ИСМОИЛ АЛЛАКОВ

СОНЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ БАЪЗИ АДДИТИВ МАСАЛАЛАРИНИ АНАЛИТИК УСУЛЛАР БИЛАН ЕЧИШ

$$\operatorname{card} U(X) \gg N_1\left(\frac{m}{n}\right)^n \prod_{j_1=1}^{u_1} \varphi\left(q_{j_1}^{(1)}\right)\left(q_{j_1}^{(1)}\right)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{j_2=1}^{u_2}\left(1 - 2/q_{j_2}^{(2)}\right) \ldots \prod_{j_n=1}^{u_n}\left(1 - n/q_{j_n}^{(n)}\right)$$

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ
ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

И. АЛЛАКОВ

СОНЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ БАЪЗИ АДДИТИВ МАСАЛАЛАРИНИ АНАЛИТИК УСУЛЛАР БИЛАН ЕЧИШ

«TA'LIM NASHRIYOTI»
ТОШКЕНТ — 2012

УДК: 94(575)(072)
ББК 67.3(5Ў)
Б49

Термиз давлат университети илмий кенгаши томонидан нашрга тавсия этилган (31 март 2011 йил 8- рақамли баённома).

Тақризчилар: Ўзбекистон Миллий Университети Математика факультети функционал анализ ва алгебра кафедраси профессори, физика-математика фанлари доктори **Р.Н. Ғанихўжаев.**
Термиз давлат университети физика-математика факультети ҳисоблаш математикаси ва информатика кафедраси мудири, физика-математика фанлари доктори **Ч.Б.Нормуродов.**

Маъсул муҳаррир — физика-математика фанлари доктори, профессор **М. Мирсобуров.**

Муҳаррир — Филология фанлари номзоди, доцент **Б. Умрқулов.**

И. Аллаков. Сонлар назариясининг баъзи аддитив масалаларини аналитик усуллар билан ечиш. Монография тригонометрик йиғиндилар учун янги баҳоларни исботлаш ва уларнинг кетма-кетликлар каср қисмларининг тақсимоти, Гольдбахнинг бинар муаммоси масаласи, Варинг муаммоси билан боғлиқ бўлган баъзи масалаларга, сонларини бир вақтда туб сонлар йиғиндиси кўринишда ифодалаш масалаларига тадбиқига бағишланган. Шу масалалар орқали Вейл-Виноградовларнинг тригонометрик йиғиндилар методи, Харди-Литтлвуд-Рамануджанларнинг доиравий методи, Г.Дэвенпорт ва Р.Воннинг итерация методларининг моҳиятини ёритишга ҳаракат қилинган.

Китоб алгебра ва сонлар назарияси, ҳисоблаш математикаси соҳасидаги мутахасисларга, университетларнинг математика факультетлари юқори курс талабаларига, шунингдек, баён этилган муаммолар билан қизиқувчиларга мўлжалланган.

ISBN 978-9943-368-09-5

КИРИШ

Фараз қилайлик, M_i мусбат бутун сонларнинг ўсувчи, чексиз кетма-кетлиги

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots, k \qquad (1)$$

бўлсин. Агар k та $M_1, M_2, \ldots, M_k$ кетма-кетликлар (уларнинг орасида бир хиллари ҳам бўлиши мумкин) берилган бўлса, элементлари

$$b_j = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \ldots + a_{kj_k}, \; a_{1j_1} \in M_1, a_{2j_2} \in M_2, \ldots, a_{kj_k} \in M_k \qquad (2)$$

тенглик билан аниқланувчи $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ кетма-кетликка берилган кетма-кетликларнинг йиғиндиси деб аталади ва $M_1 + M_2 + \ldots + M_k$ кўринишда белгиланади.

$$P(M_i) = \inf_x \frac{N(x)}{x}$$

катталикка M_i кетма-кетликнинг зичлиги деб аталади. Бунда $N(x)$ (1) кетма-кетликдаги x дан катта бўлмаган ҳадлар сонини билдиради.

Бу ерда қуйидаги масалаларни ҳал этиш муҳим:

1. Агар $M, M_1, M_2, \ldots, M_k$ кетма-кетликлар берилган бўлса, M даги (2) шартни қаноатлантирувчи элементлардан тузилган M' кетма-кетликнинг зичлиги қандай бўлади?

Шунга ўхшаш M даги (2) шартни қаноатлантирмайдиган элементлардан тузилган M'' кетма-кетликнинг зичлигини ҳам қараш мумкин.

2. b_j ва k лар берилган бўлганда (2) шартни қаноатлантирувчи $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{kj_k})$ лар сонини билдирувчи $R_k(b_j)$ функцияни текшириш.

Бошқача қилиб айтганда, $R_k(b_j)$ функция учун аниқ юқори ва қуйи чегараларини топиш ёки асимптотик формула келтириб чиқариш.

Бу келтирилган масалалар: Варинг муаммоси, Эйлер-Гольдбах муаммоси, Харди-Литтлвуд муаммоси, Хуа-Ло-Кен муаммоси ва бошқа кўплаб сонлар назариясининг аддитив муаммоларини ўз ичига олади. Айнан шу масалаларда кейинги пайтларда диққатга сазовор натижаларга эришилди. Хусусан И. М. Виноградов, Л. Г. Шнирельман, Ю. В. Линник, С. Х. Сираждинов, Б. М. Бредихин, Н. П. Романов, А. А. Карацуба, А. И. Виноградов, А. Ф. Лаврик, Хуа-Ло-Кен, Ву Фанг, Чен, Монтгомери, Вон, А. Г. Архипов, В. И. Берник, Н. В. Кузнецов, Т. А. Азларов, Т. Зупаров, М. И. Тўлаганова, В. А. Плаксин, М. Митькин, М. И. Исраилов, С. Т. Тўлаганов, Х. Н. Нарзуллаев, С. Ш. Шушбаев, Ш. И. Исматуллаев, А. С. Файнлейб ва бошқалар томонидан олинган натижаларни шулар сирасига киритишимиз мумкин.

Қўйилган масалаларни ечиш учун турли хил методлар: Харди-Литтлвуд-Рамануджаннинг доиравий методи, В. Брун, А. Сельберг, Ю. Линникларнинг ғалвирлаш методи, Г. Вейл ва И. М. Виноградовларнинг тригонометрик йиғиндилар методи, Г. Дэвенпорт ва Р. Вонларнинг итерация методи ва бошқа бир қанча методлар яратилди.

Биз бу ерда юқорида келтирилган муаммолардан иккитаси: Гольдбах ва Варинг муаммоларига қисқача тўхталиб ўтамиз.

1. 1742 йилда Христиан Гольдбахнинг Леонард Эйлер билан ёзишмаларидан келиб чиққан Гольдбах муаммосини ҳозирги замон тилида қуйидагича ифодалаш мумкин:

— ҳар қандай 6 дан кичик бўлмаган жуфт натурал сонни иккита тоқ туб сон йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин (Гольдбахнинг бинар муаммоси);

— ҳар қандай 9 дан кичик бўлмаган тоқ натурал сонни учта тоқ туб сон йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин (Гольдбахнинг тернар муаммоси).

Бу муаммолар биргаликда Эйлер-Гольдбах муаммоси деб ҳам юритилади.

Тушунарлики, Гольдбахнинг бинар муаммосининг ўринли эканлигидан тернар муаммонинг ўринли эканлиги осонлик билан келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $2n=p_1+p_2$ бўлса, $2n+3=p_1+p_2+3$, $n=3,4,...$ бажарилади.

2. Ҳар қандай натурал сонни тўрттадан ортиқ бўлмаган натурал сонларнинг квадратлари йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлиги тўғрисидаги Ж. Л. Лагранжнинг ўша даврдаги машҳур ишларидан кейин Э. Варинг ўзининг „Алгебраик фикрлар“ ([49] га қаранг) асарида ҳар қандай жуфт натурал сонни манфий бўлмаган бутун сонларнинг 9 тадан ортиқ бўлмаган кублари, 19 тадан ортиқ бўлмаган биквадратлари ва ҳ.к. кўринишда ифодалаш мумкин, — деган гипотезани илгари сурадди. Ҳозирги вақтда бу билан Варинг „Ихтиёрий $k \geq 2$ бутун сони учун шундай s натурал сони мавжудки, ҳар бир n натурал сонини s тадан ортиқ бўлмаган натурал сонларнинг k-даражалари йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин ва агар шу шартни қаноатлантирувчи энг кичик s ни $g(k)$ десак, $g(3)=9$, $g(4)=19$ ” — эканлигини назарда тутган деб ҳисоблашади.

Барча $k \geq 2$ лар учун чекли $g(k)$нинг мавжудлигини биринчи бўлиб 1909 йилда Д. Гильберт [99] исботлаган.

1920 йилда инглиз математиклари Г. Харди ва Дж. Литлвудлар [92] Варинг муаммосига доиравий усулни қўллаб, n етарлича катта бўлганда

$$n = x_1^k + x_2^k + ... + x_s^k, k \geq 2$$

тенгламанинг натурал ечимлари $(x_1, x_2, ..., x_s)$ сони $R_s(n,k)$ учун асимптотик формула олдилар.

Лекинда Гольдбах муаммоси анча қийин бўлиб чиқди. Хаттоки, 1912 йилда ҳам математиклар орасида бу муаммони ҳозирги замон математикаси усуллари билан ҳал қилиб бўлмайди деган фикр мавжуд бўлган (Виноградов И. М. [45] нинг 365-бетига қаранг).

Фақат 1919 йилга келиб В. Брун, мазмуни Эратосфен ғалвирининг такомиллашганидан иборат бўлган, янги усулни таклиф этди. У шу усули ёрдамида ҳар бир етарлича катта натурал сонни ҳар бирида 9 тадан ортиқ бўлмаган туб кўпайтувчи бўлган иккита қўшилувчининг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин эканлигини исботлади. Кейинчалик, В. Бруннинг бу натижаси бир неча бор яхшиланди, аммо Гольдбах муаммоси ўз ечимини топмади. Шунга қарамасдан В. Брун усули (кейинчалик эса унинг турли шакл ўзгаришлари: А. Сельберг галвири, Ю. Линникнинг катта ғалвири ва бошқалар) туб сонлар тақсимоти назариясида ўзининг кенг тадбиқини топди ва бу соҳада қатор муҳим натижаларни олиш имконини берди.

Г. Харди ва Дж. Литлвудлар 1924 йилда Гольдбахнинг тернар муаммосига доиравий усулни қўлладилар ва ҳозирча исботланмаган Дирихленинг L-функциясининг ноллари ҳақидаги Риманнинг умумлашган гипотезасига [50,51,62] таянган ҳолда ифодалашлар сони учун асимптотик формула олдилар.

Харди-Литтлвуд методининг асосий моҳияти қуйидагидан иборат:

А=$\{a_m\}$ — манфий бўлмаган бутун сонларнинг қатъий ўсувчи кетма-кетлиги бўлсин. Ушбу

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty} z^{a_m}, \quad (|z|<1)$$

функция ва унинг s-даражаси

$$F^s(z)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_s=1}^{\infty} z^{a_{m_1}+\ldots+a_{m_s}}=\sum_{n=0}^{\infty} R_s(n)z^n$$

ни қараймиз. Бу ерда $R_s(n)$ берилган n сонини A дан олинган s та ҳадлар йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сонини билдиради. Масала $R_s(n)$ ни ҳеч бўлмаганда катта n лар учун баҳолашдан иборат. Кошининг интеграл формуласига кўра

$$R_s(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} F^s(z) z^{-n-1} dz,$$

бунда $0 < \rho < 1$. Харди-Литтлвуд-Рамануджан (Х-Л-Р) методи бўйича $R_s(n)$ интеграл иккита I_1 и I_2 қўшилувчиларга ажратилади. $R_s(n)$ учун асимптотик формулада биринчи қўшилувчи I_1 бош ҳадни, иккинчи қўшилувчи I_2 эса қолдиқ ҳадни беради. Шундай қилиб, Х-Л-Р нинг доиравий усули, бу $R_s(n)$ дан тахмин қилинаётган бош ҳадни ажратиш усулидир.

Иккита туб сон йиғиндиси ҳақидаги муаммони эса Риманнинг умумлашган гипотезасига таяниб ҳам ҳал этиб бўлмади, улар фақатгина „деярли барча“ жуфт сонларнинг иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодаланишинигина кўрсата олдилар холос, яъни агар $E(X)$ билан X дан катта бўлмаган ва иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодаланмайди деб гумон қилинган жуфт сонлар сонини белгиласак $\lim\limits_{X\to\infty} X^{-1}E(X) = 0$ эканлигини исботладилар.

1930 йилда Л. Г. Шнирельман [77] сонлар назариясининг аддитив масалаларини ечиш учун янги методни таклиф этди. У ўзи таклиф этган метод билан шундай бир r абсолют доимийси мавжудки, ҳар бир n натурал сонини r тадан ортиқ бўлмаган туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин эканлигини кўрсатди. Лекинда Л. Г. Шнирельман исботидаги r сони анча катта бўлиб чиқди ($r \leq 8\cdot 10^5$).

Кейинчалик r нинг қиймати кетма-кет бир неча бор Н. П. Романов, Х. Хейльброн, Е. Ландау, Шерка, Д. Риччи, Х. Шапиро, Ж. Варга, Ин Вэнь-Линь, Н. И. Климов, Р. Вон ва бошқа математиклар томонидан яхшиланди (ихчамланади).

А.Ф.Лаврик фақатгина Л.Г.Шнирельман методидан фойдаланиб $r \leq 8$ дан яхши натижа олиш мумкин эмаслигини кўрсатди. Шунинг учун ҳам кўпчилик муаллифлар ўз изланишларида Л. Г. Шнирельман методининг бошқа методлар билан комбинациясидан фойдаланганини айтиб ўтиш жоиздир.

1937 йилда И. М. Виноградов [45-47] ўзининг тригонометрик йиғиндилар методидан фойдаланиб, етарлича катта n лар учун Гольдбахнинг тернар муаммосини исботлади. У ҳар қандай етарлича катта тоқ n сонини учта тоқ туб сон йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони учун асимптотик формулани исботлади.

И. М. Виноградов методининг моҳияти қуйидагича:

Х-Л-Р нинг доиравий усулидаги интеграл остидаги функцияни (чексиз қаторларни) чекли тригонометрик йиғиндилар билан алмаштиради, кейин I_1 Х-Л-Р нинг доиравий усули билан текширилади, I_2 эса И.М.Виноградов методи билан баҳоланади. И. М. Виноградов методи Гольдбахнинг тернар муаммосини исботлаш ва Варинг муаммосидаги қолдиқ ҳадни яхшилаш имконини берибгина қолмай, балки ҳозиргача қийин ҳисобланиб келинган каср қисмларининг тақсимланиши, квадратик чегирмаларнинг сони сингари кўпчилик масалаларда ҳам муҳим натижалар олиш имконини берди.

И. М. Виноградов методига асосланиб Н. Г. Чудаков [74], Ван-дер-Корпут [104], Т. Эстерман [89] лар деярли барча жуфт сонларнинг иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодаланишини, аниқроқ қилиб айтганда етарлича катта X лар учун

$$E(X) \ll \frac{X}{Ln^A X}$$

баҳони исботладилар. Бу ерда $E(X)$ билан X дан катта бўлмаган ва иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодаланмайдиган деб гумон қилинган жуфт сонлар сони белгиланган, $A > 0$ эса қандайдир ҳақиқий сон.

Бу натижа бошқа метод билан Ю. Линник [63,64] томонидан ҳам исбот қилинган.

Биринчи бўлиб А. Ф. Лаврик [55] *n* жуфт сонининг иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони *R(n)* учун асимптотик формула олди. Бу формула (1, *X*) оралиқдаги *n* нинг кўпи билан $E(X) \ll \frac{X}{Ln^{A} X}$ та қийматидан бошқа барча қийматлари учун ўринли. Бу масаладаги махсус тўпламнинг элементлари сони *E(X)* нинг янги баҳосини яқинда Г. Монтгомери, Р. Вон [102,105] ва И. Аллаков [3,6] лар исботладилар.

Варинг муаммоси билан боғлиқ баҳолардаги кейинги яхшилашлар А. А. Карацуба [53], М. Митькин [65], Р. Вон [108,109], Хис Браун [97,98] сингари олимлар томонидан олинди.

Ушбу китобнинг биринчи боби тригонометрик йиғиндилар учун янги баҳоларни исботлаш ва уларнинг кетма-кетликлар каср қисмларининг тақсимоти масаласига тадбиқига бағишланган.

Иккинчи боби Варинг муаммоси билан боғлиқ бўлган баъзи масалаларга қаратилган бўлиб унда муаллиф томонидан олинган натижаларни баён қилиш билан бирга Г. Дэвенпорт ва Р. Воннинг итерация методининг моҳияти ёритилган.

Учинчи бобда эса Х-Л-Р доиравий усулининг И. М. Виноградов вариантини қўллаб муаллифнинг Гольдбахнинг бинар муаммосига доир олган натижаларини ёритиш билан бирга Х-Л-Р нинги доиравий усули ва И. М. Виноградовнинг тригонометрик йиғиндилар усулининг моҳиятини очиб беришга харакат қилинган.

Тўртинчи бобда эса берилган мусбат бутун $b_1, b_2, \ldots, b_n$ сонларини бир вақтда туб сонлар йиғиндиси кўринишда ифодалаш масаласи ва унинг ечимига доир олинган натижалар доиравий усулдан фойдаланиб баён қилинган.

Ушбу ишда фойдаланилган методларни сонлар назариясининг кўпчилик аддитив масалаларида қўллаш мумкинлиги билан ҳам муҳимдир.

Китобдаги материалларни тушуниш учун университетларнинг математика факультетларининг 1 ва 2- курс курслари ҳажмидаги билимларга эга бўлиш ҳамда И. М. Виноградов [48], А. А. Карацуба [52] китобларида келтирилган сонлар назариясига доир материаллардан хабардор бўлиш етарлидир.

Белгилашлар:

$a,b,c,d,\ldots$ — бутун сонлар;

$m,n,k,l,\ldots$ — натурал сонлар;

$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$ — ҳақиқий сонлар;

X,P,Q — етарлича катта ҳақиқий сонлар;

N — етарлича катта натурал сон;

$p,p_1,p_2,p_3,\ldots$ — туб сонлар;

$c,c_1,c_2,\ldots$ — қандайдир мусбат ўзгармас сонлар.

$\|x\|$ — x дан унга энг яқин турган бутун сонгача бўлган масофа;

$s=\sigma+it$ — комплекс ўзгарувчи;

(a,b) — a ва b сонларининг ЭКУБи;

$[a,b]$ — a ва b сонларининг ЭКУКи;

$\mu(n)$ ва $\Lambda(n)$ лар мос равишда

$$\mu(n)=\begin{cases} 1, \text{ агар } n=1 \text{ бўлса;} \\ (-1)^k, \text{ агар } n=p_1p_2\ldots p_k \text{ ва } p_i\neq p_j; \\ o, \text{ агар } \ p^2 \setminus n \text{ бўлса,} \end{cases}$$

ва

$$\Lambda(n)=\begin{cases} \ln p, \quad \text{агар} \quad n=p^k, k\geq 1 \text{ бўлса;} \\ 0, \quad \text{агар} \quad n\neq p^k \text{ бўлса} \end{cases}$$

тенгликлар билан аниқланувчи Мёбиус ва Мангольдт функциялари.

$\chi(n)$ — Дирихле характери, $\overline{\chi}$ эса χ га қўшма Дирихле характери, $L(s,\chi)$, $Res > 1$ бўлганда

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

тенглик билан аниқланувчи Дирихленинг L — функцияси.

Агар $\chi(n)$ — q модули бўйича Дирихле характери бўлса, у ҳолда $\tilde{\beta}$ орқали $L(s,\chi)$ функциянинг мавжудлиги гумон қилинаётган $\tilde{\beta}>1-c_1(\text{in}q)^{-1}$ шартни қаноатлантирувчи ягона ҳақиқий ноли (махсус ноли) ни (Г. Дэвенпорт [51] ва И. Аллаков [37] ларга қаранг) белгилаймиз.

$$E_{\tilde{\beta}}=\begin{cases}0, & \text{агар } \tilde{\beta} \text{ махсус нол мавжуд бўлмаса;}\\ 1, & \text{агар шундай нол мавжуд бўлса.}\end{cases}$$

$$\delta_\chi=\begin{cases}1, & \text{агар } \chi=\chi_0 - \text{бош характер бўлса;}\\ 0, & \text{агарда } \chi\neq\chi_0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

$\varphi(a)$ — Эйлер функцияси;

$\tau_k(n)$ — тенглама $x_1x_2...x_k=n$ нинг натурал сонлардаги ечимлари сони, хусусий ҳолда $\tau_2(n)=\tau(n)$ — n нинг натурал бўлувчилари сони; $\pi(x)$ билан $p\le x$ бўлган туб сонларнинг сони белгилаймиз, яъни

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1.$$

$e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$; $\sum\limits_{\chi}$, $\sum\limits_{\chi}^{*}$ ва $\sum\limits_{a=1}^{q}{}'$ лар мос равишда q модули бўйича барча характерлар, q модули бўйича барча примитив характерлар ва q модули бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидаги барча чегирмалар бўйича олинган йиғиндиларни билдиради.

Шунингдек

$$C_{\chi}(m)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{mh}{q}\right)$$

деб белгилаб оламиз. Хусусий ҳолда, $C_{\chi}(1)=\tau(\chi)$ — Гаусс йиғиндиси. Ихтиёрий $x>1$ ҳақиқий сони учун $\psi(x,\chi)$ функцияни

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)$$

тенглик билан аниқлаймиз.

$f \ll g$ ва $f=O(g)$ ёзувлар бир хил маънога эга, яъни агар $g>0$ бўлса, у ҳолда $|f|\le Cg$ эканлигини билдиради.

Номерланган формулаларга мурожаат (1.2) кўринишида амалга оширилади. Бунда биринчи рақам бобни, иккинчиси эса формуланинг номерини билдиради, яъни (1.2) белги формуланинг биринчи бобдаги иккинчи формула эканлигини билдиради.

1- БОБ

АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯДАГИ ТУБ СОНЛАР БЎЙИЧА ОЛИНГАН ТРИГОНОМЕТРИК ЙИҒИНДИЛАРНИ БАҲОЛАШ ВА УЛАРНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Ушбу боб тригонометрик йиғиндилар учун олинган янги баҳоларни исботлаш ва уларнинг $\{f(p)\}$ кетма-кетлик каср қисмларининг тақсимоти масаласига ҳамда

$$\pi_D(\gamma,\delta,N)=\sum_{\substack{p\le N,\, p\equiv f(\mathrm{mod}D)\\ \gamma\le\{\alpha p^k\}<\gamma+\delta,\, 0\le\gamma<\gamma+\delta\le 1}} 1$$

функция учун асимптотик формула олишга тадбиқларига бағишланган. Бунда қолдиқ ҳаднинг интервал узунлиги δ га боғлиқлиги келтириб чиқарилган.

Бу баҳоларни исботлашда моҳияти жиҳатидан Р. Вон, А. Ф. Лаврик, И. М. Виноградов методларининг комбинациясидан иборат бўлган методдан фойдаланамиз.

Тригонометрик йиғиндиларни баҳолаш ва уларнинг татбиқларини ўрганишни бошловчиларга биз В. И. Сегал [54] ва Н. М. Коробов [72] китобларини тавсия этамиз.

1.1. Арифметик прогрессиядаги туб сонлар бўйича олинган чизиқли тригонометрик йиғиндиларни баҳолаш

Маълумки, И. М. Виноградов [43] биринчи марта арифметик прогрессияга тегишли туб сонлар бўйича олинган тригонометрик йиғинди

$$\sum_{\substack{p\le N,\, p\equiv l(\mathrm{mod}D)\\ (p,l)=1}} e(\alpha p) \qquad (1.1)$$

модули учун тривиал бўлмаган баҳо олган.

Бўлаклаб йиғиш усулидан фойдаланиб кўриш қийин эмаски, (1.1) йиғинди моҳияти жиҳатидан

$$S_1(\alpha) = S_1(D,\alpha,N) = \sum_{n\le N,\, n\equiv l(\mathrm{mod} D)} \Lambda(n)e(\alpha n), \ 1\le l\le D,(l,D)=1 \quad (1.2)$$

йиғиндига эквивалент.

А. Ф. Лаврик [58,59] томонидан Дирихле L — функциясининг нолари тақсимотининг зичлиги ғояси (1.2) кўринишдаги йиғиндиларни баҳолашга тадбиқ этилди. (1.2) йиғиндининг модулини баҳолашни

$$\sum_{\chi_q} |\psi(N,\chi_q)| \quad (1.3)$$

йиғиндини баҳолашга келтириш мумкин (А. Ф. Лаврик [58] га қаранг). [58,59] ишларда (1.3) йиғиндини Дирихле L — функцияси $L(s,\chi)$ ноларининг зичлиги тўғрисидаги маълумотлардан фойдаланиб баҳоланган. Vaughan R. C. [106,107] эса (1.3) йиғиндини А. Ф. Лаврик [57] нинг тақрибий функционал тенгламасидан P. X. Gallagher [90] методи ёрдамида келтириб чиқарилган $L^2(s,\chi)$ учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремалардан фойданиб текширган.

Ушбу параграфда А. Ф. Лаврик [58,59] исботининг ва Vaughan R. C. [106] 2-теоремаси исботи ғояларидан фойдаланиб Дирихле L — функцияси $L(s,\chi)$ ноларининг тақсимоти зичлиги тўғрисидаги маълумотларга таянмайдиган [58] ишдаги 1-теоремага ўхшаш теоремани исботлаймиз. Бунда арифметик прогрессиянинг айирмаси даражали ўсиш тартибига эга бўлади (И. Аллаков [6]).

Аввало, (1.2) йиғинди ҳақидаги умумий теоремани келтирамиз.

1.1.1-теорема. Агар γ, δ ва $c\ge 1$ лар

$$\sum_{\chi_q} |\psi(N,\chi_q)| \ll \left(N + qN^{1/2} + q^{\gamma}N^{\delta}\right)L^c \quad (1.4)$$

баҳони қаноатлантирувчи мусбат сонлар бўлса, у ҳолда $|\alpha - aq^{-1}| \le 2N^{-1}$, $d=(D,q)$, $(a,q)=1$, $L = \ln N$ бўлганда (1.2) тенглик билан аниқланувчи $S_1(\alpha)$ йиғинди учун

$$S_1(\alpha) \ll \left(\frac{d}{D} q^{-1/2} N + q^{1/2} N^{1/2} + \left(\frac{d}{D} \right)^{1-\gamma} q^{-1/2+\gamma} N^{\delta} \right) L^{c+1}$$

баҳо ўринли.

Агар $L(s,\chi)$ функциянинг нолларининг зичлиги тўғрисидаги гипотеза ўринли бўлса, (1.4) да $\gamma=0$, $\delta=1$ деб олиш керак.

Vaughan R. C. [106] нинг (1.3) йиғинди учун баҳосидан фойдалансак 1.1.1- теоремадан қуйидаги (зичлик гипотезасига таянмайдиган) теорема келиб чиқади.

1.1.2-теорема. Агар $|\alpha - aq^{-1}| \le 2N^{-1}$, $(a,q)=1$, $d=(q,D)$ бўлса, у ҳолда

$$S_1(\alpha) \ll \left(\frac{d}{D} q^{-1/2} N + q^{1/2} N^{1/2} + \left(\frac{d}{D} \right)^{3/8} q^{1/8} N^{3/4} \right) L^{9/2}$$

бўлади.

Бу ердан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1.1.1-натижа. Агар $(D,q)=1$, $q \ll L^c$, ва $c \ge 12$ ўзгармас сон бўлса, у ҳолда ихтиёрий $D \le N^{2/5} L^{-c}$ учун

$$S_1(\alpha) \ll \frac{N}{\varphi(D)} L^{\frac{-c+11}{2}}$$

баҳо ўринли бўлади.

1.1.2-натижа. Агар $P < q \le NP^{-1}$, $1 \le P \le N^{1/3}$, $|\alpha - aq^{-1}| \le$ $\le 2P(qN)^{-1}$, $(a,q)=1$ бўлса, у ҳолда

$$S_1(\alpha) \ll \frac{N}{\varphi(D)}\Delta$$

бажарилади. Бу ерда $\Delta = DP^{-1/2}L^{11/2}$.

1.1.3-натижа. Агар $P < q \le NP^{-1}$, $1 \le P \le N^{1/3}$, $|\alpha - aq^{-1}| \le q^{-2}$, $(a,q)=1$ ва $\Delta = DP^{-1/2}L^{11/2}$ бўлса, у ҳолда

$$S_1(\alpha) \ll \frac{N}{\varphi(D)}\Delta$$

баҳо ўринли бўлади.

1.1.2-теоремани А. Ф. Лаврик [58] ишдаги 1-теореманинг натижаси

$$S_1(\alpha) \ll \left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N + q^{1/2}N^{1/2} + \left(\frac{d}{D}\right)^{2/7} q^{3/14}N^{5/7}\right)L^{18} \qquad (1.5)$$

билан таққослаш кўрсатадики, агар $1 < q \le N^{2/5}$ бўлганда 1.1.2-теореманинг натижаси барча мавжуд баҳолардан яхшироқдир. Юқоридаги натижалар эса илгари мавжуд баҳолардан P нинг ўзгариш диапазонининг кенглиги, $N^{1/4} \le R \le N^{1/3}$ бўлганда олинган баҳо яхшилиги, барча баҳоларда логарифмик кўпайтувчининг даражаси кичиклиги ҳамда исботлаш усули билан фарқ қилади.

1.1.1-теореманинг исботи. Абелнинг бўлаклаб йиғиш формуласидан фойдаланиб

$$S_1(\alpha)=S_1(\frac{a}{q})e(N(\alpha-\frac{a}{q}))-2\pi i(\alpha-\frac{a}{q})\int_0^N S_1(D,\frac{a}{q},\xi)e(\xi(\alpha-\frac{a}{q}))d\xi$$

деб ёза оламиз. Бу ердан

$$S_1(\alpha)\ll\left|S_1(\frac{a}{q})\right|+\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\int_0^N|S_1(D,\frac{a}{q},\xi)|\,d\xi. \qquad (1.6)$$

Демак, $S_1(\alpha)$ йиғинди учун тривиал бўлмаган баҳо олиш учун (1.2) йиғинди учун $\alpha=\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$ рационал нуқталарда шундай баҳо олиш етарли экан.

$$\sum_{\substack{n\le N,n\equiv l(\mathrm{mod}D)\\(n,q)>1}}\Lambda(n)e\left(\frac{an}{q}\right)\ll L^2$$

бўлганлиги сабабли $S_1\left(\frac{a}{q}\right)$ ни

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right)=\sum_{\substack{n\le N,n\equiv l(\mathrm{mod}D)\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e\left(\frac{an}{q}\right)+O(L^2) \qquad (1.7)$$

кўринишида ёза оламиз. Маълумки, $(n,q)=1$ бўлса,

$$e\left(\frac{an}{q}\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(an)\tau(\overline{\chi}_q)$$

бўлади. Шунинг учун ҳам (1.7) дан

$$S_1\left(\frac{a}{(q)}\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\tau(\overline{\chi}_q)\sum_{n\le N,\, n\equiv l(\mathrm{mod}D)}\Lambda(n)\chi_q(n)+O(L^2) \quad (1.8)$$

келиб чиқади.

(1.8) нинг ўнг томонидаги охирги йиғиндини Дирихле характерларининг хоссаларидан фойдаланиб

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D}\overline{\chi}_D(e)\sum_{n\le N}\Lambda(n)\chi_q(n)\chi_D(n)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак,

$$|\tau(\overline{\chi}_q)|\le q^{1/2}, \quad \varphi(m)\gg\frac{m}{\ln\ln m}, \; m>1$$

эканлигини инобатга олсак ва

$$A=\sum_{\chi_q}\sum_{\chi_D}\left|\sum_{n\le N}\Lambda(n)\chi_q(n)\chi_D(n)\right|$$

деб белгилаш киритсак, у ҳолда $q\le N$ ($q\le N$ деб ҳисоблаш мумкин, чунки агар $q>N$ бўлса, теорема тривиал ҳолда ўринли бўлади) ва $D\le N$ лар учун (1.8) дан

$$S\left(\frac{a}{q}\right)\ll\left(LD^{-1}q^{-1/2}A+L^2\right) \quad (1.9)$$

келиб чиқади.

Характерлар кўпайтмаси етакчи модули кўпайтувчилар етакчи модулларининг энг кичик умумий карралисининг бўлувчисига тенг бўлган характер бўлгани учун $d=(q,D)$ деб олиб, $\chi_q(n)\chi_D(n)=\chi_k(n)$ га эга бўламиз. Бунда $k=qDd^{-1}$.

Энди A да характерлар бўйича икки каррали йиғиндидан оддий йиғиндига ўтиб

$$A\leq d\sum_{\chi_k}|\psi(N,\chi_k)| \qquad (1.10)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\psi(N,\chi_k)=\sum_{n\leq N}\Lambda(n)\chi(n).$$

Шундай қилиб, (1.9) ва (1.10) лардан

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right)\ll\left(\frac{dL}{D}q^{-1/2}\sum_{\chi_k}|\psi(N,\chi_k)|+L^2\right) \qquad (1.11)$$

га эга бўламиз. Бу ердан (1.4) баҳога асосан

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right)\ll\frac{dL}{Dq^{1/2}}\left(N+kN^{1/2}+k^{\gamma}N^{\delta}\right)L^c+L^2\ll$$

$$\ll\left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N+q^{1/2}N^{1/2}+\left(\frac{d}{D}\right)^{1-\gamma}q^{-\frac{1}{2}+\gamma}N^{\delta}\right)L^{c+1}+L^2 \qquad (1.12)$$

бўлади.

Энди агар $|\alpha-aq^{-1}|<2N^{-1}$ эканлигини эътиборга олсак, (1.6) ва (1.12) лардан 1.1.1- теорема келиб чиқади.

1.1.2-теореманинг исботи. Vaughan R. C. [106] 2-теоремасига кўра

$$\sum_{\chi_k} \max_{y\le N} \psi(y,\chi_k) \ll NL^3 + N^{3/4}k^{5/4}L^{23/8} + N^{1/2}kL^{7/2}.$$

Бу баҳодан фойдаланиб (1.11) дан

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) \ll \frac{d}{D}Nq^{-1/2}L^4 + \left(\frac{d}{D}\right)^{3/8} N^{3/4}q^{1/8}L^{31/8} + N^{1/2}q^{1/2}L^{9/2} \qquad (1.13)$$

га эга бўламиз.

Энди (1.6) ва (1.13) дан $|\alpha - aq^{-1}| \le 2N^{-1}$ бўлганда 1.1.2-теорема келиб чиқади.

1.1.1 ва 1.1.2-натижалар кўрсатилган шартларда 1.1.2-теоремадан тўғридан-тўғри келиб чиқади. 1.1.1-натижадаги D ни $D \le N^{2/5}L^{-c}$ шартни қаноатлантирувчи қилиб танлаш (1.13) даги

$$\left(\frac{d}{D}\right)^{3/8} N^{3/4}q^{1/8}L^{31/8}$$

ҳад билан боғлиқ.

1.1.3-натижанинг исботи эса Г. Монтгомери [66] даги 16.3-натижанинг исботига ўхшаш бажарилади.

Таъкидлаш керакки, A. Balog, A. Perelli [79] лар Вон айнияти (А. А. Карацуба [52] нинг III-бобдаги 9-масаласи) дан фойдаланиб, элементар усул билан

$$S_1(\alpha) \ll \left(\frac{dN}{Dq^{1/2}} + \frac{q^{1/2}N^{1/2}}{d^{1/2}} + \frac{N^{4/5}}{D^{2/5}}\right)L^3$$

эканлигини исботладилар. Лекин $d=(D,q)=1$ ва $q\leq N^{2/5}D^{1/5}L^{-12}$ бўлганда 1.1.2-теорема бу баҳодан яхши.

1.2. Арифметик прогрессиядаги туб сонларнинг квадратлари бўйича олинган тригонометрик йиғиндиларни баҳолаш

Маълумки, сонларнинг аналитик назариясидаги аддитив масалаларда

$$S_k(D,\alpha,N)=\sum_{n\leq N,n\equiv l(\mathrm{mod}D)}\Lambda(n)e(\alpha n^k)$$

кўринишдаги тригонометрик йиғиндиларнинг тривиал бўлмаган баҳолари муҳим аҳамиятга эга. Бундан баҳоларни олишга кўплаб ишлар бағишланган. Уларга мисол сифатида [42—47, 71, 76, 82, 94—98] ларни келтириб ўтамиз.

A. Ghosh [91] да $S_2(1,h\alpha,N)=S_2(h\alpha)$ учун янги баҳо олган ва

$$\sum_{h\leq H}S_2(h\alpha)\ll HN^{1+\varepsilon}\left(q^{-1}+N^{-1/2}+qH^{-1}N^{-2}\right)^{1/4} \qquad (1.14)$$

нинг бажарилишини кўрсатган. Биз (1.14)-баҳони арифметик прогрессия учун умумлаштирамиз (И. Аллаков [10—12]). Ушбу параграфнинг асосий мақсади қуйидаги теоремани исботлашдан иборат.

1.2.1-теорема. Агар $|\alpha-aq^{-1}|<q^{-2}$ ва $D^2\leq N$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий сони учун

$$\sum_{h\leq H}|S_2(D,h\alpha,N)|\ll\frac{HN^{1+\varepsilon}}{D}\left(\frac{d^2}{q}+\frac{D}{N^{1/2}}+\frac{qD}{HN^2d}\right)^{1/4} \qquad (1.15)$$

баҳо ўринли. Бу ерда $d=(q,D)$ ва Виноградов символи $\ll$ даги доимий фақат ε га боғлиқ.

Агар зарурат бўлса, (1.15) нинг ўнг томонидаги $\varepsilon>0$ ни $\frac{c}{\ln\ln N}$ билан алмаштириш мумкин.

Бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1.2.1-натижа. Ушбу

$$S_2(D,\alpha,N)\ll D^{-1}N^{1+\varepsilon}\left(d^2q^{-1}+DN^{-1/2}+qDN^{-2}d^{-1}\right)^{1/4}$$

баҳо ўринли.

1.2.2-натижа. Агар $D\le N^{\varepsilon}$ ва $N^{1/2}<q\le N^{3/2}$ бўлса,

$$S_2(D,\alpha,N)\ll D^{-1}N^{\frac{7}{8}+\varepsilon} \tag{1.16}$$

бўлади.

1.2.1-натижа A. Ghosh [91] нинг 2-теоремасининг арифметик прогрессия учун умумлашмасидир. (1.16) кўринишдаги баҳолар одатда q нинг ўзгариш диапазони катта бўлганда кенг қўлланилади. Шу нуқтаи назардан (1.16)- баҳо муҳимдир.

1.2.1-теоремани бевосита исботлашдан олдин уни исботлаш учун зарур бўлган леммаларни келтирамиз. Бу леммалардан дастлабки иккитаси И. М. Виноградовга тегишли бўлиб, кўпчилик мутахассисларга яхши таниш. Бундан кейин $m\equiv f(\mathrm{mod}D)$ нинг ўрнига $m\equiv f$ ёзувдан фойдаланамиз.

1.2.1-лемма. Агар α, $(0<\alpha<1)$ ҳақиқий сон ва X,X' лар мусбат бутун сонлар бўлса, у ҳолда

$$\sum_{\substack{X<m\le X' \\ m\equiv f}} e(m\alpha) \ll \min\left(\frac{X'}{D}+1; \|\alpha D\|^{-1}\right)$$

баҳо ўринли.

1.2.2-лемма. Агар X ва Y лар мусбат бутун сонлар, α эса ўзаро туб a ва q бутун сонлари учун $|\alpha - aq^{-1}| < q^{-2}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\sum_{m\le X} \min(Y; \|\alpha m\|^{-1}) \ll XYq^{-1} + (X+q)\ln 2q,$$

$$\sum_{m\le X} \min\left(\frac{XY}{m}; \|\alpha m\|^{-1}\right) \ll (XYq^{-1} + X + q)\ln(2XYq)$$

муносабатлар ўринли.

Энди X, X', Y, Y' лар $X < X' \le 2X$, $Y < Y' \le 2Y$ ва $XY \le N$ шартларни қаноатлантирувчи бутун сонлар бўлсин.

$$S_1 = \sum_{h\le H} \left| \sum_{m} \omega(m) \sum_{\substack{n \\ (m,n)\in G}} \psi(n) e(hm^2n^2\alpha) \right| \qquad (1.17)$$

деб белгилаб оламиз. Бу ерда

$$G = \{(m,n) \,|\, X < m \le X', Y < n \le Y', m \equiv f_1, n \equiv f_2, m\cdot n \le N\},$$

$\omega(m)$ ва $\psi(n)$ лар

$$|\omega(m)| \le \tau(m)\ln m, \qquad |\psi(n)| \le \tau(n)\ln n \qquad (1.18)$$

шартни қаноатлантирувчи арифметик функциялар. Тушунарлики, $|G| \leq ND^{-2}$.

1.2.3-лемма. Агар $\ln q \ll \ln N$ бўлса, у ҳолда (1.17) тенглик билан аниқланувчи S_1 йиғинди учун қуйидаги баҳолар ўринли:

а) агар барча $n \in (Y, Y']$ лар учун $\psi(n) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$S_1 \ll (NH)^{\varepsilon} \left(\frac{N^{1/2}HX}{D^{1/2}} + \frac{dNHX^{1/2}}{Dq^{1/2}} + \left(\frac{HXq}{dD} \right)^{1/2} \right); \tag{1.19}$$

b) агар бирор $n \in (Y, Y']$ учун $\psi(n) \neq 1$ бўлса, у ҳолда

$$S_1 \ll (NH)^{\varepsilon} \left(\frac{N^{1/2}X^{1/2}H}{D^{3/2}} + \frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}} + \frac{HN^{3/4}Y^{1/4}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}} \right). \tag{1.20}$$

Исботи. S_1 йиғиндига Коши тенгсизлигини қўлласак,

$$S_1 \leq \left[\sum\nolimits_1 \left(\sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 \right) \right]^{1/2} \tag{1.21}$$

ҳосил бўлади. Бунда

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{h \leq H} \sum_{\substack{X < m \leq X' \\ m = f_1}} |\omega(m)|^2, \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{h \leq H} \sum_{m} \sum_{\substack{n \\ (m,n) \in G}} |\psi(n)|^2,$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{h \leq H} \sum_{m} \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \\ (m, n_i) \in G, i=1,2}} \psi(n_1)\psi(n_2) e(hm^2(n_1^2 - n_2^2)\alpha).$$

(1.18) шартни ва

$$\tau_k^e(n) \ll n^{\varepsilon} \qquad (1.22)$$

баҳони инобатга олиб

$$\sum\nolimits_1 \ll X^{1+\varepsilon} HD^{-1}, \ \sum\nolimits_2 \ll NY^{\varepsilon} HD^{-2} \qquad (1.23)$$

ларга эга бўламиз.

Энди $\sum_3$ ни баҳолаймиз. Икки ҳолни қараймиз.

а). Барча $n \in (Y, Y']$ лар учун $\psi(n) = 1$ бўлсин. У ҳолда $\sum_3$ да д $n_1 - n_2 = y$ еб олсак,

$$\sum\nolimits_3 \leq \sum_{h \leq H} \sum_{X < m \leq X'} \sum_{\substack{Y \leq |y| \leq Y' \\ y \neq 0}} \left| \sum_{\substack{n \\ (m,n) \in G \\ (m,n+y) \in G}} e(2hm^2 yn\alpha) \right|$$

бўлади. $s = 2hm^2 y$ деб белгилаш киритамиз, у ҳолда $2DX^2 <$ $< |s| \leq 16NHX$ ва s ни бундай кўринишда ифодалашлар сони $\tau_3(|s|)$ дан кўп эмас. Шунинг учун ҳам

$$\sum\nolimits_3 < \sum_{\substack{|s| < 16NHX \\ s \neq 0}} \tau_3(|s|) \left| \sum_{\substack{Y < n \leq Y' \\ n \equiv f}} e(sn\alpha) \right|.$$

Бунда 1.2.1-лемма ва (1.22) баҳодан фойдалансак,

$$\sum\nolimits_3 \ll (NHX)^{\varepsilon} \sum_{\substack{|s| < 16NHX \\ s \neq 0}} \min\left(\frac{Y'}{D}; \|sD\alpha\|^{-1} \right) \qquad (1.24)$$

келиб чиқади.

$$Y' \le \frac{N}{X'} = \frac{N}{|s|}|s|\frac{1}{X'} < \frac{16N^2H}{|s|} \quad \text{ва} \quad d=(q,D), \ d \le (D^2,q) < d^2$$

бўлганлиги сабабли (1.24) нинг ўнг томонига 1.2.2-леммани қўллаб,

$$\sum\nolimits_3 \ll (NXH)^{\varepsilon}\left(\frac{d^2N^2H}{Dq} + NHX + \frac{q}{d}\right)\ln\left(\frac{32N^2Hq}{dD}\right) \qquad (1.25)$$

ни ҳосил қиламиз.

(1.23), (1.25) ва $\ln q \ll \ln N$ ларни эътиборга олсак (1.21) дан теореманинг а) тасдиғи келиб чиқади.

b). Энди бирор $n \in (Y;Y']$ учун $\psi(n) \ne 1$ бажарилсин. Бу ҳолда $\sum_3$ ни

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{h \le H}\ \sum_{\substack{X<m\le X' \\ m \equiv f}}\ \sum_{(m,t)\in\Phi} Z(t)e(hm^2t\alpha)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бунда

$$\Phi = \{(m,t) \mid X < m \le X', D \le |t| < Y'^2, |m^2t| \le N^2, m \equiv f, t \equiv 0\}$$

ва

$$Z(t) = \sum_{\substack{n_1 \equiv n_2,\, n_1^2 - n_2^2 = t \\ (m,n_i)\in G,\, i=1,2}} \psi(n_1)\psi(n_2).$$

Тушунарлики,

$$|\Phi| \ll \frac{NY}{D^2}, \quad \sum_{h\le H}\ \sum_{\substack{D \le |t| < Y'^2 \\ t \equiv 0}} |Z(t)|^2 \ll \frac{HY^{2+\varepsilon}}{D}.$$

$\sum_3$ да йиғиш тартибини ўзгартириб Коши тенгсизлигини қўлласак,

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{h\le H}\ \sum_{D\le|t|<Y'^2} Z(t) \sum_{\substack{m \\ (m,t)\in\Phi}} e(htm^2\alpha) \le$$

$$\le \left(\sum_{h\le H}\ \sum_{D\le|t|<Y'^2} |Z(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{h\le H}\ \sum_{D\le|t|<Y'^2} \left| \sum_{\substack{m \\ (m,t)\in\Phi}} e(htm^2\alpha) \right|^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\frac{HY^{2+\varepsilon}}{D} \right)^{1/2} \left(HYND^{-2} + \sum\nolimits_4 \right)^{1/2} \qquad (1.26)$$

ҳосил бўлади. Бунда

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{h\le H}\ \sum_{D\le|t|<Y'^2}\ \sum_{\substack{m_1\ne m_2 \\ (m_i,t)\in\Phi, i=1,2}} e(ht(m_1^2 - m_2^2)\alpha).$$

Бу $\sum_4$ йиғиндини а) ҳолдаги $\sum_3$ йиғинди сингари баҳолаб

$$\sum\nolimits_4 \ll \sum_{1\le|s|<16NHX} \tau_3(|s|) \min\left(\frac{N}{D|t|^{1/2}}; \|sD\alpha\|^{-1} \right) \ll$$

$$\ll (NH)^{\varepsilon} \left(\frac{d^2N^2H}{qD} + NHY + \frac{q}{d} \right) \ln\left(\frac{2N^2Hq}{dD} \right) \qquad (1.27)$$

баҳога эга бўламиз.

(1.27) га кўра (1.26) дан

$$\sum\nolimits_3 \ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{dNHY}{Dq^{1/2}}+\frac{N^{1/2}Y^{3/2}H}{D^{1/2}}+\frac{H^{1/2}q^{1/2}Y}{D^{1/2}d^{1/2}}\right) \tag{1.28}$$

келиб чиқади. Энди (1.21), (1.23) ва (1.28) лардан теореманинг b) тасдиғи келиб чиқади.

Энди 1.2.3-леммада S_1 йиғинди учун олинган баҳоларни

$$S_2=\sum_{h\le H}\left|\sum_{\substack{M_1<m\le M_2\\ m\equiv f_1}}\omega(m)\sum_{\substack{N_1<m\le N_2\\ n\equiv f_2}}\psi(n)e(hm^2n^2\alpha)\right|$$

йиғиндини баҳолашга татбиқ этамиз. Бу ерда M_1, M_2, N_1, N_2 — лар $M_1<M_2$, $N_1<N_2$ ва $M_1N_1\le N$ шартларни қаноатлантирувчи мусбат бутун сонлар, қолган барча параметрлар эса 1.2.3-леммадаги сингари аниқланади.

S_2 ни баҳолаш учун $(M_1, M_2]$ ва $(N_1, N_2]$ интерваллардан ҳар бирини $(X, X']$ ва $(Y, Y']$ кўринишдаги $\ll \ln N$ та бўлакчаларга (қисм интервалларга) бўламиз. Бунда $M_1\le X<X'\le 2X\le M_2$ ва $N_1\le Y<Y'\le 2Y\le N_2$.

Агар $XY>N$ бўлса G тўплам бўш бўлгани учун $XY\le N$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Булардан фойдаланиб, S_2 ни $S_1=S_1(X,Y)$ йиғинди орқали

$$S_2\le\sum_X\sum_Y S_1(X,Y)\ll\left(\max S_1(X,Y)\right)\ln^2 N$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ердан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади.

1.2.4-лемма. a). Агар барча $n \in (N_1; N_2]$ лар учун $\psi(n) = 1$ бажарилса, у ҳолда

$$S_2 \ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{N^{1/2}HM_2}{D^{1/2}} + \frac{dNHM_2^{1/2}}{Dq^{1/2}} + \left(\frac{HM_2 q}{dD}\right)^{1/2}\right)$$

бўлади.

b). Агар бирор $n \in (Y; Y']$ учун $\psi(n) \neq 1$ бажарилса, у ҳолда

$$S_2 \ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{N^{1/2}HM_2^{1/2}}{D^{3/2}} + \frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}} + \frac{HN^{3/4}N_2^{1/4}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{D^{3/4}d^{1/4}}\right)$$

баҳо ўринли бўлади.

1.2.1-теореманинг исботи. $q > N^2HdD^{-1}$ бўлсин. У ҳолда (1.15) баҳонинг ўнг томонини $\ll HN^{1+\varepsilon}D^{-1}$ кўринишда ифодалаш мумкин ва (1.15) баҳо тривиал бажарилади.

Энди $H \geq N$, $\quad q \leq N^2HdD^{-1}$ бўлсин. У ҳолда Коши тенгсизлигига асосан

$$\sum_{h=1}^{H} S_2(D, h\alpha, N) \leq H^{1/2}\left(\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ n\equiv f}} \Lambda(n)e(hn^2\alpha)\right|^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll H^{1/2}\left(\frac{HN}{D}\ln N + \sum_{\substack{n_1\neq n_2,\, n_1\equiv n_2 \\ 1\leq n_1, n_2\leq N}} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)e(h(n_1^2 - n_2^2)\alpha)\right)^{1/2}$$

га эга бўламиз. Энди

$$Z_1(l)=\sum_{\substack{1\le n_1,n_2\le N\\ n_1^2-n_2^2=l,n_1\ne n_2}}\Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\le(\ln N)^2\tau(|l|)$$

деб белгилаш киритамиз. У ҳолда

$$\sum_{h=1}^{H}S_2(D,h\alpha,N)\ll(D^{-1}N\ln N)^{1/2}\cdot H+H^{1/2}\left|\sum_{h\le H}\sum_{\substack{1\le|l|<N^2\\ l\ne0}}Z_1(t)e(hl\alpha)\right|^{1/2}$$

бўлади. Бунда йиғиш тартибини ўзгартириб, 1.2.1 ва 1.2.2 леммалардан фойдалансак,

$$\sum_{h=1}^{H}S_2(D,h\alpha,N)\ll\frac{HN^{1/2}}{D^{1/2}}\ln^{1/2}N+H^{1/2}N^{\varepsilon}\left|\sum_{h\le H}\sum_{\substack{1\le|l|<N^2\\ l\ne0}}e(hl\alpha)\right|^{1/2}\ll$$

$$\ll\frac{HN^{1/2}}{D^{1/2}}\ln^{1/2}N+H^{1/2}N^{\varepsilon}\left(\sum_{h\le H}\min\left(\frac{N^2}{D};\|hD\alpha\|^{-1}\right)\right)^{1/2}\ll$$

$$\ll H\left(\frac{N\ln N}{D}\right)^{1/2}+H^{1/2}N^{\varepsilon}\left(\frac{dN^2H}{qD}+H+\frac{q}{d}\right)^{1/2}\ln^{1/2}N\ll$$

$$\ll\frac{HN^{1+\varepsilon}}{D}\left(\frac{D^{1/2}}{N^{1/2}}+\frac{Dq^{1/4}}{H^{1/4}N^{3/4}d^{1/2}}+\frac{D^{1/2}d^{1/2}}{q^{1/4}}\right)\ll$$

$$\ll\frac{HN^{1+\varepsilon}}{D}\left(\frac{D^2}{N^2}+\frac{D^4q}{HN^3d^2}+\frac{D^2d^2}{q}\right)^{1/4}$$

келиб чиқади. Бундан эса (1.15) баҳога эга бўламиз.

Энди $H < N,\ q \le N^2HdD^{-1}$ бўлсин. Ушбу

$$\sum_{u<n\le N} F(1,n) + \sum_{u<n\le Nu^{-1}} \sum_{u<m\le Nn^{-1}} t_m F(m,n) =$$

$$= \sum_{s\le u} \mu(s) \sum_{u<n\le Ns^{-1}} \sum_{r\le N(sn)^{-1}} F(sr,n) \qquad (1.29)$$

айниятни қараймиз (А. А. Карацуба [52] нинг III-бобидаги 9-масала). Бунда $F(m,n)$ — натурал m ва n аргументли ихтиёрий функция, $\mu(s)$ эса Мебиус функцияси, ($1 \le u \le N$) ихтиёрий бутун сон,

$$t_m = \sum_{s\le u,\, s\setminus m} \mu(s).$$

$F(m,n)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз. Агар $u < n < Nm^{-1}$ ва $m \equiv f_1,\quad n \equiv f_2$ бўлса, $F(m,n) = \Lambda(n)e(hm^2n^2\alpha)$, қолган ҳолларда эса $F(m,n) = 0$ деб оламиз ҳамда $u < N^{1/3}$ шарт бажарилади деб қараймиз. У ҳолда (1.29) айниятдан

$$S_2(D, h\alpha, N) = L_1 - L_2 - L_3 + O(N^{1/3}D^{-1}) \qquad (1.30)$$

га эга бўламиз. Бу ерда

$$L_1(h) = \int_1^N L_1(\beta)\beta^{-1}d\beta,$$

$$L_1(\beta) = \sum_{\substack{s\le\min(u, N\beta^{-1}) \\ s\equiv f_1\cdot\bar{r}}} \mu(s) \sum_{\substack{\beta<k<Ns^{-1} \\ k\equiv f_2}} e(hs^2k^2\alpha), (\bar{r}\cdot r \equiv 1);$$

$$L_2(h)=\sum_{\substack{l\le u^2\\ l\equiv f_3}} C_l \sum_{\substack{r\le Nl^{-1}\\ r\equiv f_1\bar{s}}} e(hl^2r^2\alpha),(s\bar{s}\equiv 1; f_3\equiv f_1\bar{r}f_2),$$

$$C_l=\sum_{\substack{s\cdot n=l, s\le u\\ s\equiv f_1\cdot\bar{r}}} \mu(s)\Lambda(n)\le \tau(l)\ln l,$$

$$L_3(h)=\sum_{\substack{u<m\le Nu^{-1}\\ m\equiv f_1}} t_m \sum_{\substack{u<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_2}} \Lambda(n)e(hm^2n^2\alpha).$$

(1.30) дан

$$\sum_{h\le H} S_2(D,h\alpha,N)=L_1+L_2+L_3+O(HN^{1/3}D^{-1}) \qquad (1.31)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу ерда

$$L_i=\sum_{h\le H} L_i(h),\quad i=1,2,3.$$

L_1 ни баҳолаймиз. 1.2.4-лемманинг a) қисмида $M_1=1$, $M_2=\min(u,N\beta^{-1})\le u$, $N_1=\beta$, $N_2=N$ ва $|\psi(s)|=|\mu(s)|\le 1$ деб оламиз, у ҳолда

$$L_2\ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}}+\frac{dHNu^{1/2}}{Dq^{1/2}}+\left(\frac{Hqu}{dD}\right)^{1/2}\right)$$

баҳони ҳосил қиламиз.

L_2 ни баҳолаш учун $L_1(h)$ йиғиндини қуйидагича қисм йиғиндиларга ажратамиз:

$$L_2(h)=\left(\sum_{\substack{m\le u\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{r\le Nm^{-1}\\ r\equiv f_1\bar{s}}}+\sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{u<r\le N^{1/2}\\ r\equiv f_1\bar{s}}}+\right.$$

$$+\sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{r\le u\\ r\equiv f_1\bar{s}}}+\sum_{\substack{N^{1/2}<m\le u^2\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{r\le Nm^{-1}\\ r\equiv f_1\bar{s}}}+$$

$$\left.+\sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{N^{1/2}<r\le Nm^{-1}}\right)C_m e(hm^2r^2\alpha)=\sum_{j=1}^{5}L_2^{(j)}(h).$$

У ҳолда

$$L_2\le\sum_{h\le H}\sum_{j=1}^{5}L_2^{(j)}(h)=\sum_{j=1}^{5}L_2^{(j)} \qquad (1.32)$$

бўлади.

Энди ҳар бир $L_2^{(j)}$ йиғиндини 1.2.4 леммадан фойдаланиб баҳолаймиз.

$L_2^{(1)}$ ни баҳолаш учун 1.2.4-лемманинг a) тасдиғида $M_1=1$, $M_2=u$, $N_2=N$, $N_1=1$, $\omega(m)=C_m$ деб оламиз ва бу ҳолда

$$L_2^{(1)}\ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}}+\frac{dHNu^{1/2}}{Dq^{1/2}}+\left(\frac{Hqu}{dD}\right)^{1/2}\right)$$

ҳосил бўлади.

$L_2^{(2)}$ ни баҳолаш учун эса 1.2.4 лемманинг b) тасдиғида $M_1=N_1=u$, $N_2=M_2=N^{1/2}$ деб оламиз. У ҳолда

$$L_2^{(2)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}}+\frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}}+\frac{H^{3/4}N^{1/2}q^{1/4}}{D^{3/4}d^{1/4}}\right)$$

баҳо ўринли бўлади.

$L_2^{(3)}$ ни эса тривиал баҳолаймиз:

$$L_2^{(3)} \ll N^{1/2+\varepsilon}HD^{-1/2}u.$$

$L_2^{(4)}$ ни баҳолаймиз. Бунинг учун 1.2.4-лемманинг b) қисмида $M_1=N_2=N^{1/2}$, $M_2=u^2$, $N_1=1$ деб оламиз, у ҳолда $D^2\le N$ бўлганда

$$L_2^{(4)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{1/2}u}{D^{3/2}}+\frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/2}}+\frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}}+\frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right)$$

бажарилади.

Ниҳоят 1.2.4-лемманинг b) қисмида $M_1=N_2=N^{1/2}$, $M_2=Nu^{-1}$, $N_1=u$ деб олиб $L_2^{(5)}$ йиғинди учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$L_2^{(5)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}}+\frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}}+\frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}}+\frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

$L_2^{(j)},(j=1,2,3,4,5)$ лар учун ҳосил бўлган баҳоларни йиғиб (1.32) дан

$$L_2 \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}}+\frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}}+\frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}}+\frac{d^{1/2}HN}{d^{1/4}D}+\right.$$

$$+\frac{H^{3/4}N^{1/2}q^{1/4}}{D^{3/4}d^{1/4}}+\frac{d^{1/2}HNu^{1/2}}{q^{1/2}D}+\left(\frac{Hqu}{Dd}\right)^{1/2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди L_3 ни баҳолаш қолди. Бунинг учун эса $L_3(h)$ йиғиндини бўлакчаларга бўламиз:

$$L_3(h)=\left(\sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{u<n\le N^{1/2}\\ n\equiv f_2}}+\sum_{\substack{N^{1/2}<m\le Nu^{-1}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{u<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{u<m\le Nu^{-1}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{N^{1/2}<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_2}}\right)t_m\Lambda(n)e(hm^2n^2\alpha).$$

У ҳолда L_3 ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$L_3\le\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{h\le H}L_3^{(i)}(h)\right)=\sum_{i=1}^{3}L_3^{(i)}.$$

Энди

$$\omega(m)=\tau_m=\left|\sum_{d\le u,d\setminus m}\mu(d)\right|\le\tau(m)\ll m^{\varepsilon}\text{ ва }\psi(n)=\Lambda(n)=\ln n$$

бўлгани учун 1.2.4-лемманинг b) қисмида $M_1 = N_2 = N^{1/2}$, $M_2 = Nu^{-1}$, $N_1 = u$ деб олиб $L_3^{(2)}$ йиғинди учун

$$L_3^{(2)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right)$$

баҳога эга бўламиз. Бу баҳо $L_3^{(3)}$ йиғинди учун ҳам ўринли бўлади.

$L_3^{(1)}$ ни баҳолаш учун эса $M_1 = N_1 = u$, $M_2 = N_2 = N^{1/2}$ деб олиб 1.2.4-лемманинг b) қисмини қўллаймиз. У ҳолда

$$L_3^{(1)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$L_3 \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

Шундай қилиб, (1.31) дан

$$\sum_{h\le H} S_2(D,h\alpha,N) \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}} + \frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{d^{1/2}HNu^{1/2}}{q^{1/2}D} + \left(\frac{Hqu}{Dd}\right)^{1/2}\right) \qquad (1.33)$$

эканлиги келиб чиқади.

Ҳозирча u бизда $u \le N^{1/3}$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий параметр эди. Энди, $u = \min\left[N^{1/3}D^{-5/24};\quad q^{1/2};(N^2Hdq^{-1}D^{-1})^{1/2}\right]$ деб оламиз. У ҳолда $q \le N^2HdD^{-1}$ эканлигини ҳисобга олиб (1.33) дан 1.2.1-теоремага эга бўламиз.

1.3. Аргументи арифметик прогрессиядаги туб сонлар бўлган кўпҳадларнинг қийматлари бўйича олинган тригонометрик йиғиндиларни баҳолаш

k,h,f,n,D,H,N — натурал сонлар, p — туб сон, α ва ε лар ихтиёрий ҳақиқий сонлар, a ва q лар $(a,q)=1$, $|\alpha q - a| < q^{-1}$ шартларни қаноатлантирувчи бутун сонлар, $f\ (x)$ даражаси $k \ge 2$, бошҳадининг коэффициенти α га тенг бўлган ҳақиқий коэффициентли кўпҳад ҳамда $d=(q,D)$, $\nu = 4^{1-k}$, $R = 2^{k-1}$ бўлсин.

Сонлар назариясининг турли масалаларида

$$\sum_{p \le N} \ln p e(f(p))$$

кўринишдаги тригонометрик йиғиндиларнинг тривиал бўлмаган баҳолари муҳим аҳамиятга эга ([38,45-47,71,76, 94,95] ларга қаранг).

Ушбу параграфда биз қуйидаги теоремани исботлаймиз (И.Аллаков[14,15]):

1.3.1-теорема. Агар $D^2 \le N$ ва $|\alpha q - a| < q^{-1}$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{h \le H} \sum_{\substack{p \le N \\ p \equiv f\,(\mathrm{mod} D),(f,D)=1}} \ln p e(hf(p)) \ll \frac{HN}{D}\Delta(H)$$

бўлади. Бунда

$$\Delta(H)=\left(\frac{HN}{D}\right)^{\varepsilon}\left[\frac{d^{2k-1}}{q}+\frac{D}{N^{1/2}}+\frac{q}{H}\left(\frac{D}{Nd}\right)^{k}\right]^{\nu} \qquad (1.34)$$

ва $\ll$ символдаги доимий k ва $\varepsilon>0$ га боғлиқ.

Бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1.3.1-натижа. Ушбу

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv f(\bmod D),(f,D)=1}} \ln p e(f(p)) \ll \frac{N}{D}\Delta(1)$$

баҳо ўринли.

1.3.2-натижа. Агар $D \ll N^{\varepsilon}$, $N^{1/2}<q\le N^{\frac{1k}{4}}$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv f(\bmod D),(f,D)=1}} \ln p e(f(p)) \ll \frac{1}{D}N^{1-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган 1.3.1 теорема G. Harman [94] 1-теоремасининг умумлаштирилганидир. Хусусий ҳолда, $D=1$ ва $H=1$ бўлганда 1.3.1 теоремадан G. Harman [94] чиқади. Илгари 1.3.1 теоремадаги сингари натижалар И.М.Виноградов [43] ($D=1$ бўлганда) ва Хуа - Ло - Кен [76] лар томонидан олинган, лекин у баҳоларда k нинг кичик қийматларида (1.34) дагига қараганда кичик. Келтирилган натижаларни исботлашда Р. Вон айниятидан фойдаланамиз.

Даставвал 1.3.1-теоремани исботлаш учун зарур бўлган леммаларни келтирамиз.

Δ_r — айирмали операторни индуктив тарзда

$$\Delta_1(f(x);h_1) = f(x+h_1) - f(x),$$

$$\Delta_{i+1}(f(x);h_1,...,h_{i+1}) = \Delta_1(\Delta_i(f(x);h_1,...,h_i);h_{i+1}) \qquad (1.35)$$

тенгликлар билан аниқлаймиз ва қулайлик учун

$$\Delta_i(x) = \Delta_i(f(x);h_1,...,h_i)$$

ва

$$F = \left|\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv f}} e(f(n))\right|. \qquad (1.36)$$

Қуйидаги иккита лемма Г. Вейл (Р. Вон [49] даги 2.3 ва 2.4-леммалар) леммаларининг арифметик прогрессия учун умумлашмасидир.

1.3.1-лемма. (1.36) тенглик билан аниқланувчи F йиғинди учун

$$F^{2^r} \le \left(\frac{2X}{D}\right)^{2^r-r-1} \sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_r\\ (h_1,...,h_r)\in J_r}} \left|\sum_{n\in I_r} e(\Delta_r(n))\right|$$

тенгсизлик ўринли. Бунда

$$J_r = \{(h_1,...,h_r) \mid |h_i| < X, h_i \equiv 0(\mathrm{mod} D), i=\overline{1,r}\},$$

$$I_r = \{n \mid 1 \le n \le X - h_1 - ... - h_r, n \equiv f(\mathrm{mod} D)\}.$$

Исботи. $D=1$ да бу лемманинг исботи Г. Вейлга тегишли ([49] даги 2.3-лемма). $1<D<X$ бўлганда лемманинг исботини r бўйича математик индукция методидан фойдаланиб бажарамиз.

$r=1$ да

$$F^2=\sum_{n\le X,\, n\equiv f}\ \sum_{n_1\le X,\, n_1\equiv f} e(f(n_1)-f(n))$$

бўлади. $n_1=n+h_1$ деб оламиз, у ҳолда $1-X\le h_1\le X-n$ ва $h_1\equiv 0(modD)$ бажарилади. Шунинг учун ҳам

$$F^2=\sum_{n\le X-1, n\equiv f}\ \sum_{\substack{1-X\le h_1\le X-n\\ h_1\equiv 0}} e(f(n+h_1)-f(n))=$$

$$=\sum_{\substack{1-X\le h_1\le X-1\\ h_1\equiv 0}}\ \sum_{\substack{1\le n\le X-h_1\\ n\equiv f}} e(\Delta_1(n))=\sum_{h_1\in J_1}\sum_{n\in I_1} e(\Delta_1(n)).$$

Бундан лемманинг $r=1$ да ўринли эканлиги келиб чиқади.

Энди $r=s$ бўлганда лемма ўринли деб фараз этиб $r=s+1$ бўлганда ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Индуктивлик фаразимизга кўра

$$F^{2^{s+1}}\le\left(\frac{2X}{D}\right)^{2^{s+1}-2s-2}\left(\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_s\\ (h_1,\dots,h_s)\in J_s}}\left|\sum_{n\in I_s} e(\Delta_s(n))\right|\right)^2. \qquad (1.37)$$

Бунга Коши тенгсизлигини қўллаб ва

$$\left|\sum_{n\in I_s} e(\Delta_s(n))\right|^2\le\sum_{\substack{|h_{s+1}|<X\\ h_{s+1}\equiv 0}}\left|\sum_{n\in I_{s+1}} e(\Delta_{s+1}(n))\right|$$

эканлигини эътиборга олиб, (1.37) дан

$$F^{2^{s+1}} \le \left(\frac{2X}{D}\right)^{2^{s+1}-s-2} \sum_{\substack{h_1 \\ (h_1,\dots,h_{s+1})\in J_{s+1}}} \cdots \sum_{h_{s+1}} \sum_{n\in I_{s+1}} e(\Delta_{s+1}(n))$$

га эга бўламиз. Бундан эса лемманинг r нинг ихтиёрий натурал қиймати учун ўринли эканлиги келиб чиқади.

1.3.2-лемма. Агар $R=2^{k-1}$ ва $\varepsilon>0$ ихтиёрий мусбат сон бўлса,

$$F^R \ll \left(\frac{X}{D}\right)^{R-k+2} \left(\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1} + \sum_{y\le W} \min\left(\frac{X}{D}; \frac{1}{\|yD^k\alpha\|}\right)\right)$$

баҳо ўринли. Бу ерда $W=k!(XD^{-1})^{k-1}$ ва $\ll$ символдаги ўзгар-ì àñí èí ã³ ëëì àòè k ва ε га боғлиқ.

Исботи. $f(x)=\alpha x^k+\alpha_1 x^{k-1}+\dots+\alpha_{k-1}x+\alpha_k$ бўлсин, у ҳолда

$$\Delta_{k-1}(n)=h_1\dots h_{k-1}(k!\alpha(n+\frac{1}{2}h_1+\dots+\frac{1}{2}h_{k-1})+(k-1)!\alpha_1).$$

1.3.1- леммада $r=k-1$ деб олсак,

$$F^R \ll \left(\frac{X}{D}\right)^{R-k} \left(\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1} + \sum_{\substack{h_1 \\ (h_1,\dots,h_{k-1})\in J'_{k-1}}} \cdots \sum_{h_{k-1}} \left| \sum_{n\in I_{k-1}} e(\alpha k! n h_1\dots h_{k-1}) \right| \right)$$

га эга бўламиз. Бу ерда

$$J'_{k-1}=J_{k-1}\setminus\{(0,\dots,0)\}\cup\{(h_1,\dots,h_{i-1},0,h_{i+1},\dots,h_{k-1})\}.$$

$k!h_1...h_{k-1}=t$ деб белгилаб олсак, $t=D^{k-1}k!h_1...h_{k-1}=D^{k-1}y$ бўлади, бунда $y=k!h'_1...h'_{k-1}$. Бу ердан $y\le k!(XD^{-1})^{k-1}$ келиб чиқади ва γ ни бундан кўпайтма кўринишида ифодалашлар сони учун $\ll\tau_{k-1}(y)\ll y^{\varepsilon}$ бажарилади (И. Аллаков [1,8] ва В. А. Холмский [75]). Шунинг учун ҳам

$$F^R\ll\left(\frac{X}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}+\sum_{y\le W}\left|\sum_{n\in I_{k-1}}e(\alpha D^{k-1}yn)\right|\right).$$

Энди бу охирги баҳонинг ўнг томонига 1.2.1-леммани қўлласак, исботланиши талаб этилган лемма келиб чиқади.

M,X,Y мусбат сонлари учун G ва S тўпламларни мос равишда қуйидагича аниқлаймиз:

$$G=\{(m,n)\,|\,1\le m\le Y,1\le n\le X,m\equiv f,n\equiv f_1 \text{ ѐ } mn\le M\}$$

$$S=\sum_{h\le H}\sum_{m}\sum_{\substack{n\\(m,n)\in G}}\omega(m)\psi(n)e(hf(mn)). \qquad (1.38)$$

Шунингдек

$$A=\max_n|\psi(n)|,\ \ B=\left(\frac{D}{Y}\left(\sum_{\substack{m\le Y\\m\equiv f}}\omega^2(m)\right)\right)^{1/2},$$

$$E_s=(HY)^{2^s}X^{2^s-1}D^{1-2^{s+1}}, \qquad (1.39)$$

$$\Psi(n;h_1,...,h_s)=\psi(n)\cdot\prod_{i=1}^{s}\psi(n+h_i)\prod_{1\le i<j\le s}\psi(n+h_i+h_j)...$$

$$...\prod_{i=1}^{s}\psi(n+\sum_{i\ne j}h_j)\psi(n+\sum_{i=1}^{s}h_i),$$

$$S_s=\sum_{h\le H}\sum_{\substack{h_1\\(h_1,\dots,h_s)\in J_s^+}}\cdots\sum_{h_s}\sum_{n\in I_s}\Psi(n;h_1,\dots,h_s)\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}e(h\Delta_s(mn)) \qquad (1.40)$$

деб оламиз. Бунда $J_s^+=\{(h_1,\dots,h_s)\,|\,h_i\le X-1, h_i\equiv 0(\mathrm{mod}D),$ $i=1,2,\dots,s\}$.

1.3.3-лемма. (1.38) тенглик билан аниқланувчи S йиғинди учун

$$\left(\frac{S}{AB}\right)^{R^2}\ll\left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R^2+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-kR}H^{-k+1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\frac{1}{\|\alpha D^{2k-1}y\|}\right)\right]$$

баҳо ўринли. Бунда $Z\le(k!)^2Y^{k-1}X^kD^{2-2k}H, R=2^{k-1}$.

Исботи. Умумийликни бузмаган ҳолда барча n лар учун $\psi(n)\ge 0$ деб ҳисоблай оламиз ва ҳозирча $mn\le N$ шартни эътиборга олмаймиз. Бу леммани ҳам 1.3.1- лемманинг исботида фойдаланилган схемадан фойдаланиб исботлаймиз.

Аввало, математик индукция методидан фойдаланиб,

$$S^{2^s}\ll(AB)^{2^s}E_s+B^{2^s}\left(\frac{YH}{D}\right)^{2^s-1}\left(\frac{X}{D}\right)^{2^s-s-1}|S_s| \qquad (1.41)$$

эканлигини кўрсатамиз.

$s=1$ да (1.38) га Коши тенгсизлигини қўллаб

$$S^2\le\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}|\omega(m)|^2\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\\(m,n)\in G}}|\sum_n\psi(n)e(hf(mn))|^2\le$$

$$\le \frac{HYB^2}{D}\sum_{h\le H}\sum_{m}\sum_{n_1}\sum_{\substack{n_2\\(m,n_i)\in G,i=1,2}} \psi(n_1)\psi(n_2)e(h(f(mn_2)-f(mn_1)))\le$$

$$\le \frac{B^2YH}{D}\left(A^2\frac{HYX}{D^2}+\sum_{h\le H}\sum_{1-X\le h_1\le X-1}\sum_{n\in I_1}\Psi(n;h_1)\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}} e(h(f(m(n+h_1))-\right.$$

$$\left. -f(mn))\right)\ll (AB)^2E_1+B^2HYD^{-1}|S_1| \qquad (1.42)$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди, фараз қилайлик, (1.41) баҳо $s>1$ учун ўринли бўлсин ва унинг $s+1$ учун ўринли эканлигини кўрсатамиз. Индуктивлик фаразимизга кўра (1.41) дан

$$S^{2^{s+1}} \ll (AB)^{2^{s+1}}E_s^2+B^{2^{s+1}}\left(\frac{HY}{D}\right)^{2^{s+1}-2}\left(\frac{X}{D}\right)^{2^{s+1}-2s-2}|S_s|^2$$

келиб чиқади. Энди $|S_s|^2$ ни қараймиз. (1.40) да Коши тенгсизлигидан фойдалансак,

$$|S_s|^2\le \frac{HX^sY}{D^{s+1}}\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_s\\(h_1,\dots,h_s)\in J_s^+}}\left(\sum_{n\in I_s}\Psi(n;h_1,\dots,h_s)e(h\Delta_s(mn))\right)^2$$

$$\le \frac{HX^sY}{D^{s+1}}\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_{s+1}\\(h_1,\dots,h_{s+1})\in J_{s+1}^+}}\left|\sum_{n\in I_{s+1}}\Psi(n;h_1,\dots,h_{s+1})e(h\Delta_{s+1}(mn))\right|\le$$

$$\le \frac{HX^sY}{D^{s+1}}\left(A^{2^{s+1}}\frac{HY}{D}\left(\frac{X}{D}\right)^{s+1}+|S_{s+1}|\right)=$$

$$= A^{2^{s+1}} \left(\frac{HY}{D}\right)^2 \left(\frac{X}{D}\right)^{2s+1} + \frac{HYX^s}{D^{s+1}} | S_{s+1} |$$

нинг бажарилиши келиб чиқади. Демак,

$$S^{2^{s+1}} \ll (AB)^{2^{s+1}} (E_s^2 + E_{s+1}) + B^{2^{s+1}} \left(\frac{HY}{D}\right)^{2^{s+1}-1} \left(\frac{X}{D}\right)^{2^{s+1}-s-2} | S_{s+1} | \ll$$

$$\ll (AB)^{2^{s+1}} E_{s+1} + B^{2^{s+1}} \left(\frac{HY}{D}\right)^{2^{s+1}-1} \left(\frac{X}{D}\right)^{2^{s+1}-s-2} | S_{s+1} |. \qquad (1.43)$$

(1.42) ва (1.43) лардан (1.41) баҳо s нинг ихтиёрий натурал қиймати учун ўринли деган хулосага келамиз.

(1.41) да $s = k-1$ деб олсак,

$$S^{R^2} \ll (AB)^{R^2} E_{k-1}^R + B^{R^2} \left(\frac{HY}{D}\right)^{R^2-R} \left(\frac{X}{D}\right)^{R^2-kR-2R} | S_{k-1} |^R \qquad (1.44)$$

ҳосил бўлади.

Энди S_{k-1} йиғиндини баҳолаймиз. Δ_{k-1} нинг аниқланишига кўра

$$h\Delta_{k-1}(mn) = hh_1 ... h_{k-1}(\frac{1}{2} k! \alpha m^k (2n + h_1 + ... + h_{k-1}) +$$

$$+ (k-1)! \alpha_1 m^{k-1}) = g(n; h, h_1, ..., h_{k-1}) m^k + \alpha_1 (k-1)! hh_1 ... h_{k-1} m^{k-1} = p(m).$$

Шунинг учун ҳам 1.3.2-леммадан

$$| S_{k-1} |^R \le A^{R^2} \left(\frac{X}{D}\right)^k H \sum_{h \le H} \sum_{h_1} \cdots \sum_{\substack{h_{k-1} \\ (h_1, ..., h_{k-1}) \in J_{k-1}^+}} \sum_{n \in I_{k-1}} \left| \sum_{\substack{m < Y \\ m \equiv f}} e(p(m)) \right|^2 \ll$$

$$\ll A^{R^2}\left(\frac{X}{D}\right)^k H\sum_{h\le H}\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_{k-1}\\(h_1,\dots,h_{k-1})\in J_{k-1}^{\tau}}}\sum_{n\in I_{k-1}}\left(\frac{Y}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{y\le k!(YD^{-1})^{k-1}}\min\left(\frac{Y}{D}+1;\|yD^k g(n;h,h_1,\dots,h_{k-1})\|^{-1}\right)\right). \qquad (1.45)$$

келиб чиқади. $\frac{1}{2}k!yhh_1\dots h_{k-1}(2n+h_1+\dots+h_{k-1})=t_1$ деб олсак $t_1=D^{k-1}t$ бўлади. Бунда $t=\frac{1}{2}k!hh'_1\dots h'_{k-1}(2n+h_1+\dots h_{k-1})y$ ва $t=t_1D^{1-k}\le Z$. t ни шу кўринишда ифодалашлар сони $\ll\tau_{k+2}(t)\ll(HXYD^{-1})^{\varepsilon}$ бўлгани учун (1.45) дан

$$|S_{k-1}|^R\ll A^{R^2}H\left(\frac{X}{D}\right)^k\left(\frac{Y}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}H\left(\frac{X}{D}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{NXY}{D}\right)^{\varepsilon}\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\|\alpha D^{2k-1}t\|^{-1}\right)\right] \qquad (1.46)$$

га эга бўламиз.

Шундан қилиб, $R=2^{k-1}$ деб олсак (1.44) ва (1.46) лардан

$$\left(\frac{S}{AB}\right)^{R^2}\ll\left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R^2+\varepsilon}\left[\frac{X^{-R}}{D^{-R}}+H\left(\frac{HY}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-k(R-1)-2R}\times\right.$$

$$\left.\times\left[H\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}\left(\frac{X}{D}\right)^k+\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\|\alpha D^{2k-1}t\|^{-1}\right)\right]\right]\ll$$

$$\ll \left(\frac{HYX}{D^2}\right)^{R^2+\varepsilon} \left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-kR} H^{-k+1} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{t\le Z} \min\left(\frac{Y}{D}; \|\alpha D^{2k-1} t\|^{-1}\right)\right]$$

баҳонинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу эса исботланиши талаб этилган баҳодир.

Агар S йиғиндининг аниқланишига $mn \le M$ шартни қўшсак ҳам бу охирги баҳо ўринли бўлиб қолади.

1.3.4-лемма. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун $A \ll X^{\varepsilon}$ ва $B \ll X^{\varepsilon}$ бажарилса, у ҳолда

$$S \ll \left(\frac{HYX}{D}\right)^{1+\varepsilon} \left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R} + \frac{d^{2k-1}}{q} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-1} + \left(\frac{XY}{D}\right)^{-k} \frac{q}{Hd^{2k-1}}\right]^{\nu}$$

бўлади. Бу ерда $d = (q, D)$ ва $\nu = 4^{k-1}$.

Исботи. 1.2.2-леммага кўра

$$\sum_{t\le Z} \min\left(\frac{Y}{D}; \|\alpha D^{2k-1} t\|^{-1}\right) \ll \left(\frac{YZd^{2k-1}}{qD} + Z + \frac{q}{d^{2k-1}}\right) \ln q$$

бажарилади. Бунда $d = (q, D) \le (D^{2k-1}, q) \le d^{2k-1}$.

Биз $q \le H(XYD^{-1})^k d^{2k-1}$ деб ҳисоблашимиз мумкин (акс ҳолда лемма тривиалдир), у ҳолда 1.3.3- леммадан

$$S \ll \left(\frac{HYX}{D^2}\right)^{1+\varepsilon} \left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-kR} H^{-k+1}\left(\left(\frac{XY}{D^2}\right)^{k} \frac{HDd^{2k-1}}{q} + \right.\right.$$

$$+D\left(\frac{X}{D}\right)^k\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}H+\frac{q}{d^{2k-1}}\Bigg)\Bigg]^\nu \ll \left(\frac{HYX}{D}\right)^{1+\varepsilon}\Bigg[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+$$

$$+\frac{d^{2k}}{qH^{k-2}}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}\frac{1}{H^{k-2}}+\left(\frac{XY}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^{2k-1}H^{k-1}}\Bigg]^\nu$$

га эга бўламиз. $k \geq 2$ бўлгани учун бу ердан 1.3.4-лемма келиб чиқади.

1.3.5-лемма. Агар барча x лар учун $\omega(x)=1$ ёки $\omega(x)=\ln x$ бўлиб 1.3.3 ва 1.3.4- леммаларнинг шартлари бажарилса

$$S \ll \left(\frac{HYX}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{k-1}{R}}\left[\frac{d^k}{q}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+\frac{q}{d^kH}\left(\frac{XY}{D}\right)^{-k}\right]^{1/R}$$

баҳо ўринли.

Исботи. (1.38) га Коши тенгсизлиги ва 1.2.2-леммани қўлласак,

$$|S|^R \leq (A\ln Y)^R\left(\frac{HX}{D}\right)^{R-1}\sum_{h\leq H}\sum_{\substack{n\leq X\\ n\equiv f_1}}\left|\sum_{\substack{m\leq Y\\ m\equiv f}} e(hf(mn))\right|^2 \ll$$

$$\ll (A\ln Y)^R\left(\frac{HX}{D}\right)^{R-1}\sum_{h\leq H}\sum_{\substack{n\leq X\\ n\equiv f}}\left(\frac{Y}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\Bigg[\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}+$$

$$+\sum_{y\leq W}\min\left(\frac{Y}{D};\ \| yh(nD)^k\alpha\|^{-1}\right)\Bigg]$$

ҳосил бўлади. $t=yn^kh$ деб белгилаб олсак, у ҳолда $t \leq k!x^kH(YD^{-1})^{k-1}=$ $=T$ бўлади ва t ни бундай кўринишда ифодалашлар сони $\ll (HXYD^{-1})^\varepsilon$ учун баҳо ўринли.

Шунинг учун ҳам

$$|S|^k \ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon}\left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{HX}{D}\right)^{-1}\sum_{t\le T}\min\left(\frac{Y}{D};\ \|tD^k\alpha\|^{-1}\right)\right] \ll$$

$$\ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon}\left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{HX}{D}\right)^{-1}\left(\frac{TYd^k}{Dq}+T+\frac{q}{d^k}\right)\right] \ll$$

$$\ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon}\left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+D^k\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}\frac{d^k}{q}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}D^k+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{X}{D}\right)^{-1}\left(\frac{Y}{D}\right)^{k}\frac{q}{d^kH}\right] \ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon}\left[\frac{d^k}{q}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+\left(\frac{XY}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^kH}\right]\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}$$

баҳо бажарилади. Бу ердан эса исботланиши талаб этилган баҳо келиб чиқади.

1.3.1-теореманинг исботи.

$$S(h) = \sum_{p\le N,\, p\equiv f} \ln p \cdot e(hf(p))$$

деб белгилаб оламиз ва аввало, $S(h)$ ни

$$S(h) = S_1(h) - S_2(h) - S_3(h) + O((ND^{-1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad (1.47)$$

кўринишида ифодалаш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Бу ерда

$$S_1(h) = \sum_{\substack{v\le N^{1/3}\\ v\equiv f_1r}} \mu(v) \sum_{\substack{l\le Nv^{-1}\\ l\equiv f_1r}} (\ln l)e(hf(lv)),$$

$$(\overline{r}r \equiv 1, \quad l = n \cdot r, \quad vl \equiv f \cdot f_1),$$

$$S_2(h) = \sum_{s \le N^{2/3}} C_s \sum_{\substack{r \le Ns^{-1} \\ rs \equiv ff_1}} e(hf(rs)),$$

$$S_3(h) = \sum_{\substack{N^{1/3} < m \le N^{2/3} \\ m \equiv f}} t_m \sum_{\substack{N^{1/3} < n \le Nm^{-1} \\ n \equiv f_1}} \Lambda(n) e(hf(mn)).$$

Шунингдек,

$$|C_s| = \left| \sum_{\substack{v \cdot n = s \\ v \le N^{1/3}}} \mu(v)\Lambda(n) \right| \le \tau(s) \ln s \ll N^{\varepsilon}$$

ва

$$|t_m| = \left| \sum_{\substack{v \setminus m \\ v \le N^{1/3}}} \mu(v) \right| \le \tau(m) \ll N^{\varepsilon}.$$

$S(h)$ ни $u < N^{1/3}$ бўлганда

$$S(h) = \sum_{\substack{u < n \le N \\ n \equiv f_1 (\mathrm{mod} D)}} \Lambda(n) e(hf(n)) + O\left(\left(\frac{N}{D} \right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right) \qquad (1.48)$$

кўринишида ёзиш мумкин бўлгани учун $D = 1$ да (1.47) тенглик А. Карацуба [52] монографиясидаги III бобдаги 9-масаладан бевосита келиб чиқади.

$D>1$ бўлганда натурал аргументли ихтиёрий $F(m,n)$ функция учун

$$\sum_{n\le N, n\equiv f_1} F(1,n) = \sum_{m\le u, m\equiv f} \sum_{\substack{n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_1}} F(m,n) \sum_{v\setminus m} \mu(v) =$$

$$= \sum_{v\le u} \sum_{\substack{r\le uv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v)F(vr,n) = \sum_{v\le u} \sum_{\substack{r\le uv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v)F(vr,n) -$$

$$-\sum_{v\le u} \sum_{\substack{uv^{-1}<r\le Nv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v)F(vr,n) =$$

$$= \sum_{v\le u} \sum_{\substack{r\le Nv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v)F(vr,n) - \sum_{\substack{u<m\le N\\ m\equiv f}} \sum_{\substack{v\setminus m\\ v\le u}} \mu(v) \sum_{\substack{n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_1}} F(m,n)$$

тенглик ўринли. $F(m,n)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$F(m,n) = \begin{cases} \Lambda(n)e(hf(mn)), & \text{агар } u<n \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } u\ge n \text{ бўлса.} \end{cases}$$

У ҳолда

$$\sum_{\substack{u<n\le N\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n)e(hf(mn)) =$$

$$= \sum_{v\le u} \mu(v) \sum_{\substack{r\le Nv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{u<n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n)e(hf(vrn)) - S_3(h) =$$

$$= \sum_{v\le u} \sum_{vr\le N} \sum_{\substack{nvr\le N\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n)e(hf(vrn)) - \sum_{v\le u} \mu(v) \sum_{\substack{vr\le N\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le u, nrv\le N\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n)e(hf(vrn)) -$$

$$-S_3(h)=\sum_{v\le u}\mu(v)\sum_{\substack{l\le Nv^{-2}\\ vl\equiv ff_1}}(\ln l)e(hf(lv))-$$

$$-\sum_{\substack{s\le u^2\\ s\equiv \bar{v}f_1}}C_s\sum_{\substack{r\le Ns^{-1}\\ r\equiv \bar{v}f}}e(hf(sr))-S_3(h),\ (v\bar{v}\equiv 1) \qquad (1.49)$$

бажарилади. (1.48) ва(1.49) да $u=N^{1/3}$ деб олсак, (1.47) келиб чиқалди. Шундай қилиб,

$$S=\sum_{h\le H}S(h)=S_1-S_2-S_3-O(H(ND^{-1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad (1.50)$$

Бу ерда

$$S_i=\sum_{h\le H}S_i(h),\ \ i=1,2,3.$$

1.2.4-лемманинг исботидаги сингари ҳар бир S_1 йиғиндини $\ll \ln N$ та

$$S_i^{(j)}=\sum_{h\le H}\sum_{\substack{u\le NX^{-1}\\ u\equiv f}}\omega(u)\sum_{\substack{X<v\le 2X\\ v\equiv f_1, uv\le N}}\psi(v)e(hf(uv)), \qquad (1.51)$$

кўринишдаги қисм йиғиндиларга бўламиз. (1.51) да агар $X<N^{1/2}$ бўлса, $\omega(u)=1$; агарда $X\le N^{1/3}$ бўлса, $\omega(u)=\ln u$.

(1.51) дан S йиғинди учун

$$S\ll \max_{i,j}S_i^{(j)}\ln N+O\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \qquad (1.52)$$

баҳо ўринли эканлиги келиб чиқади.

Агар $XY \le N$ ва

$$(XD^{-1})^R \ge \min\left(N^{1/2}D; qd^{-2k+1}, (ND^{-1})^k Hq^{-1}d^{2k-1}\right) \qquad (1.53)$$

шартлар бажарилса, $S_i^{(j)}$ йиғиндини 1.3.4-леммадан фойдаланиб баҳолаш мумкин. Бу ҳолда

$$S_i^{(j)} \ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R} + \frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^{2k-1}H}\right]^{\nu} \ll$$

$$\ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{D}{N}\right)^{k}\frac{q}{d^{2k-1}H}\right)^{\nu}. \qquad (1.54)$$

га эга бўламиз.

Агар (1.53) шарт бажарилмаса, $S_i^{(j)}$ йиғиндини 1.3.5-лемма ёрдамида баҳолаймиз. Шунинг учун ҳам бу ҳолда

$$S_i^{(j)} \ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{k-1}{R}}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^k H}\right)^{1/k}$$

ва

$$\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{k-1}{R}} < \min\left(\left(\frac{N^{1/2}}{D}\right)^{\nu(k-1)}; \left(\frac{q}{d^{2k-1}}\right)^{\nu(k-1)}; \left(\left(\frac{N}{D}\right)^{k}\frac{Hd^{2k-1}}{q}\right)^{\nu(k-1)}\right)$$

бўлади. Бу ердан

$$S_i^{(j)} \ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^k H}\right)^{\frac{1}{k}+\nu(k-1)} \ll$$

$$\ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{d^{2k-1}}{q}+\frac{D}{N^{1/2}}+\left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^k H}\right)^{\nu} \qquad (1.55)$$

ҳосил бўлади.

(1.52), (1.54) ва (1.55) 1.3.1-теорема келиб чиқади.

1.4. Аргументи арифметик прогрессиядаги туб сонлар бўлган $\{f(p)\}$ кетма-кетликнинг каср қисмларининг тақсимоти тўғрисида

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — ҳақиқий сонлар, $\{\theta\}$ эса θ нинг каср қисми, $\|x\|$ билан x дан унга энг яқин турган бутун сонгача бўлган масофани, $\pi_D(N)$ билан эса $p\le N$ ва $p\equiv f(\mathrm{mod}D)$ шартларни қаноатлантирувчи туб сонларнинг сонини белгилаймиз.

Ушбу параграфда 1.3.1-теореманинг тадбиқи сифатида қуйидаги теоремаларни (И. Аллаков [13,16,29,33]) исботлаймиз.

1.4.1-теорема. Агар $0\le\gamma<\gamma+\delta\le 1$ ва $\pi^*_D(\gamma,\delta,N)$ эса $p\le N$, $p\equiv f(\mathrm{mod}D)$, $\gamma\le\{\alpha p^k\}<\gamma+\delta$ шартларни қаноатлантирувчи туб сонларнинг сонини бўлса, у ҳолда

$$\pi^*_D(\gamma,\delta,N)-\delta\pi_D(N)\ll\frac{N}{D}\left(\Delta(\delta^{-1})\ln q+\left(\frac{qN}{\delta}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}\right)$$

бўлади. Бу баҳонинг ўнг томонидаги параметрлар 1.3.1-теоремадаги сингари аниқланади.

1.4.2-теорема. Агар $k\ge 2$ натурал сон, α — иррационал сон ва β эса ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ сони учун фақат k ва ε ларга боғлиқ бўлган мусбат $C(\varepsilon,k)$ мавжудки, $\nu=4^{1-k}$, $D\ll N^{\varepsilon}$ бўлганда

$$\| \alpha p^k - \beta \| \le C(\varepsilon, k) p^{-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}$$

тенгсизлик $p \equiv f(\mathrm{mod} D)$ туб сонларда чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Бу теоремалар A. Chosh [91] натижларининг k ва D бўйича умумлаштирилгани, И. М. Виноградов [42,44] натижаларининг $2 \le k \le 11$ бўлгандаги кучайтирилганидир. Хусусий ҳолда $k = 2$ ва $D = 1$ бўлганда 1.4.1 ва 1.4.2- теоремалардан мос равишда A. Chosh [91] даги 3 ва 4-теоремалар келиб чиқади.я

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, ушбу параграфда фойдаланилган метод, нафақат αp^k га нисбатан 1.4.1 ва 1.4.2- теоремаларни исботлаш имконини берибгина қолмай, балки $f(p) = \alpha p^k + \alpha_1 p^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} p + \alpha_k$ кўпҳад учун ҳам шундай теоремаларни исботлаш имконини беради.

$k = 2$ ва $D \ll \ln^A X$ бўлганда 1.4.1 ва 1.4.2-теоремаларнинг исботида 1.3.1-теореманинг ўрнига 1.2.1-теоремадан фойдаланиб бу натижаларни бироз яхшилаш мумкин.

η, $0 \le \eta \le \frac{1}{2}$ шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий сон ва

$$g_\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } -\eta \le x < \eta \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } -\dfrac{1}{2} \le x < -\eta \text{ ёки } \eta \le x < \dfrac{1}{2} \text{ бўлса} \end{cases} \qquad (1.56)$$

бўлсин. 1.4.1-теоремани исботлашда қуйидаги леммадан фойдаланамиз.

1.4.1-лемма. Агар α сони $|\alpha q - a| < q^{-1}$, $(a, q) = 1$ шартни қаноатлантирувчи иррационал сон, β эса ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда ихтиёрий фиксирланган $\varepsilon_0 > 0$ сони учун

$$\sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n)\{g_\eta(\alpha n^k-\beta)-2\eta\} \ll \frac{N}{D}\Big[\Delta(\eta^{-1})\ln(2Nq)+$$

$$+(Nq\eta^{-1})^{\varepsilon_0}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}\Big]$$

баҳо ўринли. Бу ерда $\Delta(\eta^{-1})$ (1.34) тенглик ёрдамида аниқланади ва $R=2^{k-1}$.

Исботи. $g_\eta(x)$ функцияни x бўйича даврий (даври 1 га тенг) давом эттириб аниқланиш соҳасини кенгайтирамиз. $g_\eta(x)$ ни Фурье қаторига ёйиб

$$g_\eta(x)-2\eta=\sum_{\substack{-\infty\\ m\ne0}}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi m\eta}{\pi m}e(mx) \tag{1.57}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\sum'$ символ m бўйича йиғиндида $\pm m$ га мос ҳадларнинг бирлаштирилишини билдиради.

Энди α — иррационал сон, β эса ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин. $x=\alpha n^k-\beta$ деб олиб, (1.57) дан

$$g_\eta(n^k\alpha-\beta)-2\eta=\sum_{\substack{-\infty\\ m\ne0}}^{\infty}\frac{\sin 2\pi m\eta}{\pi m}e(m(\alpha n^k-\beta)) \tag{1.58}$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар $\frac{a}{q}$ каср $|\alpha q-a|<q^{-1}$, $(a,q)=1$ шартларни қаноатлантирувчи α сонининг узлуксиз касрга ёйилмаси ва $H=$ $=[Nq\eta^{-1}]+1$ бўлсин, у ҳолда (1.58) дан

$$\sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n)(g_\eta(\alpha n^k-\beta)-2\eta)=A_1+A_2 \qquad (1.59)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$A_1=\sum_{|m|\le H}\frac{\sin 2\pi m\eta}{m\pi}e(-\beta m)\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv f}}\Lambda(n)e(mn^k\alpha),$$

$$A_2=\sum_{n\le N, n\equiv f}\Lambda(n)\sum_{|m|>H}\frac{\sin 2\pi m\eta}{m\pi}e(m(\alpha n^k-\beta)).$$

Аввало, A_2 йиғиндини қараймиз. Уни

$$A_2=\frac{1}{2i}\sum_{n\le N, n\equiv f}\Lambda(n)\sum_{|m|>H}{}'\frac{1}{m\pi}\Big(e(m(\alpha n^k-\beta+\eta))-$$

$$-e(m(\alpha n^k-\beta-\eta))\Big) \qquad (1.60)$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Кулайлик учун $\theta_n^{\pm}=\alpha n^k-\beta\pm\eta$ ва

$$T_n^{\pm}(u)=\sum_{m<u}e(m\theta_n^{\pm})$$

деб белгилаб оламиз.

Фараз этайлик, $\theta_n^{\pm}$ бутун сон бўлмасин (акс ҳолда унинг (1.60) даги ҳиссаси нолга тенг бўлади). $D=1$ да 1.2.1-леммадан

$$T_n^{\pm}(u)\le\frac{1}{2}\|\theta_n^{\pm}\|^{-1}$$

ҳосил бўлади. Шунинг учун ҳам Абелнинг йиғиш формуласидан фойдалансак, бу ердан

$$\left|\sum_{|m|>H}{}' \frac{1}{m\pi} e(m\theta_n^{\pm})\right| \ll H^{-1} \| \theta_n^{\pm} \|^{-1}$$

га эга бўламиз.

Иккинчи томондан эса бу йиғинди учун

$$\left|\sum_{|m|>H}{}' \frac{1}{m\pi} e(m\theta_n^{\pm})\right| \ll 1$$

баҳо ўринли. Шунинг учун ҳам (1.60) дан

$$A_2 \ll (\ln N) \sum_{n\le N, n\equiv f} \min\left(1; H^{-1} \| \alpha n^k - \beta \pm \eta \|^{-1}\right) \qquad (1.61)$$

келиб чиқади. (1.61) баҳонинг ўнг томонидаги йиғиндини баҳолаш учун $\Phi(H,\omega) = \min(1; H^{-1} \| \omega \|^{-1})$ функцияни қараймиз. Тушунарлики, $\Phi(H,\omega)$ функция ω бўйича даврий функция бўлиб даври 1га тенг. Бу функцияни Фурье қаторига ёйсак,

$$\Phi(H,\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_h e(h\omega) \qquad (1.62)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $a_h \ll \min((1+\ln H)H^{-1}; |h|^{-1}; Hh^{-2})$.

(1.62) тенгликни

$$\Phi(H,\omega) = \sum_{|h|\le H^2} a_h e(h\omega) + \sum_{|h|>H^2}{}' a_h e(h\omega) + O\left(\frac{\ln H}{H}\right)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (1.61) га асосан бу ердан

$$A_2 = B_1 + B_2 + O(N(DH)^{-1}\ln^2 HN) \tag{1.63}$$

ни ҳосил қиламиз. Бунда

$$B_1 \ll (\ln NH)^2 \sum_{h\le H^2} \min(H^{-1};|h|^{-1}) \left| \sum_{n\le N, n\equiv f} e(hn^k\alpha) \right|,$$

$$B_2 \ll (\ln N) \sum_{n\le N, n\equiv f} \left| \sum_{|h|>H^2}{}' \; a_h e(h(\alpha n^k - \beta \pm \eta)) \right|.$$

B_2 даги йиғиндиларни баҳолашда давом этиб

$$B_2 \ll (\ln N)\cdot H \sum_{n\le N, n\equiv f} \sum_{|h|>H^2} h^{-2} \ll \frac{HN}{D}(\ln N)\int_{H^2}^{\infty} \xi^{-2} d\xi \ll \frac{N}{DH}\ln N$$

га эга бўламиз.

Энди B_1 ни қараймиз. B_1 учун юқорида олинган баҳони

$$B_1 \ll \left(\frac{V(H^2)}{H^2} - \frac{V(1)}{H} + \int_H^{H^2} z^{-2} V(z) dz \right) \ln^2 NH \tag{1.64}$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бу ерда

$$V(X) = \sum_{h\le X} \left| \sum_{n\le N, n\equiv f} e(hn^k\alpha) \right|. \tag{1.65}$$

(1.65) га Коши тенгсизлиги ва 1.3.2-леммани қўллаб ва $R = 2^{k-1}$, $W = k!(ND^{-1})^{k-1}$ деб олиб

$$|V(X)|^R \le X^{R-1}\sum_{h\le X}\left|\sum_{n\le N, n\equiv f} e(hn^k\alpha)\right|^R \ll X^{R-1}\times$$

$$\times\sum_{h\le X}\left(\frac{X}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{k-1}+\sum_{y\le W}\min\left(\frac{N}{D};\frac{1}{\|\alpha D^k yh\|}\right)\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

$t = yh$ деб белгилаш киритамиз, у ҳолда $t \le k!(ND^{-1})^{k-1}X = Y$ ва t ни $t = yh$ кўринишда ифодалашлар сони $\ll t^{\varepsilon}$ бўлгани учун

$$|V(X)|^R \ll X^{R-1+\varepsilon}\left(\frac{N}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{k-1}X+\sum_{t\le Y}\min\left(\frac{N}{D};\|\alpha D^k t\|^{-1}\right)\right)$$

деб ёза оламиз.

Бу ифоданинг ўнг томонига 1.2.1-леммани қўлласак,

$$V(X) \ll (NXq)^{\varepsilon}\left(\frac{N}{D}\right)X\left(\frac{d^k}{q}+\left(\frac{N}{D}\right)^{-1}+\left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^k X}\right)^{1/R} \qquad (1.66)$$

баҳо келиб чиқади.

(1.66) ва $H > Nq\eta^{-1}$ эканлигидан

$$\frac{V(H^2)}{H^2} \ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon}\frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{N}{D}+\left(\frac{D}{N}\right)^k\frac{q}{H^2 d^k}\right)^{1/R} \ll$$

$$\ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon}\frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}$$

ва

$$\frac{V(1)}{H} \ll \frac{N}{DH} \ll \frac{N\eta}{DNq} \ll \eta(Dq)^{-1}$$

ларга эга бўламиз. Шунинг учун ҳам (1.64) дан

$$B_1 \ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon} \frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R} \qquad (1.67)$$

баҳонинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, (1.62), (1.63) ва (1.67) лардан

$$A_2 \ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon} \frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{N}{D}\right)^{1/R} \qquad (1.68)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Энди A_1 ни баҳолаймиз. (1.58) дан

$$A_1 \ll \sum_{m\le H} \min\left(m^{-1},\eta\right)\left|\sum_{n\le N,\ n\equiv f} \Lambda(n)e(mn^k\alpha)\right|$$

деб ёзиш мумкин. Бу ердан эса Стилтьес интегралидан фойдаланиб

$$A_1 \ll \frac{G(H)}{H} - \eta G(1) - \int_{\eta^{-1}}^{H} u^{-2}G(u)du$$

га келамиз. Бунда

$$G(X) = \sum_{m\le X}\left|\sum_{n\le N,\ n\equiv f} \Lambda(n)e(mn^k\alpha)\right|.$$

Энди 1.3.1-теоремадан фиксирланган $\varepsilon_0 > 0$ учун

$$A_1 \ll ND^{-1}\left(\Delta\left(H\right) + \eta\Delta(1) + \Delta(\eta^{-1})\ln(H\eta)\right)$$

эканлиги келиб чиқади. $\Delta(H)$ камаювчи функция ва $\eta\Delta(1) \le \Delta(\eta^{-1})$ бўлгани учун

$$A_1 \ll ND^{-1}\Delta(\eta^{-1})\ln(2Nq) \tag{1.69}$$

деб ёза оламиз.

(1.62), (1.68) ва (1.69) лардан 1.4.1-лемма келиб чиқади.

1.4.1-теореманинг исботи. $\delta = 1$ бўлганда теорема тривиал бўлгани учун $\delta < 1$ деб фараз этамиз. Ҳозирча β ва η ($0 \le \eta < \frac{1}{2}$) лар ихтиёрий ҳақиқий сонлар эди. Энди $\beta = \gamma + \dfrac{\delta}{2}$ ва $\eta = \dfrac{\delta}{2}$ деб оламиз. У ҳолда 1.4.1-леммадан

$$\sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n) g_{\delta 2}(\alpha n^k - \gamma - \frac{\delta}{2}) = \delta \sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n) +$$

$$+O\left(\frac{N}{D}\left(\Delta(\frac{2}{\delta})\ln(2Nq) + (Nq\delta^{-1})^{\varepsilon_0}\left(\frac{d^k}{q} + \frac{D}{N}\right)^{1/R}\right)\right). \tag{1.70}$$

га эга бўламиз. $g_\eta(x)$ функциянинг аниқланишига кўра ((1.56) га қаранг) агар $-\delta/2 \le \alpha n^k - \gamma - \delta/2 - h < \delta/2$, яъни $\gamma \le \alpha n^k - h <$ $< \delta + \gamma$ шартни қаноатлантирувчи h бутун сони мавжуд бўлса, у ҳолда

$$g_{\frac{\delta}{2}}\left(\alpha n^k-\gamma-\frac{\delta}{2}\right)=1.$$

Теореманинг шартига кўра $\delta+\gamma\le 1$, шунинг учун ҳам бу ердан $h=[\alpha n^k]$. Демак, фақат ва фақат $\gamma\le\{\alpha n^k\}<\delta+\gamma$ бажарилсагина

$$g_{\frac{\delta}{2}}\left(\alpha n^k-\gamma-\frac{\delta}{2}\right)=1$$

бўлади. Буни эътиборга олиб, (1.70) дан

$$\sum_{\substack{p\le N,p\equiv f\\ \gamma\le\{\alpha n^k\}<\gamma-\delta}}\ln p-\delta\sum_{p\le N,p\equiv f}\ln p\ll\frac{N}{D}\left(\Delta\left(\frac{2}{\delta}\right)\ln q+\right.$$

$$\left.+(Nq\delta^{-1})^{\varepsilon_0}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эса исботланиши талаб этилаётган 1.4.1-теорема келиб чиқади.

1.4.2-теореманинг исботи. 1.3.1-теореманинг 1.3.2-натижасига кўра агар $N^{1/2}\le q\le N^{3k/4}$, $D\ll N^{\varepsilon}$ ва $\varepsilon=\varepsilon_0$ — фиксирланган сон бўлса, у ҳолда барча $H\ge 1$ лар учун

$$\Delta(H)\ll N^{-\frac{\nu}{2}+\varepsilon_0}$$

бажарилади. Бу ерда $\nu=4^{1-k}$, $k\ge 2$.

Теореманинг шартига кўра α — иррационал сон бўлгани учун $|\alpha q - a| < q^{-1}$ шартни қаноатлантирувчи q нинг чексиз кўп қийматлари мавжуд.

Агар 1.4.1-леммада $N = q$ деб олсак, у ҳолда бу леммадан N нинг етарлича катта қийматлари учун

$$\sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n)\left\{g_\eta(\alpha n^k - \beta) - 2\eta\right\} \ll N^{1-\frac{\nu}{2}+2\varepsilon_0} \qquad (1.71)$$

баҳонинг ўринли эканлиги келиб чиқади. $\eta = C(\varepsilon_0,k)N^{-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}$ деб оламиз, бунда $C(\varepsilon_0,k)$ етарлича катта мусбат, фақат ε_0 ва k га боғлиқ бўлган ўзгармас сон. У ҳолда (1.71) дан

$$\eta_i = C(\varepsilon_0,k)N_i^{-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}, i = 1,2,....$$

бўлганда

$$\sum_{n\le N_i, n\equiv f} \Lambda(n) g_{\eta_i}(\alpha n^k - \beta) = 2\eta_i \sum_{n\le N_i, n\equiv f} \Lambda(n) + O\left(N_i^{1-\frac{\nu}{2}+2\varepsilon_0}\right), \quad i = 1,2,\cdots$$

шарт бажариладиган мусбат бутун сонларнинг ўсувчи кетма-кетлиги $\{N_1, N_2, ...\}$ мавжуд эканлиги келиб чиқади.

Арифметик прогрессиядаги туб сонлар сони чексиз кўп бўлгани сабабли бу ердан етарлича катта N_i лар учун

$$\sum_{p< N_i, p\equiv f} (\ln p) g_{\eta_i}(\alpha p^k - \beta) > C(\varepsilon_0,k)N_i^{1-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0} \qquad (1.72)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Энди агар

$$\sum_{p\le N, p=f} (\ln p) g_{\eta_i}(\alpha p^k - \beta) = \sum_{\substack{p\le N_i, p=f \\ \|\alpha p^k-\beta\|<C(\varepsilon_0,k)N_i^{-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}}} \ln p \qquad (1.73)$$

эканлигини эътиборга олсак (1.72) ва (1.73) дан исботланаёт-ган теорема келиб чиқади.

1.5. Тригонометрик йиғинди учун Вейл-Виноградов баҳоси ҳақида

$f(x)=\alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ — k, $(k\ge 2)$ даражали ҳақиқий $\alpha_k=\alpha,\ \alpha_{k-1},...,\alpha_1,\alpha_0$ коэффициентли кўпҳад ва

$$S(f)=\sum_{n\le P} e(f(n)) \qquad (1.74)$$

бўлсин. У ҳолда Вейл тенгсизлигига кўра $(a,q)=1$, $|\alpha-aq^{-1}|\le q^{-2}$ бўлганда

$$S(f)\ll P^{1+\varepsilon}(q^{-1}+P^{-1}+qP^{-k})^{2^{1-k}} \qquad (1.75)$$

бажарилади (Р. Вон [49] даги 2.4-лемма). Бунда ε ихтиёрий мусбат сон, Виноградов символи $\ll$ даги доимий k ва $\varepsilon>0$ га боғлиқ.

Ушбу параграфда қуйидаги теоремани исботлаймиз:

1.5.1-теорема. Агар $k\ge 6$, $\alpha=aq^{-1}+z$, $(a,q)=1$, $|z|<q^{-2}$ ва $\alpha_{k-1}=0$ бўлса, у ҳолда

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}(Pz_0^{-1}q^{-1} + P^{-2} + qz_0P^{1-k})^{\frac{4}{3}2^{-k}} \qquad (1.76)$$

бажарилади. Бунда $z_0 = \max(1; P^k |z|)$.

Бу ердан, хусусий ҳолда

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}(Pq^{-1} + P^{-2} + qP^{1-k})^{\frac{4}{3}2^{-k}} \qquad (1.77)$$

эканлиги келиб чиқади.

(1.77) баҳо $P^3 \le q \le P^{k-3}$ бўлганда (1.75) дан яхши. Шунинг учун ҳам (1.76) баҳо Вейл баҳоси (1.75) дан кучлироқ. Шунингдек, 1.5.1-теорема илгари И. М. Виноградов томонидан $S(f)$ йиғинди учун олинган баҳодан $6 \le k \le 11$ бўлганда кучлидир.

Бу теоремани $\{f(n)\}$ кетма-кетликнинг каср қисмларининг тақсимланишини баҳолашга ва сонлар назариясининг баъзи бир аддитив масалаларини текширишга татбиқ этиш мумкин.

Хусусан (1.76) баҳодан $k \ge 6$ бўлганда

$$\| f(n) \| \le n^{\varepsilon - \frac{8}{3}2^{-k}}$$

тенгсизликнинг чексиз кўп натурал ечимларга эга эканлиги келиб чиқади (И. Аллаков [24,25,27,29]).

Бу натижалар B. R. Heath-Brown [97,98] натижаларининг кўпҳадлар учун умумлаштирилганидир.

1.5.1-теореманинг исботи. $f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ихтиёрий $k \ge 6$ даражали ҳақиқий коэффициентли кўпҳад бўлсин. (1.76) баҳони исботлаш учун аввало симметрик айирма

$$\Delta_h(f(x)) = f(x+h) - f(x-h)$$

дан фойдаланиб математик индукция методи билан ихтиёрий $j,\ 0 \le j \le k$ натурал сони учун

$$|S(f)|^{2^j} \le 2^{2^j-1} P^{2^j-j-1} \sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_j|<P/2} \left| \sum_{n \in I_j} e(\Delta_j(n)) \right|, \qquad (1.78)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бу ерда

$$I_1 = I(h_1) \subset [1;P],\ I_j = I(h_1,\dots,h_j) \subset I_{j-1} = I(h_1,\dots,h_{j-1}) \text{ ва}$$

$$\Delta_j(n) = \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_j}(f(n)).$$

$j = 0$ бўлганда (1.78) тенгсизлик ўз-ўзидан тушунарли. Энди фараз этайлик, (1.78) тенгсизлик бирор j учун ўринли бўлсин, у ҳолда унинг $j+1$ учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз.

$$\left| \sum_{n \in I_j} e(\Delta_j(n)) \right| \le \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i \pmod 2}} e(\Delta_j(n)) \right|$$

бўлганлиги сабабли Коши тенгсизлигидан

$$\left| \sum_{i=1}^{N} X_i \right|^m \le N^{m-1} \sum_{i=1}^{N} |X|^m$$

кўринишда фойдаланиб қуйидаги тенгсизликга эга бўламиз:

$$|S(f)|^{2^{j+1}} \le 2^{2^{j+1}-2} P^{2^{j+1}-2j-2} \left(\sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_j|<P/2} \sum_{i=0,1} \times \right.$$

$$\left. \times \left| \sum_{\substack{n\in I_j \\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}} e(\Delta_j(n)) \right| \right)^2 \le 2^{2^{j+1}-2} P^{2^{j+1}-2j-2} \cdot P^j \times$$

$$\times 2 \sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_j|<P/2} \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n\in I_j \\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}} e(\Delta_j(n)) \right|^2 . \tag{1.79}$$

Бу ерда

$$\sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n\in I_j \\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}} e(\Delta_j(n)) \right|^2 = \sum_{i=0,1} \sum_{\substack{m,n\in I_j \\ m\equiv i(\mathrm{mod}\,2), n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}} e(\Delta_j(m) - \Delta_j(n)) =$$

$$= \sum_{\substack{m,n\in I_j \\ m\equiv n(\mathrm{mod}\,2)}} e(\Delta_j(m) - \Delta_j(n)) = \sum_{|h|<P/2} \sum_{r\in I_{j+1}} e(\Delta_j(r+h) - \Delta_j(r-h)) =$$

$$= \sum_{|h|<P/2} \sum_{r\in I_{j+1}} e(\Delta_{j+1}(r)), \quad I_{j+1} = \{r : r \pm h \in I_j\}. \tag{1.80}$$

(1.79) ва (1.80) лардан

$$|S(f)|^{2^{j+1}} \le 2^{2^{j+1}-1} P^{2^{j+1}-j-2} \sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_j|<P/2} \sum_{|h_{j+1}|<P/2} \left| \sum_{r\in I_{j+1}} e(\Delta_{j+1}(r)) \right|$$

эканлиги, яъни (1.78) тенгсизликнинг $j+1$ учун ўринли эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, (1.78) тенгсизлик ихтиёрий j натурал сони учун ўринли экан.

Энди, (1.78) тенгсизликда $j = k-3$ деб олиб,

$$\Delta_{k-3}(n) = \Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_{k-3}}(f(n))$$

ни қараймиз. Бу ерда

$$(x+h)^k - (x-h)^k = 2h(C_k^1 x^{k-1} + C_k^3 x^{k-3} h^2 + C_k^5 x^{k-5} h^4 + \ldots) =$$

$$= 2h\left(kx^{k-1} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-1)} C_k^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-1}\right)$$

ва

$$C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\Delta_h(f(x)) = \alpha \cdot 2h\left(kx^{k-1} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-1)} C_k^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-1}\right) +$$

$$+\alpha_{k-1} \cdot 2h\left((k-1)x^{k-2} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-2)} C_{k-1}^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-2}\right) +$$

$$+\alpha_{k-2} \cdot 2h\left((k-2)x^{k-3} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-3)} C_{k-2}^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-3}\right) +$$

$$+ \ldots + \alpha_2 \cdot 4hx + \alpha_1 \cdot 2h$$

бўлади. Шунинг учун ҳам

$$\Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_{k-3}}(f(x)) = 2^{k-3} h_1 \ldots h_{k-3} \{\alpha(\frac{1}{6}k! x^3 + ax) +$$

$$+\alpha_{k-1}(\frac{1}{2}(k-1)!x^2+b)+\alpha_{k-2}(k-2)!x+\alpha_{k-3}\cdot c\}=$$

$$=2^{k-3}h_1...h_{k-3}\{\frac{1}{6}k!\alpha_k x^3+\frac{1}{2}(k-1)!\alpha_{k-1}x^2+$$

$$+(\alpha_k a+\alpha_{k-2}(k-2)!)x+(\alpha_{k-1}b+\alpha_{k-3}c)\} \qquad (1.81)$$

деб ёза оламиз. Бунда a,b,c — бутун сонлар.

(1.78) ва (1.81) лардан

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2}\sum_{|h_1|<P/2}...\sum_{|h_{k-3}|<P/2}\left|\sum_{n\in I_{k-3}} e(2^{k-3}\times\right.$$

$$\left.\times h_1...h_{k-3}(\frac{1}{6}k!\alpha n^3+\alpha_{k-1}\frac{1}{2}(k-1)!n^2+(\alpha a+\alpha_{k-2}(k-2)!)n))\right| \qquad (1.82)$$

келиб чиқади. Бундан кейин (1.82) баҳода $\alpha_{k-1}=0$ деб оламиз. У ҳолда

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2}\sum_{|h_1|<P/2}...\sum_{|h_{k-3}|<P/2}\left|\sum_{n\in I_{k-3}} e(2^{k-3}\times\right.$$

$$\left.\times h_1...h_{k-3}(\frac{1}{6}k!\alpha n^3+(\alpha a+\alpha_{k-2}(k-2)!)n))\right| \qquad (1.83)$$

ҳосил бўлади. m бутун сони учун $L(m)=[mP^{-3};\quad (m+1)P^{-3}]$ ва x ҳақиқий сони учун $x\in L(m)$ бажариладиган бутун сонни $m=m(x)$ деб белгилаймиз. Шунингдек, $L(x)=L(m(x))$ ва

$$T(x)=\max_{y,z}\left|\sum_{n\in I} e(yn^3+zn)\right|$$

белгилашларни киритамиз. Бунда I билан $[1;P]$ интервалнинг бирор қисм интервали белгиланган, y ўзгарувчи $\mathrm{L}(m)$ да, z эса $[0;1]$ интервалда ўзгаради.

Бу янги белгилашлардан фойдаланиб (1.83) дан

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_{k-3}|<P/2} T(\alpha K h_1 \dots h_{k-3}),\ K = \tfrac{1}{6} 2^{k-3} k! \quad (1.84)$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди $h = K h_1 h_2 \dots h_{k-3}$ деб олиб ва (1.84) нинг ўнг томонида $h=0$ ҳадларнинг ҳиссаси $\ll P^{k-4}$ бўлганлиги ҳамда h ни юқоридаги кўпайтма кўринишида ифодалашлар сони $\ll \tau_{k-2}(h) \ll h^{\varepsilon} \ll P^{\varepsilon}$ эканлигини эътиборга олсак, (1.84) дан

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-1} + P^{2^{k-3}-k+2+\varepsilon} \sum_{h=1}^{R} T(\alpha h), \quad R = KP^{k-3}$$

га эга бўламиз. Бу баҳонинг иккала томонини 6-даражага кўтариб Гёльдер тенгсизлигини қўлласак, қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}} \ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + P^{3\cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon} \left(\sum_{h=1}^{R} T(\alpha h) \right)^6 \ll$$

$$\ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + P^{3\cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon} \cdot R^{6-1} \sum_{h=1}^{R} T^6(\alpha h) \ll$$

$$\ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + P^{3\cdot 2^{k-2}-k-3+6\varepsilon} \sum_{h=1}^{R} T^6(\alpha h). \quad (1.85)$$

(1.85) нинг ўнг томонидаги йиғиндини баҳолаш учун D. R. Heath - Brown [97] даги қуйидаги леммалардан фойдаланамиз:

1.5.1-лемма. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун

$$\sum_{m=1}^{P^3} T(mP^{-3})^6 \ll P^{7+\varepsilon}$$

баҳо ўринли.

1.5.2-лемма. Агар $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a,q) = 1$ ва $|z| \leq q^{-2}$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий ҳақиқий μ ва $0 < \Delta < \frac{1}{2}$ сонлари учун

$$\{h \leq H: \ \|\alpha h - \mu\| \leq \Delta\} \leq 4(1 + q\Delta)(1 + q^{-1}H) \qquad (1.86)$$

ва

$$\{h \leq H: \ \|\alpha h - \mu\| \leq \Delta\} \leq 8(1 + (q|z|)^{-1}\Delta)(1 + q|z|H) \qquad (1.87)$$

тенгсизликлар ўринли.

Булар мос равишда D. R. Heath - Brown [97] даги 5 ва 6 - леммалардир.

Энди, 1.5.1-леммани қўллаб (1.85) дан

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}} \ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + P^{3\cdot 2^{k-2}-k+4+7\varepsilon} \max_m F(m) \qquad (1.88)$$

ни ҳосил қиламиз. Бунда

$$F(m) = \{h \leq P : \alpha h \in \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} L(m + P^3 l)\} \leq \{h \leq R: \ \|\alpha h - mP^{-3}\| \leq P^{-3}\}.$$

$H = R = KP^{k-3}$, $\Delta = P^{-3}$ бўлганда (1.86) ва (1.87) лардан мос равишда

$$F(m) \ll qP^{-3} + P^{k-4} + q^{-1}P^{k-3}$$

ва

$$F(m) \ll q|z| \cdot P^{k-3} + P^{k-6} + q^{-1}|z|^{-1} P^{-3}$$

келиб чиқади. $|z_0| = \max\{1;|z|P^k\}$ деб олиб бу иккала баҳони бирлаштирсак,

$$F(m) \ll qz_0P^{-3} + P^{k-6} + q^{-1}z_0P^{k-3} \tag{1.89}$$

ҳосил бўлади. Ниҳоят, (1.88) ва (1.89) лардан

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}} \ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + qzP^{3\cdot 2^{k-2}-k+1+7\varepsilon} +$$

$$+P^{3\cdot 2^{k-2}-2+7\varepsilon} + q^{-1}z_0^{-1}P^{3\cdot 2^{k-2}+1+7\varepsilon} \ll$$

$$\ll P^{3\cdot 2^{k-2}+\varepsilon}\left(qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P\right),$$

яъни

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}\left(qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P\right)^{\frac{1}{3\cdot 2^{k-2}}}$$

баҳога эга бўламиз.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, k — даражали, ҳақиқий $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ коэффициентли ихтиёрий

$$f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

кўпҳадни

$$x = y - \alpha_{k-1}(k\alpha_k)^{-1}$$

алмаштириш ёрдамида

$$f(y) = \beta_k y^k + \beta_{k-2}y^{k-2} + \beta_{k-3}y^{k-3} \ldots + \beta_1 y + \beta_0$$

кўринишга келтириш мумкин. Лекин бу алмаштириш ҳамма вақт ҳам бутун сонлар тўпламидаги алмаштириш бўлавермайди.

2-БОБ

СОНЛАРНИ ЧЕКЛИ СОНДАГИ ҚЎШИЛУВЧИЛАР ЙИҒИНДИСИГА ЁЙИШ

2.1. Вон итерация методининг $(1,X)$ оралиқдаги Варинг сонларининг сонини баҳолашга татбиқи

Кириш қисмда таъкидланганидек, Варинг муаммосида ҳар бир n натурал сонини s та k — даражалар йиғиндиси кўринишида ифодалаш, яъни

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k \tag{2.1}$$

кўринишда ифодалаш мумкин эканлигини исботлаш керак эди. Бунда $k \geq 2$ ва $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — натурал сонлар.

(2.1) ни қаноатлантирувчи чекли s нинг мавжудлиги Д. Гильберт томонидан исботланган бўлсада, бу ерда қуйидаги масалалар мавжуд:

1) k берилган бўлганда барча n лар учун (2.1) ни қаноатлантирувчи энг кичик s ни, яъни $g\,(k)$ ни аниқлаш;

2) k берилган бўлганда етарлича катта n лар учун (2.1) ни қаноатлантирувчи энг кичик s ни, яъни $G\,(k)$ ни аниқлаш;

3) n ва k лар берилган бўлганда (1.1) нинг ечимлари сони $R_s(k,n)$ учун асимптотик формула олиш.

Бу учала масала ҳам кўплаб математик олимлар томонидан ўрганилган, жуда яхши натижалар олинган бўлса-да, уларнинг бирортаси ҳам ҳозиргача барча n ва k лар учун тўла ечимини топмаган (R. C. Vaughan [108] ва D. R. Heath-Brown [97] ларга қаранг). Масалан, $G\,(k)$ нинг ҳақиқий қиймати $k=2$ ва $k=4$ бўлгандагина аниқ бўлиб $G(2)=4$ ва $G(4)=16$ (Hardy G. H., Wright E. [93] нинг 1.1, 1.2-параграфларига қаранг).

Етарлича катта X лар учун $N_{k,s}(X)$ орқали (2.1) кўринишида ифодаланадиган натурал $n \leq X$ сонларнинг сонини белгилайлик. И. М. Виноградов ([93] нинг 5,7 боблари ва [49] нинг 2 бобига қаранг), Г. Дэвенпорт [84-86], А. А. Карацуба [53] ва бошқаларнинг (тўлароқ адабиётлар рўйхати учун [49] га мурожаат этиш мумкин) шу соҳадаги машҳур ишларидан кейин R. C. Vaughan [108,109], янги итерация методини қўллаб барча $k \geq 5$ лар учун G (k) нинг барча мавжуд баҳоларини яхшилади. $s=3$, $k \geq 3$ ва $s=4$, $5 \leq k \leq 20$ бўлганда эса у $N_{k,s}(X)$ нинг баҳоларини яхшилашга эришди.

G (k) нинг ҳозиргача аниқ қиймати маълум бўлмагани ó÷óí s_0 сифатида G (k) нинг R. C. Vaughan [108] да топилган қийматини олиб $s < s_0$ лар учун k ва s берилган бўлганда $N_{k,s}(X)$ функция учун баҳо олиш муҳимдир. Буни қуйидагича тушуниш керак: масалан, R. C. Vaughan [108] да ҳар бир етарлича катта натурал сонининг ўн тўққизта бешинчи даражалар йиғиндиси кўринишида ифодаланиши исботланган. Шундай савол туғилади, тўртта ёки бешта бешинчи даражалар йиғиндиси кўринишида ифодаланадиган n ($n \leq X$) ларнинг сони нечта? Умуман $s < s_0$ бўлганда s та k — даражалар йиғиндиси кўринишида ифодаланадиган натурал n $(n \leq X)$ сонларнинг сони нечта? $k \geq 3$, $s=3$ $(s_0=7)$ ва $5 \leq k \leq 20$, $s=4$ бўлганда бу саволга R. C. Vaughan [108] даги 1.3 ва 1.4 теоремалар ҳамда R. C. Vaughan [109] нинг натижалари жавоб беради. Хусусан R. C. Vaughan [108] даги 1.3 ва 1.4-теоремаларга кўра

$$N_{k,3}(X) > X^{\alpha_{k,3}-\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Бу ерда $\alpha_{3,3} = 11/12$ ва $k \geq 4$ бўлганда

$$\alpha_{k,3} = \tfrac{3}{k} - \tfrac{1}{k^2}.$$

Ушбу бобда биз R. C. Vaughan [108] нинг янги итерация методини қўллаб $N_{k,s}(X)$ учун қуйидаги теоремаларни исботлаймиз (И. Аллаков [18,23] га қаранг).

2.1.1-теорема. Ихтиёрий, етарлича кичик $\varepsilon > 0$ сони ва $X > X_0(s,k,\varepsilon)$ етарлича катта сони учун

$$N_{k,s}(X) > X^{\alpha_{k,s}-\varepsilon}$$

тенгсизлик ўринли. Бундаги $\alpha_{k,s}$ нинг $5 \leq k \leq 10$ ва $5 \leq s \leq 8$ бўлгандаги қийматлари 1-жадвалда келтирилган, $k \geq 10$ ва $4 \leq s \leq 8$ бўлганда эса у қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\alpha_{k,4} = \frac{4}{k} - \frac{5}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}, (k \geq 6),$$

$$\alpha_{k,5} = \frac{5}{k} - \frac{11}{2k^2} + \frac{19}{8k^3} - \frac{3}{8k^4}, (k \geq 6),$$

$$\alpha_{k,6} = \frac{6}{k} - \frac{37}{4k^2} + \frac{13}{2k^3} - \frac{69}{32k^4} + \frac{9}{32k^5}, (k \geq 9),$$

$$\alpha_{k,7} = \frac{7}{k} - \frac{67}{4k^2} + \frac{215}{16k^3} - \frac{225}{32k^4} + \frac{243}{128k^5} - \frac{27}{128k^6}, (k \geq 9),$$

$$\alpha_{k,8} = \frac{8}{k} - \frac{22}{k^2} + \frac{26}{k^3} - \frac{1095}{64k^4} + \frac{459}{64k^5} - \frac{837}{512k^6} + \frac{81}{512k^7}, (k \geq 9).$$

1- жадвал

$k \diagdown \alpha_{k,s}$	$\alpha_{k,5}$	$\alpha_{k,6}$	$\alpha_{k,7}$	$\alpha_{k,8}$
5	0,8035404	0,8700952	0,9215428	0,964206
6	0,7013890	0,7725295	0,824504	0,8674203
7	0,6193728	0,6913501	0,7485757	0,7944652
8	0,5521917	0,6252443	0,6832147	0,7327790
9	0,4999521	0,5690801	0,6197738	0,6626185
10	0,4548594	0,5256267	0,5772201	0,6339286

2.1.2-теорема. Агар $N_{4,s}^{(r)}(X)$ 16 модули бўйича r қолдиқлилар синфига тегишли ва s та тўртинчи даражалар йиғиндиси кўринишида ифодаланадиган натурал сонлар $n \leq X$ нинг сони бўлса, у ҳолда $4 \leq s \leq 6$ ва $0 \leq r \leq s$ бўлганда

$$N_{4,s}^{(r)} > X^{\alpha_{4,s} - \varepsilon}$$

баҳо ўринли. Бу ерда: $\alpha_{4,4} = 0,8893198$; $\alpha_{4,5} = 0,9517545$; $\alpha_{4,6} =
= 0,9800892$.

Бу натижалар R. C. Vaughan [108,107] нинг натижаларини тўлдиради ва H. Davenport [85,86] нинг натижаларига нисбатан яхшироқдир. Таққослаш учун хусусан қуйидагиларни таъкидлаб ўтамиз. Биздаги 2.1.1-теоремадаги $\alpha_{5,8} = 0,9642060$; $\alpha_{6,5} = 0,7083890$; $\alpha_{6,6} = 0,7725295$ лар ўрнига H. Davenport [86] да $\alpha_{5,8} = 6913439/ /7576115 = 0,9125308$; $\alpha_{6,5} = 5549/8379 = 0,6622508$; $\alpha_{6,6} = 575117/ /787182 = 0,7306023$ натижаларни, шунингдек 2.1.2-теоремадаги $\alpha_{4,4} = 0,8893198$; $\alpha_{4,5} = 0,9517545$ лар ўрнига H. Davenport [85] да $\alpha_{4,4} = 311/412 = 0,803398$; $\alpha_{4,5} = 5539/6268 = 0,8836949$ ларни олган эди.

Ушбу натижаларни исботлашда моҳияти И. М. Виноградов методининг модификациясидан иборат бўлган Г. Дэвенпорт методи (Р. Вон [49] нинг 5,6 бобларига қаранг) ва R. C. Vaughan [108] нинг янги итерация методларидан фойдаланамиз.

2.2. Ёрдамчи тенгламани ечиш

$p > R$ шартни қаноатлантирувчи туб бўлувчиларга эга бўлмаган натурал $x \leq Y$ сонлар тўпламини $A\ (Y,R)$ билан белгилаймиз, яъни

$$A(Y,R)=\{x: x\leq Y \text{ ва } p\setminus x \Rightarrow p\leq R\}.$$

2.2.1-лемма. Агар τ — берилган мусбат сон ва $R<Y\leq R^{\tau}$ бўлса, у ҳолда

$$\mathrm{card}A(Y,R)=Y\rho\left(\frac{\ln Y}{\ln R}\right)+O\left(\frac{Y}{\ln Y}\right),$$

бўлади. Бу ерда $\rho(x)$ — Дикман функцияси.

Бу лемма R. C. Vaughan [108] нинг 5.3-леммаси. Унинг исботи De Bruijn N. G. [87] да келтирилган. Дикман функциясининг хоссаларини De Bruijn N.G. [88] дан топиш мумкин. Биз бу ерда агар $x<0$ бўлса, у ҳолда $\rho(x)$ =0; агарда $0\leq x<1$ бўлса, у ҳолда $\rho(x)$ =1 ва $x\geq 0$ бўлганда $\rho(x)$ мусбат ва камаювчи функция эканлигини таъкидлаш билан чегараланамиз.

Кейинги лемма моҳияти жиҳатидан R. C. Vaughan [108] нинг янги итерация методининг асосий ғоясини ўзида акс эттиради.

Аввало, белгилашлар киритамиз: $S_s(P,R)$ билан

$$x_1^k+x_2^k+\ldots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\ldots+y_s^k$$

тенгламанинг $x_i\in A(P,R)$, $y_i\in A(P,R)$ шартларни қаноатлантирувчи ечимлари сонини белгилаймиз. Шунингдек, қулайлик учун

$$A_1(t,\theta,\lambda_{t-1})=(2t-2)\theta+1+\lambda_{t-1}(1-\theta),$$

$$B_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})=(2t-2-k)\theta+2-2^{1-j}+\lambda_{t-1}(1-\theta),$$

$$C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})=\frac{(2t-2-k+k\cdot 2^{-j})\theta+2-(j+1)2^{-j}+\lambda_{t-1}(1-\theta)(1-t2^{-j})}{1-(1-\theta)(t-1)\cdot 2^{-j}},$$

$$B_2(t,k,\theta,\lambda_{t-1}) = (2t-2-k-2^{2-k})\theta + 2 - 2^{2-k} + \lambda_{t-1}(1-\theta),$$

$$C_2(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}) =$$

$$= \frac{(2t-2-k+(k-1)2^{-j})\theta + 2 - (j+1)2^{-j} - \lambda_{t-1}(1-\theta)(1-t2^{-j})}{1-(1-\theta)(t-1)\cdot 2^{-j}},$$

$$C_3(t,k,\theta,\lambda_{t-1}) = 2t - k + \sigma\cdot(t^{-1}+\theta-\theta t^{-1})^{-1}$$

деб белгилаб оламиз . Бунда

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{агар } t \ge 2k-2 \text{ бажарилса;} \\ 2t^{-1}-(k-1)^{-1}, & \text{агар } 2k-2 > t \ge k-1 \text{ бажарилса.} \end{cases}$$

λ_t га нисбатан қуйидаги уч гуруҳ (I), (II), (III) шартларни қўямиз:

(I). $2^j \ge t$ ва $1 \le j \le k-1$ шартларни қаноатлантирувчи бирор j учун

$$\lambda_t \ge A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}), \tag{I.1}$$

$$\lambda_t \ge B_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}), \tag{I.2}$$

$$\lambda_t \ge C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}) \tag{I.3}$$

муносабатлар ўринли бўладиган θ, $0<\theta\le\frac{1}{k}$ мавжуд.

(II). $2^j \ge t$ ва a) $j=k-2$ ёки b) $j=k-4$, ёки c) $1\le j\le k-3$, $k-j$ — тоқ сон шартни қаноатлантирувчи бирор j учун

$$\lambda_t \ge A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}), \tag{II.1}$$

$$\lambda_t \ge B_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}), \tag{II.2}$$

$$\lambda_t \geq C_2(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}) \qquad \text{(II.3)}$$

муносабатлар ўринли бўлган θ, $0<\theta\leq\frac{1}{k}$ мавжуд.

(III). Агар $t\geq k-1$ бўлса, у ҳолда

$$\lambda_t \geq A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}), \qquad \text{(III.1)}$$

$$\lambda_t \geq B_2(t,k,\theta,\lambda_{t-1}), \qquad \text{(III.2)}$$

$$\lambda_t \geq C_3(t,k,\theta,\lambda_{t-1}) \qquad \text{(III.3)}$$

шартларни қаноатлантирувчи θ, $0<\theta\leq\frac{1}{k}$ мавжуд.

Энди, қуйидаги леммани исботлаймиз.

2.2.2-лемма. Агар $k\geq 5$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ бўлиб, ҳар бир $t=3,4,...,s$ учун (I), (II), (III) шартлардан ҳеч бўлмаса биттаси бажарилса, у ҳолда $\lambda>\lambda_s$, $0<\eta<\eta_0(\lambda-\lambda_s)$ (<1) ва $P>P_0(s,\eta)$ бўлганда

$$S_s(P,P^\eta)<P^\lambda$$

бўлади.

$k=4$ бўлган ҳолни қараганда бизга қуйидаги лемма керак бўлади.

2.2.3-лемма. Агар $k=4$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=13/4$, $\theta_4=2/(6+\sqrt{80})$, $\lambda_4=6\theta_4+1+\lambda_3(1-\theta_4)=4{,}618033...$, $\theta_5=2/11$, $\lambda_5=8\theta_5+1+\lambda_4(1-\theta_5)=6{,}232936...$ ва $1\leq s\leq 5$ бўлса, у ҳолда $\lambda>\lambda_s$, $0<\eta<\eta_0(\lambda-\lambda_s)$ ва $P>P_0(\eta,s)$ бўлганда

$$S_s(P,P^\eta)<P^\lambda$$

бажарилади.

2.2.2 ва 2.2.3-леммалар мос равишда R. C. Vaughan [108] даги 4.2 ва 4.3-теоремалардир. Шунинг учун ҳам уларнинг исботларини бу ерда келтирмаймиз.

Қараб чиқилганларга асосланиб R. C. Vaughanнинг янги итерация методининг асосий ғояси θ $(0<\theta\le\frac{1}{k})$ ни λ_s (I), (II), (III) шартлардан ҳеч бўлмаса биттасини қаноатлантирадиган ва оптимал (яъни имкони борича кичик) қиймат қабул қиладиган қилиб танлашдан иборат деб айта оламиз.

2.1.1 ва 2.1.2-теоремалар исботининг умумий қисмини ўз ичига олувчи яна бир леммани исботлаймиз.

2.2.4-лемма. Ихтиёрий етарлича кичик $\varepsilon>0$ ва етарлича катта $X>X_0(s,k,\varepsilon)$ сонлари учун

$$N_{k,s}(X)>X^{\alpha_{k,s}-\varepsilon}$$

тенгсизлик ўринли. Бу ерда $k\ge4$ ва $\alpha_{k,s}=(2s-\lambda_s)k^{-1}$.

Исботи. $P=X^{1/k}$, $R=P^\eta$, ($\eta>0$ — етарлича кичик ҳақиқий сон), $R_s(n)$ эса $x_1^k+x_2^k+...+x_s^k=n$ тенгламанинг $x_i\in A(P,R)$ шартни қаноатлантирувчи ечимлари сони бўлсин. У ҳолда

$$S_s(P,R)=\sum_n R_s^2(n).$$

Коши тенгсизлигига асосан

$$\left(\sum_{n\le X}R_s(n)\right)^2\le\left(\sum_{\substack{n\le X\\ R_s(n)>0}}1\right)\sum_{n\le X}R_s^2(n).$$

Бундан

$$N_{k,s}(X)=\sum_{n,R_s(n)>0}1\ge\left(\sum_n R_s(n)\right)^2 S_s(P,R)^{-1}. \qquad (2.3)$$

Р. Вон [49] нинг 6.1-параграфидаги сингари мулоҳаза юритиб ва $Z_i = \mathrm{card} A(P,R)$, $i = 1,2,...,s$, деб олиб

$$\sum_{n \le X} R_s(n) \gg (\mathrm{card} A(P,R))^s$$

га эга бўламиз (ушбунинг тўлиқ исботи [49] нинг 5.4 ва 6.1-параграфларида келтирилган). Дикман функциясининг хоссаларига асосан 2.2.1-леммадан $\mathrm{card} A(P,R) \gg P$ келиб чиқади.

Демак,

$$\sum_{n \le X} R_s(n) \gg P^s. \tag{2.4}$$

Энди 2.2.2- леммада ($k = 4$ ҳолда эса 2.2.3-леммада) $\lambda = \lambda_s + 2\varepsilon$ деб олиб

$$S_s(P,R) < P^{\lambda_s + 2\varepsilon} \tag{2.5}$$

га эга бўламиз. $P = X^{1/k}$ эканлигини эътиборга олсак, (2.2) - (2.5) лардан исботланиши талаб этилаётган 2.2.4-лемма келиб чиқади.

2.3. 2.1.1-теореманинг исботи

Аввало, теорема исботининг асосий ғоясини баён қиламиз. 2.2.4-леммага кўра

$$\alpha_{k,s} = (2s - \lambda_s)k^{-1}. \tag{2.6}$$

Шунинг учун ҳам 2.1.1-теоремани исботлаш учун (I)—(III) шартлардан λ_s нинг оптимал (имкони борича кичик) қийматини аниқлаш етарли. Буни қуйидагича амалга ошириш мумкин:

1) агар (I)—(III) шартлардан фақат биртаси, масалан (I) бажарилса, $A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}) = B_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$ тенгликни θ га нисбатан ечиб, $\theta=\theta_1$ ни топамиз ва агар $A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}) \geq C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$ бўлса, $\lambda_s^{(1)} = A_1(t,\theta_1,\lambda_{t-1})$ деб, акс ҳолда $\lambda_s^{(1)} = C_1(t,k,\theta_1,j,\lambda_{t-1})$ деб оламиз. Энди $A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}) = C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$ тенгламани ечиб $\theta=\theta_2$ ни топамиз ва агар $A_1(t,\theta_2,\lambda_{t-1}) \geq B_1(t,k,\theta_2,j,\lambda_{t-1})$ бўлса, $\lambda_s^{(2)} =$, $= A_1(t,\theta_2,\lambda_{t-1})$ акс ҳолда $\lambda_s^{(2)} = B_1(t,k,\theta_2,j,\lambda_{t-1})$ деб оламиз. Ниҳоят, $B_1(t,k,\theta_2,j,\lambda_{t-1}) = C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$ тенгламани ечиб $\theta=\theta_3$ ни аниқлаймиз ва $A_1(t,\theta_3,\lambda_{t-1}) \geq B_1(t,k,\theta_3,j,\lambda_{t-1})$ бўлса, $\lambda_s^{(3)} = A_1(t,\theta_3,\lambda_{t-1})$ деб оламиз, акс ҳолда $\lambda_s^{(3)} = B_1(t,k,\theta_3,j,\lambda_{t-1})$.

У ҳолда $\lambda_s = \min(\lambda_s^{(1)},\lambda_s^{(2)},\lambda_s^{(3)})$ деб олиш мумкин ва бу λ_s нинг мумкин бўлган оптимал қиймати бўлади.

Албатта, бунда λ_s сифатида $\lambda_s^{(1)},\lambda_s^{(2)},\lambda_s^{(3)}$ ларнинг ихтиёрий биртасини олиш мумкин, лекин бу ҳолда λ_s нинг қиймати оптимал бўлмаслиги мумкин, яъни бунда λ_s нинг қиймати бироз ёмонроқ бўлиши мумкин.

2) агар (I)-(III) шартлардан иккитаси ёки учаласи ҳам бажарилса, у ҳолда ҳар бир гуруҳ шартлар учун ўзининг оптимал λ_s ни, яъни $\lambda_s^{(I)}$, $\lambda_s^{(II)}$, $\lambda_s^{(III)}$ ларни аниқлаб, $\lambda_s =$ $= \min(\lambda_s^{(I)},\lambda_s^{(II)},\lambda_s^{(III)})$ деб оламиз.

Энди бевосита $\alpha_{k,s}$ ни қарашга ўтамиз. $k = 5$, $s = 5$ бўлса, (2.6) дан $\alpha_{5,5} = (10-\lambda_5)/5$ га эга бўламиз Бу ҳолда $j=3$ ва $\theta = 3/20$ бўлиб (II) шарт бажарилади ҳамда ундан λ_5 нинг оптимал қийматини аниқлаймиз. (II) дан

$$A_1(5,\theta,\lambda_4) = 8\theta + 1 + \lambda_4(1-\theta),$$

$$B_1(5,5,\theta,3,\lambda_4) = 3\theta + \frac{7}{4} + \lambda_4(1-\theta),$$

$$C_2(5,5,\theta,3,\lambda_4) = (3 + \frac{3}{4}\lambda_4 + \frac{25}{4}\theta)(1+\theta)^{-1}$$

ва

$$A_1(5,\frac{3}{20},\lambda_4) = B_1(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4) = \frac{11}{5} + \frac{11}{20}\lambda_4,$$

$$C_2(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4) = \frac{81}{23} + \frac{51}{92}\lambda_4.$$

λ_4 сифатида $\lambda_4 = 4,4386583$ (бу ерда ва қолган барча $5 \le k \le 10$ ҳолларда бўлганда λ_4 ни R. C. Vaughan [109] даги 1.1-жадвалдан оламиз), у ҳолда

$$C_2(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4) > A_1(5,\frac{3}{20},\lambda_4)$$

ва биз

$$\lambda_5 = C_2(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4) = 5,9822985$$

деб олишимиз мумкин.

Шундай қилиб,

$$\alpha_{5,5} = \frac{1}{5}(10 - \lambda_5) = 0,8035404.$$

Қолган барча $5 \le k \le 10$, $5 \le s \le 8$ ҳоллар шунга ўхшаш исботланади. 2-жадвалда λ_s нинг (I)—(III) шартлардан аниқланган ва $\alpha_{k,s} = (2s - \lambda_s)k^{-1}$ ни ҳисоблашда фойдаланилган қийматлари келтирилган.

2-жадвал

k	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
5	5,9822985	7,6495248	9,3922886	11,17897
6	5,7916667	7,3648232	9,0529766	10,795424
7	5,6643903	7,1605498	8,7599706	10,428743
8	5,5824662	6,9980451	8,5342823	10,137768
9	5,5004313	6,8782798	8,4220356	10,036433
10	5,4514062	6,7925507	8,2277996	9,6607144

Энди $k \ge 6$ бўлганда

$$\alpha_{k,4} = \frac{4}{k} - \frac{5}{2k^2} + \frac{1}{2k^3} \tag{2.7}$$

эканлигини исботлаймиз. (2.6) га кўра

$$\alpha_{k,4} = (8 - \lambda_4)k^{-1} \tag{2.8}$$

даги $k \ge 6$ — ихтиёрий натурал сон бўлгани учун фақат (I) шарт бажарилади. (I) га кўра $2^j \ge 4$ ва $j = 2,3,\dots,k-1$. $j = 2$ деб олиб, (I.1), (I.2), (I.3) ларни текширамиз. Бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_4 &\ge A_1(4,\theta,\lambda_3), \\ \lambda_4 &\ge B_1(4,k,\theta,2,\lambda_3), \\ \lambda_4 &\ge C_1(4,k,\theta,2,\lambda_3). \end{aligned}\right\} . \tag{2.9}$$

R. C. Vaughan [109] даги 1.4-теоремага асосан $\lambda_3 = 3 + \frac{1}{k}$ деб олиш мумкин. Шунинг учун ҳам (2.9) дан

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_4 \geq 4 + \frac{1}{4} + (3 - \frac{1}{4})\theta, \\ &\lambda_4 \geq \frac{9}{2} + \frac{1}{k} + (3 - k - \frac{1}{k})\theta, \\ &\lambda_4 \geq ((24 - 3k)\theta + 5)(1 + 3\theta)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

га эга бўламиз. $\theta = 1/2k$ ва $\theta = \theta_1$ деб оламиз, у ҳолда

$$A_1(4, \theta_1, \lambda_3) = B_1(4, k, \theta_1, 2, \lambda_3) = 4 + \frac{5}{2k} - \frac{1}{2k^2}$$

ва $k \geq 6$ бўлганда $C_1(4, k, \theta_1, 2, \lambda_3) < A_1(4, \theta_1, \lambda_3)$ бўлади. Шунинг учун ҳам

$$\lambda_4 = 4 + \frac{5}{2k} - \frac{1}{2k^2} \tag{2.11}$$

деб олишимиз мумкин. (2.8) ва (2.11) лардан (2.7) келиб чиқади.

Юқоридаги сингари мулоҳаза юритиб, барча $k \geq 6$ лар учун

$$\lambda_5 = 5 + \frac{11}{2k} - \frac{19}{8k^2} + \frac{3}{8k^3},$$

$k \geq 9$ бўлганда $\lambda_6 = 6 + \frac{37}{4k} - \frac{13}{2k^2} + \frac{69}{32k^3} - \frac{9}{32k^4},$

$$\lambda_7 = 7 + \frac{67}{4k} - \frac{215}{16k^2} + \frac{225}{32k^3} - \frac{243}{128k^4} + \frac{27}{128k^5},$$

ва барча $k \geq 10$ лар учун

$$\lambda_8 = 8 + \frac{22}{k} - \frac{26}{k^2} + \frac{1095}{64k^3} - \frac{459}{64k^4} + \frac{837}{512k^5} - \frac{81}{512k^6}$$

тенгликларнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бу ердан ва 2.2.4-леммадан 2.1.1-теорема келиб чиқади.

2.4. Сонларни натурал сонларнинг тўртинчи даражалари йиғиндиси кўринишида ифодалаш тўғрисида

Ушбу параграфда биз 2.1.2-теоремани исботлаймиз. Бунда Р. Вон [49] нинг 6-параграфида келтирилган Г. Дэвенпорт методидан фойдаланамиз. У ерда $Z = \mathrm{card}A(P,P^{\eta})$, $x_i \in A(P,P^{\eta})$ ва $x_i \equiv r \pmod{16}$, (r — фиксирланган $0 \leq r \leq s$, $(4 \leq s \leq 6)$) шартни қаноатлантирувчи сон деб олсак, у ҳолда 16 модули бўйича ҳар бир чегирмалар синфи r учун 2.2.4-лемма ўринли бўлади.

2.2.4-леммадан $k = 4$, $s = 4$ бўлганда $\alpha_{4,4} = \frac{1}{4}(8 - \lambda_4)$ ҳосил бўлади. Бу ҳолда (II)-шарт бажарилади. $\theta = 1/(3 + \sqrt{20})$ деб олсак, $\lambda_4 = 6\theta + 1 + \lambda_3(1 - \theta)$ (1.2.3-леммага қаранг) ҳосил бўлади. R. C. Vaughan [108] нинг 1.3 -теоремасига кўра

$$\lambda_3 = 3 + \frac{2}{5 + \sqrt{33}}$$

деб олишимиз мумкин. У ҳолда λ_4 = 4,5627208 ва демак, $\alpha_{4,4}$= = 0,8593198.

$s=5$ бўлган ҳолда $\alpha_{4,5}=\frac{1}{4}(10-\lambda_5)$. Бу ҳолда 2.2.3-леммага кўра (III) шарт бажарилади ва $\theta=2/11$. Шунинг учун ҳам (III) дан

$$\left.\begin{aligned}\lambda_5 &\ge 8\theta+\lambda_4(1-\theta),\\ \lambda_5 &\ge \frac{1}{4}(7+15\theta)+\lambda_4(1-\theta),\\ \lambda_5 &\ge 6+(3+12\theta)^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Илгари қаралган ҳолга асосан $\lambda_4=4,5627208$. Шунинг учун ҳам (2.12) дан

$$\lambda_5=6+\frac{1}{3+2\theta}=6,1929824$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб,

$$\alpha_{4,5}=\frac{1}{4}(10-\lambda_5)=0,9517545.$$

Ниҳоят, $s=6$ ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $\alpha_{4,6}=\frac{1}{4}(12-\lambda_6)$ ва λ_6 нинг $k=4$ бўлгандаги оптимал қийматини аниқлаймиз. Бу ерда (I) бажарилади ва $j=3$, $\theta=3/16$. Шунинг учун ҳам

$$A_1(5,\theta,\lambda_5)=B_1(5,4,\theta,3,\lambda_5)=\frac{23}{8}+\frac{13}{16}\lambda_5$$

ва

$$C_1(5,4,\theta,3,\lambda_5) = \frac{348}{63} + \frac{26}{63}\lambda_5.$$

$\lambda_5 = 6{,}1929824$ бўлганлиги сабабли, бу ердан

$$\lambda_6 = C_1(5,4,\theta,3,\lambda_5) = \frac{1}{63}(348 + 26\lambda_5) = 8{,}0796434 \text{ ва}$$

$$\alpha_{4,6} = 0{,}9800892.$$

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, Вооннинг янги итерация методини Г. Дэвенпорт методи билан биргаликда $s = 7$, $k = 4$ бўлганда қўлласак, $\alpha_{4,7} = 1$ ни, яъни

$$N_{4,7}^{(7)}(X) > X^{1-\varepsilon}$$

ни беради.

3-БОБ

ЖУФТ СОНЛАРНИ АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯДАН ОЛИНГАН ИККИТА ТОҚ ТУБ СОНЛАРНИНГ ЙИҒИНДИСИ КЎРИНИШИДА ИФОДАЛАШ ТЎҒРИСИДА

3.1. Олинган натижалар

Фараз этайлик, X ва P — етарлича катта ҳақиқий сонлар, N эса $\sqrt{N} < X \le N$ шартни қаноатлантирувчи натурал сон; p, p_1, p_2 — туб сонлар; $D = p^{\nu}$ ($p > 2$ ва ν мусбат бутун сон) бўлсин; $M_D(X)$ билан

$$n = p_1 + p_2, \quad p_i \equiv l_i (\mathrm{mod} D), \quad (l_i, D) = 1, \quad i = 1,2 \tag{3.1}$$

кўринишда ифодалаш мумкин эмас деб гумон қилинаётган жуфт натурал сонлар $n \le X$ тўпламини белгилаймиз, $E_D(X) = \mathrm{card} M_D(X)$; $R(n)$ — берилган n сонини (3.1) кўринишда ифодалашлар сонини билдирсин.

А. Ф. Лаврик [55,56] биринчи бўлиб, $R(n)$ учун кўпи билан $E_D(X) \ll X / \ln^A X$ (бунда $A > 0$ ўзгармас сон) та n дан бошқа барча $n \le X$ лар учун ўринли бўлган асимптотик формулани исботлади. Кейинчалик, R. C. Vaughan [105], H. L. Montgomery ва R. C. Vaughan [102] $E_D(X)$ ни $D = 1$, ҳолда қараб мос равишда $E_1(X) < X \exp(-c\sqrt{\ln X})$ ва $E_1(X) < X^{1-\delta}$, $0 < \delta < 1$ баҳоларни исботлашди. Chen Jing ren and Pan Chendong [83], И. Аллаков [2-4, 9] лар биринчи марта $R(n)$ учун ($D = 1$ бўлганда) кўпи билан n, $n \le X$ нинг $X^{1-\delta}$ та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун ўринли бўлган қуйидан баҳо олган ва δ нинг сон қийматини аниқлаганлар.

Ушбу бобда А. Ф. Лаврик [55] ва R. C. Vaughan [105] фойдаланган методларни биргаликда қўллаб қуйидаги теоремани исботлаймиз (И. Аллаков[26,28]ларга қаранг).

3.1.1-теорема. Агар $D=p^{\nu}$ ва $D\ll\ln^{A}X$ бўлса, у ҳолда

$$E_{D}(X)\ll\frac{1}{\varphi(D)}X\exp(-c_{1}\sqrt{\ln X})$$

ва $n\notin M_{D}(X), n\leq X$ лар учун

$$R(n)\gg\frac{n}{\varphi(D)\ln^{2}n}\left(1-\frac{\ln^{A}n}{\exp(c_{2}\sqrt{\ln n})}\right)\exp\left(-\frac{c_{2}}{4}\sqrt{\ln n}\right),$$

бу ерда c_1 ва c_2 лар A га боғлиқ эмас.

$E_{\tilde{\beta}}=0$ бўлган ҳолда, ушбу параграфда фойдаланилган метод ёрдамида, $R(n)$ учун асимптотик формула олиш мумкин. $E_{\tilde{\beta}}=1$ бўлган ҳолда ҳам „асимптотик формула“ олиш мумкин, лекин бу ҳолда „асимптотик формула“да одатдаги бош ҳад билан бирга тартиб жиҳатидан бошҳад билан бир хил бўлган бошқа бирта (махсус нолга мос келувчи) ҳад ҳам иштирок этади, яъни қуйидаги теорема ўринли бўлади:

3.1.2-теорема. Агар $D=p^{\nu}$ ва $D\ll\ln^{A}X$ бўлса, у ҳолда n, $n\leq X$ нинг кўпи билан $c_{4}X\varphi^{-1}(D)\exp(-c_{1}\sqrt{\ln X})$ та қийматидан бошқа барча қийматлари учун

$$R(n)=\frac{J(n)\sigma(n)}{\varphi^{2}(D)\ln^{2}n}+E_{\tilde{\beta}}\frac{J_{\tilde{\beta}}(n)\tilde{\sigma}(n)}{\varphi^{2}(D)\ln^{2}n}+O\left(\frac{n(\varphi(D)\ln^{2}n)^{-1}}{\exp(c_{5}\sqrt{\ln n})}\right)$$

формула ўринли, бунда

$$J(n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\ge 2}} 1,\quad J_{\tilde{\beta}}(n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\ge 2}} (n_1\cdot n_2)^{\tilde{\beta}-1},$$

$$\sigma(n)=2D\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{p\setminus D,p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{\substack{p\setminus n\\ p\nmid D,p>2}}\frac{p-1}{p-2},$$

$$\tilde{\sigma}(n)=\prod_{\substack{p\setminus rd\\ p\nmid n}}\frac{1}{p-1}\prod_{p\nmid nrd,p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{p\setminus ndr\\ p>2}}\frac{p}{p-1},$$

$d=(q,D)$, r эса $\tilde{\chi}$ махсус ҳақиқий характернинг модули ва $\tilde{\beta}$ — $L(s,\tilde{\chi})$ функциянинг махсус ноли.

Қайд этиш керакки, H. L. Montgomery ва R. C. Vaughan [102] даги методдан фойдаланиб ана шундай „асимптотик формула“ ҳам олиб бўлмайди.

Маълумки, $R(n)$ функцияни ўрганишни $(0;X)$ оралиқдаги ҳар бири мос равишда $Dt+l_1, Dt+l_2$, $1\le l_1,l_2\le D$, $(l_1,D)=1$, $(l_2,D)=1$ арифметик прогрессияларга тегишли бўлган p, $p+2n$ туб сонлар жуфтликлари сонини ифодаловчи $\Pi_n(X,D)$ функцияни ўрганиш билан боғлаш мумкин (А. Ф. Лаврик [55] га қаранг).

Ушбу бобда қўлланиладиган метод $\Pi_n(X,D)$ функцияси учун ҳам 3.1.1-теоремадаги сингари натижани, яъни қуйидаги теоремани исботлаш имконини беради.

3.1.3-теорема. Агар $D=p^{\nu}$ ва $D\ll \ln^A X$ бўлса, у ҳолда $0<2n\le X/\ln^A X$, $2n\equiv l_1-l_2(\mathrm{mod}D)$ сонларидан кўпи билан $c_4X\varphi^{-1}(D)\exp(-c_1\sqrt{\ln X})$ тасидан ташқари барчаси учун

$$\Pi_n(X,D) \gg \frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1-\frac{\ln^A n}{\exp(c_2\sqrt{\ln n})}\right)\exp\left(-\frac{c_2}{4}\sqrt{\ln n}\right)$$

баҳо ўринли, бунда c_1 ва c_2 лар $A > 0$ га боғлиқ эмас.

Бу натижалар А. Ф. Лаврик [55] натижаларига нисбатан бироз кучли ва R. C. Vaughan [105] натижаларига нисбатан эса умумийроқдир.

3.1.3-теореманинг исботи асосан 3.1.1-теореманинг исботига ўхшаш. 3.1.3-теоремани келтириб чиқариш учун зарур бўлган ўзгаришларни R.C.Vaughan [105] дан қараб олиш мумкин. 3.1.1-теоремани исботлашда биз аввало, 3.1.2-теореманинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Шунинг учун ҳам 3.1.1-теоремани исботлашга киришамиз.

3.2. Асосий леммалар

Фараз этайлик, χ_m — m модули бўйича Дирихле характери ва

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n)$$

бўлсин. Кейин изланишларимиз учун зарур бўлган бир нечта маълум леммаларни келтирамиз.

3.2.1-лемма. Агар X ва N лар етарлича катта сонлар бўлиб, $\sqrt{N} < X \le N$, $3 \le n \le X$ шартлар бажарилса, у ҳолда барча $m \le \exp(c_5\sqrt{\ln n})$ лар учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

а) агар $E_{\tilde{\beta}} = 0$ ёки $E_{\tilde{\beta}} = 1$ бўлиб, χ_m характернинг модули m махсус ҳақиқий характер $\tilde{\chi}_r$ нинг етакчи модули r га бўлинмаса, у ҳолда

$$\psi(n,\chi_m)=\delta_\chi n+\rho_n$$

бажарилади;

b) агарда $E_{\tilde{\beta}}=1$ ва $r\,|\,m$ бўлса, у ҳолда

$$\psi(n,\chi_m)=\delta_\chi n-\frac{n^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}+\rho_n$$

бажарилади.

Иккала ҳолда ҳам ρ_n учун

$$\rho_n \ll X\cdot\exp(-c_6\sqrt{\ln X})$$

баҳо ўринли.

Ушбу лемманинг исботи Г. Дэвенпорт [51] нинг 19-параграфида ва шунингдек R. C. Vaughan [105] нинг 4-пунктида келтирилган.

3.2.2-лемма. Агар $\chi'(t)$ ва $\chi''(t)$ лар мос равишда Q' и Q'' модуллари бўйича Дирихле характерлари ва $d=(Q',Q'')$, $Q=Q'Q''d^{-1}$ бўлса, у ҳолда $\chi'(t)\chi''(t)$ нинг бош характер бўлиши учун, барча t, $(t,Q)=1$ лар ва d модули бўйича характерлардан бири бўйича ҳосил қилинган ҳосилавий характер χ' учун $\chi'(t)=\overline{\chi}''(t)$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир, бу ерда $\overline{\chi}''(t)$ билан $\chi''(t)$ га қўшма характер белгиланган.

3.2.3-лемма. Агар $(j,k)=1$, $d\,|\,k$ ва $(h,d)=1$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\equiv h(\bmod d)}}^{k} e\left(\frac{jl}{k}\right)=\begin{cases}0, & \text{агар } (d,kd^{-1})>1 \text{ бўлса;}\\ \mu(\frac{k}{d})e\left(\frac{j\theta h}{d}\right), & \text{агар } (d,kd^{-1})=1 \text{ бўлса,}\end{cases}$$

бу ерда θ билан $kd^{-1}z \equiv 1(\mathrm{mod}d)$ таққосламанинг ечими белгиланган.

3.2.2-лемма ва 3.2.3-леммалар кўпчиликга маълум бўлиб, исботлари А. Ф. Лаврик [56] ва H. Rademacher [103] ишларида келтирилган.

3.3. Белгилашлар ва бирлик интервални бўлиш

$$P_1 = \exp\left(\frac{c_6\sqrt{\ln N}}{200}\right), \tag{3.2}$$

$$P_2 = P_1^{1/4}, \tag{3.3}$$

шунингдек, агар $E_{\tilde{\beta}} = 0$ ёки $E_{\tilde{\beta}} = 1$ ва $P_2 < r$ бўлса, $P = P_2$, қолган барча ҳолларда $P = P_1$ деб белгилаб оламиз.

Энди

$$Q = NP^{-1} \tag{3.4}$$

деб олиб, $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ сегментни асосий ва қўшимча интервалларга бўламиз. $a \le q \le P$ ва $(a,q)=1$ лар учун $M(q,a)$ билан $[aq^{-1}-(qQ)^{-1}, aq^{-1}+(qQ)^{-1}]$ ёпиқ интервални белгилаймиз. Тушунарлики, бу асосий интерваллар кесишмайди ва $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ га тегишли. $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ га тегишли, лекинда бирорта ҳам $M(q,a)$ га тегишли бўлмаган нуқталар α, $Q^{-1} < \alpha < 1+Q^{-1}$ тўпламини T билан белгилаймиз. Бундан кейин барча $M(q,a)$ ларнинг бирлашмасини катта ёй, T ни эса кичик ёй деб атаймиз.

Қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$S_i(X,\alpha)=\sum_{\chi_D}\overline{\chi}_D(l_i)\sum_{2<p_i\le X}\chi_D(p_i)\ln p_i e(p_i\alpha),\ \ i=1,2; \tag{3.5}$$

$$g_u^{(i)}(X,\alpha)=\sum_{2<n\le X}n_i^{u-1}e(n_i\alpha),\ \ i=1,2; \tag{3.6}$$

$$V_i(X,\alpha,q,a)=R(q)\frac{\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}e(\frac{a}{q}N_1l_i)g_1^{(i)}(X,\eta),\ \ i=1,2, \tag{3.7}$$

бу ерда $\alpha=aq^{-1}+\eta,\ \ d=(q,D),\ \ N_1=gqd^{-1}(\mathrm{mod}q)$ (N_1 — gqd^{-1} сонининг $\mathrm{mod}q$ бўйича мусбат чегирмаси, q эса $\mathrm{mod}d$ бўйича $gqd^{-1}\equiv 1(\mathrm{mod}d)$ таққосламадан аниқланади. Агар $(qd^{-1},D)=1$ бўлса, $R(q)=1$; қолган ҳолларда $R(q)=0$ деб оламиз.

Ёзувда қулайлик учун

$$S=S(X,\alpha)=S_1(X,\alpha)\cdot S_2(X,\alpha),$$

$$V=V(X,\alpha,q,a)=V_1(X,\alpha,q,a)V_2(X,\alpha,q,a) \tag{3.8}$$

деб белгилаш киритамиз. У ҳолда

$$S(X,\alpha)=\varphi^2(D)\sum_{2<n\le 2X}R(X,n)e(\alpha n), \tag{3.9}$$

бунда

$$R(X,n)=\sum_{\substack{n=p_1+p_2,2<p_1,p_2\le X\\ p_1\equiv l_1,p_2\equiv l_2(\mathrm{mod}D)}}\ln p_1\ln p_2 \tag{3.10}$$

ва

$$V = R(q)\frac{\mu^2(\frac{q}{d})}{\varphi^2(\frac{q}{d})}\sum_{2<n\le 2N} J(N,n)e(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2-n)))e(\alpha n); \qquad (3.11)$$

$$J(N,n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ 2\le n_1,n_2\le N}} 1. \qquad (3.12)$$

Тушунарлики, агар $2<n\le N$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{n}{2}<J(N,n)\ll N, \quad (J(N,n)=2(n-2)). \qquad (3.13)$$

Агар $\frac{1}{2}\le u\le 1$ бўлса, у ҳолда бўлаклаб йиғиш ёрдамида (И. Аллаков [3] даги 3.5- лемма)

$$g_u^{(i)}(X,\alpha)\ll \min(\|\alpha\|^{-u};X^u), \qquad (3.14)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $\|\alpha\|$ билан α дан унга энг яқин турган бутун сонгача бўлган масофа белгиланган.

3.4. Кичик ёйлар

Ушбу параграфда қуйидаги леммани исботлаймиз:
3.4.1-лемма. Агар N етарлича катта бўлса, у ҳолда

$$\int_T |S(N,\alpha)|^2\, d\alpha \ll N^2D^2\varphi(D)P^{-1}\ln^{12} N, \qquad (3.15)$$

$$\int_T |\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q} V(N,\alpha)|^2\, d\alpha \ll N^3P^{-2}(D\ln\ln P)^4 \qquad (3.16)$$

баҳолар ўринли.

Исботи. (3.18) нинг исботи R. C. Vaughan [105] даги (5.9) баҳонинг исботига айнан ўхшаш. Шунинг учун ҳам (3.15) ни исботлаш билан чегараланамиз. (3.8) га кўра

$$\int_T |S(N,\alpha)|^2\, d\alpha \le \max_{\alpha\in T} |S_1(N,\alpha)|^2 \int_T |S_2(N,\alpha)|^2\, d\alpha. \qquad (3.17)$$

Бу ерда

$$\int_T |S_2(N,\alpha)|^2\, d\alpha \le \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} |S_2(N,\alpha)|^2\, d\alpha = \varphi^2(D) \sum_{\substack{2<p_2\le N\\ p_2\equiv l_2\,(\mathrm{mod} D)}} \ln^2 p_2.$$

К. Прахар [70] даги 5.2.1-теоремага асосан $N\ge 2$ ва $D\le N^{1/2}$ бўлганда

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod} D)}} \ln p \ll N\varphi^{-1}(D)$$

бажарилади. Шунинг учун ҳам

$$\int_T |S_2(N,\alpha)^2|\, d\alpha \ll \varphi(D) N \ln N. \qquad (3.18)$$

$\max\limits_{\alpha\in T} |S_1(N,\alpha)|$ ни баҳолаш учун 1.1.3-натижадан фойдаланамиз. Унга кўра, агар $P<q\le NP^{-1}$, $1\le P\le N^{1/3}$, $|\alpha-aq^{-1}|\le 2P(qN)^{-1}$, $(a,q)=1$ бўлса, у ҳолда

$$S_i(N,\alpha) \ll NP^{-1/2} D(\ln N)^{11/2} \qquad (3.19)$$

ўринли бўлади. Дирихле теоремасига кўра, шундай $q\le Q$ ва a, $1\le a\le q$, $(a,q)=1$ сонлари мавжудки, $|\alpha-aq^{-1}|<(qQ)^{-1}$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса агар $q \le P$ бўлса, $\alpha \in M(q,a)$ эканлигини билдиради.

Демак, $\alpha \in T$ лар учун $q > P$ ва шунинг учун ҳам $\max\limits_{\alpha\in T} |S_1(N,\alpha)|^2$ ни баҳолашда (3.19) дан фойдаланишимиз мумкин. Энди (3.17) - (3.19) лардан (3.15) келиб чиқади.

3.5. Катта ёйлар

A. $P = P_2$ бўлган ҳол. (2.11) тенгликдан

$$\sum_{q>y} \sum_{a=1}^{q}{}' V(X,\alpha,q,a) = \sum_{2<n\le 2N} J(N,n)\sigma(y,n)e(n\alpha) \qquad (3.20)$$

келиб чиқади. Бунда

$$\sigma(y,n) = \sum_{q>y} R(q) \frac{\mu^2(\frac{q}{d})}{\varphi^2(\frac{q}{d})} \sum_{a=1}^{q}{}' e(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2)-n)). \qquad (3.21)$$

3.5.1 -лемма. Агар $\alpha \in M(q,a)$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{q\le P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} \left| \sum_{\substack{k\le P \\ k\ne q}} \sum_{h=1, h\ne a}^{k} V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha \ll \frac{P^9}{Q}(D\ln\ln P)^4$$

бўлади.

Исботи. $a \le q \le P$, $(a,q)=1$, $h \le k \le P$, $(h,k)=1$, $k \ne q$, $h \ne a$ ва $\alpha \in M(q,a)$ бўлсин. У ҳолда $|\alpha - aq^{-1}| \le (qQ)^{-1}$ ва демак,

$$\| \alpha - hk^{-1} \| = | \alpha - k^{-1}h + aq^{-1} - aq^{-1} \| \ge \| aq^{-1} - hk^{-1} \| -$$

$$-|\alpha - aq^{-1}| \geq (qk)^{-1} - (qQ)^{-1} > (qk)^{-1}.$$

Шунинг учун ҳам $n \geq 3$ бўлганда $n\varphi^{-1}(n) \ll \ln\ln n$ ва $d_1 = (k,D) \leq D$ эканлигини эътиборга олиб (3.7), (3.8) ва (3.14) дан

$$\left| \sum_{\substack{k\leq P \\ k\neq q}} \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq a}}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \right|^2 \ll \left| \sum_{\substack{k\leq P \\ k\neq q}} \frac{\mu^2(kd_1^{-1})}{\varphi^2(kd_1^{-1})} \frac{\varphi(k)}{\|\alpha - hk^{-1}\|^2} \right|^2 \ll$$

$$\ll (qD\ln\ln P)^4 \left(\sum_{k\leq P} \varphi(k) \right)^2 \ll (qDP\ln\ln P)^4$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб

$$\sum_{q\leq P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \left| \sum_{\substack{k\leq P \\ k\neq q}} \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq a}}^{k} V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha \ll$$

$$\ll \sum_{q\leq P} \sum_{a=1}^{q}{}' (PDq\ln\ln P)^4 \cdot \frac{1}{qQ} \ll P^9 Q^{-1} (D\ln\ln P)^4$$

бажарилади. Шунинг билан лемма тўлиқ исботланди.

3.5.2-лемма. (2.21) тенглик билан аниқланувчи $\sigma(P,n)$ йиғинди учун

$$\sigma(P,n) \ll D^2 P^{-1} \tau(n) (\ln\ln N)^3,$$

баҳо ўринли, бу ерда $\tau(n)$ билан n нинг натурал бўлувчилари сони белгиланган.

Бу теореманинг исботи А. Ф. Лаврик [55] нинг 7- параграфида келтирилган.

3.5.2- леммадан ва (3.20), (3.13) лардан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади.

3.5.3-лемма. Етарлича катта Nлар учун

$$\int\limits_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|\sum_{q>P}\sum_{a=1}^{q}{}' V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha \ll N^3P^{-2}(D\ln N)^4$$

баҳо ўринли.

3.5.4-лемма. Агар $a\le q\le P$, $(a,q)=1$ ва $\alpha\in M(q,a)$ бўлса, у ҳолда

$$S_i(N,\alpha)-V_i(N,\alpha,q,a)\ll N^2q^{-1}Q^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N})$$

бўлади.

Исботи. Тушунарлики

$$\left|\sum_{p_i\le N}\chi_D(p_i)\ln p_i e(\alpha p_i)-\sum_{\substack{p_i\le N\\ p_i\nmid q}}\chi_D(p_i)\ln p_i e(\alpha p_i)\right|\le \ln q. \qquad (3.22)$$

Характерларнинг ортогоналлик хоссасидан фойдаланиб (Г. Дэвенпорт [51] га қаранг), (3.22)-тенгсизликнинг чап томонидаги айирилувчи йиғиндини

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_q}\left(\sum_{j=1}^{q}\overline{\chi}_q(j)e(\frac{aj}{q})\right)\sum_{p_i\le N}(\ln p_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta) \qquad (3.23)$$

кўринишида ёза оламиз. Энди

$$A_i = A_i(\chi_D, \chi_q, q, a) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D, \chi_q} \sum_{j=1}^{q} \overline{\chi}_D(l_i) \overline{\chi}_q(j) e\left(\frac{aj}{q}\right) \qquad (3.24)$$

$$G_i = G_i(\chi_D \chi_q, N) = \sum_{p_i \le N} (\ln p_i) \chi_D(p_i) \chi_q(p_i) e(p_i \eta), \quad i = 1,2 \quad (3.25)$$

белгилашларни киритамиз. У ҳолда (3.22) — (3.25) лардан фойдаланиб, (3.5) дан

$$S_i(N, \alpha) = A_i G_i + O(\varphi(D) \ln q), \; i = 1,2 \qquad (3.26)$$

ни ҳосил қиламиз.

Аввало, G_i ни қараймиз. $\chi_D(p_i) \cdot \chi_q(p_i) = \chi_m(p_i)$, $m = qDd^{-1}$ деб оламиз, у ҳолда (3.24) тенгликдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$G_i = \sum_{p_i \le N} \chi_m(p_i) \ln p_i \; e(p_i \eta) = \sum_{n_i \le N} \chi_m(n_i) \Lambda(n_i) e(n_i \eta) -$$

$$- \sum_{\substack{p^\nu \le N \\ \nu \ge 2}} \chi_m(p_i^\nu) \ln p_i \; e(p_i^\nu \eta) = \sum_{n_i \le N} (\psi(\chi_m, n_i) -$$

$$-\psi(\chi_m, n_i - 1)) e(n_i \eta) + O(N^{1/2}).$$

Бундан 3.2.1-лемманинг *а)* қисмидан фойдаланиб

$$G_i(\chi_m, N) - \delta_\chi \sum_{2 < n_i \le N} e(n_i \eta) \ll \left| \sum_{2 < n_i \le N} (\rho_{n_i} - \rho_{n_i - 1}) e(n_i \eta) \right| + \sqrt{N} \ll$$

$$\ll \left| \sum_{2 < n_i \le N} (\rho_{n_i} - \rho_{n_i - 1}) \right| + | \sum_{2 < n_i \le N} (e(n_i \eta) - e((n_i + 1)\eta)) \times$$

$$\times \sum_{2<n_i\le N} (\rho_t - \rho_{t-1}) | + \sqrt{N} \ll | \rho_N | + \sum_{2<n_i\le N} | e(n_i\eta) -$$

$$-e((n_i+1)\eta) \| \rho_{n_i} | + \sqrt{N}$$

муносабатга эга бўламиз. Энди $| e(n_i\eta) - e((n_i+1)\eta) | \ll | \eta | \le (qQ^{-1})$ ни инобатга олиб

$$G_i(\chi_m, N) - \delta_\chi \sum_{2<n_i\le N} e(n_i\eta) \ll | \rho | + \frac{N}{qQ} \max_{n_i} | \rho_{n_i} | + \sqrt{N} \ll$$

$$\ll \frac{N}{qQ} | \rho_N | \ll \frac{1}{qQ} N^2 \exp(-c_6\sqrt{\ln N}) \qquad (3.27)$$

га эга бўламиз. Шундай қилиб, (3.26) тенглик ва (3.27) баҳодан

$$S_i(N,\alpha) = \delta_\chi A_i \sum_{2<n_i\le N} e(n_i\eta) + O\left(\frac{1}{qQ} N^2 | A_i | \exp(-c_6\sqrt{\ln N}) \right) \qquad (3.28)$$

келиб чиқади.

Энди, A_i ни қараймиз. 3.2.2-леммага кўра $\chi_D(p_i)\chi_q(p_i) = {}$ $= \chi_m(p_i) = \chi_m^\circ$ нинг бош характер (яъни $\delta_\chi = 1$) бўлиши учун барча p_i, $(p_i, m) = 1$ лар учун $\chi_D(p_i) = \overline{\chi}_q(p_i)$ ва $\chi_q(p_i) = \chi_d(p_i)$ тенглик ларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Шунинг учун ҳам $Q' = D$, $Q'' = q$, $Q = m$ деб олиб, 3.2.2 леммани қўлласак, (3.24)-тенгликдан

$$A_i = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_D, \chi_q} \sum_{j=1}^{q} \overline{\chi}_D(l_j) \overline{\chi}_q(j) e(\frac{aj}{q}) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_d} \times$$

$$\times\sum_{j=1}^{q}\chi_d(l_j)\overline{\chi}_d(j)e\left(\frac{aj}{q}\right)=\frac{\varphi(d)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{j=1\\ l_j\equiv j(\mathrm{mod}D)}}^{q}{}' e\left(\frac{a_j}{q}\right)$$

келиб чиқади. Бу ерда 3.2.3-леммадан фойдалансак,

$$A_i=R(q)\frac{\mu(qd^{-1})}{\varphi(qd^{-1})}e\left(\frac{aN_1l_i}{q}\right) \qquad (3.29)$$

ҳосил бўлади. (3.7), (3.28) ва (3.29) тенгликлардан 3.5.4-лемма келиб чиқади.

3.5.5-лемма. Қуйидаги баҳо ўринли

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{M(q,a)}\left|S(N,\alpha)-V(N,\alpha,q,a)\right|^2d\alpha\ll\frac{N^3P^3D^2}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})}.$$

Исботи. (3.7) ва (3.14) дан

$$V_i(N,\alpha,q,a)\ll\frac{1}{\varphi(qd^{-1})}\left|g_1^{(i)}(N,\eta)\right|\ll\frac{N}{\varphi(qd^{-1})}$$

баҳонинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу баҳони эътиборга олсак, 3.5.5-лемма 3.5.4-леммадан келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, 3.5.4-леммадан

$$S(N,\alpha)-V(N,\alpha,q,a)\ll(|V_1(N,\alpha,q,a)|+|V_2(N,\alpha,q,a)|)\times$$
$$\times NPq^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N})+(NPq^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N}))^2\ll$$
$$\ll N^2Pq^{-1}\varphi^{-1}(qd^{-1})\exp(-c_6\sqrt{\ln N})++N^2P^2q^{-1}\exp(-2c_6\sqrt{\ln N})$$

га эга бўламиз. Бундан эса

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} |S(N,\alpha)-V(N,\alpha,q,a)|^2 d\alpha \ll$$

$$\ll N^4P^2\exp(-2c_6\sqrt{\ln N})\cdot\sum_{q\le P}\frac{\varphi(q)}{q^3Q\varphi^2(qd^{-1})}+$$

$$+N^4P^4\exp(-4c_6\sqrt{\ln N})\sum_{q\le P}\frac{\varphi(q)}{q^5Q}\ll\frac{N^3P^3D^2}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})}$$

баҳо ҳосил бўлади.

3.5.6-лемма. Ушбу

$$\int_{-Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|S(N,\alpha)-\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q}{}'V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha \ll \frac{N^3D^2}{P}\ln^{12}N$$

баҳо ўринли.

Исботи. 3.5.4-леммадан фойдаланиб баҳоланаётган интегрални

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|S(N,\alpha)-\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha+O\left(\frac{N^3D^2\ln^4 N}{P^2}\right) \quad (3.30)$$

кўринишида ифодалаш мумкин. $M=[Q^{-1},\ 1+Q^{-1}]\setminus T$ бўлганлиги учун, (3.30)-ифодадаги $[Q^{-1},\ 1+Q^{-1}]$ бўйича интегрални M ва T бўйича олинган интеграллар йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин. Бу интегралларни мос равишда K_1 ва K_2 билан белгилаймиз. K_2 ни 3.4.1-леммадан фойдаланиб баҳолаймиз, у ҳолда

$$K_2\ll\int_T|S(N,\alpha)|^2 d\alpha+\int_T\left|\sum_{k\le P}\sum_{h=1}^{k}{}'V(N,\alpha,k,h)\right|^2 d\alpha\ll$$

$$\ll N^3 D^3 P^{-1} \ln^{12} N \tag{3.31}$$

бажарилади.

K_1 интегрални баҳолашда 3.5.1 ва 3.5.4-леммаларни қўллаймиз, натижада

$$K_1 \ll \int_M \left| S(N,\alpha) - \sum_{\substack{k \le P \\ \alpha \in M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha +$$

$$+ \int_M \left| \sum_{\substack{k \le P \\ \alpha \notin M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha \ll$$

$$\ll N^3 P^3 D^2 \exp(-2c_6 \sqrt{\ln N}) \tag{3.32}$$

га эга бўламиз. Энди (3.30)—(3.32) баҳолардан 3.5.6- лемма келиб чиқади.

$P = P_1$ ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $E_{\tilde{\beta}} = 1$ ва модули

$$r \le P_1^{1/4} = P_2 \tag{3.33}$$

шартни қаноатлантирувчи махсус ҳақиқий (нол $\tilde{\beta}$) характер $\tilde{\chi}_r$ мавжуд.

Фараз этайлик, $\tau(\chi_k)$ Гаусс йиғиндиси, яъни

$$\tau(\chi_k) = \sum_{n=1}^{k} \chi_k(n) e\left(\frac{n}{k}\right) \tag{3.34}$$

бўлсин. Дирихле L функциясининг ноллари тўғрисидаги Пейдж ва Зигель теоремаларидан (Г. Дэвенпорт [51] га қаранг)

$$1 - c_7 \ln^{-1/2} N < \beta < 1 - c(\varepsilon) r^{-\varepsilon},$$

яъни $r \gg (\ln N)^{1/2\varepsilon}$ эканлиги келиб чиқади. $\varepsilon = \varepsilon_1 = (2A+6)^{-1}$ деб олсак, у ҳолда

$$r > (\ln N)^{A+2} \tag{3.35}$$

ҳосил бўлади. Маълумки, ҳақиқий примитив характернинг етакчи модули фақат ва фақат 4, 8 ва $p > 3$ — туб сонга тенг бўлиши мумкин. $m = qDd^{-1}$, $d = (q, D)$, $D = p^{\nu}$, $p > 2$, $D \ll \ln^{A} X$, $(qd^{-1}, D) = 1$, qd^{-1} — квадратсиз бўлгани учун бу ердан $r \mid m$ муносабатнинг $r \mid qd^{-1}$ га, яъни $r \mid q$ га тенг кучли эканлиги келиб чиқади.

Энди ушбу леммани исботлаймиз.

3.5.7-лемма. *a)* агар $r \nmid m$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{q \le P} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} \int\limits_{M(q,a)} \left| S(N,\alpha) - V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha \ll \frac{N^3 P^3 D^2}{\exp(2c_6 \sqrt{\ln N})}$$

бўлади.

b) агарда $r \mid m$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{q \le P} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} \int\limits_{M(q,a)} \left| S(N,\alpha) - \prod_{i=1}^{2} (V_i - \tilde{V}_i) \right|^2 d\alpha \ll \frac{N^3 P^3 \ln P}{\exp(2c_6 \sqrt{\ln N})}$$

бажарилади, бунда

$$\tilde{V}_i = A_i(\chi_q, \chi_D, q, a) g_{\beta}^{(i)}(N, \eta). \tag{3.36}$$

Лемманинг исботи 3.5.5-лемманинг исботи билан деярли бир хил, фақат a) ни исботлашда 3.2.1- лемманинг a) қисмидан, b) ни исботлашда эса 3.2.1-лемманинг b) қисмидан фойдаланиш керак.

3.5.8-лемма. Агар примитив характер $\chi^*(\mathrm{mod} r)$ билан индуцирланган бўлса, у ҳолда $r\,|\,k$ ва

$$\tau(\chi_k)=\mu\left(\frac{k}{r}\right)\chi_r^*\left(\frac{k}{r}\right)\tau(\chi_r^*), \qquad |\tau(\chi_r^*)|^2=r$$

ўринли бўлади.

Бу H. L. Montgomery, R. C. Vaughan [100] даги 5.2-лемма.

3.5.9-лемма. Агар $m=qDd^{-1}$ модул бўйича махсус характер мавжуд бўлса, у ҳолда

$$A_i(\chi_D,\chi_q,q,a)=\frac{1}{\varphi(q)}\tilde{\chi}_m(al_i){\sum_{h=1}^{q}}'\tilde{\chi}_m(h)e\left(\frac{h}{q}\right)$$

тенглик бажарилади.

Бу лемма (3.24) тенгликдан ва Дирихле характерларининг хоссаларидан бевосита келиб чиқади.

Бундан кейин $a\le q\le P$, $(a,q)=1$, $r\,|\,m$, $\alpha\in M(q,a)$ бажарилса, $W(N,\alpha)=\tilde{V}_1\tilde{V}_2-V_1\tilde{V}_2+\tilde{V}_1V_2$; акс ҳолда $W(N,\alpha)=0$ деб белгилаб оламиз.

3.5.10-лемма. Ушбу баҳо ўринли

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|S-\sum_{q=1}^{\infty}{\sum_{a=1}^{q}}'V(N,\alpha,q,a)-W(N,\alpha)\right|^2 d\alpha\ll\frac{N^3D^3}{P}\ln^{12}N.$$

Исботи. 3.5.3-леммага кўра баҳоланаётган интегрални

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| S - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{q}{}' V(N,\alpha,q,a) - W(N,\alpha) \right|^2 d\alpha +$$

$$+O\left(N^3 P^{-2} (D \ln N)^4 \right) \qquad (3.37)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (3.37)даги $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ бўйича олинган интегрални M ва T лар бўйича олинган интеграллар йиғиндиси кўринишида ёзиб оламиз. У ҳолда, агар $\alpha \in T$ бўлса, $W(N,\alpha)=0$ эканлигини инобатга олиб, 3.4.1, 3.5.1 ва 3.5.7-леммаларни кетма-кет қўлласак исботланиши талаб этилаётган баҳо келиб чиқади.

3.6. $W(N,\alpha)$ функцияни текшириш

$$D(N,h) = \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} W(N,\alpha) e(-h\alpha) \qquad (3.38)$$

деб белгилаб оламиз ва қуйидаги леммани исботлаймиз.

3.6.1-лемма. Ушбу баҳо ўринли

$$\sum_{2<n\le 2N} \left| \varphi^2(D) R(N,n) - J(N,n)\sigma(n) - D(N,n) \right|^2 \ll \frac{N^3 D^3}{P} \ln^{12} N,$$

бу ерда $R(N,n)$, $J(N,n)$ ва $\sigma(n)=\sigma(0,n)$ лар мос равишда (3.10), (3.12) ва (3.21) тенгликлар билан аниқланади.

Исботи. Қулайлик учун

$$F(N,h) = \begin{cases} \varphi^2(D)R(N,h) - J(N,h) - D(N,h), & 0 < h \le 2N \text{ бўлса;} \\ D(N,h), & \text{агар аксинча бўлса} \end{cases}$$

белгилашни киритамиз. У ҳолда (3.38), (3.20) ва (3.9) тенгликларга асосан $F(N,h)$ функция

$$S-\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q}V(N,\alpha,q,a)-W(N,\alpha)$$

функциянинг Фурье коэффициентларидан иборат бўлади. Шунинг учун ҳам унга Бессел тенгсизлигини қўллаб, кейин эса 3.5.10- леммадан фойдалансак 3.6.1-лемма келиб чиқади.

Энди $r\mid m$ ва

$$I_1^{(i)}(n,q,D,a)=\int\limits_{M(q,a)}V_i\tilde{V}_i e(-n\alpha)d\alpha,\ i=1,2; \tag{3.39}$$

$$I_2(n,q,D,a)=\int\limits_{M(q,a)}\tilde{V}\cdot e(-n\alpha)d\alpha,\ \tilde{V}=\tilde{V}_1\cdot\tilde{V}_2; \tag{3.40}$$

$$B_1^{(i)}(n,q,D,a)=\mu\left(\frac{q}{d}\right)\varphi^{-1}\left(\frac{q}{d}\right)e\left(\frac{a}{q}\left(N_1l_i-n\right)\right)A_i,\ i=1,2; \tag{3.41}$$

$$B_2(n,q,D,a)=A_1\cdot A_2\cdot e\left(-\frac{a}{q}n\right) \tag{3.42}$$

бўлсин, у ҳолда

$$I_1^{(i)}=B_1^{(i)}\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}g_1^{(i)}(N,\eta)g_\beta^{(i)}(N,\eta)e(-m\eta)d\eta,\ i=1,2\,, \tag{3.43}$$

$$I_2=B_2\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}g_\beta^{(1)}(N,\eta)g_\beta^{(2)}(N,\eta)e(-n\eta)d\eta \tag{3.44}$$

бўлади.

Энди агар $q \le P$, $r \mid qd^{-1}$ ва $k = qr^{-1}$ бўлса, (3.41) тенглик ва 3.5.9-леммадан

$$\sum_{a=1}^{q}{}' B_1^{(i)}(n,q,D,a) \ll \frac{r^{1/2}}{\varphi^2(q)} \varphi(d)\varphi(r)\tilde{\chi}_r(k)^2 \mid C_k(N_1 l_i - n) \mid \mu^2(k) \quad (3.45)$$

га эга бўламиз. Шунингдек (3.42) тенглик ва 3.5.9-леммадан

$$\sum_{a=1}^{q}{}' B_2(n,q,D,a) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \tilde{\chi}_r(l_1 l_2)\mu^2(k)\tilde{\chi}_r^2(k)\tau(\tilde{\chi}_r)^2 C_q(-n) \quad (3.46)$$

келиб чиқади. Бунда

$$C_q(m) = \sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{am}{q}\right) = \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)}\varphi(q), \qquad q_1 = \frac{q}{(q,|m|)}. \quad (3.47)$$

3.6.2-лемма. Агар $L_i = \mid N_1 l_i - n \mid$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k \le Pr^{-1}} \mu^2(k)\varphi^{-2}(k) \mid C_k(N_1 l_i - n) \mid \ll L_i \varphi^{-1}(L_i)$$

бажарилади.

Бу лемма моҳияти жиҳатидан R. C. Vaughan [105] нинг 9.4-леммасидир.

3.6.3-лемма. Агар $r \mid m$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{q \le P} \sum_{a=1}^{q}{}' I_1^{(i)}(n,q,D,a) \ll N r^{1/2} \varphi(d) L_i (\varphi(r)\varphi(L_i))^{-1}$$

бўлади.

Исботи. (3.43) да Щварц тенгсизлигини қўллаб, кейин эса 3.6.2-леммадан фойдалансак 3.6.3-лемма келиб чиқади.

Энди

$$J_{\tilde{\beta}}(N,n)=\int_{-1/2}^{1/2} g_{\tilde{\beta}}^{(1)} g_{\tilde{\beta}}^{(2)} e(-m\eta)d\eta=\sum_{\substack{n=n_1+n_2 \\ 2\le n_1,n_2\le N}} (n_1n_2)^{\tilde{\beta}-1} \qquad (3.48)$$

бўлсин, у ҳолда

$$\int_{-1/qQ}^{1/qQ} g_{\tilde{\beta}}^{(1)} g_{\tilde{\beta}}^{(2)} e(-m\eta)d\eta = J_{\tilde{\beta}}(N,n)+O\left(\frac{qN}{P}\right) \qquad (3.49)$$

бўлади. Бундан кейин

$$G(N,n)=\sum_{q\le P,r|qd^{-1}} \sum_{a=1}^{q}{}' B_2(n,q,D,a). \qquad (3.50)$$

белгилашдан фойдаланамиз.

3.6.4-лемма. Агар $n\le 2N$ бўлса,

$$\sum_{q\le P,r|m} \sum_{a=1}^{q} I_2(n,q,D,a)=J_{\tilde{\beta}}(N,n)G(N,n)+$$

$$+O(NrP^{-1}\tau(n)(\ln\ln N)^2 \ln^{1/2} N)$$

бажарилади.

Исботи. (3.44) ва (3.49) тенгликларга кўра (3.46), (3.47), (3.50) лардан

$$\sum_{q\le P,r|qd^{-1}} \sum_{a=1}^{q}{}' I_2(n,q,D,a)-J_{\tilde{\beta}}(N.n)G(N,n) \ll \frac{N}{P}\frac{r^2}{\varphi(r)}\sum\nolimits_1 \qquad (3.51)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k\le Pr^{-1},(k,r)=1} \mu^2(k)\mu^2\left(\frac{k}{(k,n)}\right)\frac{k}{\varphi(k)}\varphi^{-1}(\frac{k}{(k,n)}) \ll$$

$$\ll (\ln\ln N)^3\tau(n)\ln^{1/2} N. \qquad (3.52)$$

$r\varphi^{-1}(r) \ll \ln\ln N$ бўлгани учун, (3.51) ва (3.52) лардан исботланиши талаб этилаётган тенглик келиб чиқади.

3.6.5-лемма. Агар $n \le 2N$ бўлса, у ҳолда

$$D(N,n) - J_{\tilde\beta}(N,n)G(N,n) \ll NP^{-1}r\tau(n)(\ln\ln N)^4\ln^{1/2} N +$$
$$+Nr^{-1/2}\varphi(d)(\ln\ln N)^2$$

муносабат ўринли.

Исботи. (3.38) — (3.40) ларга асосан

$$D(N,n) = \sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'(I_2 - I_1^{(1)} - I_1^{(2)}).$$

Бунга 3.6.3-лемма ва 3.6.4-леммаларни қўллаб ва $n \ge 3$ бўлганда $n\varphi^{-1}(n) \ll \ln\ln n$ бажарилишини эътиборга олсак,

$$D(N.n) - J_{\tilde\beta}(N,n)G(N,n) \ll NP^{-1}\tau(n)r(\ln\ln N)^4\ln^{1/2} N +$$
$$+Nr^{1/2}\varphi(d)\varphi^{-1}(r)\ln\ln N$$

ҳосил бўлади.

Агар, энди бу ерда $\varphi(r) \gg r(\ln\ln r)^{-1}$, $P \ge r > \ln^{A+2} N$ эканлигини эътиборга олсак, 3.6.5-лемма келиб чиқади.

3.7. 3.1.1-теореманинг исботи

А. $P = P_2$ бўлган ҳолни қараймиз. (3.9) ва (3.20) ($y = 0$ бўлганда) лардан Парсевал айнияти ва 3.5.6-леммани қўлласак

$$\sum_{n\le 2N}\left(\varphi^2(D)R(N,n)-J(N,n)\sigma(n)\right)^2 \ll (ND)^2P^{-1}\varphi(D)\ln^{12}N \quad (3.53)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда n жуфт сони учун

$$\sigma(n)=\sigma(0,n)=D\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\varphi^{-2}(s)\sum_{t\setminus n,(t,D)=1}\mu^2(t)\varphi^{-1}(t)=$$

$$=\lambda D\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{p\setminus D,p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{p\setminus n,p\not\setminus D,p>2}\frac{p-1}{p-2}. \quad (3.54)$$

(3.54) да D жуфт бўлса, $\lambda = 1$ ва агарда D тоқ сон бўлса, $\lambda = 2$. Бу ердан

$$\sigma(n)\gg D. \quad (3.55)$$

(3.53) дан $n\le 2N$ шартни қаноатлантирувчи n лардан кўпи билан

$$c_8NP^{-1/3}\varphi(D)\ln^4 N \quad (3.56)$$

тасидан ташқари барчаси учун

$$R(N,n)=\frac{J(N,n)\sigma(n)}{\varphi^2(D)}+O\left(\frac{N(\ln^4 N)\ln\ln D}{\varphi(D)\exp(c_6\sqrt{\ln N}/600)}\right) \quad (3.57)$$

формуланинг ўринли эканлиги келиб чиқади. (3.55) ва (3.13) лардан $N/2<n\le N$ лар учун

$$J(N,n)\sigma(n) \gg DN \tag{3.58}$$

баҳони ҳосил қиламиз. Шунинг учун ҳам, (3.57) дан

$$R(N,n) \gg ND\varphi^{-2}(D)\left(1 - P^{-1/3}\ln^4 N\right) \gg \frac{N}{\varphi(D)} \tag{3.59}$$

муносабатга эга бўламиз. $X = N$ деб олиб, (3.56) ва (3.59) лардан 3.1.1-теоремага эга бўламиз.

(3.59) дан $N/2 < n \le N$ лар учун

$$R(n) \gg n(\varphi(D)\ln^2 n)^{-1}\left(1 - (\ln n)^2 \exp(-c_9\sqrt{\ln n})\right) \tag{3.60}$$

келиб чиқади.

Б. Энди $P = P_1$ бўлган ҳолни қараймиз. (3.50) ва (3.46) тенгликлардан

$$|G(N,n)| \le \tilde{\sigma}(n) + O(P^{-1}rd\tau(n)(\ln\ln N)^4), \tag{3.61}$$

бунда

$$\tilde{\sigma}(n) = \prod_{\substack{p \nmid rd \\ p \nmid n}} \frac{1}{p-1} \prod_{p \nmid nrd} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{p \nmid nrd} \frac{p}{p-1} \le \sigma(n).$$

$J_{\tilde{\beta}}(N,n) \ll N^{\tilde{\beta}}$ ((3.48) га қаранг) баҳони эътиборга олиб, 3.6.5-лемма ва (3.61) тенгсизликдан, жуфт $n \le 2N$ лар учун

$$|D(N,n)| \le J_{\tilde{\beta}}(N,n)\sigma(n) + O(\frac{N}{P}dr\tau(n)(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N) +$$

$$+O(Nr^{-1/2}\varphi(D)(\ln\ln N)^2) \tag{3.62}$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди ушбу леммани исботлаймиз.

3.7.1-лемма. Шундай бир мусбат ўзгармас c_{10} сони мавжудки,

$$J(N,n)-J_{\tilde{\beta}}(N,n)>c_{10}r^{-\varepsilon_1}J(N,n)$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда $\varepsilon_1=(2A+6)^{-1}$.

Исботи. Зигель теоремасига кўра $1/2\le\tilde{\beta}<1-c(\varepsilon_1)r^{-\varepsilon_1}$. Шунинг учун ҳам $n_1n_2>1$ бўлганда

$$(1-(n_1n_2)^{\tilde{\beta}-1})>1-\exp(-c(\varepsilon_1)r^{-\varepsilon_1}\ln(n_1n_2))>c_{10}r^{-\varepsilon_1}$$

бўлади.

Энди бу охирги баҳодан фойдалансак, (3.58) ва (3.12) лардан исботланиши керак бўлган тенгсизлик келиб чиқади.

(3.62) тенгсизлик ва 3.7.1-леммадан, агар $n\le 2N$ ва $n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$ бўлса, у ҳолда

$$\left|J(N,n)\sigma(n)+D(N,n)\right|>c_{10}r^{-\varepsilon_1}J(N,n)\sigma(n)+$$

$$+O\left(\frac{N}{P}r\cdot d\cdot\tau(n)(\ln\ln N)^4\ln^{1/2}N\right)+O\left(\frac{N}{r^{1/2}}\varphi(D)(\ln\ln N)^2\right)\quad(3.63)$$

га эга бўламиз. 3.6.1-леммага кўра $n\le 2N$ шартни қаноатлантирувчи n лардан кўпи билан

$$c_{11}\varphi(D)^{-1}NP^{-1/3}\ln^{12}N\quad(3.64)$$

тасидан бошқа қолган барча n лар учун

$$\varphi^2(D)R(N,n)-J(N,n)\sigma(n)-D(N,n)\ll NP^{-1/3}D\varphi(D) \qquad (3.65)$$

баҳо ўринли.

3.7.2-лемма. $N/2<n\le N$ оралиқдаги жуфт n сонларининг кўпи билан $c_{12}N\varphi^{-1}(D)P^{-1/3}\ln N$ тасидан ташқари барчаси учун

$$|J(N,n)\sigma(n)+D(N,n)|\gg NP^{-\varepsilon_1/4}D$$

баҳо ўринли.

Исботи. Маълумки,

$$\sum_{n\le N}\tau(n)\ll N\ln N.$$

Бундан $n\le N$ шартни қаноатлантирувчи n ларнинг кўпи билан $c_{12}NP^{-1/3}\varphi^{-1}(D)\ln N$ тасидан бошқа қолган барчаси учун $\tau(n)\ll P^{1/3}\varphi(D)$ баҳонинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам (3.63) га асосан

$$|J(N,n)\sigma(n)+D(n,n)|>c_{10}J(N,n)\sigma(n)+O(Nr^{-1}P^{-5/12}\varphi(D)\times$$
$$\times d\cdot(\ln\ln N)^4\ln^{1/2}N)+O(Nr^{-1/2}(\ln\ln N)^2\varphi(d))\gg r^{-\varepsilon_1}ND\times$$
$$\times\left\{1-c_9(\ln\ln N)^2(\ln N)^{-(A+2)(\frac{1}{2}-\varepsilon_1)}\right\}\gg r^{-\varepsilon_1}ND$$

бажарилади. $r\le P$ бўлгани учун бу ердан 3.7.2-лемма келиб чиқади. $R(N,n)$ нинг манфий эмас эканлигидан

$$R(N,n)\ge\frac{1}{\varphi^2(D)}\{|J(N,n)\sigma(n)+D(N,n)|-|\varphi^2(D)R(N,n)-$$
$$-J(N,n)\sigma(n)-D(N,n)|\}$$

деб ёза оламиз.

Энди, $P = P_1$ эканлигини инобатга олиб (3.63) тенгсизлик ва 3.7.2-леммадан

$$R(N,n) > NDP^{-\frac{q}{4}}\left(c_{14} - c_{15}\varphi(D)P^{-\frac{1}{3}+\frac{q}{4}}\right) > \frac{ND}{P^{1/20}}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу охирги муносабатдан

$$R(n) > \frac{n\exp(-c_{16}\sqrt{\ln n})}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1 - \frac{\ln^A n}{\exp(3c_{16}\sqrt{\ln n})}\right) \tag{3.66}$$

тенгсизликка эга бўламиз. (3.56) ва (3.55) ларни эътиборга олсак, (3.60) ва (3.66) лардан 3.1.1-теорема келиб чиқади.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, юқорида 3.1.1-теоремани исботлашда қўлланилган усул шунга ўхшаш натижаларни берилган n сонини $n = a_1p_1 + a_2p_2$, $n = p_1 + m^k$ ва $n = p_1 + p^k$ кўринишларда ифодалашлар сони учун ҳам исботлаш имконини беради ([17,32,39, 41,68,69] ларга қаранг). Бу ерда a_1 ва a_2 лар бутун сонлар, p_1 ва p_2 лар туб сонлар, m ва k лар натурал сонлар.

4-БОБ

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ТУБ СОНЛАРДА ЕЧИМГА ЭГА БЎЛИШЛИК ШАРТЛАРИ ТЎҒРИСИДА

4.1. Чизиқли тенгламалар системасини туб сонларда ечиш

Ушбу

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{im}p_m;\ i = 1,2,\ldots,s, \tag{4.1}$$

чизиқли тенгламалар системасини қараймиз. Бунда $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — натурал сонлар, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ — бутун коэффициентлар, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — туб сонлар.

$m \geq 2s+1$ бўлганда, Ву Фанг [110] бу системанинг биргаликдалик масаласини, баъзи бир қўшимча шартларда, қараб унинг ечимлари сони учун асимптотик формула олди. $s < m \leq 2s$ бўлганда эса ҳозиргача нафақат асимптотик формула олинган эмас, балки $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ихтиёрий натурал сонлар бўлганда (4.1) системанинг туб сонларда ечимининг мавжуд эканлиги ҳам исботланмаган.

Яқинда M. C. Liu, K. M. Tsang [100] лар (4.1) системанинг $s=2$, $m=3$ бўлгандаги хусусий ҳолини қараб, бу система ечимга эга бўлмаган жуфтлик (b_1, b_2), $1 \leq b_1,\ b_2 \leq X$ лар сонини баҳолаб, етарлича катта X лар учун, уларнинг сони $X^{2-\varepsilon}$ дан кўп эмас эканлигини исботлади. Бу ерда $\varepsilon > 0$ — эффектив ҳисоблаш мумкин бўлган етарлича кичик ўзгармас сон.

(4.1) да $s = n$, $m = n + 1$ деб олсак, n та тенгламадан тузилган $n + 1$ та номаълумли

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{i,n+1}p_{n+1}, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{4.2}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Қулайлик учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_n} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \det(A_{i_1 i_2 \ldots i_n}),$$

бу ерда $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_n \le n+1$; $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} b}$ — бу $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ матрицадаги i_n устун элементларини (4.2)-системадаги озод ҳадлар устуни b_i билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган $A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} b}$ матрицанинг детерминати. Шунинг билан бирга $\Delta_i = \Delta_{12 \ldots i-1, i+1, \ldots n+1}$ ва Δ_{ik}^b (бу Δ_i даги k — устун элементларини (4.2) системадаги озод ҳадлар устуни b_i билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган детерминант) белгилашлардан ҳам фойдаланамиз.

(4.2) системани текширишда тривиаллик ва хосликдан қутилиш учун унинг коэффициентлари a_{ij} дан

$$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n+1} \ne 0, \ (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n+1}) = 1. \tag{4.3}$$

шартни қаноатлантиришини талаб қиламиз.

Одатда (4.1) системанинг биргаликда бўлиши қуйидаги икки шартга боғлиқ (M. C. Liu, K. M. Tsang [100] ва Хуа-Ло-Ген [76] нинг 5- боби):

а). Ихтиёрий p туб сони учун

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{i,n+1}l_{n+1} \equiv b_i (\mathrm{mod}\, p), \ i = 1,2,\ldots,n \tag{4.4}$$

таққосламалар системасини қаноатлантирувчи $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$, $1 \le l_1, l_2, \ldots, l_{n+1} \le p - 1$ бутун сонлари мавжуд.

b). Бирор $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ мусбат ҳақиқий сонлари учун

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{i,n+1}y_{n+1} = b_i, \quad i = 1,2,...,n \tag{4.5}$$

тенглик ўринли.

Бундан кейин биз фақат шу икки (конгруент ечимга эга бўлишлик ва мусбат ечимга эга бўлишлик шартлари деб аталувчи) шартларни қаноатлантирувчи $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ларни қараймиз. X етарлича катта бўлганда $U(X)$ орқали a), b) шартларни қаноатлантирувчи $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $1 \le b_1, b_2, ..., b_n \le X$ векторлар тўпламини белгилаймиз ва $B = \max\{3 | a_{ij} |\}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$ деб оламиз.

Ушбу бобда M. C. Liu, K. M. Tsang [100,101] даги ғояларини такомиллаштириб $U(X)$ нинг етарлича кўп элементларга эга эканлигини ва (4.2) система ечимга эга бўлмаган $\vec{b} \in U(X)$ лар сони $E(X)$ эса $\mathrm{card}U(X)$ нинг озгина қисмини ташкил этишини кўрсатамиз. Бу ерда қуйидаги теореманинг ўринли эканлигини исботлаймиз (И. Аллаков [2, 19—22] га қаранг).

4.1.1-теорема. Агар бирор ҳақиқий мусбат $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ сонлари учун

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{i,n+1}y_{n+1} > 0, \quad i = 1,2,...,n \tag{4.6}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда

$$\mathrm{card}U(X) \gg X^n \left(B^{2(n-1)^2(2n-1)+n} \ln\ln B\right)^{-1}$$

баҳо ўринли.

4.1.2-теорема. Шундай бир эффектив ҳисоблаш мумкин бўлган A (етарлича катта) ва δ (етарлича кичик) ўзгармас сонлари мавжудки $X \geq B^A$ бўлганда

$$E(X) < X^{n-\delta}$$

бажарилади.

Бу теоремалар M. C. Liu, K. M. Tsang [100] натижаларининг барча $n \geq 2$ лар учун умумлаштирилганидир. A ва δ ўзгармаслар, шунингдек $\ll$ символдаги ўзгармаснинг қиймати n га боғлиқ эмас. 4.1.2-теоремадаги баҳодан $n=2$ бўлганда H. L. Montgomery ва R. C. Vaughan [102] даги машҳур баҳоси

$$E_1(X) = \text{card}\{n \mid n \neq p_1 + p_2,\ \ n \leq X,\ \ n - \text{жуфт сон}\} < X^{1-\varepsilon}$$

ни келтириб чиқариш мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, 4.1.1 ва 4.1.2-теоремалардаги сингари натижалар Б. Бабаназаров, М. И. Тўлаганова, А. С. Файнлейб [40] лар томонидан ҳам олинган. Лекин [40] да бу ердагидан бошқа метод, бутун сонли панжараларга асосланган метод [72] дан фойдаланилган.

Ушбу бобнинг 4.2-параграфи 4.1.1-теоремани исботлашга, қолган параграфлари эса 4.1.2- теореманинг исботига бағишланган.

4.2. Чизиқли Диофант тенгламалар системасининг туб сонларда ечимга эга бўлиш шартлари тўғрисида

Фараз этайлик a_{ij} ($i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n+1}$) лар 4.1.1-теореманинг шартини қаноатлантирсин. Ихтиёрий $q \geq 1$ бутун сони учун

$$\sum\nolimits_{(q)} \tag{4.7}$$

орқали

$$1\le l_j\le q,\ (l_j,q)=1,\ \sum_{1\le j\le n+1} a_{ij}l_j\equiv b_i(\mathrm{mod}q),\ \ i=\overline{1,n},$$

шартларни қаноатлантирувчи барча $l_1,l_2,\ldots,l_{n+1}$ лар бўйича олинган йиғиндини белгилаймиз ва

$$N(q)=\sum\nolimits_{(q)}1 \qquad (4.8)$$

деб белгилаб оламиз.

Қуйидаги лемма бизга (4.4) шартнинг бажарилишини текшириш мезонини беради.

4.2.1-лемма. Агар p сони $p>n+1$ шартни қаноатлантирувчи туб сон бўлса, $N(p)=0$ бўлиши учун шундай бир i, $1\le i\le n+1$, мавжуд бўлиб, $j_1,j_2,\ldots,j_n\in\{1,2,\ldots,n+1,b\}\setminus\{i\}$ бўлганда $\Delta_{j_1j_2\cdots j_n}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$нинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. $n=2$ бўлганда бу M. C. Liu, K. M. Tsang [100] даги 3.1-тасдиқдан иборат. $n>2$ бўлган ҳолни қараймиз. (4.3) шартга асосан умумийликни чегараламаган ҳолда $\Delta_{n+1}\not\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ дея оламиз. Бу ерда $p>n+1$ - фиксирланган туб сон.

Қулайлик учун, аввало, $n=3$ ҳолни қараймиз ва $N(p)=0$ бўлиши учун шундай бир i, $1\le i\le 4$ мавжуд бўлиб $j_1,j_2,j_3\in$ $\in\{1,2,3,4,b\}\setminus\{i\}$ ва $p>4$ бўлганда $\Delta_{j_1j_2j_3}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ нинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини кўрсатамиз. Бошқача қилиб айтганда фақат ва фақат

$$i=1;\ \ j_1,j_2,j_3\in\{2,3,4,b\},\ \ \Delta_{234}\equiv\Delta_{23b}\equiv\Delta_{24b}\equiv\Delta_{34b}\equiv 0(\mathrm{mod}p),$$

$$i=2;\ \ j_1,j_2,j_3\in\{1,3,4,b\},\ \ \Delta_{134}\equiv\Delta_{13b}\equiv\Delta_{14b}\equiv\Delta_{34b}\equiv 0(\mathrm{mod}p),$$

$$i=3;\ \ j_1,j_2,j_3\in\{1,2,4,b\},\ \ \Delta_{124}\equiv\Delta_{12b}\equiv\Delta_{14b}\equiv\Delta_{24b}\equiv 0(\mathrm{mod}p),$$

$$i=4;\quad j_1,j_2,j_3\in\{1,2,3,b\},\quad \Delta_{123}\equiv\Delta_{12b}\equiv\Delta_{13b}\equiv\Delta_{23b}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$$

шартлардан ҳеч бўлмаса бирортаси бажарилганда, $N(p)=0$ эканлигини кўрсатамиз.

(4.3) шартга кўра $\Delta_{123}\not\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ деб қарай оламиз. Бу ерда $p\geq 5$ — фиксирланган туб сон.

$$\sum_{1\leq j\leq 4} a_{ij}l_j\equiv b_i(\mathrm{mod}p),\quad i=1,2,3,$$

таққосламалар системаси

$$\Delta_{123}l_1\equiv\Delta_{b23}-\Delta_{423}l_4\equiv\Delta_{23b}-\Delta_{234}l_4(\mathrm{mod}p)$$

$$\Delta_{123}l_2\equiv\Delta_{1b3}-\Delta_{143}l_4\equiv-\Delta_{13b}+\Delta_{134}l_4(\mathrm{mod}p)$$

$$\Delta_{123}l_3\equiv\Delta_{12b}-\Delta_{124}l_4\equiv\Delta_{12b}-\Delta_{124}l_4(\mathrm{mod}p)$$

системага эквивалент. Бу ерда $\Delta_{123}\equiv-\Delta_{231}(\mathrm{mod}p)$ бўлгани учун юқоридаги таққосламалар системасини қуйидагича ёзиш мумкин

$$\Delta_{213}l_1=\Delta_{234}l_4-\Delta_{23b}(\mathrm{mod}p),$$

$$\Delta_{123}l_2=\Delta_{134}l_4-\Delta_{13b}(\mathrm{mod}p),$$

$$\Delta_{213}l_3=\Delta_{124}l_4-\Delta_{12b}(\mathrm{mod}p).$$

Шунинг учун ҳам бу ердан, агар

$$P(z)=(\Delta_{234}z-\Delta_{23b})(\Delta_{134}z-\Delta_{13b})(\Delta_{123}z-\Delta_{12b})z$$

кўпҳад $Z_p[z]$ бутунлик соҳасидаги нол кўпҳад бўлсагина, $N(p)=0$ бўлиши келиб чиқади. $p\geq 5$ ва $\deg P(z)=4$ бўлгани сабабли $P(z)$ нинг нол кўпҳад бўлиши учун унинг барча коэффициентларининг p га бўлиниши керак. Бунинг учун $\Delta_{234}\equiv\Delta_{23b}\equiv 0(\bmod p)$ ёки $\Delta_{134}\equiv\Delta_{13b}\equiv 0(\bmod p)$ ёки $\Delta_{124}\equiv\Delta_{12b}\equiv$ $\equiv 0(\bmod p)$ бажарилиши керак бўлади.

Фараз қилайлик, $\Delta_{234}\equiv\Delta_{23b}\equiv 0(\bmod p)$ бажарилсин. Қолган ҳоллар шунга ўхшаш қаралади. Бизнинг фаразимизга кўра $\Delta_{123}\not\equiv 0(\bmod p)$ бўлгани учун $p\nmid(a_{1i},a_{2i},a_{3i})$, $i=1,2,3$ бўлади. Шунинг учун ҳам $\Delta_{234}\equiv 0(\bmod p)$ ва $\Delta_{23b}\equiv 0(\bmod p)$ лардан $\Delta_{24b}\equiv\Delta_{34b}\equiv 0(\bmod p)$ келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам

$$\Delta_{234}=a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}\equiv 0(\bmod p),$$

$$\Delta_{23b}=b_1A_{14}+b_2A_{24}+b_3A_{34}\equiv 0(\bmod p),$$

$$\Delta_{24b}=b_1(a_{22}a_{34}-a_{24}a_{32})-b_2(a_{12}a_{34}-a_{14}a_{32})+b_3(a_{12}a_{24}-a_{14}a_{22}),$$

бунда A_{i4} билан a_{i4} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси белгиланган. Биз A_{14},A_{24},A_{34} лардан бирортаси нолдан фарқли дея оламиз, акс ҳолда $\Delta_{123}=0$ бўлар эди.

Фараз қилайлик, $A_{14}\neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$a_{14}\equiv(-a_{24}A_{24}-a_{34}A_{34})A_{14}^{-1}(\bmod p),\;\; b_1\equiv(-b_2A_{24}-b_3A_{34})A_{14}^{-1}(\bmod p)$$

ва

$$\Delta_{24b} \equiv -b_2 a_{34}(a_{22}A_{24} + a_{12}A_{14} + a_{32}A_{34}) +$$

$$+b_3 a_{24}(a_{32}A_{34} + a_{12}A_{14} + a_{22}A_{24}) \equiv 0(\text{mod}p).$$

Шунга ўхшаш

$$\Delta_{34b} \equiv b_1(a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33}) - b_2(a_{13}a_{34} - a_{14}a_{33}) +$$

$$+b_3(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) \equiv -b_2 a_{34}(a_{23}A_{24} + a_{13}A_{14} + a_{33}A_{34}) +$$

$$+b_3 a_{24}(a_{13}A_{14} + a_{33}A_{34} + a_{23}A_{24}) \equiv 0(\text{mod}p).$$

$\Delta_{123} \not\equiv 0(\text{mod}p)$ бўлгани ва демак, $p \nmid (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ бўлгани учун $\Delta_{ij_1j_2} \equiv \Delta_{ik_1k_2} \equiv 0(\text{mod}p)$ дан

$$\Delta_{j_1k_1k_2} \equiv \Delta_{j_1j_2k_1} \equiv \Delta_{j_2k_1k_2} \equiv \Delta_{j_1j_2k_2} \equiv 0(\text{mod}p) \qquad (4.9)$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, $n = 3$ бўлган ҳолда лемма исботланди.

Энди $n > 3$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\sum_{1 \le j \le n+1} a_{ij} l_j \equiv b_i(\text{mod}p), \;\; i = 1,2,...,n$$

таққосламалар системаси

$$\Delta_{n+1} l_1 \equiv \Delta^b_{n+1,1} - \Delta^{n+1}_{n+1,1} l_{n+1}(\text{mod}p),$$

$$\Delta_{n+1} l_2 \equiv \Delta^b_{n+1,2} - \Delta^{n+1}_{n+1,2} l_{n+1}(\text{mod}p),$$

....

$$\Delta_{n+1} l_n \equiv \Delta^b_{n+1,n} - \Delta^{n+1}_{n+1,n} l_{n+1}(\text{mod}p)$$

системага эквивалент. Шунинг учун ҳам $N(p)=0$ бўлиши учун

$$P(z)=\prod_{j=1}^{n}\left(\Delta_{n+1,j}^{b}-\Delta_{n+1,j}^{n+1}z\right)z$$

кўпҳад $Z_p[z]$ бутунлик соҳасидаги нол кўпҳад бўлиши керак, яъни барча l лар учун $P(l)\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ бажарилиши керак. $\deg.P(z)=n+1<p$ бўлганлиги сабабли бу эса фақат ва фақат ҳеч бўлмаса бирта $j=1,2,...,n$ учун $\Delta_{n+1,j}^{b}\equiv\Delta_{n+1,j}^{n+1}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ бажарилгандагина бажарилади. $\Delta_{n+1}\not\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ дан бу $j_1,j_2,...,j_{n-1}\in\in\{1,2,...,n\}$ лар учун $\Delta_{j_1j_2...j_{n-1},n+1}\equiv\Delta_{j_1j_2...j_{n-1},b}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ ва $\Delta_{j_1j_2...j_{n-2},n+1,b}\equiv\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ эканлигини билдиради. $\Delta_{n+1}\not\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ бўлганидан барча $i=1,2,...,n$ учун $p\nmid(a_{1i},a_{2i},...,a_{ni})$ бажарилади, у ҳолда $\Delta_{ij_1j_2...j_{n-1}}\equiv\Delta_{ik_1k_2...k_{n-1}}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ эканлигидан

$$\Delta_{ik_1k_2...k_{n-1}}\equiv...\equiv\Delta_{j_{n-1}k_1k_2...k_{n-1}}\equiv 0(\mathrm{mod}p) \qquad (4.10)$$

келиб чиқади. (4.10) да $j_1,j_2,...,j_{n-1}$, $k_1,k_2,...,k_{n-1}$ номерли устунлардан фойдаланиб тузиш мумкин барча n — тартибли детерминантлар иштирок этади. Шундай қилиб, 4.2.1-лемма исботланди.

4.2.2-лемма. Агар $(b_1,b_2,...,b_n)$ — $\vec{b}$ нинг барча p лар учун $N(p)>0$ бўладиган $[1,m]^n$ кубдаги фиксирланган қиймати бўлса, у ҳолда $(z_1,z_2,...,z_n)$ нинг

$$1\le z_i\le X,\ \ z_i\equiv b_i(\mathrm{mod}m),\ \ \sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}y_j=z_i,\ \ i=\overline{1,n} \qquad (4.11)$$

шартни қаноатлантирувчи N_1

$$N_1 \gg X^n (m^n B^{2(n-1)^2(2n-1)})^{-1} \qquad (4.12)$$

тадан кам бўлмаган қиймати мавжуд. Бу ерда $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ лар мусбат ҳақиқий сонлар.

Исботи. Ушбу

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = z_i, \quad i = \overline{1,n} \qquad (4.13)$$

тенгламалар системасини қараймиз. Буни $y_2, y_3, ..., y_{n+1}$ ларга нисбатан ечсак,

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{12}^1 y_1 + \Delta_{12}^z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{1,n+1}^1 y_1 + \Delta_{1,n+1}^z) \end{cases} \qquad (4.14)$$

ҳосил бўлади. Агар, зарура туғилса, a_{ij} коэффициентларнинг индекси j ни қайта белгилаб $-\Delta_{12}^1 > 0, \quad -\Delta_{13}^1 > 0, \quad ... \quad , -\Delta_{1,n+1}^1 > 0$ бажарилади деб қарашимиз мумкин. Агар $\Delta_1 > 0$ бўлса, (3.14) система мусбат ҳақиқий сонлар y_j ларга нисбатан ечимга эга. Бу эса а) шартнинг ихтиёрий ҳақиқий сонлар $b_1, b_2, ..., b_n$ учун бажарилишини билдиради. Шунинг учун ҳам бу ҳолда (4.12) муносабат албатта бажарилади.

Энди $\Delta_1 < 0$ ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $\Delta_{12}^z < 0, \ \Delta_{13}^z < 0, \ ... ,$ $\Delta_{1,n+1}^z < 0$ бўлса, (4.14) система мусбат ҳақиқий сонлар $y_1, y_2, ...,$ y_{n+1} да ечимга бўлади.

$x_i = \dfrac{z_i}{z_1}$, $i = 2,3,\ldots,n$ деб белгилаб олиб, бу охирги шартни

$x_2, x_3, \ldots, x_n > 0$ ларга нисбатан қуйидаги чизиқли тенгсизликлар системаси кўринишида ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} z_1 A_{11} + z_2 A_{21} + \ldots + z_n A_{n1} < 0 \\ z_1 A_{12} + z_2 A_{22} + \ldots + z_n A_{n2} < 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 A_{1n} + z_2 A_{2n} + \ldots + z_n A_{nn} < 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} A_{21} x_2 + \ldots + A_{n1} x_n < -A_{11} \\ A_{22} x_2 + \ldots + A_{n2} x_n < -A_{12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{2n} x_2 + \ldots + A_{nn} x_n < -A_{1n}. \end{cases}$$

4.1.1-теореманинг (4.6) шарти бу бир жинсли тенгсизликлар системасининг ечимлари тўпламининг бўш бўлмаслигини кафолатлайди. Шунинг учун ҳам

$$U_1 < x_2, \ldots, x_n < U_2 \ , \quad \text{бунда} \quad 0 \le U_1 < a(n, B)$$

ва

$$\frac{1}{a^2(n,B)} < U_2 - U_1 < a(n,B), \ \ a(n,B) = [(n-1)!]^n B^{(n-1)^2} \qquad (4.15)$$

деб ҳисоблашимиз мумкин.

$z_1 \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m)$ — фиксирланган сон бўлсин, у ҳолда

$$1 \le z_i \le X, \ \ z_i \equiv b_i (\mathrm{mod}\, m), \ \ U_1 < z_i z_1^{-1} < U_2, \ \ i = \overline{1,n} \qquad (4.16)$$

шартни қаноатлантирувчи z_i лар сони A_i ни

$$A_i = \min\{z_i (U_2 - U_1) m^{-1}, \ (X - z_1 U_1) m^{-1}\} + O(1) \qquad (4.17)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, (4.16) шартдан

$$U_1 z_1 < z_i < U_2 z_1,\ z_i = b_i + mt,\ m^{-1}(U_1 z_1 - b_i) < t < (U_2 z_1 - b_i) m^{-1}.$$

Бундан t лар сони ва демак, (4.16) шартни қаноатлантирувчи z_i лар сони ҳам

$$\left[\frac{U_2 z_1}{m} - \frac{U_1 z_1}{m}\right] - \varepsilon_2 = \left[\frac{1}{m}(U_2 - U_1) z_1\right] - \varepsilon_2 \qquad (4.18)$$

га тенг.

Иккинчи томондан эса $z_i \le X$, $z_i \equiv b_i (\mathrm{mod} m)$ бўлганидан $t \le m^{-1}(X - b_i)$ ва (4.16) шартни қаноатлантирувчи z_i лар сони

$$\left[\frac{X - b_i}{m} - \frac{U_1 z_1 - b_i}{m}\right] - \varepsilon_3 = \left[\frac{1}{m}(X - U_1 z_1)\right] - \varepsilon_3 \qquad (4.19)$$

га тенг бўлади. Бу ерда ε_2 ва ε_3 лар $m^{-1}(U_2 - U_1) z_1$ ва $m^{-1}(X - U_1 z_1)$ ларнинг бутун ёки каср бўлишига 1 ёки 0 тенг қиймат қабул қилади. (4.18) ва (4.19) лардан (4.17) келиб чиқади.

(4.15) га кўра

$$z_1 \le X(2U_1)^{-1}\ (z_1 \le X/2a(n,B)^2) \text{ ва } X > 2 z_1 B^{-2(n-1)^2}$$

бўлганда, (4.17) тенгликдан

$$A_i \gg \min\{z_1 B^{-2(n-1)^2} \cdot m^{-1};\ X(2m)^{-1}\} - O(1) \gg z_1 (B^{2(n-1)^2} m)^{-1} - O(1)$$

келиб чиқади. Ана шундай баҳоларни барча $i = 2,3,\ldots,n$ лар бўйича йиғиб

$$A = A_2A_3...A_n \gg \left[z_1(B^{2(n-1)^2}m)^{-1} - O(1) \right]^{n-1}$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди $z_1 \equiv b_1(\bmod m)$ ва $1 \le z_1 \le X/2a(n,B)^2$ шартларни қаноатлантирувчи z_1 лар бўйича йиғиб,

$$N_1 \gg \sum_{z_1} \{z_1(B^{2(n-1)^2}m)^{-1} - O(1)\}^{n-1}$$

баҳога эга бўламиз. Бу тенгсизликнинг чап томонидаги йиғинди тагидаги ифодани Ньютон биноми формуласи бўйича ёйиб, кейин эса ҳар бир ҳадни z_1 бўйича алоҳида йиғсак,

$$N_1 \gg (mB^{2(n-1)^2})^{-n+1} \sum_{\substack{z_1 \le X/2a(n,B)^2 \\ z_1 \equiv b_1(\bmod m)}} z_1^{n-1} \gg \frac{m^{n-1}}{(mB^{2(n-1)^2})^{n-1}} \times$$

$$\times \sum_{t \le \frac{X-b_1}{2a(n,B)^2 m}} t^{n-1} \gg \frac{1}{B^{2(n-1)^2}} \left(\frac{X-b_1}{2a(n,B)^2 m} \right)^n \gg$$

$$\gg \frac{X^n}{m^n B^{2(n-1)^3+2n(n-1)^2}} \gg \frac{X^n}{B^{2(n-1)^2(2n-1)} m^n}$$

ни оламиз. Шундай қилиб, 4.2.2-лемма исбот бўлди.

4.1.1-теореманинг исботи. $U(X)$ нинг аниқланишига кўра $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in U(X)$ векторлар сони а) ва b) шартлар билан аниқланади. Аввало а) шартни қараймиз. (4.8) га асосан а) шартни қаноатлантирувчи $\vec{b}$ векторлар сонини аниқлаш учун p туб сонлар учун $N(p)>0$ бажариладиган $\vec{b}$ векторлар сонини аниқлаш етарли. Фараз этайлик, $p_1,p_2,...,p_s$ — лар $n+1$ дан катта бўлмаган барча туб сонлар бўлсин. Агар $b_1,b_2,...,b_n$ лар $m_1=p_1p_2...p_s$ бўйича бирор мос қилиб танланган чегирмалар синфига тегишли бўлса, у ҳолда $N(p_i)>0$ $(i=1,2,...,s)$ бўлади.

Мисол учун $b_i\equiv a_{i1}+...+a_{i,n+1}(\mathrm{mod}m_1)$, $i=1,2,...,n$ бўлса, у ҳолда $((l_1,l_2,...,l_{n+1})\equiv(1,1,...,1))$ бўлади ва $N(p_i)>0$.

$p>n+1$ бўлганда 4.2.1-леммани қўллаймиз. Биринчидан агар $p\nmid\Delta_1\Delta_2...\Delta_{n+1}$ бўлса, у ҳолда $b_1,b_2,...,b_n$ ларнинг қийматларига боғлиқ бўлмаган ҳолда 4.2.1-леммадан $N(p)>0$ эканлиги келиб чиқади.

Иккинчидан, эса (4.3) га кўра $q_1^{(1)},q_2^{(1)},...,q_{u_1}^{(1)}$ — лар $n+1$ дан катта ва Δ_j, лардан фақат биртасини бўладиган туб сонлар бўлсин; $q_1^{(2)},q_2^{(2)},...,q_{u_2}^{(2)}$ — лар эса $n+1$ дан катта туб сонлар бўлиб Δ_j, $j=1,2,...,n+1$ ларнинг фақат иккитасини бўлсин ва ҳоказо $q_1^{(n)},q_2^{(n)},...,q_{u_n}^{(n)}$ — лар $n+1$ дан катта туб сонлар бўлиб Δ_j, $j=1,2,...,n+1$ ларнинг фақат n тасини бўлсин.

$q=q_1^{(1)}$ ни қараймиз. Аниқлик учун $q\mid\Delta_{n+1}$, $q\nmid\Delta_1\Delta_2...\Delta_n$ бўлсин. (4.10) га асосан, агар $q\mid\Delta_{n+1,n}^b$ бўлса, у ҳолда $q\mid\Delta_{1,n+1}^b$, $q\mid\Delta_{2,n+1}^b,...,$ $q\mid\Delta_{n,n+1}^b$ бўлади. Шунинг учун ҳам фақат ва фақат $q\mid\Delta_{n+1,n}^b$ бажарилсагина, $N(p)=0$ бўлади. $\Delta_{n+1,n}^b\equiv0(\mathrm{mod}q)$ таққосламани $\vec{b}=(b_1,b_2...,b_n)$ нинг q^{n-1} та қиймати қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, $b_3, b_4, ..., b_n$ ларни фиксирлаб олсак, áåðèëãàí òà³³î ñëàì àí è ³àí î àòëàí òèðóâ÷è q та (b_1, b_2) жуфтлик мавжуд. Бундан $1 \le b_3, b_4, ..., b_n \le q$ эканлигини эътиборга олиб берилган таққосламани қаноатлантирувчи $\vec{b}$ нинг қийматлари сони $q^{n-2} \cdot q = q^{n-1}$ та эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ нинг қолган $q^n - q^{n-1} = \varphi(q^n)$ та қийматларидан ҳар бири учун $q \nmid \Delta^b_{n+1,n}$ ва демак, $N(p) > 0$.

Энди $q = q_1^{(2)}$ ни қараймиз. $q \mid (\Delta_{n+1}, \Delta_n)$, $q \nmid \Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_{n-1}$ бўлсин. Бу ҳолда $q \mid \Delta^b_{n+1,n}$. $q \nmid \Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_{n-1}$ бўлгани учун $q \nmid (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ $(j = n, n+1)$ деб олишимиз мумкин.

$j = n$ да $\{1, 2, ..., n, n+1, b\} \setminus \{n\} = \{1, 2, ..., n-1, n+1, b\}$. Агарда $\Delta_{12...n-1,n+1} \equiv \Delta_{12...n-1,b} \equiv \Delta_{23...n-1,n+1,b} \equiv \Delta_{13...n-1,n+1,b} \equiv ... \equiv \Delta_{123...n-2,n+1,b} \equiv 0 (\mathrm{mod} q)$ бўлса, у ҳолда $N(q) = 0$ бўлади. Шартга кўра $\Delta_n = \Delta_{12...n-1,n+2} \equiv 0$ ва $\Delta^b_{n,n+1} = \Delta_{12...n-1,b} \equiv 0 (\mathrm{mod} q)$. Шунинг учун ҳам $(N(q) = 0) \Leftrightarrow (\Delta_{23...n-1,n+1,b} \equiv \Delta_{13...n-1,n+1,b} \equiv ... \ ... \equiv \Delta_{123...n-2,n+1,b} \equiv \equiv 0 (\mathrm{mod} q))$.

Бу таққосламанинг ҳар бири q модули бўйича $b_1, b_2, ..., b_n$ ларга нисбатан q^{n-1} та ечимга эга. Демак, бу системанинг ечимлари сони $\le q^{n-1}$. Шунга ўхшаш $j = n+1$ бўлганда $n-1$ та таққосламадан тузилган

$$\Delta_{23...n-1,n,b} \equiv 0, \quad \Delta_{134...n-1,n,b} \equiv 0, \quad ..., \quad \Delta_{12...n-2,n,b} \equiv 0 (\mathrm{mod} q)$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг ечимлари сони ҳам

$\leq q^{n-1}$. Шунинг учун ҳам $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ нинг q модули бўйича q^n-2q^{n-1} тадан кам бўлмаган қийматлари учун $N(q)>0$ бўлади.

Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб q модули бўйича $\vec{b}=$ $=(b_1,b_2,...,b_n)$ нинг мос равишда

$$
\begin{array}{lll}
q=q_1^{(3)} & q^n-3q^{n-1}, & (j=n-1,n,n+1),\\
q=q_1^{(4)} & q^n-4q^{n-1}, & (j=n-2,n-1,n,n+1),\\
\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
q=q_1^{(n)} & q^n-nq^{n-1}, & (j=2,3,...,n,n+1)
\end{array}
$$

та қийматларидан кам бўлмаган қийматлари учун $N(q)>0$ деган хулосага келамиз.

Энди, фараз қилайлик, $m=m_1q_1^{(1)}...q_{u_1}^{(1)}q_1^{(2)}...q_{u_2}^{(2)}...q_1^{(n)}...q_{u_n}^{(n)}$ бўлсин. У ҳолда юқорида қараб чиқилганларга асосан, m модули бўйича $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ нинг барча p лар учун $N(p)>0$ бажариладиган ҳеч бўлмаса

$$
\prod_{j_1=1}^{u_1}(q_{j_1}^{(1)})^{n-1}\varphi(q_{j_1}^{(1)})\prod_{j_2=1}^{u_2}\left((q_{j_2}^{(2)})^n-2(q_{j_2}^{(2)})^{n-1}\right)...
$$

$$
...\prod_{j_n=1}^{u_n}\left((q_{j_n}^{(n)})^n-n(q_{j_n}^{(n)})^{n-1}\right) \tag{4.20}
$$

та қиймати мавжуд деган натижага келамиз.

b) шартни қараймиз. $(b_1,b_2,...,b_n)$ — $\vec{b}$ нинг $[1,m]^n$ даги барча p лар учун, $N(p)>0$ бажариладиган фиксирланган қиймати бўлсин. У ҳолда (4.20) ва (4.11) ларга ҳамда $U(X)$ нинг аниқланишига кўра

$$\mathrm{card}\,U(X) \gg N_1\left(\frac{m}{n}\right)^n \prod_{j_1=1}^{u_1} \varphi(q_{j_1}^{(1)})(q_{j_1}^{(1)})^{-1} \times$$
$$\times \prod_{j_2=1}^{u_2}\left(1-2/q_{j_2}^{(2)}\right)\ldots\prod_{j_n=1}^{u_n}\left(1-n/q_{j_n}^{(n)}\right)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда ихтиёрий $n \geq 1$ учун $1-nq_j^{-1} \geq n^{-1}(1-q_j^{-1})$ эканлигини эътиборга олсак

$$\mathrm{card}\,U(X) \gg N_1\left(\frac{m}{m_1}\right)^n \prod_{j_1=1}^{u_1} \varphi(q_{j_1}^{(1)})(q_{j_1}^{(1)})^{-1} \prod_{j_2=1}^{u_2} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q_{j_2}^{(2)}}\right)\ldots$$
$$\ldots\prod_{j_n=1}^{u_n} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{q_{j_n}^{(n)}}\right) \gg N_1\left(\frac{m}{m_1}\right)^n \left(\ln\ln\frac{m}{m_1}\right)^{-1}$$

келиб чиқади.

$$m_1 = p_1 p_2 \ldots p_s \leq (n+1)^s \leq (n+1)^{(n+1)/\ln(n+1)}$$

ва

$$m \leq m_1 \,|\, \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n+1} \,| \ll B^{n(n+1)}$$

бўлганлиги сабабли, бундан исботланиши талаб этилган

$$\mathrm{card}\,U(X) \gg X^n \left(B^{2(n-1)^2(2n-1)+n} \ln\ln B\right)^{-1}$$

баҳога эга бўламиз.

4.3. Масаланинг махсус тўплами. Бирлик интервални бўлиш

Фараз қилайлик, n — фиксирланган натурал сон ва

$$X \geq B^{\exp(\delta^{-2})} \text{ лар учун } N = 3(n!)^2 B^{(2n-1)} X,$$

$$Q = N^{\delta}, \; L = NQ^{-\frac{1}{90}}, \; T = Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tag{4.21}$$

бўлсин. Осонлик билан кўриш мумкинки,

$$B \leq Q^{\delta} \tag{4.22}$$

бажарилади. χ — q, ($q \leq T$) модули бўйича Дирихле характери бўлсин. Маълумки, (А. А. Карацуба [52] нинг IX бобининг 2-параграфига қаранг) шундай бир ўзгармас c_1 сони мавжудки, Дирихле L-функцияси $L(s,\chi)$, $(s = \sigma + it)$ $\sigma > 1 - c_1 \ln^{-1} T$, $|t| \leq T$ соҳада фақат бирта ҳақиқий примитив характер $\tilde{\chi}(\mathrm{mod}\,\tilde{r})$, $(\tilde{r} \leq T)$ учун ягона ҳақиқий (махсус) $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$ нолга эга бўлиши мумкин. Агар шундай махсус нол $\tilde{\beta}$ мавжуд бўлса, у

$$\frac{c_2}{\tilde{r}^{1/2} \mathrm{in}^2 \tilde{r}} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq \frac{c_1}{\mathrm{in} T} \tag{4.23}$$

тенгсизликни қаноатлантиради (Г. Дэвенпорт [51] га қаранг).

Бундан кейин қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз:

$$\omega = \begin{cases} 1, & \text{агар } E_{\tilde{\beta}} = 0 \text{ бўлса;} \\ (1-\tilde{\beta}) \ln T, & \text{агар } E_{\tilde{\beta}} = 1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$e_q(y) = e\left(\frac{y}{q}\right),$$

$$S(y) = \sum_{L<n\le N} \Lambda(n)e(ny), \quad S_\chi(y) = \sum_{L<n\le N} \Lambda(n)\chi(n)e(ny), \tag{4.24}$$

$$I(y) = \int_L^N e(xy)dx, \ \tilde{I}(y) = \int_L^N x^{\tilde{\beta}-1}e(xy)dx,$$

$$I_\chi(y) = \int_L^N e(xy)\sum_{|\gamma|\le T}{}' x^{\rho-1}dx,$$

бу ерда $\sum_{|\gamma|\le T}{}'$ — $L(s,\chi)$ функциянинг $1/2 \le \beta \le 1 - c_1 \ln^{-1} T$ соҳадаги ноллари $\rho = \beta + i\gamma$ бўйича олинган йиғиндини билдиради.

$$\tau = N^{-1}T^{1/2n} \tag{4.25}$$

деб оламиз.

$$1 \le h_1,...,h_n \le q \le Q \quad \text{и} \quad (h_1,h_2,...,h_n,q) = 1 \tag{4.26}$$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий бутун сонлар $h_1,h_2,...,h_n,q$ учун $m(h_1,...,h_n,q)$ кубни

$$m(h_1,...,h_n,q) = \{(x_1,...,x_n) \in R^n : |x_i - \frac{h_i}{q}| \le \frac{\tau}{q}, \ i = \overline{1,n}\} \tag{4.27}$$

тенглик билан M_1 ва M_2 ларни эса

$$M_1 = \cup m(h_1,...,h_n,q), \quad M_2 = [\tau, 1+\tau]^n \setminus M_1, \tag{4.28}$$

тенгликлар аниқлаймиз. (4.28) даги бирлашма (4.26) шартни қаноатлантирувчи барча $h_1,...,h_n,q$ лар бўйича олинади.

Осонлик билан кўриш мумкинки, n-ўлчовли $m(h_1,...,h_n,q)$ кублар жуфт-жуфти билан ўзаро кесишмайди ва $[\tau,1+\tau]^n$ соҳада ётади ($n=2$ бўлган ҳол M. C. Liu, K. M. Tsang [100] да қаралган). Ихтиёрий $\vec{b}=(b_1,...,b_n)\in U(X)$ ва $(x_1,...,x_n)\in R^n$ учун

$$\vec{x}_b=b_1x_1+...+b_nx_n,\ \vec{x}_j=a_{1j}x_1+...+a_{nj}x_n,\ (j=\overline{1,n+1}) \qquad (4.29)$$

ва

$$I(\vec{b})=\sum\Lambda(m_1)...\Lambda(m_{n+1}) \qquad (4.30)$$

деб оламиз.

(4.30) тенгликда йиғинди

$$L<m_1,...,m_{n+1}\le N \text{ ва } \sum_{1\le j\le n+1}a_{ij}m_j=b_i,\ (i=\overline{1,n})$$

шартларни қаноатлантирувчи барча m_j лар бўйича олинади. У ҳолда (4.24) ва (4.28) лардан

$$I(\vec{b})=\int_{\tau}^{1+\tau}...\int_{\tau}^{1+\tau}e(-\vec{x}_b)\prod_{j=1}^{n+1}S(\vec{x}_j)dx_1...dx_n=\left(\int_{M'_1}...\int+\right.$$

$$\left.+\int_{M'_2}...\int\right)e(-\vec{x}_b)\prod_{j=1}^{n+1}S(\vec{x}_j)dx_1...dx_n=I_1(\vec{b})+I_2(\vec{b}) \qquad (4.31)$$

тенгликкка эга бўламиз.

4.4. Кичик ёйлар

$I_2(\vec{b})$ интегрални қараймиз. $I_2(\vec{b})$ ни баҳолашда M. C. Liu, K. M. Tsang [100] да $n=2$ бўлган ҳолдагига ўхшаш мулоҳаза юритамиз.

4.4.1-лемма. Агар $(x_1,...,x_n)\in M'_2$ бўлса, у ҳолда

$$\min\{|S(\vec{x}_1)|,...,|S(\vec{x}_n)|\} \ll NB^{1/2}Q^{-1/4(n-1)}\ln^4 N$$

бажрилади.

Исботи. $P=n!B^nQ^{1/2}\tau^{-1}$ бўлсин. Дирихленинг аппроксимация тўғрисидаги теоремасига кўра $1\le q_j\le P$, $(l_j,q_j)=1$ ва $|\vec{x}_j-l_jq_j^{-1}|<(q_jP)^{-1}$, $j=\overline{1,n}$ шартларни қаноатлантирувчи l_j,q_j бутун сонлари мавжуд. У ҳолда Р. Вон [49] даги 3.1-теоремага асосан

$$S(\vec{x}_j)\ll(Nq_j^{-1/2}+N^{4/5}+N^{1/2}q_j^{1/2})\ln^4 N,\ j=\overline{1,n}. \qquad (4.32)$$

Энди

$$\min\{q_1,...,q_n\}\ge Q^{1/2(n+1)}(nB)^{-1} \qquad (4.33)$$

нинг бажарилишини кўрсатамиз. $\Delta_{n+1}\ne 0$ бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}r_i=l_jq_j^{-1},\ \ j=\overline{1,n} \qquad (4.34)$$

тенгламалар системасининг ечими $r_1,r_2,...,r_n$ ларни $r_j=k_jq^{-1}$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда $k_1,k_2,...,k_n$ лар $(k_1,k_2,...,k_n)=$

$=1$ шартни қаноатлантирувчи қандайдир бутун сонлар, q эса $q_1 q_2 \ldots q_n \Delta_{n+1}$ нинг мусбат кўпайтувчиси. Шундай қилиб,

$$1 \le q \le q_1 q_2 \ldots q_n \Delta_{n+1} \le q_1 q_2 \ldots q_n \cdot n! B^n. \qquad (4.35)$$

Энди агар $t_j = \vec{x}_j - l_j q_j^{-1}$ деб олсак, у ҳолда $|t_j| < (q_j P)^{-1}$ бўлади. (4.29) ва (4.34) га асосан

$$t_j = a_{1j}(x_1 - \frac{k_1}{q}) + a_{2j}(x_2 - \frac{k_2}{q}) + \ldots + a_{nj}(x_n - \frac{k_n}{q}), \quad j = \overline{1,n}.$$

Бу ердан

$$x_j - \frac{k_j}{q} = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \sum^{n!} (-1)^{\alpha} a_{1i_1} \ldots t_j \ldots a_{ni_n}, \quad j = \overline{1,n}$$

ва демак,

$$|x_j - \frac{k_j}{q}| < (n-1)! B^{n-1} P^{-1} \left(\frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n} \right).$$

Энди, тескарисини фараз этайлик, (4.33) нинг ўрнига

$$\max\{q_1, \ldots, q_n\} < Q^{1/2(n-1)} (nB)^{-1}$$

бажарилсин. У ҳолда (4.35) га кўра

$$(n-1)! B^{n-1} P^{-1} \left(\frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n} \right) < Q^{1/2} n! B^n (qP)^{-1} = \tau q^{-1}$$

бўлади. Демак, $|x_1-k_1q^{-1}|,...,|x_n-k_nq^{-1}|<\tau q^{-1}$ ва яна (4.35) дан фойдалансак

$$q\le n!B^n\left(Q^{\frac{1}{2(n-1)}}(nB)^{-1}\right)^n<Q$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизлик $\tau\le x_1,...,x_n\le 1+\tau$ муносабат билан бирга $1\le k_1,...,k_n\le q$ эканлигини билдиради.

Шундай қилиб $(x_1,...,x_n)\in M'_1$. Бу эса 4.4.1-лемманинг шартига қарама-қарши. Шунинг билан (4.33) муносабат исбот бўлди.

Энди (4.32) ва (4.33) лардан 4.4.1-лемма келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, (4.32) ва (4.33) га асосан

$$\min\{S(\vec{x}_1),...,S(\vec{x}_n)\}\ll(Q^{-\frac{1}{4(n-1)}}N(nB)^{1/2}+$$

$$+N^{4/5}+N^{1/2}P^{1/2})\ln^4 N\ll NB^{1/2}Q^{-\frac{1}{4(n-1)}}\ln^4 N$$

бажарилади.

Энди $I_2(\vec{b})$ ни баҳолашимиз мумкин. (4.31) тенглик ва Парсеваль айниятидан фойдалансак,

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{b_n=-\infty}^{\infty}|I_2(\vec{b})|^2=\int\underset{M'_2}{\cdots}\int|S(\vec{x}_1)|^2...|S(\vec{x}_{n+1})|^2\,dx_1...dx_n\ll$$

$$\ll\min\{|S(\vec{x}_1)|,...,|S(\vec{x}_n)|\}^2\int\underset{M_2}{\cdots}\int\Big(|S(\vec{x}_2)|^2...|S(\vec{x}_n)|^2+$$

$$+...+|S(\vec{x}_1)|^2|S(\vec{x}_2)|^2...|S(\vec{x}_{n-1})|^2\Big)|S(\vec{x}_{n+1})|^2\,dx_1...dx_n \qquad (4.36)$$

ҳосил бўлади. $\Delta_{n+1} \neq 0$ ва

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\vec{x}_1)|^2 \ldots |S(\vec{x}_{n+1})|^2 \, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{\substack{m_1=m_2,\ldots,m_{2n-1}=m_{2n} \\ L<m_i\le N}} \Lambda(m_1)\ldots\Lambda(m_{2n}) = \left(\sum_{L<n\le N} \Lambda^2(m)\right)^n \ll N^n \ln^n N$$

бўлганлигидан, 4.4.1-леммадан фойдаланиб, (4.36) дан

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{b_n=-\infty}^{\infty} |I_2(\vec{b})|^2 \ll N^{n+2} B Q^{-\frac{1}{2(n-1)}} \ln^{n+8} N \qquad (4.37)$$

баҳони ҳосил қиламиз. (4.37) дан

$$|I_2(\vec{b})| \ge N Q^{-\frac{1}{6(n-1)}}$$

шартни қаноатлантирувчи $\vec{b}$ лар сони $E^{(1)}(X)$ учун

$$E^{(1)}(X) < X^{n-\frac{\delta}{7(n-1)}}$$

баҳо ўринли. Шундай қилиб $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ нинг $E^{(1)}(X)$ та қийматидан бошқа барча қийматлари учун

$$|I_2(\vec{b})| < N Q^{-\frac{1}{6(n-1)}} \qquad (4.38)$$

тенгсизлик бажарилади.

4.5. Катта ёйлар. $I_1(\vec{b})$ интегрални соддалаштириш

Ихтиёрий $\chi(\mathrm{mod}q)$ характер учун

$$C_\chi(m)=\sum_{1\le l\le q}\chi(l)e_q(ml),\ \ C_q(m)=C_{\chi_0}(m)$$

деб белгилаб оламиз. У ҳолда тушунарлики $|C_\chi(m)|\le\varphi(q)$ бўлади. Агар $(x_1,...,x_n)\in m(h_1,...h_n,q)$ бўлса, у ҳолда $x_j=h_jq^{-1}+\eta_j$ деб олсак (4.27) дан

$$|\eta_j|<\tau q^{-1},\ j=\overline{1,n} \tag{4.39}$$

келиб чиқади. (4.29) га ўхшаш яна қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$\begin{aligned}\vec{h}_j&=a_{1j}h_1+...+a_{nj}h_n, & \vec{h}_b&=b_1h_1+...+b_nh_n,\\ \vec{\eta}_j&=a_{1j}\eta_1+...+a_{nj}\eta_n, & \vec{\eta}_b&=b_1\eta_1+...+b_n\eta_n.\end{aligned} \tag{3.40}$$

У ҳолда $\vec{x}_j=\vec{h}_jq^{-1}+\vec{\eta}_j$ $(j=\overline{1,n+1})$ бўлади. Характерларнинг ортогоналлик хоссасидан фойдаланиб, (4.24) тенглик билан аниқланган $S(\vec{x}_j)$, йиғиндини қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин:

$$S(\vec{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}q)}C_{\bar\chi}(\vec{h}_j)S_\chi(\vec{\eta}_j)+O(\ln^2N). \tag{3.41}$$

$1\le j\le n+1$ лар учун

$$G_j(\vec{h},q,\vec{\eta}) = \sum_{\chi(\mathrm{mod}q)} C_{\bar{\chi}}(\vec{h}_j) I_{\chi}(\vec{\eta}_j)$$

$$H_j(\vec{h},q,\vec{\eta}) = C_q(\vec{h}_j) I(\vec{\eta}_j) - E_{\tilde{\beta}} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\eta_j) - G_j(\vec{h},q,\vec{\eta}) \tag{3.42}$$

деб белгилаб оламиз. Бу ерда, агар $\tilde{r} \setminus q$ бўлса, у ҳолда $E_{\tilde{\beta}} =1$ ва агарда $\tilde{r} \not\setminus q$ бўлса, у ҳолда $E_{\tilde{\beta}} =0$.

$I_1(\vec{b})$ интегрални соддалаштириш учун қуйидаги леммадан фойдаланамиз.

4.5.1-лемма. Ихтиёрий y ҳақиқий сони ва χ (modq), (бунда $q \le T$) характер учун

$$S_{\chi}(y) = \delta_{\chi} I(y) - E_{\tilde{\beta}}\tilde{I}(y) - I_{\chi}(y) + O\left((1+|y|T)\frac{N}{T}\ln^2 N\right)$$

тенглик бажарилади.

Бу лемманинг исботи M. C. Liu, K. M. Tsang [101] да келтирилган.

4.5.2-лемма. Шундай бир c_3 ўзгармас сони мавжудки, ихтиёрий ҳақиқий $y \ge \sqrt{N}$ учун

$$\sum_{q\le T} \sum\nolimits_{\chi}^{*} \sum_{|\gamma|\le T} y^{\beta-1} \ll \omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2}) \tag{3.43}$$

баҳо ўринли. Бу ерда $\sum_{\chi}^{*}$ барча $\chi(\mathrm{mod}q)$ примитив характерлар бўйича олинган йиғиндини билдиради.

Исботи. Бу лемма ўз моҳияти жиҳатидан M. C. Liu, K. M. Tsang [101] даги 2.1-леммадир. Шунинг учун ҳам биз қуйидагини таъкидлаш билан чегараланамиз. (4.43) нинг ўнг томонидаги ω^{n+1} ва $\delta^{1/2}$ лар ўрнига M. C. Liu, K. M. Tsang [101] даги 2.1-леммада ω^3 ва δ қатнашади. Агар у ердаги 2.1-лемманинг якунловчи қисмида

$$T = Q^{1/\sqrt{\delta}} = N^{\sqrt{\delta}},\ \eta(T) = \frac{c_2}{\ln T}\ln\left(\frac{ec_1}{(1-\tilde{\beta})\ln T}\right),\ \omega \le c_1$$

ва $\exp(-\frac{1}{4}\eta(T)\ln N) = \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{c_2}{\sqrt{\delta}}(1+\ln\frac{c_1}{\omega})\right) \ll \omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2})$

эканлигини инобатга олсак ω^3 ва δ ларни мос равишда ω^{n+1} ва $\delta^{1/2}$ ларга алмаштириш мумкин.

4.5.3-лемма. *(a).* Ихтиёрий ҳақиқий y учун

$$I(y) \ll \min\{N, |y|^{-1}\},\ \tilde{I}(y) \ll \min\{N^{\tilde{\beta}}, |y|^{\tilde{\beta}}\},\ I_\chi(y) \ll N$$

ва

$$I_\chi(y) \ll \begin{cases} N(L|y|)^{-1/2}, & \text{агар } N^{-1} < |y| \le T(\pi L)^{-1} \text{ бажарилса,} \\ |y|^{-1}, & \text{агар } T(\pi L)^{-1} < |y| \text{ бўлса;} \end{cases}$$

(b). Ихтиёрий $\alpha \in \left[\frac{1}{2n}, 1\right]$ учун $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |I(y)|^{1+\alpha}\, dy \ll N^\alpha$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{I}(y)|^{1+\alpha}\, dy \ll N^{\tilde{\beta}(1+\alpha)-1},\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_\chi(y)|^{1+\alpha}\, dy \ll N^{1+\alpha}L^{-1}T^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}\ln N.$$

баҳолар ўринли.

Бу тасдиқлар M. C. Liu, K. M. Tsang [100] нинг 6.3- леммасида келтирилган, фақат *(b)* ҳолда у ерда $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ деб қаралган. $\alpha\in\left[\frac{1}{2n},\,1\right]$ бўлса ҳам шу исбот ўз кучини сақлаб қолади.

$$|\vec{\eta}_j|N=|(a_{1j}\eta_1+...+a_{nj}\eta_n)N|<nB\tau q^{-1}N=nBT^{1/2n}q^{-1}$$

бўлганлиги учун 4.5.1- леммадан фойдалансак, (3.41) тенгликдан

$$S(\vec{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)}\left\{H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})+O\left(\varphi(q)T^{-1+\frac{1}{2n}}BN\ln^2 N\right)\right\}$$

келиб чиқади. Бу ердан ихтиёрий $(x_1,...,x_n)\in m(h_1,...,h_n,q)$ учун

$$\prod_{j=1}^{n+1}S(\vec{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})+O\left(\frac{\varphi(q)^{n+1}N^{n+1}B\ln^2 N}{T^{1-1/2n}}\right).\quad(4.44)$$

Чунки $|H_i|\le N\varphi(q)^2$, $i=\overline{1,n}$ ва O символи қатнашган ҳадларнинг энг каттаси учун

$$R_1=\varphi(q)^{-n-1}H_1...H_n\cdot O(\varphi(q)BT^{-1+\frac{1}{2n}}N\ln^2 N)\ll\varphi(q)^nN^{n+1}BT^{-1+1/2n}\ln^2 N$$

баҳо ўринли.

Энди агар (4.26) шартни қаноатлантирувчи барча $h_1,...,h_n$ лар бўйича олинган йиғиндини $\sum'_h$ билан белгилаб олсак (3.31), (4.28), (4.44) лардан фойдаланиб $I_1(\vec{b})$ ни қуйидагича ёза оламиз:

$$I_1(\vec{b})=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\sum_h{}'e_q(-\vec{h}_b)\int\limits_{[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}]^n}\!\!...\!\int e_q(-\vec{\eta}_b)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n+1} H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})d\eta_1,...,d\eta_n + O\left(\frac{NQ^{n+1}B}{T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}}\ln^2 N\right). \qquad (4.45)$$

Таъкидлаш керакки, (4.42) га асосан

$$\prod_{j=1}^{n+1} H_j(\vec{h},q,\vec{\eta}) = \left(F_1^{(1)} - F_2^{(1)} - F_3^{(1)}\right)\left(F_1^{(2)} - F_2^{(2)} - F_3^{(2)}\right)...$$

$$...\left(F_1^{(n+1)} - F_2^{(n+1)} - F_3^{(n+1)}\right) \qquad (4.46)$$

кўпайтмани очганимизда $F = F_1 F_2 ... F_{n+1}$ кўринишдаги 3^{n+1} та ҳад пайдо бўлади. Бу ерда $F_i(i = \overline{1,n+1})$ (4.46) тенгликнинг ўнг томонидаги бирор $F_k^{(i)}$, $(k = 1,2,3;\ i = \overline{1,n+1})$ кўпайтувчига тенг.

(4.45) даги интеграллаш чегарасини $[-\tau q^{-1}, \tau q^{-1}]^n$ дан R^n фазогача кенгайтирамиз. $\Gamma_1 = [-1/2, 1/2]^n \setminus [-\tau q^{-1}, \tau q^{-1}]^n$ ва $\Gamma_2 = R^n \setminus [-1/2, 1/2]^n$ деб белгилаб олиб, Γ_1 ва Γ_2 лар бўйича олинган интегралларни баҳолаймиз.

Парсеваль айниятига кўра

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{b_n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{\Gamma_1} \!\!... \int F \cdot e(-\vec{\eta}_b) d\eta_1 ... d\eta_n \right|^2 = \int_{\Gamma_1} \!\!... \int |F|^2 \eta_1 ... d\eta_n \qquad (4.47)$$

тенглик ўринли. (4.40) дан ихтиёрий $(\eta_1,...,\eta_n) \in \Gamma_1$ учун

$$\eta_1 = \frac{\Delta_{n+1,1}^{\vec{\eta}}}{\Delta_{n+1}},\ \eta_2 = \frac{\Delta_{n+1,2}^{\vec{\eta}}}{\Delta_{n+1}},\ ...,\ \eta_n = \frac{\Delta_{n+1,n}^{\vec{\eta}}}{\Delta_{n+1}}$$

келиб чиқади. Бундан барча $i=1,2,...,n$ лар учун

$$|\eta_i|\le n!B^{n-1}\max(|\vec{\eta}_1|,...,|\vec{\eta}_n|) \qquad (4.48)$$

нинг бажарилиши келиб чиқади. $(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\in\Gamma_1$ учун $\tau q^{-1}<|\eta_i|$, $i=\overline{1,n}$ тенгсизликнинг ўринли эканлигини эътиборга олиб, (4.48) дан

$$\max\{|\vec{\eta}_1|,...,|\vec{\eta}_n|\}>\tau(B^{n-1}n!q)^{-1}>N^{-1}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. 4.5.3(а) леммадаги баҳолар орасида энг қўполи

$$I_\chi(y)\ll N(L|y|)^{-1/2}.$$

Демак,

$$\min\{|F_1|^2,...,|F_n|^2\}\ll(NQ)^3B^{n-1}L^{-1}T^{-1/2n} \qquad (4.49)$$

ва

$$\int_{\Gamma_1}\!\!\dots\!\int|F|^2\,d\eta_1...d\eta_n\ll\frac{(NQ)^3B^{n-1}}{LT^{1/2n}}\int_{R^n}\!\!\dots\!\int\left(\left|\frac{F}{F_1}\right|^2+...+\left|\frac{F}{F_n}\right|^2\right)d\eta_1...d\eta_n. \qquad (4.50)$$

4.5.3 *(b)* леммага асосан $\alpha=1$ да

$$\int_{R^n}\!\!\dots\!\int\left|\frac{F}{F_i}\right|^2 d\eta_1...d\eta_n=\frac{1}{|\Delta_{n+1}|}\left(\int_R|F_1|^2\,d\vec{\eta}_1\right)...\left(\int_R|F_{i-1}|^2\,d\vec{\eta}_{i-1}\right)\times$$

$$\times\left(\int_R|F_{i+1}|^2\,d\vec{\eta}_{i+1}\right)...\left(\int_R|F_{n+1}|^2\,d\vec{\eta}_n\right)\ll\left(N^2Q^2L^{-1}\ln N\right)^n$$

ни ҳосил қиламиз. Шунинг учун ҳам δ етарлича кичик бўлганда (4.50) дан

$$\int_{\Gamma_1}\ldots\int |F|^2\, d\eta_1 \ldots d\eta_n \ll X^n N^2 Q^{-9}$$

баҳога эга бўламиз. Бу баҳодан фойдаланиб (4.47) тенгликдан

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{b_n=-\infty}^{\infty}\left|\int_{\Gamma_1}\ldots\int F\cdot e(-\vec{\eta}_b)\,d\eta_1\ldots d\eta_n\right|^2 \ll X^n N^2 Q^{-9}$$

келиб чиқади. Бу ердан $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ нинг $E^{(2)}(X)<X^n Q^{-1}$ та қийматидан ташқари қолган барча қийматлари учун

$$\int_{\Gamma_1}\ldots\int F\cdot e(-\vec{\eta}_b)\,d\eta_1\ldots d\eta_n \ll NQ^{-4} \qquad (4.51)$$

бажарилиши келиб чиқади.

Энди Γ_2 бўйича олинган интегрални баҳолаймиз ва барча $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ лар учун

$$\int_{\Gamma_2}\ldots\int F\cdot e(-\vec{\eta}_b)\,d\eta_1\ldots d\eta_n \ll NQ^{-4} \qquad (4.52)$$

баҳонинг ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $(\eta_1,\ldots,\eta_n)\in\Gamma_2=R^n\setminus[-1/2,1/2]^n$ учун $\max\{|\eta_1|,\ldots,$ $,\ldots,|\eta_n|\}>1/2$ бажарилади. Иккинчи томондан эса илгариги ҳолдаги сингари (4.48) тенглик бу ерда ҳам ўз кучини сақлайди.

Демак

$$\max\{|\vec{\eta}_1|,\ldots,|\vec{\eta}_n|\}>B^{1-n}\frac{1}{n!}\max\{|\eta_1|,\ldots,|\eta_n|\}\gg B^{-n+1}.$$

$|\vec{\eta}_j| \gg B^{1-n} \gg T(\pi L)^{-1}$ эканлигини эътиборга олиб 4.5.3 (a) леммадан фойдаланамиз, у ҳолда

$$\min\{|F_1|,...,|F_n|\} \ll \varphi(q)|\vec{\eta}_j|^{-1} \ll \varphi(q)B^{n-1} \tag{4.53}$$

ни ҳосил қиламиз. Тушунарлики, агар $F_i \le \min(|F_1|,...,|F_n|)$ бўлса, у ҳолда

$$|F_i| \le |F_1F_2...F_{n+1}|^{1/n},\ i=\overline{1,n+1}.$$

Шунинг учун ҳам

$$|F_1F_2...F_{n+1}| \ll |F_1...F_n|^{\frac{n+1}{n}} + ... + |F_2...F_{n+1}|^{\frac{n+1}{n}}$$

ва

$$\int\limits_{\Gamma_2}...\int |F_1F_2...F_{n+1}|\,d\eta_1...d\eta_n \ll \int\limits_{\Gamma_2}...\int (|F_1...F_n|^{\frac{n+1}{n}} + ... +$$

$$+|F_2...F_{n+1}|^{\frac{n+1}{n}})d\eta_1...d\eta_n. \tag{4.54}$$

Бунда

$$\int\limits_{\Gamma_2}...\int |F_{i_1}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}}\,d\eta_1...d\eta_n \ll \int\limits_{\Gamma_2}...\int \min\left(|F_{i_1}|,...,|F_{i_n}|\right)^{1/2n} \times$$

$$\times\left(|F_{i_1}|^{1+\frac{1}{2n}}|F_{i_2}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}} + ... + |F_{i_n}|^{1+\frac{1}{2n}}|F_{i_1}...F_{i_{n-1}}|^{\frac{n+1}{n}}\right)d\eta_1...d\eta_n.$$

Бу ердан (4.53) ва $\alpha = 1/2n$ бўлганда 4.5.3 (b) леммадан фойдаланиб,

$$\int\limits_{\Gamma_2}...\int |F_{i_1}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}}\,d\eta_1...d\eta_n \ll (\varphi(q)B^{n-1})^{1/2n} \int\limits_{R^n}...\int |F_{i_1}|^{1+\frac{1}{2n}}|F_{i_2}...$$

$$\ldots F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}}\,d\eta_1\ldots d\eta_n \ll (\varphi(q)B^{n-1})^{1/2n}\,|\Delta_{i_1\ldots i_n}|^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_{i_1}|^{1+\frac{1}{2n}}\,d\vec{\eta}_1\right)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_{i_2}|^{1+\frac{1}{n}}\,d\vec{\eta}_2\right)\ldots\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_{i_n}|^{1+\frac{1}{n}}\,d\vec{\eta}_n\right) \ll (\varphi(q)B^{n-1})^{1/2n}\left(N^{1+\frac{1}{2n}}L^{-1}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}}\ln N\right)\times$$

$$\times\left(N^{\frac{n+1}{n}}L^{-1}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}\ln N\right)^{n-1}\varphi(q)^{\frac{2n+1}{2n}}(\varphi(q)^{\frac{n+1}{n}})^{n-1} \ll NQ^{-4}$$

га эга бўламиз. Бу баҳодан фойдаланиб, (4.54) дан (4.52) ни ҳосил қиламиз. Энди (4.51) ва (4.52) ларга асосланиб (4.45)-тенгликни $\vec{b}=(b_1,\ldots b_n)$ нинг кўпи билан $E^{(2)}(X)<X^nQ^{-1}$ та қийматидан бошқа барча қийматлари учун

$$I_1(\vec{b})=\sum_{q\le Q}\varphi(q)^{-n-1}\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)\int\limits_{R^n}\ldots\int e(-\vec{\eta}_b)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n+1}H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})d\eta_1\ldots d\eta_n+O(NQ^{-1}) \qquad (4.55)$$

кўринишда ифодалай оламиз.

4.6. Масаланинг махсус қатори

Ихтиёрий $q\ge 1$ бутун сони учун

$$A(q)=\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\sum_{\vec{h}}e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{n+1}C_q(\vec{h}_j) \qquad (4.56)$$

ва ихтиёрий p туб сони учун

$$s(p) = 1 + A(p) \tag{4.57}$$

деб белгилашлар киритамиз.

$N(q)$ функцияни (3.8) даги сингари аниқлаймиз. Биз фақат $\vec{b} \in U(X)$ бўлган $\vec{b} = (b_1, ...b_n)$ ларни қараганимиз сабабли, барча p лар учун $N(p) > 0$.

$A(q)$, $s(p)$ ва $N(q)$ функцияларнинг баъзи бир арифметик хоссаларини қараймиз.

4.6.1-лемма. а). $A(q)$ ва $N(q)$ — мультипликатив функциялар;

b). Ихтиёрий $k \geq 2$ натурал сони учун $A(p^k) = 0$ бажарилади.

c). Ихтиёрий k натурал сони учун $N(p^k) = p^{k-1}N(p)$ тенглик ўринли.

d). $s(p) = p^n \varphi(p)^{-n-1} N(p)$ ва демак барча p туб сонлари учун $s(p) > 0$.

e). p туб сони ва q натурал сонлари учун

$$q^n \varphi(q)^{-n-1} N(q) = \prod_{p \backslash q} s(p)$$

тенглик ўринли.

Исботи. а). $n = 2$ бўлган ҳолда M. C. Liu, K. M. Tsang [100] да келтирилган. Энди $n \geq 2$ ва $(m_1, m_2) = 1$ бўлсин. У ҳолда шундан $u, v \in Z$ бутун сонлари мавжудки, $m_1 u + m_2 v = 1$ тенглик бажарилади. Бундан $h_i = k_i m_2 + l_i m_1$, бу ерда $k_i = vh_i$, $l_i = uh_i$, $i = \overline{1,n}$.

(4.56) да

$$\vec{h}_b = \vec{k}_b m_2 + \vec{l}_b m_1,\ \vec{h}_j = (a_{1j}k_1 + \ldots + a_{nj}k_n)m +$$
$$+(a_{1j}l_1 + \ldots + a_{nj}l_n)m_1 = \vec{k}_j m_2 + \vec{l}_j m_1$$

ва $C_{m_1m_2}(\vec{h}_j) = C_{m_1}(\vec{k}_j)C_{m_2}(\vec{l}_j)$ эканлигини эътиборга олсак,

$$A(m_1m_2) = \frac{1}{\varphi(m_1)^{n+1}\varphi(m_2)^{n+1}}\sum_{\vec{h}}{}' e_{m_1m_2}(-m_2\vec{k}_b - m_1\vec{l}_b)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n+1} C_{m_1}(\vec{k}_j)C_{m_2}(\vec{l}_j) = (\frac{1}{\varphi(m_1)^{n+1}}\sum_{\vec{k}}{}' e_{m_1}(-\vec{k}_b)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n+1} C_{m_1}(\vec{k}_j))\left(\frac{1}{\varphi(m_2)^{n+1}}\sum_{\vec{l}}{}' e_{m_2}(-\vec{l}_b)\times\prod_{j=1}^{n+1} C_{m_2}(\vec{l}_j)\right) = A(m_1)\cdot A(m_2)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар

$$N(q) = \frac{1}{q^n}\sum_{1\le h_1,\ldots,h_n\le q}{}' e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j)$$

эканлигини инобатга олсак, $N(q)$ нинг мультипликативлиги $A(q)$ нинг мультипликативлигидан келиб чиқади.

b). Маълумки,

$$C_q(m) = \mu\left(\frac{q}{(q,m)}\right)\varphi(q)\varphi\left(\frac{q}{(q,m)}\right)^{-1} \tag{4.58}$$

(H. Hasse [96] нинг 272-теоремаси), бу ерда $\mu(m)$ — Мёбиус функцияси. Фараз қилайлик, $k \geq 2$ бўлсин. Агар

$$\prod_{j=1}^{n+1} C_{p^k}(\vec{h}_j) \neq 0$$

бўлса, у ҳолда (4.58) даги μ кўпайтувчини қараб барча $\vec{h}_j = a_{1j}h_1 + \ldots + a_{nj}h_n$, $j = \overline{1, n+1}$ ларнинг p га бўлиниши керак эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. $A(p^k)$ нинг аниқланишига кўра (4.56) да $(h_1, \ldots, h_n, p) = 1$, шунинг учун ҳам p туб сони $\Delta_{n+1}, \Delta_n, \ldots, \Delta_1$ ларнинг барчасини бўлиши керак. Лекин бу (4.3) шартга қарама-қарши. Демак, барча $k \geq 2$ лар учун $A(p^k) = 0$.

c). (4.3) га асосан $p \nmid \Delta_{n+1}$ деб ҳисоблашимиз мумкин.

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} l_j \equiv b_i (\mathrm{mod} p^k), \; i = \overline{1, n}$$

таққосламалар системаси

$$\Delta_{n+1} l_i + \Delta_{n+1,i}^{n+1} l_{n+1} \equiv \Delta_{n+1,i}^{b} (\mathrm{mod} p^k), \; i = \overline{1, n}$$

системага эквивалент. Бу эса $N(p^k)$ нинг

$$1 \leq l_{n+1} \leq p^k, \; p \nmid l_{n+1} \quad \text{ва} \quad \Delta_{n+1,i}^{n+1} l_{n+1} \not\equiv \Delta_{n+1,i}^{b} (\mathrm{mod} p), \; i = \overline{1, n} \qquad (4.59)$$

шартни қаноатлантирувчи l_{n+1} лар сонига тенг эканлигини билдиради.

$l_{n+1} = tp + s$ деб оламиз, бу ерда $1 \leq s \leq p - 1$ ва $0 \leq t \leq p^{k-1}$. У ҳолда (4.59) ни

$$s \cdot \Delta_{n+1,i}^{n+1} \not\equiv \Delta_{n+1,i}^{b} (\mathrm{mod} p), \; i = \overline{1, n}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан эса $N(p^k)=p^{k-1}N(p)$ келиб чиқади.

d). (4.57) га асосан

$$s(p)=\frac{1}{\varphi(p)^{n+1}}\sum_{l_1,\dots,l_{n+1}\le p}\chi_0(l_1)\dots\chi_0(l_{n+1})\sum_{h_1,\dots,h_n\le p}e_p((a_{11}h_1+$$

$$+\dots+a_{n1}h_n)l_1+\dots+(a_{1,n+1}h_1+\dots+a_{n,n+1}h_n)l_{n+1}-$$

$$-b_1h_1-\dots-b_nh_n)=\frac{1}{\varphi(p)^{n+1}}\left(\sideset{}{'}\sum_{\substack{l_1,\dots,l_{n+1}\le p\\ \sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}l_j=b_j,\, i=\overline{1,n}}}1\right)\cdot p^n=$$

$$=\frac{p^n}{\varphi(p)^{n+1}}N(p).$$

Ниҳоят, e) тасдиқ a), c) ва d) лардан келиб чиқади.

Бундан кейинги текширишларимизда бизга $s(p)$ ва $A(q)$ функцияларни ўз ичига олган баъзи бир йиғиндилар ва кўпайтмаларнинг аниқроқ баҳолари керак бўлади. Хусусан, $\prod_p s(p)$ ва $\sum_q |A(q)|$ ларнинг яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. Бунга эришиш учун

$$\Delta^b_{n+1,n}\Delta^b_{n+1,n-1}\dots\Delta^b_{12}=0 \tag{4.60}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)\in[1,X]^n$ ларни ташлаб юборамиз, яъни уларни қарамаймиз. Бундай $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$ ларнинг сони $E^{(3)}(X)\ll X^{n-1}$ дан кўп эмас.

Энди туб сонларни қуйидагича иккита тўпламга ажратамиз:

$$P_B = \{p : p \mid \underbrace{\Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta_{n+1}\Delta^b_{n+1,n}\Delta^b_{n+1,n-1}\ldots\Delta^b_{12}}_{жами\,\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\},$$

$$P_G = \{p : p \notin P_B\}.$$

Осонлик билан кўриш мумкинки $2 \in P_B$ ва $N(3) > 0$ дегани $3 \in P_B$ эканлигини билдиради.

4.6.2-лемма. (4.60) тенглик ўринли бўлмаган $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in$ $\in U(X)$ лар учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

a). Барча p лар учун $-\frac{c_4}{p^2} \le A(p) \le \frac{c_5}{p}$ ва агар $p \in P_G$ бўлса, у ҳолда $-c_6 p^{-2} \le A(p) \le c_7 p^{-3}$ бажарилади;

b). Барча p лар учун $\prod_p (1 + |A(p)|) \ll \prod_p (1 + A(p)) \ll (\ln\ln N)^{c_5}$;

c). $\prod_p s(p)$ кўпайтма абсолют яқинлашувчи ва $\prod_p s(p) > c_8 > 0$;

d). Ҳар қандай $y \ge 1$ ҳақиқий сони учун

$$\sum_{q \ge y} |A(q)| \ll \frac{1}{y} N^{c_9/\ln\ln N} \ln^{c_4}(y+2)$$

бажарилади.

Исботи. a). (4.57) ва 4.6.1 d) леммага асосан

$$A(p) = p^n \varphi(p)^{-n-1} N(p) - 1 \tag{4.61}$$

тенглик бажарилади. (4.3)-шартдан келиб чиқиб $p \nmid \Delta_{n+1}$ деб қараймиз. $N(p)$ бу $1 \le l_1,...,l_{n+1} \le p-1$ ва $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}l_j \equiv b_i (\mathrm{mod} p)$, $i=\overline{1,n}$ шартларни қаноатлантирувчи $(l_1,l_2,...,l_{n+1})$ наборлар сони бўлгани учун, бу таққосламаларни $l_1,l_2,...,l_n$ ларга нисбатан ечиб

$$l_j = \frac{1}{\Delta_{n+1}}\left(\Delta_{n+1,j}^{b} - \Delta_{n+1,j}^{n+1} l_{n+1}\right)(\mathrm{mod} p),\ j=\overline{1,n} \tag{4.62}$$

эканлигини топамиз. Бундан эса $N(p)$ нинг

$$1)\ 1 \le l_{n+1} \le p-1,$$

$$2)\ \Delta_{n+1,1}^{b} \not\equiv \Delta_{n+1,1}^{n+1} l_{n+1} (\mathrm{mod} p),$$

$$3)\ \Delta_{n+1,2}^{b} \not\equiv \Delta_{n+1,2}^{n+1} l_{n+1} (\mathrm{mod} p),$$

....

$$n+1)\ \Delta_{n+1,n}^{b} \not\equiv \Delta_{n+1,n}^{n+1} l_{n+1} (\mathrm{mod} p)$$

шартларни қаноатлантируви l_{n+1} ларнинг сонига тенг эканлиги келиб чиқади. Киритиш ва чиқариш принципига кўра $N(p)$ учун

$$N(p) = p-1-M(\alpha_1)-M(\alpha_2)-...-M(\alpha_n)+\sum_{1\le i<j\le n} M(\alpha_i,\alpha_j)-$$

$$-...+(-1)^n M(\alpha_1,...,\alpha_n) \tag{4.63}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $M(\alpha_i)$

$$(\alpha_1):\ 1 \le l_{n+1} \le p-1,\quad \Delta^b_{n+1,1} \equiv \Delta^{n+1}_{n+1,1} l_{n+1} (\mathrm{mod} p),$$

....

$$(\alpha_n):\ 1 \le l_{n+1} \le p-1,\quad \Delta^b_{n+1,n} \equiv \Delta^{n+1}_{n+1,n} l_{n+1} (\mathrm{mod} p).$$

шартлардан (α_i) шартни қаноатлантирувчи l_{n+1} ларнинг сони. Тушунарлики,

$$N(p) \le p-1. \tag{4.64}$$

(4.64) ва (4.61) дан

$$A(p) \le (p^n - (p-1)^n)(p-1)^{-n} < c_5 p^{-1}$$

келиб чиқади. Бу ерда $p \ge 2$ ва $c_5 = 2^{n+1} - 2$.

2) ,..., n+1) шартларга кўра $N(p) > 0$ дегани $p \nmid (\Delta^b_{n+1,1};\Delta^{n+1}_{n+1,1})$... ...$(\Delta^b_{n+1,n};\Delta^{n+1}_{n+1,n})$ ни билдиради. Шунинг учун ҳам, агар $p \mid \Delta^{n+1}_{n+1,1}$ бўлса, у ҳолда $p \nmid \Delta^b_{n+1,1}$ бўлади ва бу ҳолда (α_1) шарт бажарилмайди. Агарда $p \nmid \Delta^{n+1}_{n+1,1}$ бўлса, у ҳолда (α_1) шартни $p \mid \Delta^b_{n+1,1}$ ёки $p \nmid \Delta^b_{n+1,1}$ ларнинг бажарилишига қараб l_{n+1} нинг бирорта ҳам қиймати қаноатлантирмайди ёки фақат бирта қиймати қаноатлантириши мумкин. Бу ердан $M(\alpha_i) \le 1$, $i = \overline{1,n}$ ва $N(p) \ge p-1-n$ деган хулосага келамиз. Шундай қилиб, (4.61) дан

$$A(p) \ge -c_4 p^{-2},\quad (c_4 = (n-1)2^{n+2} + 4)$$

тенгсизликга эга бўламиз.

Демак, барча $p \geq 2$ лар учун $-c_4 p^{-2} \leq A(p) \leq c_5 p^{-1}$ бажарилади.

Энди $p \in P_G$ ларни қараймиз. P_G нинг аниқланишига кўра $M(\alpha_i) = 1$, $i = \overline{1,n}$ ва $M(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, ... , $M(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$. Шунинг учун $N(p) = p - n - 1 > 0$ ва $p \geq 5$ бўлганда, $-c_6 p^{-2} \leq A(p)$ бўлади. Иккинчи томондан эса

$$A(p) < \left(\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)p^{n-2} + \frac{1}{5!}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) \times \right.$$

$$\left. \times p^{n-4} + ... \right) p^{-n-1} < c_7 p^{-3}.$$

Энди b) ва c) ҳолларни қараймиз. Аввало

$$\prod_p (1 + |A(p)|) \ll \prod_p (1 + A(p))$$

эканлигини кўрсатамиз. Агар $A(p) > 0$ бўлса, бу баҳо ўз-ўзидан тушунарли. $A(p) < 0$ бўлсин, у ҳолда а) тасдиққа асосан

$$\prod_p (1 + |A(p)|) \leq \prod_p (1 + A(p)) \prod_p \left(1 + \frac{2c_4}{p^2(1 + A(p))} \right).$$

Бу ерда

$$(1 + A(p))p^2 \geq (1 - c_4 p^{-2})p^2$$

ва

$$\prod_p \left(1 + \frac{2c_4}{p^2(1 + A(p))} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{2c_4}{(1 - c_4 p^{-2})p^2} \right) \ll 1.$$

Шунинг учун ҳам

$$\prod_p (1+|A(p)|) \ll \prod_p (1+A(p)).$$

Фараз қилайлик, $<P_G>$ ва $<P_B>$ лар туб бўлувчилари мос равишда P_G ва P_B ларга тегишли ва квадратлардан ҳоли (квадратсиз) бутун сонлар тўпламлари бўлсин. У ҳолда $t>0$ сони учун

$$\sum_{q\le t} |A(q)| \le \sum_{q_1 \in <P_B>} |A(q_1)| \sum_{q_2 \in <P_G>} |A(q_2)| \le \prod_{p\in P_B} (1+A(p)) \times$$

$$\times \prod_{p\in P_G, p\le t} (1+A(p)) \le \prod_{p\in P_B} (1+c_5 p^{-1}) \prod_{p\le t} (1+c_6 p^{-2}) \ll$$

$$\ll \prod_{p\in P_B} (1+c_5 p^{-1}) \ll \prod_{p\in P_B} (1-p^{-1})^{-c_5}.$$

бажарилади. Шундай қилиб,

$$\sum_{q=1}^{\infty} |A(q)| = \prod_p s(p)$$

қатор яқинлашувчи ва

$$\prod_{p\in P_B} (1-p^{-1})^{-c_5} = (\varphi(K)K^{-1})^{-c_5} \ll (\ln\ln N)^{c_5},$$

бунда

$$K = \prod_{p\in P_B} p \le (n!B)^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} \ll N. \tag{4.65}$$

Шундай қилиб биз b) тасдиқни ва c) тасдиқнинг биринчи қисмини исботладик. c) нинг иккинчи қисми, яъни

$$\prod_p s(p) > c_8 > 0,$$

унинг биринчи қисми ва 4.6.1 d)-леммадан келиб чиқади.

d) тасдиқ M. C. Liu, K. M. Tsang [100] даги 4.4-лемманинг 4)-тасдиғи сингари исботланади.

$\chi_j(\mathrm{mod} r_j)$, $j=\overline{1,n+1}$ — примитив характерлар ва $r = [r_1,\dots,r_{n+1}]$ эса $r_1,\dots,r_{n+1}$ сонларининг энг кичик умумий карралиси бўлсин. Бундан кейин бизга

$$Z(q)=Z(q;\chi_1,\dots,\chi_{n+1})=\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{n+1} C_{\chi_j\chi_0}(\vec{h}_j), \qquad (4.66)$$

кўринишдаги ифоданинг баҳоси керак бўлади. Бунда q сони r га каррали ва χ_0 эса q модули бўйича бош характер.

4.6.3-лемма. Қуйидаги тасдиқлар ўринли:

a) $Z(r)=r^n\sum_{(r)}\prod_{j=1}^{n+1}\chi_j(l_j)$;

b) агар $r\setminus q$ ва $q=q'q''$, $(q',q'')=1$ ҳамда q' нинг ҳар бир туб бўлувчиси r ни бўлса, у ҳолда $Z(q)=Z(q')\varphi(q'')^{n+1}A(q'')$ ва агар $q'>r$ бўлса, $Z(q')=0$

c) $\sum_{q\le Q, r\setminus q}\varphi(q)^{-n-1}Z(q)\ll\prod_p s(p)$.

Исботи. а). $q=r$ бўлганда (4.66) дан

$$Z(r)=\sum_{1\le l_1,\dots,l_{n+1}\le r}\prod_{j=1}^{n+1}\chi_j(l_j)\sum_{1\le h_1,\dots,h_n\le r}{}' e_r\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}(a_{ij}l_j-b_i)h_i\right). \quad (4.67)$$

га эга бўламиз. Агар

$$\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}l_j=b_i,\ \ i=\overline{1,n} \quad (4.68)$$

бўлса, у ҳолда $(h_1,\dots,h_n,r)=1$ шартни инобатга олмаслик мумкин ва бу ҳолда (4.67) дан лемманинг а) тасдиғи бевосита келиб чиқади. $\sum\limits_{(r)}$ йиғиндининг аниқланишига кўра (4.68) шарт бажарилади.

Энди, бу ҳолда $(h_1,\dots,h_n,r)=1$ шартни эътиборга олмаслик мумкин эканлигини кўрсатамиз. $\chi(\mathrm{mod}q)$ характер $\chi^*(\mathrm{mod}r^*)$ примитив характер билан индуцирланган характер ва $q_1=q/(q,m)$ бўлсин, у ҳолда (G. H. Hardy, E. M. Wright [93] нинг 450 бетига қаранг)

$$C_\chi(m)=\begin{cases}\overline{\chi}^*\left(\dfrac{m}{(m,q)}\right)\dfrac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)}\mu\left(\dfrac{q_1}{r^*}\right)\chi^*\left(\dfrac{q_1}{r^*}\right)C_{\chi^*}(1), & \text{агар } r^*\setminus q \text{ бўлса;}\\ 0, & \text{агарда } r^*\not\setminus q_1 \text{ бўлса.}\end{cases} \quad (4.69)$$

тенглик ўринли бўлади.

$(h_1,\dots,h_n,r)>1$ ва $p\setminus(h_1,\dots,h_n,r)$ бўлсин. $r=[r_1,\dots,r_{n+1}]$ бўлгани учун биз $p\not\setminus\dfrac{r}{r_1}$ бажарилади дея оламиз. Шунинг учун ҳам, $r_1 \nmid r(r, a_{11}h_1 + \ldots + a_{n1}h_n)^{-1}$ ва демак, (4.69) га асосан $C_{\chi_1\chi_0}(\vec{h}_1) = 0$. Шундай қилиб, агар $(h_1, \ldots, h_n, r) > 1$ бўлса, у ҳолда

$$\prod_{j=1}^{n+1} C_{\chi_j\chi_0}(\vec{h}_j) = 0.$$

Лемманинг b) ва c) қисмлари M. C. Liu, K. M. Tsang [105] 4.5 ва 4.8-леммалари сингари исботланади.

4.7. Масаланинг махсус интеграли

Масаланинг сингуляр (махсус) интеграли учун қуйидаги лемма ўринли.

4.7.1-лемма. Агар ρ_j $(j = \overline{1, n+1})$, $0 < Re\rho_j \leq 1$ лар ихтиёрий комплекс сонлар бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{R^n}\ldots\int\left(\prod_{j=1}^{n+1}\int\limits_L^N x_j^{\rho_j - 1} e(\vec{\eta}_j x_j) dx\right) e(-\vec{\eta}_b) d\eta_1 \ldots d\eta_n =$$

$$= N \frac{1}{|\Delta_1|} \int\limits_D \prod_{j=1}^{n+1} (Nx_j)^{\rho_j - 1} dx_1 \qquad (4.70)$$

тенглик ўринли. Бунда $x_2, \ldots, x_{n+1}$ ва интеграллаш соҳаси D қуйидагича аниқланади:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{12}^1 x_1 + \Delta_{12}^b N^{-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{1,n+1}^1 x_1 + \Delta_{1,n+1}^b N^{-1}) \end{cases} \qquad (4.71)$$

ва

$$D=\{x_1 : LN^{-1}\le x_1,x_2,...,x_{n+1}\le 1\}. \qquad (4.72)$$

Бундан ташқари, агар $(b_1,...,b_n)\in U(X)$ бўлса, у ҳолда $\vec{b}=(b_1,...,b_n)\in U(X)$ нинг кўпи билан $E^{(4)}(X)\ll X^nQ^{-\lambda_3}$, (бунда $\lambda_3=(16n(n+2))^{-1}$) та қийматларидан ташқари барча қийматлари учун

$$\int\limits_D dx_1 \gg Q^{-\lambda_2},\ \ \lambda_2=(16n(n+1))^{-1} \qquad (4.73)$$

баҳо ўринли бўлади.

Исботи. Тушунарлики,

$$\int\limits_{R^n}\!\!\dots\!\int\left(\prod_{j=1}^{n+1}\int\limits_L^N x_j^{\rho_j-1}e(\vec{\eta}_j x_j)dx_j\right)e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1...d\eta_n=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\int\limits_{-y}^{y}\dots\int\limits_{-y}^{y}e(-\vec{\eta}_b)\left(\prod_{j=1}^{n+1}\int_L^N x_j^{\rho_j-1}e(\vec{\eta}_j x_j)dx_j\right)d\eta_1...d\eta_n=$$

$$=\lim_{y\to\infty}N\int\limits_{L/N}^{1}\dots\int\limits_{L/N}^{1}\left(\prod_{j=1}^{n+1}(Nx_j)^{\rho_j-1}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin\left(2\pi(\sum\limits_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j-b_iN^{-1})y\right)}{\pi\left(\sum\limits_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j-b_iN^{-1}\right)}dx_1...dx_{n+1}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}NJ(y). \qquad (4.74)$$

Энди қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$t_i=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j-b_iN^{-1},\ \ i=\overline{1,n};$$

$$D(x_1)=\left\{\vec{t}=(t_1,...,t_n) \mid \ t_i=\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j-b_iN^{-1}, \ \ i=\overline{1,n};\right.$$

$$\left. N^{-1}L\le x_2,...,x_{n+1}\le 1\right\}. \qquad (4.75)$$

У ҳолда

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{\Delta_1}(\Delta_{12}^t+\Delta_{12}^bN^{-1}-\Delta_{12}^1x_1), \\ x_3=\dfrac{1}{\Delta_1}(\Delta_{13}^t+\Delta_{13}^bN^{-1}-\Delta_{13}^1x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1}=\dfrac{1}{\Delta_1}(\Delta_{1,n+1}^t+\Delta_{1,n+1}^bN^{-1}-\Delta_{1,n+1}^1x_1). \end{cases} \qquad (4.76)$$

Бу белгилашлардан фойдаланиб (4.74) дан

$$\lim_{y\to\infty} NJ(y)=$$

$$=\lim_{y\to\infty} N\int_{LN^{-1}}^{1}(Nx_1)^{\rho_1-1}\left(\int_{D(x_1)}\frac{1}{|\Delta_1|}\prod_{j=2}^{n+1}(Nx_j)^{\rho_j-1}\cdot\frac{\sin(2\pi t_{j-1}y)}{\pi t_{j-1}}dt_{j-1}\right)dx_1 \quad (4.77)$$

га эга бўламиз.

(4.77) га Дирихле интеграли тўғрисидаги Жордан теоремасини қўллаймиз. Унга кўра агар $g(t)$ функция $\mu\le t\le\lambda$ кесмада узлуксиз, дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бошқа ҳолларда

$$\lim_{y\to\infty}\int_{\mu}^{\lambda} g(t)\frac{\sin(2\pi ty)}{\pi t}dt = \begin{cases} g(0), & \text{агар } \mu < 0 < \lambda \text{ бўлса;} \\ \frac{1}{2}g(0), & \mu = 0 \text{ ёки } \lambda = 0 \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{аксинча, булар бажарилмаса,} \end{cases}$$

тенглик ўринли. $D(x_1)$ соҳа $\vec{t}=(0,...,0)$ ни ўзида сақлагани учун, бу теоремадан ва (4.72), (4.77) лардан (4.70) ни, яъни

$$\lim_{y\to\infty} NJ(y) = \frac{N}{|\Delta_1|}\int_D \prod_{j=1}^{n+1}(Nx_j)^{\rho_j-1}dx_1$$

ни ҳосил қиламиз. (4.75) ва (4.76) лардан $\vec{t}=(0,...,0)$ бўлганда мос равишда (4.72) ва (4.71) келиб чиқади.

(4.73) ни исботлаймиз. Δ_1 нинг ишорасига боғлиқ ҳолда исботни икки қисмга ажратамиз:

1^0. $\Delta_1 > 0$ бўлсин. (4.71) ва (4.72) ларга асосан (4.73) даги интеграл $[N^{-1}L;\ 1]$ интервалдаги

$$\left[\frac{L\Delta_1-\Delta_{12}^b}{-\Delta_{12}^1 N};\ \frac{\Delta_1-\Delta_{12}^b N^{-1}}{-\Delta_{12}^1}\right],$$

$$\left[\frac{L\Delta_1-\Delta_{13}^b}{-\Delta_{13}^1 N};\ \frac{\Delta_1-\Delta_{13}^b N^{-1}}{-\Delta_{13}^1}\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4.78)$$

$$\left[\frac{L\Delta_1-\Delta_{1,n+1}^b}{-\Delta_{1,n+1}^1 N};\ \frac{\Delta_1-\Delta_{1,n+1}^b N^{-1}}{-\Delta_{1,n+1}^1}\right]$$

қисм интерваллар узунликлари йиғиндисига тенг. Бу ерда биз $-\Delta_{12}^1,\ -\Delta_{13}^1,\ \ldots,\ -\Delta_{1,n+1}^1>0$ деб ҳисоблаймиз. Ҳамма вақт бундай деб ҳисоблаш мумкин, акс ҳолда a_{ik} коэффициентларнинг индексларини қайтадан алмаштириб белгилаб оламиз. $(b_1,\ldots,b_n)\in U(X)$ лар учун

$$|\Delta_{ij}^b|\le n!(B/3)^{n-1}X$$

бажарилади ва (4.21) ҳамда (4.22) ларга кўра (4.78) даги биринчи интервалнинг чап четки нуқтаси учун

$$\frac{L\Delta_1-\Delta_{12}^b}{-N\Delta_{12}^1}\le\left(LN^{-1}n!\left(\frac{B}{3}\right)^n+n!\left(\frac{B}{3}\right)^{n-1}XN^{-1}\right)\frac{1}{|\Delta_{12}^1|}<\frac{1}{3^{n-1}n!B^n}$$

баҳо ўринли.

$$-\Delta_{12}^1\le n!\left(\frac{B}{3}\right)^n$$

бўлганлиги сабабли шу интервалнинг ўнг четки нуқтаси учун эса

$$\frac{\Delta_1-\Delta_{12}^bN^{-1}}{-\Delta_{12}^1}\ge(1-n!\left(\frac{B}{3}\right)^{n-1}XN^{-1})\frac{1}{(-\Delta_{12}^1)}\ge\left(1-\frac{1}{3^n n!B^n}\right)\frac{3^n}{n!B^n}$$

бажарилади.

Шундай қилиб, (4.78) даги биринчи интервал узунлиги $\gg B^{-n}$ бўлган қисм интервални ўз ичига олади. Шу йўл билан (4.78) даги бошқа интерваллар учун ҳам юқоридаги тасдиқ ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун ҳам барча $\vec{b}\in U(X)$ лар учун

$$\int_D dx_1 \gg B^{-n} \gg Q^{-n\delta} \gg Q^{-\lambda_2}, \quad \lambda_2 > n\delta$$

бажарилади. $\lambda_2 = (16n(n+1))^{-1}$ деб оламиз, у ҳолда $\delta < (16n^2(n+1))^{-1}$ бўлади.

2^0. Энди $\Delta_1 < 0$ бўлсин. Биринчи ҳолдаги сингари бу ҳолда $\int_D dx_1$ интеграл $[LN^{-1};\ 1]$ интервалдаги

$$\left[\frac{-\Delta_{12}^b N^{-1} + \Delta_1}{-\Delta_{12}^1};\ \frac{-\Delta_{12}^b + L\Delta_1}{-N\Delta_{12}^1}\right],$$
$$\left[\frac{-\Delta_{13}^b N^{-1} + \Delta_1}{-\Delta_{13}^1};\ \frac{-\Delta_{13}^b + L\Delta_1}{-N\Delta_{13}^1}\right], \tag{4.79}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left[\frac{-\Delta_{1,n+1}^b N^{-1} + \Delta_1}{-\Delta_{1,n+1}^1};\ \frac{-\Delta_{1,n+1}^b + L\Delta_1}{-N\Delta_{1,n+1}^1}\right]$$

қисм интерваллар узунликларининг йиғиндисига тенг.

$(b_1,\dots,b_n) \in U(X)$ бўлганлиги сабабли $U(X)$ нинг аниқланишидан ва (4.4) шартга асосан

$$y_j = \frac{1}{\Delta_1}(\Delta_{1j}^b - \Delta_{1j}^1 y_1), \quad j = \overline{2, n+1}$$

чизиқли тенгламалар системаси мусбат ҳақиқий сонлар $y_1,\dots,y_{n+1}$ да ечимга эга. Бу ердан барча $j = \overline{2,n+1}$ лар учун $\Delta_{1j}^b < 0$ эканлиги келиб чиқади. Ҳар бир фиксирланган $k \geq 1$ учун $k = -\Delta_{1j}^b$ шартни қаноатлантирувчи $(b_1,\dots,b_n)$ нинг $[1,\ X]^n$

га тегишли бўлган X^{n-1} тадан кўп бўлмаган қиймати мавжуд. Шунинг учун ҳам, агар

$$k = -\Delta_{1j}^{b} \le -\Delta_{1j}^{1} N Q^{-\lambda_2}$$

бўлса, у ҳолда

$$\frac{\Delta_{1j}^{b}}{\Delta_{1j}^{1}} \le NQ^{-\lambda_2}, \quad j = \overline{2, n+1}$$

муносабат ўринли бўладиган $(b_1, \ldots, b_n) \in U(X)$ нинг

$$-\Delta_{1j}^{1} N Q^{-\lambda_2} X^{n-1}$$

тадан кўп бўлмаган қиймати мавжуд. Шундай қилиб, $(b_1, \ldots, b_n) \in$ $\in U(X)$ нинг

$$E^{(4)}(X) < X^n Q^{-\lambda_3}$$

тадан кўп бўлмаган қийматларидан ташқари барча қийматлари учун

$$\Delta_{1j}^{b} (\Delta_{1j}^{1} N)^{-1} > Q^{-\lambda_2}, \quad j = \overline{2, n+1} \qquad (4.80)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу ерда $\lambda_3 = (16n(n+2))^{-1}$, $(\lambda_3 < \lambda_2)$. $\Delta_1 < 0$ ва (4.21) га асосан

$$|\Delta_{1j}^{b} N^{-1}| \le (3^n n! B^n)^{-1}$$

бўлганлигидан барча $j = \overline{2, n+1}$ лар учун

$$-\Delta_{1j}^{b} N^{-1} + \Delta_1 \le (3^n n! B^n)^{-1} - 1 < 0$$

ўринли, яъни (4.79) даги барча интервалларнинг чап четки нуқтаси манфий, ўнг четки нуқталари эса (4.80) ва (4.21) ларга асосан $\lambda_2 < 1/90$ бўлганда барча $j = \overline{2, n+1}$ лар учун

$$(-\Delta_{1j}^{b} + \Delta_1 L)(-\Delta_{1j}^{1} N)^{-1} \geq Q^{-\lambda_2} - n\left(\frac{B}{3}\right)^{n} Q^{-1/90} > \frac{1}{2} Q^{-\lambda_2}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Демак,

$$\int_D dx_1 \geq \frac{1}{2} Q^{-\lambda_2} - LN^{-1} = \frac{1}{2} Q^{-\lambda_2} - Q^{-1/90} > \frac{1}{3} Q^{-\lambda_2}.$$

Шунинг билан лемма тўлиқ исботланди.

4.8. $I_1(\vec{b})$ интегрални баҳолаш

4.5-параграфда қайд этилганидек, (4.42) кўра $\prod_{j=1}^{n+1} H_j(\vec{h}, q, \vec{\eta})$ кўпайтмани очсак 3^{n+1} та ҳад пайдо бўлади. Уларни қуйидагича учта гуруҳга ажратамиз:

1) $T_1 = \prod_{j=1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j) I(\vec{\eta}_j)$ ҳад;

2) ҳеч бўлмаса бирта кўпайтувчиси $G_j(\vec{h}, q, \vec{\eta})$ бўлган µàäëàð. Óëàðí èí ã éè²èí äèñèí è T_2 билан белгилаймиз;

3) қолган ҳадлар. Уларнинг йиғиндисини T_3 билан белгилаймиз.

Энди

$$M_i = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)^{n+1}} \sum_{\vec{h}} e_q(-\vec{h}_b) \int_{R^n} \cdots \int T_i \cdot e(-\vec{\eta}_b) d\eta_1 \ldots d\eta_n, \quad i = 1,2,3 \qquad (4.81)$$

деб белгилаб оламиз.

Осонлик билан кўриш мумкинки, M_i — ҳақиқий сон. (4.81) белгилашдан фойдаланиб, (4.55) формулани $\vec{b}=(b_1,...,b_n)\in$ $\in U(X)$ нинг кўпи билан $E^{(2)}(X)<X^nQ^{-1}$ та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$I_1(\vec{b})=M_1+M_2+M_3+O(NQ^{-1}) \tag{4.82}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар

$$M_0=\frac{N}{|\Delta_1|}\prod_p s(p)\int_D dx_1 \tag{4.83}$$

деб олсак, у ҳолда 4.6.2 c)-леммага ва (4.73) баҳога кўра $(b_1,...,b_n)\in$ $\in U(X)$ нинг кўпи билан $E^{(4)}(X)<X^nQ^{-\lambda_3}$ та қийматларидан ташқари барча қийматлари учун

$$M_0 \gg NB^{-n}Q^{-\lambda_2} \tag{4.84}$$

бажарилади. Энди ушбу леммани исботлаймиз.

4.8.1-лемма. Барча $\vec{b}\in U(X)$ лар учун

$$M_1=M_0+O(NQ^{-4/5})$$

тенглик ўринли.

Исботи. (4.70) да $\rho_j=1$ деб олиб ва 4.6.2 d) леммадан фойдаланиб (4.81) дан

$$M_1=\sum_{q\le Q}A(q)\cdot\frac{N}{|\Delta_1|}\int_D dx_1=\frac{N}{|\Delta_1|}\left(\sum_{q=1}^{\infty}A(q)\right)\int_D dx_1+$$

$$+O\left(NQ^{-1}N^{c_9/\ln\ln N}\ln^{c_4} Q\right) \tag{4.85}$$

ни ҳосил қиламиз. 4.6.1-лемманинг a), b) қисмлари ва (4.40) га асосан

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p} (1 + A(p))$$

ва тушунарлики,

$$N^{c_9/\ln\ln N}\ln^{c_4} Q < Q^{1/5}.$$

Булардан ва (4.83) ҳамда (4.85) дан исботланаётган лемма келиб чиқади.

Энди, M_3 ни баҳолаймиз. $m_1, m_2, ...,$ лар $\{1,2,...,n+1\}$ тўпламдан олинган турли бутун сонлар ва

$$G(m_1, m_2, ...) = \sum_{(\bar{r})} \tilde{\chi}(l_{m_1})\tilde{\chi}(l_{m_2})..., \tag{4.86}$$

$$P(m_1, m_2, ...) = \int_D (Nx_{m_1})^{\bar{\beta}-1}(Nx_{m_2})^{\bar{\beta}-1}...dx_1 \tag{4.87}$$

бўлсин. Мисол учун

$$G(2,3) = \sum_{(\bar{r})} \tilde{\chi}(l_2)\tilde{\chi}(l_3), \qquad P(2,3) = \int_D (Nx_2)^{\bar{\beta}-1}(Nx_3)^{\bar{\beta}-1} dx_1.$$

Тушунарлики,

$$|P(m_1, m_2, ...)| \le 1. \tag{4.88}$$

M_3 ни баҳолашда бизга қуйидаги лемма керак бўлади.

4.8.2-лемма. Қуйидаги баҳолар ўринли:

a) $|G(m_1,m_2,...)|\le N(\tilde{r})\le\varphi(\tilde{r})$;

b) $(b_1,...,b_n)\in[1,X]^n$ нинг кўпи билан

$$E^{(5)}(X)<X^n\tilde{r}^{1-\lambda_4}$$

та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$G(m_1,m_2,...)\ll B^{\frac{1}{2}n(n+1)}\tilde{r}^{\frac{1}{2}\lambda_n},\quad \lambda_4=(n+1)/n$$

баҳо ўринли.

Исботи. 4.7.1-лемманинг c) қисмини инобатга олсак a) тасдиқ $N(\tilde{r})$ функциянинг таърифи ва унинг мультипликатив-лигидан келиб чиқади.

b) ни исботлаймиз. Қулайлик учун $\{1,2,...,n+1\}$ дан олин-ган конкрет наборни, масалан $1,2,...,n$ ни, яъни $G(1,2,...,n)$ ни қараймиз. (4.86) га асосан $G(1,2,...,n)$ ни

$$G(1,2,...,n)=\frac{1}{r^n}\sum_{1\le h_1,...,h_n\le\tilde{r}}e_{\tilde{r}}(-\vec{h}_b)C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_1)...C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_{n+1})$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Бу ерда Парсеваль айниятини қўлласак

$$\sum_{1\le b_1,...,b_n\le\tilde{r}}|G(1,2,...,n)|^2=\tilde{r}^{-n}\sum_{1\le h_1,...,h_n\le\tilde{r}}|C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_1)...C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_{n+1})|^2$$

ҳосил бўлади. $\tilde{\chi}$ примитив характер бўлгани учун $C_{\tilde{\chi}}(m)=$ $=\tilde{\chi}(m)C_{\tilde{\chi}}(1)$ ва $|C_{\tilde{\chi}}(1)|=\tilde{r}^{1/2}$ бажарилади. Шунинг учун ҳам

$$\sum_{1\le b_1,\dots,b_n\le\tilde{r}} |G(1,2,\dots,n)|^2 \le \sum_{\substack{1\le h_1,\dots,h_n\le\tilde{r}\\(h_1,\dots,h_n,\tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\vec{h}_{n+1})|^2 . \qquad (4.89)$$

Маълумки, $\tilde{\chi}$ квадратик характернинг модули $\tilde{r}=\nu_1\nu_2\dots\nu_k$ (бунда $\nu_1=2^t,\ t\in\{0,2,3\}$ ва $\nu_2<\nu_3<\dots<\nu_k$ лар тоқ туб сонлар) кўринишда бўлиши керак.

$U_1=\{\nu_j\,|\,\nu_j\nmid\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_{n+1},\ j\ge 2\}$ ва $U_2=\{\nu_j\,|\,\nu_j\notin U_1\}$ бўлсин,

$$u_i=\prod_{\nu_j\in U_i}\nu_j,\ \ i=1,2$$

деб белгилаб оламиз. У ҳолда $\tilde{r}=u_1\cdot u_2$ ва

$$u_2=\prod_{\nu_j\in U_2}\nu_j=\nu_1\prod_{\nu_j\in U_2\setminus\{\nu_1\}}\nu_j\le 8\,|\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_{n+1}|\ll B^{n(n+1)} \qquad (4.90)$$

бўлади. 4.6.1-лемманинг а) қисмини исботлашда фойдаланилган усул билан

$$\sum_{\substack{1\le h_1,\dots,h_n\le\tilde{r}\\(h_1,\dots,h_n,\tilde{r})=1}} |C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_{n+1})|^2=\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{1\le h_1,\dots,h_n\le\nu_j\\(h_1,\dots,h_n,\nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\vec{h}_{n+1})|^2\right) \qquad (4.91)$$

тенгликнинг бажарилишини кўрсатиш мумкин.

$\nu_j\in U_1$ ни фиксирлаб оламиз ва (4.91) тенгликнинг ўнг томонидаги унга мос келувчи йиғиндини қараймиз.

$$C_{\nu_j}(\vec{h}_{n+1})=\sum_{l_1\le\nu_j}{}' e\left(\frac{l_1\vec{h}_{n+1}}{\nu_j}\right)=\begin{cases}\varphi(\nu_j), & \text{агар } \nu_j\,|\,\vec{h}_{n+1} \text{ бўлса,}\\ -1, & \text{агар } \nu_j\nmid\vec{h}_{n+1} \text{ бажарилса}\end{cases}$$

ва $(h_1,...,h_n)$ нинг $\nu_j \setminus \vec{h}_{n+1}$ бажариладиган $(\nu_j-1)^{n-1}$ та қиймати мавжуд. (4.91)-тенгликдан, барча $\nu_j \in U_1$ лар учун

$$\sum_{\substack{1\le h_1,...,h_n\le\nu_j \\ (h_1,...,h_n,\nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\vec{h}_{n+1})|^2 \le \varphi(\nu_j)^{n+1} \tag{4.92}$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $\nu_j \in U_2$ бўлса, тушунарлики, (4.92)-тенгсизликнинг чап томонидаги ифода ν_j^{n+2} дан катта эмас.

Энди, (4.89) — (4.92) муносабатлардан

$$\sum_{1\le b_1,...,b_n\le\tilde{r}} |G(1,2,...,n)|^2 \ll \tilde{r}^{n+1}B^{n(n+1)}$$

га эга бўламиз. Охирги баҳодан

$$|G(m_1,m_2,...)| \gg lB^{\frac{1}{2}n(n+1)}\tilde{r}^{\lambda_4/2}$$

бажариладиган $(b_1,b_2,...,b_n)\in[1,\tilde{r}]^n$ наборлар сонининг $\tilde{r}^{n+1-\lambda_4}$ дан кўп эмас эканлиги келиб чиқади. Тушунарлики, $G(1,2,...,n)$ $\tilde{r}$ модули бўйича чегирмалар синф лари сонига боғлиқ. Шундай қилиб, $(b_1,...,b_n)\in[1,\tilde{r}]^n$ ларнинг кўпи билан

$$(X\tilde{r}^{-1})^n\tilde{r}^{n+1-\lambda_4} = X^n\tilde{r}^{1-\lambda_4}$$

та қийматидан бошқа барча қийматлари учун

$$G(m_1,m_2,...) \ll B^{\frac{1}{2}n(n+1)}\tilde{r}^{\frac{1}{2}\lambda_4} \tag{4.93}$$

бажарилади.

$m_1, m_2, \ldots$ ларнинг $\{1,2,\ldots,n+1\}$ тўпламдан олинган бошқа наборлари учун ҳам $G(m_1, m_2, \ldots)$ функция юқоридагига ўхшаш баҳоланади ва улар учун ҳам (4.93) ўз кучини сақлайди. Шунинг учун ҳам (4.93) баҳодан қуйидаги лемма келиб чиқади.

4.8.3-лемма. (4.81) тенглик билан аниқланган M_3 учун

$$M_3 = \frac{N\tilde{r}^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde{r})^{n+1}} \left(\sum_{\substack{q \le Q\tilde{r}^{-1} \\ (\tilde{r},q)=1}} A(q) \right) \{ -\sum_{j=1}^{n+1} G(j)P(j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le n+1} G(i,j)P(i,j) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n+1} G(i_1,i_2,i_3)P(i_1,i_2,i_3) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n+1} G(1,2,\ldots,n+1)P(1,2,\ldots,n+1)\} \qquad (4.94)$$

тенглик ўринли.

Исботи. T_3 даги ҳар бир ҳадни

$$(-1)^m \prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j) I(\vec{\eta}_j), \text{ бунда } m = 1,2,\ldots,n+1$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бундай ҳаднинг M_3 даги ҳиссасини $M_{3,m}$ белгилаб уни баҳолаймиз. Бунинг учун $M_{3,m}$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$M_{3,m} = (-1)^m \sum_{q \le Q} \frac{1}{\varphi(q)^{n+1}} \sum_{\vec{h}_b}{}' e_q(-\vec{h}_b) \prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j) \prod_{j=m+1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j) \times$$

$$\times \int_{R^n} \ldots \int e(-\vec{\eta}_b) \prod_{j=1}^{m} \tilde{I}(\vec{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^{n+1} I(\vec{\eta}) d\eta_1 \ldots d\eta_n = (-1)^m W_m \cdot U_m, \quad (4.95)$$

бу ерда U_m билан R^n бўйича олинган каррали интеграл белгиланган ва

$$W_m = \sum_{q\le Q,\tilde r\backslash q} \varphi(q)^{-n-1}\sum_{\vec h}{}' e_q(-\vec h_b)\prod_{j=1}^{m} C_{\tilde\chi\chi_0}(\vec h_j)\prod_{j=m+1}^{n+1} C_q(\vec h_j).$$

(4.24), (4.87) ва (4.70) тенгликлардан ($\rho_j = \tilde\beta$ ёки $\rho_j = 1$ деб олиб)

$$U_m = \frac{N}{|\Delta_1|} P(1,2,...,m) \tag{4.96}$$

ни ҳосил қиламиз. (4.67) да $\chi_1 = \chi_2 = ... = \chi_m = \tilde\chi(\mathrm{mod}\tilde r)$ ва $\chi_{m+1} = ... = \chi_{n+1} = \chi_0(\mathrm{mod} 1)$ деб олсак

$$W_m = \sum_{q\le Q,\tilde r\backslash q} \varphi(q)^{-n-1} Z(q) \tag{4.97}$$

га эга бўламиз.

4.6.3-лемманинг a), b) қисмларига асосан $Z(q)$ функцияни

$$Z(q) = Z(\tilde r)A(q'')\varphi(q'')^{n+1} = \tilde r^n \sum_{(\tilde r)}\prod_{j=1}^{n+1}\tilde\chi(l_j)A(q'')\varphi(q'')^{n+1} \tag{4.98}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $q = \tilde r q''$, $(\tilde r, q'') = 1$. (4.86), (4.97) ва (4.98) тенгликлардан

$$W_m = Z(\tilde r)\varphi(\tilde r)^{-n-1}\sum_{q''\le Q\tilde r^{-1},(q'',\tilde r)=1} A(q'') =$$

$$= \tilde{r}^n \varphi(\tilde{r})^{-n-1} G(1,2,...,m) \sum_{q'' \le Q\tilde{r}^{-1}, (q'',\tilde{r})=1} A(q'')$$

келиб чиқади. Буни ва (4.96) ни (4.95) га қўйиб

$$M_{3,m} = \frac{N\tilde{r}^n}{|\Delta_1| \varphi(\tilde{r})^{n+1}} \left(\sum_{q'' \le Q\tilde{r}^{-1}, (q'',\tilde{r})=1} A(q'') \right) \left((-1)^m G(1,2,...,m) P(1,2,...,m) \right)$$

ни ҳосил қиламиз. $m = 1,2,...,n+1$ бўлганда шундай ифодаларни йиғиб, леммада келтирилган тенгликга эга бўламиз.

Агар $Q\tilde{r}^{-1}$ — етарлича катта бўлса, у ҳолда (4.94) даги

$$\sum_{\substack{q \le Q\tilde{r}^{-1} \\ (q,\tilde{r})=1}} A(q)$$

йиғинди етарлича узун бўлади ва 4.6.2-лемманинг d) қисмига кўра уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{\substack{q \le Q\tilde{r}^{-1} \\ (q,\tilde{r})=1}} A(q) = \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O(\tilde{r} Q^{-9/10}). \qquad (4.99)$$

(4.94)-тенгликдаги катта қавс ичидаги ифодани $A(G,P)$ билан белгилаб ва (4.99) тенгликдан фойдалансак,

$$M_3 = \frac{N\tilde{r}^n}{|\Delta_1| \varphi(\tilde{r})^{n+1}} \left(\prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O(\tilde{r} Q^{-9/10}) \right) A(G,P)$$

ҳосил бўлади. Бундан (4.88) ва 4.8.2-лемманинг а) қисмидан

$$M_3 = \frac{N\tilde{r}^n}{|\Delta_1| \varphi(\tilde{r})^{n+1}} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) A(G,P) + O\left(N\tilde{r} \frac{(\ln\ln Q)^n}{Q^{9/10}} \right) \qquad (4.100)$$

ҳосил бўлади. Иккинчи томондан эса 4.6.1-лемманинг е) қисмига кўра

$$\prod_{p\nmid\tilde{r}} s(p) = \tilde{r}^n \varphi(\tilde{r})^{-n-1} \sum_{(\tilde{r})} 1. \tag{4.101}$$

Шунинг учун ҳам 4.8.1- лемма ва (4.83) дан

$$M_1 = \frac{N}{|\Delta_1|} \prod_{p\nmid\tilde{r}} s(p) \frac{\tilde{r}^n}{\varphi(\tilde{r})^{n+1}} \sum_{(\tilde{r})} \int_D dx_1 + O(NQ^{-4/5}) \tag{4.102}$$

ни ҳосил қиламиз. (4.100) ва (4.102) лардан

$$M_1 + M_3 = \frac{N\tilde{r}^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde{r})^{n+1}} \prod_{p\nmid\tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \int_D \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - \tilde{\chi}(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) dx_1 +$$

$$+ O(N\tilde{r}Q^{-4/5}) \tag{4.103}$$

келиб чиқади. (4.72) тенгликда D нинг аниқланишига кўра $Nx_j \geq L$ ва булардан

$$\prod_{j=1}^{n+1} (1 - \tilde{\chi}(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}) \geq \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq$$

$$\geq (1 - L^{\tilde{\beta}-1})^{n+1} \geq \{1 - \exp(-\frac{1}{2}(1-\tilde{\beta})\ln N)\}^{n+1} \geq$$

$$\geq \{(1-\tilde{\beta})\ln T\}^{n+1} = \omega^{n+1} \tag{4.104}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, (4.104) тенглик ва (4.101), (4.103) тенгсизликлардан

$$M_1 + M_3 \geq \omega^{n+1} M_0 - O(N\tilde{r}Q^{-4/5}) \qquad (4.105)$$

деган хулосага келамиз.

$Q\tilde{r}^{-1}$ „кичик“ бўлган ҳолда

$$\sum_{q \leq Q\tilde{r}^{-1},(q,\tilde{r})=1} A(q)$$

йиғинди учун (4.99) типидаги баҳо ола олмаймиз. Бу ҳолда қаралаётган йиғиндини баҳолаш учун 4.6.2 -лемманинг b) қис-ì èäàí ô î éäàëàí àì èç ââ ó µî ëää M_3 учун (4.94) тенгликдан

$$M_3 \ll N\tilde{r}^n \varphi(\tilde{r})^{-n-1} A(G,P)$$

баҳони ҳосил қиламиз. 4.8.2-лемманинг b) қисми ва (4.88) тенгсизликдан $(b_1,...,b_n) \in [1,X]^n$ нинг

$$E^{(5)}(X) \leq X^n \tilde{r}^{1-\lambda_4}$$

та қийматидан бошқа барча қийматлари учун

$$A(G,P) \ll B^{\frac{1}{2}n(n+1)} \tilde{r}^{-\frac{1}{2}\lambda_4}$$

баҳонинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам

$$M_3 \ll \frac{N}{\tilde{r}^{1-\lambda_4/2}} B^{\frac{1}{2}n(n+1)} (\ln\ln N)^{n+1} \ll \frac{NB^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{\tilde{r}^{1-\lambda_4/2}} (\ln\ln N)^{c_{10}}. \qquad (4.106)$$

Энди M_2 ни баҳолаймиз. Бу ерда қуйидаги лемма ўринли.

4.8.4-лемма. Барча $(b_1,...,b_n) \in [1,X]^n$ лар учун

$$M_2 \ll M_0\omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2})$$

баҳо ўринли.

Исботи. T_2 даги ҳадлар

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{l}G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})\prod_{j=l+1}^{m}E_{\tilde{\beta}}C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1}C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)$$

ёки

$$(-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{l}G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})\prod_{j=l+1}^{m}C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1}E_{\tilde{\beta}}C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j),$$

$1\le l\le m\le n+1$ кўринишга эга. Бу ифодалар бир хил баҳоланади. Шунинг учун ҳам биринчисини қараш билан чегараланамиз. Унинг M_2 даги ҳиссасини $M_2(m,l)$ билан белгилаймиз, у ҳолда (4.81)-тенгликдан

$$M_2(m,l)=(-1)^m\sum_{q\le Q,\vec{r}\backslash q}\varphi(q)^{-n-1}\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_{l+1})\ldots C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_m)\times$$

$$\times C_q(\vec{h}_{m+1})\ldots C_q(\vec{h}_{n+1})\sum_{\chi_1}\ldots\sum_{\chi_l}C_{\bar{\chi}_1}(\vec{h}_1)\ldots C_{\bar{\chi}_l}(\vec{h}_l)\times$$

$$\times\int\limits_{R^n}\ldots\int I_{\chi_1}(\vec{\eta}_1)\ldots I_{\chi_l}(\vec{\eta}_l)\tilde{I}_{\chi_l}(\vec{\eta}_{l+1})\ldots\tilde{I}_{\chi_l}(\vec{\eta}_m)I_{\chi_l}(\vec{\eta}_{m+1})\ldots I_{\chi_l}(\vec{\eta}_{n+1})\times$$

$$\times e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1\ldots d\eta_n$$

эканлиги келиб чиқади. Бу ердаги R^n бўйича олинган интегрални J билан белгилаб оламиз, у ҳолда (4.24) ва (4.70) тенгликларни инобатга олиб

$$J=\frac{N}{|\Delta_1|}\sum_{|\gamma_1|\le T}{}'\ldots\sum_{|\gamma_l|\le T}{}'\int_D\prod_{j=1}^{l}(Nx_j)^{\rho_j-1}\prod_{j=l+1}^{m}(Nx_j)^{\tilde\beta-1}dx_1$$

деб ёза оламиз. Демак,

$$M_2(m,e)=(-1)^n\frac{N}{|\Delta_1|}\int_D\prod_{j=l+1}^{m}(Nx_j)^{\widetilde{\beta-1}}\left(\prod_{j=1}^{\ell}\sum_{r_j\le Q}\sum_{\chi_j(\mathrm{mod}\,r_j)}*\sum_{|\gamma_j|\le T}(Nx_j)^{\rho_j-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{q\le Q,[\bar r,r_1,\ldots,r_l]|q}\varphi(q)^{-n-1}Z(q;\bar\chi_1,\ldots,\bar\chi_l,\tilde\chi_{l+1},\ldots,\tilde\chi_m,\mathring\chi_{m+1},\ldots,\mathring\chi_{n+1})dx_1,$$

бунда $\tilde\chi_{l+1}=..=\tilde\chi_m=\tilde\chi$ ва $\mathring\chi_{m+1}=..=\mathring\chi_{n+1}=\chi_0$.

$Nx_j\ge L>N^{1/2}$ бўлганлиги сабабли, қавс ичидаги уч каррали йиғиндини баҳолаш учун 4.5.2- леммадан, q бўйича олинган охирги йиғиндини баҳолаш учун эса 4.6.3-лемманинг с) қисмидан фойдаланамиз, у ҳолда

$$M_2(l,m)\ll M_0(\omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2})^l\ll M_0(\omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2}))$$

ҳосил бўлади. Энди барча шундай ҳадларнинг ҳиссаларини йиғсак, леммадаги баҳога эга бўламиз.

4.9. 4.1.2-теореманинг исботи

Биз $\vec b=(b_1,\ldots,b_n)\in U(X)$ нинг кўпи билан

$$E(X)<X^{n-\frac{\delta}{17n^3}}\qquad(4.107)$$

та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$I(\vec{b}) \geq I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})| > NQ^{-\frac{1}{10(n-1)}} \qquad (4.108)$$

нинг бажарилишини кўрсатамиз. Бу ердан (4.30) белгилашимизга кўра 4.1.2-теорема келиб чиқади.

Қуйидаги учта ҳолни қараймиз:

1^0. $E_{\vec{\beta}} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда M_3 қатнашмайди ва $\omega = 1$, шунинг сабабли (4.82-тенглик ва 4.8.1, 4.8.4-леммалардан етарлича кичик δ учун $\vec{b} \in U(X)$ нинг кўпи билан

$$E^{(2)}(X) < X^n Q^{-1}$$

та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$I_1(\vec{b}) > M_0(1 - c_{11}\exp(-c_3\delta^{-1/2})) - O(NQ^{-4/5}) > 0{,}01M_0 - O(NQ^{-4/5})$$

тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу ерда (4.84)-баҳодан фойдалансак $\vec{b} \in U(X)$ нинг кўпи билан

$$E^{(2)}(X) + E^{(3)}(X) + E^{(4)}(X) \ll X^n Q^{-1} + X^{n-1} + X^n Q^{-\lambda_3}$$

та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$I_1(\vec{b}) > 0{,}01c_{12}\frac{N}{B^n Q^{\lambda_2}} - O\left(\frac{N}{Q^{4/5}}\right) > \frac{N}{Q^{\lambda_2+(n+1)\delta}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{16n(n+1)} \qquad (4.109)$$

бажарилади, — деган хулосага келамиз. Бу ерда $\lambda_3 = (16n(n+2))^{-1}$.

Шунинг учун ҳам (4.36) ва (4.109) ларга асосан, $\vec{b} \in U(X)$ нинг кўпи билан

$$E(X)=\sum_{1\le i\le 4} E^{(i)}(X) < X^{n-\delta/16n^3} \qquad (4.110)$$

та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$I(\vec{b}) > NQ^{-\lambda_2-(n+1)\delta} - NQ^{-\frac{1}{6(n-1)}} > NQ^{-\frac{1}{14n(n+1)}} \qquad (4.111)$$

ўринли эканлиги келиб чиқади.

2^0. Энди $E_{\beta}=1$ ва $\tilde{r} \le Q^{\lambda_5}$, $\lambda_5=(7(n^2-1))^{-1}$ бўлсин. У ҳолда (4.104) баҳо ва 4.8.4-леммадан фойдаланиб (4.82) тенгликдан

$$I_1(\vec{b}) \ge \omega^{n+1} M_0 (1-c_{13}\exp(-c_3\delta^{-1/2})) - O(NQ^{-4/5+\lambda_3}) \qquad (4.112)$$

ни ҳосил қиламиз. (4.23)-тенгсизликка асосан

$$\omega=(1-\tilde{\beta})\ln T \gg Q^{-\lambda_5/2}(\ln Q)^{-1},$$

шунинг учун ҳам (4.84) ни эътиборга олиб, (4.112) тенгсизликдан, δ етарлича кичик бўлганда

$$I_1(\vec{b}) \gg NQ^{-\left(\frac{1}{14(n-1)}+\frac{1}{16n(n+1)}+(n+1)\delta\right)}$$

бажарилади ва бу ҳолда $\vec{b} \in U(X)$ нинг кўпи билан

$$E(X) < X^{n-\delta/16n^3} \qquad (4.113)$$

та қийматларидан бошқа барча қийматлари учун

$$I(\vec{b}) > NQ^{-\left(\frac{1}{14(n-1)}+\frac{1}{16n(n+1)}+(n+1)\delta\right)} - NQ^{-\frac{1}{6(n-1)}} > NQ^{-\frac{1}{10(n-1)}} \qquad (4.114)$$

ўринли бўлади.

3^0. Ниҳоят $E_{\tilde{\beta}}=1$ ва $\tilde{r}>Q^{\lambda_5}$, $\lambda_5=\dfrac{1}{7(n^2-1)}$ бўлсин. (4.82) тенгликнинг ўнг томонига 4.8.1, 4.8.4-леммаларни ва (4.106) баҳони қўллаб, шунингдек $\omega\le c_1$ ((4.23) тенгсизликга қаранг) эканлигини эътиборга олиб, δ етарлича кичик бўлганда

$$I_1(\vec{b})\gg NQ^{-\lambda_2-n\delta}>NQ^{-\lambda_2-(n+1)\delta} \tag{4.115}$$

ни ҳосил қиламиз, Бунда $\lambda_2=(16n(n+1))^{-1}$.

Бу (4.115)-баҳо $\vec{b}\in U(X)$ нинг кўпи билан

$$\sum_{i=2}^{5}E^{(i)}(X)$$

та қийматларидан ташқари барча қийматлари учун бажарилади.

Шундай қилиб, бу ҳолда (4.115) ва (4.38) дан

$$I(\vec{b})>NQ^{-\lambda_2-(n+1)\delta}-NQ^{-(6(n-1))^{-1}}>NQ^{-\frac{1}{14n(n+1)}} \tag{4.116}$$

ни ҳосил қиламиз. (4.116) тенгсизлик $\vec{b}=(b_1,...,b_n)\in U(X)$ нинг

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}E^{(i)}(X)<X^{n-\delta/17n^3} \tag{4.117}$$

та қийматларидан бошқа қолган барча қийматлари учун бажарилади.

Энди (4.111), (4.114) ва (4.116)-тенгсизликлардан (4.108)-тенгсизлик, шунингдек (4.110), (4.113) ва (4.117)-тенгсизликлардан (4.107)-тенгсизлик келиб чиқади. Шундай қилиб, теорема тўла исботланди.

АДАБИЁТЛАР РЕЙХАТИ

1. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** Некоторые оценки для функции делителей // Изв. АН РУз. - Ташкент, 1980. - №5. -С.39-42.
2. ***Аллаков И. А.*** Определение численного значения констант в плотностном неравенстве Галлахера // -Т.: 1980, 30 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 05.06.80. № 2248-80.
3. ***Аллаков И. А.*** Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1980. - вып.62. - С.42-56.
4. ***Аллаков И. А.*** Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. - Т.: 1981, 76 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 30.10.81. № 5166-81.
5. ***Аллаков И.*** Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Докл. АН РУз. - Ташкент, 1981. -№ 11. -С.3-5.
6. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** Оценка тригонометрических сумм по простым числам в арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. - Ташкент, 1982. - №4. -С.5-6.
7. ***Аллаков И. А.*** Некоторые оценки в бинарной проблеме Гольдбаха // Теория трансцендентных чисел и её приложения: Тез. докл. всесоюзной науч. конф. 2-4 февраля 1983г. -М.: МГУ. 1983. С. 4.
8. ***Аллаков И.*** Об одной оценке функции делителей // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1984. - вып.74. -С.92-95.
9. ***Аллаков И.*** Некоторые оценки снизу для числа представлений гольдбаховых чисел // Вопросы вычислительной

и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1985. - вып. 77. -С.37-42.

10. ***Аллаков И.*** Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии // Рассеяние ионов на поверхности кристаллов: Тез. докл. всесоюзной конф. -Ташкент-Термез, -1988.-Ч.2. -С.18.

11. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии и их приложения // Конструктивные методы и алгоритмы в теории чисел: Тез. докл. всесоюзной науч. конф. 10-16 сентября 1989. - Минск, 1989. - С.15.

12. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии // Изв. АН РУз. -Ташкент, 1990. - №5. - С.3-10.

13. ***Аллаков И.*** О распределении дробных долей последовательности $\{\alpha p^2\}$ с простыми числами из арифметической прогрессии // Изв. АН РУз. -Ташкент, 1990. - №6. -С.7-11.

14. ***Аллаков И.*** Оценка тригонометрических сумм по степеням простых чисел в арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1990. - № 9. - С.3-4.

15. ***Аллаков И.*** Оценка тригонометрических сумм по степеням простых чисел в арифметической прогрессии // М.: 1990, 30с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала деп. в ВИНИТИ 30.05.90. № 3292-В90.

16. ***Аллаков И.*** О распределении дробных долей последовательности $\{\alpha p^2\}$ с простыми числами из арифметической прогрессии // Тез. докл. респ. науч. конф. по теории чисел. 26-28 сентября 1990. -Ташкент, 1990. - С.9.

17. ***Аллаков И.*** Об одной бинарной аддитивной задаче с простыми числами из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. - 1991. - №7. - с.9.

18. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** О количестве натуральных чисел представимых в виде суммы ограниченного числа k-ых степеней // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1991. - №12. - С.5-6.
19. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1992. - №10-11. -С.12-15.
20. ***Аллаков И.*** О разрешимости системы линейных диофантовых уравнений с простыми переменными // М.: 1992, 51с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала. Деп. в ВИНИТИ 30.11.92. № 3386-В92.
21. ***Аллаков И.*** О разрешимости пары линейных уравнений с тремя простыми переменными // Узб. матем. журнал. -Ташкент, 1993. -№1.-С.26-34.
22. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** Об одновременном представлении натуральных чисел суммой простых чисел // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. II международной конф. 20-25 сентября 1993.-Тула, 1993. - С.28.
23. ***Аллаков И., Исраилов М. И.*** О сумме k-ых степеней натуральных чисел // Труды МИ РАН. -М.:, 1994. - № 207. - С.172-180.
24. ***Аллаков И.*** Об одной оценке тригонометрических сумм // International Conference on Some Topics of Mathematics. ICSTM-96. October 13-17. Samarkand, Uzbekistan. Abstracts. - 1996. - С.9.
25. ***Аллаков И.*** Об оценке суммы Вейля // Современные проблемы теории чисел и её приложения: Тез. докл. III международной конф. 9-14 сентября 1996.-Тула, 1996. - С.15.
26. ***Аллаков И.*** О сумме двух нечетных простых чисел из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. - -Ташкент, 1997. - № 8. -С.6-8.

27. *Аллаков И.* Об одной оценке тригонометрической суммы //Узб. матем. журнал. -Ташкент, 1998. - №5. -С.8-14.
28. *Аллаков И.* О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". - Казань, 2000. - № 8(459). -С.3-15.
29. *Аллаков И.* Об одном подходе к оценке тригонометрических сумм по простым числам из арифметической прогрессии // Уфимский Научный Центр РАН. Институт Математики. Труды международной науч. конф.- Уфа, 2000. - С. 8-11.
30. *Аллаков И.* Алгоритмы в некоторых аддитивных задачах теории чисел // Современные проблемы алгоритмизации и программирования: Доклады и тезисы респ. научной конф. 5-7 сентября 2001.-Ташкент, 2001. - С.393.
31. *Аллаков И.* Об одной оценке Г. Вейля -И.М.Виноградова // Сибирский матем. журнал. -Новосибирск, 2002. - №1. -С. 9-14.
32. *Аллаков И.* О числах, представимых в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа // Алгебра и её приложения: Тезисы докладов международной конф.. 5-9 августа 2002. -Красноярск, 2002.- С.3-4.
33. *Аллаков И.* О распределении дробных долей последовательности с простыми аргументами из арифметической прогрессии // Чебышевский сборник. -Тула, 2003. -Т.4. -№2(6). - С.30- 37.
34. *Аллаков И.* Об условиях разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Вестник ТерГУ. -Ташкент, 2005.- № 2. -С.146-157.
35. *Аллаков И.* Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах // Известия ВУЗов. "Математика".-Казань, 2006.-№ 1.-С.3-10.
36. *Аллаков И.* О проблеме Эйлера-Гольдбаха // Вестник ТерГУ. -Ташкент, 2006.- № 1. -С.86-91.

37. *Аллаков И., Абраев Б.* Об исключительном нуле L-функции Дирихле // Вестник ТерГУ. -Ташкент, 2008.- № 1. -С.115-120.
38. *Архипов Г. И.* и др. Теория кратных тригонометрических сумм. - М.: Наука, 1987. - 368 с.
39. *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* Об одной тернарной задаче с простыми числами // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. : Тез. докл. V международной конф. 19-20мая 2003. -Тула, 2003. -С.18-19.
40. *Бабаназаров Б., Тулаганова М. И., Файнлейб А. С.* О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз.- Ташкент, 1992. - № 6-7. - С.7-9.
41. *Виноградов А. И.* О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда // Acta arithm. - Варшава, 1985. - V.46.- P.33-56.
42. *Виноградов И. М.* Новые оценки тригонометрических сумм содержащие простые числа // Изв. АН СССР. Сер. матем. -М.:, 1938. -№ 2. -С.1-13.
43. *Виноградов И. М.* Распределение по данному модулю простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии // Изв. АН СССР. Сер. матем. -М.:, 1940.- №4.- С. 27-36.
44. *Виноградов И. М.* Об оценке тригонометрических сумм по простым числам // Изв. АН СССР. Сер. матем. -М.:, 1948.- №12. -С. 225- 248.
45. *Виноградов И. М.* Избранные труды. -М.: Изд-во АН СССР, 1952. - 435 с.
46. *Виноградов И. М.* Особые варианты метода тригонометрических сумм. - М.: Наука, 1976. - 120 с.
47. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. - М.: Наука, 1980. - 144 с.
48. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. -М.: Наука, 1981. - 176 с.

49. ***Вон Р.*** Метод Харди-Литтлвуда. -М.: Мир, 1985.-184 с.
50. ***Воронин С. М., Карацуба А. А.*** Дзета функция Римана. - М.: Физматлит, 1994. - 268 с.
51. ***Дэвенпорт Г.*** Мультипликативная теория чисел. -М.: Наука, 1971. -199 с.
52. ***Карацуба А. А.*** Основы аналитической теории чисел. - М.: Наука, 1983. - 240 с.
53. ***Карацуба А. А.*** О функции G(n) в проблеме Варинга // Изв. АН СССР, Серия матем. -М.:, 1985.- №5(49). - С. 935 -947.
54. ***Коробов Н. М.*** Тригонометрические суммы и их приложения. -М.: Наука, 1989. - 240 с.
55. ***Лаврик А. Ф.*** К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Вестник ЛГУ. - Ленинград, 1961. - №13. - С. 11-27.
56. ***Лаврик А. Ф.*** К теории распределения простых чисел на основе метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Труды МИРАН. -М.:, 1961.- № 64 . - С. 90-125.
57. ***Лаврик А. Ф.*** Приближенное функциональное уравнение для L -функции Дирихле // Труды Моск. матем. общества. -М.:, 1968. -№ 18.-С.91-104.
58. ***Лаврик А. Ф.*** Аналитический метод оценок тригонометрических сумм по простым числам арифметической прогрессии // ДАН СССР. - Москва, 1979. - № 5(248). - С. 1059-1063.
59. ***Лаврик А. Ф.*** Тригонометрические суммы по простым числам из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1979. - № 7.- С.12-13.
60. ***Лаврик А. Ф.*** Нули дзета-функции Римана // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2003. - № 4. - С. 3-4.
61. ***Лаврик А. Ф.*** Нетривиальные нули дзета-функции Римана // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2004. - № 3. - С. 3-4.

62. *Лаврик А. Ф.* Нули дзета-функции Римана // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2005. - № 2. - С. 3-4.
63. *Линник Ю. В.* О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории простых чисел // Доклады АН СССР. -М.:, 1945, т.49, с.3-7.
64. *Линник Ю. В.* Новое доказательство Теоремы Гольдбаха-Виноградова //Мат. сборник. -М.:, 1946, т.19(61), с.3-8.
65. *Митькин Д. А.* О проблеме Варинга с различными многочленами // Мат. заметки. -М.:, 1989, т.45, (61), с.3-8.
66. *Монтгомери Г. Л.* Мультипликативная теория чисел. - М.: Мир, 1974. - 160 с.
67. *Омаров А. О., Салиба Х. М., Чубариков В. Н.* О мощности исключительного множества в одной бинарной аддитивной задаче // Чебышевский сборник. - Тула, 2002. - Т.2. -№2(4). - С.123-135.
68. *Плаксин В. А.* Исключительное множество суммы простого и фиксированной степени простого числа. - Петрозаводск: 1984, 33 с. - С решением Ученого Совета Петрозаводского Госуниверситета. Деп. в ВИНИТИ 23.10 84. № 7010- 84.
69. *Плаксин В. А.* Об одном вопросе Хуа- Ло -Кена // Мат. Заметки. -М.:, 1990.- № 3(47). - с. 78-90.
70. *Прахар К.* Распределение простых чисел. -М.: Мир, 1967. -511 с.
71. *Рахмонов З. Х.* Короткие нелинейные тригонометрические суммы с простыми числами // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения.: Тез. докл.V международной конф. 19-20 мая 2003. -Тула, 2003. - С.189- 190.
72. *Сегал В. И.* Тригонометрические суммы и их некоторые приложении в теории чисел // Успехи Мат. Наук, 1956, т.1, №3-4, С.147-193.

73. *Тулаганова М. И., Файнлейб А. С.* Распределение простых векторов в целочисленнных решетках. - Ташкент.: Фан, -1989. -112 с.

74. *Чудаков Н. Г.* О проблеме Гольдбаха // Доклады АН СССР. -М.:, 1937. т.17. - с. 331-334.

75. *Холмский В. А.* Об одной оценке для функции делителей // Изв. АН РУз., сер. физ.-мат. наук. - Ташкент, 1978. - №3. -С. 76-77.

76. *Хуа-Ло-Ген.* Метод тригонометрических сумм и её приложения в теории чисел. -М.: Мир, 1964. - 240 с.

77. *Шнирельман Л. Г.* Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донецкого политех инс-та. -Ростов-Дон, 1930, т.14, №2-3, с.3-28.

78. *Allakov I. A., Israilov M. I.* About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - P.13-20.

79. *Balog A., Perelli A.* Exponential sums over primes in an arithmetic progression // Proc. Amer. Math. Soc. - 1985.- №4(93). - P. 578- 582.

80. *Brudern J.* Some additive problems of Goldbach`s type // Functiones et Appoximatio . - 2000.- №28 - P. 45-73.

81. *Brun V.* Le cridle d'Eratosphene et le theoreme de Goldbach // Videnskaps-selskapet Skr. Mat. naturw. 1920, v.1, №3.

82. *Chen J. R.* Estimates for trigonometric sums // Acta Math. Sinica.- 1964.- № 14. - P. 765-768.

83. *Chen Jing ren and Pan Chendong.* The exceptional set of Goldbach-number (I) // Sci. Sinica. - 1980. - № 4(23). - P. 416- 430.

84. *Davenport H., Erdos P.* On sums of positive integral k th powers // Ann. of Math. - 1939. -V.40.- P. 533-536.

85. *Davenport H.* On Waring`s problem for fourth powers // Ann. of Math. - 1939. - V.40.- P. 731-747.

86. ***Davenport H.*** On sums of positive integral k th powers // Amer. J. Math. - 1942. - V.64.- P.189-198.
87. ***Davenport H.*** Multiplicative number theory. Third edition. Springer. 2000. 177p.
88. ***De Bruijn N. G.*** On the number of positive integers x and free of prime factors > y // Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. - 1951. - V.54. -P.50-60.
89. ***De Bruijn N. G.*** The asymptotic behaviour of a function occuring in the theory of primes //J.Indian Math. Soc.(n.s.). -1951. - V.15. -P.25-32.
90. ***Esterman T.*** On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes // Pros. London Math. Soc. -1938. - V.44, №2, - P.307-314.
91. ***Gallagher P. X.*** Bombier's mean value theorem // Mathematika (Gr. Brit.). - 1968. - V.15. - P.1-6.
92. ***Ghosh A.*** The distribution of αp^2 modulo 1 // Proc. London Math. Soc. - 1981. -№3 (42). - P.252-269.
93. ***Hardy G. H., Littlewood J. E.*** Some problem's of " Partitio Numerorum". I. A new solution of Waring's problem. // Gottingen Nachrichten. 1920. p.33-54.
94. ***Hardy G. H., Wright E. M.*** An introduction to the Theory of Numbers. -5th.ed., Oxford University Press. - 1979. -480 p.
95. ***Harman G.*** Trigonometric sums over primes I // Mathematika (Gr. Brit.). - 1981. - V.28. - P.249-254.
96. ***Harman G.*** Trigonometric sums over primes II // Glasgow Math. J. - 1983. - №1(24). -P.23- 37.
97. ***Hasse H.*** Vorlesungen uber Zahlen theorie. Grundlehren Math. Wiss. Band 59. - Springer - Verlag, Berlin and New York. - 1964. -527 p.
98. ***Heath-Brown D. R.*** Weyl' s inequality, Hua' s inequality and Waring's problem // J. London Math. Soc. - 1988. -№2 (38). - P.216-230.
99. ***Heath-Brown D. R.*** Weyl' s inequality and Hua' s inequality // Lect. Notes Math. - 1989. -№1380. - P.87-92.

100. ***Hilbert D.*** Beweis fur die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n ter Potenzen (Waringsche problem) // Nachrichten von der Koniglichen Gesellchaft der Wissenschaften zu Gottingen, mathematische-physikalische Klasse aus den jahren 1909, 17-36; Math. Annalen, 1909, v.67, P.281-300.
101. ***Hua L. K.*** Additive theory of prime numbers. AMS. 2009. 190p.
102. ***Iwaniec H., Kowalski E.*** Analytic number theory. Colloquium publications. (AMS V.53). 2004. 615p.
103. ***Liu M. C., Tsang K. M.*** On pairs of linear equations in three prime variables and application to Goldbach' s problem // J. reine angew. Math. - 1989. - № 399. - P. 109- 136.
104. ***Liu M. C., Tsang K. M.*** Small prime solutions of linear equations // Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin- NewYork .-1989. - P.595-624.
105. ***Montgomery H. L., Vaughan R. C.*** The exceptional set in Goldbach' s problem // Acta arithm. -1975.- V.27. -P.353-370.
106. ***Montgomery H. L., Vaughan R. C.*** Multiplicative number theory: I. Classical theory. Cambridge studies in advanced math. Cambridge. 2007. 552p.
107. ***Murty M. R.*** Problems in analytic number theory. Springer Verlag. 2001. 452p.
108. Number Theory Books, 1996. http://www.numbertheory. org/ntw/N12.html
109. ***Rademacher H.*** Uber eine Erweiterung des Goldbachen Problems // Math. Zeit. - 1925. - V. 25. - P. 627-657.
110. ***Van-der-Corput J. G.*** Sur l' hypothese de Goldbach // Proc. Akad. Wet. Amsterdam . 1930, v.41, P. 76-80.
111. ***Vaughan R. C.*** On Goldbach' s problem // Acta arithm. - 1972. -№1(22). - P.21-48.
112. ***Vaughan R. C.*** Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. - 1975. -№2 (10). -P.153-162.

113. ***Vaughan R. C.*** Sommers trigonometriques sur les nombers premiers // C. R. Acad. Sci. Paris. ser.A. - 1977. - V.285. - P.981-983.
114. ***Vaughan R. C.*** A new iterative method in Waring‘s problem // Acta Math. - 1989. -№ 1-2 (162). - P.1-71.
115. ***Vaughan R. C.*** A new iterative method in Waring‘s problem II // J. London Math. Soc. - 1989. -№2 (39). - P.219-230.
116. ***Vaughan R. C.*** The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232p.
117. ***Wu Fang.*** On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math. Sinica. - 1957. -№ 7. - P.102-121.

МУНДАРИЖА