.$$

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Из изложенного выше материала возникает ряд новых проблемных вопросов. Некоторые из них приводятся ниже.

1. Как уже было сказано, условие (2. 48), достаточное для корректности задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения, является довольно узким.

Было бы весьма интересно найти условие более слабое, чем (2. 48), но достаточное для корректности задачи Коши.

Этому вопросу посвящены работы ряда авторов (Ф. И. Франкль [1], Конти [1], Берс [1], Гаак и Гельвиг [1], Гельвиг [1, 2]).

2. Пусть имеется система

$$y^m k(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+$$
$$+c(x,\ y)u=0,\ m>0, \tag{2.56}$$

где $u=(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — искомый вектор, а k, a, b, c — заданные квадратные матрицы порядка n, причем матрица $k(x,\ y)$ положительно дефинитна.

Система (2.56) гиперболична при $y>0$ и параболически вырождается при $y=0$.

Далеко не полностью исследована задача Коши в следующей постановке: найти в области $y>0$ решение $u(x, y)$ уравнения (2.56), удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to+0} u(x, y)=\tau(x), \lim_{y\to+0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\nu(x), \qquad (2.57)$$

где $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — заданные векторы.

В случае, когда $k(x, y)$ является единичной (диагональной) матрицей, система (2.56) в области $y>0$, в результате преобразования переменных (2.36), приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left[\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}} a(\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}}+\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}} b(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}-\frac{m}{2}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\left[\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}} a(\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}} b(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}+\frac{m}{2}\right]\frac{1}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+$$

$$+\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2m}{m+2}}\frac{c}{4}\frac{1}{(\xi-\eta)^{\frac{2m}{m+2}}}u=0,$$

и, следовательно, в случае симметричности матриц a, b, c и при соблюдении условий

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\frac{m}{2}} a_{ij}(x, y)=0, \; i, \; j=1, 2, \ldots, n$$

задача Коши (2.57) может быть решена методом предыдущего параграфа.

3. В случае уравнения (2.33) было бы интересно выяснить, при каких условиях (т. е. для каких значений показателя m и коэффициентов a, b, c) возможна задача Коши с начальными данными (2.39) и (2.40). В случае же, когда

эта задача некорректна, выяснить, для каких «весов» $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ возможна следующая задача:

$$\lim_{y\to+0} \varphi_1(x, y)\, u(x, y) = \tau(x), \quad \lim_{y\to+0} \varphi_2(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu(x),$$

где τ и ν — заданные функции.

4. Для гиперболических уравнений порядка выше 2 задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения совсем не исследована. В частном случае уравнения четвертого порядка вида

$$\left(y^m \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(y^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0, \quad m > 0, \quad n \geqslant 0$$

задача построения решения с начальными данными:

$$\lim_{y\to+0} u(x, y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to+0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \tau_2(x),$$

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \tau_3(x), \quad \lim_{y\to+0} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} = \tau_4(x)$$

по-видимому может быть решена в квадратурах.

ГЛАВА III

ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ, ГРАНИЦА КОТОРОЙ СОДЕРЖИТ УЧАСТОК ЛИНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

§ 1. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть имеется линейное уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа с двумя независимыми переменными, приведенное к каноническому виду

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)u=0, \quad (3.1)$$

коэффициенты которого являются действительными аналитическими функциями в некоторой односвязной области D_0.

Решение $u(x,\ y)$ уравнения (3.1) будем называть *регулярным*, если оно непрерывно вместе со своими производными до второго порядка включительно. Известно, что регулярное в области D_0 решение $u(x,\ y)$ уравнения (3.1) является аналитической функцией переменных $x,\ y$.

Приведем краткое изложение некоторых результатов из теории уравнения (3.1), принадлежащих И. Н. Векуа [1].

Коэффициенты $A,\ B,\ C$ и регулярное решение $u(x,\ y)$ уравнения (3.1) аналитически продолжаются для комплексных значений $x,\ y$, и, следовательно, введением новых независимых переменных $z=x+iy,\ \zeta=x-iy$ это уравнение в некоторой цилиндрической области (D, D^*) изменения переменных $z \in D$, $\zeta \in D^*$ можно записать в виде:

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + a\frac{\partial u}{\partial z} + b\frac{\partial u}{\partial \zeta} + cu = 0, \tag{3.2}$$

где $4a(z, \zeta) = A + iB$, $4b(z, \zeta) = A - iB$, $4c(z, \zeta) = C$,

$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$, $2\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$.

Следуя И. Н. Векуа [1], точно так же, как это было сделано в § 1 главы II, можно ввести комплексную функцию Римана $R(z, \zeta; z_1, \zeta_1)$, которая относительно переменных $z \in D$, $\zeta \in D^*$ является решением сопряженного с (3.2) уравнения

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial z}(av) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(bv) + cv = 0, \tag{3.3}$$

а относительно переменных $z_1 \in D$, $\zeta_1 \in D^*$ — решением уравнения (3.2), причем

$$\left.\begin{aligned} R(z_1, \zeta; z_1, \zeta_1) &= e^{\int_{\zeta_1}^{\zeta} a(z_1, \zeta_2)\,d\zeta_2}, \\ R(z, \zeta_1; z_1, \zeta_1) &= e^{\int_{z_1}^{z} b(z_2, \zeta_1)\,dz_2}, \\ R(z, \zeta; z, \zeta) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

С помощью функции Римана непосредственно выводится формула, аналогичная (2.13):

$$\begin{aligned} u(z, \zeta) &= R(z, \zeta_0; z, \zeta)\varphi(z) + R(z_0, \zeta; z, \zeta)\psi(\zeta) - R(z_0, \zeta_0; z, \zeta)\varphi(z_0) + \\ &+ \int_{z_0}^{z}\left[b(t, \zeta_0)R(t, \zeta_0; z, \zeta) - \frac{\partial R(t, \zeta_0; z, \zeta)}{\partial t}\right]\varphi(t)\,dt + \\ &+ \int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[a(z_0, \tau)R(z_0, \tau; z, \zeta) - \frac{\partial R(z_0, \tau; z, \zeta)}{\partial \tau}\right]\psi(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\varphi(z) = u(z, \zeta_0)$, $\psi(\zeta) = u(z_0, \zeta)$ — произвольные голоморфные функции переменных z и ζ, а $z_0 = x_0 + iy_0$, $\zeta_0 = x_0 - iy_0$ — фиксированные точки в D и D^* соответственно.

Формула (3.5) дает *общее комплексное представление всех аналитических решений уравнения* (3.2) *при* $z \in D$, $\zeta \in D^*$.

В случае, когда переменные ζ и ζ_0 комплексно сопряжены с z и z_0, т. е. $\zeta = \bar{z}$, $\zeta_0 = \bar{z}_0$, функция Римана $R(z, \bar{z}; z_0, \bar{z}_0)$ принимает действительные значения и из формулы (3.5) получается общее представление всех действительных регулярных решений уравнения (3.1):

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{R(z, \bar{z}_0; z, \bar{z})\varphi(z) + R(z_0, \bar{z}_0; z, \bar{z})\varphi(z_0) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{z_0}^{z}\left[b(t, \bar{z}_0)R(t, \bar{z}_0; z, \bar{z}) - \frac{\partial R(t, \bar{z}_0; z, \bar{z})}{\partial t}\right]\varphi(t)\,dt\right\}. \quad (3.6)$$

Если A, B, C являются целыми функциями переменных x, y, то представление (3.6) годится для любой конечной односвязной области изменения x, y.

Ввиду того, что функция Римана относительно последней пары своих аргументов является решением уравнения (3.1) и, кроме того, имеют место равенства (3.4), выражения:

$$\operatorname{Re}\left[R(z_0, \bar{z}_0; z, \bar{z})\varphi(z_0)\right], \qquad \operatorname{Re}\int\limits_{z_0}^{z} b(t, \bar{z}_0)R(t, \bar{z}_0; z, \bar{z})\varphi(t)\,dt,$$

каждое в отдельности, являются решениями уравнения (3.1).

Следовательно, функция

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re}\left\{R(z, \bar{z}_0; z, \bar{z})\varphi(z) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma}R\left[z_0 + (z - z_0)\sigma, \bar{z}_0; z, \bar{z}\right]\cdot\varphi\left[z_0 + (z - z_0)\sigma\right]d\sigma\right\} \quad (3.7)$$

также является решением уравнения (3.1).

Точно так же заключаем, что функция

$$v_1(x, y) = \operatorname{Re}\left\{R(z, \bar{z}; z, \bar{z}_0)\varphi(z) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma}R\left[z, \bar{z}; z_0 + (z - z_0)\sigma, \bar{z}_0\right]\cdot\varphi\left[z_0 + (z - z_0)\sigma\right]d\sigma\right\}$$

является решением сопряженного с (3.1) уравнения

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}(Av) - \frac{\partial}{\partial y}(Bv) + Cv = 0. \quad (3.8)$$

Подставляя в (3.7) вместо $\varphi(z)$ функцию $k \ln(z - z_0)$, где k произвольная действительная постоянная, получим так называемое *фундаментальное решение уравнения* (3. 1) *с логарифмической особенностью* в точке $z = z_0$:

$$\omega_1(z, z_0) = k[g(z, z_0)] \ln|z - z_0| - g_0(z, z_0),$$

где

$$g(z, z_0) = R(z_0, \bar{z}_0; z, \bar{z}),$$

$$g_0(z, z_0) = \operatorname{Re}\int_0^1 \ln\sigma \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma} R[z_0 + (z - z_0)\sigma, \bar{z}_0; z, \bar{z}]\, d\sigma.$$

Аналогично получается фундаментальное решение сопряженного уравнения (3.8)

$$\omega_1^*(z, z_0) = k[g(z_0, z)] \ln|z - z_0| - g_0^*(z, z_0),$$

где

$$g_0^* = \operatorname{Re}\int_0^1 \ln\sigma \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma} R[z, \bar{z}; z_0 + (z - z_0)\sigma, \bar{z}_0]\, d\sigma.$$

Очевидно, что выражение

$$\omega(z, z_0) = \omega_1(z, z_0) - \int_{z_1}^{z_0} d\xi \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_0} R(z_0, \bar{z}_0; \xi, \bar{\xi})\, M_{\xi\bar{\xi}}[\omega_1(z, \xi)]\, d\bar{\xi}, \quad (3.9)$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$ — фиксированная точка, как функция переменных x, y является фундаментальным решением уравнения (3.1), а как функция переменных x_0, y_0 — *фундаментальным решением* сопряженного уравнения (3.8), с логарифмической особенностью при $z = z_0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что постоянная $k = -\frac{1}{2\pi}$, а функцию (3.9) будем называть *нормированным* фундаментальным решением. Существование нормированного фундаментального решения можно доказать и другими методами (см. Леви [1]).

Пусть D — односвязная область, лежащая внутри D_0, граница Γ которой является простой кривой Жордана.

Для уравнения (3.1) хорошо исследована следующая задача Дирихле или, как еще принято говорить, *первая краевая задача*: найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (3.1), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u|_\Gamma = f, \tag{3.10}$$

где f — заданная непрерывная функция.

Из теории эллиптических уравнений известны следующие два положения: а) *в достаточно малой области задача Дирихле для уравнения* (3.1) *всегда имеет, и притом единственное, решение*; б) *если однородная задача Дирихле* ($f=0$) *имеет только тривиальное решение, то неоднородная задача Дирихле всегда разрешима.*

Альтернатива б) указывает на важность условий, достаточных для того, чтобы однородная задача Дирихле имела только тривиальное решение. Одним из таких классических условий является неположительность коэффициента C в рассматриваемой области.

Таким образом, *при соблюдении условия*

$$C \leqslant 0 \tag{3.11}$$

задача Дирихле (3.10) *всегда имеет, и притом единственное, решение.*

В предположениях гладкости контура Γ и непрерывности решений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ уравнений (3.1) и (3.8) соответственно, вместе со своими частными производными первого порядка в $\bar{D}$, имеет место следующая классическая формула

$$\int_\Gamma \left[u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N} - uv\,(a\cos(N, x_0) + b\cos(N, y_0))\right] ds = 0, \tag{3.12}$$

где N — внутренняя нормаль Γ, а s — длина дуги, отсчитываемая от фиксированной точки в положительном направлении.

Обозначим через $G(x, y; x_0, y_0)$ функцию

$$\omega(z, z_0) - \omega_0(z, z_0), \quad z, z_0 \in D,$$

где $\omega(z, z_0)$ — нормированное фундаментальное решение (3.9), а $\omega_0(z, z_0)$ — регулярное в области D и непрерывное в $\bar{D}$ решение уравнения (3.8) относительно x_0, y_0, удовлетворяющее граничному условию

$$\omega_0(z, z_0) = \omega(z, z_0), \quad z_0 \in \Gamma. \tag{3.13}$$

Функция $G(x, y; x_0, y_0)$ носит название *функции Грина* задачи Дирихле.

При соблюдении условия (3.11) функция Грина, очевидно, существует и как функция переменных x, y; она является решением уравнения (3.1).

Выделяя точку z из области D окружностью достаточно малого радиуса ε, и для оставшейся части области D применяя формулу (3.12), где $v(x_0, y_0) = G(x, y; x_0, y_0)$, в пределе при $\varepsilon \to 0$, учитывая (3.13), получим

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G[z, z_0(s)]}{\partial N_{z_0}} f(s)\, ds. \tag{3.14}$$

Представление решения задачи Дирихле для уравнения (3.1) в виде (3.14) остается в силе и в тех случаях, когда контур Γ имеет угловые точки, а коэффициенты a, b, c удовлетворяют значительно более слабым ограничениям, чем аналитичность (см. И. Н. Векуа [2]).

§ 2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными второго порядка:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 u = 0, \tag{3.15}$$

где A, B, C, A_1, B_1, C_1 — заданные в некоторой области D_0 переменных x, y действительные квадратные матрицы порядка n, а $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — искомый вектор.

Согласно общему определению (см. главу I, § 4) система (3.15) называется *эллиптической* в области D_0, если в каждой точке этой области корни характеристического уравнения

$$\det |A + 2B\lambda + C\lambda^2| = 0 \tag{3.16}$$

все комплексны.

С точки зрения граничных задач (особенно с точки зрения задачи Дирихле) приведенное определение эллиптичности в применении к одному уравнению второго порядка и системе уравнений второго порядка имеет различное значение.

В предыдущем параграфе мы уже видели, что для уравнения второго порядка эллиптического типа задача Дирихле является задачей ф р е д г о л ь м о в о г о т и п а. Точнее говоря, для одного уравнения второго порядка эллиптического типа с достаточно гладкими коэффициентами, в конечных областях с достаточно хорошей границей, однородная задача Дирихле имеет к о н е ч н о е число линейно независимых решений, а неоднородная задача Дирихле разрешима лишь при соблюдении дополнительных условий, число которых совпадает с числом линейно независимых решений однородной задачи. Следовательно, неоднородная задача всегда разрешима, если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. В частности, для достаточно малой области задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение.

Для эллиптической системы (3.15) задача Дирихле ставится следующим образом: *в области $D \subset D_0$ с границей* Γ *требуется найти регулярное решение $u = (u_1, \ldots, u_n)$ системы* (3.15), *непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$u|_\Gamma = f, \tag{3.17}$$

где f — заданный на Γ *непрерывный вектор.*

Для системы (3.15) *задача Дирихле, вообще, не является задачей фредгольмового типа.* В этом легко убедиться на простых примерах (см. А. В. Бицадзе [1—2]).

В самом деле, система

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \tag{3.18}$$

по данному выше определению, является эллиптической, так как характеристическое уравнение (3.16) в этом случае имеет вид

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0, \tag{3.19}$$

все корни которого комплексны.

В обозначениях $u_1+iu_2=w$, $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ систему (3.18) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}=0, \tag{3.20}$$

где $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$.

Из (3.20) сразу заключаем, что все регулярные решения системы (3.18) представляются в виде

$$u_1+iu_2=\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z), \tag{3.21}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные голоморфные функции переменного z.

Пусть D — круговая область радиуса R с центром в точке z_0. Все регулярные в области D решения системы (3.18), исчезающие на окружности Γ: $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2$, даются формулой

$$u_1+iu_2=\left[1-\frac{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)}{R^2}\right]\psi(z),$$

где $\psi(z)$ — произвольная голоморфная в области D функция. Следовательно, однородная задача Дирихле в круге D имеет бесконечное множество линейно независимых решений:

$$u_{1n}=\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^n(\alpha_n\cos n\varphi-\beta_n\sin n\varphi),$$

$$u_{nn}=\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^n(\alpha_n\sin n\varphi+\beta_n\cos n\varphi),$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots,\quad z-z_0=re^{i\varphi}.$$

Неправильно было бы думать, что причиной нарушения фредгольмовости задачи Дирихле является кратность корней характеристического уравнения (3.19). Действительно, система

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\sqrt{2}\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}-\sqrt{2}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}=0 \tag{3.22}$$

эллиптична, так как в этом случае корни характеристического уравнения

$$\lambda^4+1=0$$

все комплексны. Эти корни все простые, но, тем не менее, однородная задача Дирихле для системы (3. 22) в круге D имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$u_1^{(1)} = \alpha_1 (1 - r^2), \quad u_2^{(1)} = \beta_1 (1 - r^2);$$

$$u_1^{(2)} = 2\sqrt{2}\alpha_2 (x - x_0)(y - y_0)(1 - r^2) + \beta_2 [(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2](1 - r^2);$$

$$u_2^{(2)} = \alpha_2 [(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2](1 - r^2) + 2\sqrt{2}\beta_2 (x - x_0)(y - y_0)(1 - r^2);$$

. . . .

где $r^2 = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R^2}$, а $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ — произвольные действительные числа. В этом легко убедиться, если примем во внимание, что все регулярные решения системы (3. 22) представляются в виде

$$u_1 + iu_2 = \varphi(\lambda z - \bar{z}) + \psi(\lambda z + \bar{z}),$$

где φ и ψ — произвольные голоморфные функции, а $\lambda = \frac{i}{1 + \sqrt{2}}$.

Если коэффициенты главной части системы (3. 15) *в области* D_0 *удовлетворяют условию положительной определенности квадратичной формы*

$$\eta A \eta + \eta B \xi + \xi B \eta + \xi C \xi \geqslant 0, \tag{3. 23}$$

где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (*причем предполагается, что равенство имеет место лишь при* $\eta = \xi = 0$), *то, как это было замечено в некоторых частных случаях еще Сомильяна* [1], *задача Дирихле для системы* (3. 15) *становится фредгольмовой*.

Это можно доказать с помощью разных методов.

Здесь успешно можно развивать, например, метод обобщенных потенциалов, причем фундаментальные решения могут быть построены методом Леви [1], по крайней мере, в малых областях (см. также М. И. Вишик [1]).

При соблюдении условия Сомильяна (3. 23) или, как еще говорят, условия сильной эллиптичности, в частности, имеет место следующая альтернатива Фредгольма: *неоднородная задача Дирихле* (3. 17) *всегда разрешима, если соответствующая однородная задача* ($f = 0$) *имеет только тривиальное решение.*

Для системы вида

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \\ + A_1\frac{\partial u}{\partial x} + B_1\frac{\partial u}{\partial y} + C_1 u = 0, \qquad (3.24)$$

в случае симметричности матриц A_1 и B_1 и при соблюдении (3.23), условие, достаточное для того, чтобы однородная задача Дирихле имела только тривиальное решение, заключается в положительности квадратичной формы

$$\eta\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} - 2C_1\right)\eta \geqslant 0, \ (x, y) \in D_0. \qquad (3.25)$$

В самом деле, применяя в области D формулу Остроградского—Грина [мы предполагаем, что контур Г, коэффициенты системы (3.24) и искомый вектор $u(x, y)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим применимость этой формулы] и учитывая, что $u(x, y)$ является решением однородной задачи Дирихле, из тождества

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uA\frac{\partial u}{\partial x} + uB\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}uA_1u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(uB\frac{\partial u}{\partial x} + uC\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}uB_1u\right) = \\ = uL(u) + \frac{\partial u}{\partial x}A\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}B\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}B\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}C\frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{1}{2}u\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} - 2C_1\right)u$$

после интегрирования, будем иметь

$$\iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x}A\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}B\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}B\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}C\frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}u\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} - 2C_1\right)u\right]dx\,dy = 0,$$

откуда, в силу (3.23) и (3.25), заключаем, что $u(x, y) = 0$ всюду в области D.

При $A_1 = \mathrm{const}$, $B_1 = \mathrm{const}$ условие (3.25) принимает вид

$$\eta C_1 \eta \leqslant 0.$$

Заметим, что если

$$A=\alpha(x, y)E,\ B=0,\ C=\beta(x, y)E,\ A_1=\alpha_1(x, y)E,$$
$$B_1=\beta_1(x, y)E,$$

где E — единичная (диагональная) матрица, а α, β, α_1, β_1 — заданные скалярные функции, причем $\alpha>0$, $\beta>0$, при требовании положительной определенности матрицы — $C_1(x, y)$, то длина $R=(\sum u_i^2)^{1/2}$ вектора $u(x, y)$, являющегося решением системы (3. 24), не может иметь максимума в области D.

Действительно, предположим, что $R(x, y)$ имеет максимум во внутренней точке (x, y) области D. С одной стороны, в этой точке мы должны иметь:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=0, \tag{3. 26}$$

$$\alpha\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\leqslant 0, \tag{3. 27}$$

а с другой стороны, в силу (3. 24) и (3. 26) и положительной определенности матрицы $-C_1(x, y)$, должно быть

$$\alpha\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}=\left[-uC_1u+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{1}{R}>0,$$

что противоречит условию (3. 27).

Простой пример эллиптической системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,\quad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \tag{3. 28}$$

показывает, что, хотя и не соблюдено условие сильной эллиптичности, так как в этом случае

$$\eta A\eta+\eta B\xi+\xi B\eta+\xi C\xi=(\eta_1+\eta_2)^2-(\xi_1+\xi_2)^2,$$

но тем не менее для этой системы задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение.

В этом легко убедиться, если учесть, что все регулярные решения системы (3. 28) представляются формулой

$$u_1=\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)],$$
$$u_2=\operatorname{Re}[-\bar{z}\varphi'(z)-2\varphi(z)-\psi(z)],$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные голоморфные функции.

Вернемся опять к системе (3.18). С первого взгляда может показаться странным тот факт, что для этой системы граничная задача

$$u_1|_\Gamma = f_1, \quad \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right]_\Gamma = f_2$$

всегда возможна, причем однородная задача допускает решение $u_1 = 0$, $u_2 = ax + b$. Для этой же системы задача Дирихле

$$(u_1 + iu_2)_\Gamma = f,$$

вообще, неразрешима. Например, если D — единичный круг $|z| < 1$, то для разрешимости задачи Дирихле необходимо, чтобы функция $tf(t)$ была граничным значением голоморфной внутри D функции или, что то же самое, чтобы были соблюдены условия:

$$\int_\Gamma t^k f(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.29}$$

Когда условия (3.29) соблюдены, задача Дирихле всегда разрешима и само решение имеет вид

$$u_1 + iu_2 = (1 - z\bar{z})\,\psi(z) + \frac{z}{2\pi i}\int \frac{tf(t)\,dt}{t - z},$$

где $\psi(z)$ — произвольная голоморфная функция.

Предположим теперь, что имеется эллиптическая система

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.30}$$

с постоянными коэффициентами. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$; $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_\mu$ обозначают корни характеристического уравнения (3.16), а $k_1, \ldots, k_\mu$ — их кратность соответственно.

Все регулярные решения системы (3.30) в односвязной области могут быть представлены формулой

$$u = \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k_j}\sum_{m=0}^{l-1} C_{lm}^{(j)}\bar{z}_j^m \varphi_{jl}^{(m)}(z_j), \tag{3.31}$$

где φ_{jl} являются произвольными голоморфными функциями комплексных переменных $z_j = x + \lambda_j y$ соответственно; верхний индекс m функции φ_{jl} указывает порядок производной по z_j, а $C_{lm}^{(j)}$ являются постоянными векторами, которые выражаются исключительно через коэффициенты системы (3.30), причем для нахождения $C_{lm}^{(j)}$ требуется лишь решение линейных алгебраических систем.

В случае действительных $C_{lm}^{(j)}$ систему (3.30) мы будем называть *слабо связанной*, если система n векторов $\{C_{l0}^{(j)}\}$ линейно независима. Для слабо связанной системы (3.30), задача Дирихле, очевидно, корректна. В случае комплексных $C_{l0}^{(j)}$ тоже можно указать условие, аналогичное условию слабой связанности, обеспечивающее фредгольмовость задачи Дирихле для системы (3.30). Интересно установить критерии слабой связанности системы (3.30) в терминах коэффициентов этой системы.

Формула (3.31) позволяет привести исследование любой линейной граничной задачи (Дирихле, Пуанкаре и др.) к эквивалентной граничной задаче теории голоморфных функций. Отсюда ясно, что для упомянутых граничных задач нельзя было, вообще, ожидать, чтобы имели место альтернативы типа Фредгольма или типа Нетера. В случае эллиптических систем, не удовлетворяющих условию сильной эллиптичности (3.23), для линейных граничных задач, по-видимому, имеют место альтернативы, тесно связанные с известными альтернативами из теории общих линейных уравнений в абстрактных метрических пространствах (об этих альтернативах см. Хаусдорф [1] и С. М. Никольский [1]).

Эллиптическая система частного вида

$$\Delta u + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0, \qquad (3.32)$$

где Δ — оператор Лапласа, A, B, C — действительные квадратичные матрицы порядка n, очевидно, удовлетворяет условию Сомильяна (3.23).

В случае, когда A, B, C — аналитические матриц-функции переменных x, y, записывая (3.32) в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} + a\frac{\partial u}{\partial z} + b\frac{\partial u}{\partial \zeta} + cu = 0, \qquad z = x + iy \in D, \qquad \zeta = x - iy \in D^*,$$

подобно тому, как это было сделано в § 2 гл. II, можно ввести понятие *комплексной матриц-функции Римана* $R(z, \zeta; z_1, \zeta_1)$ и выписать общее комплексное представление всех регулярных решений системы (3.32) в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\{R(z, \bar z_0; z, \bar z)\varphi(z) + R(z_0, \bar z_0; z, \bar z)\varphi(z_0) + \\ + \int_{z_0}^{z}\left[b(t, \bar z_0)R(t, \bar z_0; z, \bar z) - \frac{\partial R(t, \bar z_0; z, \bar z)}{\partial t}\right]\varphi(t)\,dt, \quad (3.33)$$

где $\varphi(z) = \{\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)\}$ — произвольный голоморфный вектор.

Точно так же, как в предыдущем параграфе, из формулы (3.33) получается квадратичная матрица $\omega(z, z_0) = \omega(x, y; x_0, y_0)$ порядка n, которая, как функция переменных x_0, y_0, является фундаментальным решением системы (3.32), а как функция переменных x, y — фундаментальным решением сопряженной с (3.32) системы

$$\Delta v - \frac{\partial}{\partial x}(vA) - \frac{\partial}{\partial y}(vB) + vC = 0$$

с логарифмической особенностью в точке $z = z_0$.

Для системы (3.32) задача Дирихле (3.17) исследована с такой же полнотой, как для одного уравнения (1.1) (см. И. Н. Векуа [1] и А. В. Бицадзе [3]). В частности, *если соблюдено условие*

$$\eta\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} - 2C\right)\eta \geqslant 0, \quad (3.34)$$

то задача Дирихле для системы (3.32) *всегда имеет, и притом единственное, решение*

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G[z, z_0(s)]}{\partial N_{z_0}} f(s)\,ds, \quad (3.35)$$

где $G(z, z_0)$ — *матриц-функция Грина, которая для достаточно гладкого контура* Γ *всегда существует.*

§ 3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ, ГРАНИЦА КОТОРОЙ СОДЕРЖИТ УЧАСТОК ЛИНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВЫРОЖДЕНИЯ.

Рассмотрим уравнения

$$L(u)=y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a \frac{\partial u}{\partial x}+b \frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \qquad (3.36)$$

и

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a \frac{\partial u}{\partial x}+b \frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \qquad (3.37)$$

коэффициенты которых $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ являются заданными действительными функциями в некоторой области D_0, содержащей внутри себя участок прямой $y=0$. Пусть m — положительное действительное число.

В области D_0 при $y>0$ оба уравнения, (3.36) и (3.37), эллиптичны, а при $y=0$ имеет место параболическое вырождение.

Ту часть области D_0, в которой $y>0$, мы будем называть *эллиптической частью*.

В эллиптической части области D_0, в результате неособого преобразования независимых переменных: $\xi=x$, $\eta=\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$, уравнение (3.36) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+A \frac{\partial u}{\partial \xi}+B \frac{\partial u}{\partial \eta}+Cu=0.$$

К такому же виду приводится и уравнение (3.37), если применить преобразование:

$$\xi=x, \quad \eta=\frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \quad \text{при} \quad m \neq 2, \quad \eta=\ln y \quad \text{при} \quad m=2.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что в эллиптической части области D_0 коэффициенты a, b и c уравнений (3.36) и (3.37) являются действительными аналитическими функциями, причем $c(x, y)$ удовлетворяет условию (3.11).

Пусть D — односвязная область, с кусочно гладким контуром Γ, лежащая строго внутри эллиптической части области D_0.

Повторяя рассуждение § 1 настоящей главы, заключаем, что *задача Дирихле с непрерывными граничными данными* f *на* Γ, *как для уравнения* (3.36), *так и для уравнения* (3.37), *всегда имеет, и притом единственное, решение* $u(x, y)$, *которое представляется в виде интеграла*

$$u(x, y) = \int\limits_{\Gamma} k(x, y, s) f(s)\, ds. \tag{3.38}$$

Ядро этого представления само является аналитическим решением относительно переменных x, y, и оно зависит исключительно от области D.

Предположим теперь, что D—односвязная область, граница которой Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \sigma + AB$, где σ — гладкая дуга Жордана с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащая в эллиптической части области D_0, а AB — отрезок прямой $y = 0$.

Заметим следующее очевидное, но весьма важное свойство оператора L, обозначающего левую часть уравнения (3.36) [или уравнения (3.37)]: *если* $v(x, y)$ *является непрерывной вместе со своими частными производными до второго порядка функцией и всюду в области* D *имеет место неравенство* $L(v) < 0$, *то внутри этой области* $v(x, y)$ *не может достигать отрицательного минимума; если же, наоборот, всюду в области* D *имеет место неравенство* $L(v) > 0$, *то* $v(x, y)$ *внутри этой области не может достигать положительного максимума.*

В настоящем параграфе мы будем изучать задачу Дирихле в следующей постановке. *Пусть* $f(x, y)$ — *заданная непрерывная в замкнутой области* $\bar{D}$ *функция. Ищется регулярное в области* D *решение* $u(x, y)$ *уравнения* (3.36) [*или уравнения* (3.37)], *совпадающее на границе* $\Gamma = \sigma + AB$ *с функцией* f.

В силу условия (3.11) единственность решения задачи Дирихле очевидна.

Ниже мы увидим, что в смысле существования решения задачи Дирихле уравнения (3.36) и (3.37) не всегда одинаково себя ведут.

Обозначим через D_h область, состоящую из точек области D, удовлетворяющих условию $y > h$, где h — достаточно малое положительное число (рис. 4). Мы уже знаем, что существует единственное регулярное в области D_h решение уравнения (3.36) [или уравнения (3.37)], принимающее на границе области D_h значения функции f. В силу условия (3.11) в замкнутой области $\bar{D}_h$ имеем $|u_h(x, y)| < M$, где $M = \max |f(x, y)|$ по всей замкнутой области $\bar{D}$. Обозначим через h^* произвольное фиксированное значение h. Начиная со значения h^* для всех значений $h < h^*$ семейство $\{u_h(x, y)\}$ вполне определено и равномерно ограничено. С другой стороны, в силу (3.38) имеем представление

$$u_h(x, y) = \int_{\Gamma_*} k^*(x, y, s)\, u_h(s)\, ds, \quad (3.39)$$

где Γ_* — граница области $D_h{}^*$. Отсюда сразу следует равностепенная непрерывность семейства $\{u_h(x, y)\}$.

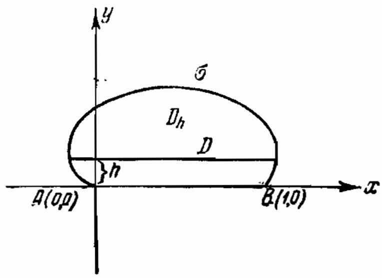

Рис. 4

По известной теореме Арцела из семейства $\{u_h\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{h_i}(x, y)\}$, предел которой $u(x, y) = \lim\limits_{i\to\infty} u_{h_i}(x, y)$, в силу (3.39), является регулярным решением уравнения (3.36), [или уравнения (3.37)] в области D, совпадающим на дуге σ с функцией f.

Остается выяснить вопрос: принимает ли функция $u(x, y)$ значения f на отрезке AB? В случае уравнения (3.36) этот вопрос решается всегда положительно, в то время как в случае уравнения (3.37) — не всегда положительно.

Рассмотрим сначала случай уравнения (3.36).

Предварительно покажем, что для каждой точки $Q(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$ существует функция $v(x, y)$, называемая ***барьером*** и обладающая следующими свойствами: а) *она непрерывна в полукруговой окрестности* ω_{x_0}:

$$(x - x_0)^2 + y^2 < \rho^2, \quad y \geqslant 0,$$

точки Q; б) *равна нулю в точке Q;* в) *положительна во всех других точках окрестности ω_{x_0};* г) *всюду в этой окрестности удовлетворяет условию*

$$L(v) < 0. \tag{3.40}$$

В рассматриваемом случае в качестве барьера может служить функция

$$v(x, y) = (x - x_0)^2 + y^\beta, \tag{3.41}$$

где

$$0 < \beta < 1. \tag{3.42}$$

В самом деле, то, что определенная по формуле (3.41) функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям а), б), в) очевидно. Условие г) проверяется также легко. Действительно, непосредственным вычислением получаем

$$L(v) = 2y^m + \beta(\beta - 1)y^{\beta-2} + 2a(x - x_0) + \beta b y^{\beta-1} + cv, \tag{3.43}$$

откуда сразу следует, что для достаточно малых y знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta(\beta - 1)$ и, следовательно, в силу (3.42) существует такая окрестность точки Q, в которой $L(v) < 0$. Обозначим через P точку с координатами (x, y). В силу непрерывности функции $f(P)$ для заданного положительного ε можно найти такую полукруговую окрестность $\omega'_{x_0} \subset \omega_{x_0}$ точки Q, в которой имеют место неравенства

$$f(Q) - \varepsilon \leqslant f(P) \leqslant f(Q) + \varepsilon. \tag{3.44}$$

Рассмотрим две функции:

$$\psi(P) = f(Q) + \varepsilon + kv(P), \tag{3.45}$$

$$\varphi(P) = f(Q) - \varepsilon - k_1 v(P), \tag{3.46}$$

где k и k_1 пока произвольные положительные числа.

Начиная с определенных значений k и k_1, в силу (3.40), (3.45) и (3.46), имеем: $L[\psi(P)] < 0$, $L[\varphi(P)] > 0$ всюду в окрестности ω'_{x_0}.

В окрестности ω'_{x_0}, в силу (3.44) и (3.45), получим, что $\psi(P) \geqslant f(P)$. Ввиду того что $v(P) > 0$ при $P \neq Q$ в формуле (3.45) число k может быть подобрано так, чтобы на полуокружности, входящей в состав границы ω'_{x_0}, имело место неравенство $\psi(P) > M$.

Совокупность точек окрестности ω'_{x_0}, ординаты которых $y > h$, составляет область, которую мы будем обозначать через ω_h. На границе области ω_h имеем $\psi(P) \geqslant u_h(P)$. Следовательно, ввиду того что всюду в ω_h имеет место неравенство $L[\psi(P) - u_h(P)] < 0$, заключаем, что для любого h и $P \in \omega_h$ имеет место неравенство

$$\psi(P) \geqslant u_h(P). \tag{3.47}$$

Аналогично может быть подобрано число k_1 в формуле (3.46) таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\varphi(P) \leqslant u_h(P). \tag{3.48}$$

На основании (3.47) и (3.48) заключаем, что

$$\varphi(P) \leqslant u(P) \leqslant \psi(P). \tag{3.49}$$

Из (3.49) в пределе при $Q \to P$ получим

$$\varphi(Q) \leqslant u(Q) \leqslant \psi(Q)$$

или, учитывая (3.45) и (3.46),

$$f(Q) - \varepsilon \leqslant \lim_{P \to Q} u(P) \leqslant f(Q) + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что $\lim\limits_{P \to Q} u(P) = f(Q)$.

Таким образом, в случае уравнения (3.36) функция

$$u(x, y) = \lim_{i \to \infty} u_{h_i}(x, y)$$

является единственным регулярным в области D решением этого уравнения, совпадающим на всей границе $\Gamma = \sigma + AB$ с заданной непрерывной функцией f.

В случае уравнения (3.37), как это было доказано М. В. Келдышем [1], задача Дирихле в приведенной выше постановке не всегда имеет решение.

Дело в том, что те решения уравнения (3.37), которые не имеют изолированных особых точек на прямой $y = 0$, как функции переменного y при $y \to +0$, в основном ведут себя как решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^m \varphi''(y) + b(x, 0)\varphi'(y) = 0.$$

Это значит, что указанные решения при $y \to +0$ характеризуются следующим образом: а) при $0 < m < 1$ все остаются ограниченными; б) при $m = 1$, если $b(x, 0) < 1$, все остаются ограниченными, а если $b(x, 0) \geqslant 1$ — среди них существуют и неограниченные; в) при $1 < m < 2$, если $b(x, 0) \leqslant 0$, все остаются ограниченными, а если $b(x, 0) > 0$, — среди них существуют и неограниченные; г) при $m \geqslant 2$, если $b(x, 0) < 0$, все остаются ограниченными, а если $b(x, 0) > 0$ — среди них существуют и неограниченные. Если $m \geqslant 2$, то неограниченные решения существуют и при $b(x, 0) \geqslant 0$. Это можно объяснить тем, что в этом случае в окрестности $y = 0$ решения уравнения (3.37) ведут себя как решения обыкновенного уравнения, которое, кроме выражения $y^m \varphi''(y) + b(x, 0)\varphi'(y)$, содержит также и младшие члены.

В тех случаях, когда решения уравнения (3.37) *в окрестности $y = 0$ все ограничены, решение задачи Дирихле в приведенной выше постановке существует и его можно построить точно так же, как в случае уравнения* (3.36). Для доказательства того, что *построенное указанным способом решение уравнения* (3.37) *принимает наперед заданные непрерывные значения на AB* (на σ этот факт в проверке не нуждается), достаточно показать, что во всех рассматриваемых случаях существует барьер, а это трудности не представляет.

В самом деле, будем опять искать барьер в виде

$$v(x, y) = y^\beta + (x - x_0)^2, \ 0 < x_0 < 1, \ 0 < \beta < 1.$$

Имеем

$$L(v) = 2 + \beta(\beta - 1)y^{m+\beta-2} + 2a(x - x_0) + \beta b y^{\beta-1} + cv.$$

Отсюда для достаточно малых значений y можно заключить, что:

1) при $0 < m < 1$ знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta(\beta - 1)y^{m+\beta-2}$, т. е. $L(v) < 0$; 2) при $m = 1$ и $b(x, 0) < 1$ знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta(\beta - 1 + b)y^{\beta-1}$ и, если примем, что $\beta < 1 - b(x, 0)$, то будем иметь $L(v) < 0$; 3) при $1 < m < 2$ и $b(x, 0) \leqslant 0$, если $\beta < 2 - m$, опять будем иметь $L(v) < 0$ и, наконец, 4) при $m \geqslant 2$ и $b(x, 0) < 0$ знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta b y^{\beta-1}$, т. е. $L(v) < 0$.

Следовательно, при соответствующем подборе окрестности ω_{x_0} точки $Q(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$ и показателя β, выражение $y^\beta + (x - x_0)^2$ во всех указанных случаях может служить барьером.

Если в окрестности $y = 0$ *решения уравнения* (3.37) *не все остаются ограниченными при* $y \to 0$, *то задача Дирихле в приведенной выше постановке невозможна.*

В этих случаях оказывается, что однозначно разрешима следующая задача (задача E по терминологии М. В. Келдыша [1]): *найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения* (3.37), *остающееся ограниченным при $y \to 0$ и принимающее заданные непрерывные значения f лишь на дуге σ.*

Решение этой задачи строится таким же способом, как решение задачи Дирихле.

Заметим, что в рассматриваемом случае существует положительная в замкнутой области $\bar{D}$ функция $w(x, y)$, равномерно стремящаяся к бесконечности при $y \to 0$ и удовлетворяющая условию $L(w) < 0$ внутри области D.

В качестве w может быть взято, например, выражение

$$w(x, y) = -\ln y - (x - \alpha)^n + k,$$

где постоянная α удовлетворяет условию $x - \alpha > 1$, число n — натуральное, k — пока произвольная постоянная, а под $\ln y$ понимается главная ветвь этой функции.

В самом деле, для $L(w)$ имеем выражение

$$L(w) = y^{m-2} - n(n-1)(x - \alpha)^{n-2} - an(x - \alpha)^{n-1} - \frac{b}{y} + cw.$$

При $m = 1$ и $b(x, 0) \geqslant 1$, в силу аналитичности $b(x, y)$, существует такое положительное число $A > 0$, что

$$1 - b(x, y) < Ay.$$

Подберем число n так, чтобы имели место неравенства:

$$n - 1 > 3|a|(x - \alpha), \quad n(n-1) > 3A.$$

После этого число k подбирается так, чтобы $w(x, y)$ была положительна всюду в D.

Для выбранных n и k будем иметь

$$L(w) < A - \frac{1}{3} n [n - 1 + 3a (x - \alpha)] (x - \alpha)^{n-2} -$$

$$- \frac{2}{3} n (n - 1) \ (x - \alpha)^{n-2} + cw < - \frac{1}{3} n (n - 1) + cw < 0,$$

т. е. $w(x, y)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

В случаях $1 < m < 2$, $b(x, 0) < 0$ и $m \geqslant 2$, $b(x, 0) \geqslant 0$ всегда может быть выбрано число $A > 0$ так, чтобы имело место неравенство $y^{m-1} - b < Ay$. Поэтому, повторением приведенного выше рассуждения заключаем, что и в этих случаях функция $w(x, y)$ с требуемыми свойствами существует.

Теперь легко доказать единственность решения задачи E. С этой целью достаточно показать, что решение $u_0(x, y)$ задачи E, удовлетворяющее условию $u_0|_\sigma = 0$, тождественно равно нулю в области D.

Так как, с одной стороны, для любого положительного ε всюду на границе Γ области D имеет место неравенство $\varepsilon w \pm u_0 \geqslant 0$ и, с другой стороны, внутри области D выражение $L(w) < 0$, то отсюда заключаем, что всюду в области D имеет место неравенство $|u_0| \leqslant \varepsilon w$. Из этого, в силу произвольности ε, следует, что в каждой точке области D функция $u_0(x, y) = 0$.

Аналитичность коэффициентов a, b и c мы требовали ради простоты изложения. Это требование, конечно, может быть заменено более слабым требованием гладкости.

Следует отметить, что задача Дирихле для уравнения (3.37) в частном случае, когда $m = 1$, $a = b = c = 0$, изучалась в работе [3] Чибрарио.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ЗАДАЧИ И ОБОБЩЕНИЯ

Полученные в предыдущем параграфе результаты и метод исследования остаются в силе для некоторых классов эллиптических уравнений в многомерных областях. К такому классу относятся, например, уравнения

$$z^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial z} + Du = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^m\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}+Du=0, \quad D\leqslant 0,$$

где m — положительное число. В полупространстве $z>0$ оба эти уравнения являются эллиптическими, в то время как на плоскости $z=0$ имеет место параболическое вырождение.

Задачи нахождения регулярного в области D решения уравнения (3.37), ограниченного в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющего либо условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_\sigma=f,$$

где γ — заданное направление, либо условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_\sigma=f, \qquad u|_{AB}=\varphi,$$

были исследованы в работах О. А. Олейник [1] и Н. Д. Введенской [1].

Отмеченные выше задачи для эллиптических уравнений второго порядка с параболическим вырождением на границе области изучались и другими методами (см. М. И. Вишик [2,3], С. Г. Михлин [1], Л. Д. Кудрявцев [1]).

Имеется ряд все еще не исследованных вопросов, относящихся к эллиптическим уравнениям с параболическим вырождением на границе рассматриваемой области.

1. Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (3.37), не обязательно ограниченное при $y\to 0$ и удовлетворяющее условиям:

$$u|_\sigma=f, \quad \lim_{y\to 0}\psi(x, y)\,u(x, y)=\varphi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

где f и φ — заданные непрерывные функции, а $\psi(x, y)$ тоже заданная функция, обращающаяся в нуль при $y\to 0$. (Некоторые результаты по этой задаче имеются в работе С. А. Терсенова [1] и Хои Чунь-и. [1]).

2. Предположим, что на некоторых участках отрезка AB, входящего в состав границы $\Gamma=\sigma+AB$ области D, коэффициент $b(x, 0)$ удовлетворяет условиям: а) $b(x, 0)<1$ при $m=1$; б) $b(x, 0)\leqslant 0$ при $1<m<2$; в) $b(x, 0)<0$ при $m\geqslant 2$,

а в остальных частях отрезка AB, наоборот: α) $b(x,0) \geqslant 1$ при $m=1$; β) $b(x,0)>1$ при $1<m<2$; γ) $b(x,0) \geqslant 0$ при $m \geqslant 2$. При требовании ограниченности регулярного в области D решения $u(x, y)$ уравнения (3.37), когда $y \to 0$ (с сохранением единственности, конечно), выяснить вопрос о возможности освобождения от граничных данных тех участков AB, на которых $b(x,0)$ удовлетворяет условиям α), β), γ), в то время как на остальной части границы Γ значения $u(x, y)$ заданы. (По этому вопросу см. работу [1] С. А. Терсенова, где рассмотрен случай $m=1$.)

3. Найти регулярное в области D решение уравнения (3.37), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\sigma}=f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB}=\varphi, \tag{3.50}$$

либо

$$u|_{\sigma}=f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB}=\varphi, \tag{3.51}$$

где f и φ — заданные функции.

На примере уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

видно, что при требовании ограниченности $\frac{\partial u}{\partial y}$, когда $y \to 0$, однозначно решается задача нахождения регулярного в области D решения этого уравнения, ограниченного в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющего лишь условию $u|_{\sigma}=f$.

Дело в том, что указанное уравнение заменой переменных $\xi=x$, $\eta=2y^{1/2}$ переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

При этом требование ограниченности

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

когда $y \to 0$, равносильно тому, что

$$\lim_{\eta \to 0}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Следовательно, рассматриваемая задача редуцируется к задаче Дирихле для гармонических функций в симметрической относительно оси $\eta=0$ области.

Таким образом, задача настоящего пункта заключается в установлении, для каких m и $b(x, 0)$ возможны задачи (3.50) и (3.51) и для каких m и $b(x, 0)$ следует освобождать участок AB от граничных данных с сохранением существования и единственности решения задачи с граничными данными лишь на σ.

Здесь полезную роль может играть следующий легко доказываемый принцип экстремума: при соблюдении условий $c(x, y) \leqslant 0$, $b(x, 0) > 0$ регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (3.37), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, с ограниченной производной $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\partial u}{\partial y}$, положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\bar{D}$ не может достигать на открытом отрезке AB.

4. В постановке задач пункта 3 отказаться от требования ограниченности $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y \to 0$ и заменить условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB} = \varphi$$

более слабым условием

$$\lim_{y \to 0} \psi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi,$$

где $\psi(x, y)$ — заданная функция, обращающаяся в нуль при $y \to 0$.

5. Совсем не изучены решения эллиптических систем в области, на границе которой имеет место вырождение типа.

В частном случае систем

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

$$(m > 0,\ a = \| a_{ik} \|,\ b = \| b_{ik} \|,\ c = \| c_{ik} \|),$$

которые являются эллиптическими при $y > 0$ и для которых на прямой $y = 0$ имеет место вырождение типа, было бы интересно исследовать задачу Дирихле в области D при выполнении условия (3. 34).

В этих случаях, в силу (3. 35), существует аналог интегрального представления (3. 39) и, следовательно, для построения искомого решения можно использовать метод предыдущего параграфа, но трудности будут возникать при выяснении вопроса о том, принимает ли построенное решение заданные значения в точках участка AB границы Γ области D.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧА ТРИКОМИ

Линейное уравнение с частными производными второго порядка

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \tag{4.1}$$

где m — неотрицательное целое число, *эллиптично* при $y>0$, *гиперболично* при $y<0$, а вдоль прямой $y=0$ оно *параболически вырождается*.

В дальнейшем под смешанной областью будем понимать область, содержащую внутри себя интервал оси $y=0$.

Для уравнения (4.1) задача Коши в гиперболической части смешанной области с начальными данными на линии параболического вырождения и задача Дирихле в эллиптической части смешанной области были исследованы в предыдущих главах.

Задачу нахождения решения уравнения смешанного типа в смешанной области при тех или иных граничных условиях естественно называть *смешанной* задачей.

Первая задача такого рода была поставлена и исследована Трикоми [1—6] для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{4.2}$$

Некоторые обобщения результатов Трикоми на случай уравнения

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{4.3}$$

принадлежат Геллерстедту [1], [2], [3].

М. А. Лаврентьев предложил более простую модель уравнений смешанного типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{4.4}$$

Как будет видно из изложенного в дальнейшем, уравнения Трикоми и Лаврентьева, в смысле постановки смешанных задач, принципиально не отличаются друг от друга, в то время как исследования этих задач в случае уравнения Лаврентьева проводятся значительно проще.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

Пусть D — односвязная конечная смешанная область плоскости переменных x, y, ограниченная простой дугой Жордана σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками $AC: x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0$ и $BC: x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$ уравнения (4.2) (рис. 5).

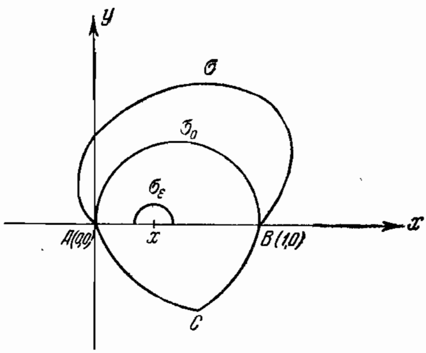

Рис. 5

Задача Трикоми (задача T) *заключается в нахождении функции* $u(x, y)$, *которая является решением уравнения* (4.2) *в области* D, *непрерывна в замкнутой области* $\bar{D}$ *и принимает наперед заданные* (непрерывные) *значения на* σ *и на* AC:

$$u = \varphi \text{ на } \sigma, \tag{4.5}$$

$$u = \psi \text{ на } AC. \tag{4.6}$$

Обозначим опять через D смешанную область, ограниченную лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ простой дугой Жордана σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и характеристиками AC: $x+y=0$ и BC: $x-y=1$ уравнения (4.4) (рис. 6).

Задача Трикоми для уравнения (4.4) ставится следующим образом: *найти непрерывную в замкнутой области* $\bar{D}$ *функцию* $u(x, y)$ *с непрерывными внутри* D *производными* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$, *удовлетворяющую уравнению* (4.4) *в области* D *при* $y \neq 0$ *и принимающую наперед заданные* (непрерывные) *значения на дуге* σ *и на одной из характеристик, например, на* AC:

$$u = \varphi \text{ на } \sigma, \tag{4.7}$$

$$u = \psi \text{ на } AC. \tag{4.8}$$

По условиям задачи T, как в случае уравнения (4.2), так и в случае уравнения (4.4), функция $\tau(x) = u(x, 0)$

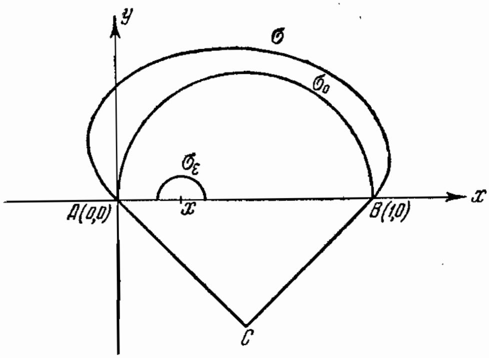

Рис. 6

должна быть непрерывной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Кроме того, функции $\nu(x) = \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}$ и $\frac{d\tau}{dx}$ должны быть непрерывными и дифференцируемыми на открытом отрезке $0 < x < 1$.

Наряду с этим допускается, что *при* $x \to 0$ *и* $x \to 1$ *выражение* $\nu(x)$ *может обращаться в бесконечность порядка меньше* $^2/_3$ (относительно x и $1 - x$) *в случае уравнения* (4.2). *В случае же уравнения* (4.4) *допускается, что при* $x \to 0$ *и* $x \to 1$ *как* $\nu(x)$, *так и* $\frac{d\tau}{dx}$ *могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.*

Эллиптическую и гиперболическую части смешанной области в дальнейшем будем обозначать через D_1 и D_2 соответственно.

Относительно функции ψ потребуем, чтобы *она вдоль всей характеристики AC обладала непрерывными производными первых трех порядков.*

Что же касается функции φ, то по условиям задачи T *она должна быть непрерывной.* Дальнейшее уточнение требований, наложенных на φ, будет дано в §§ 3, 4 настоящей главы.

§ 2. ПРИНЦИП ЭКСТРЕМУМА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ T

Задачу T для уравнений Лаврентьева и Трикоми мы будем изучать параллельно. В обоих случаях без ограничения общности можно предполагать, что $u(A) = u(B) = 0$.

Общее решение уравнения (4.4), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}_2$ с непрерывными производными до второго порядка (включительно) внутри D_2, дается известной формулой Даламбера:

$$u(x, y) = f(x+y) + f_1(x-y), \tag{4.9}$$

где $f(t)$ и $f_1(t)$ — произвольные непрерывные на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ функции, дважды непрерывно дифференцируемые при $0 < t < 1$.

Из формулы (4.9) сразу получается общее решение уравнения (4.4) в области D_2, удовлетворяющее условию (4.8);

$$u(x, y) = f(x+y) - f(0) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \; y = 0, \; 0 < x < 1 \tag{4.10}$$

или, что то же самое,

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \; 0 < x < 1. \tag{4.11}$$

Равенство (4.11) является основным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке AB, принесенным из гиперболической части D_2 смешанной области D.

Формула Дарбу, дающая решение задачи Коши для уравнения (4. 2) в гиперболической части D_2 области D, с начальными данными $u(x, y)\Big|_{AB} = \tau(x)$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Big|_{AB} = \nu(x)$, в силу § 3 главы II, имеет вид

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)\right][t(1-t)]^{-5/6}\,dt +$$

$$+\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\gamma_2 y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)\right][(t(1-t)]^{-1/6}\,dt, \quad (4.12)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)} = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot\pi}{3\Gamma^3(1/3)}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)} = \frac{\sqrt[3]{6}\;\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}. \quad (4.13)$$

[формула (4. 12) выводится точно так же, как формула (2. 47), лишь с той разницей, что на этот раз $m = 1$, переменная y заменена через $-y$, а $\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$].

Приравнивая выражение (4. 12) на характеристике AC к функции $\psi(x)$, получим

$$\gamma_1 \int_0^1 \tau(2tx)[t(1-t)]^{-5/6}\,dt - \gamma_2 (2x)^{2/3}\int_0^1 \nu(2tx)[t(1-t)]^{1/6}\,dt,$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

или

$$\gamma_1 x^{2/3}\int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{[t(x-t)]^{5/6}} - \gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{[t(x-t)]^{1/6}} = \psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (4.14)$$

Применяя известную формулу обращения

$$F(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\Phi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{F(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} = \Phi(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

из формулы (4.14) для $\tau(x)$ получим выражение

$$\tau(x)=\psi_1(x)+\gamma\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}}, \qquad 4.(15)$$

где

$$\psi_1(x)=\frac{1}{2\pi\gamma_1}x^{5/6}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\psi\left(\frac{t}{2}\right)}{t^{2/3}(x-t)^{1/6}}\,dt, \qquad (4.16)$$

$$\gamma=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(2/3)}=\frac{3^{2/3}\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}.$$

Формула (4.15) дает в случае уравнения (4.2) основное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части D_2 области D.

В предположении, что $\psi(x)=0$, формулы (4.11) и (4.15) принимают вид

$$\tau'(x)-\nu(x)=0, \qquad (4.17)$$

$$\tau(x)=\gamma\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}}. \qquad (4.18)$$

Применяя опять формулу обращения интегрального уравнения Абеля, перепишем (4.18) в виде

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}. \qquad (4.19)$$

Теперь легко доказать следующий **принцип экстремума** для задачи T: *решение $u(x, y)$ задачи T, равное нулю на характеристике AC, положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{D}_1$ принимает на дуге σ как в случае уравнения* (4.4), *так и в случае уравнения* (4.2).

В самом деле, внутри области D_1 функция $u(x, y)$, очевидно, не может достигать экстремума. Предположим, что положительный максимум в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигается во внутренней точке $P(\xi, 0)$ интервала $0<x<1$. В точке ξ, $0<\xi<1$ обязательно имеет место равенство

$$\tau'(\xi)=0. \qquad (4.20)$$

Следовательно, в случае уравнения (4. 4), в силу (4. 17), мы должны иметь

$$\nu(\xi)=0. \tag{4.21}$$

В случае же уравнения (4. 2), в силу (4. 20), равенство (4. 19) в точке ξ при $0<x_0<\xi$ можно переписать в виде

$$\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{3}}\,\nu(\xi)=\frac{2}{3}\int_0^{x_0}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(\xi-t)^{5/3}}\,dt+\frac{2}{3}\int_{x_0}^{\xi}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(\xi-t)^{5/3}}\,dt+\tau(\xi)\frac{1}{\xi^{2/3}};$$

отсюда, ввиду того что $\tau(\xi)>0$, $\tau(\xi)-\tau(t)\geqslant 0$, получим

$$\nu(\xi)>0. \tag{4.22}$$

Равенство (4. 21) и неравенство (4. 22) противоречат следующему известному факту. Пусть $u(x, y)$ — регулярное (нетривиальное) в области D^* решение уравнения

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_1\frac{\partial u}{\partial y}+c_1 u=0,\ c_1\leqslant 0,$$

с положительно определенной внутри D^* формой $a\,dy^2+2b\,dx\,dy+c\,dy^2$. Если в точке P границы Γ^* области D^* функция $u(x, y)$ принимает свое экстремальное значение, а контур Γ^* обладает тем свойством, что через точку P можно провести кружок k, лежащий в области D^*, то в указанной точке производная $\frac{\partial u}{\partial r}$ по направленному к центру кружка k радиусу r (если она существует) отлична от нуля; причем в случае максимума $\frac{\partial u}{\partial r}<0$, а в случае минимума $\frac{\partial u}{\partial r}>0$.

Это обстоятельство для гармонических функций было установлено Зарембой [1], а для более общих эллиптических уравнений — Жиро (см. Миранда [1], а также О. А. Олейник [2]).

Простое доказательство указанного выше факта опирается на существование функции Грина задачи Дирихле в случае круга. Следовательно, это доказательство годится и для уравнения (4. 1), частным случаем которого является уравнение Трикоми (4. 2).

Приведенный выше принцип экстремума имеет важное значение, во-первых, потому, что из него сразу следует единственность решения задачи T, а во-вторых, он позволяет построить альтернирующий процесс типа известного процесса Шварца для решения задачи T при довольно общих предположениях.

Принцип экстремума для задачи T в приведенной здесь форме впервые был указан и использован в случае уравнения Лаврентьева (4. 4) в работах автора [4—6]. Этот же принцип в случае уравнения Трикоми (4. 2) был найден на год позже в работе Жермена и Бадера [1] (см. также работы этих же авторов [2, 3]).

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ T МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сначала выясним вид функциональных соотношений между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, принесенных из эллиптической части D_1 смешанной области как в случае уравнения Лаврентьева, так и в случае уравнения Трикоми.

Рассмотрим фундаментальное решение $\ln|\zeta - z|$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\eta > 0$, $y > 0$, уравнения (4. 4). Обозначим через $G(x;\ \xi,\ \eta)$ решение уравнения (4. 4) в области D_1 с логарифмической особенностью в точке $\zeta = x$, $0 < x < 1$:

$$G(x;\ \xi,\ \eta) = -\ln|\zeta - x| + g(x;\ \xi,\ \eta),$$

где $g(x;\ \xi,\ \eta)$ — регулярная в области D_1 гармоническая относительно ξ, η функция, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{gathered} g(x;\ \xi,\ \eta) - \ln|\zeta - x| = 0, \quad \zeta \in \sigma, \\ \left.\frac{\partial g}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0. \end{gathered} \tag{4. 23}$$

Очевидно, что $G(x;\ \xi,\ \eta)$ является гармонической функцией Грина с логарифмической особенностью в точке $\zeta = x$ для области $D^* = D_1 + D_1^* + AB$, где D_1^* — область, расположенная симметрично D_1 относительно открытого отрезка AB действительной оси.

Предположим, что *кривая σ удовлетворяет условию Ляпунова, т. е. тангенс угла, составленного касательной σ с вы-*

бранным постоянным направлением (например, с положительным направлением оси Ox), *удовлетворяет условию Гельдера, и, кроме того, частные производные* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *непрерывны в* D_1 *всюду, кроме, быть может, точек* A *и* B, *в которых по некоторым направлениям они могут обращаться даже в бесконечность, причем так, чтобы использованные ниже интегральные тождества* (*) *и* (**) *оставались в силе.*

Соответствующие ограничения должны быть наложены, очевидно, и на функцию φ. О них речь будет идти несколько ниже в этом же параграфе.

Выделим из области D_1 точку $(x, 0)$ дугой σ_ε полуокружности $|\zeta - x| = \varepsilon$, $\eta \geqslant 0$ и к оставшейся части области D_1 применим тождество Грина

$$\int \left(G \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial G}{\partial N} \right) ds = 0, \tag{4. 24}$$

где длина дуги s отсчитывается от точки B в положительном направлении, а N — внутренняя нормаль границы (см. рис. 6).

Принимая во внимание граничное условие (4. 7), в силу (4. 23) из (4. 24) будем иметь

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial G}{\partial N} \right) ds + \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{0} \right) G \nu \, d\xi = \int\limits_\sigma \varphi \frac{\partial G}{\partial N} \, ds. \tag{*}$$

Отсюда, в пределе, при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\tau(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 [g(x; \xi, 0) - \ln |\xi - x|] \nu(\xi) \, d\xi = \varphi_*(x), \tag{4. 25}$$

где

$$\varphi_*(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_\sigma \varphi \frac{\partial G}{\partial N} \, ds. \tag{4. 26}$$

Формулы (4. 11) и (4. 25) дают основные функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в случае задачи T для уравнения (4. 4).

Когда σ совпадает с полуокружностью σ_0: $\left|\zeta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $\eta \geqslant 0$, функция $G(x;\ \xi,\ \eta)$ выражается формулой

$$G(x;\ \xi,\ \eta)=\ln\left|\frac{x+\zeta-2x\zeta}{x-\zeta}\right|,\ \zeta=\xi+i\eta$$

и соотношение (4.25) значительно упрощается:

$$\tau(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1[\ln|t-x|-\ln(t+x-2tx)]\,\nu(t)\,dt=\varphi_*(x). \quad (4.27)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция $|\zeta-x|^{1/3}$ при $\zeta=\xi+\frac{2}{3}i\eta^{3/2}$ $(\zeta\neq x,\ \eta>0)$ является решением уравнения (4.2).

Обозначим опять через $G(x;\ \xi,\ \eta)$ функцию вида

$$G(x;\ \xi,\ \eta)=|\zeta-x|^{-1/3}+g(x;\ \xi,\ \eta),$$

где $g(x;\ \xi,\ \eta)$ является регулярным относительно ξ, η решением уравнения (4.2) в области D_1, удовлетворяющим условиям:

$$\left.\begin{aligned} g&=-|\zeta-x|^{-1/3},\quad \zeta\in\sigma,\\ \left.\frac{\partial g}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}&=0. \end{aligned}\right\} \quad (4.28)$$

Доказательство существования функции $G(x;\ \xi,\ \eta)$ трудности не представляет (оно требует незначительной модификации метода § 3 главы III). В частном случае, когда σ совпадает с так называемым нормальным контуром σ_0: $\left|\zeta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, функция $G(x;\ \xi,\ \eta)$ имеет вид

$$G(x;\ \xi,\ \eta)=|\zeta-x|^{-1/3}-|\zeta+x-2\zeta x|^{-1/3}.$$

Заметим, что нормальные контуры $|\zeta-x|=\text{const}$, $\zeta=\xi+\frac{2}{3}i\eta^{3/2}$ в теории уравнения Трикоми играют ту же роль, что и полуокружности $|\zeta-x|=\text{const}$, $\zeta=\xi+i\eta$ в теории уравнения Лаврентьева.

Выделяя точку $(x,\ 0)$ из области D_1 дугой σ_ε нормального контура $|\zeta-x|=\varepsilon$, $\zeta=\xi+\frac{2}{3}i\eta^{3/2}$ (см. черт. 5) и применяя для оставшейся части области D_1 формулу Грина

$$\int \eta \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} - G \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) d\eta - \left(u \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) d\xi = 0, \qquad (**)$$

в пределе при $\varepsilon \to 0$, в силу (4.28) получим

$$\lim \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^1\right) G\nu(\xi)\, d\xi - \int\limits_\sigma u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial N} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial N}\right) ds -$$

$$- \lim \int\limits_{\sigma_\varepsilon} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial N} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial N}\right) ds = 0.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\sigma_\varepsilon} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial N} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial N}\right) ds = -\frac{1}{\gamma} \tau(x),$$

где

$$\gamma = 2^{-1/3} 3^{-2/3} \int\limits_0^\pi (\sin \vartheta)^{1/3} d\vartheta.$$

Поэтому, учитывая граничное условие (4.5), окончательно будем иметь

$$\tau(x) + \gamma \int\limits_0^1 G(x;\ \xi,\ 0)\, \nu(\xi)\, d\xi = F^*(x), \qquad (4.29)$$

где

$$F^* = \gamma \int\limits_\sigma \varphi \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial N} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial N}\right) ds. \qquad (4.30)$$

Формулы (4.15) и (4.29) составляют основные функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для задачи T в случае уравнения (4.2).

В частности, когда σ совпадает с нормальным контуром σ_0: $\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\zeta = \xi + \frac{2}{3} i\eta^{3/2}$, $\eta \geqslant 0$, вместо (4.29) получается более простое соотношение

$$\tau(x) + \gamma \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{|t-x|^{1/3}} - \frac{1}{(t+x-2tx)^{1/3}}\right] \nu(t)\, dt = F^*(x). \qquad (4.31)$$

Очевидно, что относительно x при $0 < x < 1$ выражения (4.26) и (4.30) являются аналитическими функциями.

Исключая $\tau(x)$ из (4.11) и (4.27), получим

$$\nu(x) - \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 [\ln|t-x| - \ln(t+x-2tx)]\,\nu(t)\,dt = F(x), \quad (4.32)$$

где

$$F(x) = \varphi_*'(x) - 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (4.33)$$

Предположим, что x лежит строго внутри интервала (0, 1). Очевидно, что

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln(t+x-2tx)\,\nu(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1-2t}{t+x-2tx}\,\nu(t)\,dt. \quad (4.34)$$

С другой стороны, при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\lim I_\varepsilon(x) = \lim \int_0^{x-\varepsilon} \ln(x-t)\,\nu(t)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \ln(t-x)\,\nu(t)\,dt =$$

$$= I(x) = \int_0^1 \ln|t-x|\,\nu(t)\,dt,$$

причем предел существует равномерно относительно x.

Ясно, что существует равномерный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon'(x) = \lim\,[\nu(x-\varepsilon) - \nu(x+\varepsilon)]\ln\varepsilon -$$

$$-\lim\left(\int_0^{x-\varepsilon}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x} + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\nu(t)\,dt}{t-x}\right) = -\int_0^1 \frac{\nu(t)\,dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Следовательно, в силу известной теоремы из классического анализа, имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln|t-x|\,\nu(t)\,dt = -\int_0^1 \frac{\nu(t)\,dt}{t-x}. \quad (4.35)$$

На основании (4.34) и (4.35) уравнение (4.32) принимает вид

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt = F(x). \quad (4.36)$$

Таким образом, *решение задачи T для уравнения Лаврентьева в случае, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0, редуцировано к сингулярному уравнению* (4.36).

Вернемся теперь к функциональным соотношениям (4.15) и (4.31). В результате исключения $\tau(x)$ из этих соотношений получим

$$\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}} + \int_0^1 \left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}} - \frac{1}{(t+x-2tx)^{1/3}}\right] \nu(t)\,dt = \varphi_1^*(x), \quad (4.37)$$

где

$$\varphi_1^* = \frac{1}{\gamma} F^*(x) - \frac{1}{\gamma} \psi_1(x). \quad (4.38)$$

Применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, перепишем уравнение (4.37) в виде

$$\nu(x) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 \nu(t)\,dt \left[\int_0^x \frac{d\xi}{|\xi-t|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi+t-2t\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right] = \frac{3}{2} F(x), \quad (4.39)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi_1^*(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}. \quad (4.40)$$

Когда x лежит строго внутри интервала (0, 1) второй интегральный член в левой части (4.39) в результате замены переменных интегрирования $\dfrac{x-\xi}{\xi - \dfrac{t}{2t-1}} = z^3$, $\dfrac{x-\xi}{\dfrac{t}{2t-1} - \xi} = z_1^3$ можно переписать в виде

$$\frac{-\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 \nu(t)\,dt \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi+t-2t\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{1/2} \frac{\nu(t)\,dt}{(1-2t)^{1/3}} \int_0^{\left[\frac{x(1-2t)}{t}\right]^{1/3}} \frac{dz}{1+z^3} + \right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^1 \frac{\nu(t)\,dt}{(2t-1)^{1/3}} \int_0^{\left[\frac{x(2t-1)}{t}\right]^{1/3}} \frac{dz_1}{1-z_1^3} \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \frac{\nu(t)\,dt}{t+x-2tx}. \quad (4.41)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$I_1(x)=\int_0^1 \nu(t)\,dt\int_0^x \frac{d\xi}{|\xi-t|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=\lim I_{1\varepsilon}(x)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{x-\varepsilon}\nu(t)\,dt\left[\int_0^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}+\int_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right]+\right.$$

$$\left.+\int_{x+\varepsilon}^1 \nu(t)\,dt\int_0^x \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right\}.$$

Заменой переменного интегрирования $\xi=(x-t)z+t$ легко вычисляется интеграл

$$\int_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}},\quad x>t.$$

С другой стороны, замена переменного $z^3=\frac{x-\xi}{t-\xi}$ дает

$$\int_0^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-t)^{2/3}}=-3\int_{\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}}^{\infty}\frac{dz}{1-z^3},\quad t<x,$$

$$\int_0^x \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=-3\int_{\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}}^{0}\frac{dz}{1-z^3}=-3\int_{\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}}^{\infty}\frac{dz}{1-z^3}+\frac{\pi}{\sqrt{3}},\quad t>x.$$

Следовательно,

$$I_{1\varepsilon}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{x-\varepsilon}\nu(t)\,dt+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_{x+\varepsilon}^1\nu(t)\,dt-3\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^1\right)\nu(t)\,dt\int_{\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}}^{\infty}\frac{dz}{1-z^3}.$$

Отсюда сразу следует существование равномерного предела

$$I_1'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{1\varepsilon}'=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\nu(x)+\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}. \qquad (4.42)$$

На основании (4. 41) и (4. 42) уравнение (4. 39) записывается в виде

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F(x). \qquad (4.43)$$

Сингулярное интегральное уравнение (4.43) **эквивалентно** задаче T для уравнения (4.2) в случае, когда σ совпадает с нормальным контуром σ_0.

Как уже было сказано, функции $\varphi_*(x)$ и $F^*(x)$, определенные формулами (4.26) и (4.30), аналитически зависят от x при $0 < x < 1$. Выясним поведение этих функций, когда $x \to 0$ и $x \to 1$.

Сначала рассмотрим тот случай, когда σ совпадает с контуром σ_0, а функция φ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка.

Заметим, что функция $a + bx + cy + dxy$ является решением уравнения (4.2), а функция $a + bx + cy + dxy + e(x^2 - y^2 \operatorname{sgn} y)$ удовлетворяет уравнению (4.4) при $y \neq 0$, причем она непрерывна вместе со своими производными первого порядка при переходе через прямую $y = 0$.

Учитывая это обстоятельство, без ограничения общности мы можем полагать:

$$u(A) = u(B) = u'(A) = u'(B) = 0, \qquad (4.44)$$

где производные берутся по направлению касательной контура $\sigma_0 + AC$.

В силу (4.44) функции φ и ψ можно представить в виде

$$\varphi = \eta^2 \varphi_1(\zeta), \quad \psi = \eta^2 \psi_2(\zeta); \qquad (4.45)$$

здесь ξ и η — координаты точки ζ контура σ_0.

В случае уравнения (4.4) имеем

$$\left.\frac{\partial G}{\partial N}\right|_{\sigma_0} = \frac{2x(1-x)}{x^2 - (2x-1)\cos^2\frac{\vartheta}{2}}, \quad 2\zeta - 1 = e^{i\vartheta}.$$

В соответствии с этим, в силу (4.45), выражение $\varphi_*(x)$ принимает вид

$$\varphi_*(x) = \frac{x(1-x)}{\pi} \int_0^1 \varphi_1(t) \frac{t^{1/2}(1-t)^{1/2}}{x^2 - (2x-1)t} dt, \quad t = \cos^2\frac{\vartheta}{2}. \qquad (4.46)$$

Учитывая (4.45), из формул (4.16) и (4.30) аналогично получим

$$
\left.\begin{aligned}
F^*(x) &= \frac{2\gamma}{\sqrt[8]{9}}\, x(1-x)\int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(t)\, t^{1/3}(1-t)^{1/3} dt}{[x^2-(2x-1)t]^{7/6}}, \\
\psi_1(x) &= \frac{1}{2\pi\gamma_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} x^{5/6}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{t^{2/3}\psi_2(t)\, dt}{(x-t)^{1/6}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.16$_1$}
$$

Функция $\varphi_*(x)$ одинаково ведет себя при $x\to 0$ и $x\to 1$. Поэтому мы ограничиваемся выяснением ее поведения при $x\to 0$. Для производной $\varphi'_*(x)$ из (4.46) имеем выражение

$$
\varphi'_*(x) = \frac{1-2x}{\pi x^2}\varphi_1(t_1)\int\limits_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-1} dt -
$$

$$
-\frac{2(1-x)}{\pi x^2}\varphi_1(t_2)\int\limits_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-2} dt +
$$

$$
+\frac{2(1-x)}{\pi x^3}\varphi_1(t_3)\int\limits_0^1 t^{2/3}(1-t)^{1/2}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-2} dt. \tag{4.47}
$$

Интегралы в правой части (4.47) выражаются через гипергеометрические функции

$$
\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F\left(a,\ b,\ c,\ \frac{2x-1}{x^2}\right) =
$$

$$
= \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-a} dt.
$$

Принимая во внимание известное тождество

$$
F\left(a,\ b,\ c, \frac{2x-1}{x^2}\right) =
$$

$$
= \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2a}\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)} F\left[a,\ c-b,\ 1+a-b,\ \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right] +
$$

$$
+ \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2b}\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)} F\left[b,\ c-a,\ 1-a+b, \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right],
$$

заключаем, что *при* $x \to 0$ *выражение* $\varphi_*'(x)$ *стремится к конечному пределу*. Аналогичным рассуждением легко убеждаемся в том, что $\varphi_*''(x)$ *обращается в бесконечность порядка не выше единицы. То же самое можно сказать о поведении* $\varphi_*'(x)$ *и* $\varphi_*''(x)$ *при* $x \to 1$.

Принимая во внимание формулы (4.16_1) и (4.30), аналогично заключаем, что *функция* $F^*(x)+\psi_1(x)$ *имеет нуль первого порядка в точке* $x=0$, *непрерывна вместе с производной первого порядка при* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *а ее вторая производная может обращаться в бесконечность порядка не выше* $^2/_3$ *в точках* $x=0$ *и* $x=1$.

Таким образом, при принятых выше предположениях мы можем сделать следующие заключения: 1) *правая часть интегрального уравнения* (4.36) *непрерывна при* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *дважды непрерывно дифференцируема при* $0 < x < 1$, *а ее производная первого порядка может обращаться в бесконечность порядка не выше единицы в точках* $x=0$ *и* $x=1$; 2) *правая часть интегрального уравнения* (4.43) *непрерывна при* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *и имеет производные первых двух порядков при* $0 < x < 1$, *причем она сама имеет нуль порядка* $^1/_3$ *в точке* $x=0$, *а ее первая производная может обращаться в бесконечность порядка не выше* $^2/_3$ *в точке* $x=0$ *и порядка не выше* $^1/_3$ *в точке* $x=1$.

Вернемся опять к функциональным соотношениям (4.11) и (4.25). В результате исключения $\tau(x)$ из этих соотношений получим интегральное уравнение для определения функции $\nu(x)$:

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt+\int_0^1 K(x,t)\,\nu(t)\,dt=F(x), \tag{4.48}$$

где

$$K(x,t)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x;\,t,\,0)-\ln(t+x-2tx)\right]. \tag{4.49}$$

При $0<\frac{x}{t}<1$ функция $K(x,\,t)$ непрерывно дифференцируема, но на концах этих интервалов она может обращаться в бесконечность. В частности, когда σ оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' полуокружности σ_0, функция $K(x, t)$ заведомо не будет иметь особенностей на концах указанных интервалов. В этом случае о поведении функции $F(x)$ можно сказать то же, что и о правой части уравнения (4.36).

Исключая $\tau(x)$ из (4.15) и (4.29) и повторяя преобразования, проведенные при выводе интегрального уравнения (4.43), получим

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right) \nu(t)\, dt + \\ + \int_0^1 K(x, t)\, \nu(t)\, dt = F(x), \tag{4.50}$$

где $K(x, t)$ выражается через $g(x;\ t,\ 0)$.

Относительно ядра $K(x, t)$ в уравнении (4.50) можно сказать то же, что и в случае уравнения (4.48). Когда σ оканчивается сколь угодно малыми дугами AA' и BB' нормального контура σ_0, функция $K(x, t)$ непрерывно дифференцируема при $0 \leqslant x \leqslant 1$, а правые части уравнений (4.43) и (4.50) ведут себя одинаково.

Если удастся определить $\nu(x)$ из полученных выше интегральных уравнений, мы получим значения функции $\tau(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, *решением задачи Дирихле в области D_1 и решением задачи Коши с начальными данными*

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x)$$

задача T будет полностью решена.

Замечание. Непрерывность производной третьего порядка от функции $\psi(x)$ мы потребовали с целью обеспечения существования производной второго порядка от функции $F(x)$ при $0 < x < 1$. Но ниже мы будем пользоваться лишь тем, что $F'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, а это всегда будет иметь место, если $\psi''(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В ПРЕДЫДУЩЕМ ПАРАГРАФЕ

Нетрудно получить решения нужного нам вида сингулярных интегральных уравнений (4.36) и (4.43), т. е. такие решения этих уравнений, которые *дифференцируемы при* $0<x<1$, *а при* $x=0$, $x=1$ *допускают особенности порядка ниже единицы в случае уравнения* (4.36) *и порядка ниже* $^2/_3$ *в случае уравнения* (4.43) (см. Трикоми [1]).

С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу из теории голоморфных функций: *требуется определить голоморфную в полукруге* $|2z-1|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ *функцию* $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, *непрерывную вплоть до границы и удовлетворяющую условиям*:

$$\left.\begin{aligned} u|_{\sigma_0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=f(x), \quad y=0, \quad 0<x<1,\\ v(0, 0)=0, \end{aligned}\right\} \tag{4.51}$$

где σ_0 — *полуокружность* $|2z-1|=1$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, λ — *действительная постоянная, а* $f(x)$ — *заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Предполагается, что* $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ *непрерывны внутри полукруга вплоть до открытого отрезка* $0<x<1$, $y=0$; *а в точках* $z=0$, $z=1$ *они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.*

Единственность решения этой задачи очевидна.

Поступая точно так же, как при выводе соотношения (4.27), в силу первого из условий (4.51), получим

$$u(x, 0)-\frac{1}{\pi}\int_0^1[\ln|t-x|-\ln(t+x-2tx)]\left.\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}dt=0. \tag{4.52}$$

В результате исключения $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}$ из (4.52) и второго из условий (4.51), будем иметь

$$\lambda\nu_1(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu_1(t)\,dt=-f(x), \tag{4.53}$$

где

$$\nu_1(x)=\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad 0<x<1.$$

Таким образом, поставленная выше задача приведена к эквивалентному интегральному уравнению (4.53), решение которого $\nu_1(x)$ ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера внутри интервала $(0, 1)$ и допускающих особенность порядка ниже единицы на концах этого интервала. Имея решение уравнения (4.53), решение граничной задачи (4.51) известным образом можно редуцировать к задаче Дирихле. Однако мы поступим иначе: непосредственно построим решение указанной выше задачи и используем его для получения решения интегрального уравнения (4.53).

В силу первого из условий (4.51) заключаем, что функция $F(z)$ аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{(2x-1)^2} f\left(\frac{x}{2x-1}\right), \tag{4.54}$$

$$-\infty<x<0, \quad 1<x<\infty, \quad y=0$$

и, кроме того, на бесконечности $F'(z)$ имеет нуль второго порядка.

Обозначим через $\Phi(z)$ однозначную голоморфную в верхней полуплоскости функцию

$$z^{\theta}(1-z)^{1-\theta}e^{i\vartheta}F'(z),$$

где $\vartheta=\operatorname{arctg}(-\lambda)$, $\quad -\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, $\quad \theta=\frac{-2\vartheta}{\pi}$ при $\lambda>0$,

$\theta=\frac{\pi-2\vartheta}{\pi}$ при $\lambda<0$, а под $z^{\theta}(1-z)^{1-\theta}$ понимается однозначная в разрезанной вдоль $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ плоскости ветвь этой функции, положительная при $0<z<1$. Очевидно, что $\Phi(\infty)=0$.

В силу (4.54) и второго из условий (4.51) имеем:

$$\operatorname{Re}\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{(-x)^{\theta}(1-x))^{1-\theta}}{\sqrt{1+\lambda^2}}f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)\dfrac{\operatorname{sgn}\lambda}{(2x-1)^2}, & -\infty<x<0,\\ x^{\theta}(1-x)^{1-\theta}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+\lambda^2}}, & 0<x<1,\\ -\dfrac{x^{\theta}(x-1)^{1-\theta}}{\sqrt{1-\lambda^2}}f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)\dfrac{\operatorname{sgn}\lambda}{(2x-1)^2}, & 1<x<\infty.\end{cases} \tag{4.55}$$

Хорошо известно (см., например, Н. И. Мусхелишвили [1]), что функция $F_1(z)=u_1(x, y)+iv_1(x, y)$, голоморфная в верхней полуплоскости и стремящаяся к конечному пределу при $z\to\infty$, выражается с помощью граничных значений ее действительной части $u_1(t)$ на действительной оси по формуле Шварца:

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u_1(t)\,dt}{t-z}+ib, \tag{4.56}$$

где $b=\operatorname{Im}F(\infty)$, причем предполагается, что функция $u_1(t)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование несобственного интеграла в правой части (4.56).

В силу формулы Шварца (4.56) мы можем написать;

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\Phi(t)\,dt}{t-z}$$

или, учитывая (4.55):

$$F'(z)=\frac{e^{-i\vartheta}}{\pi i\sqrt{1+\lambda^2}}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{z}\right)^{\theta}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{1-\theta}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{\operatorname{sgn}\lambda}{t+z-2tz}\right)f(t)\,dt. \tag{4.57}$$

Отсюда, после интегрирования, получим

$$F(z)=\frac{e^{-i\vartheta}}{\pi i\sqrt{1+\lambda^2}}\int\limits_0^1\left(\frac{z}{t}\right)^{1-\theta}\left(\frac{1-z}{1-t}\right)^{\theta}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{\operatorname{sgn}\lambda}{t+z-2tz}\right)f_1(t)\,dt, \tag{4.58}$$

$$f_1 = \int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Применяя известную формулу (см. Н. И. Мусхелишвили [1]) для предельных значений интеграла типа Коши при $z \to x$, $0 < x < 1$ и принимая во внимание тождество

$$\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} = \frac{t}{x}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right),$$

из формулы (4.57) получим решение (*единственное в классе искомых решений*) интегрального уравнения (4.53):

$$\nu_1(x) = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2} f(x) +$$

$$+ \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} \int\limits_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1-\theta} \left(\frac{1}{t-x}\,\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) f(t)\,dt \qquad (4.59)$$

при $\lambda > 0$ и

$$\nu_1(x) = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2} f(x) +$$

$$+ \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} \int\limits_0^1 \left[\frac{t(1-x)}{x(1-t)}\right]^{\theta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) f(t)\,dt$$

при $\lambda < 0$.

В частности, когда $\lambda = 1$, $f(x) = -F(x)$ и $\nu_1(x) = \nu(x)$, уравнение (4.53) совпадает с уравнением (4.36), формула обращения которого получается из (4.59) (см. А. В. Бицадзе [4—7]:

$$\nu(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) F(t)\,dt. \qquad (4.60)$$

Если же $\lambda = \sqrt{3}$, $\nu_1 = x^{-1/3}\nu(x)$, $f(x) = -x^{-1/3}F(x)$, то уравнение (4.53) совпадает с уравнением (4.43), решение которого получается опять из формулы (4. 59) (см. Трикоми [1] и С. Г. Михлин [2]):

$$\nu(x)=\frac{3}{4}\left\{F(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{t(1-x)}{x(1-t)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)F(t)\,dt\right\}. \tag{4.61}$$

Применяя формулы обращения (4. 60) и (4. 61), мы можем интегральные уравнения (4. 48) и (4. 50) переписать в виде

$$\nu(x)+\int_0^1 K_1(x, t)\,\nu(t)\,dt=F_1(x). \tag{4. 62}$$

Когда σ оканчивается сколь угодно малыми дужками AA' и BB' кривой σ_0, ядро $K_1(x, t)$ интегрального уравнения (4. 62) может иметь лишь неподвижные особенности при $x=0$, $t=0$, $x=1$, $t=1$ интегрируемого порядка. Следовательно, в этом случае задача T, как для уравнения (4. 4), так и для уравнения (4. 2), приводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения этой задачи.

Если же дуга σ не удовлетворяет приведенным выше требованиям, то ядро $K(x, t)$ в уравнениях (4. 48) и (4. 50) при $x=0$, $t=0$, $x=1$, $t=1$, вообще, само может иметь особенность в зависимости от углов, составленных σ с осью Ox в точках A и B. Поэтому, интегральное уравнение (4. 62) в этом случае нуждается в дополнительном исследовании.

Функции $\nu(x)$, *являющиеся решениями интегральных уравнений* (4. 36) *и* (4. 43), *действительно удовлетворяют всем требованиям, предъявленным* $\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}$ *в* § 1 *настоящей главы. В частности, дифференцируемость* $\nu(x)$ *при* $0<x<1$ *проверяется интегрированием по частям в формулах* (4. 60) *и* (4. 61). *Установленные в предыдущем параграфе свойства функций* $F(x)$, *в свою очередь, вполне обеспечивают возможность проведения этой процедуры. Из этих же формул* *следует, что* $\nu(x)$ *при* $x=0$ *особенности не имеет, в то время как при* $x=1$ *она действительно может обращаться в бесконечность порядка* $^1/_2$ *и* $^1/_3$ *соответственно.*

§ 5. ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ T

В этом параграфе в основном речь будет идти о задаче T для уравнения (4.4).

Предположим сначала, что *кривая* σ *удовлетворяет условию Ляпунова, а частные производные* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *искомого решения* $u(x, y)$ *задачи* T *непрерывны в области* D *вплоть до открытой дуги* σ, *а в точках* A *и* B *они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.*

В этих предположениях из (4.10) после интегрирования получим

$$u(x, 0)+v(x, 0)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4.63}$$

где $v(x, y)$ — гармоническая в области D_1 функция, сопряженная с функцией $u(x, y)$.

Если нам удастся найти решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ задачи T, удовлетворяющие соответственно условиям:

$$u_1\big|_\sigma=\varphi, \quad u_1\big|_{AC}=0, \tag{4.64}$$

$$u_2\big|_\sigma=0, \quad u_2\big|_{AC}=\psi, \tag{4.65}$$

то искомое решение задачи T, удовлетворяющее условиям (4.7) и (4.8), получится в виде суммы

$$u(x, y)=u_1(x, y)+u_2(x, y).$$

Обозначим через $F_1(z)$ голоморфную в области D_1 функцию $u_1(x, y)+iv_1(x, y)$, удовлетворяющую условию $F_1(0)=0$. В силу второго из условий (4.64), согласно с (4.63), имеем: $\operatorname{Re}(1-i)F_1(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Следовательно, функция $F_1(z)$ аналитически продолжается через отрезок AB из области D_1 в симметрическую с ней относительно AB область D_1^*, причем

$$F_1(z)=\begin{cases} u_1(x, y)+iv_1(x, y), & y\geqslant 0,\\ -v_1(x, -y)-iu_1(x, -y), & y\leqslant 0.\end{cases} \tag{4.66}$$

Совокупность областей D_1 и D_1^* вместе с открытым отрезком AB обозначим через D^*.

В силу первого из условий (4.64), согласно с (4.66), получим граничные условия для функции $F_1(z)$:

$$\operatorname{Re} F_1(t)\big|_{\sigma} = \varphi(t), \quad \operatorname{Im} F_1(t)\big|_{\bar\sigma} = -\varphi(\bar t), \tag{4.67}$$

где $\bar\sigma$ — зеркальное отображение σ относительно действительной оси.

Таким образом, *для нахождения гармонической в области* D_1 *функции* $u_1(x, y)$ *нам достаточно найти голоморфную в области* D^* *функцию* $F_1(z)$, *непрерывную в замкнутой области* $\bar D^*$ *и удовлетворяющую граничным условиям* (4.67), *причем*

$$F_1(0) = 0. \tag{4.68}$$

Так как D^* симметрична относительно действительной оси и содержит ее отрезок AB, то эту область мы можем конформно отобразить на круг $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ так, чтобы σ была во взаимно однозначном и непрерывном соответствии с верхней полуокружностью σ_0, а $\bar\sigma$ — с нижней полуокружностью $\bar\sigma_0$ этого круга. Поэтому мы с самого же начала можем предполагать, что σ совпадает с полуокружностью σ_0.

С целью нахождения голоморфной в круге $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ функции $F_1(z)$, удовлетворяющей условиям (4.67) и (4.68), введем новую голоморфную функцию

$$\Phi_1(z) = e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, F_1(z),$$

где под радикалом понимается та ветвь этой функции, для которой $\sqrt{\frac{z}{1-z}} = i + \ldots$ (при больших $|z|$).

Для функции $\Phi_1(z)$ имеем граничные условия

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}\Phi_1\big|_{\sigma_0} &= e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, \varphi(t), \\ \operatorname{Re}\Phi_1\big|_{\bar\sigma_0} &= e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\frac{t}{2t-1}}{1 - \frac{t}{2t-1}}}\, \varphi\left(\frac{t}{2t-1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.69}$$

Но голоморфная в круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ функция $\Phi_1(z)$, удовлетворяющая условию $\Phi_1(0)=0$, однозначно определяется с помощью граничных значений ее действительной части по формуле Шварца:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0+\bar{\sigma}_0}\frac{z}{t}\,\frac{\operatorname{Re}\Phi(t)\,dt}{t-z}. \tag{4.70}$$

Учитывая (4.69), мы из формулы (4.70), после простой замены переменного интегрирования, получим

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Действительная часть функции $F_1(z)$ дает искомую функцию $u_1(x, y)$ в области D_1. В области же D_2 для функции $u_1(x, y)$ имеем выражение

$$u_1(x, y)=u_1(x+y, +0). \tag{4.71}$$

Из формулы (4.71) ясно, что при $0<x+y<1$ функция $u_1(x, y)$ дифференцируема сколько угодно раз.

Повторяя только что проведенное рассуждение, легко можно убедиться в том, что для решения $u_1(x, y)$ задачи T с нулевыми данными на характеристике AC, в полукруге k: $|t-\xi|<\varepsilon$, $\operatorname{Im} t\geqslant 0$, $0<\xi<1$, имеет место представление

$$u_1(x, y)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\,\frac{u(t)\,dt}{t-z}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\bar{C}_k}\frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\,\frac{u(\bar{t})\,dt}{t-z}\right\}$$

где C_k и $\bar{C}_k$ — верхняя и нижняя полуокружность круга k.

Из этой формулы получается своеобразная формула среднего значения:

$$u_1(\xi, 0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\,u(\vartheta)\,d\vartheta, \quad t-\xi=\varepsilon e^{i\vartheta},$$

откуда, в свою очередь, сразу следует уже доказанный в § 2 принцип экстремума.

Заметим, что *без ограничения общности можно было полагать* $u|_\sigma = 0$.

В самом деле, обозначим через $u_0(x, y)$ гармоническую в области D_1 функцию, удовлетворяющую условиям:

$$u_0|_\sigma = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{4.72}$$

В силу второго из условий (4.72) функция $u_0(x, y)$ гармонически продолжается через отрезок AB в область D_1^*, причем, когда $z = x + iy \in D_1^*$, то $u_0(x, y) = u_0(x, -y)$. Следовательно, $u_0(x, y)$ получается в результате решения задачи Дирихле в области D^*. Нас интересуют значения гармонической функции $u_0(x, y)$ только в области D_1. Пусть $u_0(x, +0) = \tau_0(x)$. Очевидно, что функция $w(x, y)$, которая совпадает с $u_0(x, y)$ в области D_1, а в области D_2 равна $\frac{1}{2}[\tau_0(x+y) + \tau_0(x-y)]$, является решением задачи T, удовлетворяющим условиям:

$$w|_\sigma = \varphi, \quad w|_{AC} = \frac{1}{2}[\tau_0(0) + \tau_0(2x)].$$

Таким образом, если $u(x, y)$ является решением задачи T, удовлетворяющим условиям (4.7) и (4.8), то разность $u(x, y) - w(x, y) = u_2(x, y)$ будет решением задачи T, удовлетворяющим условиям:

$$u_2|_\sigma = 0, \quad u_2|_{AC} = \psi(x) - \frac{1}{2}\left[\tau_0(0) + \tau_0(2x)\right] \equiv \psi_1(x).$$

Итак, в силу (4.10), имеем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad y = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Обозначим через $F_2(z)$ голоморфную в области D_1 функцию $u_2(x, y) + iv_2(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} F_2(z)|_\sigma = 0, \quad \operatorname{Re}(1-i)F_2'(z) = 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \\ \operatorname{Im} F_2(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.73}$$

Задача нахождения голоморфной в области D_1 функции $F_2(z)$, удовлетворяющей условиям (4.73), конформным отображением редуцируется к случаю, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0. Но в этом случае выражение для $F_2(z)$ непосредственно получается из формулы (4.58) при $\lambda = 1$ и $f_1 = 2\psi\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$F_2(z) = \frac{2}{\pi(1+i)} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right) \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt. \quad (4.74)$$

Выделяя из (4.74) действительную часть, получим значения искомого решения $u_2(x, y)$ задачи T в области D_1. Значение же $u_2(x, y)$ в области D_2 дается формулой

$$u_2(x, y) = u_2(x+y, +0) - \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (4.75)$$

Из формул (4.74) и (4.75) видно, что порядок гладкости $u_2(x, y)$ в области D_2 зависит от порядка гладкости функции $\psi(x)$.

Решение задачи T для уравнения (4.4), при требовании дифференцируемости функции φ, можно прямо редуцировать к задаче Дирихле (см. М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе [1]).

В самом деле, для отыскания искомого решения $u(x, y)$ задачи T в области D_1 достаточно найти гармоническую в области D_1 функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую граничным условиям (4.5) и (4.10). Воспользуемся конформным отображением $z = f(z_1)$, $z_1 = x_1 + iy_1$ области D_1 на сектор $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$, переводящим дугу σ в луч $\arg z_1 = 0$, отрезок AB — в луч $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ и точки A и B — в ∞ и 0. При этом касательная производная $u(x, y)$ на σ перейдет в производную по направлению отрицательной оси Ox_1. Следовательно, для гармонической функции $u[f(z_1)] = u_1(x_1, y_1)$, в которую преобразуется функция $u(x, y)$, в силу (4.5) и (4.10) нам будут известны значения производной $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ на границе сектора $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$, а это и есть задача Дирихле для гармонической функции $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$.

На основании доказанного в § 2 принципа экстремума мы можем установить существование решения задачи T без ограничений, сделанных в предыдущем параграфе и в начале настоящего параграфа. А именно, мы докажем *существование решения задачи T в предположениях, что σ является гладкой дугой Жордана, а заданная на ней функция φ лишь непрерывна.*

Обозначим через σ_1 гладкую дугу Жордана с концами в точках A и B, удовлетворяющую условию Ляпунова и целиком лежащую внутри эллиптической части D_1 области D. Пусть Δ — смешанная область, ограниченная дугой σ_1 и характеристиками AC и BC уравнения (4.4). Будем считать (а это не ограничивает общности), что дуги σ_1 и σ вблизи точек A и B не имеют общих касательных.

Построим две последовательности функций

$$u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y), \ldots \tag{4.76}$$

и

$$v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y), \ldots \tag{4.77}$$

со следующими свойствами. $u_1(x, y)$ является решением задачи T в области Δ:

$$u_1|_{\sigma_1} = 0, \quad u_1|_{AC} = \psi(x). \tag{4.78$_1$}$$

Функция $v_1(x, y)$ гармонична в области D_1 и удовлетворяет условиям:

$$v_1|_{\sigma} = \varphi, \ v_1 = u_1 \text{ на } AB. \tag{4.79$_1$}$$

Функции $u_n(x, y)$, $n = 2, 3, \ldots$, являются решениями задачи T в области Δ:

$$u_n = v_{n-1} \text{ на } \sigma_1, \ u_n = \psi(x) \text{ на } AC, \tag{4.78$_n$}$$

а $v_n(x, y)$, $n = 2, 3, \ldots$ — гармонические в D_1 функции, удовлетворяющие условиям:

$$v_n|_{\sigma} = \varphi, \ v_n = u_n \text{ на } AB. \tag{4.79$_n$}$$

Кроме того, предположим, что $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в замкнутой области $\bar{\Delta}$ всюду, кроме, быть может, точек A и B (вблизи которых, как об этом уже было сказано при постановке задачи T, для $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ допускается особенность порядка ниже единицы).

Функции u_n и v_n мы умеем строить.

Обозначим через N наибольшее среди $\max\limits_{(x, y) \in \Delta} |u_1(x, y)|$ и $\max\limits_{(x, y) \in D} |v_1(x, y)|$. Из условий (4.78_1) и (4.78_2) заключаем, что

$$|u_2(x, y) - u_1(x, y)| = |v_1(x, y)| \leqslant N \text{ на } \sigma_1 \quad (4.80)$$

Но, с другой стороны, согласно (4.78_1) и (4.78_2), имеем

$$u_2 - u_1 = 0 \quad \text{на} \quad AC.$$

Следовательно, для разности $u_2(x, y) - u_1(x, y)$ имеет место принцип экстремума, в силу которого, согласно (4.80), получается оценка

$$|u_2(x, y) - u_1(x, y)| \leqslant N, \quad (x, y) \in \Delta.$$

В силу (4.79_1) и (4.79_2) имеем

$$v_2 - v_1 = 0 \text{ на } \sigma, \; v_2 - v_1 = u_2 - u_1 \text{ на } AB.$$

Отсюда, на основании известных свойств гармонических функций, имеем

$$|v_2 - v_1| \leqslant Nq, \; 0 < q < 1, \text{ на } \sigma_1.$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant Nq^{n-2} \text{ на } \sigma_1 \text{ и на } AB, \quad (4.81)$$

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant Nq^{n-2} \text{ на } AB, \; |v_n - v_{n-1}| \leqslant Nq^{n-1} \text{ на } \sigma_1. \quad (4.82)$$

На основании (4.81) и (4.82) заключаем, что ряды

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots, \quad (4.83)$$

$$v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots \quad (4.84)$$

абсолютно и равномерно сходятся к гармоническим функциям $u(x, y)$ и $v(x, y)$ соответственно в эллиптических частях областей Δ и D.

Так как $u_n = v_{n-1}$ на σ_1 и $u_n = v_n$ на AB, то отсюда заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x, y) = u(x, y) = v(x, y)$ в эллиптической части области Δ. Следовательно, $v(x, y)$ является аналитическим продолжением $u(x, y)$ из эллиптической части области Δ в эллиптическую часть области D, причем $v(x, y)=\varphi$ на σ.

Ввиду того что $u_n(x, y)-u_{n-1}(x, y)=0$ на AC, в гиперболической части области Δ имеем

$$u_n(x, y)-u_{n-1}(x, y)=u_n(x+y, +0)-u_{n-1}(x, y, +0).$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (4.83) и в гиперболической части области Δ. Так как $u_n(x, y)=\psi(x)$ на AC, то $u(x, y)=\lim u_n(x, y)=\psi(x)$ на AC.

Рассмотрим теперь функцию $u_n^*(x, y)$, гармонически сопряженную с $u_n(x, y)$ в эллиптической части области Δ, причем $u_n^*(0, 0)=0$.

Из равенства $u_n(x, y)-u_{n-1}(x, y)=0$ на AC заключаем:

$u_n(x, 0)-u_{n-1}(x, 0)+u_n^*(x, 0)-u_{n-1}^*(x, 0)=0, \ 0<x<1$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что аналитическим продолжением $u_n(x, y)-u_{n-1}(x, y)$ в области, симметричной эллиптической части области Δ относительно действительной оси, является функция $-u_n^*(x, -y)+u_{n-1}^*(x, -y)$. На основании этого заключаем, что область сходимости ряда $u_2-u_1+(u_3-u_2)+\ldots$ расширяется из эллиптической части области Δ ниже AB. Поэтому существуют производные

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=+0}=\nu(x)=\lim_{n\to\infty}\nu_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)_{y=+0}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=+0}=\tau'(x)=\lim_{n\to\infty}\tau_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{y=+0}.$$

Но в гиперболической части области Δ имеем

$$u_n(x, y)=\frac{1}{2}\tau_n(x+y)+\frac{1}{2}\tau_n(x-y)-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu_n(t)\,dt, \qquad (4.85)$$

где

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)_{y=+0}=\nu_n(x), \quad \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{y=+0}=\tau_n'(x). \qquad (4.86)$$

Предельным переходом из (4.85) и (4.86) получим

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\tau(x+y)+\frac{1}{2}\tau(x-y)-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu(t)\,dt \qquad (4.87)$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=-0}=\tau'(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=-0}=\nu(x).$$

Таким образом, функция $u(x, y)$, которая является суммой ряда (4.83) в эллиптической части области D, а в гиперболической части этой области представлена формулой (4.87), является искомым решением задачи T.

Приведенный выше альтернирующий метод решения задачи T содержится в диссертационной работе автора [5], [6], которая была защищена весной 1951 года. Этот метод без всякого изменения применим для построения решения задачи T и в случае уравнения Трикоми (4.2) (см. Жермен и Бадер [3]).

Разработка конструктивных способов построения приближенных решений задачи T имеет важное значение.

Приближенное решение задачи T, как в случае уравнения (4.4), так и в случае уравнения (4.2), может быть получено методом конечных разностей (см., например, работы З. И. Халилова [1], В. Г. Карманова [1], [2], О. А. Ладыженской [1] и А. Г. Филиппова [1]), но на этом мы здесь останавливаться не будем.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ И ОБОБЩЕНИЯ

1. Предположим, что эллиптическая часть D_1 смешанной области D совпадает с верхней полуполосой, ограниченной прямыми $x=0$ и $x=1$, и ищется решение $u(x, y)$ задачи T для уравнения (4.4) с нулевыми условиями на эллиптической части границы области D, стремящееся к нулю при $y\to\infty$, $0\leqslant x\leqslant 1$ и принимающее заданные значения $\psi(x)$ на характеристике AC (см. Г. В. Руднев [1]).

В этом случае, в силу (4.63), построение решения задачи T элементарным конформным отображением приводится к задаче определения голоморфной в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ функции $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, стремящейся к конечному пределу при $z\to\infty$, непрерывной вплоть до границы и удовлетворяющей условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0)=0, \ -\infty<x\leqslant 0, \ 1\leqslant x<\infty, \\ u(x, 0)+v(x, 0)=\varphi(x), \ 0\leqslant x\leqslant 1, \ \varphi(0)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.88)$$

В силу (4.88), для функции

$$\Phi(z) = \frac{(1-i)F(z)}{\sqrt[4]{z^3(1-z)}},$$

где под $\sqrt[4]{z^3(1-z)}$ понимается однозначная в разрезанной вдоль $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ плоскости ветвь этой функции, положительная при $0<z<1$, имеем граничные условия:

$$\operatorname{Re}\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}, & 0<x<1, \\ 0, & -\infty<x<0,\ 1<x<\infty, \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\Phi(\infty) = 0.$$

Пользуясь формулой (4.56) для определения функции $F(z)$, получим (см. А. В. Бицадзе [7]):

$$F(z) = \frac{1}{\pi i(1-i)} \int_0^1 \sqrt[4]{\frac{z^3(1-z)}{t^3(1-t)}} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}.$$

Дальнейшие вычисления для получения явного выражения искомого решения трудности не представляют.

2. Пусть D смешанная область, ограниченная линией σ и характеристиками AC и BC уравнения (4.4). Обозначим через $E_k(a_k, 0)$, $k=1, \ldots, n$, $0<a_1<a_2<\ldots<a_n<1$ — заданные точки отрезка AB. Очевидно, что точки $A_k\left(\frac{1}{2}a_k, -\frac{1}{2}a_k\right)$, $B_k\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a_k-\frac{1}{2}\right)$, $k=0, \ldots, n+1$ $(a_0=0,\ a_{n+1}=1)$ лежат на характеристиках AC и BC соответственно (см. рис. 7).

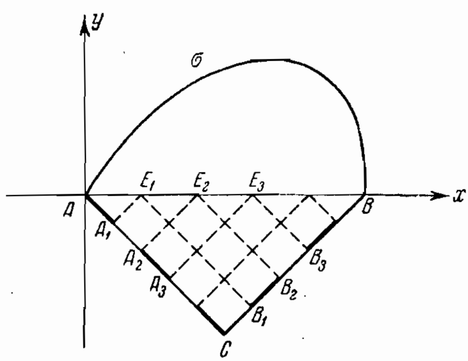

Рис. 7

Задача T_1. *Требуется найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям*: 1) $u(x, y)$ *является решением уравнения* (4.4) *в области* D *всюду, кроме точек отрезка* AB

действительной оси и характеристик E_kA_k, E_kB_k; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\bar{D}$, *а частные производные* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *непрерывно склеиваются по всем точкам отрезка* AB, *кроме, быть может, точек* A, E_1, ..., E_n, B, *в которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;* 3) *принимает заданные значения*

$$u = \varphi \quad \text{на } \sigma, \tag{4.89}$$

$$u = \psi_k \quad \text{на } A_kA_{k+1} \text{ при четных } k, \tag{4.90}$$

$$u = \psi_k \quad \text{на } B_kB_{k+1} \text{ при нечетных } k, \tag{4.91}$$

где φ и ψ_k $(k = 0, \ldots, n)$ — заданные функции.

Заметим, что при $n = 0$ условия (4.91) отпадают, а из (4.90) остается лишь одно условие: $u = \psi_0(x)$ на AC. Следовательно, задача T_1 является непосредственным обобщением задачи T.

Задача типа T_1 в случае $n = 1$ впервые была поставлена и исследована в работе Геллерстедта [3] для уравнения (4.3).

При исследовании задачи T_1 по сравнению с задачей T принципиальных затруднений не возникает.

В силу (4.90) и (4.91) заключаем, что имеют место равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{d}{dx}\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right), \quad y = 0, \quad a_{2k} < x < a_{2k+1}, \tag{4.92}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{d}{dx}\psi_{2k-1}\left(\frac{1+x}{2}\right), \quad a_{2k-1} < x < a_{2k}. \tag{4.93}$$

Когда $\psi = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, мы, на основании (4.92) и (4.93), так же, как и в § 2, заключаем, что решение $u(x, y)$ задачи T_1 отличного от нуля экстремума области $\bar{D}$ не может достигать в интервалах $a_k < x < a_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ отрезка AB. Решение $u(x, y)$ не может иметь отличного от нуля экстремума и в точках $E_k(a_k, 0)$. В самом деле, вспомним следующее простое свойство решения $u(x, y)$ уравнения струны:

$$u(M_1) + u(M_3) = u(M_2) + u(M_4), \tag{4.94}$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — последовательные вершины характеристического прямоугольника.

Когда n — число четное, в силу (4.94), заключаем, что $u(a_k, 0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим теперь случай, когда n — число нечетное. В силу (4.94), на этот раз заключаем, что $u(a_1, 0) = \ldots = u(a_n, 0)$. Предположим, что в точках E_k функция $u(x, y)$ достигает отличного от нуля экстремума. Выделим одну из этих точек E_k из эллиптической части D_1 области D линией уровня Γ: $u(x, y) = \mathrm{const}$ с концами на отрезке AB и целиком лежащей в области D_1. К области, ограниченной линией Γ и отрезком действительной оси, применим формулу Грина:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int (u - \mathrm{const}) \frac{\partial u}{\partial N}\, ds,$$

где N — внутренняя нормаль. Из этой формулы, в силу равенств $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $a_{2k} < x < a_{2k+1}$, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $a_{2k-1} < x < a_{2k}$, заключаем, что $u(x, y) = \mathrm{const}$ во всей области D_1, а это исключается, если $\varphi \neq 0$.

Таким образом, решение задачи T_1 с нулевыми данными (4.90) и (4.91) достигает отличного от нуля экстремума в замкнутой области D_1 на дуге σ (принцип экстремума для задачи D_1). Из этого принципа сразу следует, что задача T_1 не может иметь более одного решения.

Переходим теперь к доказательству существования решения задачи T_1.

Предварительно заметим, что, так же как и в случае задачи T, без ограничения общности, условие (4.89) можно заменить однородным условием

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \sigma. \tag{4.95}$$

Дополнительно будем предполагать, что σ гладкая дуга, удовлетворяющая условию Ляпунова, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}_1$ всюду, кроме, быть может, точек A, E_1, ..., E_n, B.

Обозначим через $\Phi(z)$ функцию $u(x, y) + iv(x, y)$, голоморфную в области D_1 и удовлетворяющую условию $\Phi(0) = 0$.

На основании условий Коши—Римана, согласно (4.92) и (4.93), получим:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi(x)=2\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)+c_{2k},\quad a_{2k}\leqslant x\leqslant a_{2k+1},\\&\operatorname{Im}(1-i)\,\Phi(x)=-2\psi_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c_{2k-1},\quad a_{2k-1}\leqslant x\leqslant a_{2k},\end{aligned}\right\}\tag{4.96}$$

где $c_0=0$, а c_k — пока произвольные постоянные.

Таким образом, решение задачи T_1 приведено к определению голоморфной в области D_1 функции $\Phi(z)$ по граничным условиям (4.95) и (4.96). Так же как и в предыдущем параграфе, конформным отображением можно достигнуть того, чтобы σ совпало с полуокружностью σ_0.

Итак, будем предполагать, что σ совпадает с σ_0. В этом случае, в силу (4.95), заключаем, что $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость, причем:

$$\left.\begin{gathered}\operatorname{Im}(1-i)\,\Phi(x)=2\psi_{2k}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{2x-1}\right)+c_{2k},\\-\infty<x\leqslant a_{2j},\ b_{2j+1}\leqslant x<\infty,\ b_{2k+1}\leqslant x\leqslant b_{2k},\\\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi(x)=-2\psi_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{2x-1}\right)+c_{2k-1},\\b_{2k}\leqslant x\leqslant b_{2k-1},\end{gathered}\right\}\tag{4.97}$$

где предполагается, что $a_{2j}<\frac{1}{2}<a_{2j+1}$, $b_k=\frac{a_k}{2a_k-1}$ (решение, соответствующее случаям $a_{2j}=\frac{1}{2}$ или $a_{2j+1}=\frac{1}{2}$, получается из выведенной ниже формулы предельным переходом).

Функция $\Phi(z)$, удовлетворяющая условиям (4.96), (4.97), ограниченная на бесконечности и вблизи концов a_{2k}, b_{2k}, дается непосредственно (см. А. В. Бицадзе [6]):

$$(1-i)\,\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\,\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}\int\limits_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right)\left[2\psi_{2k}\left(\frac{t}{2}\right)+c_{2k}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\,\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\sum_{k=1}\int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{(2t-1)\ (t+z-2tz)}\right)\times$$

$$\times\left[2\psi_{2k-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)-c_{2k-1}\right]dt+c\,\frac{R_1(z)}{R_2(z)},\tag{4.98}$$

где c обозначает произвольную постоянную, а $R_1(z)$ и $R_2(z)$, например, при $n=2m$ даются формулами:

$$R_1(z)=\sqrt{z\prod_1^m(z-a_{2k})(z-b_{2k})},$$

$$R_2(z)=\sqrt{(z-1)\prod_1^m(z-a_{2k-1})(z-b_{2k-1})},$$

причем под $\frac{R_1(z)}{R_2(z)}$ понимается ветвь этой функции, голоморфная в разрезанной вдоль (a_{2k}, a_{2k+1}), (b_{2k}, b_{2k-1}) плоскости и принимающая значение 1 на бесконечности. В силу единственности решения задачи T_1 входящие в (4. 98) постоянные c и c_k всегда можно подобрать так, чтобы $u(x, y)$ была ограниченной и вблизи точек $z=a_{2k-1}$, $z=b_{2k-1}$.

После того как $u(x, y)$ найдена в области D_1, построение ее значения в гиперболической части области D трудности не представляет.

Так же как и в случае задачи T, принцип экстремума позволяет доказать существование решения задачи T_1 в общем случае, т. е. без дополнительных ограничений, сделанных выше относительно поведения частных производных от искомой функции в замкнутой области $\bar{D}$ и гладкости дуги σ.

3. Пусть D — двусвязная смешанная область, ограниченная простыми дугами σ_1 и σ_2, лежащими в эллиптической полуплоскости, и характеристиками AC, CB_1, BC_1 и A_1C_1 уравнения (4. 4) (см. рис. 8).

Не представляет трудности изучение следующей смешанной задачи, названной в нашей работе [6] задачей T_2. Определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ является решением уравнения (4. 4) в области D при $y\neq 0$; 2) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, а частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывно склеиваются по всем точкам открытых отрезков AB и A_1B_1, причем в точках A, B, A_1, B_1 они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 3) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{\sigma_1}=\varphi_1,\ u|_{\sigma_2}=\varphi_2,\ u|_{AC}=\psi_1,\ u|_{A_1C_1}=\psi_2,$$

где φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — заданные функции.

4. Задача T для линейного уравнения смешанного типа, с главной частью $k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, где $k(y) \gtreqless 0$ при $y \gtrless 0$, исследовалась в докторской диссертации К. И. Бабенко [1]. В частности, единственность решения этой задачи для уравнения Чаплыгина $k(y)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ была объектом исследования ряда авторов (см. Агмон, Ниренберг, Проттер [1], Проттер [2], У Син-мо, Дин Ся-си [1]).

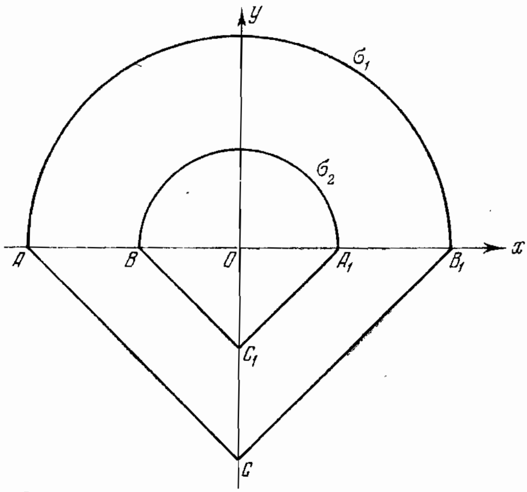

Рис. 8

Довольно подробное исследование задачи T для уравнения вида

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-cu=F(x,\ y), \quad c=\mathrm{const}>0 \tag{4.99}$$

содержится в работе Гелерстедта [1] (см. также М. Б. Капилевич [1]).

Структурные свойства решений уравнения (4.2) изучались также в работах С. Бергмана [1], Жермена [1] и Л. В. Овсянникова [1].

5. Безусловно, представляет научный интерес изучение систем двух линейных уравнений с частными производными смешанного типа. В первую очередь, по-видимому, следует исследовать обобщение задачи T для системы вида

$$y^{2m+1}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=au+bv, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=cu+dv \tag{4.100}$$

в следующей постановке: *в смешанной области D, ограниченной в эллиптической части полуплоскости дугой Жордана σ, а в гиперболической части полуплоскости характеристиками AC и CB системы (4.100), найти решения $u\,(x,\ y)$ и $v\,(x, y)$ этой системы по граничному условию*

$$\alpha u+\beta v=\gamma \quad \text{на} \quad \sigma \ \text{и} \ \text{на} \quad AC, \tag{4.101}$$

где α, β и γ — заданные функции.

В одном частном случае задача такого рода была исследована в работе Фридрихса [1]. Следует также отметить работу З. А. Киквидзе [1], в которой для системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\operatorname{sgn} y\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

исследована задача вида (4.101) при весьма частных предположениях относительно α и β.

6. Не менее важным, на наш взгляд, является исследование уравнений высших порядков и систем высших порядков смешанного типа. В качестве модельного уравнения четвертого порядка смешанного типа удобнее было бы брать, например, уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\operatorname{sgn} y\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0 \tag{4.102}$$

или уравнение

$$\left(y\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0.$$

Одна смешанная задача для уравнения (4.102) исследована в работе М. М. Смирнова [1].

7. Вопрос о корректной постановке смешанных задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях все еще остается открытым.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\Delta u+\operatorname{sgn} t\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{4.103}$$

где Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обозначим через D смешанную область в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, ограниченную полусферой σ: $r^2 + t^2 = 1$, $t \geqslant 0$ и характеристическими конусами

$$K_1: \; t = r - 1, \quad -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 0,$$

$$K_2: \; t + r = 0, \quad -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 0,$$

где $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Простейшая смешанная задача для уравнения (4.103) может быть поставлена следующим образом.

Требуется определить функцию $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ со свойствами: 1) u является решением уравнения (4.103) в области D при $t \neq 0$; 2) она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 3) все частные производные первого порядка от u непрерывны в D вплоть до σ, а на многообразиях $r = 1$, $t = 0$; $r = \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$ и в начале координат для них допускаются особенности, слабые в смысле интегрирования по гиперповерхности, ограничивающей область D; 4) на σ и на K_1 функция u принимает заданные значения:

$$u = \varphi \text{ на } \sigma, \quad u = \psi \text{ на } K_1. \tag{4.104}$$

В случае, когда вершина конуса K_2 перемещена из начала координат в область $r \leqslant 1$, $t = 0$ (Проттер [3]), в приведенной выше постановке задача может оказаться некорректной (переопределенной).

Доказательство существования решения задачи (1.104) может быть проведено при помощи обращения многомерных особых интегральных уравнений первого рода, являющихся пространственными аналогами известных уравнений Абеля и Трикоми. В одном частном случае эта задача исследована в работе автора [8].

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА M

Предположим, что граница смешанной области D является *контуром третьего рода* по терминологии Трикоми, т. е. в гиперболической полуплоскости кусок характеристики AC заменен куском L кривой, удовлетворяющей некоторым условиям, о которых речь будет идти дальше.

Граничные условия смешанной задачи M задаются по σ и по L. На гидродинамический смысл этой задачи впервые обратил внимание Ф. И. Франкль [2, 3]. Ради простоты изложения мы ограничимся рассмотрением этой задачи для уравнения Лаврентьева (4.4).

Пусть D — односвязная смешанная область, ограниченная: а) линией Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y>0$; б) монотонной кривой L: $y=-\gamma(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, расположенной внутри характеристического треугольника ACB, $\gamma(0)=0$, $l+\gamma(l)=1$ и в) характеристикой C_1B: $y=x-1$, $l\leqslant x\leqslant 1$ уравнения (4.4) (рис. 9).

Задача M заключается *в определении функции* $u(x, y)$ *со следующими свойствами:* 1) $u(x, y)$ *является решением уравнения* (4.4) *в области* D *при* $y\neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\bar{D}$ *и имеет частные производные* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$, *непрерывные внутри области* D; 3) *на линиях* σ *и* L *принимает заданные значения:*

$$u|_\sigma=\varphi, \tag{5.1}$$

$$u|_L=\psi. \tag{5.2}$$

При доказательстве существования и единственности решения задачи M возникают затруднения, которые вызваны тем, что, как будет показано ниже, основное функциональное соотношение между $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$,

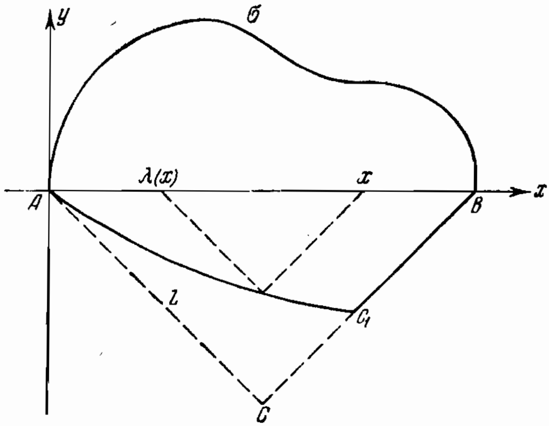

Рис. 9

принесенное из гиперболической части D_2 области D, имеет более сложный вид, чем соотношение (4.11).

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ M

Пусть σ гладкая кривая Жордана, удовлетворяющая условию

$$y'_s (x - x^2 - y^2) - y x'_s \geqslant 0, \tag{5.3}$$

где s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B, а $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения этой кривой.

Относительно кривой L дополнительно предположим, что она имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гельдера, причем

$$0 < \frac{d\gamma}{dx} \leqslant 1, \tag{5.4}$$

$$\frac{d\gamma}{dx} \leqslant \frac{\gamma}{x - x^2 + \gamma^2}. \tag{5.5}$$

Будем также предполагать, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$ всюду, кроме, быть может, точек A и B, в которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы. Кроме того, функция $\varphi(s)$ непрерывно дифференцируема один раз, а $\psi(x)$ — дважды, причем $\psi''(x)$ удовлетворяет условию Гельдера.

В этих предположениях покажем что решение однородной задачи

$$u|_\sigma = 0, \tag{5.1$_0$}$$

$$u|_L = 0 \tag{5.2$_0$}$$

тождественно равно нулю.

Предварительно заметим, что общее решение уравнения (4.4), удовлетворяющее условию (5.2) в области D_2, представляется в виде

$$u(x, y) = f(x+y) - f\{\delta(x-y) - \gamma[\delta(x-y)]\} + \\ + \psi[\delta(x-y)], \tag{5.6}$$

где $x = \delta(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ — известная функция, которая однозначно определяется из уравнения

$$x + \gamma(x) = \xi, \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5.7}$$

а $f(t)$ — произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция при $0 < t < 1$, непрерывная в замкнутом интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ с возможной интегрируемой особенностью для производной $f'(t)$ на концах этого интервала.

В самом деле, общее решение уравнения (4.4) в области D_2 возьмем в виде

$$u(x, y) = f(x+y) + f_1(x-y). \tag{5.8}$$

На основании (5.2) из (5.8) имеем

$$f[x - \gamma(x)] + f_1[x + \gamma(x)] = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Откуда, принимая во внимание обозначения (5.7), получим

$$f_1(\xi) = \psi[\delta(\xi)] - f\{\delta(\xi) - \gamma[\delta(\xi)]\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Подставляя полученное выражение $f_1(\xi)$ в (5.8), убедимся в справедливости представления (5.6).

В частности, из (5.6) имеем

$$\tau'(x) + \nu(x) = 2f'(x). \tag{5.9}$$

Формула (5.9) показывает, что $f'(x)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы при $x \to 0$ или $x \to 1$.

При соблюдении условия (5.2_0) представление (5.6) принимает вид

$$u(x, y) = f(x+y) - f\{\delta(x-y) - \gamma[\delta(x-y)]\}. \tag{5.6_0}$$

Отсюда очевидно, что без ограничения общности можно принять $f(0) = 0$.

Из формулы (5.6_0) имеем

$$u(x, 0) = f(x) - f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}. \tag{5.10}$$

Обозначим через $F(z)$ аналитическую в эллиптической части D_1 смешанной области D функцию $u(x, y) + iv(x, y)$. Так как $u(0, 0) = 0$, то функцию $F(z)$ можно подчинить условию

$$F(0) = 0. \tag{5.11}$$

В силу равенств

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=+0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=-0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y) \in D_1,$$

из формулы (5.6_0) получим

$$\frac{dv(x, 0)}{dx} = -\frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}.$$

Отсюда, после интегрирования, в силу (5.11), будем иметь

$$v(x, 0) = -f(x) - f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}. \tag{5.12}$$

Рассмотрим интеграл

$$J = -\int_0^1 u(x, 0)\, v(x, 0) \frac{1-x}{x}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \{f^2(x) - f^2[\delta(x) - \gamma(\delta(x))]\} \frac{1-x}{x}\, dx, \tag{5.13}$$

который заведомо существует.

После преобразования переменных интегрирования выражение (5.13) принимает вид

$$J=\int_{2l-1}^{1} f^2(x)\frac{1-x}{x}\,dx+\int_0^l f^2[x-\gamma(x)]\left[\frac{1-x+\gamma(x)}{x-\gamma(x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1+\gamma'(x)}{1-\gamma'(x)}\,\frac{1-x-\gamma(x)}{x+\gamma(x)}\right][1-\gamma'(x)]\,dx,$$

откуда, в силу (5.5), заключаем, что

$$J\geqslant 0. \tag{5.14}$$

С другой стороны, в силу (5.1_0), имеем

$$\int_\sigma F^2(z)\frac{1-z}{z}\,dz+\int_0^1 [u(x,\,0)+iv(x,\,0)]^2\frac{1-x}{x}\,dx=0. \tag{5.15}$$

Выделяя мнимую часть из (5.15), получим

$$J=-\int_0^1 u(x,\,0)\,v(x,\,0)\frac{1-x}{x}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\sigma \frac{y_s'(x-x^2-y^2)-x_s'y}{x^2+y^2}\,v^2\,ds. \tag{5.16}$$

Из (5.16), в силу (5.3), заключаем, что

$$J\leqslant 0. \tag{5.17}$$

Сопоставляя (5.14) и (5.17), получим $f(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $u(x,\,y)$ тождественно равна нулю во всей области D.

Таким образом, *если σ и L удовлетворяют условиям* (5.3), (5.4), (5.5), *то задача M не может иметь более одного решения.*

Условие (5.5) будет соблюдено, например, если кривая L вогнута относительно оси Ox, а условие (5.3) будет соблюдено, в частности, если σ вогнута относительно оси Ox и расположена внутри единичного круга $|z|<1$.

§ 3. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ M

Из формулы (5.6) непосредственно получается первое основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части D_2 области D:

$$\tau'(x)-\nu(x)=2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)]-$$

$$-(\tau'\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\}+\nu\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\})\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\}. \tag{5.18}$$

Второе функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_1, как мы это уже видели, имеет вид (4.25).

В настоящем параграфе речь будет идти о существовании решения задачи M в том частном случае, когда *линия L в начале совпадает с куском AF характеристики AC, а потом отходит от нее вовнутрь характеристического треугольника ACB* (см. А. В. Бицадзе [4—6]).

Обозначим через $E(h, 0)$ точку отрезка AB, $0<h<1$. Характеристики уравнения (4.4), выходящие из точки E, пересекаются с характеристиками AC и BC в точках $F\left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right)$, $G\left(\frac{h+1}{2}, \frac{h-1}{2}\right)$ соответственно. Пусть $H(1-l, -l)$, $\frac{1-h}{2}<l<\frac{1}{2}$ — точка на характеристике BC. Соединим точки F и H линией $y=-\gamma(x)$, $\frac{h}{2}\leqslant x\leqslant 1-l$, где $\gamma''(x)$ удовлетворяет условию Гельдера и условиям (5.4) и (5.5).

Пусть L совпадает с линией

$$y=-x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{h}{2},$$

$$y=-\gamma(x);\ \frac{h}{2}\leqslant x\leqslant 1-l$$

и кривизна ее удовлетворяет условию Гельдера.

Относительно кривой σ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Ляпунова, оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' полуокружности σ_0 и, кроме того, для нее соблюдено условие (5.3).

Пусть D — смешанная область, ограниченная линиями σ, L и HB (рис. 10).

В силу уже доказанного, смешанная задача M для области D не может иметь более одного решения.

Покажем, что в рассматриваемом случае решение задачи M существует.

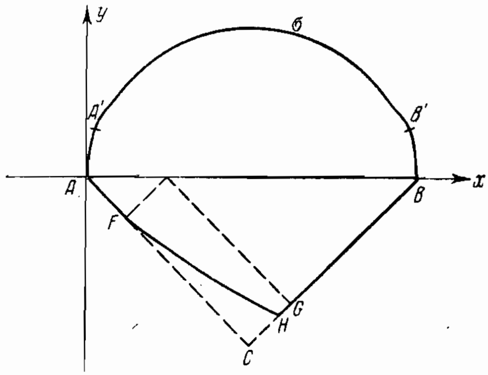

Рис. 10

Предварительно заметим, что без ограничения общности можно полагать $\varphi = 0$, $\psi(0) = 0$. В дальнейшем дополнительно будем требовать, чтобы

$$\psi'(0) = 0. \tag{5.19}$$

Сначала рассмотрим случай, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0. В этом случае соотношение (4.25) принимает вид (4.27), а из формулы (5.18) имеем:

$$\tau'(x) - \nu(x) = 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x \leqslant h, \tag{5.20}$$

$$\tau'(x) - \nu(x) =$$

$$= -2\nu[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x) - 2\frac{d}{dx}\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right] + 2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)], \tag{5.21}$$

$$h \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda(x) = \delta(x) - \gamma[\delta(x)] \leqslant 1 - 2l.$$

Исключая $\tau'(x)$ из (4.27), (5.20), (5.21), получим

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt = F(x), \tag{5.22}$$

где

$$F(x)=\begin{cases} F_0(x), & 0<x<h, \\ 2\nu[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x)+F_0(x), & h\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

$$F_0(x)=\begin{cases} -2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant h, \\ 2\frac{d}{dx}\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]-2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)], & h\leqslant x<1. \end{cases}$$

Применяя фомулу обращения (4.60), уравнение (5.22) можно переписать в эквивалентной форме

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_h^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\lambda'(t)\nu[\lambda(t)]\,dt=F_1(x) \quad (5.23)$$

$$0<x\leqslant h,$$

$$\nu(x)=F_1(x)+\nu[\lambda(x)]\lambda'(x)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_h^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)-\lambda'(t)\nu[\lambda(t)]\,dt, \quad (5.24)$$

$$h\leqslant x<1,$$

где

$$F_1(x)=\frac{1}{2}F_0(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F_0(t)\,dt.$$

Из проведенного рассуждения очевидно, что *имеется полная эквивалентность между задачей M и уравнениями* (5.23) *и* (5.24).

Преобразованием переменного $\xi=\lambda(t)$, $h\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant\xi\leqslant \leqslant 1-2l$ уравнение (5.23) принимает вид

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{1-2l}\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\left(\frac{1}{\omega(\xi)-x}+\frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right)\nu(\xi)\,d\xi=$$

$$=F_1(x), \quad (5.25)$$

где ω — функция, обратная λ.

При $x\in(0,1-2l)$, в силу неравенства $1-2l<h$, заключаем, что *уравнение* (5.25) *является интегральным уравне-*

нием Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи M.

Обозначив через $R(x, t)$, x, $t \in (0,1-2l)$ резольвенту уравнения (5.25), решение этого уравнения мы можем представить по формуле

$$\nu(x) = F_1(x) + \int_0^{1-2l} R(x, t) F_1(t)\, dt, \quad x \in (0, 1-2l). \tag{5.26}$$

Подставляя выражение (5.26) для $\nu(x)$, $x \in (0, 1-2l)$ в формулу (5.25), получим

$$\nu(x) = F_1(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{1-2l} \left\{ \sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(t)-x} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)} \right] + \int_0^{1-2l} R(\xi, t) \sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(\xi)-x} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)} \right] d\xi \right\} F_1(t)\, dt, \tag{5.27}$$

$$x \in (1-2l, h).$$

После того как известна $\nu[\lambda(x)]$, $x \in (h, 1)$, из (5.24) получим выражение для $\nu(x)$ при $x \in (h, 1)$:

$$\nu(x) = F_1(x) + F_1[\lambda(x)]\lambda'(x) + \int_0^{1-2l} \left\{ R[\lambda(x), t]\lambda'(x) - \right.$$

$$- \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(t)-x} + \frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)} \right] -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{1-2l} R(\xi, t) \sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(\xi)-x} + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)} \right] \times$$

$$\left. \times\, d\xi \right\} F_1(t)\, dt. \tag{5.28}$$

На основании (5.26), (5.27) и (5.28) окончательно получим

$$\nu(x) = F^*(x) + \int_0^{1-2l} R^*(x, t) F_1(t)\, dt, \tag{5.29}$$

где

$$F^*(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\in(0,\ h)\\ F_1(x)+F_1[\lambda(x)]\,\lambda'(x), & x\in(h,\ 1),\end{cases} \tag{5.30}$$

$$R^*(x,\ t)=R(x,t),\quad x,\ t,\in\ (0,1-2l),$$

$$\left.\begin{aligned}
&R^*(x,\ t)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(t)-x}+\right.\\
&\left.+\frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right]-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1-2l} R(x,\ t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\times\\
&\times\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x}+\frac{1-2\omega(\xi)}{x+\omega(\xi)-2x\omega(\xi)}\right]d\xi,\\
&\qquad x\in(1-2l,\ h),\ t\in(0,\ 1-2l),\\
&R^*(x,\ t)=R[\lambda(x),\ t]\,\lambda'(x)-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\times\\
&\times\left[\frac{1}{\omega(t)-x}+\frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right]-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1-2l} R(\xi,t)\times\\
&\times\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x}+\frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right]d\xi,\\
&\qquad x\in(h,\ 1),\ t\in(0,\ 1-2l).
\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Таким образом, мы доказали существование решения функционального уравнения (5. 22). Отсюда уже следует существование решения задачи M в рассматриваемом случае.

Предположим теперь, что σ оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA', BB' полуокружности σ_0.

После исключения $\tau'(x)$ из соотношений (4. 25) (5. 20) и (5. 21) получим:

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=$$

$$=F_0(x)-\int\limits_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt, \tag{5.32}$$

$$x\in(0,\ h),$$

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt-2\nu[\lambda(x)]\,\lambda'(x)=$$

$$=F_0(x)-\int\limits_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt,\ x\in(h,\ 1), \tag{5.33}$$

где $K(x,\ t)$ — регулярное ядро, имеющее вид (4. 49).

В уравнениях (5. 32) и (5. 33) выражение $-\int\limits_0^1 K(x, t)\,\nu(t)\,dt$ пока будем считать известным. Применяя (5. 29), мы можем эти уравнения заменить эквивалентным уравнением

$$\nu(x)+\int\limits_0^1 K^{**}(x, t)\,\nu(t)\,dt = F_{**}(x), \tag{5.34}$$

где

$$F_{**}(x)=\begin{cases} F_1(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x, t)\,F_1(t)\,dt, & x\in(0, h),\\ F_1(x)+F_1[\lambda(x)]\lambda'(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x, t)\,F_1(t)\,dt, & x\in(h, 1). \end{cases}$$

$$K^{**}(x, t)=\begin{cases} K^*(x, t)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x, \xi)\,K^*(\xi, t)\,d\xi, & x\in(0, h),\\ K^*(x, t)+K^*[\lambda(x), t]\lambda'(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x, \xi)\,K^*(\xi, t)\,d\xi, & \\ \qquad x\in(h, 1), \end{cases}$$

$$K^*(x, t)=\frac{1}{2}K(x; t)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x(1-\xi)}{\xi(1-x)}}\left(\frac{1}{t-\xi}+\frac{1-2\xi}{t+\xi-2t\xi}\right)K(\xi, t)\,d\xi.$$

Уравнение (5. 34) является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

Так как эквивалентность всюду сохраняется, то из единственности решения задачи M следует существование решения интегрального уравнения (5. 34). *Отсюда, в свою очередь, автоматически получается существование решения задачи M* (см. работы автора [4—6]).

Ограничение на линию σ, заключающееся в требовании, чтобы она оканчивалась сколь угодно малой длины дужками AA', BB' полуокружности σ_0, может быть снято. Однако же наложенное на σ ограничение (5. 3) является для нас существенным, поскольку при доказательстве существования решения задачи M мы здесь пользуемся тем, что оно единственное.

В случае, когда линия L с самого же начала отходит от характеристики AC, доказательство существования решения задачи M становится более затруднительным.

В заключение укажем еще на одну редукцию задачи M.

Из формулы (5.6) имеем

$$u(x, 0) = f(x) - f[\lambda(x)] + \psi[\delta(x)], \tag{5.35}$$

где

$$\lambda(x) = \delta(x) - \gamma[\delta(x)].$$

С другой стороны, используя уравнение Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

и условие непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при переходе через отрезок AB, в силу (5.6), можем написать

$$v(x, 0) = -f(x) - f[\lambda(x)] + \psi[\delta(x)], \quad v(0, 0) = 0. \tag{5.36}$$

Исключая $f(x)$ из соотношений (5.35) и (5.36), получим

$$u(x, 0) + v(x, 0) + u[\lambda(x), 0] - v[\lambda(x), 0] = 2\psi[\delta(x)],$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Таким образом, задача M редуцирована к совершенно нового типа задаче теории функций: *найти голоморфную в области D_1 функцию $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, непрерывную в замкнутой области $\bar{D}_1$ и удовлетворяющую условиям:*

$$\operatorname{Re} F|_\sigma = \varphi, \quad F(0) = 0,$$

$$\operatorname{Re}(1 - i)\{F(x) + iF[\lambda(x)]\} = 2\psi[\delta(x)].$$

В следующем параграфе будет доказано существование решения общей смешанной задачи, частным случаем которой является задача M. По этой причине мы здесь не приводим отдельного доказательства существования решения смешанной задачи M.

Задача M для уравнения (4.1) в случае, когда линия L имеет общий участок AF с характеристикой AC, рассматривалась в работах Ф. И. Франкля [4] и Проттера [4].

§ 4. ОБЩАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

В качестве модельного уравнения смешанного типа опять берем уравнение Лаврентьева (4. 4).

Обозначим через D односвязную смешанную область, ограниченную лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и выходящими из этих точек кривыми $L: y = -\gamma(x)$, $L_1: y = -\gamma_1(x)$, с кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера

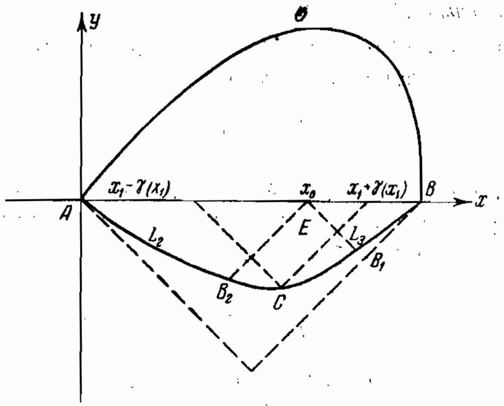

Рис. 11

Дополнительно будем требовать, чтобы $\gamma(x)$ и $\gamma_1(x)$ удовлетворяли условиям:

$$\gamma > 0, \ \gamma_1 > 0, \ 0 < \gamma'(x) < 1, \ 0 < -\gamma_1'(x) < 1. \qquad (5.37)$$

Пусть $C[x_1, -\gamma(x_1)]$ — точка пересечения кривых L и L_1. Из точки $E(x_0, 0)$, $x_1 - \gamma(x_1) \leqslant x_0 \leqslant x_1 + \gamma(x_1)$, проведем характеристики $EB_2: y = x - x_0$ и $EB_1: y = x_0 - x$ уравнения (4. 4), где B_2 и B_1 — точки пересечения указанных характеристик с кривыми L и L_1. Обозначим через L_2 и L_3 дуги AB_2 и BB_1 кривых L и L_1 соответственно (рис. 11).

Общая смешанная задача. *Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:* 1) *$u(x, y)$ является решением уравнения* (4. 4) *в области D при $y \neq 0$, $y \neq x - x_0$, $y \neq x_0 - x$;* 2) *она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$;* 3) *частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$*

всюду, кроме, быть может, точек A, B и отрезков EB_2 и EB_1, вблизи которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже $\frac{1}{2}$; 4) на σ, L_2 и L_3 функция $u\ (x,\ y)$ принимает заданные значения:

$$u|_\sigma = \psi_1,\ u|_{L_2} = \psi_2,\ u|_{L_3} = \psi_3, \tag{5.38}$$

где ψ_1 — непрерывная, а ψ_2 и ψ_3 — дважды непрерывно дифференцируемые функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гельдера.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\psi_1 = 0$. Дополнительно потребуем, чтобы

$$\psi_2'(0) = \psi_3'(0) = 0. \tag{5.39}$$

Ради простоты вычислений предположим, что $\gamma = \alpha x$, $\gamma_1 = -\beta x + \beta$, где α и β постоянные, удовлетворяющие условиям $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. В этом случае:

$$C_1 = C_1\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta},\ \frac{-\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right),\ B_1 = B_1\left(\frac{x_0+\beta}{1+\beta},\ \frac{\beta(x_0-1)}{1+\beta}\right),$$

$$B_2 = B_2\left(\frac{x_0}{1+\alpha},\ \frac{-\alpha x_0}{1+\alpha}\right).$$

Полученный результат остается в силе и при общих предположениях относительно L и L_1, сформулированных выше [см. (5.37)].

Общее решение уравнения (4.4), удовлетворяющее условиям (5.38), в треугольниках AB_2E и EB_1B, соответственно, имеет вид:

$$u\ (x,\ y) = f(x+y) - f[\lambda(x-y)] + \psi_2\left[\frac{1+\lambda}{2}(x-y)\right], \tag{5.40}$$

$$u\ (x,\ y) = \varphi(x-y) - \varphi[\mu(x+y)+1-\mu] + \psi_3\left[\frac{(x+y)(1+\mu)+1-\mu}{2}\right], \tag{5.41}$$

где $f(t)$, $t \in (0,\ x_0)$, $\varphi(t)$, $t \in (x_0,\ 1)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции с возможными особенностями порядка ниже $\frac{1}{2}$ для их первых производных на концах этих интервалов, а $\lambda = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, $\mu = \frac{1-\beta}{1+\beta}$.

Из (5.40) и (5.41) имеем:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2\frac{d}{dx} f(x), \ y = 0, \ 0 < x < x_0, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2\frac{d}{dx} \varphi(x), \ y = 0, \ x_0 < x < 1, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2\frac{d}{dx} f(\lambda x) + 2\frac{d}{dx} \psi_2\left(\frac{1+\lambda}{2} x\right),$$

$$y = 0, \quad 0 < x < x_0, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2\frac{d}{dx} \varphi(\mu x + 1 - \mu) +$$

$$+ 2\frac{d}{dx} \psi_3\left[\frac{x(1+\mu) + 1 - \mu}{2}\right], \quad (5.45)$$

$$y = 0, \qquad x_0 < x < 1.$$

Докажем сначала единственность решения общей смешанной задачи.

С этой целью рассмотрим голоморфную в эллиптической части D_1 области D функцию $F_0(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y)$, действительная часть которой является решением однородной общей смешанной задачи ($\psi_2 = \psi_3 = 0$).

В силу известного свойства голоморфных функций, заключаем, что

$$\int_\sigma z(1-z)(x_0 - z) F_0'^2(z)\, dz =$$

$$= -\int_0^1 x(1-x)(x - x_0) F_0'^2(x)\, dx. \quad (5.46)$$

Выделяя мнимую часть из равенства (5.46) и требуя от σ дополнительно, чтобы она удовлетворяла условию

$$\omega(s) = \operatorname{Im}\left\{z(1-z)(x_0 - z)\left(\frac{dy}{dx} + i\right)^2 dz\right\}_\sigma \leqslant 0, \quad (5.47)$$

будем иметь

$$J = \int_0^1 x(1-x)(x_0 - x)\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y}\, dx = \int_\sigma \omega(s)\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 ds \leqslant 0, \quad (5.48)$$

где s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B.

Заметим, что, в частности, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0, имеем $\omega(s) = -\frac{1}{8}$.

С другой стороны, из (5.42), (5.43), (5.44) и (5.45) имеем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}f(\lambda x)\right]^2, \quad y=0, \quad 0<x<x_0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]^2 + \left[\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)\right]^2, \quad y=0, \quad x_0<x<1.$$

Следовательно, можем написать

$$J = \int_0^{x_0} x(1-x)(x_0-x)\left\{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}f(\lambda x)\right]^2\right\}dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{1} x(1-x)(x-x_0)\left\{\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)\right]^2\right\}dx =$$

$$= \int_{\lambda x_0}^{x_0} x(1-x)(x_0-x)\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2 dx + \int_0^{x_0} x\,[(1-\lambda x)(x_0-\lambda x) -$$

$$-(1-x)(x_0-x)]\left[\frac{d}{dx}f(\lambda x)\right]^2 dx + \int_{x_0}^{\mu x_0+1-\mu} x(1-x)(x-x_0)\times$$

$$\times\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]^2 dx + \int_{x_0}^{1}(1-x)\,[(\mu x+1-\mu)(\mu x+1-\mu-x_0) -$$

$$-x(x-x_0)]\left[\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)\right]^2 dx. \tag{5.49}$$

Очевидно, что

$$(1-\lambda x)(x_0-\lambda x)-(1-x)(x_0-x) =$$
$$= x(1-\lambda)[1+x_0-(1+\lambda)x] \geqslant 0. \tag{5.50}$$

Имеет место также неравенство

$$(\mu x+1-\mu)(\mu x+1-\mu-x_0)-x(x-x_0) =$$
$$=(1-\mu)[1-\mu-x_0-(1+\mu)x^2+x(x_0+2\mu)] \geqslant 0. \tag{5.51}$$

Справедливость неравенства (5.51) следует из того, что для функции $e(x) = 1 - \mu - x_0 - (1+\mu)x^2 + x(x_0 + 2\mu)$ имеют место соотношения:

$$e(1) = 0, \quad e(x_0) > 0, \quad e''(x) = -(1+\mu) < 0,$$

$$\max e(x) = e\left[\frac{x_0 + 2\mu}{2(1+\mu)}\right], \quad x_0 < x < 1.$$

В силу (5.50) и (5.51), из (5.49) получим

$$J \geqslant 0. \tag{5.52}$$

Сопоставляя (5.48) и (5.52), без труда убедимся, что $u_0(x, y) \equiv 0$. Отсюда, в свою очередь, следует **единственность** решения общей смешанной задачи.

Теперь покажем, что решение общей смешанной задачи, при наличии единственности, существует.

Обозначив правые части в формулах (5.44) и (5.45) соответственно через $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, эти формулы мы можем переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}(1-i)F'(x) &= \omega_1(x), \quad 0 < x < x_0, \\ \operatorname{Im}(1-i)F'(x) &= -\omega_2(x), \quad x_0 < x < 1, \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — голоморфная в D_1 функция, действительная часть которой является искомым решением общей смешанной задачи.

Ограничимся рассмотрением случая, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0, а $x_0 > \frac{1}{2}$.

Ввиду того, что $u|_{\sigma_0} = 0$, функция $F(z)$ аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость, причем, в силу (5.53), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Im}(1-i)F'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_1\left(\frac{x}{2x-1}\right), \\ &-\infty < x < 0, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{2x_0 - 1} < x < \infty, \\ &\operatorname{Re}(1-i)F'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_2\left(\frac{x}{2x-1}\right), \quad 1 < x < \xi_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

Введем в рассмотрение голоморфную в верхней полуплоскости функцию

$$\Phi(z)=\sqrt{\frac{(x_0-z)(\xi_0-z)}{z(1-z)}}(1-i)F'(z),$$

где под корнем понимается однозначная в разрезанной вдоль сегментов $[0, x_0]$, $[1, \xi_0]$ ветвь этой функции, положительная при $0<z<x_0$.

В силу (5.53) и (5.54), для функции $\Phi(z)$ имеем граничные условия:

$$\operatorname{Re}\Phi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{(x_0-x)(\xi_0-x)}{x(1-x)}}\,\omega_1(x), \quad 0<x<x_0,\\ -\sqrt{\frac{(x_0-x)(\xi_0-x)}{-x(1-x)}}\,\frac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_1\left(\frac{x}{2x-1}\right), \\ \qquad -\infty<x<0,\\ -\sqrt{\frac{(x-x_0)(\xi_0-x)}{x(1-x)}}\,\omega_2(x), \quad x_0<x<1,\\ \sqrt{\frac{(x-x_0)(\xi_0-x)}{x(x-1)}}\,\frac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_2\left(\frac{x}{2x-1}\right), \\ \qquad 1<x<\xi_0,\\ \sqrt{\frac{(x-x_0)(x-\xi_0)}{x(x-1)}}\,\frac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_1\left(\frac{x}{2x-1}\right), \\ \qquad \xi_0<x<\infty,\end{cases}$$

причем

$$\Phi(\infty)=0.$$

Пользуясь формулой (4.56) для определения функции $\Phi(z)$, окончательно получим выражение для $F'(z)$ в виде

$$(1-i)F'(z)=\frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{z(1-z)}{(x_0-z)(\xi_0-z)}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1-2t}{t+z-2tz}\right)\omega_1(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1-2t}{t+z-2tz}\right)\omega_2(t)\,dt\right\}. \quad (5.55)$$

Переходя к пределу в (5.55) при $z \to x$ и выделяя при $0 < x < x_0$ мнимую часть, а при $x_0 < x < 1$ действительную часть, получим:

$$f_x(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{x(1-t)(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-x)(x_0-x)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times f_t(\lambda t)\,dt = \rho_1(x), \quad (5.56)$$

$$\varphi_x(x) - \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{t(1-x)(t-x_0)(\xi_0-t)}{x(1-t)(x-x_0)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times \varphi_t(\mu t+1-\mu)\,dt = \rho_2(x), \quad (5.57)$$

где

$$\rho_1(x) = \psi(x) + \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{x(1-x)(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)(x_0-x)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times \varphi_t(\mu t+1-\mu)\,dt,$$

$$\rho_2(x) = \psi(x) - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x_0}\sqrt{\frac{x(1-x)(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)(x-x_0)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times f_t(\lambda t)\,dt,$$

а

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-x)}{(x_0-x)(\xi_0-x)}}\left\{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{2t}\left(\frac{1+\lambda}{2}t\right)dt - \int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{3t}\left[\frac{t(1+\mu)+1-\mu}{2}\right]dt\right\},$$
$$0 < x < x_0,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-x)}{(x-x_0)(\xi_0-x)}}\left\{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{2t}\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}t\right)dt - \int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{3t}\left[\frac{t(1+\mu)+1-\mu}{2}\right]dt\right\},$$
$$x_0 < x < 1.$$

Мы здесь всюду пользовались тождествами

$$\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}=\frac{1-t}{1-x}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x-2tx}\right)=$$

$$=\frac{t}{x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right).$$

Таким образом, доказательство существования решения общей смешанной задачи редуцировано к доказательству существования решений интегральных уравнений (5.56) и (5.57).

Простой заменой переменных уравнения (5.56) и (5.57) в обозначениях

$$\sqrt{x}\mu_1(x)=f_x(x)\sqrt{(1-x)(x_0-x)(\xi_0-x)},$$

$$\sqrt{x}h_1(x)=\rho_1(x)\sqrt{(1-x)(x_0-x)(\xi_0-x)},$$

$$\sqrt{1-x}\,\mu_2(x)=\varphi_x(x)\sqrt{x(x-x_0)(\xi_0-x)},$$

$$\sqrt{1-x}\,h_2(x)=\rho_2(x)\sqrt{x(x-x_0)(\xi_0-x)},$$

можно переписать следующим образом:

$$\mu_1(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda x_0}\sqrt{\frac{(\lambda-t)(\lambda x_0-t)(\lambda\xi_0-t)}{(1-t)(x_0-t)(\xi_0-t)}}\left(\frac{1}{t-\lambda x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{t+\lambda x-2tx}\right)\mu_1(t)\,dt=h_1(x), \tag{5.58}$$

$$0<x<x_0,$$

$$\mu_2(x)-\frac{1}{\pi}\int_{\mu x_0+1-\mu}^{1}\sqrt{\frac{(t-1+\mu)(t-1+\mu-\mu x_0)(\mu\xi_0-t+1-\mu)}{t(t-x_0)(\xi_0-t)}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-1+\mu-\mu x}-\frac{1}{t-1+\mu+\mu x-2x(t-1+\mu)}\right)\mu_2(t)\,dt=h_2(x),$$

$$x_0<x<1. \tag{5.59}$$

В силу принятых предположений (5.39) относительно функций ψ_1, ψ_2 и ψ_3 заключаем, *что функции* $\frac{1}{\sqrt{x}}\psi(x)$, $0<x<x_0$, *и* $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\psi(x)$, $x_0<x<1$ *суммируемы вместе с их квадратами. Поэтому естественно искать* $\mu_1(x)$ *и* $\mu_2(x)$ *в гильбертовом пространстве* L_2.

Легко показать, что *нормы интегральных операторов в левых частях* (5. 58) *и* (5. 59) *при* $0 < x < \lambda x_0$, $\mu x_0 + 1 - \mu < x < 1$ *меньше единицы.*

Это следует из того, что

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\lambda x_0} d\xi \int_0^{\lambda x_0} \sqrt{\frac{(\lambda - t)(\lambda x_0 - t)(\lambda \xi_0 - t)}{(1-t)(x_0 - t)(\xi_0 - t)}}\left(\frac{1}{t - \lambda\xi} + \frac{1}{t + \lambda\xi - 2t\xi}\right)\mu_1(t)\,dt \times$$

$$\times \int_0^{\lambda x_0} \sqrt{\frac{(\lambda - t_1)(\lambda x_0 - t_1)(\lambda \xi_0 - t_1)}{(1-t_1)(x_0 - t_1)(\xi_0 - t_1)}}\left(\frac{1}{t_1 - \lambda\xi} + \frac{1}{t_1 + \lambda\xi - 2t_1\xi}\right)\mu_1(t_1)dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda x_0} \frac{(\lambda - t)(\lambda x_0 - t)(\lambda \xi_0 - t)}{(1-t)(x_0 - t)(\xi_0 - t)}\,\mu_1^2(t)\,dt \leqslant \lambda^2 \int_0^{\lambda x_0} \mu_1^2(t)\,dt.$$

Аналогично можно показать справедливость и второй части нашего утверждения.

Следовательно, решения $\mu_1(x)$, $0 < x < \lambda x_0$ и $\mu_2(x)$, $\mu x_0 + 1 - \mu < x < 1$ уравнений (5. 58) и (5. 59) существуют и они выражаются сингулярными интегралами.

Подставляя полученное в результате обращения уравнения (5. 56) выражение $f_x(\lambda x)$ в правую часть (5. 57) и обращая левую часть последнего уравнения относительно $\varphi_x(x)$, $\mu x_0 + 1 - \mu < x < 1$, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\varphi_x(x)$, $x_0 < x < 1$, эквивалентное рассматриваемой задаче. Следовательно, существование решения полученного интегрального уравнения следует из единственности решения общей смешанной задачи.

После того как доказано существование $\varphi_x(x)$, $x_0 < x < 1$, существование $f_x(x)$, $0 < x < x_0$ получается автоматически (см. работу [9] автора).

Степень гладкости функций f и φ зависит от гладкости ψ_2 и ψ_3.

В случае, когда линия σ оканчивается сколь угодно малой длины дугами AA' и BB', а в остальной своей части она гладкая и удовлетворяет условию (5. 47), доказательство существования решения общей смешанной задачи на основе предыдущего результата известным образом редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Полученный в этом параграфе результат указывает на то, что *в рассмотренной выше смешанной области D задача Дирихле для уравнения* (4.4) *является некорректной, независимо от величины и формы гиперболической части D_2 этой области* (см. работу [9] автора).

Это, конечно, не означает, что нельзя найти такую смешанную область, для которой задача Дирихле все же возможна.

Например, в смешанной области D_3, ограниченной гладкой дугой Жордана σ, характеристикой AC: $x+y=0$ и дугой σ_1 параболы $y=1-x-\sqrt{2(1-x)}$, задача Дирихле имеет, и притом единственное, непрерывное в области D_3 решение, с возможными разрывами для производных при переходе через характеристику AC.

В самом деле, пусть ищется непрерывная в замкнутой области $\bar{D}_3$ функция $u(x, y)$, которая в области D_3 при $y \neq 0$, $y \neq x-1$ является решением уравнения (4.4), удовлетворяющим граничным условиям:

$$u|_{\sigma}=\psi_1, \quad u|_{AC}=\psi_2, \quad u|_{\sigma_1}=\psi_3,$$

где ψ_1, ψ_2 и ψ_3 — заданные функции; ψ_1 непрерывна, а ψ_2 и ψ_3 — дважды дифференцируемые функции, причем ψ_2'' и ψ_3'' удовлетворяют условию Гельдера.

В четвертой главе мы доказали, что заданными на σ и на AC значениями функция $u(x, y)$ однозначно определяется в замкнутой области $\bar{D}$, ограниченной дугой σ и характеристиками AC и BC уравнения (4.4) (задача Трикоми).

Обозначим через $\varphi(x)$, $1/2 \leqslant x \leqslant 1$, граничные значения функции $u(x, y)$ на характеристике BC, принесенные из характеристического треугольника ABC.

В оставшейся части смешанной области D_3 функция $u(x, y)$ также однозначно определяется по известным ее граничным значениям на характеристике BC и на дуге σ_1 параболы, причем формула, дающая значения этой функции, выписывается явно:

$$u(x, y)=\varphi\left[\frac{x+y+1}{2}\right]-\varphi\left[\frac{3+\sqrt{5-4(x-y)}}{4}\right]+$$
$$+\psi_3\left[\frac{1+2(x-y)+\sqrt{5-4(x-y)}}{4}\right].$$

§ 5. ЗАДАЧА ФРАНКЛЯ

Пусть имеется уравнение смешанного типа (уравнение Чаплыгина):

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ k(0)=0,\ k'(y)>0,\ k(-y)=-k(y) \quad (5.60)$$

и смешанная область D, ограниченная: а) отрезком $A'A$ оси $x=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$; б) характеристикой $A'C$ уравнения (5.60), $C=C(a_1, 0)$, $a_1>0$; в) отрезком CB оси $y=0$, $a_1\leqslant x\leqslant a$ и г) жордановой кривой σ с концами в точках A и B, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ (рис. 12).

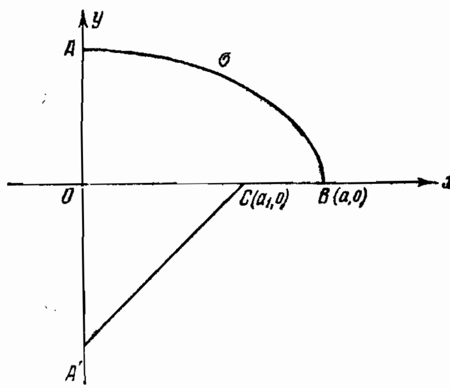

Рис. 12

В 1956 г. Ф. И. Франкль [5] предложил смешанную задачу нового типа, которая существенно отличается от смешанных задач, рассмотренных выше.

Эта задача ставится следующим образом: *найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения* (5.60), *непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям:*

$$u\,|_{\sigma}=\psi_1, \quad (5.61)$$

$$u\,|_{CB}=\psi_2, \quad (5.62)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{A'A}=0, \quad (5.63)$$

$$u(0,\ y)-u(0,\ -y)=f(y),\ -1\leqslant y\leqslant 1, \quad (5.64)$$

где ψ_1, ψ_2 и f — заданные функции.

В настоящем параграфе дается исследование задачи Франкля для уравнения Лаврентьева (4.4).

В этом случае $A'C$ совпадает с отрезком характеристики $x-y=1$ уравнения (4.4). От дуги σ, кроме обычного условия гладкости (условия Ляпунова), дополнительно будем требовать, чтобы вдоль нее имело место неравенство:

$$\frac{dy}{ds} \geqslant 0, \tag{5.65}$$

где $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрические уравнения, а s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки $B(a, 0)$. Без ограничения общности будем предполагать, что $\psi_1=\psi_2=0$. Относительно $f(y)$ будем требовать, чтобы она была дифференцируема до второго порядка и ее вторая производная удовлетворяла условию Гельдера.

В этих предположениях *существует единственная функция $u(x, y)$ со следующими свойствами:* 1) *$u(x, y)$ является решением уравнения* (4.4) *в области $\overline{D}$ при $y \neq 0$, $y \neq -x$;* 2) *она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;* 3) *частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ всюду, кроме, быть может, отрезка OC' характеристики $x+y=0$, $O=O(0, 0)$, $C'=C'(^1/_2, -^1/_2)$ и точек A, A', C, B, где они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;* 4) *$u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям* (5.61)—(5.64).

Общее решение уравнения (4.4), удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{OA'}=0, \quad u\,|_{OA'}=\varphi(-y)+f(y),$$

в треугольнике $A'OC'$ имеет вид

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\varphi(-x-y)+\frac{1}{2}\varphi(x-y)+ \\ +\frac{1}{2}f(x+y)+\frac{1}{2}f(y-x), \tag{5.66}$$

где через $\varphi(y)$ обозначена функция $u(0, y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Из формулы (5.66) имеем

$$u(x, -x)=\frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{1}{2}\varphi(2x)+\frac{1}{2}f(-2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\,. \tag{5.67}$$

Общее решение уравнения (4.4), удовлетворяющее условию (5.67), в треугольнике $OC'C$ дается формулой

$$u(x, y) = \Phi(x+y) + \frac{1}{2}\varphi(x-y) + \frac{1}{2}f(y-x), \quad (5.68)$$

где $\Phi(t)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $0<t<1$, непрерывная при $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $\Phi(0) = \frac{1}{2}\varphi(0)$.

В силу формулы (5.68), имеем

$$u(x, 0) = \Phi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}f(-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (5.69)$$

Пусть $v(x, y)$ гармонически сопряжена с $u(x, y)$ в эллиптической части D_1 смешанной области D, причем $v(0, 0) = 0$.

На основании (5.63) заключаем, что $v|_{OA} = 0$. Так как, по условию, $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывна при переходе через OC, то, в силу (5.68), из уравнения $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ получим

$$v(x, 0) = -\Phi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}f(-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (5.70)$$

Теперь легко доказать, что однородная задача ($f = 0$) имеет только тривиальное решение.

В самом деле, пусть $u_0(x, y)$ — решение однородной задачи, а функция $v_0(x, y)$ гармонически сопряжена с ней, причем $v_0(0, 0) = 0$. Функция $F_0(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y)$ голоморфна в области D_1 и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}_1$. Следовательно, имеет место равенство

$$-\int_\sigma v_0^2\,dz - i\int_0^1 u_0^2(0, y)\,dy + \int_0^1 (u_0 + iv_0)^2\,dx - \int_1^a v_0^2\,dx = 0. \quad (5.71)$$

Выделяя мнимую часть из (5.71), в силу (5.69) и (5.70), будем иметь

$$-\int_\sigma v_0^2 \frac{dy}{ds}\,ds - \int_0^1 \varphi_0^2(y)\,dy - 2\int_0^1 \left(\Phi^2 - \frac{1}{4}\varphi_0^2\right)dx = 0,$$

$$\varphi_0(y) = u_0(0, y).$$

Отсюда, на основании (5.65), заключаем, что $\Phi(x)=\varphi_0(x)=0$ и, стало быть, $u_0(x, y)=0$ всюду в смешанной области D.

Переходим к доказательству существования решения.

Заметим, что, в силу (5.69) и (5.70), имеем

$$u(x, 0)+v(x, 0)=\gamma(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{5.72}$$

где

$$\gamma(x)=\varphi(x)+f(-x). \tag{5.73}$$

Голоморфная внутри D_1 и непрерывная в $\bar{D}_1$ функция $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ однозначно определяется по граничным условиям:

$$u|_\sigma=0,\ u(x, 0)=0,\ 1\leqslant x\leqslant a,\ v(0, y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1,$$
$$u(x, 0)+v(x, 0)=\gamma(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

В частности, когда $a=1$, а σ совпадает с дугой окружности $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, для функции $F(z)$ легко получается выражение

$$F(z)=\frac{1+i}{\pi i}\int_0^1 z\sqrt{\frac{t(1-z^2)}{z(1-t^2)}}\left(\frac{1}{t^2-z^2}-\frac{1}{1-t^2z^2}\right)\gamma(t)\,dt. \tag{5.74}$$

Подставляя в формулу (5.74) вместо z выражение iy и принимая во внимание (5.64) и (5.73), для определения неизвестной функции $\varphi(y)$ получим эквивалентное задаче Франкля интегральное уравнение

$$\varphi(y)-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{t(1+y^2)}{y(1-t^2)}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)\varphi(t)\,dt=\psi(y), \tag{5.75}$$

где

$$\psi(y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{t(1+y^2)}{y(1-t^2)}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)f(-t)\,dt \tag{5.76}$$

— известная функция.

Примем обозначение $\sqrt{y}\varphi(y)=\mu(y)$.

Для определения неизвестной функции $\mu(y)$ на основании (5.75) получается интегральное уравнение

$$\mu(y)-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{1+y^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)\mu(t)\,dt=\sqrt{y}\,\psi(y) \tag{5.77}$$

с положительным ядром, причем

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{1+y^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)dt=\frac{1-y}{\sqrt{2}}\,. \tag{5.78}$$

В силу (5.78) очевидно, что решение интегрального уравнения (5.77) существует, и оно строится обычным путем. После того как функция φ будет найдена, решение задачи Франкля в рассматриваемом случае получится в квадратурах.

Вернемся к общему случаю. В силу условия $v|_{OA}=0$ заключаем, что функция $F(z)$ аналитически продолжается в область D_1^*, симметрическую области D_1 относительно мнимой оси. Совокупность открытого отрезка OA и областей D_1 и D_1^* обозначим через D^*. Искомая функция $F(z)$ голоморфна в области D^*, непрерывна в замкнутой области $\bar{D}^*$ и удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{gathered} u|_\sigma=0,\ u|_{\sigma^*}=0,\\ \left.\begin{aligned} &u(x,0)=0,\ -a\leqslant x\leqslant -1,\ u(x,0)-v(x,0)=\gamma(-x),\\ &-1\leqslant x\leqslant 0,\ u(x,0)+v(x,0)=\gamma(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1, \end{aligned}\right\} \\ u(x,0)=0,\ 1\leqslant x\leqslant a. \end{gathered} \tag{5.79}$$

Здесь через σ^* обозначена дуга, симметричная σ относительно мнимой оси.

Так как область D^* симметрична относительно мнимой оси и содержит внутри себя ее отрезок OA, то при конформном отображении этой области на полукруг k_1: $\xi^2+\eta^2<1$, $\eta>0$, плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, когда точки $A(0,1)$, $C^*(-1,0)$, $C(1,0)$ переходят в точки $A_1(0,1)$, $C_1^*(-1,0)$, $C_1(1,0)$, симметрия относительно мнимых осей сохраняется.

Обозначим через $\Phi(\zeta)$ функцию $F[\omega^{-1}(\zeta)]$, где $\zeta=\omega(z)$ — конформно отображающая функция.

Для определения голоморфной в полукруге k_1 и непрерывной в k_1 функции $\Phi(\zeta)$, в силу (5.79), имеем условия

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\Phi|_L=0,\quad \operatorname{Re}(1+i)\Phi|_{C_1^*O_1}=\gamma[-\omega^{-1}(\xi)],\\ \operatorname{Im}(1+i)\Phi|_{O_1C_1}=\gamma[\omega^{-1}(\xi)], \end{gathered} \tag{5.80}$$

где L — полуокружность $|\zeta|=1$, $\eta\geqslant 0$, $O_1=O_1(0,0)$.

В плоскости ζ функция $\Phi(\zeta)$ определяется опять по формуле (5.74). Из этой формулы, для определения неизвестной функции φ, получается эквивалентное задаче Франкля интегральное уравнение, существование решения которого устанавливается на основе единственности решения этой задачи (см. А. В. Бицадзе [10]).

§ 6. КРАТКОЕ УКАЗАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ВАЖНЕЙШИХ ОБОБЩЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЙ

1. В предыдущих параграфах настоящей главы мы ограничивались рассмотрением лишь уравнения Лаврентьева (4.4).

Методы решения смешанных задач, примененные в указанных параграфах, могут быть использованы и в случае более общих уравнений, чем уравнение (4.4). Например, указанный в § 5 метод доказательства единственности решения задачи Франкля при соблюдении условия (5.65) с успехом может быть применен и в случае уравнения (5.60) (см. А. В. Бицадзе [11], Ю. В. Девенгталь [1]).

В самом деле, обозначим через $v(x, y)$ функцию, которая вместе с решением $u(x, y)$ задачи Франкля удовлетворяет системе уравнений

$$k(y)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{5.81}$$

При условии, что $v(0, 0)=0$, функция $v(x, y)$ однозначно определяется с помощью $u(x, y)$ из соотношений (5.81). Дополнительно будем требовать, чтобы граница области D и функция $u(x, y)$ удовлетворяли условиям, обеспечивающим непрерывность $v(x, y)$ в замкнутой области $\bar{D}$.

Пусть $a=a_1$. По любой простой замкнутой спрямляемой кривой C, лежащей в области D, в силу (5.81), имеем

$$\int_C (ku^2-v^2)\,dy+2uv\,dx=0. \tag{5.82}$$

Справедливость равенства (5.82) очевидна и в том случае, когда C совпадает с полной границей области D. Пользуясь этим равенством, мы покажем, что однородная задача Франкля ($\psi_1=\psi_2=f=0$) имеет только тривиальное решение.

Действительно, так как, в силу (5.63), имеем $v(0, y)=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, то на основании (5.60), (5.61) и (5.64) мы можем написать:

$$\int\limits_\sigma v^2 \frac{dy}{ds}\, ds+\int\limits_{A'B}\left(\sqrt{-k}\,u-v\right)^2 dy=0. \tag{5.83}$$

В силу условия (5.65) каждое слагаемое в левой части (5.83) равно нулю. Поэтому на участках дуги σ, где $\frac{dy}{ds}>0$, имеем $u=v=0$. Отсюда, в силу эллиптичности системы (5.81) в эллиптической части D_1 смешанной области D, заключаем, что $u=v=0$ в области D_1 (Карлеман [1], И. Н. Векуа [2]). Следовательно, имеем

$$u(x, 0)=0, \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a. \tag{5.84}$$

Трудности не представляет показать, что сингулярная задача Коши (5.84) для системы (5.81) в гиперболической части области D, при довольно общих предположениях относительно $k(y)$, не может иметь отличного от нуля решения. Таким образом, $u(x, y)=0$ всюду в области D.

2. При изучении задачи M, общей смешанной задачи и задачи Франкля мы накладывали довольно сильные ограничения на эллиптическую часть σ границы смешанной области [см. условия (5.3), (5.47) и (5.65)]. Применением метода, указанного К. Моравец при доказательстве единственности решения одной смешанной задачи [1, 2], эти условия значительно могут быть ослаблены.

В высшей степени желательно найти доказательство существования и единственности решения указанных задач не накладывая на дугу σ никаких ограничений, кроме обычного требования гладкости. В этом отношении важно выяснить вопрос о том, имеет ли место аналог доказанного в главе IV принципа экстремума для этих задач.

3. Когда во введении мы говорили о прикладной важности уравнений смешанного типа, в основном мы имели в виду

приложение теории этих уравнений в гидромеханике сжимаемой жидкости и в вопросах безмоментной теории оболочек.

Еще С. А. Чаплыгин показал, что построение теории газовых струй тесно связано с изучением уравнения вида

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{5.85}$$

которое в настоящее время носит название *уравнения Чаплыгина* [1]. Коэффициент k является известной функцией переменного y, которая предполагается положительной, например, при $y>0$, и отрицательной — при $y<0$. Случай $k(y)>0$ соответствует дозвуковому течению, а случай $k(y)<0$ — сверхзвуковому течению газа. Приняв некоторые дополнительные гипотезы, можно полагать, что $k(y) \doteq y$ (см., например, Трикоми [7]) или $k(y)=\operatorname{sgn} y$ (Л. И. Седов [1]).

При изучении околозвукового течения газа приходится иметь дело с уравнением (5.85) в смешанных областях.

В своих первых исследованиях [1—4], посвященных изучению уравнения (4.1), Трикоми исходил, по-видимому, из чисто математических интересов.

Впервые Ф. И. Франкль обратил внимание на то, что задача Трикоми и ряд других смешанных задач, о которых речь шла выше, находятся в тесной связи с изучением околозвукового течения газа [1—6].

И. Н. Векуа [2] заметил, что уравнения смешанного типа встречаются также в безмоментной теории оболочек в случае, когда главная кривизна оболочки меняет знак.

Довольно полный обзор математических формулировок смешанных задач, встречающихся при изучении трансзвукового течения газа, имеется в недавно опубликованной монографии Берса [2].

Замена уравнения Чаплыгина уравнением Трикоми или уравнением Лаврентьева с точки зрения действительных газодинамических приложений может быть и является «грубой», но, тем не менее, нам кажется естественным то обстоятельство, что первые математические исследования по проблеме уравнений смешанного типа посвящены именно этим уравнениям как модельным.

4. Исследование смешанных задач как для уравнения Чаплыгина, так и для более общих уравнений (и систем) смешанного типа является задачей большой теоретической и прикладной важности.

Некоторые результаты в этом направлении для уравнения Чаплыгина были анонсированы К. И. Бабенко [2]. Следует также отметить недавно опубликованную работу Моравец [4], в которой предложен новый подход к доказательству существования и единственности решения смешанных задач для уравнения Чаплыгина. Ниже приводится краткое содержание этой работы.

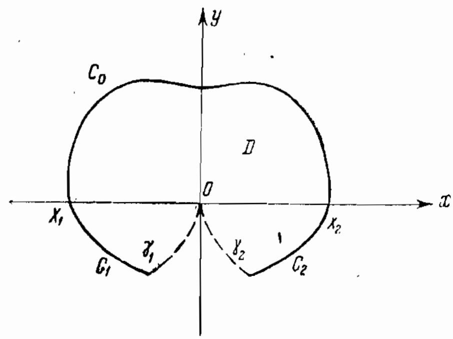

Рис. 13

Пусть имеется неоднородное уравнение Чаплыгина:

$$k(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=g(x,\ y), \tag{5.86}$$

где $k(y)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $k(0)=0$, $k'(y)>0$ как для положительных, так и для отрицательных значений y. Относительно требований, наложенных на функцию $g(x,\ y)$, речь будет идти ниже.

Обозначим через D конечную односвязную смешанную область с границей $B=C_1+C_0+C_2+\gamma_1+\gamma_2$ (рис. 13). Кривая C_0 лежит в верхней полуплоскости, концами опирается на ось $y=0$ в точках $X_1(x_1,\ 0)$, $X_2(x_2,\ 0)$, $x_1<0<x_2$ и имеет кусочно-непрерывную касательную. Кривые C_1 и C_2 лежат в нижней полуплоскости. Они выходят, соответственно, из точек X_1 и X_2 и пересекаются выходящими из начала координат характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (5.86), причем вдоль C_1 и C_2 имеет место неравенство:

$$k(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\geqslant 0. \tag{5.87}$$

Задача состоит в нахождении решения $\psi(x, y)$ уравнения (5.86) в области D, удовлетворяющего на $C = C_1 + C_0 + C_2$ условию

$$\psi = 0. \tag{5.88}$$

Постановка этой задачи исходит от Ф. И. Франкля [2].

Очевидным изменением рассуждения, приведенного в § 4 настоящей главы, эту задачу при $k(y) = y$ можно исследовать методом интегральных уравнений.

Вводя обозначения $\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_1$, $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u_2$, сформулированную выше задачу Моравец приводит к задаче определения в области D вектора $u = (u_1, u_2)$, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{gathered} Lu = g \quad \text{в} \quad D, \\ u_1 \frac{dx}{ds} + u_2 \frac{dy}{ds} = 0 \text{ на } C. \end{gathered} \tag{5.89}$$

Здесь приняты обозначения:

$$(Lu)_1 = k(y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}, \ (Lu)_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}, \ g = (g, 0).$$

Пусть H_* — гильбертово пространство измеримых в области D векторов $u = (u_1, u_2)$ с конечной нормой

$$\| u \|_* = \left(\iint\limits_D (r u_1^2 + u_2^2)\, dx\, dy \right)^{1/2},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Скалярное произведение двух векторов $u \in H_*$, $v = (v_1, v_2) \in H_*$ дается формулой

$$(u, v)_* = \iint\limits_D (r u_1 v_1 + u_2 v_2)\, dx\, dy.$$

При таком определении нормы лежащая на линии параболического вырождения $y = 0$ точка $O(0, 0)$ (из которой выходят граничные характеристики γ_1, γ_2) занимает особое положение. Это обстоятельство отчасти может быть поставлено в соответствие с тем фактом, что производная по переменному y от решения задачи Трикоми может обращаться в бесконечность в концевой точке $B(1, 0)$ характеристики CB, свободной от граничных данных.

Обозначим через H множество непрерывно дифференцируемых векторов $w=(w_1, w_2)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} &w=(0,\ 0) \text{ при } r=0;\\ &w_1=0 \quad \text{на} \quad C;\\ &\sqrt{-k}\,w_1-w_2=0 \text{ на } \gamma_1,\\ &\sqrt{-k}\,w_1+w_2=0 \text{ на } \gamma_2; \end{aligned} \tag{5.90}$$

$$\iint\limits_D \left(\frac{1}{r}(Lw)_1^2+(Lw)_2^2\right)dx\,dy<\infty. \tag{5.91}$$

Вектор $u \in H_*$ Моравец называет слабым решением задачи (5.89), если для каждого вектора $w \in H$ имеет место равенство

$$(w,\ g)=-(Lw,\ u), \tag{5.92}$$

где

$$(w,\ g)=\iint\limits_D (w_1 g_1+w_2 g_2)\,dx\,dy.$$

При непрерывной дифференцируемости слабого решения $u(x,\ y)$ оно является решением в обычном смысле.

В самом деле, применяя известную формулу Грина, получим

$$-(Lw,\ u)=(Lu,\ w)-\int\limits_B w_1(ku_1\,dy-u_2\,dx)+$$
$$+w_2(u_1\,dx+u_2\,dy). \tag{5.93}$$

Вдоль характеристики γ_1 имеем $dx=\sqrt{-k}\,dy$. Поэтому, в правой части (5.93) интеграл по γ_1 принимает вид

$$\int\limits_{\gamma_1} (\sqrt{-k}\,u_1+u_2)(-\sqrt{-k}\,w_1+w_2)\,dy.$$

А это выражение, в силу (5.90), равно нулю. Аналогично убедимся, что в правой части (5.93) интеграл по дуге γ_2 также равен нулю.

Таким образом, для любого $w \in H$ равенство (5.93) переходит в равенство

$$(w,\ g)=(Lu,\ w)-\int\limits_C w_2(u_1\,dx+u_2\,dy).$$

Отсюда сразу следует, что вектор u действительно является решением задачи (5.89).

С целью доказательства существования слабого решения вводится новое гильбертово пространство H^* измеримых векторов $t=(t_1, t_2)$ с конечной нормой

$$\|t\|^* = \left(\iint_D \left(\frac{1}{r} t_1^2 + t_2^2\right) dx\, dy\right)^{1/2}.$$

В пространстве H^* скалярное произведение векторов t и $s=(s_1, s_2)$ дается формулой

$$(t, s)^* = \iint_D \left(\frac{1}{r} t_1 s_1 + t_2 s_2\right) dx\, dy.$$

В силу (5.91) заключаем, что $Lw \in H^*$.

Теперь примем без доказательства, что для любого $w \in H$ имеет место оценка

$$\|w\|_* \leqslant B \|Lw\|^*, \tag{5.94}$$

где B — фиксированная (не зависящая от w) постоянная.

В силу неравенства Шварца имеем

$$|(w, f)| \leqslant \|w\|_* \cdot \|g\|^*.$$

Отсюда, на основании (5.94), получим

$$|(w, g)| \leqslant B \|Lw\|^* \|g\|^*. \tag{5.95}$$

Для фиксированного вектора $g \in H^*$ выражение (w, g) является линейным (ограниченным) функционалом от Lw:

$$(w, g) = G(Lw).$$

Функционал $G(s)$ определен пока для элементов вида $s = Lw \in H^*$, где $w \in H$. Но мы его доопределим на все точки пространства H^*.

В силу (5.95) можем написать

$$|G(Lw)| \leqslant B_1 \|Lw\|^*,$$

где $B_1 = B_1(g)$.

Из функционального анализа известна теорема: если $G(s)$ является линейным (ограниченным) функционалом, определенным на всем пространстве H^*, то можно найти такой элемент $t \in H^*$, для которого имеет место равенство

$$G(s) = (s,\ t)^*$$

или, что то же самое:

$$(w,\ g) = G(Lw) = (Lw,\ t)^*,$$

где w — любой элемент из H.

Рассмотрим теперь вектор u с компонентами $u_1 = -\frac{t_1}{r}$, $u_2 = -t_2$, где $t = (t_1,\ t_2) \in H^*$.

В силу равенства

$$\iint\limits_D (ru_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{t_1^2}{r} + t_2^2\right) dx\,dy$$

заключаем, что $u \in H_*$.

Следовательно, имеем

$$(w,\ g) = (Lw,\ t)^* = \iint\limits_D \left(\frac{1}{r}\,(Lw)_1 t_1 + (Lw)_2\, t_2\right) dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_D ((Lw)_1 u_1 + (Lw)_2 u_2)\;dx\,dy = -(Lw,\ u),$$

откуда сразу следует, что вектор $u \in H_*$ является искомым слабым решением.

Из оценки (5. 94) следует также и единственность решения сопряженной задачи: $w \in H$, $Lw = 0$.

Доказательства неравенства (5. 94), которое играет весьма важную роль, мы здесь не воспроизводим.

При доказательстве этого неравенства Моравец вынуждена накладывать на границу области D дополнительные ограничения в виде следующих неравенств:

$$x\,dy > k_0\,ds \text{ вдоль } C_1 \text{ и } C_2,$$

$$y^{-1/2}(x\,d\mu - \mu\,dx) \geqslant k_0\,ds > 0 \text{ вдоль } C_0.$$

Здесь k_0 — некоторая положительная постоянная, а

$$\mu = \int\limits_0^y \sqrt{k}\;dy.$$

К сожалению, эти ограничения довольно сильные, и было бы весьма желательно освободиться от них. Наряду с этим очень важно показать, при каких условиях слабые в смысле Моравец решения окажутся решениями в обычном смысле.

Кроме работ авторов, названных в тексте настоящей книги, за последние годы в литературе появился целый ряд работ (Агмон [1], Н. И. Бакиевич [1], Р. Г. Баранцев [1—2], Ван Гуан-инь [1], Вайнбергер [1], Жермен и Бадер [4], Жермен [2, 3], И. Л. Кароль [2—4], К. Моравец [3]), справки о которых можно найти в приведенной ниже библиографии.

Имеющиеся в настоящее время методы исследования уравнений смешанного типа носят более или менее частный характер. Отчасти этим вызваны те затруднения, которые возникли даже при постановке смешанных задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях.

ЛИТЕРАТУРА

Агмон (Agmon S.)

[1] Boundary Value Problems for Equations of mixed type. Convergo internaz., Equazioni lineari alle derivate parziali, Roma, 1955, 54—68.

Агмон, Ниренберг, Проттер (Agmon S., Nirenberg L., Protter M. H.)

[1] A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type Commun. Pure Appl. Mat., 1953, 6, 455—470.

Бабенко К. И.

[1] К теории уравнений смешанного типа. Докт. дисс. (библиотека Матем. ин-та АН СССР), 1952.

[2] К теории уравнений смешанного типа. «Усп. матем. наук», 1953, **VIII**, 2 (54), 160.

Бакиевич Н. И.

[1] Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа в полосе и полуплоскости. «Докл. АН СССР», 1957, **112**, 793—796.

Баранцев Р. Г.

[1] Смешанная задача для уравнения $\psi_{\sigma\sigma} - k(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$ с данными по кривой $\theta = \theta(s)$ «Докл. АН СССР», 1957, **114**, 919—922.

[2] Краевая задача для уравнения $\psi_{\sigma\sigma} - k(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$ с данными на характеристиках и прямых $\sigma = \text{const}$. «Докл. АН СССР», 1957, **113**, 955—958.

Бергман (Bergman S.)

[1] On solutions of linear partial differential equations of mixed type. Amer. J. Math., 1952, **74**, 2, 444—474.

Березин И. С.

[1] О задаче Коши для линейных уравнений второго порядка с начальными данными на линии параболичности. «Матем. сб.», 1949, **24**, 301—320.

Берс (Bers L.)

[1] On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. Nat. Adv. Com. Aeronautics, Techn. Not., 1950, 2058.

[2] Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. Surv. Appl. Mathem., N.-Y., 1958, **4**.

Бицадзе А. В.

[1] О единственности решения задачи Дирихле. «Усп. матем. наук», 1948, **III**, 6 (28), 211.

[2] Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. «Докл. АН СССР», 1957, **112**, 6, 983—986.

[3] Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. «Сообщ. АН Груз. ССР», 1944, **V**, 8, 761—770.

[4] О некоторых задачах смешанного типа. «Докл. АН СССР», 1950, **70**, 4, 561—564.

[5] К проблеме уравнений смешанного типа. Докт. дисс., 1951 (библиотека Матем. ин-та АН СССР).

[6] К проблеме уравнений смешанного типа. «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1953, **XLI**.

[7] Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений. «Усп. матем. наук», 1957, **XII**, 5 (77), 185—190.

[8] К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях. «Докл. АН СССР», 1956, **110**, 6, 901—902.

[9] Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. «Докл. АН СССР», 1953, **122**, 2, 167—170.

[10] Об одной задаче Франкля. «Докл. АН СССР», 1956, **109**, 6, 1091—1094.

[11] О единственности решения задачи Франкля для уравнений Чаплыгина. «Докл. АН СССР», 1957, **119**, 3, 375—376.

Вайнбергер (Weinberger Hans F.)

[1] Sur les solutions fortes du problème de Tricomi. C. r. Ac. Sc. Paris, 1954, **238**, 1961—1962.

Ван Гуан-инь

[1] О единственности задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина. Acta Math. Sinica, 1955, **5**, 455—461.

Введенская Н. Д.

[1] Об одной краевой задаче для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области. «Докл. АН СССР», 1953, **91**, 4, 711—714.

Векуа И. Н.

[1] Новые методы решения эллиптических уравнений. М., Гостехиздат, 1948.

[2] Обобщенные аналитические функции и их применения. М., Физматгиз, 1959.

В и ш и к М. И.

[1] О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений «Матем. сб.», 1951, **29**, 3, 615—676.

[2] О первой краевой задаче для эллиптических дифференциальных уравнений, вырождающихся на границе области. «Докл. АН СССР», 1953, **93**, 1, 9—12.

[3] Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. «Матем. сб.», 1954, **35** (77), 513—538.

Г а а к, Г е л ь в и г (Haack W., Hellwig G.)

[1] Lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von gemischtem Typus. Arch. Math., 1954, 5, 60—76.

Г е л ь в и г (Hellwig G.)

[1] Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus. Math. Zeitschrift, 1954, **61**, 24—46.

[2] Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten. J. Rat. Mech. a. Anal., 1956, 5, 2, 395—418.

Г е л л е р с т е д т (Gellerstedt S.)

[1] Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte. Thèse, Uppsala, 1935.

[2] Sur un problème anx limites pour l'équation $y^{2s}z_{xx}+z_{yy}=0$, Arkiv f. M. A. O. F., 1936, **25A**, 10.

[3] Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$, Arkiv f. M. A. O. F., 1936, **26A**, 3.

Д е в е н г т а л ь Ю. В.

[1] О существовании решения одной задачи Ф. И. Франкля. «Докл. АН СССР», 1958, **119**, 1, 15—18.

Д и н С я - с и

[1] Дифференциальные уравнения смешанного типа. Acta Math. Sinica, 1955, 5, 193—204.

Ж е р м е н, Б а д е р (Germain P., Bader R.)

[1] Sur le problème de Tricomi. C. r. Ac. Sc. Paris, 232 (1951), 463—465.

[2] Recberches sur une équation du type mixte. Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une équation du type mixte. Note technique O. N. E. R. A., 1952.

[3] Sur quelques problèmes relatifs à l'équation du type mixte de Tricomi, 1952.

[4] Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte. Bull. Sos. math. France, 1953, **81**, 145—174.

Ж е р м е н (Germain P.)

[1] Nouvelles solutions de l'équation de Tricomi. C. r. Ac, Sc. Paris, 1950, **231**, 1116—1118.

[2] Remarques sur les propriétés qualitatives des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du type mixte. Mém. Acad. Roy. Belg. cl. sci., 1954, **28**, 28—36.

[3] Remarks on transforms and boundary value problems. J. Rat. Mech. a Anal., 1955, 4, 925—941.

Заремба (Zaremba S.)

[1] Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace. Bull. Cracovie, 1910, Ser. A, 313—344 (имеется русский перевод: «Усп. матем. наук», 1946, **I**, 3—4 (13—14), 125—146.

Капилевич М. Б.

[1] Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа. «Матем. сб.», 1952, **30**, 1, 11—38.

Карапетян К. И.

[1] О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости. «Докл. АН СССР», 1956, **106**, 6, 963—966.

Карлеман Т. (Carleman T.)

[1] Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Arkiv. f. M. A. O. F., 1939, **26B**, 17, 1—9.

Карманов В. Г.

[1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа. «Докл. АН СССР», 1954, **95**, 3, 439—442.

[2] О существовании решений некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа. «Изв. АН СССР, серия матем.», 1958, **22**, 1, 117—134.

Кароль И. Л.

[1] К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. «Матем. сб.», 1955, **38**, (80), 3, 261—282.

[2] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. «Докл. АН СССР», 1953, **88**, 197—200.

[3] К теории уравнений смешанного типа. «Докл. АН СССР», 1953. **88**, 397—400.

[4] Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. «Докл. АН СССР», 1955, **101**, 793—796.

Келдыш М. В.

[1] О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. «Докл. АН СССР», 1951, **77**, 2, 181—183.

Киквидзе З. А.

[1] Об одной системе уравнений в частных производных смешанного типа. «Сообщ. АН Груз. ССР», 1954, **15**, 6, 321—326.

Конти (Conti R.)

[1] Sul problema di Cauchy per l'equazione $y^{2\alpha}k^2(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z_x, z_y)$. Con i data Sulla linea parabolica. Ann. Math., 1950, **31**, 303—326.

Кудрявцев Л. Д.

[1] О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. «Докл. АН. СССР», 1956, **108**, 1, 16—19.

Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В.

[1] К проблеме уравнений смешанного типа. «Докл. АН СССР», 1950, **70**, 3, 373—376.

Ладыженская О. А.

[1] Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева—Бицадзе. «Усп. матем. наук», 1954, **9**, 4 (62), 187—190.

Леви (Levy E. E.)

[1] Sulle equazioni lineari totalmante ellitiche alle derivate parzieli. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1907, **24**, 275—317 (имеется русский перевод: «Усп. матем. наук», 1941, VIII).

Миранда (Carlo Miranda)

[1] Equazioni alle derivate parziali di tipo elliptico, 1955 (имеется русский перевод: «Уравнения с частными производными эллиптического типа», Изд-во иностр. лит., 1957).

Михлин С. Г.

[1] К теории вырождающихся эллиптических уравнений «Докл. АН СССР», 1954, **94**, 3, 183—186.

[2] Об интегральном уравнении Трикоми. Докл. АН СССР, 1948, **59**, **6**, 1053—1056.

Моравец (Morawetz Cathleen S.)

[1] A Uniqueness Theorem for Frankl's Problem. Commun. Pure Appl. Math., 1954, **7**, 4, 697—703.

[2] Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic—hyperbolic equation. Proc. Royal Soc., 1956, **236A**, 141—144.

[3] Uniqueness for the analogue of the Neumann problem for mixed equations. Michigan Math. J., 1957, **4**, 5—14.

[4] A weak Solution for a System of Equations of Elliptic-Hyperbolic type. Commun. Pure Appl. Math., 1958, **XI**, 3, 315—331.

Мусхелишвили Н. И.

[1] Сингулярные интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1946.

Никольский С. М.

[1] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. «Изв. АН СССР, серия матем.», 1943, **7**, 3, 147.

Овсянников Л. В.

[1] О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера—Дарбу. «Докл. АН СССР», 1953, **91**, 3, 457—460.

Олейник О. А.

[1] Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области. «Докл. АН СССР», 1952, **87**, 6, 885—887.

[2] Об эллиптических уравнениях второго порядка. «Усп. матем. наук», 1952, **7**, 3, 106—107.

Проттер (Protter M. H.)

[1] The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation. Can. J. Math., **6**, 4, 1954, 542—553.

[2] Uniqueness Theorems for the Tricomi Problem. I—II. J. Rat. Mech. a. Anal., 1953, **2**, 107—114; 1955, **4**, 721—732.

[3] New Boundary Value Problems for the Wave Equation and Equations of mixed type. J. Rat. Mech. a. Anal., 1954, **3**, 4, 435—446.

[4] An Existence Theorem for the Generalized Tricomi Problem. Duke Math. J., 1954, **21**, 1, 1—7

Руднев Г. В.

[1] О некоторых плоско-параллельных установившихся движениях газа. Докт. дисс. 1951 (библиотека Матем. ин-та АН СССР)

Седов Л. И.

[1] Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950

Смирнов М. М.

[1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа «Докл. АН СССР», 1955, **104**, 5, 699—701.

Сомильяна (Somigliana C.)

[1] Sui sisteme simmetrici di equazioni a derivate parziali. Ann. Mat. pura ed apl., 1894, Ser. II, 22, 143—156.

Терсенов С. А.

[1] Об одном уравнении эллиптического типа, вырождающемся на границе области. «Докл. АН СССР», 1957, **115**, 4, 670—673.

Трикоми Ф. (Tricomi Francesco)

[1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto. Mem. Lincei, 1923, Ser. V, **XIV**, fasc. VII (имеется русский перевод: «О линейных уравнениях смешанного типа». М.—Л., Гостехиздат, 1947).

[2] Ulteriori ricerche sull'equazione $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1928, **LII**. (см. добавление I к русскому переводу [1]).

[3] Ancora sull'equazione $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. Rend. Acc. Lincei, 1927, Ser. VI, **VI**. (см. добавление II к русскому переводу [1]).

[4] Sull'equazione $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; Atti Congr. Internaz., **III**, Bologna, 1928 (см. добавление III к русскому переводу [1]).

[5] Lezioni sulle equazioni a derivate parziali, Torino, 1954 (имеется русский перевод).

[6] Equazioni a derivate parziali. Roma, 1957.

[7] Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. Monatsch. f. Math., 1954, **58**, 160—171.

У Син-мо, Дин Ся-си (Ou Sing-Mo, Ding Shia-Shi).

[1] Sur l'unicité du problème de Tricomi de l'équation de Chaplygin, Sc. Rec., 1955, **3**, 393—399.

Филиппов А. Г.

[1] О разностном методе решения задачи Трикоми. «Изв. АН СССР, серия матем.», 1957, **21**, 73—88.

Франкль Ф. И.

[1] О задаче Коши для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии. «Изв. АН СССР, серия матем.», 1945, **8**, 5, 195—224.

[2] О задаче С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. «Изв. АН СССР, серия матем.», 1945, **9**, 2, 121—143.

[3] Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу—Трикоми и его применении к приближенному нахождению критического течения в заданном плоско-параллельном сопле Лаваля. «Докл. АН СССР», 1947, **56**, 683—686.

[4] Об одной новой краевой задаче для уравнения $yz_{xx}+z_{yy}=0$. «Уч. зап. МГУ, механика», 1951, **III**, 99—116.

[5] Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения «Ж., прикл. матем. и мех.», 1956, **XX**, 2, 196—202.

[6] Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева—Бицадзе. «Вестн. МГУ» 1951, **11**, 3—7.

Фридрихс (K. O. Friedrichs)

[1] Symmetric Positive Linear Differential Equations. Commun. Pure Appl. Math., 1958, **XI**, 3, 333—418.

Халилов З. И.

[1] Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток. «Докл. АН Азерб. ССР», 1953, **9**, 4, 189—194.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

[1] Zur Theorie der linearen metrischen Räume. J. f. reine u. angew. Math., 1932, **167**, 294—311 (имеется русский перевод — см. Ф. Хаусдорф «Теория множеств», добавление, ОНТИ, 1937).

Хон Чунь-и

[1] Задача Дирихле для одного класса линейных эллиптических уравнений второго порядка с параболическим вырождением на границе области. Sci. Record, 1958, **II**, 8, 244—249.

Чаплыгин С. А.

[1] О газовых струях. Полное собр. соч., т. II, 1933.

Чибрарио (Cibrario M.)

[1] Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto iperbolo-paraboliche. Rend. Circ. Mat. Palermo, **LVI**, 1932.

[2] Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto. Rend. Lombardo, 1932, **65**, 889—906.

[3] Alcuni teoremi di esistenza e di unicita per l'equatione $xz_{xx}+$ $+z_{yy}=0$. Atti R. Acc. Torino, 1932—1933, **68**.

Чи Минь-ю

[1] О задаче Коши для одного класса гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения. Acta Mathem. Sinica, 1958, **8**, 4, 521—530.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Андрей Васильевич Бицадзе

Уравнения смешанного типа

Утверждено к печати Математическим институтом им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Редактор издательства *А. З. Рывкин*
Технический редактор *Т. В. Полякова*

РИСО АН СССР № 38-12В. Сдано в набор 27/VII 1959 г. Подписано к печати 26/IX 1959 г. Формат 60×92 1/16. Печ. л. 10,25 Уч.-изд. л. 7,2. Тираж 2200 экз. Т-10333. Изд. № 4044. Тип. зак. № 274. Цена 5 руб.

Издательство Академии наук СССР. Москва, Б-62, Подсосенский пер., д. 21
1-я типография Издательства АН СССР. Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
24	Ф-ла (1.48)	$(2\eta_y + b\eta_x)$	$(2\eta_y + b\eta_x)\,\xi_y$
31	2 св.	$\int\limits_\tau^\eta a\,(\ \,,\tau_1)$	$\int\limits_\tau^\eta a\,(t,\,\tau_1)$
45	1 сн.	$[x+$	$\nu\,[x+$
60	9 сн.	u_{nn}	u_{2n}
64	9 св.	$z\,\|$	$\|\,z\,\|$
65	1 сн.	$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta}$
89	5 сн.	$\zeta - \frac{1}{2}\,\|$	$\|\,\zeta - \frac{1}{2}\,\|$
100	Ф-ла (4.59)	$\left(\frac{1}{t-x}\,\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)$	$\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)$
126	Ф-ла (5.24)	$-\lambda'(t)$	$\lambda'(t)$

А. В. Бицадзе