УДК.517.956.6

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Кумыкова С.К., Шарданова М.А.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: shardanova2010@yandex.ru

Исследован вопрос однозначной разрешимости задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа в неограниченной области.

Ключевые слова: задача Бицадзе-Самарского, задача Коши, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение.

THE BITCADZE-SAMARSKII PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED TYPE IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Kumykova S.K., Shardanova M.A.

FGBOU VPO « Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov», Nalchik, e-mail: shardanova2010@yandex.ru

The Bitcadze-Samarskii problem investigated for the equation of mixed type in an unbounded domain.

Keywords: Bitcadze-Samarskii problem, Cauchy problem, Fredholm equation, singular integral equation.

Введение

Успехи современного естествознания требуют дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных, что приводит к необходимости исследования локальных и нелокальных задач для уравнений смешанного типа. К настоящему времени хорошо исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа, которые в гиперболической части области их задания редуцируются к уравнением Эйлера-Дарбу-Пуассона. Наряду с этим задачи со смещением и задачи типа задач Бицадзе-Самарского образуют широкий класс нелокальных задач, теория которых далека от окончательного завершения. Актуальность исследования таких задач можно обосновать как внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, так и прикладными значениями.

Цель исследования: доказать однозначную разрешимость задачи Бицадзе- Самарского для уравнения смешанного типа в неограниченной области.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m \equiv const > 0 \quad (1)$$

в области $D = D_1 \cup D_2 \cup J$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, где D_1 – полуплоскость $y > 0$, D_2 – конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

$$BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек A(0,0), B(0,0) и отрезком AB прямой $y = 0$; J – интервал $0, x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup J_1 \cup J_2) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, причем

$$u(\infty) = 0, \quad u_y(x,y)\Big|_{y=\infty}, u_x(x,y)\Big|_{x=\infty}$$

ограничены, $u_y(x.y)$ при $x = 0, x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка $1 - 2\varepsilon$, где $\varepsilon = \dfrac{m}{2m+4}$;

2. $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в $D_1 \cup D_2$ и краевым условиям

$$u_y(x,0) = \varphi_i(x) \;\; \forall x \in J_i, \quad i = 1,2, \quad (2)$$

$$\alpha(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\theta_0(x)] + \beta(x) D_{x1}^{1-\varepsilon} u[\theta_1(x)] +$$
$$+ \gamma(x) u(x,0) + c(x) u_y(x,0) = d(x) \;\; \forall x \in J, \quad (3)$$

где

$$J_1 = \{(x,y): -\infty < x < 0, y = 0\},$$

$$J_2 = \{(x,y): 1 < x < \infty, y = 0\},$$

$\theta_0(x), \theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in J$ с характеристиками АС и ВС соответственно; D_{0x}^{l}, D_{x1}^{l} – операторы дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования [9]; *φ(x), α(x), β(x), γ(x), c(x), d(x)* – заданные функции, причем

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0,$$

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x),\ c(x),\ d(x) \in C^1(\overline{J});$$

$\varphi_i(x) \in C(J_i)$ и могут обращаться в бесконечность порядка не выше $1-2\varepsilon$ при $x=0$ и $x=1$, а при достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-1-\sigma}$, где $M, \sigma = const, \sigma > 0$.

Задача (1)-(3) относится к классу краевых задач со смещением [4], исследованием которых для уравнений смешанного типа занимались многие авторы [1,2,4-8]. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что они существенно обобщают задачу Трикоми, содержат широкий класс корректных самосопряженных задач и имеют многомерные аналоги.

Теорема единственности. В области D не может существовать более одного решения задачи (1)-(3), если выполняются условия

$$A_1(x) = (1-x)^{\varepsilon}\alpha(x) + x^{\varepsilon}\beta(x) -$$

$$A_1(x) = (1-x)^{\varepsilon}\alpha(x) + x^{\varepsilon}\beta(x) - \qquad (4)$$

$$\left|\frac{(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)}{A_1(x)}\right|' \leq 0, \left|\frac{x^{\varepsilon}\beta(x)}{A_1(x)}\right|' \geq 0,$$

$$\frac{\gamma(x)}{A_1(x)} \geq 0, \quad \forall x \in \overline{J} \qquad (5)$$

где

$$c_1 = \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть *u(x,y)* решение задачи, удовлетворяющей однородным граничным условиям

$$u_y(x,0) = 0,\ \forall x \in J_1 \cup J_2,$$

$$\alpha(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\theta_0(x)] + \beta(x)D_{x1}^{1-\varepsilon}u[\theta_1(x)] +$$

$$+\gamma(x)u(x,0) + c(x)u_y(x,0) = 0.$$

Очевидное тождество $u\left(y^m u_x + u_y\right) = 0$ перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^m u\ _x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\ _y\right) - y^m u_x^2 - u_y^2 = 0.$$

Проинтегрировав последнее по области D_1 и учитывая, что $u(\infty) = 0, u_y(x,0) = 0,$ $\forall x \in J_1 \cup J_2$, получим

$$\iint_{D_1}\left[y^m(u_x)^2 + (u_y)^2\right]dxdy + \int_0^1 \nu(x)\tau(x)dx = 0, \qquad (6)$$

где $\nu(x) = u_y(x,0)\ \forall x \in J, \tau(x) = u(x,0)\ \forall x \in \overline{J}$.

Единственность решения задачи (1)-(3) будет следовать из (6), если мы докажем, что

$$J^* = \int_0^1 \nu(x)\tau(x)dx \geq 0$$

Выписывая решение задачи Коши в области D_2 [10] и удовлетворив условию (3), получим соотношение, между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2 на линию АВ.

$$c_1(x)\nu(x) = \alpha_1(x)D_{0x}^{1-2\varepsilon}\tau(x) +$$

$$c_1(x)\nu(x) = \alpha_1(x)D_{0x}^{1-2\varepsilon}\tau(x) + \qquad (7)$$

где

$$\alpha_1(x) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)/A_1(x)$$

$$\beta_1(x) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}x^{\varepsilon}\beta(x)/A_1(x)$$

$$\gamma_1(x) = x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}\gamma(x)/A_1(x)$$

При выполнении условий (4),(5) теоремы, пользуясь методикой, примененной в работах [5-8] , будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\varepsilon)c_1\sin 2\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon\cdot J^* = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}t^{2\varepsilon-1}\left\{\int_0^1\alpha_1'(x)\left[\left(\int_0^x\tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int_0^x\tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx\right\}dt + -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}t^{2\varepsilon-1}\left\{\int_0^1\beta_1'(x)\left[\left(\int_x^1\tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int_x^1\tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx\right\}dt + \frac{\Gamma^2(2\varepsilon)}{\pi}\sin 2\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon\int_0^1\gamma_1(x)\tau^2(x)dx,$$

где

$$\tau_1(x) = \frac{\sin 2\pi\varepsilon}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\varepsilon}},$$

$$\tau_2(x) = -\frac{\sin 2\pi\varepsilon}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2\varepsilon}}.$$

С учетом $c_1 \sin 2\pi\varepsilon \cos\pi\varepsilon > 0$ заключаем, что $J^* \geq 0$. Следовательно, решение задачи (1)-(2) единственно, так как $u(x,0) \equiv 0$ в D_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в D_1 как решение однородной задачи $u_y(x,0) = 0, \forall x \in J_1 \cup J \cup J_2$.

Существования решения задачи. Дополнительно будем предполагать, что $\alpha(x) = x^{\varepsilon_1}\overline{\alpha}(x), \quad \beta(x) = (1-x)^{\varepsilon_1}\overline{\beta}(x),$

$$\varepsilon_1 = const > \varepsilon, \quad \overline{\alpha}(x), \overline{\beta}(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J).$$

Воспользуемся известным соотношением из области D_1 (8)

$$\tau(x) = -k\int_0^1 \frac{\nu(t)dt}{|t-x|^{2\varepsilon}} - k\left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_1(t)dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \int_1^\infty \frac{\varphi_2(t)dt}{(t-x)^{2\varepsilon}}\right).$$

Исключив $\tau(x)$ из (7) и (8) вопрос существования решения задачи редуцируем к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения [3]

$$A(x)\nu(x) + \frac{B(x)}{\pi i}\int_0^1 \frac{\nu(t)dt}{t-x} +$$

$$+\int_0^1 K_1(x,t)\nu(t)dt + k\gamma(x)\int_0^1 \frac{\nu(t)dt}{|t-x|^{2\varepsilon}} = F(x)., \quad (9)$$

где

$$A(x) = \left(c_1 + \frac{k\pi}{\Gamma(\varepsilon)}\right)\left[x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x) + (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x) - c(x)\right],$$

$$B(x) = K(x,x)\pi i = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)}\pi i\left[x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x) - (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x)\right],$$

$$K(x,t) = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)}\left[\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\varepsilon} x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x) - \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x)\right],$$

$$K_1(x,t) = \frac{K(x,t)-K(x,x)}{t-x},$$

$$F(x) = \alpha(x) - k\gamma(x)\left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_1(t)dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \int_1^\infty \frac{\varphi_2(t)dt}{(t-x)^{2\varepsilon}}\right) -$$

$$-\frac{k\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} x^{-\varepsilon}\overline{\alpha}(x) D_{0x}^{1-2\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_1(t)dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \int_1^\infty \frac{\varphi_2(t)dt}{(t-x)^{2\varepsilon}}\right) -$$

$$\frac{k\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} x^{\varepsilon}\overline{\beta}(x) D_{x1}^{1-2\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_1(t)dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \int_1^\infty \frac{\varphi_2(t)dt}{(t-x)^{2\varepsilon}}\right).$$

Здесь $A(x) \neq 0$, $A(x), B(x), \gamma(x) \in C^1(J)$, правая часть $F_1(x) \in C^1(J)$ и при $x \to 0$ и $x \to 1$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\varepsilon$. Ядро $K_1(x,t)$ имеет слабую особенность и допускает оценку

$$|K_1(x,t)| \leq \frac{\left|(1-x)^{1-\varepsilon-\varepsilon_1}\overline{\alpha}(x) - x^{1-\varepsilon-\varepsilon_1}\overline{\beta}(x)\right|}{|t-x|^{2\varepsilon}\left[x(1-x)\right]^{1-\varepsilon-\varepsilon_1}}.$$

Действительно,

$$K(x,t) - K(x,x) = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{1-2\varepsilon} - 1\right]x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x) -$$

$$-\frac{k}{\Gamma(\varepsilon)}\left[\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\varepsilon} - 1\right](1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x) =$$

$$= \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)}\left[\frac{t^{1-2\varepsilon} - x^{1-2\varepsilon}}{x^{1-2\varepsilon}}\right]x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x) -$$

$$-\frac{k}{\Gamma(\varepsilon)}\left[\frac{(1-t)^{1-2\varepsilon} - (1-x)^{1-2\varepsilon}}{(1-x)^{1-2\varepsilon}}\right](1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x),$$

Так как

$$\left|u^{p}-\upsilon^{p}\right|\le\left|u-\upsilon\right|^{p}$$

для любых $p\le 1$ и $u,\upsilon\ge 0$, то отсюда сразу следует наше утверждение.

Таким образом, задача (1)-(3) эквивалентна в смысле разрешимости сингулярному интегральному уравнению (9).

Условие

$$\left[\left(c_1+\frac{k\pi}{\Gamma(\varepsilon)}\right)\left[x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x)+(1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x\right]-c(x)\right]^2+$$

$$+\frac{\pi^2k^2}{\Gamma^2(\varepsilon)}\left[x^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\alpha}(x)+(1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon}\overline{\beta}(x\right]^2\ne 0,$$

гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (9) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого будет следовать из единственности решения задачи. По найденному $\nu(x)$ можно определить $\tau(x)$ и решение задачи (1)-(3) в области D_1 по формуле [10]

$$u(x,y)=-k\int_{-\infty}^{\infty}\upsilon_1(t)\left[\left(t-x\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\varepsilon}dt,$$

а в области D_2 как решение задачи Коши [10]

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}\left(-y\right)^{\frac{m+2}{2}}\left(2t-1\right)\right]\left[t(1-t)\right]^{\varepsilon-1}dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}y\int_0^1\nu\left[x+\frac{2}{m+2}\left(-y\right)^{\frac{m+2}{2}}\left(2t-1\right)\right]\left[t(1-t)\right]^{-\varepsilon}dt,$$

где

$$k=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma^2(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}.$$

Список литературы

1. Водахова В.А., Шамеева К.А. Задачи со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2013. – №2 (52). – С. 3-7.

2. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с разрывными коэффициентами // Успехи современного естествознания. – 2013. – № 11. – С.136-140.

3. Мускалишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука. 2006. – 287 с.

5. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т.50, №6. – С. 807-816.

6. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: «Физико-математические науки». – 2013. – №1(30). – С. 150-158.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – №9 (100). – С. 52-60.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача с операторами Сайго для уравнения Геллерстедта // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т.49, №10. – С. 1340-1349.

9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

10. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.