Ф.К.
Б 5669
517.9
5669
в.41

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
имени В. А. СТЕКЛОВА

XLI

А. В. БИЦАДЗЕ

К ПРОБЛЕМЕ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1953

ГНТБ
МИФ

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ХР

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
имени В. А. СТЕКЛОВА

XLI

А. В. БИЦАДЗЕ

К ПРОБЛЕМЕ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1953

ЦНТБ
ММиП

...С. ПУБЛИЧНАЯ
НАУЧН-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА СССР

1997/21/62

Н
44а
№41

~~В1~~
~~Т782~~
№41
~~517.9~~
~~Б669~~

Ответственный редактор
академик И. Г. Петровский

Зам. отв. редактора
профессор С. М. Никольский

ВВЕДЕНИЕ

Ряд важных проблем газовой динамики сводится к краевым задачам уравнений второго порядка смешанного типа; область, в которой ищется решение, состоит из двух частей, в одной из которых уравнение принадлежит эллиптическому типу, а в другой — гиперболическому.

Однако до настоящего времени для уравнений смешанного типа удовлетворительно не решен вопрос о постановке краевых условий, обеспечивающих существование и единственность решения.

Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены Ф. Трикоми [1]. Он рассматривал уравнение

$$y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

для которого прямая $y=0$ является линией вырождения типа, причем в полуплоскости $y>0$ оно эллиптического типа, а в полуплоскости $y<0$ — гиперболического.

Пусть D—область, ограниченная гладкой линией Жордана σ с концами в точках A (0, 0), B (1, 0), целиком лежащей в верхней полуплоскости, и характеристиками L_1: $x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=0$ и L_2: $x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=1$ уравнения (1).

Трикоми изучал следующую задачу: *Требуется найти регулярное в области D решение уравнения* (1) *по граничным условиям*

$$U=\varphi \ \text{на}\ \sigma,$$
$$U=\psi(x)\ \text{на}\ L_1,$$

где φ и ψ — *заданные функции* (задача Трикоми).

Регулярным в области D решением уравнения (1) Трикоми называет такое его решение $U(x, y)$, которое непрерывно в замкнутой области $\bar{D}$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точек A и B, вблизи которых $\frac{\partial U}{\partial y}$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $^5/_6$.

Работа [1] посвящена подробному исследованию задачи Трикоми. К сожалению, в этой работе при доказательстве теоремы единственности решения задачи допущена неточность.

В работе [2] Трикоми дает другой вариант доказательства теоремы единственности, но, повидимому, не замечает (как это следует из самой работы) допущенной им в [1] неточности.

В работе [1] при доказательстве теоремы существования решения задачи Трикоми основную роль играет следующая, так называемая предварительная теорема существования: «*Существует одно (и только одно) регулярное решение уравнения* (1), *принимающее произвольно заданные непрерывные значения на контуре, состоящем из отрезка AB оси Ox и произвольной кривой* σ *эллиптической полуплоскости, проходящей через точки A и B, лишь бы:* 1° *кривая* σ *оканчивалась двумя сколь угодно малой длины дужками* AA' и BB' *так называемой нормальной кривой* $x^2+\frac{4}{9}y^3=x$, *а в остальной части отклонялась от этой кривой наружу;* 2° *заданные на* σ *значения как функции длины дуги обладали первой производной, непрерывной и конечной в окрестности точек A* и *B*» (стр. 96).

На основании следующего соотношения, связывающего $\tau(x)=U(x, 0)$ и $\nu(x)=\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$, $y=0$ ($U(x, y)$ — искомое решение):

$$\tau(x)=\varphi_1(x)+\frac{3^{2/3}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2}\int_0^x\frac{\nu(t)\,dt}{(t-x)^{1/3}},$$

где $\varphi_1(x)$ выражается явно через $\psi(x)$, решение задачи Трикоми в конце концов сводится к нахождению функции $\nu(x)$, $0<x<1$ из некоторого сингулярного интегрального уравнения. Это интегральное уравнение, в случае когда σ — нормальная кривая, принимает простой вид

$$\nu(x)+\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ явно выражается (в квадратурах) через φ и ψ, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Трикоми удалось (правда, ценой весьма сложных вычислений) получить формулу обращения интегрального уравнения (2).

В случае же, когда σ оканчивается двумя сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' нормальной кривой, а в остальной части отклоняется от этой кривой наружу, применением формулы обращения интегрального уравнения (2) Трикоми удалось получить для определения функции $\nu(x)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из теоремы единственности.

От такого специального ограничения, налагаемого на кривой σ, Трикоми удалось избавиться в другой работе [3] лишь при доказательстве предварительной теоремы существования.

Дальнейшее развитие результатов Трикоми получено в работах Геллерстедта [4, 5, 6]. Геллерстедт рассматривает следующее уравнение смешанного типа

$$y^{2m-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \qquad (m \text{ — натуральное число})$$

и наряду с задачей Трикоми исследует случай, когда в гиперболической части области значения искомого решения задаются на двух кусках характеристик (причем в работах Геллерстедта существенно то, что берется два куска), а в эллиптической полуплоскости граничные значения задаются на нормальной кривой

$$\left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 y^{2m+1}+x^2=1.$$

Следуя Трикоми, Геллерстедт сводит решение упомянутой задачи к сингулярному интегральному уравнению и, применяя известную идею Карлемана [7], решает его в явном виде.

Интегральное уравнение Трикоми (2) является частным случаем уравнения Геллерстедта. Формула обращения последнего интегрального уравнения Геллерстедтом получена весьма простым способом. Заметим, что этим же способом С. Г. Михлиным [8] была получена формула обращения для интегрального уравнения Трикоми (2) (повидимому, С. Г. Михлин не знал о существовании работы [6]).

Уравнениями смешанного типа занимались советские математики: академик М. А. Лаврентьев, Ф. И. Франкль [17, 18] и К. И. Бабенко [19]. — Особо нужно отметить исследование К. И. Бабенко.

Академик М. А. Лаврентьев впервые обратил внимание на то, что самым простым и типичным представителем линейных уравнений второго порядка смешанного (элиптико-гиперболического) типа является уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{3}$$

для которого линией вырождения типа является ось $y=0$.

Настоящая работа посвящена изучению ряда граничных задач смешанного типа для уравнения (3) М. А. Лаврентьева.

В первой главе дается решение смешанной задачи, когда граничные значения искомого решения уравнения (3) задаются на лежащей в верхней — эллиптической — полуплоскости части σ границы смешанной области D и на одной из характеристик уравнения (3) (см. фиг. 1). Эту задачу, которая является аналогом задачи Трикоми, в дальнейшем мы будем называть задачей T.

В случае, когда σ — гладкая дуга, удовлетворяющая условию Ляпунова, а заданная на ней функция φ дифференцируема, задачу T можно привести при помощи конформного отображения к задаче Дирихле для уравнения Лапласа [9].

Во второй главе ставятся и решаются три задачи смешанного типа, являющиеся обобщениями задачи T. А именно: 1) смешанная задача T_1, когда значения искомого решения уравнения (3) задаются на линии σ и на определенных кусках характеристик (см. фиг. 2); 2) смешанная задача T_2, когда значения искомого решения задаются на лежащих в эллиптической полуплоскости частях σ_1, σ_2 границы двусвязной смешанной области и на определенных характеристиках уравнения (3) (см. фиг. 3); 3) смешанная задача T_3, когда на σ задается нормальная производная от искомого решения, а на характеристике — значение самого решения.

Для задач T, T_1, T_2, T_3 имеет место весьма важный принцип экстремума. Этот принцип впервые был сформулирован в нашей работе [11]. Позже этот же принцип для уравнения Трикоми был сформулирован в работе [10]. Простейший вывод упомянутого выше принципа приведен в § 2 главы I.

Третья глава посвящена общей смешанной задаче M, которая заключается в определении решения уравнения (3), когда граничные значения искомого решения задаются на σ и на определенной линии L, лежащей внутри характеристического треугольника ACB (см. фиг. 4).

Некоторые результаты этой главы были опубликованы без подробного доказательства в заметках [9, 11, 12].

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность моему учителю академику М. А. Лаврентьеву, оказавшему мне большую помощь при выполнении настоящей работы.

Глава I

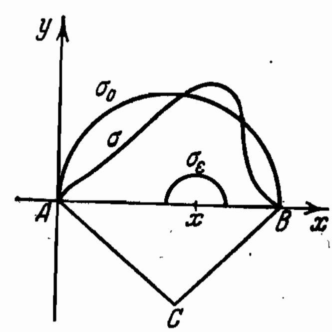
ЗАДАЧА *T*

В этой главе мы даем решение тремя различными способами задачи типа Трикоми, названной нами во введении задачей *T*, для уравнения М. А. Лаврентьева

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{1.1}$$

Переходим к точной формулировке этой задачи.

§ 1. Постановка задачи *T*. Пусть D односвязная область плоскости xy, ограниченная линией Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1,0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками AC: $y=-x$ и CB: $y=x-1$ уравнения (1.1) (фиг. 1).



Фиг. 1.

Обозначим через D_1 и D_2 те части области D, в которых, соответственно, $y>0$ и $y<0$. Так как в области D_1 уравнение (1.1) принадлежит эллиптическому типу, а в области D_2— гиперболическому типу, то естественно их называть, соответственно, эллиптической и гиперболической частями смешанной области D. Общая прямолинейная граница AB этих областей является линией вырождения типа уравнения (1.1).

Задача *T*. *Требуется определить функцию* $U(x, y)$ *со следующими свойствами:* 1) $U(x, y)$ *является решением уравнения* (1.1) *в области* D *при* $y \neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$; 3) *частные производные* $\frac{\partial U}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial U}{\partial y}$ *непрерывны внутри области* D, *причем вблизи точек* A *и* B *они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;* 4) *на линии* σ *и на одной из характеристик, например на* AC, *принимает заданные значения*

$$U = \varphi \text{ на } \sigma, \tag{1.2}$$

$$U = \psi(x) \text{ на } AC, \tag{1.3}$$

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

Для задачи T имеет место своеобразный принцип экстремума, который играет важную роль при решении этой задачи.

§ 2. Принцип экстремума. *Решение задачи T, принимающее нулевые значения на характеристике AC или CB, не может достигать на открытом отрезке AB линии вырождения типа ни положительного максимума, ни отрицательного минимума.*

Переходим к доказательству этого принципа.

Общее решение уравнения (1.1) в области D_2, как известно, дается формулой

$$U(x, y) = f(x+y) + f_1(x-y), \tag{1.4}$$

где $f(t)$ и $f_1(t)$ — произвольные, непрерывные в замкнутом интервале $(0,1)$ функции, дважды дифференцируемые внутри этого интервала.

В силу условия

$$U = 0 \text{ на } AC \tag{1.3$_0$}$$

из (1.4) получаем, что $f_1(2x) + f(0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ или $f_1(t) = -f(0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Подставляя полученное выражение $f_1(t)$ в (1.4), заключаем, что решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.3$_0$) в области D_2, имеет вид

$$U(x, y) = f(x+y) - f(0). \tag{1.5}$$

В частности, при $y = 0$ из (1.5) имеем

$$U(x, 0) = f(x) - f(0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.1) в области D_1 является гармонической функцией. Пусть $V(x, y)$ гармонически сопряжена с $U(x, y)$ в области D_1 и удовлетворяет условию

$$V(0, 0) = 0. \tag{1.7}$$

В силу условий Коши—Римана и непрерывности $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ при переходе через отрезок AB, из (1.5) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = f'(x),$$

откуда после интегрирования, принимая во внимание (1.7), получаем

$$V(x, 0) = -f(x) + f(0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.8}$$

Из (1.6) и (1.8) находим

$$U(x, 0) + V(x, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.9}$$

Обозначим через $F(z)$, $z = x + iy$, функцию $U(x, y) + iV(x, y)$, аналитическую внутри области D_1.

В силу условия (1.9), функция $F(z)$ аналитически продолжается через отрезок AB действительной оси в симметрическую относительно этой оси область, которую мы обозначим через D_1^*, причем

$$F(z)=\begin{cases} U(x, y)+iV(x, y) & \text{при } y\geqslant 0,\\ -V(x, -y)-iU(x, -y) & \text{при } y\leqslant 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Совокупность областей D_1 и D_1^* вместе с открытым отрезком AB обозначим через D^*.

Пусть K — круг радиуса ε, с центром в точке $(\xi, 0)$, целиком лежащий в области D^*. Обозначим через C_k и $\overline{C}_k$, соответственно, верхнюю и нижнюю полуокружности круга K.

Функция $F(z)$ однозначно определяется в круге K через значения своей действительной части на дуге C_k. В самом деле, $U(x, y)$ является действительной частью голоморфной в круге K функции $F(z)$, которая единственным образом определяется как решение следующей задачи теории функций комплексного переменного (задача Римана—Гильберта [13]): *требуется найти голоморфную в круге K и непрерывную в замкнутом круге $\overline{K}$ функцию $F(z)$ по граничному условию*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= U(x, y), & z\in C_k,\\ \operatorname{Im} F(z) &= -U(x, -y), & z\in \overline{C}_k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Решение (единственное) этой задачи дается формулой

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{U(t)\,dt}{t-z} - \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{C}_k} \frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{U(\overline{t})\,dt}{t-z}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где под радикалом понимается та ветвь этой функции, для которой $\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)} = iz+\ldots$ при больших $|z|$.

Из формулы (1.12) непосредственно получается своеобразная формула среднего значения

$$U(\xi, 0) = \operatorname{Re} F(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}}\, U(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{1.13}$$

где $t-\xi=\varepsilon e^{i\vartheta}$, и берется арифметическое значение радикала.

Из формулы (1.13) следует, что функция $U(x, y)$ не может достигать на открытом отрезке AB ни положительного максимума, ни отрицательного минимума.

Замечание 1. Если граничное условие (1.3_0) заменено условием

$$U(x, y)=0 \quad \text{на} \quad CB,$$

то соотношение (1.9) для этого случая примет вид

$$U(x, 0)-V(x, 0)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Соответственно с этим формула (1.13) заменится формулой

$$U(\xi,\ 0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\,U(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{1.14}$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость принципа экстремума и для рассматриваемого случая.

Замечание 2. Принцип экстремума можно было бы вывести и из того факта, что, в силу условий склеивания, из формулы (1.5) получается

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=0. \tag{1.15}$$

В самом деле, если бы в точке $(\xi,\ 0)$ функция $U(x,\ y)$ достигала отличного от нуля экстремума, то необходимо должно было бы $\frac{\partial U(\xi,0)}{\partial\xi}=0$. Отсюда, в силу (1.15), получаем $\frac{\partial U}{\partial y}=0$ в точке $(\xi,\ 0)$, что невозможно, ибо, по известной теореме из теории гармонических функций, в точке прямолинейной границы AB области D_1, где гармоническая функция $U(x,\ y)$ достигает экстремума, имеет место неравенство $\frac{\partial U}{\partial y}\neq 0$.

§ 3. Единственность решения. Задача T не может иметь более одного решения. В самом деле, если задача T имела бы два решения $U(x,\ y)$ и $U_1(x,\ y)$, то разность $U(x,\ y)-U_1(x,\ y)$ была бы решением однородной задачи, т. е. задачи с нулевыми граничными условиями. Поэтому, согласно принципу экстремума: $U(x,\ 0)-U_1(x,\ 0)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Отсюда заключаем, что $U(x,\ y)-U_1(x,\ y)=0$ во всей области D.

§ 4. Доказательство существования решения. В этом параграфе мы будем предполагать, что линия σ удовлетворяет условию Ляпунова, т. е. *угол α, образованный касательной к σ с осью x-ов, как функция длины дуги s удовлетворяет условию Гельдера*: $|\alpha(s+h)-\alpha(s)|\leqslant\lambda|h|^{\varkappa}$, $\lambda>0$, $0<\varkappa\leqslant 1$.

Будем также предполагать, что частные производные искомого решения $U(x,\ y)$ задачи T непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ всюду, кроме, быть может, точек A и B.

Не ограничивая общности, можем предполагать, что $\varphi(A)=\varphi(B)=\psi(A)=0$.

Если нам удастся найти решения $U_1(x,\ y)$ и $U_2(x,\ y)$ задачи T, удовлетворяющие соответственно условиям

$$U_1=\varphi \text{ на } \sigma,\quad U_1=0 \text{ на } AC \tag{1.16}$$

и

$$U_2=0 \text{ на } \sigma,\quad U_2=\psi(x) \text{ на } AC, \tag{1.17}$$

то искомое решение получится в виде суммы $U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)$.

Обозначим через $F_1(z)$ голоморфную в области D_1 функцию $U_1(x, y) + iV_1(x, y)$, удовлетворяющую условию

$$F_1(0) = 0.$$

В силу второго из условий (1.16), как мы уже видели в § 2, функция $F_1(z)$ аналитически продолжается через отрезок AB в область D_1^*, причем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_1(t) &= \varphi(t); \qquad t = \xi + i\eta \in \sigma, \\ \operatorname{Im} F_1(t) &= -\varphi(\bar{t}); \qquad t \in \bar{\sigma}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где $\bar{\sigma}$ — зеркальное отображение σ относительно действительной оси.

Таким образом, нахождение функции $F_1(z)$ сводится к нахождению голоморфной внутри области D^* и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}^*$ функции $F_1(z)$ по граничному условию (1.18).

Так как D^* симметрична относительно действительной оси и содержит ее отрезок AB, то эту область мы можем конформно отобразить на круг $\left|z - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, так, чтобы σ совпало с верхней полуокружностью σ_0, а $\bar{\sigma}$ — с нижней полуокружностью $\bar{\sigma}_0$ этого круга [14]. Таким образом, мы с самого же начала можем предполагать, что σ совпадает с полуокружностью σ_0.

Но в случае окружности, как мы это уже видели в § 2, функция $F_1(z)$ строится в явном виде

$$F_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\sigma_0} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{\sqrt{t(1-t)}} \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\bar{\sigma}_0} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{\sqrt{t(1-t)}} \frac{\varphi(\bar{t})\, dt}{t - z}. \tag{1.19}$$

Отсюда, после преобразования переменного интегрирования во втором интеграле правой части, получаем

$$F_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\sigma_0} \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t + z - 2tz} \right) \varphi(t)\, dt. \tag{1.20}$$

Имея выражение $F_1(z)$, мы непосредственно получаем функцию $U_1(x, y)$.

В самом деле, действительная часть $F_1(z)$ дает нам искомую функцию $U_1(x, y)$ в области D_1, а в гиперболической части D_2 области D функция $U_1(x, y)$ дается по формуле

$$U_1(x, y) = U_1(x + y, 0). \tag{1.21}$$

Обозначим через $F_2(z)$ голоморфную в области D_1 функцию $U_2(x, y) + iV_2(x, y)$, удовлетворяющую условию

$$F_2(0) = 0. \tag{1.22}$$

В силу второго из условий (1.17), общее решение уравнения (1.1) в гиперболической части D_2 области D можно представить в виде

$$U_2(x, y) = f(x+y) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right), \qquad f(0) = 0, \tag{1.23}$$

где f — произвольная функция. В частности, из (1.23) получаем, что

$$U_2(x, 0) = f(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.24}$$

На основании условий Коши—Римана и непрерывности частных производных $\frac{\partial U_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial y}$ при переходе через AB, из формулы (1.23) заключаем, что при $y = 0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{\partial U_2}{\partial y} = -\frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда, после интегрирования, в силу (1.22), получаем

$$V_2(x, 0) = -f(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.25}$$

Следовательно, из (1.24) и (1.25) имеем

$$U_2(x, 0) + V_2(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Таким образом, нам нужно определить голоморфную в области D_1 функцию $F_2(z) = U_2(x, y) + iV_2(x, y)$ по граничным условиям

$$U_2 = 0 \text{ на } \sigma, \quad U_2(x, 0) + V_2(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.26}$$

Опять конформным отображением можно достигнуть того, что σ совпало бы с полуокружностью σ_0, а отрезок AB перешел бы в себя. Ясно, что этим вид второго из условий (1.26) не изменится.

Итак, будем предполагать, что σ совпадает с полуокружностью σ_0.

В силу первого из условий (1.17), функция $F_2(z)$ аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость, причем, на основании второго из условий (1.17),

$$-U_2(x, 0) + V_2(x, 0) = U_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + V_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right), \tag{1.27}$$
$$-\infty < x \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant x < \infty.$$

Следовательно, в силу (1.26) и (1.27), нам остается определить функцию $(1-i)F_2(z)$, голоморфную в верхней полуплоскости и ограниченную на бесконечности, по граничным условиям

$$\operatorname{Re}(1-i)F_2(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.28}$$

$$\operatorname{Im}(1-i)F_2(x) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right), \qquad -\infty < x \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant x < \infty. \tag{1.29}$$

Единственное (ограниченное вблизи точек $z=0$, $z=1$) решение этой задачи пишется по известной формуле [13, 15]

$$(1-i)\,F_2(z)=\frac{2}{\pi i}\int_0^1\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\,\frac{\psi\left(\frac{t}{2}\right)}{t-z}\,dt+\frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{1}^{\infty}\right)\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\,\frac{\psi\left(\frac{1}{2}\frac{t}{2t-1}\right)}{t-z}\,dt,$$

или, что то же самое

$$F_2(z)=\frac{2}{\pi(1+i)}\int_0^1\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt. \qquad (1.30)$$

Действительная часть $F_2(z)$ дает искомую функцию $U_2(x,y)$ в области D_1. В области D_2 функция $U_2(x,y)$ дается формулой

$$U_2(x,y)=U_2(x+y,0)-\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \qquad (1.31)$$

Замечание 1. Из формулы (1.21) ясно, что при $0<x+y<1$ функция $U_1(x,y)$ дифференцируема сколько угодно раз.

Замечание 2. Чтобы функция $U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)$ была решением уравнения (1.1) в области D_2 в классическом смысле, от функции ψ нужно требовать дважды дифференцируемость. Это следует из формул (1.21) и (1.31).

§ 5. Продолжение. На основании установленного в § 2 принципа экстремума и результата § 4, мы можем установить существование решения задачи T без ограничений, сделанных в § 4. А именно, в настоящем параграфе мы будем предполагать, что σ является гладкой дугой Жордана, а заданная на ней функция φ лишь непрерывна (т. е. не требует дополнительных ограничений о существовании частных производных первого порядка от искомого решения в замкнутой области $\overline{D}$).

Пусть σ_1 — гладкая дуга Жордана с концами в точках A и B, удовлетворяющая условию Ляпунова и целиком лежащая внутри эллиптической части D_1 области D. Смешанную область, ограниченную дугой σ_1 и характеристиками AC и CB, обозначим через Δ. Будем считать (а это не ограничивает общности), что дуги σ_1 и σ вблизи концов A и B не имеют общих касательных.

Построим две последовательности функций

$$U_1(x,y),\qquad U_2(x,y),\ldots \qquad (1.32)$$

и

$$V_1(x,y),\qquad V_2(x,y),\ldots \qquad (1.33)$$

со следующими свойствами: $U_1(x,y)$ является решением задачи T в области Δ

$$U_1=0 \text{ на } \sigma_1;\qquad U_1=\psi(x) \text{ на } AC. \qquad (1.34_1)$$

Функция $V_1(x, y)$ гармонична в области D_1 и удовлетворяет условиям

$$V_1 = \varphi \text{ на } \sigma; \qquad V_1 = U_1 \text{ на } AB. \tag{1.35$_1$}$$

Функции $U_n(x, y)$, $n = 2, 3, \ldots$ являются решениями задачи T в области Δ

$$U_n = V_{n-1} \text{ на } \sigma_1; \qquad U_n = \psi(x) \text{ на } AC, \tag{1.34$_2$}$$

а $V_n(x, y)$, $n = 2, 3, \ldots$ — гармонические функции, удовлетворяющие условиям

$$V_n = \varphi \text{ на } \sigma; \qquad V_n = U_n \text{ на } AB. \tag{1.35$_2$}$$

Кроме того, предположим, что $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_n}{\partial y}$, $n = 1, 2, \ldots$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Delta}$ всюду, кроме, быть может, точек A и B (вблизи которых, согласно формулировке задачи T в § 1, для $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_n}{\partial y}$ допускается особенность порядка ниже единицы).

Функции U_n и V_n мы умеем строить.

Обозначим через N наибольшее среди $\max\limits_{(x, y)\in\Delta} |U_1(x, y)|$ и $\max\limits_{(x, y)\in D_1} \times$ $\times |V_1(x, y)|$. Из условий (1.34_1) и (1.34_2) получаем, что

$$|U_2(x, y) - U_1(x, y)| = |V_1(x, y)| \leqslant N \text{ на } \sigma_1. \tag{1.36}$$

С другой стороны, согласно (1.34_1) и (1.34_2),

$$U_2 - U_1 = 0 \text{ на } AC.$$

Следовательно, для разности $U_2(x, y) - U_1(x, y)$ имеет место принцип экстремума § 2, в силу которого, согласно (1.36), получаем оценку

$$|U_2(x, y) - U_1(x, y)| \leqslant N; \qquad (x, y) \in \Delta.$$

Рассмотрим разность $V_2(x, y) - V_1(x, y)$. В силу (1.35_1) и (1.35_2)

$$V_2 - V_1 = 0 \text{ на } \sigma; \qquad V_2 - V_1 = U_2 - U_1 \text{ на } AB.$$

Отсюда, на основании известных свойств гармонических функций,

$$|V_2 - V_1| \leqslant Nq, \qquad 0 < q < 1.$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим

$$|U_n - U_{n-1}| \leqslant Nq^{n-2} \text{ на } \sigma_1 \text{ и на } AB, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{1.37}$$

и

$$|V_n - V_{n-1}| \leqslant Nq^{n-2} \text{ на } AB; \qquad |V_n - V_{n-1}| \leqslant Nq^{n-1} \text{ на } \sigma_1. \tag{1.38}$$

На основании (1.37) и (1.38) заключаем, что ряды

$$U_1 + (U_2 - U_1) + \ldots \tag{1.39}$$

и

$$V_1 + (V_2 - V_1) + \ldots \tag{1.40}$$

абсолютно и равномерно сходятся к гармоническим функциям

$U(x, y)$ и $V(x, y)$, соответственно, в эллиптических частях областей Δ и D.

Так как $U_n = V_{n-1}$ на σ_1 и $U_n = V_n$ на AB, то отсюда заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} V_n(x, y) = U(x, y) = V(x, y)$ в эллиптической части области Δ. Следовательно, $V(x, y)$ является аналитическим продолжением $U(x, y)$ из эллиптической части области Δ в эллиптическую часть области D, причем

$$V(x, y) = \varphi \text{ на } \sigma.$$

Ввиду того, что $U_n(x, y) - U_{n-1}(x, y) = 0$ на AC, в гиперболической части области Δ имеем

$$U_n(x, y) - U_{n-1}(x, y) = U_n^+(x+y, 0) - U_{n-1}^+(x+y, 0), \tag{1.41}$$

где

$$U^+(t, 0) = \lim_{0<y\to 0} U(t, y).$$

Из (1.41) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (1.39) и в гиперболической части области Δ. Так как $U_n(x, y) = \psi(x)$ на AC, то $U(x, y) = \lim U_n(x, y) = \psi(x)$ на AC.

Остается показать, что

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^+ = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^-; \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^-.$$

С этой целью рассмотрим функцию $\overset{*}{U}_n(x, y)$, гармонически сопряженную с $U_n(x, y)$ в эллиптической части области Δ, причем

$$\overset{*}{U}_n(0, 0) = 0.$$

Из того, что $U_n(x, y) - U_{n-1}(x, y) = 0$ на AC, заключаем, что

$$U_n(x, 0) - U_{n-1}(x, 0) + \overset{*}{U}_n(x, 0) - \overset{*}{U}_{n-1}(x, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что аналитическим продолжением $U_n(x, y) - U_{n-1}(x, y)$ в области, симметричной эллиптической части области Δ относительно действительной оси, является функция $-\overset{*}{U}_n(x, -y) + \overset{*}{U}_{n-1}(x, -y)$. На основании этого, в силу (1.41), заключаем, что область сходимости ряда $U_2 - U_1 + (U_3 - U_2) + \ldots$ расширяется за эллиптическую часть области Δ ниже AB.

Поэтому существуют производные

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^+ = \nu(x) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(x) = \lim \left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^+$$

и

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^+ = \tau'(x) = \lim_{n\to\infty} \tau'_n(x) = \lim \left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^+.$$

Но в гиперболической части области Δ имеем

$$U_n(x, y) = \frac{1}{2}\tau_n(x+y) + \frac{1}{2}\tau_n(x-y) - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu_n(t)\,dt, \tag{1.42}$$

где

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^- = \nu_n(x); \qquad \left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^- = \tau_n'(x). \tag{1.43}$$

Предельным переходом из (1.42) и (1.43) получаем

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\tau(x+y) + \frac{1}{2}\tau(x-y) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu(t)\,dt \tag{1.44}$$

и

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^- = \tau'(x); \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^- = \nu(x).$$

Таким образом, функция $U(x, y)$, которая является суммой ряда (1.40) в эллиптической части области D, а в гиперболической части этой области представлена формулой (1.44), является искомым решением задачи T.

§ 6. Продолжение. В этом параграфе мы даем доказательство существования решения задачи T методом интегральных уравнений. Так же как и в § 4, будем предполагать, что σ — гладкая дуга Жордана, удовлетворяющая условию Ляпунова, а частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ от искомого решения непрерывны в замкнутой области всюду, кроме, быть может, точек A и B. Кроме того, будем предполагать, что функции φ и ψ дважды непрерывно дифференцируемы.

Вспомним, что общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.3) в гиперболической части D_2 области D, представляется формулой (1.23)

$$U(x, y) = f(x+y) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Из этой формулы имеем

$$\tau'(x) - \nu(x) = 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{1.45}$$

где приняты обозначения

$$\tau'(x) = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad \nu(x) = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad 0 < x < 1. \tag{1.46}$$

Чтобы получить второе соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, обратимся к эллиптической части D_1 области D.

Обозначим через $G(x; \xi, \eta)$ гармоническую функцию Грина для области D^*, с полюсом в точке $(x, 0)$, $0 < x < 1$

$$G(x; \xi, \eta) = -\lg r + g(x; \xi, \eta),$$

где

$$r^2 = (x-\xi)^2 + \eta^2.$$

Легко усмотреть, что

$$\frac{\partial G}{\partial n}=0 \qquad \text{при } \eta=0, \qquad \xi\neq x. \tag{1.47}$$

Выделим из области D_1 точку $(x, 0)$ дугой σ_ε полуокружности $(\xi-x)^2+\eta^2=\varepsilon^2$, $\eta\geqslant 0$ и к оставшейся части области D_1 применим формулу Грина

$$\int\left(G\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds=0, \tag{1.48}$$

где длина дуги s отсчитывается от точки B в положительном направлении, а n — внутренняя нормаль (см. фиг. 1).

Принимая во внимание граничное условие (1.2), в силу (1.47) получаем

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\left(G\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds+\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^1\right)G\nu\,d\xi=\int_\sigma\varphi\frac{\partial G}{\partial n}ds.$$

Отсюда, при $\varepsilon\to 0$,

$$\tau(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1[g(x;\xi,0)-\lg|\xi-x|]\,\nu(\xi)\,d\xi=\varphi_*(x), \tag{1.49}$$

где

$$\varphi_*(x)=\frac{1}{\pi}\int_\sigma\varphi\frac{\partial G}{\partial n}ds. \tag{1.50}$$

Если нам удастся определить функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из соотношений (1.45) и (1.49), то этим задача T будет решена.

В самом деле, имея значение $U(x, 0)=\tau(x)$ на AB и значение $U=\varphi$ на σ, можно определить функцию $U(x, y)$ в области D_1 решением задачи Дирихле, а в гиперболической части области D функция $U(x, y)$ определяется решением задачи Коши: $U(x, 0)=\tau(x)$, $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}=\nu(x)$, $y=0$, $0<x<1$.

Пусть сперва σ совпадает с полуокружностью σ_0: $x^2+y^2=x$, $y\geqslant 0$. В этом случае уравнение (1.49) сильно упрощается. В самом деле, для данного случая функция $G(x;\xi,\eta)$ имеет вид

$$G(x;\xi,\eta)=\lg\left|\frac{x+\zeta-2x\zeta}{x-\zeta}\right|; \qquad \zeta=\xi+i\eta \tag{1.51}$$

и соответственно с этим соотношение (1.49) принимает вид

$$\tau(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1[\lg|t-x|-\lg(t+x-2tx)]\,\nu(t)\,dt=\varphi_*(x). \tag{1.52}$$

2
... ПУБ...ННАЯ
НАУЧН-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА СССР
1638/-5
1997/21/62

Функции $\tau'(x)$ и $\nu(x)$ будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $0<x<1$. В этих предположениях *существует производная по x от функции*

$$\int_0^1 \lg|t-x|\,\nu(t)\,dt \tag{1.53}$$

для всех x из интервала $0<x<1$, и эта производная дается формулой

$$-\int_0^1 \frac{\nu(t)\,dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В силу (1.53), соотношение (1.52) можно переписать в виде

$$\tau'(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=\varphi_*'(x). \tag{1.54}$$

Подставляя значение $\tau'(x)$ из формулы (1.45) в (1.54), окончательно получаем

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F(x), \tag{1.55}$$

где

$$F(x)=\varphi_*'(x)-2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{1.56}$$

Таким образом, отыскание функции $\nu(x)$ приводится к решению интегрального уравнения (1.55).

Изучим подробно функцию $\varphi_*(x)$. В силу формулы (1.50),

$$\varphi_*(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_0}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\,ds, \tag{1.57}$$

где $G(x;\xi,\eta)$ дается формулой (1.51). Из формул (1.51) и (1.57) заключаем, что $\varphi_*(x)$ аналитична внутри интервала $(0,1)$.

Выясним поведение функции $\varphi_*(x)$ и ее производной при $x\to 0$ и $x\to 1$. С этой целью заметим, что, не нарушая общности, можно предполагать

$$\psi(A)=\varphi(A)=\varphi'(A)=\varphi(B)=\varphi'(B)=0. \tag{1.58}$$

Так как, по условию, функция φ имеет вторую непрерывную производную, то, в силу (1.58), ее можно представить в виде

$$\varphi=\eta^2\varphi_1(\vartheta);\qquad \eta=\frac{1}{2}\sin\vartheta;\qquad \xi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\vartheta, \tag{1.59}$$

где φ_1 — непрерывная функция.

Из формулы (1.51) получаем

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}=\frac{2x(x-1)}{x^2-(2x-1)\cos^2\frac{\vartheta}{2}} \quad \text{на } \sigma_0 . \tag{1.60}$$

В силу (1.59) и (1.60), из формулы (1.51) находим

$$\varphi_*(x)=\frac{x(x-1)}{\pi}\int_0^\pi \varphi_1(\vartheta)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{x^2-(2x-1)\cos^2\frac{\vartheta}{2}}=$$

$$=\frac{x(x-1)}{\pi}\int_0^1 \varphi_1\frac{t^{1/2}(1-t)^{1/2}}{x^2-(2x-1)t}dt, \tag{1.61}$$

где $\cos^2\frac{\vartheta}{2}=t$.

Для производной $\varphi_*'(x)$ имеем выражение

$$\varphi_*'(x)=\frac{2x-1}{\pi}\int_0^1\varphi_1\frac{t^{1/2}(1-t)^{1/2}}{x^2-(2x-1)t}dt-\frac{2x(x-1)}{\pi}\int_0^1\varphi_1\frac{(x-t)\,t^{1/2}(1-t)^{1/2}\,dt}{[x^2-(2x-1)t]^2}. \tag{1.62}$$

Отсюда, применяя теорему о среднем, получаем

$$\varphi_*'(x)=\frac{2x-1}{\pi x^2}\varphi(t_1)\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\left[1-\frac{2x-1}{x^2}t\right]^{-1}dt-$$

$$-\frac{2(x-1)}{\pi x^2}\varphi_1(t_2)\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\left[1-\frac{2x-1}{x^2}t\right]^{-2}dt+$$

$$+\frac{2(x-1)}{\pi x^3}\varphi_1(t_3)\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{1/2}\left[1-\frac{2x-1}{x^2}t\right]^{-2}dt. \tag{1.63}$$

Известно, что входящие в (1.62) и (1.63) интегралы выражаются через гипергеометрическую функцию

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}t\right)^{-a}dt=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F\left(a,b,c,\frac{2x-1}{x^2}\right).$$

Принимая во внимание известные тождества

$$F\left(a,b,c,\frac{2x-1}{x^2}\right)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2a}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}F\left(a,c-b,1+a-b,\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}F\left(b,c-a,1-a+b,\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right),$$

$$F\left(a,b,c,\frac{2x-1}{x^2}\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F\left(a,b,1-c+a+b,\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{c-a-b}F\left(c-b,c-a,1+c-a-b,\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\right)$$

и формулы (1.61), (1.62), (1.63), заключаем, что 1) *функция* $\varphi_*(x)$ *стремится к нулю при* $x \to 0$ *и* $x \to 1$; 2) *производная* $\varphi_*'(x)$ *остается ограниченной при* $x \to 0$ *и* $x \to 1$.

Аналогичным рассуждением легко убедиться в том, что вторая производная $\varphi_*''(x)$ имеет особенность порядка $\frac{1}{2}$ при $x \to 0$ и $x \to 1$.

После того как известно поведение функции $\varphi_*'(x)$ вблизи концов интервала (0, 1) можно решить уравнение (1.55) в явном виде. С этой целью рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1-2t}{t+z-2tz}\right)\nu(t)\,dt, \tag{1.64}$$

которая, очевидно, голоморфна вне действительной оси и удовлетворяет условию

$$\Phi\left(\frac{z}{2z-1}\right) = (2z-1)^2\,\Phi(z) \tag{1.65}$$

при z, не лежащем на действительной оси.

Обозначим через $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ предельные значения $\Phi(z)$ на действительной оси из верхней и из нижней полуплоскости соответственно. Имеет место соотношение

$$\Phi^+\left(\frac{x}{2x-1}\right) = (2x-1)^2\Phi^-(x). \tag{1.66}$$

Применяя известные формулы скачка

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \nu(x) \tag{1.67}$$

и

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt, \qquad 0<x<1, \tag{1.68}$$

уравнение (1.54) можно переписать в виде

$$\Phi^+(x) + i\Phi^-(x) = \frac{F(x)}{1+i}, \qquad 0<x<1. \tag{1.69}$$

В силу формулы (1.66) из (1.69), имеем

$$\Phi^+(x) - i\Phi^-(x) = -F\left(\frac{x}{2x-1}\right)\frac{1}{(1-i)(2x-1)^2} \tag{1.70}$$
$$-\infty<x<0, \qquad 1<x<\infty.$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (1.55) приведено к следующей эквивалентной граничной задаче теории голоморфных функций: *найти функцию* $\Phi(z)$, *голоморфную вне действительной оси, удовлетворяющую тождеству* (1.65) *и допускающую особенность порядка ниже единицы при* $z \to 0$ *или* $z \to 1$, *по граничному условию*

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x) + g(x), \tag{1.71}$$

где

$$G(x)=\begin{cases}-i, & 0<x<1\\ i, & -\infty<x<0,\quad 1<x<\infty\end{cases}\tag{1.72}$$

и

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)(1-i)}{2}, & 0<x<1\\ -F\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)\dfrac{1+i}{2(2x-1)^2}, & -\infty<x<0,\quad 1<x<\infty.\end{cases}\tag{1.73}$$

Решение этой задачи получается в явном виде. В самом деле, рассмотрим частное решение однородной задачи

$$X^+(x)=G(x)X^-(x)$$

вида

$$X(z)=\exp\left[-\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right)dt\right],\tag{1.74}$$

удовлетворяющее условию

$$X\left(\frac{z}{2z-1}\right)=X(z).\tag{1.75}$$

Кроме того, из (1.74) имеем, что

$$X^+(x)=e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}};\quad X^-(x)=e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}},\tag{1.76}$$
$$0<x<1,$$

а в силу (1.75) и (1.76), в свою очередь имеем

$$X^+(x)=e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}};\quad X^-(x)=e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\tag{1.77}$$
$$-\infty<x<0,\qquad 1<x<\infty$$

(берется положительное значение радикала).

Таким образом, G можно представить в виде

$$G(x)=\frac{X^+(x)}{X^-(x)}.\tag{1.78}$$

Следовательно, граничное условие (1.71), в силу (1.78), принимает вид

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)}=\frac{g(x)}{X^+(x)}.$$

Отсюда сразу получается одно из искомых частных решений

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z} =$$

$$= \frac{X(z)}{2\pi i}\left[-\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{1}^{\infty}\right) F\left(\frac{t}{2t-1}\right) \frac{1+i}{X^+(t)(2t-1)^2} \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-i}{X^+(t)} \frac{F(t)\,dt}{t-z} =\right.$$

$$= \frac{X(z)}{4\pi i}(1-i)\int_0^1 \frac{F(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{1-2t}{t+z-2tz}\right) dt. \qquad (1.79)$$

Общее же решение однородной задачи

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = 0,$$

допускающее особенность порядка ниже 1 при $z = 0$ или $z = 1$ и имеющее нуль второго порядка на бесконечности [см. тождество (1.65)], тождественно равно нулю.

Таким образом, формула (1.79) является общим решением задачи (1.71) требуемого вида.

Из формулы (1.79) получаем по известным формулам, дающим предельные значения интеграла типа Коши, следующие выражения:

$$\Phi^+(x) = \frac{1-i}{4} F(x) + \frac{1-i}{4\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) F(t)\,dt,$$

$$\Phi^-(x) = -\frac{1+i}{4} F(x) + \frac{1+i}{4\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) F(t)\,dt.$$

$$0 < x < 1.$$

После этого искомое решение уравнения (1.54) пишется по формуле (1.67) непосредственно

$$\nu(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) F(t)\,dt. \qquad (1.80)$$

Таким образом, выражение (1.80) является формулой обращения интегрального уравнения (1.55).

После того как функция $\nu(x)$ найдена, $\tau(x)$ находим при помощи интегрирования

$$\tau(x) = \int_0^x \nu(t)\,dt + 2\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Так как, по условию, $F''(x)$ существует и непрерывна в любом интервале (a', b'), лежащем внутри интервала $(0, 1)$ то из (1.80) интегрированием по частям получаем, что искомое решение $U(x, y)$ задачи T в гиперболической части смешанной области можно брать по формуле (1.44), а в эллиптической части смешанной области, как уже было сказано, оно получается решением задачи Дирихле.

Вернемся к уравнению (1.49) и перепишем его в виде

$$\tau(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\lg(t-x) - \lg(t+x-2tx)]\,\nu(t)\,dt = \varphi_*(x) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\lg(t+x-2tx) - g]\,\nu(t)\,dt. \tag{1.81}$$

Исключая $\tau(x)$ из соотношений (1.45) и (1.81), получаем

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)dt = F(x) + \int_0^1 K(x, t)\,\nu(t)\,dt, \tag{1.82}$$

где

$$K(x, t) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}[\lg(x+t-2xt) - g(x; t, 0)].$$

Применяя формулу обращения (1.80) к уравнению (1.82), нетрудно убедиться в том, что для $\nu(x)$ получим интегральное уравнение типа Фредгольма, разрешимость которого следует из единственности решения задачи T. Однако на этом мы останавливаться не будем и отсылаем читателя к § 3 главы III настоящей работы.

Замечание. Формула обращения (1.80) интегрального уравнения (1.55) может быть получена более прямым путем. С этой целью покажем, что для интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\mu(t)\,dt = f(x) \tag{1.83}$$

формула обращения имеет вид

$$\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) f(t)\,dt. \tag{1.84}$$

В самом деле, заменяя x на $\frac{x}{2x-1}$, из формулы (1.83) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\mu(t)\,dt = \frac{1}{(2x-1)^2} f\left(\frac{x}{2x-1}\right). \tag{1.85}$$

Формулой (1.85) продолжим уравнение (1.83) на всю действительную ось. Преобразованием переменного интегрирования, соотношения (1.83) и (1.85) перепишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(t)\,dt}{t-x} = f_1(x), \tag{1.86}$$

где

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<1,\\ \frac{1}{(2x-1)^2}f\left(\frac{x}{2x-1}\right), & -\infty<x<0,\quad 1<x<\infty \end{cases} \tag{1.87}$$

и

$$\omega(x)=\begin{cases} \mu(x), & 0<x<1,\\ -\frac{1}{(2x-1)^2}\mu\left(\frac{x}{2x-1}\right), & -\infty<x<0,\quad 1<x<\infty. \end{cases} \tag{1.88}$$

Решение уравнения (1.86) пишется по известной формуле

$$\omega(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(t)\,dt}{t-x}.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.87) и (1.88), простым преобразованием получаем формулу (1.84).

Используя формулу обращения (1.84), уравнение (1.55) перепишем в эквивалентной форме

$$\nu(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F(t)\,dt. \tag{1.89}$$

Функция $\nu(x)$ должна удовлетворять как сумме, так и разности соотношений (1.55) и (1.89), т. е. уравнениям

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-2t)\nu(t)dt}{t+x-2tx}=\frac{1}{2}F(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F(t)\,dt, \tag{1.90}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}=\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F(t)\,dt. \tag{1.91}$$

Но решение уравнения (1.91) пишется непосредственно. В частности, решение (1.91) (допускающее особенность порядка ниже единицы при $x=0$ и $x=1$), удовлетворяющее и уравнению (1.90), имеет вид

$$\nu(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\frac{dt}{t-x}\left[\frac{1}{2}F(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{\xi-t}-\frac{1-2\xi}{t+\xi-2t\xi}\right)F(\xi)\,d\xi\right]. \tag{1.92}$$

В силу известной формулы перестановки сингулярных интегралов [13]

$$\int_0^1 \frac{dt}{t-x}\int_0^1 \frac{K(t,\xi)}{\xi-t}\,d\xi = -\pi^2 K(x,x) + \int_0^1 d\xi \int_0^1 K(t,\xi)\frac{dt}{(t-x)(\xi-t)}$$

и из того, что

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}}\frac{dt}{(t-x)(\xi-t)} = 0; \quad 0<{x \atop \xi}<1, \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}}\frac{1-2\xi}{(t-x)(\xi+t-2t\xi)}\,dt =$$

$$= -\pi\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}\frac{1-2\xi}{\xi+x-2x\xi},$$

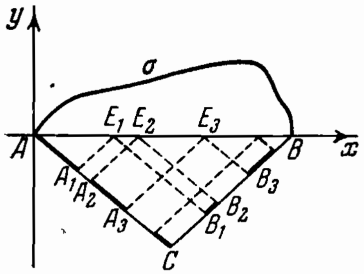
формула (1.92) упрощается и принимает вид (1.80).

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ T

В этой главе мы даем решение некоторых задач, являющихся непосредственными обобщениями задачи T.

§ 7. Задача T_1. Пусть D обозначает, так же как и в § 1, смешанную область, ограниченную линией σ и характеристиками AC и CB уравнения (1.1). Обозначим через $E_k(a_k, 0)$, $k = 1,2, \ldots, n$, $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 1$ заданные точки отрезка AB. Очевидно, что точки



Фиг. 2.

$$A_k\left(\frac{1}{2}a_k, -\frac{1}{2}a_k\right), \quad B_k\left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2}\right),$$

$$k = 0,1, \ldots, n+1 \; (a_0 = 0, \; a_{n+1} = 1)$$

лежат на характеристиках AC и CB соответственно (фиг. 2).

Постановка задачи T_1. *Требуется найти функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую условиям:* 1) *$U(x, y)$ является решением уравнения* (1.1) *в области D всюду, кроме точек отрезка AB, действительной оси и характеристик $E_k A_k$, $E_k B_k$;* 2) *непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, а ее частные производные первого порядка непрерывно склеиваются по всем точкам отрезка AB, кроме, быть может, точек $A, E_1, \ldots, E_n, B$, вблизи которых $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы:* 3) *принимает заданные значения:*

$$U = \varphi \quad \text{на } \sigma, \tag{2.1}$$

$$U = \psi_k \quad \text{на } A_k A_{k+1} \text{ при четных } k, \tag{2.2}$$

$$U = \psi_k \quad \text{на } B_k B_{k+1} \text{ при нечетных } k, \tag{2.3}$$

где φ и ψ_k ($k = 0,1, \ldots, n$) — заданные функции.

Заметим, что при $n=0$ условия (2.3) отпадают, а из (2.2) остается лишь одно условие: $U=\psi_0(x)$ на AC. Следовательно, задача T_1 является непосредственным обобщением задачи T.

§ 8. Принцип экстремума и доказательство единственности решения. В гиперболической части D_2 области D решение уравнения (1.1) выражается при помощи $\tau(x)$ и $\nu(x)$ формулой (1.44). Из этой формулы, в силу условий (2.2) и (2.3), получаем

$$\tau(0)+\tau(x)-\int\limits_0^x \nu(t)\,dt = 2\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right), \quad a_{2k}\leqslant x\leqslant a_{2k+1}, \quad k=0,1,\ldots \tag{2.4}$$

и

$$\tau(1)+\tau(x)+\int\limits_1^x \nu(t)\,dt = 2\psi_{2k-1}\left(\frac{1+x}{2}\right), \quad a_{2k-1}\leqslant x\leqslant a_{2k}, k=1,2,\ldots \tag{2.5}$$

Принимая во внимание обозначения (1.46), из (2.4) и (2.5) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=2\frac{d}{dx}\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right), \qquad a_{2k}<x<a_{2k+1}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=2\frac{d}{dx}\psi_{2k-1}\left(\frac{1+x}{2}\right), \qquad a_{2k-1}<x<a_{2k}. \tag{2.7}$$

Пусть

$$\psi_k(x)\equiv 0, \qquad k=0,1,\ldots,n, \tag{2.8}$$

т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=0, \qquad a_{2k}<x<a_{2k+1}, \tag{2.6$_0$}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=0, \qquad a_{2k-1}<x<a_{2k}. \tag{2.7$_0$}$$

Отсюда, так же как и в § 2, заключаем, что *решение задачи* T_1 *при условиях* (2.8) *не может достигать отличного от нуля экстремума в интервалах* $a_k<x<a_{k+1}, k=0,1,\ldots,n$, *отрезка* AB. Не трудно заметить, что значения $U(x,y)$ в точках $E_k(a_k,0)$ также не могут быть экстремальными. В самом деле, вспомним следующее простое свойство решения $U(x,y)$ уравнения струны:

$$U(M_1)+U(M_3)=U(M_2)+U(M_4), \tag{2.9}$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — последовательные вершины характеристического прямоугольника. Когда n — число четное, в силу (2.8) и (2.9), заключаем, что $U(a_k,0)=0$, $k=1,2,\ldots,n$. Рассмотрим теперь случай, когда n — число нечетное. На основании (2.8) и (2.9) опять заключаем, что $U(a_1,0)=\ldots=U(a_n,0)$. Предположим, что в точках E_k функция $U(x,y)$ достигает отличный от нуля экстремум. Выделим одну из точек E_k из эллиптической части D_1 области D линией уровня Γ: $U(x,y)=\text{const}$, с концами на отрезке AB и целиком лежащей в области D_1. К области, ограниченной линией Г и отрезком действительной оси, применим формулу Грина

$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int(U-\text{const})\,\frac{\partial U}{\partial n}\,ds,$$

где n — внутренняя нормаль. Из этой формулы, принимая во внимание (2.6_0)и (2.7_0), заключаем, что $U(x,y)=\text{const}$ во всей области D, а это невозможно. Таким образом, наше утверждение полностью доказано.

Из принципа экстремума непосредственно следует, что *задача T_1 не может иметь более одного решения.*

§ 9. Доказательство существования решения. Предварительно заметим, что решение задачи T_1 можно привести к случаю, когда условие (2.1) заменено условием

$$U=0 \quad \text{на } \sigma. \tag{2.10}$$

В самом деле, предположим, что $\varphi(A)=\psi(A)=\varphi(B)=0$. Обозначим через $U_1(x,y)$ гармоническую в области D_1 функцию, удовлетворяющую условиям

$$U_1(x,y)=\varphi \text{ на } \sigma,\ U_1(x,y)=0 \text{ на } AB.$$

Применим обозначения: $\tau_1(x)=U_1(x,0), \nu_1(x)=\dfrac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}$ при $y=0$ и продолжим функцию $U_1(x,y)$ в область D_2 по формуле (1.44). Очевидно, что разность $U(x,y)-U_1(x,y)$ будет решением задачи T_1, удовлетворяющим условию (2.10).

Дополнительно будем предполагать, что σ — гладкая дуга, удовлетворяющая условию Ляпунова, а $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D_1 всюду, кроме, быть может, точек $A, E_1, \ldots, E_n, B$.

Обозначим через $\Phi(z)$ функцию $U(x,y)+iV(x,y)$, голоморфную в области D_1 и удовлетворяющую условию $\Phi(0)=0$.

На основании условий Коши — Римана, согласно (2.6) и (2.7), получаем

$$\begin{gathered}U(x,0)+V(x,0)=2\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)+C_{2k}, \quad a_{2k}\leqslant x\leqslant a_{2k+1}, k=0,1,\ldots,\\ U(x,0)-V(x,0)=2\psi_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-C_{2k-1}, \quad a_{2k-1}\leqslant x\leqslant a_{2k}, k=1,2,\ldots,\end{gathered} \tag{2.11}$$

где $C_0=0$, а C_k — пока произвольные постоянные. Условия (2.11) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi(x)=2\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)+C_{2k}, \qquad a_{2k}\leqslant x\leqslant a_{2k+1},\\ \operatorname{Im}(1-i)\,\Phi(x)=-2\psi_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C_{2k-1}, \qquad a_{2k-1}\leqslant x\leqslant a_{2k}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Таким образом, решение задачи T_1 приведено к определению голоморфной в области D_1 функции $\Phi(z)$ по граничным условиям (2.10) и (2.12).

Конформным отображением, так же как и в § 4, можно достигнуть того, чтобы σ совпало с полуокружностью σ_0.

Итак, будем предполагать, что σ совпадает с σ_0.

В силу условия $U(x, y)=0$ на σ заключаем, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$(1-i)\Phi(x) = -U\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + V\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + i\left[U\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + V\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right)\right],$$

$$-\infty < x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x < \infty. \tag{2.13}$$

Пока будем предполагать, что $a_{2j} < \frac{1}{2} < a_{2j+1}$.

На основании (2.12) из (2.13) получаем

$$\operatorname{Im}(1-i)\Phi(x) = 2\psi_{2k}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right) + C_{2k},$$

$$-\infty < x \leqslant a_{2j}, \quad b_{2j+1} \leqslant x < \infty, \quad b_{2k+1} \leqslant x \leqslant b_{2k}, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x) = -2\psi_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right) + C_{2k-1},$$

$$b_{2k} \leqslant x \leqslant b_{2k-1},$$

где

$$b_k = \frac{a_k}{2a_k - 1}.$$

Следовательно, для получения решения задачи T_1 достаточно *определить функцию $\Phi(z)$, голоморфную на верхней полуплоскости, ограниченную вблизи точек $z=a_k$, $z=b_k$ и на бесконечности, по граничным условиям* (2.12) и (2.14).

Решение этой задачи, ограниченное на бесконечности и вблизи концов a_{2k}, b_{2k}, дается непосредственно [13, 15]

$$(1-i)\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\sum_{k=0}\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right)\times$$
$$\times\left[2\psi_{2k}\left(\frac{t}{2}\right) + C_{2k}\right]dt -$$
$$-\frac{1}{\pi}\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\sum_{k=1}\int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right)\left[2\psi_{2k-1}\left(\frac{t+1}{2}\right) -\right.$$
$$\left. - C_{2k-1}\right]dt + C\frac{R_1(z)}{R_2(z)}, \tag{2.15}$$

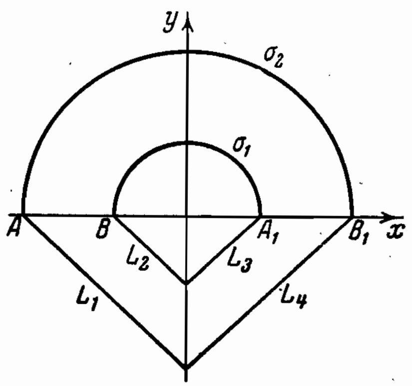
где C обозначает произвольную постоянную, а $R_1(z)$ и $R_2(z)$, например при $n=2m$, даются формулами

$$R_1(z)=\sqrt{z\prod_1^m(z-a_{2k})(z-b_{2k})},$$

$$R_2(z)=\sqrt{(z-1)\prod_1^m(z-a_{2k-1})(z-b_{2k-1})},$$

причем под $\frac{R_1(z)}{R_2(z)}$ подразумеваем ветвь, голоморфную на разрезанной вдоль (a_{2k}, a_{2k+1}), (b_{2k}, b_{2k-1}), $(k=0,1,\ldots,m)$ плоскости, принимающую на бесконечности значение 1.

В силу единственности решения задачи T_1, входящие в (2.15) постоянные C и C_k всегда можно подобрать так, чтобы $\Phi(z)$ была ограниченной и вблизи точек $z=$ $=a_{2k-1}$, $z=b_{2k-1}$.



Фиг. 3.

Действительная часть $\Phi(z)$ дает решение задачи T_1 в эллиптической части смешанной области. Построение решения задачи T_1 в гиперболической части смешанной области трудности не представляет.

Принцип экстремума позволяет, так же как и в § 5, доказать существование решения задачи T_1 в общем случае, т. е. без дополнительных ограничений на частные производные от искомой функции и на гладкость дуги σ.

Замечание 1. Аналогично исследуется и тот случай, когда n — число нечетное.

Замечание 2. Решение, соответствующее случаю $a_{2j}=\frac{1}{2}$ или $a_{2j-1}=\frac{1}{2}$, получается из формулы (2.15) предельным переходом.

§ 10. **Задача T_2.** Пусть D — двусвязная область, ограниченная полуокружностями σ_1: $x^2+y^2=q$, σ_2: $x^2+y^2=q^{-1}$, $y\geqslant 0$, $0<q<1$ и характеристиками L_1: $x+y=-q^{-1/2}$, L_2: $x+y=-q^{1/2}$, L_3: $x-y=$ $=q^{1/2}$, L_4: $x-y=q^{-1/2}$ (фиг. 3).

Постановка задачи T_2. *Требуется определить функцию* $U(x, y)$ *со следующими свойствами*: 1) $U(x, y)$ *является решением уравнения* (1.1) *в области* D *при* $y\neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$ *и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точек* $A(-q^{-1/2}, 0)$, $B(-q^{1/2}, 0)$, $A_1(q^{1/2}, 0)$,

$B_1(q^{-1/2}, 0)$, *вблизи которых* $\frac{\partial U}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial U}{\partial y}$ *могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;* 3) *удовлетворяет граничным условиям*

$$U = \varphi \text{ на } \sigma_1, \quad U = \varphi_1 \text{ на } \sigma_2, \tag{2.16}$$

$$U = \psi(x) \text{ на } L_1, \quad U = \psi_1(x) \text{ на } L_3, \tag{2.17}$$

где φ, φ_1, ψ, ψ_1, *— заданные функции, причем* φ *и* φ_1 *один раз непрерывно дифференцируемы, а* ψ, ψ_1 *— дважды дифференцируемы.*

Решение задачи T_2, *равное нулю на характеристиках* L_1 *и* L_3, *не может достигать отличного от нуля экстремума на открытых отрезках* AB и A_1B_1 *оси x-ов* (принцип экстремума). Отсюда непосредственно следует единственность решения задачи T_2.

Переходим к построению решения задачи T_2. Для простоты будем предполагать, что

$$\varphi \equiv \varphi_1 \equiv 0. \tag{2.16$_0$}$$

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (2.17), в гиперболической части области D представляется в виде

$$U(x, y) = f(x + y) + \psi\left(\frac{x - y - q^{-1/2}}{2}\right) - f(-q^{-1/2}), \tag{2.18}$$

где f — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Из (2.18) имеем

$$U(x, 0) = f(x) + \psi\left(\frac{x - q^{-1/2}}{2}\right) - f(-q^{-1/2}), \quad -q^{-1/2} \leqslant x \leqslant -q^{1/2}, \tag{2.19}$$
$$q^{1/2} \leqslant x \leqslant q^{-1/2}.$$

Обозначим через $\Phi(z)$ голоморфную в эллиптической части области D функцию $U(x, y) + iV(x, y)$, $V(0, 0) = 0$.

В силу условий Коши—Римана и условий непрерывности $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ при переходе через AB и A_1B_1, из (2.18) получаем

$$\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x} = -f'(x) + \frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x - q^{-1/2}}{2}\right).$$

Отсюда после интегрирования

$$V(x, 0) = -f(x) + \psi\left(\frac{x - q^{-1/2}}{2}\right) + f(-q^{-1/2}), \quad -q^{-1/2} \leqslant x \leqslant -q^{1/2}, \tag{2.20}$$

$$V(x, 0) = -f(x) + \psi\left(\frac{x - q^{-1/2}}{2}\right) + f(q^{1/2}) - \psi\left(\frac{q^{-1/2} - q^{1/2}}{2}\right) +$$
$$+ V(q^{1/2}, 0), \tag{2.21}$$
$$q^{1/2} \leqslant x \leqslant q^{-1/2}.$$

На основании (2.19), (2.20) и (2.21) можно написать

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x)=2\psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right),\qquad -q^{-1/2}\leqslant x\leqslant -q^{1/2},\tag{2.22}$$

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x)=2\psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right)+C,\quad q^{1/2}\leqslant x\leqslant q^{-1/2}.\tag{2.23}$$

Согласно (2.16_0), заключаем, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается во всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\Phi(q^2z)=\Phi(z).\tag{2.24}$$

Поэтому, в силу (2.22) и (2.23),

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x)=\begin{cases}2\psi\left(\dfrac{q^{2n}x-q^{-1/2}}{2}\right), & -q^{-\frac{4n+1}{2}}\leqslant x\leqslant -q^{-\frac{4n-1}{2}},\\ 2\psi\left(\dfrac{q^{2n}x-q^{-1/2}}{2}\right)+C, & q^{-\frac{4n-1}{2}}\leqslant x\leqslant q^{-\frac{4n+1}{2}},\end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(1-i)\Phi(x)=\begin{cases}2\psi\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2n+1}}x-q^{-1/2}}{2}\right), & -q^{-\frac{4n+3}{2}}\leqslant x\leqslant -q^{-\frac{4n+1}{2}},\\ 2\psi\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2n+1}}x-q^{-1/2}}{2}\right)+C, & q^{-\frac{4n+1}{2}}\leqslant x\leqslant q^{-\frac{4n+3}{2}},\end{cases}$$

$$n=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots$$

На основании этих условий заключаем, что функция $\omega(z)=(1-i)\Phi(z)$ является решением следующей задачи Римана [13]: *требуется определить кусочно-голоморфную* функцию* $\omega(z)$, *обладающую свойством* (2.24), *по граничному условию*

$$\omega^+(t)=G(t)\,\omega^-(t)+g(t),\tag{2.25}$$

где

$$G(t)=\begin{cases}-1, & -q^{-\frac{4n+1}{2}}\leqslant t\leqslant -q^{-\frac{4n-1}{2}},\quad q^{-\frac{4n-1}{2}}\leqslant t\leqslant q^{-\frac{4n+1}{2}},\\ 1, & -q^{-\frac{4n-3}{2}}\leqslant t\leqslant -q^{-\frac{4n+1}{2}},\quad q^{-\frac{4n+1}{2}}\leqslant t\leqslant q^{-\frac{4n+3}{2}};\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}4\psi\left(\dfrac{q^{2n}t-q^{-1/2}}{2}\right), & -q^{-\frac{4n+1}{2}}\leqslant t\leqslant -q^{-\frac{4n-1}{2}},\\ 4\psi\left(\dfrac{q^{2n}t-q^{-1/2}}{2}\right)+2C, & q^{-\frac{4n-1}{2}}\leqslant t\leqslant q^{-\frac{4n+1}{2}},\\ 4i\psi\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2n+1}}t-q^{-1/2}}{2}\right), & -q^{-\frac{4n+3}{2}}\leqslant t\leqslant -q^{-\frac{4n+1}{2}},\\ 4i\psi\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2n+1}}t-q^{-1/2}}{2}\right)+2iC, & q^{-\frac{4n+1}{2}}\leqslant t\leqslant q^{-\frac{4n+3}{2}},\end{cases}$$

$$n=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots$$

* Определение кусочно-голоморфной функции см. [13], стр. 39—40.

Решением этой задачи является функция

$$\omega(z)=\frac{2X(z)}{\pi i}\left(\int\limits_{-q^{-1/2}}^{-q^{1/2}}+\int\limits_{q^{1/2}}^{q^{-1/2}}\right)\frac{\psi\left(\frac{t-q^{-1/2}}{2}\right)}{X^+(t)}K(t,z)\,dt+C\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{q^{1/2}}^{q^{-1/2}}\frac{K(t,z)}{X^+(t)}\,dt+$$

$$+iC_0X(z), \tag{2.26}$$

где

$$X(z)=\left\{\frac{(1+q^{1/2}z)(1-q^{-1/2}z)}{(1+q^{-1/2}z)(1-q^{1/2}z)}\prod_1^\infty\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(1+q^{\frac{4n+1}{2}}z\right)\left(1+q^{\frac{4n-1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n+1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n-1}{2}}z\right)}{\left(1+q^{\frac{4n-1}{2}}z\right)\left(1+q^{\frac{4n+1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n-1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n+1}{2}}z\right)}\right\}^{1/2}, \tag{2.27}$$

$$K(t,z)=\frac{1}{t-z}+$$

$$+\sum_1^\infty\left(\frac{1}{t-q^{2n}z}+\frac{1}{t-q^{-2n}z}-\frac{1}{t(1-q^{2n-1}tz)}-\frac{1}{t(1-q^{-(2n-1)}tz)}\right), \tag{2.28}$$

а C_0 — произвольная действительная постоянная.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$X(q^2z)=X(z);\qquad X\left(\frac{1}{qz}\right)=iX(z),$$

причем

$$X^+(t)=-X^-(t)\ \text{при}\ -q^{-\frac{4n+1}{2}}<t<-q^{-\frac{4n-1}{2}},\quad q^{-\frac{4n-1}{2}}<t<q^{-\frac{4n+1}{2}},$$

$$X^+(t)=X^-(t)\ \text{при}\ -q^{-\frac{4n+3}{2}}<t<-q^{-\frac{4n+1}{2}},\quad q^{-\frac{4n+1}{2}}<t<q^{-\frac{4n+3}{2}}.$$

Функции $X(z)$ и $K(t,z)$ выражаются через тета-функции. В самом деле, введем обозначения

$$q^{1/2}z=\zeta^2=e^{2i\pi x}.$$

В этих обозначениях (2.27) принимает вид

$$X(z)=\left\{\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\prod_1^\infty\frac{(1+q^{2n}\zeta^2)(1+q^{2n}\zeta^{-2})(1-q^{2n-1}\zeta^{-2})(1-q^{2n-1}\zeta^2)}{(1+q^{2n-1}\zeta^2)(1+q^{2n-1}\zeta^{-2})(1-q^{2n}\zeta^{-2})(1-q^{2n}\zeta^2)}\right\}^{1/2}.$$

Отсюда, в силу известных свойств тета-функций [16],

$$\prod_1^\infty(1+q^{2n}\zeta^2)(1+q^{2n}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_2(\alpha)}{\beta q^{1/4}}\cdot\frac{1}{\zeta+\zeta^{-1}},$$

$$\prod_1^\infty(1-q^{2n}\zeta^2)(1-q^{2n}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_1(\alpha)\,i}{\beta q^{1/4}(\zeta-\zeta^{-1})},$$

$$\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\zeta^{2})(1-q^{2n-1}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_0(\alpha)}{\beta},$$

$$\prod_{1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\zeta^{2})(1+q^{2n-1}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_3(\alpha)}{\beta},$$

$$\beta=\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n}),$$

получаем

$$X(z)=\left[-i\frac{\vartheta_0(\alpha)\,\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)\,\vartheta_3(\alpha)}\right]^{1/2}.$$

Рассмотрим функцию $K(t, z)$. Согласно (2.28),

$$K(t,z)=\frac{1}{t-z}+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{t\left(1-q^{2n}\frac{z}{t}\right)}-\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}\frac{t}{z}}-\frac{1}{t\left(1-q^{2n-1}tz\right)}+\frac{q^{2n-1}}{t^2z\left(1-q^{2n-1}\frac{1}{tz}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{t-z}+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{q^{2n}\frac{z}{t^2}}{1-q^{2n}\frac{z}{t}}-\frac{q^{2n}}{z\left(1-q^{2n}\frac{t}{z}\right)}-\frac{q^{2n-1}z}{1-q^{2n-1}tz}+\frac{q^{2n-1}}{t^2z\left(1-q^{2n-1}\frac{1}{tz}\right)}\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\lg(t-z)\prod_{1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\frac{z}{t}\right)\left(1-q^{2n}\frac{t}{z}\right)\left(1-q^{2n-1}tz\right)\left(1-q^{2n-1}\frac{1}{tz}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\lg\frac{-i\sqrt{tz}\,\vartheta_0(\delta)\,\vartheta_1(\gamma)}{\beta^2q^{1/4}},$$

где

$$\frac{z}{t}=e^{2i\pi\gamma};\qquad tz=e^{2i\pi\delta}.$$

Берется главная ветвь логарифма. Окончательно имеем

$$\Phi(z)=\frac{1+i}{2}\,\omega(z).$$

Выражение $\Phi(z)$ содержит две произвольные постоянные C и C_0. В силу единственности решения задачи T_2, эти постоянные однозначно определяются из условия ограниченности функции $U(x,y)=$ $=\operatorname{Re}\Phi(z)$ вблизи точек B и B_1.

Построение функции $U(x,y)$ в гиперболической части области D трудности не представляет.

§ 11. Задача T_3. Пусть D обозначает смешанную область, рассмотренную в § 4.

Задача T_3 заключается в следующем: *требуется определить функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:* 1) *$U(x, y)$ является решением уравнения* (1.1) *в области D при $y\neq 0$;* 2) *непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точек A и B, вбли-*

зи которых $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 3) *удовлетворяет граничным условиям*

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \varphi \quad \text{на открытой дуге } \sigma, \tag{2.29}$$

$$U = \psi(x) \quad \text{на } AC, \tag{2.30}$$

где n — внутренняя нормаль σ, φ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, ψ — дважды дифференцируемая функция, причем $\psi(a) = 0$.

Ясно, что *решение задачи T_3, принимающее нулевые значения на характеристике AC, не может достигать отличного от нуля экстремума на открытом отрезке AB оси x-ов.* Отсюда непосредственно следует единственность решения задачи T_3.

Переходим к доказательству существования решения задачи T_3.

Предварительно заметим, что без нарушения общности можно полагать

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma. \tag{2.29$_0$}$$

В самом деле, рассмотрим функцию $W(x, y) = U(x, y) - U_1(x, y)$, где $U(x, y)$ — искомое решение задачи T_3, а $U_1(x, y)$ — решение хорошо известной смешанной задачи теории логарифмического потенциала

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial n} = \varphi \text{ на } \sigma, \qquad U(x, y) = 0 \text{ на } AB.$$

Так как $U_1(x, y)$ единственным образом определяется, то нахождение функции $U(x, y)$ приводится к нахождению $W(x, y)$, для которой условие (2.29) имеет вид (2.29$_0$).

Обозначим через $F(z)$ голоморфную в эллиптической части D_1 области D функцию $V(x, y) + iU(x, y)$, где $U(x, y)$ — искомое решение задачи T_3, а $V(0, 0) = 0$.

В силу условия (2.29$_0$),

$$V = 0 \text{ на } \sigma. \tag{2.31}$$

Так как общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (2.30) в гиперболической части D_2 области D, имеет вид (1.23)

$$U(x, y) = f(x + y) + \psi\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

то, учитывая условие непрерывности $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и условия Коши — Римана, получаем

$$V(x, 0) - U(x, 0) = -2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Таким образом, задача T_3 будет решена, если удастся определить функцию $F(z)$, голоморфную в области D_1 и удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{Re} F(z) = 0 \text{ на } \sigma, \tag{2.32}$$

$$\operatorname{Re}(1+i)F(z) = V(x, 0) - U(x, 0) = -2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.33}$$

Теперь, если будем предполагать, что σ совпадает с полуокружностью σ_0 (а этого можно добиться конформным отображением), то в силу (2.32) функция $F(z)$ аналитически продолжится на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\operatorname{Im}(1+i)F(x) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right), \quad -\infty < x \leqslant 0,\ 1 \leqslant x < \infty. \tag{2.34}$$

Следовательно, задача T_3 редуцирована к следующей задаче теории функций: *определить голоморфную в верхней полуплоскости функцию $F(z)$, ограниченную вблизи точек $z=0$, $z=1$, $z=\infty$, по граничным условиям* (2.33), (2.34).

Решение этой задачи дается сразу [13]

$$(1+i)F(z) = -\frac{2}{\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt. \tag{2.35}$$

Мнимая часть (2.35) дает искомую функцию $U(x, y)$ в области D_1. В области же D_2 выражение для искомой функции пишется непосредственно

$$U(x, y) = U(x+y, 0) - \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

З а м е ч а н и е. Для доказательства существования решения задачи T_3 можно применить метод интегральных уравнений. Основные функциональные уравнения выводятся точно так же, как и в § 6, лишь с той разницей, что в данном случае функцию $G(x; \xi, \eta)$ нужно заменить гармонической функцией Грина задачи Неймана, которая, например для окружности $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, когда полюс в точке $(x, 0)$, имеет вид

$$G(x; \xi, \eta) = -\frac{1}{2}\lg\left[(\xi - x)^2 + \eta^2\right] - \lg 8 - \frac{1}{2}\lg\left[(\xi + x - 2\xi x)^2 + (2x-1)^2\eta^2\right].$$

Для определения функции $\nu(x) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$, $y = 0$ (предполагается, что σ совпадает с σ_0 и $\varphi = 0$) получается интегральное уравнение

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt = F(x), \tag{2.36}$$

где

$$F(x) = \frac{d}{dx}\,\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Так же как и в § 6, легко показать, что в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера в интервале $(0, 1)$ и допускающих особенность порядка ниже единицы вблизи концов этого интервала, уравнение (2.36) имеет единственное решение, которое дается формулой

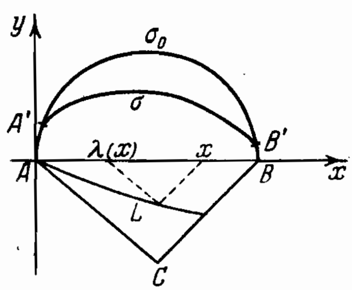
$$\nu(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{t(1-x)}{x(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F(t)\,dt.$$

Глава III

ОБЩАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА M

В настоящей главе дается существенное обобщение задачи T.

§ 12. Постановка общей смешанной задачи M. Пусть D обозначает область, ограниченную: а) линией Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, расположенной в полуплоскости $y>0$; б) характеристикой $y=x-1$ уравнения (1.1); в) монотонной кривой L: $y=-\gamma(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, расположенной внутри характеристического треугольника ACB, причем $\gamma(0)=0$, $l+\gamma(l)=1$ (фиг. 4).



Фиг. 4.

Задача M: *Требуется определить функцию* $U(x, y)$ *со следующими свойствами:* 1) $U(x, y)$ *является решением уравнения* (1.1) *в области* D *при* $y \neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$ *и имеет частные производные первого порядка, непрерывные внутри области* D; 3) *на линиях* σ *и* L *принимает заданные значения*

$$U=\varphi \text{ на } \sigma, \tag{3.1}$$

$$U=\psi(x) \text{ на } L. \tag{3.2}$$

При доказательстве существования и единственности решения задачи M возникают принципиальные затруднения, которые вызваны тем, что, как будет ниже показано, основное функциональное соотношение, связывающее функции $\tau(x)=U(x, 0)$ и $\nu(x)=\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$, $y=0$, принимает весьма сложный вид.

Ниже дается решение этой задачи при дополнительных ограничениях относительно кривых σ и L.

§ 13. Единственность решения. Пусть σ — гладкая кривая Жордана, удовлетворяющая условию

$$y_s'(x-x^2-y^2)-yx_s' \geqslant 0, \tag{3.3}$$

где s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B, а $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения этой кривой. Относительно кривой L предположим, что она имеет непрерывную кривизну, причем

$$\left|\frac{d\gamma}{dx}\right| < 1 \tag{3.4}$$

$$\frac{d\gamma}{dx} < \frac{\gamma}{x - x^2 + \gamma^2}. \tag{3.5}$$

Будем также предполагать, что $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ всюду, кроме, быть может, точек A и B, вблизи которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы. Кроме того, функция $\varphi(s)$ непрерывно дифференцируема один раз, а $\psi(x)$ — дважды.

В этих предположениях покажем, что *решение однородной задачи M*

$$U = 0 \text{ на } \sigma, \tag{3.1$_0$}$$

$$U = 0 \text{ на } L \tag{3.2$_0$}$$

тождественно равно нулю.

Предварительно заметим, что общее решение уравнения (1.1) в гиперболической части D_2 области D, удовлетворяющее условию (3.2), имеет вид

$$U(x, y) = f(x + y) - f\{\delta(x - y) - \gamma[\delta(x - y)]\} + \psi[\delta(x - y)], \tag{3.6}$$

где $f(t)$ — произвольная непрерывная в замкнутом интервале $(0,1)$ функция, которая дважды непрерывно дифференцируема внутри этого интервала, а $x = \delta(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ — известная функция, которая однозначно определяется из уравнения

$$x + \gamma(x) = \xi, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.7}$$

В самом деле, общее решение уравнения (1.1) в области D_2 возьмем в виде

$$U(x, y) = f(x + y) + f_1(x - y), \tag{3.8}$$

где $f(t)$ и $f_1(t)$ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции при $0 < t < 1$.

На основании (3.2) из (3.8)

$$f[x - \gamma(x)] + f_1[x + \gamma(x)] = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначение (3.7), получаем

$$f_1(\xi) = \psi[\delta(\xi)] - f\{\delta(\xi) - \gamma[\delta(\xi)]\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Подставляя полученное выражение $f_1(\xi)$ в (3.8), сразу получаем формулу (3.6). В частности, из формулы (3.6) имеем

$$\tau'(x) + \nu(x) = 2f'(x). \tag{3.9}$$

Следовательно, при $x \to 0$ или $x \to 1$ функция $f'(x)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.

В случае однородной задачи формула (3.6) принимает вид

$$U(x, y) = f(x+y) - f\{\delta(x-y) - \gamma[\delta(x-y)]\}. \tag{3.6$_0$}$$

Отсюда

$$U(x, 0) = f(x) - f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}. \tag{3.10}$$

Обозначим через $F(z)$ аналитическую в эллиптической части D_1 области D функцию $U(x, y) + iV(x, y)$. Так как $U(0, 0) = 0$, функцию $F(z)$ можно подчинить условию

$$F(0) = 0. \tag{3.11}$$

В силу равенств

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=+0} = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=-0}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

из формулы (3.6$_0$) получаем

$$\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x} = -\frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}.$$

Отсюда, после интегрирования, в силу (3.11),

$$V(x, 0) = -f(x) - f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\} + 2f(0),$$

или, предполагая $f(0) = 0$,

$$V(x, 0) = -f(x) - f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим интеграл

$$J = -\int_0^1 U(x, 0)\, V(x, 0) \frac{1-x}{x}\, dx = \int_0^1 (f^2(x) - f^2\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}) \frac{1-x}{x}\, dx, \tag{3.13}$$

который заведомо существует.

Преобразованием переменных интегрирования выражение (3.13) принимает вид

$$J = \int_{2l-1}^1 f^2(x) \frac{1-x}{x}\, dx + \int_0^l f^2[x - \gamma(x)] \left[\frac{1-x+\gamma(x)}{x-\gamma(x)} - \frac{1+\gamma'(x)}{1-\gamma'(x)} \cdot \frac{1-x-\gamma(x)}{x+\gamma(x)}\right] \times$$
$$\times [1 - \gamma'(x)]\, dx. \tag{3.14}$$

Отсюда, в силу (3.5), заключаем, что

$$J \geqslant 0. \tag{3.15}$$

С другой стороны, в силу (3.1$_0$),

$$\int_\sigma F^2(z) \frac{1-z}{z}\, dz + \int_0^1 (U + iV)^2 \frac{1-x}{x}\, dx = 0,$$

или, выделяя мнимую часть,

$$J = -\int_0^1 U(x,0)\,V(x,0)\frac{1-x}{x}dx = -\frac{1}{2}\int_\sigma \frac{y'_s(x-x^2-y^2)-x'_s y}{x^2+y^2}V^2\,ds. \quad (3.16)$$

Из (3.16), в силу (3.3), получаем

$$J \leqslant 0. \quad (3.17)$$

Из (3.14), (3.15) и (3.17) заключаем, что $f(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Следовательно, $U(x, y)=0$ во всей области D.

Таким образом, если σ и L удовлетворяют условиям (3.3), (3.4) и (3.5), задача M не может иметь более одного решения.

Замечание 1. Условие (3.5) будет соблюдено, например, если монотонная кривая L вогнута относительно оси Ox, а условие (3.5) будет соблюдено, в частности, если σ вогнута относительно оси Ox и расположена внутри круга единичного радиуса $|z|\leqslant 1$.

Замечание 2. Приведенное выше доказательство единственности решения задачи M, очевидно, остается в силе и в том случае, когда часть AF кривой L совпадает с характеристикой, а остальная часть отходит от характеристики так, что для нее условия (3.4), (3.5) соблюдены.

§ 14. Вывод основных функциональных соотношений. Вспомним, что общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (3.2), в гиперболической части области D представляется формулой (3.6). Из этой формулы находим

$$\tau'(x)-\nu(x) = -2\frac{d}{dx}f\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\} + 2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)]. \quad (3.18)$$

Исключая f из соотношений (3.9) и (3.18), получаем первое основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$

$$\tau'(x)-\nu(x) = -\tau'\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\} -$$
$$-\nu\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\}\frac{d}{dx}\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\} + 2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)]. \quad (3.19)$$

Соотношения (1.49) и (3.19) являются основными функциональными уравнениями, связывающими $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

В случае, когда кривая σ оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' полуокружности σ_0, функцию $G(x;\xi,0)$, входящую в (1.49), можно представить в виде

$$G(x;\xi,0) = -\lg|\xi-x| + \lg(\xi+x-2\xi x) + g_1(x,\xi), \quad (3.20)$$

где функция $g_1(x,\xi)$ имеет производные всех порядков при $0\leqslant x\leqslant 1$.

В самом деле, обозначим через $g_2(x; \xi, \eta)$ гармоническую по ξ и η в области D_1 функцию, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial g_2}{\partial \eta} = 0 \text{ на } AB;\ g_2(x; \xi, \eta) = -\lg\left|\frac{x+\zeta-2x\zeta}{x-\zeta}\right| \text{ на } \sigma,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

Очевидно, что функцию $G(x; \xi, \eta)$ можно представить в виде

$$G(x; \xi, \eta) = \lg\left|\frac{x+\zeta-2x\zeta}{x-\zeta}\right| + g_2(x; \xi, \eta);$$

отсюда сразу следуют упомянутые выше свойства функции $g_1(x, \xi) = g_2(x; \xi, 0)$.

В силу (3.20), уравнение (1.49) перепишем так:

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\lg|t-x| - \lg(t+x-2tx) - g_1(x, t)]\,\nu(t)\,dt + \varphi_*(x), \quad (3.21)$$

или

$$\tau'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt + \int_0^1 K(x,t)\,\nu(t)\,dt + \varphi_*'(x),$$

где

$$K(x, t) = -\frac{\partial g_1(x, t)}{\partial x}, \quad (3.22)$$

а функция $\varphi_*(x)$ дается формулой (1.50).

§ 15. Решение задачи M в случае, когда линия L содержит в себе отрезок характеристики. Пусть $E(h,0)$ — точка отрезка AB. Характеристики уравнения (1.1), выходящие из точки E, пересекаются с характеристиками AC и CB в точках $F\left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right)$ и $G\left(\frac{h+1}{2}, \frac{h-1}{2}\right)$ соответственно. Пусть, кроме того, $H(1-l, -l)$, $\frac{1-h}{2} < l < \frac{1}{2}$ — точка на характеристике CB.

Соединим точки F и H линией $y = -\gamma(x)$, $\frac{h}{2} \leqslant x \leqslant 1-l$, где $\gamma(x)$ —дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (3.4) и (3.5) (фиг. 5).

Обозначим через L линию, представленную уравнениями

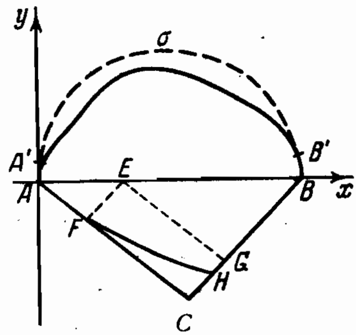
$$y = -x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{h}{2},$$

$$y = -\gamma(x), \qquad \frac{h}{2} \leqslant x \leqslant 1-l.$$

Относительно кривой σ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Ляпунова, оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' полуокружности σ_0 и для нее имеет место неравенство (3.3).

Пусть D — смешанная область, ограниченная линиями σ, L и BH.

Целью настоящего параграфа является доказательство существования решения задачи M для области D, причем предполагается, что равенства (1.58) соблюдены.



Фиг. 5.

При принятых предположениях, в силу замечания 2 предыдущего параграфа, заключаем, что задача M не может иметь более одного решения.

Сначала рассмотрим случай, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0. Для этого случая уравнение (3.21) принимает вид (1.54). Что же касается уравнения (3.19), то в нашем случае имеем

$$\tau'(x) - \nu(x) = 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{3.23}$$

$$\tau'(x) - \nu(x) = -2\nu[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x) + 2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)] - 2\psi'\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right], \tag{3.24}$$

$$h \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \lambda(x) \equiv \delta(x) - \gamma[\delta(x)] \leqslant 1 - 2l.$$

Исключая $\tau'(x)$ из (1.54), (3.23) и (3.24), получаем

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt = F(x), \tag{3.25}$$

где

$$F(x) = F_0(x), \qquad 0 < x \leqslant h, \tag{3.26}$$

$$F(x) = 2\nu[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x) + F_0(x), \qquad h \leqslant x < 1, \tag{3.27}$$

$$\begin{gathered} F_0(x) = \varphi_*'(x) - 2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 < x \leqslant h, \\ F_0(x) = \varphi_*'(x) + 2\psi'\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right] - 2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)], \qquad h \leqslant x < 1. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Применяя формулу обращения (1.80), уравнение (3.25) можно переписать в эквивалентной форме

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_h^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\frac{1-\gamma'(x)}{1+\gamma'(x)}\nu[\lambda(t)]\,dt = \\ = F_1(x), \tag{3.29}$$

$$0 < x \leqslant h,$$

$$\nu(x) = F_1(x) + \nu[\lambda(x)] \frac{d}{dx} \lambda(x) - \frac{1}{\pi} \int_h^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) \nu[\lambda(t)] \frac{1-\gamma'[\delta(t)]\, dt}{1+\gamma'[\delta(t)]}, \tag{3.30}$$

$$h \leqslant x < 1,$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{2} F_0(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) F_0(t)\, dt, \tag{3.31}$$

причем *имеет место полная эквивалентность между задачей* M *и уравнениями* (3.29), (3.30).

Преобразованием переменного

$$\lambda(t) = \xi,\ h \leqslant t < 1,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1 - 2l \tag{3.32}$$

уравнение (3.29) принимает вид

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{1-2l} \sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(\xi) - x} + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi) + x - 2x\omega(\xi)} \right] \nu(\xi)\, d\xi =$$

$$= F_1(x), \tag{3.33}$$

$$0 \leqslant x \leqslant h,$$

где функция $t = \omega(\xi)$ однозначно определяется из уравнения (3.32).

При $0 \leqslant x \leqslant 1 - 2l$ *уравнение* (3.33) *является уравнением Фредгольма второго рода, разрешимость которого непосредственно следует из единственности решения задачи* M.

Если обозначим через $R(x, t)$, $x, t \in (0, 1 - 2l)$ резольвенту уравнения (3.33), то решение этого уравнения можно взять по формуле

$$\nu(x) = F_1(x) + \int_0^{1-2l} R(x, t) F_1(t)\, dt, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 - 2l. \tag{3.34}$$

Подставляя полученное выражение (3.34), для $\nu(x)$ в формуле (3.33), получаем

$$\nu(x) = F_1(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{1-2l} \left\{ \sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(t) - x} + \frac{1-2\omega(t)}{\omega(t) + x - 2x\omega(t)} \right] + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1-2l} R(\xi, t) \sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(\xi) - x} + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi) + x - 2x\omega(\xi)} \right] d\xi \right\} F_1(t)\, dt, \tag{3.35}$$

$$1 - 2l \leqslant x \leqslant h.$$

После того как нам известна функция $\nu[\lambda(x)]$, при $h \leqslant x \leqslant 1$, для определения $\nu(x)$, при $h \leqslant x \leqslant 1$, из (3.30) получаем

$$\nu(x) = F_1(x) + F_1[\lambda(x)] \frac{d}{dx}\lambda(x) + \int_0^{1-2l} F_1(t)\,dt \Big\{R[\lambda(x), t] \frac{d}{dx}\lambda(x) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(t)-x} + \frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{1-2l} R(\xi, t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x} + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right]d\xi\Big\},$$

$$h \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.36}$$

Следовательно, на основании (3.34), (3.35) и (3.36) окончательно получаем

$$\nu(x) = F^*(x) + \int_0^{1-2l} R^*(x, t) F_1(t)\,dt, \tag{3.37}$$

где

$$F^*(x) = \begin{cases} F_1(x), \ x \in (0, h), \\ F_1(x) + F_1[\lambda(x)] \dfrac{d}{dx}\lambda(x), \ x \in (h, 1), \end{cases} \tag{3.38}$$

$$R^*(x, t) = R(x, t); \qquad x, t \in (0, 1-2l),$$

$$R^*(x, t) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(t)-x} + \frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{1-2l} R(x, t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x} + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right]d\xi,$$

$$x \in (1-2l, h); \qquad t \in (0, 1-2l),$$

$$R^*(x, t) = R[\lambda(x), t] \frac{d}{dx}\lambda(x) - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(t)-x} +\right.$$

$$\left. + \frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right] - \frac{1}{\pi}\int_0^{1-2l} R(\xi, t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x} +\right.$$

$$\left. + \frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right]d\xi, \tag{3.39}$$

$$t \in (0, 1-2l), \qquad x \in (h, 1).$$

Таким образом, мы доказали существование решения функционального уравнения (3.25). Отсюда, очевидно, следует существование решения задачи M в случае, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0.

Переходим к доказательству существования решения задачи M для области D, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в начале настоящего параграфа.

По исключении $\tau(x)$ из соотношений (3.18), (3.19) и (3.21) получаем

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F_0(x)+\int_0^1 K(x,t)\,\nu(t)\,dt,$$

$$x\in(0,h), \tag{3.40}$$

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt-2\nu[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x)=$$

$$=F_0(x)+\int_0^1 K(x,t)(\nu)(t)\,dt,\qquad x\in(h,1). \tag{3.41}$$

В уравнениях (3.40) и (3.41) выражение $\int_0^1 K(x,t)\,\nu(t)\,dt$ пока будем считать известным. Применяя (3.37), эти уравнения можно заменить эквивалентным уравнением

$$\nu(x)-\int_0^1 K^{**}(x,t)\,\nu(t)\,dt=F_{**}(x), \tag{3.42}$$

где, в силу (3.38) и (3.39),

$$F_{**}(x)=\begin{cases} F_1(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x,t)\,F_1(t)\,dt, & x\in(0,h)\\ F_1(x)+F_1[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x,t)\,F_1(t)\,dt, & x\in(h,1),\end{cases}$$

$$K^{**}(x,t)=\begin{cases} K^*(x,t)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x,\xi)\,K^*(\xi,t)\,d\xi, & x\in(0,h)\\ K^*(x,t)+K^*[\lambda(x),t]\frac{d}{dx}\lambda(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x,\xi)\,K^*(\xi,t)\,d\xi,\end{cases}$$

$$x\in(h,1),$$

$$K^*(x,t)=\frac{1}{2}K(x,t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-\xi)}{\xi(1-x)}}\left(\frac{1}{t-\xi}+\frac{1-2\xi}{t+\xi-2t\xi}\right)K(\xi,t)\,d\xi.$$

Очевидно, что (3.42) является уравнением Фредгольма второго рода. Так как эквивалентность всюду сохраняется, то из единственности решения задачи M следует существование решения уравнения (3.42). Отсюда автоматически следует существование решения задачи M.

Замечание. Ограничение, налагаемое на линии σ, чтобы она оканчивалась сколь угодно малой длины дужками AA', BB' полуокружности σ_0, может быть снято; но мы этого не делаем просто потому, что приведенное выше доказательство единственности решения задачи M годится не для любой гладкой кривой σ. А при доказательстве существования решения задачи M мы по существу пользуемся тем, что оно единственное.

§ 16. Решение задачи M. В настоящем параграфе, кроме условий, при которых в § 12 была доказана единственность решения задачи M, дополнительно будем требовать, чтобы кривая L удовлетворяла условию

$$\left|\frac{d\gamma}{dx}\right| < q, \tag{3.43}$$

где q — положительное число меньше единицы.

Без нарушения общности можно предполагать, что $U=0$ на σ. Тогда соотношение (3.21) принимает вид

$$\tau(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\lg|x-t| - \lg(x+t-2xt) - g_1(x,t)]\,\nu(t)\,dt = 0. \tag{3.44}$$

С другой стороны, из формулы (3.6) получаем

$$\tau(x) = f(x) - f[\lambda(x)] - \psi_1(x), \tag{3.45}$$

$$\nu(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}f[\lambda(x)] - \frac{d}{dx}\psi_1(x), \tag{3.46}$$

где $\lambda(x) = \delta(x) - \gamma[\delta(x)], \qquad \psi_1(x) = \psi[\delta(x)]$.

В результате исключения $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из соотношений (3.44), (3.45) и (3.46) получаем

$$f(x) - f[\lambda(x)] + \frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)\{f(t) + f[\lambda(t)]\}\,dt =$$

$$= \psi_2(x) + \int_0^1 K(x,t)\,f(t)\,dt, \tag{3.47}$$

где

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{1}{t-x} - \frac{1-2x}{t+x-2tx} - \frac{\partial g_1(x,t)}{\partial t}\right]\psi_1(t)\,dt,$$

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial g_1(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial g_1(x,\mu)}{\partial\mu}\dfrac{d\mu}{dt}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2l-1, \\[2ex] \dfrac{\partial g_1(x,t)}{\partial t}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 2l-1 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.48}$$

Здесь $\xi = \mu(t)$ является решением уравнения $\delta(\xi) - \gamma[\delta(\xi)] = t$.

Если нам удастся определить функцию $f(x)$ из уравнения (3.47), то этим задача M будет решена.

Сначала предположим, что кривая σ совпадает с полуокружностью σ_0. В этом случае уравнение (3.47) упрощается и принимает вид

$$f(x)-f[\lambda(x)]+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)\{f(t)+f[\lambda(t)]\}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)\psi_1(t)\,dt. \quad (3.49)$$

Заметим, что в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $0\leqslant x\leqslant 1$ и обращающихся в нуль на концах этого интервала, интегральное уравнение

$$\theta(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)\theta(t)\,dt=\vartheta(x)$$

обращается однозначно

$$\theta(x)=\frac{1}{2}\vartheta(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\vartheta(t)\,dt. \quad (3.50)$$

Формула (3.50) непосредственно получается из формулы (1.80), если учесть, что

$$\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}=\frac{x(1-x)}{t(1-t)}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)=$$
$$=\frac{1-x}{1-t}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right).$$

Также легко убедиться, что в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $0\leqslant x\leqslant 1$, имеют место следующие формулы обращения:

$$P_\varepsilon(x)\equiv\varepsilon(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)\varepsilon(t)\,dt=\eta(x)+\text{const}, \quad (3.51)$$

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{2}\eta(x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\eta(t)\,dt\equiv Q_\eta(x), \quad (3.52)$$

причем постоянная, входящая в (3.51), определяется однозначно

$$\text{const}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(1-\sqrt{\frac{1-t}{t}}\right)\frac{\eta(t)}{1-2t}\,dt.$$

При помощи формулы обращения (3.50) перепишем уравнение (3.49) в эквивалентной форме

$$f(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)f[\lambda(t)]\,dt=2Q_\psi(x). \quad (3.53)$$

Рассмотрим сингулярный оператор

$$\Omega_\omega(x) \equiv \omega(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right)\omega[\lambda(t)]\,dt. \quad (3.54)$$

Ниже покажем, что в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $0 \leqslant x \leqslant 1$, интегральное уравнение

$$\Omega_\omega(x) = 0 \quad (3.55)$$

имеет лишь тривиальное решение.

Применяя оператор Ω к уравнению (3.53) и принимая во внимание формулу перестановки особых интегралов

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right)dt\int_0^1 \sqrt{\frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{\xi(1-\xi)}} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\xi-\lambda(t)} - \frac{1}{\xi+\lambda(t)-2\xi\lambda(t)}\right]f[\lambda(\xi)]\,d\xi = f[\lambda^2(x)] - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{\xi(1-\xi)}} \times$$

$$\times f[\lambda(\xi)]\,d\xi\int_0^1 \sqrt{\frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right)\left(\frac{1}{\xi-\lambda} - \frac{1}{\xi+\lambda-2\xi\lambda}\right)dt,$$

перепишем уравнение (3.53) в эквивалентной форме

$$f(x) + f[\lambda^2(x)] - \int_0^1 r(x,t)\,f[\lambda(t)]\,dt = 2\Omega Q_{\psi_1}(x), \quad (3.56)$$

где

$$r(x,\xi) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{\xi(1-\xi)}}\int_0^1 \sqrt{\frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\xi-\lambda(t)} - \frac{1}{\xi+\lambda(t)-2\xi\lambda(t)}\right)dt,$$

$$\lambda^2(x) = \lambda[\lambda(x)].$$

Применяя процесс итераций, уравнение (3.56) можно переписать в виде

$$f(x) - \int_0^1 r_1(x,t)\,f[\lambda(t)]\,dt = F(x), \quad (3.57)$$

где

$$r_1(x,t) = \sum_0^\infty (-1)^n\, r[\lambda^{(2n)}(x), t]; \qquad F(x) = 2\sum \Omega Q_{\psi_1}[\lambda^{(2n)}(x)]. \quad (3.58)$$

В силу условия (3.43), ряды (3.58) сходятся абсолютно и равномерно. Из уравнения (3.57) находим

$$f[\lambda(x)] - \int_0^1 r_1[\lambda(x), t]\,f[\lambda(t)]\,dt = F[\lambda(x)]. \quad (3.59)$$

Очевидно, что (3.59) является уравнением типа Фредгольма второго рода, эквивалентным задаче M. Следовательно, из единственности решения задачи M заключаем разрешимость уравнения (3.59) и, стало быть, разрешимость задачи M для рассматриваемого частного случая.

Если обозначим через $R_1(x, t)$ резольвенту уравнения (3.59), то решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$f[\lambda(x)] = F[\lambda(x)] + \int_0^1 R_1(x, t) F[\lambda(t)]\, dt. \tag{3.60}$$

Подставляя выражение $f[\lambda(x)]$ из формулы (3.60) в уравнение (3.57), получаем

$$f(x) = F(x) + \int_0^1 R(x, t) F[\lambda(t)]\, dt, \tag{3.61}$$

где

$$R(x, \xi) = R_1(x, \xi) + \int_0^1 r_1(x, t) R_1[\lambda(t), \xi]\, dt.$$

Покажем теперь, что уравнение (3.55) имеет лишь тривиальное решение. С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу: *найти функцию* $U(x, y)$ *со следующими свойствами*: 1) $U(x, y)$ *является решением уравнения* (1.1) *в области* D_0, *ограниченной линиями* σ_0, L *и характеристикой* $y = x - 1$, *при* $y \neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}_0$, *причем*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y=+0} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y=-0}; \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=+0} = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=-0}; \tag{3.62}$$

3) *удовлетворяет граничным условиям*

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma_0, \tag{3.63}$$

$$U = 0 \text{ на } L. \tag{3.64}$$

Так же как и в § 13, доказывается, что эта задача имеет единственное, тривиальное, решение.

Из результатов § 11 следует, что, в силу (3.63), функция $\tau(x) = U(x, 0)$ и $\nu(x) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$, $y = 0$ связаны между собой соотношением

$$\tau(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\lg|t - x| + \lg 8 + \lg(t + x - 2tx)]\, \nu(t) dt = \text{const}. \tag{3.65}$$

Вспомним, что общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (3.64) в гиперболической части области D_0, дается формулой (3.6), в которой $\psi = 0$.

Из этой формулы, в силу условий склеивания (3.65), имеем

$$\tau(x) = f(x) - f[\lambda(x)], \tag{3.66}$$

$$\nu(x) = -\frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} f[\lambda(x)]. \tag{3.67}$$

По исключении $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из соотношений (3.65), (3.66) и (3.67), получаем

$$f(x)-f[\lambda(x)]-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)\{f(t)+f[\lambda(t)]\}\,dt=\text{const}. \quad (3.68)$$

Применяя формулу обращения (3.52), уравнение (3.68) можно переписать в эквивалентной форме

$$\Omega_f\equiv f(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)f[\lambda(t)]\,dt=0. \quad (3.69)$$

Так как мы имеем полную эквивалентность между сформулированной задачей и интегральным уравнением (3.69), то последнее не может иметь отличного от нуля решения.

Переходим к рассмотрению общего случая. Нам предстоит доказать существование решения уравнения (3.47). При помощи формулы обращения (3.50) перепишем уравнение (3.47) в виде

$$f(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)f[\lambda(t)]\,dt=2Q_{\psi_1}(x)+$$
$$+\int_0^1 K_1(x,t)f(t)\,dt, \quad (3.70)$$

где

$$K_1(x,\xi)=K(x,\xi)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)K(t,\xi)\,dt.$$

Применяя оператор Ω к уравнению (3.70), получаем

$$f(x)+f[\lambda^{(2)}(x)]-\int_0^1 r(x,t)f[\lambda(t)]dt=2\Omega Q_{\psi_1}(x)+\int_0^1 K_2(x,t)f(t)dt, \quad (3.71)$$

где

$$K_2(x,\xi)=K_1(x,\xi)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)K_1[\lambda(t),\xi]\,dt.$$

Пока будем считать известной правую часть (3.71). Тогда, в силу (3.61),

$$f(x)=F_1(x)+\int_0^1 K^*(x,t)f(t)\,dt, \quad (3.72)$$

где

$$F_1(x)=F(x)+\int_0^1 R(x,t)F[\lambda(t)]\,dt,$$

$$R^*(x, \xi) = K_3(x, \xi) + \int_0^1 R(x, t) K_3[\lambda(t), \xi]\, dt,$$

$$K_3(x, \xi) = \sum_0^\infty (-1)^h K_2[\lambda^{(2h)}(x), t].$$

Из приведенного рассуждения очевидно, что полученное фредгольмово уравнение (3.72) эквивалентно задаче M. Следовательно, из единственности решения задачи M следует разрешимость уравнения (3.72) и, стало быть, уравнения (3.47).

§ 17. Решение задачи M в одном частном случае методом аналитического продолжения. Будем предполагать, что смешанная область D ограничена полуокружностью σ_0, характеристикой $y=x-1$ и прямой $y=-\alpha x$, где $0<\alpha<1$.

Требуется найти решение задачи M в области D по граничным условиям

$$U = \varphi \text{ на } \sigma_0, \tag{3.73}$$

$$U = 0 \text{ на } L, \tag{3.74}$$

где $\varphi(s)$ как функция длины дуги s, отсчитываемой от точки B, имеет непрерывную первую производную, причем $\varphi(A) = \varphi(B) = 0$.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (3.74), в гиперболической части области D представляется формулой (3.6), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$U(x, y) = f(x+y) - f[\lambda(x-y)], \tag{3.75}$$

где $\lambda = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

В частности, при $y=0$ из (3.75) имеем

$$U(x, 0) = f(x) - f(\lambda x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.76}$$

Рассмотрим функцию $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, $F(0)=0$, голоморфную в эллиптической части области D.

Ввиду того, что $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=+0} = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=+0} = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=-0}$, из формулы (3.75) получаем

$$V(x, 0) = -f(x) - f(\lambda x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.77}$$

В результате исключения f из (3.76) и (3.77) имеем

$$U(x, 0) + V(x, 0) + U(\lambda x, 0) - V(\lambda x, 0) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{Im}(1+i)[F(x) + iF(\lambda x)] = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.78}$$

На основании (3.78) заключаем, что $F(z)+iF(\lambda z)$ аналитически продолжается через отрезки AB действительной оси в нижний полукруг $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$, $y<0$, причем

$$F(z)+iF(\lambda z)=\begin{cases}U(x,y)-V(\lambda x,\lambda y)+i[V(x,y)+U(\lambda x,\lambda y)], & y\geqslant 0,\\ -V(x,-y)-U(\lambda x,-\lambda y)-i[U(x,-y)-V(\lambda x,-\lambda y)], & y\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.79}$$

Следовательно, в силу формулы (1.20), можно написать

$$F(z)+iF(\lambda z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)[U(\xi,\eta)-V(\lambda\xi,\lambda\eta)]\,dt,$$

$$t=\xi+i\eta,$$

откуда сразу следует, что выбранная ветвь функции $F(z)+iF(\lambda z)$ имеет нуль порядка выше $^1/_2$ при $z=0$. Поэтому на основании (3.79) заключаем, что $F(z)$ голоморфна в круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ и

$$F(z)=\begin{cases}U(x,y)+iV(x,y), \qquad y\geqslant 0\\ -V(x,-y)-iU(x,-y)-2\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[V(\lambda^{2n}x,-\lambda^{2n}\eta)-\\ -U(\lambda^{2n-1}x,-\lambda^{2n-1}y)+iU(\lambda^{2n}x,-\lambda^{2n}y)-\\ -iV(\lambda^{2n-1}x,-\lambda^{2n-1}y)],\ y\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.80}$$

Применяя опять формулу (1.20), получаем

$$F(z)=F_0(z)-\frac{2}{\pi i}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\frac{\omega(\xi,\eta)}{t+z-2tz}\,dt, \tag{3.81}$$

где

$$F_0(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{3.82}$$

$$\omega(\xi,\eta)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n[U(\lambda^{2n}\xi,\lambda^{2n}\eta)+V(\lambda^{2n-1}\xi,\lambda^{2n-1}\eta)]. \tag{3.83}$$

Согласно (3.79), должно иметь место равенство

$$\overline{F(z)+iF(\lambda z)}=\overline{F(z)}-i\overline{F(\lambda z)}=iF(\bar z)-F(\lambda\bar z) \tag{3.84}$$

и, следовательно,

$$\overline{F(\lambda^{2n}z)}+i\overline{F(\lambda^{2n-1}z)}=-iF(\lambda^{2n}\bar z)-F(\lambda^{2n-1}\bar z).$$

Так как на основании (3.84)

$$U(\lambda^{2n}\xi, \lambda^{2n}\eta) + V(\lambda^{2n-1}\xi, \lambda^{2n-1}\eta) =$$
$$= \frac{1}{2}[F(\lambda^{2n}t) - iF(\lambda^{2n-1}t) - iF(\lambda^{2n}\bar{t}) - F(\lambda^{2n-1}\bar{t})],$$

то нам предстоит решить функциональное уравнение (3.81), записанное в виде

$$F(z) = F_0(z) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\times$$
$$\times\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t) - iF(\lambda^{2n-1}t) - iF(\lambda^{2n}\bar{t}) - F(\lambda^{2n-1}\bar{t})]}{(t+z-2tz)}. \qquad (3.85)$$

Будем искать решение функционального уравнения (3.85) в классе функций, имеющих нуль порядка единицы при $z=0$. В классе таких функций имеет место равенство

$$\int\limits_{\sigma_0}\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t) - iF(\lambda^{2n-1}t) - iF(\lambda^{2n}\bar{t}) - F(\lambda^{2n-1}\bar{t})]}{t\sqrt{t(1-t)}} =$$
$$= \int\limits_{\sigma_0+\bar{\sigma}_0}\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t) - iF(\lambda^{2n-1}t)]\,dt}{t\sqrt{t(1-t)}} = 0.$$

На основании этого равенства уравнение (3.85) можем переписать в эквивалентной форме

$$F(z) = F_0(z) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\frac{z(1-2t)}{t(t+z-2tz)}\times$$
$$\times\sum_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t) - iF(\lambda^{2n-1}t) - iF(\lambda^{2n}\bar{t}) - F(\lambda^{2n-1}\bar{t})]\,dt. \qquad (3.86)$$

Покажем, что функциональное уравнение (3.86) всегда имеет решение при

$$\lambda < \frac{1}{1+2\varkappa}, \qquad (3.87)$$

где

$$\varkappa = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi\sqrt{\pi}}.$$

С этой целью рассмотрим последовательные приближения

$$F_k(z) = F_0(z) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\,\frac{z(1-2t)}{t(t+z-2tz)}\times$$

$$\times\sum_1^\infty(-1)^n[F_{k-1}(\lambda^{2n}t)-iF_{k-1}(\lambda^{2n-1}t)-iF_{k-1}(\lambda^{2n}\bar{t})-F_{k-1}(\lambda^{2n-1}\bar{t})]\,dt, \quad (3.88_1)$$

$$k=1,2,\ldots$$

Имеем оценку: $|F_0(z)|<M_1|z|$, $|z|\leqslant\frac{1}{2}$, где положительное число M_1 зависит лишь от заданной функции φ. На основании этой оценки получаем

$$\left|\sum_1^\infty(-1)^n[F_0(\lambda^{2n}z)-iF_0(\lambda^{2n-1}z)]\right|_{\sigma_0,\bar{\sigma}_0}\leqslant M_1\frac{\lambda}{1-\lambda}|z|. \quad (3.89)$$

На окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ имеем: $|z|=x^{1/2}$, $|1-2t|=1$, $|t|=\xi^{1/2}$,

$$|1-t|=(1-\xi)^{1/2},\ |1-\lambda^n z|=(1-2\lambda^n x+\lambda^{2n}x)^{1/2},\ |t-\lambda^n z|=$$
$$=(\xi+\lambda^{2n}x-2\lambda^n\xi x-2\lambda^n\eta y)^{1/2},\quad |t+\lambda^n z-2\lambda^n tz|=$$
$$=(\xi+\lambda^{2n}x-2\lambda^n\xi x+2\lambda^n\eta y)^{1/2},\qquad |dt|=\frac{d\xi}{2\xi^{1/2}(1-\xi)^{1/2}}.$$

Поэтому, принимая во внимание (3.88_1) и (3.89), получаем оценку

$$\left|F_1(\lambda^n z)-F_0(\lambda^n z)\right|_{\sigma_0}\leqslant\frac{1}{\pi}M_1\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^{n/2}x^{1/4}(1-2\lambda^n x+\lambda^{2n}x)^{1/4}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\xi^{-3/4}(1-\xi)^{-3/4}\left[1-\frac{2\lambda^n x-1}{\lambda^{2n}x}\right]^{-1/4}d\xi=\frac{1}{\pi}M_1\frac{1}{1-\lambda}\lambda^{n/2}x^{1/4}\times$$

$$\times(1-2\lambda^n x+\lambda^{2n}x)\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[1-\frac{2\lambda^n x-1}{\lambda^{2n}x}\right]^{-1/4}=M_1\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n x^{1/2},\qquad n\geqslant 1.$$

Далее, из (3.88_1) имеем

$$F_1(\lambda^n z)-F_0(\lambda^n z)=-2\lambda^n z\sum_1^\infty(-1)^m[F_0(\lambda^{2m+n}z)-iF_0(\lambda^{2m+n-1}z)]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{\lambda^n z(1-\lambda^n z)}{t(1-t)}}\,\frac{\lambda^n z}{t-\lambda^n z}\sum_1^\infty(-1)^m[F_0(\lambda^{2m}t)-iF_0(\lambda^{2m-1}t)]\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar{\sigma}_0}\sqrt{\frac{\lambda^n z(1-\lambda^n z)}{t(1-t)}}\,\frac{\lambda^n z(1-2t)}{t(t+\lambda^n z-2\lambda^n tz)}\sum_1^\infty(-1)^m[F_0(\lambda^{2m}t)-iF_0(\lambda^{2m-1}t)]\,dt.$$

Отсюда заключаем, что

$$\left|F_1(\lambda^n z)-F_0(\lambda^n z)\right|_{\bar\sigma_0}\leqslant M_1\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n x^{1/2}+2\lambda^n\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n M_1 x^{1/2}<2M_1\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n x^{1/2},$$

$$n\geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\Big|\sum_1^\infty(-1)^n[F_1(\lambda^{2n}t)-F_0(\lambda^{2n}t)-iF_1(\lambda^{2n-1}t)+iF_0(\lambda^{2n-1}t)-iF_1(\lambda^{2n}\bar t)+$$

$$+iF_0(\lambda^{2n}\bar t)-F_1(\lambda^{2n-1}\bar t)+F_0(\lambda^{2n-1}\bar t)]\Big|_{\sigma_0,\bar\sigma_0}<2\cdot 2\,M_1\varkappa\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2\xi^{1/2}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\left|F_k(\lambda^n z)-F_{k-1}(\lambda^n z)\right|_{\sigma_0,\bar\sigma_0}<M_1\left(2\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k\lambda^n x^{1/2},\qquad n\geqslant 1,$$

$$\Big|\sum_1^\infty(-1)^n[F_k(\lambda^{2n}t)-F_{k-1}(\lambda^{2n}t)-iF_k(\lambda^{2n-1}t)+iF_{k-1}(\lambda^{2n-1}t)-$$

$$-iF_k(\lambda^{2n}\bar t)+iF_{k-1}(\lambda^{2n}\bar t)-F_k(\lambda^{2n-1}\bar t)+$$

$$+F_{k-1}(\lambda^{2n-1}\bar t)]\Big|_{\sigma_0,\bar\sigma_0}<2M_1\left(2\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k\frac{\lambda}{1-\lambda}\xi^{1/2},$$

$$k=2,3,\ldots$$

Из этих оценок следует, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}F_k(z)=F(z)$. Функция $F(z)$ является решением функционального уравнения (3.86) и, следовательно, функционального уравнения (3.85).

Остается показать, что $\operatorname{Re}F(z)=\varphi$ на σ_0 и что $U(x,0)+V(x,0)+U(\lambda x,0)-V(\lambda x,0)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Функция $F(z)$ аналитична внутри круга $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ и непрерывна в замкнутом круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$. Она обращает в тождество уравнение (3.85). Предположим, что точка z лежит в верхнем полукруге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$, $y>0$. Перепишем тождество (3.85) в виде

$$F(z)=F_0(z)-\frac{1}{\pi i}\int_0^1\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\times$$

$$\times\sum_1^\infty(-1)^n[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)]\,dt. \qquad (3.90)$$

В тождестве (3.90) перейдем к пределу при $z\to x$. Будем иметь

$$F(x)=F_0(x)-\sum_1^\infty(-1)^n[F(\lambda^{2n}x)-iF(\lambda^{2n-1}x)]-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\sum_1^\infty(-1)^n\,[F(\lambda^{2n}t)-$$

$$-iF(\lambda^{2n-1}t)]. \tag{3.91}$$

Перемножая (7) на $(1-i)$ и выделяя действительную часть, получаем

$$U(x,0)+V(x,0)=-\sum_1^\infty(-1)^n\,[U(\lambda^{2n}x,0)+V(\lambda^{2n}x,0)-U(\lambda^{2n-1}x,0)+$$

$$+V(\lambda^{2n-1}x,0)]+\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$

$$\times\sum_1^\infty(-1)^n\,[U(\lambda^{2n}t,0)-V(\lambda^{2n}t,0)+$$

$$+U(\lambda^{2n-1}t,0)+V(\lambda^{2n-1}t,0)]\,dt. \tag{3.92}$$

Если обозначим через $g(x)$ сумму

$$\sum_0^\infty(-1)^n\,[U(\lambda^{2n}x,0)+V(\lambda^{2n}x,0)+U(\lambda^{2n+1}x,0)-V(\lambda^{2n+1}x,0)],$$

то

$$g(\lambda x)=-\sum_1^\infty(-1)^n\,[U(\lambda^{2n}x,0)-V(\lambda^{2n}x,0)+U(\lambda^{2n-1}x,0)+V(\lambda^{2n-1}x,0)].$$

Таким образом, тождество (3.92) можно переписать в виде

$$g(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)g(\lambda t)\,dt=0. \tag{3.93}$$

Из единственности решения задачи M заключаем, что тождество (3.93) возможно лишь при $g(x)\equiv 0$. Таким образом,

$$\sum_0^\infty(-1)^n\,[U(\lambda^{2n}x,0)+V(\lambda^{2n}x,0)+U(\lambda^{2n+1}x,0)-V(\lambda^{2n+1}x,0)]=0.$$

Отсюда получаем, что $U(x,0)+V(x,0)+U(\lambda x,0)-V(\lambda x,0)\equiv 0$. Это значит, что $F(z)$ удовлетворяет условию (3.84) и, в силу (3.81),

$$\operatorname{Re}F(z)=\varphi \text{ на } \sigma_0.$$

Следовательно, функция $\operatorname{Re} F(z)$ является решением поставленной выше задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Трикоми. О линейных уравнениях смешанного типа. Пер. с итал. Ф. И. Франкля. Гостехиздат, М. — Л., 1947.
2. Ф. Трикоми. Дальнейшее исследование уравнения $yZ_{xx} + Z_{yy} = 0$. Дополнение I к книге Ф. Трикоми [1], стр. 173—184.
3. Ф. Трикоми. Еще раз об уравнении $yZ_{xx} + Z_{yy} = 0$. Дополнение III к книге Ф. Трикоми [1], стр. 189—190.
4. S. Gellerstedt. Sur un problème aux limites pour une équation linéare aux dérivées partielles du second ordre de tipe mixte, thèse. Uppsala, 1935.
5. S. Gellerstedt. Sur un problème aux limites pour l'équation $y^{2s}Z_{xx} + Z_{yy} = 0$. Arkiv f. M. A. O. F., Bd. 25A, № 10, 1935.
6. S. Gellerstedt. Quelpues problèmes mixtes pour l' équation $y^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0$. Arkiv f.M.A.O.F., Bd. 26A, № 3, 1936.
7. T. Carleman. Sur la resolution de certaines équations intégrales. Aktiv f. M. A. O. F., Bd.16, № 26, 1922.
8. С. Г. Михлин. Об интегральном уравнении F. Tricomi. ДАН СССР **59**, № 6 (1948), 1053—1056.
9. М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе. К проблеме уравнений смешанного типа. ДАН СССР 70, № 3 (1950), 373—376.
10. P. Germain et R. Bader. Sur le problème de Tricomi. C. R. Paris **232, № 6** (1951), 463—465.
11. А. В. Бицадзе. О некоторых задачах смешанного типа. ДАН СССР 70, № 4 (1950), 561—564.
12. А. В. Бицадзе. К общей задаче смешанного типа. ДАН СССР **78**, № 4 (1951), 621—624.
13. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М. — Л., 1946.
14. К. Каратеодори. Конформное отображение. Пер. с англ. М. В. Келдыш. М., 1934.
15. М. В. Келдыш и Л. И. Седов. Эффективное решение некоторых задач для гармонических функций. ДАН СССР **16**, № 1 (1937), 7—10.
16. А. Гурвиц. Теория аналитических и эллиптических функций. Гостехиздат, М., 1933.
17. Ф. И. Франкль. Об одной новой краевой задаче для уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Уч. зап. МГУ. Механика, т. III (1951), 99—116.
18. Ф. И. Франкль. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева—Бицадзе. Вестн. МГУ, № 11 (1951), 3—7.
19. К. И. Бабенко. К теории уравнений смешанного типа. Докторская диссертация. М., 1951.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Утверждено к печати
Математическим институтом
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *К. П. Гуров*
Технический редактор *Г. А. Астафьева*
Корректор *М. В. Сытин*

*

РИСО АН СССР № 19-9 В. Т-06134. Издат. № 130.
Тип. заказ № 1384. Подп. к печ. 13/VIII 1953 г.
Формат бум. 70×108 1/16. Бум. л. 1,875.
Печ. л. 5,13. Уч.-издат. л. 4,5. Тираж 2000.

Цена по прейскуранту 1952 г. 3 руб. 15 коп.

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР.
Москва, Шубинский пер., д. 10