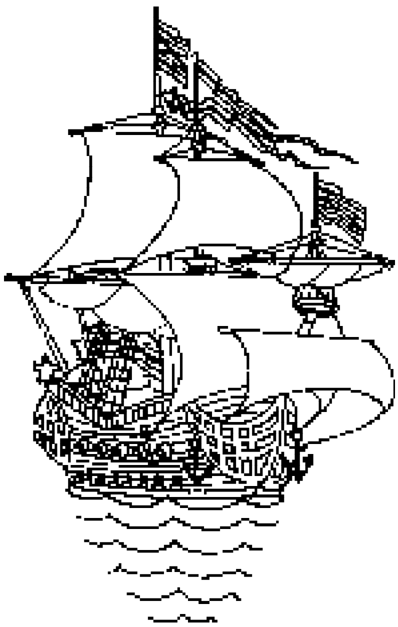
Санкт-Петербургский государственный

морской технический университет

Кафедра физики

Решение уравнений в программе MathCad

Методические указания к практическим занятиям



Санкт-Петербург
2010

Методические указания по численным методам решения уравнений подготовлены доцентом кафедры физики Исаковым Н.Я. по материалам практических занятий по численным методам. Указания согласованы с преподаванием курса высшей математики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. Указания предназначены для студентов второго курса специальности 010700 Физика.

Здесь приведены основные типы математических уравнений, которые имеют аналитическое решение, для повторения и демонстрации совпадения результатов аналитического и численного решения, а также методы решения таких уравнений в программе **MathCad**, которые не имеют аналитических решений. Сформулирована необходимость предварительной оценки области существования корней, оценки приближенных графических методов получения корней уравнений, обязательность проверки правильности решения. Рассмотрены методы повышения надежности решения алгебраических и тригонометрических уравнений путем выбора функции программы **MathCad**, решающей уравнение.

В указаниях приведены контрольные вопросы для самопроверки и подготовки к зачету по курсу «Численные методы» по разделу "Уравнения" и дан список литературы для углубленного изучения материала, относящегося к теме «Решение уравнений».

ИСАКОВ

Николай Яковлевич

Решение уравнений

Методические указания к практическим занятиям по курсу "Численные методы"

Технический редактор В.М. Дмитриев
Редактор О.Н. Исакова

ИЦ СПбГМТУ зак. …0, Тир. 1. экз

Оглавление

Решение уравнений

1 Линейное уравнение

Уравнением называют выражение вида

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ - произвольная функция аргумента x.

Корнем уравнения называется значение x, при котором справедливо равенство (1). С геометрической точки зрения действительным корнем уравнения (1) называется абсцисса точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс.

Рассмотрим алгебраическую линейную функцию

$$y(x) = ax + b, \tag{2}$$

где a и b - произвольные действительные коэффициенты.

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$ax + b = 0, \tag{3}$$

и называется линейным алгебраическим уравнением.

Корнем уравнения (3) является значение $x = \frac{-b}{a}$ (точное решение). Здесь и далее при упоминании точного решения будем иметь ввиду, что при подстановке полученного корня в исходное уравнение, ожидаем получить нулевое значение невязки. При этом цифровое представление точного символьного решения (рис. 2) в программе **MathCad** не всегда будет приводить к значению невязки равной нулю. Величина невязки сильно зависит от количества знаков после десятичного разделителя, определяемого пользователем самостоятельно.

В программе **MathCAD** для решения линейного уравнения необходимо записать: текстовый блок,

Линейное уравнение

а затем коэффициенты уравнения,

$$a := 3 \qquad b := -1$$

линейную функцию,

$$y(x) := a \cdot x + b$$

линейное уравнение $ax + b = 0$ в программе **MathCAD** может быть представлено в виде $ax + b$. Для символьного решения уравнения курсор располагаем рядом с неизвестной величиной $a \cdot x + b$ (синий уголок).

$$a \cdot x + b$$

и его решение

$$-\frac{b}{a} = 0.333$$

Таким образом в программе **MathCAD** должно быть написано следующее (рис. 1)

Линейное уравнение

$$a := 3 \qquad b := -1$$

Линейная функция

$$y(x) := a \cdot x + b$$

Варианты записи уравнения

$a \cdot x + b$ Для символьного решения

$a \cdot x + b = 0$ Для цифрового приближенного решения

$x := -\frac{b}{a}$ Символьное решение

$-\frac{b}{a} =$ Представление символьного решения

Рис. 1. Решение линейного уравнения.

Для получения решения в предпоследней строке (рис. 1) необходимо навести курсор в программе **MathCAD** на окрестность неизвестной величины x в уравнении слева или справа от неизвестной величины. Затем войти в меню Symbolics, в котором выбрать пункт меню Variable, и далее в дополнительном меню выбрать пункт меню

Solve. Результатом является точное символьное решение $-\frac{b}{a}$, а после нажатия на знак равенства на клавиатуре рядом с символьным выражением появляется численный результат, приведенный на рис. 1 справа от символьного корня. Численное значение корня уравнения можно представить на экране с различной степенью точности.

Выполним проверку двух значений точного решения $x = 0,333$ и $x = 0,33333333$ подстановкой их в уравнение (3). В **MathCADe** это выглядит так:

Проверка корня

$$y(0.333) = -10 \times 10^{-4} \qquad y(0.33333333) = -1 \times 10^{-8}$$

$$y\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

Рис. 2. Проверка корня линейного уравнения.

В полученном решении символьное представление дает точное значение корня, а действительные результаты, представленные с различной точностью (3 или 8 знаков после десятичного разделителя), дают невязку, отличающуюся на 4 порядка (рис 2).

При других значениях коэффициентов линейного уравнения можно получить точное представление точного решения.

Линейное уравнение

$$v := 2 \qquad s0 := -5$$

Линейная функция

$$s(t) := v \cdot t + s0$$

$$v \cdot t + s0 \quad -\frac{s0}{v} = 2.5$$

$$t := -\frac{s0}{v}$$

Проверка корня

$$s(2.5) = 0$$

Рис. 3. Точное решение линейного уравнения.

Таким образом, в результате точного решения уравнения (3) получаем тождество

$$vt_0 + s_0 \equiv 0, \qquad (4)$$

где t_0 - точное значение корня.

Если в результате решения уравнения по какой либо причине получено приближенное решение, то вместо тождества (4) получаем равенство

$$ax_{01} + b = c, \qquad (5)$$

где x_{01} называют первым приближением решения уравнения (3), а константу c называют невязкой. Как правило, величину невязки стараются получить меньше 10^{-6} [5,9].

Пусть заданы две линейные функции

$$y_1(x) = a_1 x + b_1, \qquad (6)$$

$$y_2(x) = a_2 x + b_2. \qquad (7)$$

Рассмотрим уравнение

$$y_1(x) = y_2(x),$$

т.е.

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2, \qquad (8)$$

или

$$\psi(x) = (a_1 x + b_1) - (a_2 x + b_2) = 0. \qquad (9)$$

Решение в программе **MathCAD** можно получить в виде

Коэффициенты линейных функций

$$a1 := 0.2 \quad b1 := 0.4 \quad a2 := -0.2 \quad b2 := 2$$

2 линейные функции

$$y1(s) := a1 \cdot s + b1 \qquad y2(s) := a2 \cdot s + b2$$

Линейное уравнение

$$(a1 \cdot s + b1) - (a2 \cdot s + b2) = 0$$

$$s := 0$$

Given

$$(a1 \cdot s + b1) - (a2 \cdot s + b2) = 0$$

$$\mathrm{Find}(s) \rightarrow 4.0$$

Проверка корня

$$\psi(s) := (a1 \cdot s + b1) - (a2 \cdot s + b2)$$

$$\psi(4.0) = 0$$

Рис. 4. Решение линейного уравнения.

Точное аналитическое решение уравнения (8) имеет вид

Символьно решаем уравнение

$$(a1 \cdot s + b1) - (a2 \cdot s + b2) = 0$$

$$(a1 \cdot s + b1) - (a2 \cdot s + b2)$$

Точное аналитическое решение

$$s := -\frac{b1 - b2}{a1 - a2} \qquad s = 4$$

Рис. 5. Точное аналитическое решение линейного уравнения.

2 Квадратное уравнение

Если в уравнении (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, т.е. является квадратичной функцией, то уравнение (1) примет вид

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{10}$$

и называется квадратным уравнением, где a, b и c - действительные коэффициенты квадратного уравнения.

Если дискриминант уравнения (10) $D > 0$, то парабола функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках и уравнение (10) имеет два действительных различных корня. Если вершина параболы касается оси абсцисс, то уравнение имеет два одинаковых корня, а если вершина параболы выше оси абсцисс при $a > 0$ или вершина параболы ниже оси абсцисс при $a < 0$, то действительных корней нет.

Проиллюстрируем это утверждение в программе **MathCAD**.

Запишем текстовый блок Квадратное уравнение . Присвоим начальные значения коэффициентам квадратного уравнения $a := 0.3$ $b := 3$ $c := -5.5$. Запишем квадратичную функцию $y(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Запишем уравнение для символьного решения в виде $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Разместим курсор (синий уголок) в окрестности неизвестной величины x при ее квадрате или первой степени и вызовем встроенную функцию Solve программы **MathCAD**, как было описано в разделе 1. Ниже появится символьное аналитическое решение квадратного уравнения

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\dfrac{b}{2} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2}}{a} \\ -\dfrac{\dfrac{b}{2} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2}}{a} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Разместив курсор курсорными клавишами после закрывающей круглой скобки последнего выражения, нажимаем на знак равенства на клавиатуре или на панели калькулятора программы **MathCAD** и правее получаем числовые значения корней

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \\ -\dfrac{\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.583 \\ -11.583 \end{pmatrix}$$

Полученное решение можно переписать в виде

$$x1 := -\frac{\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \qquad x1 = -11.583$$

$$x2 := -\frac{\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2}}{a} \qquad x2 = 1.583 \quad .$$

Выполним проверку решения

Проверка решения

$$y(x1) = -7.105\times 10^{-15} \qquad\qquad y(x2) = 0$$

Левый корень имеет невязку порядка 10^{-15}, правый корень обеспечивает значение невязки равное нулю.

Рассмотрим 2 линейные функции аргумента s

$$y_1(s) = a_1 s + b_1, \tag{12}$$

$$y_2(s) = a_2 s + b_2. \tag{13}$$

Как и для функций (6) и (7) на коэффициенты в выражениях (12) и (13) не накладываем никаких ограничений.

Квадратичная функция (10) может быть получена перемножением двух линейных функций и в программе **MathCAD** может быть представлена 2 способами

$$y3(s) = y1(s)\,y2(s), \tag{14}$$

$$y3(s) = (a_1 s + b_1)(a_2 s + b_2). \tag{15}$$

Рассмотрим вариант задания квадратного уравнения, где квадратичная функция задана равенством (14)

Коэффициенты линейных функций

$$a1 := 0.2 \quad b1 := 0.4 \quad a2 := -0.2 \quad b2 := 2$$

2 линейные функции

$$y1(s) := a1\cdot s + b1 \qquad y2(s) := a2\cdot s + b2$$

Уравнение для решения имеет вид $y1(s)\cdot y2(s) = 0$. Попытка применить функцию 

из меню 

приводит к появлению сообщения 

.

Для решения уравнения (14) запишем Solve Block в виде

$$s := 0$$

Given

$$y1(s)\cdot y2(s) = 0$$

$$\mathrm{Find}(s) \rightarrow (-2.0 \quad 10.0)$$

В результате решения квадратного уравнения получены 2 корня $s_1 = -2.0$ и $s_2 = 10.0$. Выполним проверку каждого из них:

Проверка корней

$$y1(-2.0)\cdot y2(-2.0) = 0$$

$$y1(10.0)\cdot y2(10.0) = 0 \quad .$$

Полученные значения корней дают нулевую невязку. Решение в цифровом виде совпадает с символьным аналитическим решением вида (11).

Приведем пример символьного решения квадратного уравнения (15) в программе **MathCad**.

Квадратое уравнение

Коэффициенты линейных функций

$$a1 := 0.2 \quad b1 := 0.4 \quad a2 := -0.2 \quad b2 := 2$$

2 линейные функции

$$y1(s) := a1 \cdot s + b1 \qquad y2(s) := a2 \cdot s + b2$$

Уравнение

$y1(s) \cdot y2(s)$ Не имеет символьного решения

Уравнение

$$(a1 \cdot s + b1) \cdot (a2 \cdot s + b2)$$

Символьное решение

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{b1}{a1} \\ -\dfrac{b2}{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Уравнение

$$(a1 \cdot s + b1) \cdot (a2 \cdot s + b2)$$

Выполним символьную операцию COLLECT

$$a1 \cdot a2 \cdot s^2 + (a1 \cdot b2 + a2 \cdot b1) \cdot s + b1 \cdot b2$$

Символьно решаем уравнение

$$\begin{pmatrix} -\frac{b1}{a1} \\ -\frac{b2}{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad s1 := -2 \qquad s2 := 10$$

Рис. 6. Точное символьное решение квадратного уравнения.

Найдем точки пересечения параболы $y1(x) = ax^2 + bx + c$ с линейной функцией $y2(x) = dx + e$ при условии их существования. Проверку существования корней в большинстве случаев необходимо выполнять построением графика функции в таком виде, чтобы точки пересечения построенной функции с осью абсцисс не вызывали сомнений, для чего приходится строить дополнительную линию $y = 0$, как показано на рис. 7.

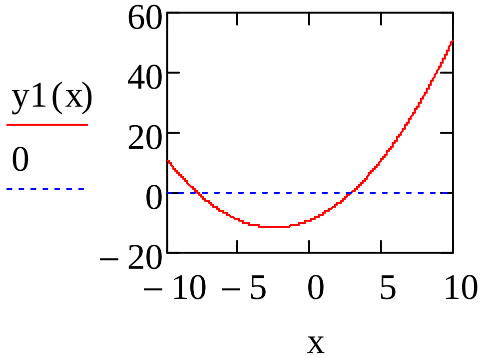


Рис. 7. Демонстрация существования корней квадратичной функции.

В точках пересечения параболы $y1(x)$ с графиком линейной функции $y2(x)$ должно выполняться равенство

$$y1(x) = y2(x), \tag{16}$$

или

$$y1(x) - y2(x) = 0. \tag{17}$$

В записи линейной функции $y2(x)$ употреблена константа e, которая в программе **MathCAD** имеет зарезервированное значение, численно равное основанию натуральных логарифмов e=2.718....

Для различения этих констант необходимо обозначать константу пользователя в линейной функции той же удвоенной буквой ee (если этого не сделать, основание натуральных логарифмов в программе будет испорчено), либо использовать другую букву для обозначения свободного члена линейной функции.

Запишем Solve Block для решения уравнения (17) в виде

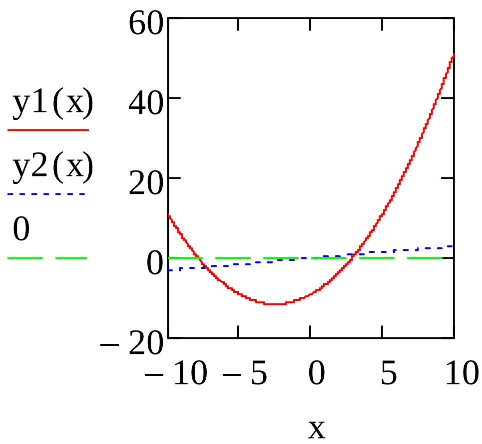
Квадратное уравнение

$a := 0.4 \quad b := 2 \quad c := -9$

$$y1(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$d := 0.3 \quad ee := 0$

$$y2(x) := d \cdot x + ee$$



Создаем Solve Block

$x := 0$

Given

$$y1(x) - y2(x) = 0$$

$$x := \text{Find}(x) \rightarrow (3.07265572157294773633 \quad -7.32265572157294773633)$$

$$x1 := -7.32265572157294773633$$

$$x2 := 3.07265572157294773633$$

$$y3(x) := y1(x) - y2(x)$$

Проверка корней

$$y3(x1) = -1.332 \times 10^{-15}$$

$$y3(x2) = 0$$

Рис. 8. Решение квадратного уравнения.

При решении физических задач искомые неизвестные величины, такие как путь, перемещение, скорость, ускорение или их проекции, принято обозначать определенными буквами. **MathCAD** позволяет использовать общепринятые для предметной области обозначения физических величин.

Решим задачу.

При спуске с горы скорость велосипедиста в течение 30 с увеличилась с 2 м/с до 10 м/с. Определить ускорение велосипедиста при спуске. Какой путь проехал велосипедист по склону?

В **MathCad**е решение выглядит так

$$v1 := 2 \qquad v2 := 10 \qquad t := 30$$

$$a := \frac{v2 - v1}{t} \qquad a = 0.267$$

$$s(t1) := v1 \cdot t1 + \frac{a \cdot t1^2}{2} \qquad s(30) = 180$$

Рис. 9. Нахождение ускорения и пути.

Эту же задачу можно решать, в полной мере используя средства решения уравнений программы **MathCAD**.

Введем новые обозначения для начальной и конечной скорости велосипедиста и создадим Solve Block.

$$v0 := 2 \qquad v(t) := 10 \quad t1 := 30$$

$$a := 0$$

Given

$$v(t) = v0 + a \cdot t$$

$$\text{Find}(a) \rightarrow \frac{4}{15}$$

$$s(t1) := v0 \cdot t1 + \frac{a \cdot t1^2}{2} \qquad s(t1) = 180$$

Рис. 10. Решение задачи по физике.

Решим задачу с измененным условием.

При спуске с горы скорость велосипедиста увеличилась с 2 м/с до 10 м/с. Длина разгонного участка пути составила 180 м. Какое время затрачено на разгон по склону?

Для решения задачи запишем систему уравнений (18) и (19).

Ускорение велосипедиста при разгоне равно

$$a = \frac{v2 - v0}{t}, \tag{18}$$

где t - время разгона.

Длина склона равна

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{19}$$

Если подставить ускорение (18) в уравнение (19), то все физические величины, кроме времени, становятся известными, что позволяет воспользоваться для решения задачи средствами программы MathCAD.

Квадратное уравнение

$$v0 := 2 \qquad v2 := 10$$

$$a := \frac{v2 - v0}{t} \qquad s := v0 \cdot t + \frac{\frac{v2 - v0}{t} \cdot t^2}{2}$$

В этой строке время не определено и поэтому подсвечено красным цветом

$$t := 10 \quad s := 180$$

$$\text{Given}$$
$$\frac{t^2}{2}\cdot\frac{v2 - v0}{t} + v0\cdot t - s = 0$$
$$\text{Find}(t) \rightarrow 30$$

Рис. 11. Обратная задача по физике.

В некоторых случаях (когда не записана система уравнений в явном виде в **MathCad**е) функциональная зависимость ускорения (18) с неопределенным временем является препятствием для решения уравнения программой **MathCAD**. В таких случаях, когда искомая переменная подсвечена красным цветом (здесь время t), лучше задать в качестве первого приближения времени значение этой величины несколько менее ее ожидаемого значения. На рис. 11 задано значение 10 с. Программа получила правильный ответ. Такой же ответ получаем, если время задать равным 1 с. Значение полученного ответа не изменяется, если Вы зададите 50 или 100 с в качестве начального приближения перед Solve Block в этой задаче. В других задачах при неправильно выбранном приближении может быть получено не верное решение или не получено ни какого.

Следует заметить, что после подстановки ускорения (18) в уравнение (19) оно из квадратного превращается в линейное относительно искомой переменной t.

Задача

Тело, брошенное вертикально вверх, побывало на высоте 45 м дважды с интервалом 8 с. Определить величину начальной скорости, с которой тело было брошено вертикально вверх.

Дано:

h =45 м;

Δt =8 с.

Найти: v_0**.**

Анализ

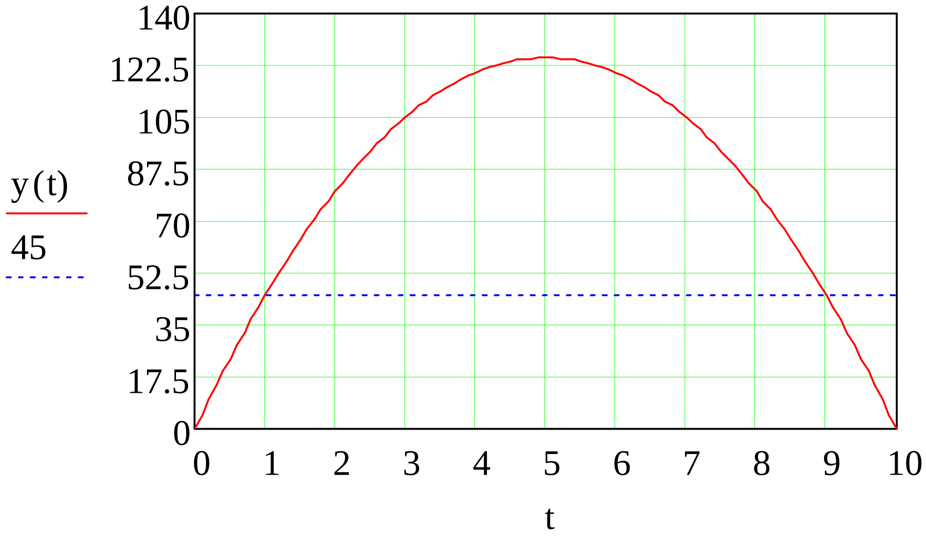


Рис. 12. Зависимость высоты от времени.

Поскольку тело побывало на высоте h (отмеченной штриховой линией на рисунке 12) дважды, то можно считать, что в момент времени t_1 тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_{01} с высоты h. В этом случае тело пребывало в полете в течение Δt, значит на подъем была затрачена только половина этого времени $\frac{\Delta t}{2}$, а половина на падение на высоту h в момент времени t_2. Таким образом, выразим скорость

$$v(t) = v_{01} - gt, \tag{20}$$

где t - текущее время от момента пребывания на высоте h.

Из уравнения (20) найдем скорость в момент достижения высоты h, считая время подъема равным $\frac{\Delta t}{2}$

$$0 = v_{01} - g\frac{\Delta t}{2}, \tag{21}$$

откуда

$$v_{01} = g\frac{\Delta t}{2}. \tag{22}$$

Определим, на какую высоту тело поднимется от высоты h, из уравнения

$$y_{max1} = v_{01}\frac{\Delta t}{2} - \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2. \qquad (23)$$

Перепишем уравнение (23) с учетом значения (22) в виде

$$y_{max1} = g\frac{\Delta t}{2}\frac{\Delta t}{2} - \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2. \qquad (24)$$

Из уравнения (24) после приведения подобных можем записать

$$y_{max1} = \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2. \qquad (25)$$

Таким образом, можем вычислить значение максимальной высоты подъема относительно начальной точки бросания из уравнения

$$y_{max} = h + \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2. \qquad (26)$$

Если тело падало с максимальной высоты y_{max} (26), то для вертикальной координаты можем записать уравнение

$$h + \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \frac{g}{2}t_p^2. \qquad (27)$$

где t_p - время падения тела с высоты y_{max} (26).

Из уравнения (27) вычислим время падения тела на землю

$$t_p = \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)}{g}}. \qquad (28)$$

В момент подъема тела на максимальную высоту y_{max} его скорость будет равна нулю, поэтому можем записать уравнение для нахождения начальной скорости

$$0 = v_0 - g\sqrt{\frac{2\left(h + \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)}{g}}, \qquad (29)$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2g\left(h + \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)}. \qquad (30)$$

Решение

Подставив числовые значения в конечную формулу (30), получим

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 10\left(45 + \frac{10}{2}\left(\frac{8}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{20\left(45 + 5(4)^2\right)} = 50.$$

Начальная скорость тела равна 50 м/с.

Ответ: 50 м/с.

Рассмотрим решение этой задачи средствами программы **MathCAD**.

Квадратное уравнение

Физическая схема 1

$h := 45 \qquad \Delta t := 8 \qquad g := 10$

Время подъема до максимальной высоть

$tp1 := \frac{\Delta t}{2} \qquad tp1 = 4$

Скорость на высоте h

Given

$v01 - g \cdot tp1 = 0$

$\mathrm{Find}(v01) \to 40 \qquad v01 := 40$

Проверка решения

$v01 - g \cdot tp1 = 0$ Решение точное

Полная высота подъема

$$h1 := v01 \cdot tp1 - \frac{g}{2} \cdot (tp1)^2 \qquad h1 = 80$$

$$ymax := h + h1 \qquad ymax = 125$$

Полное время падения

Given

$$ymax = \frac{g}{2} \cdot tpp^2$$

$$Find(tpp) \rightarrow (-5 \quad 5) \qquad tpp := 5$$

Лишний корень $tpp := -5$

$$ymax - \frac{g}{2} \cdot tpp^2 = 0$$ Решение точное

Находим начальную скорость

Given

$$v0 - g \cdot tpp = 0$$

$$Find(v0) \rightarrow 50 \qquad v0 := 50$$

$$t := 0, 0.1 .. 10$$

$$y(t) := v0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \qquad v(t) := v0 - g \cdot t \qquad v(1) = 40$$

$$y(5) = 125$$

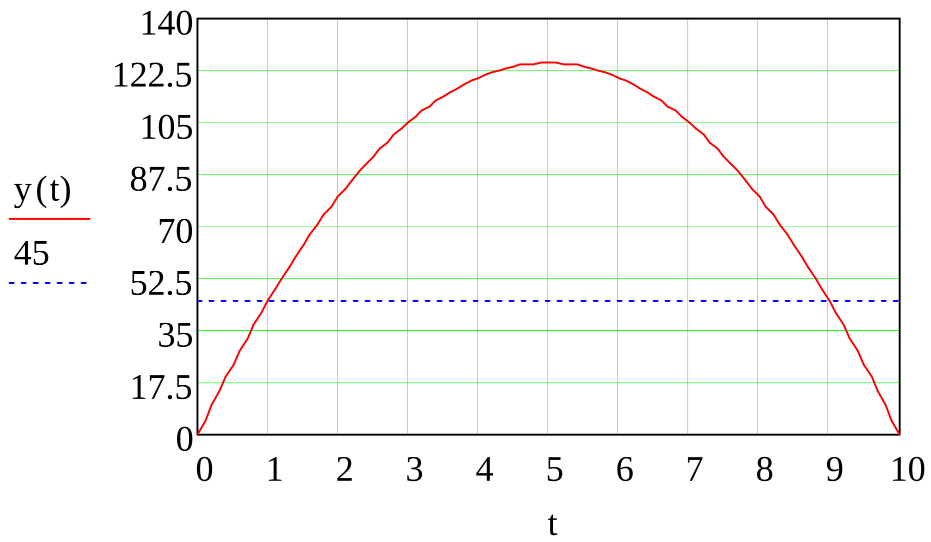


Рис. 13. Решение задачи по кинематике средствами программы **MathCAD**.

Эту же задачу можно решить, несколько изменив ход рассуждений. Первоначально инициализируем константы.

Квадратное уравнение

Физическая схема 2

$$h := 45 \qquad \Delta t := 8 \qquad g := 10 \qquad t := 1$$

$$tp1 := \frac{\Delta t}{2} \qquad tp1 = 4$$

Определим скорость тела на высоте h

Скорость на высоте h

Given

$$v01 - g \cdot \frac{\Delta t}{2} = 0$$

$$v01 := \mathrm{Find}(v01) \rightarrow 40 \qquad v01 = 40$$

Записываем основные уравнения, в результате решения которых получаем искомую начальную скорость

Основной Solve Block

Given

$$v0 - g \cdot t1 = g \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$v0 \cdot t1 - \frac{g}{2} \cdot t1^2 = 45$$

$$x := \mathrm{Find}(v0, t1) \rightarrow \begin{pmatrix} -50 & 50 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} -50 & 50 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Отрицательных корней времени не должно быть.

$$v0 := 50 \qquad t1 := 1$$

$$t := 0, 0.01 .. 10$$

График скорости

$$v(t) := v0 - g \cdot t$$

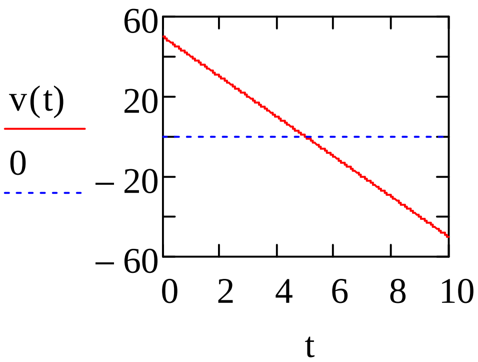
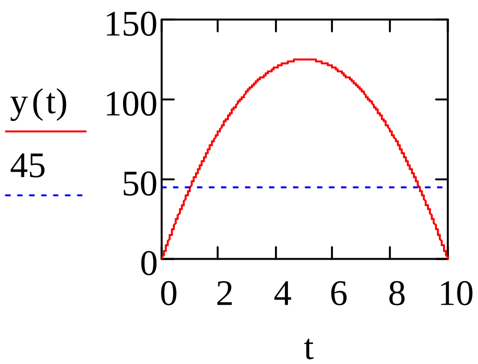


График вертикальной координаты

$$y(t) := v0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$



Проверка решения

$$v0 - g \cdot t1 - g \cdot \frac{\Delta t}{2} = 0$$

$$v0 \cdot t1 - \frac{g}{2} \cdot t1^2 - 45 = 0$$ Решение точное

Рис. 14. Второй вариант решения уравнений в задаче по физике.

В тех случаях, когда функции Solve или Find не могут найти корни уравнения, можно воспользоваться функцией приближенного решения уравнений Minerr.

$$\begin{pmatrix} v0 \\ t1 \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(v0, t1) \qquad v0 = 50 \qquad t1 = 1$$

Рис. 15. Приближенное решение уравнений.

Приведенная на рис. 15 строка приближенного решения уравнения обычно заменяет строку с вызовом функции Find(Var1,Var2).

При решении конкретных уравнений на выбор функции влияют интуиция и опыт оператора или более длинный способ получения решения методом подбора функций для решения уравнений. Из получаемого таким способом набора решений выбирают решение, обеспечивающее меньшую погрешность решения уравнения (меньшую величину невязки), которая вычисляется проверкой всех решений.

3 Показательное уравнение

Рассмотрим показательную функцию вида

$$y(x) = a^x, \tag{31}$$

где $a > 0$ $a \neq 1$; x может принимать любые действительные значения.

Показательное уравнение имеет вид

$$a^x = b, \tag{32}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$; $b > 0$ - произвольное положительное действительное число.

Аналитическое решение уравнения (32) дает единственный корень $x = \log_a b$, а при решении в программе **MathCAD** проверка подстановкой корня в исходное уравнение требуется всегда.

Рассмотрим уравнение

$$a^{f(x)} = b, \tag{33}$$

Уравнение (33) является более сложным видом показательного уравнения. Решение такого показательного уравнения зависит от вида показательной функции $f(x)$. Примеры решений показательных уравнений можно найти в справочнике [12].

Пусть дана трансцендентная функция, включающая показательную функцию

$$y(x) = \frac{2^3 - x^3}{\sqrt{2^x + 1}}. \tag{34}$$

Решим уравнение

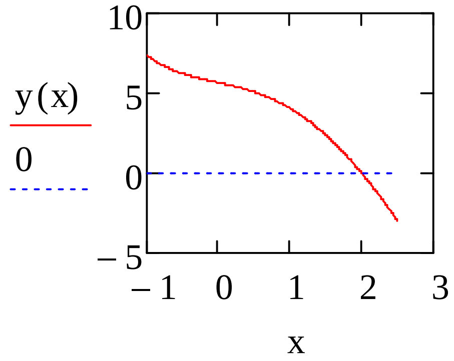
$$\frac{2^3 - x^3}{\sqrt{2^x + 1}} = 0 \tag{35}$$

с помощью встроенной функции Find. Корень уравнения (35) определяется только числителем выражения и в известных пределах не зависит от знаменателя.

Сложная функция

$$y(x) := \frac{2^3 - x^3}{\sqrt{2^x + 1}}$$

Графическое подтверждение существования корня



Решение показательного уравнения

$x1 := 1.0$

Given

$$\frac{2^3 - x1^3}{\sqrt{2^{x1} + 1}} = 0$$

$$\mathrm{Find}(x1) \rightarrow \left(-1 - \sqrt{3}\cdot i \quad -1 + \sqrt{3}\cdot i \quad 2\right)$$

Проверка решения

$$X1 := -1 - \sqrt{3}\cdot i$$

$y(X1) = 1.401 \times 10^{-15} + 1.069i \times 10^{-15}$ Хорошая точность

$X2 := -1 + \sqrt{3}\cdot i$

$y(X2) = 1.401 \times 10^{-15} - 1.069i \times 10^{-15}$ Хорошая точность

$X3 := 2$

$y(X3) = 0$ Точное решение

Рис. 16. Решение сложного показательного уравнения.

Легко проверить вручную, что полученные решения точные. А на экране мы видим приближенное представление точного решения.

В уравнение, содержащее показательную функцию, могут входить и функции других типов, например, тригонометрические.

Пусть имеется функция вида

$$z(t) = 2^{-t} - \left(1 - 0{,}5t^2 \sin(t)\right), \tag{36}$$

график которой приведен на рис. 17.

На интервале [-2;3,5] графическим способом можно отобразить 3 корня.

Сложное уравнение

$$z(t) := 2^{-t} - \left(1.0 - 0.5 \cdot t^2 \cdot \sin(t)\right)$$

$$t := -2, -1.99 \,..\, 3.5$$

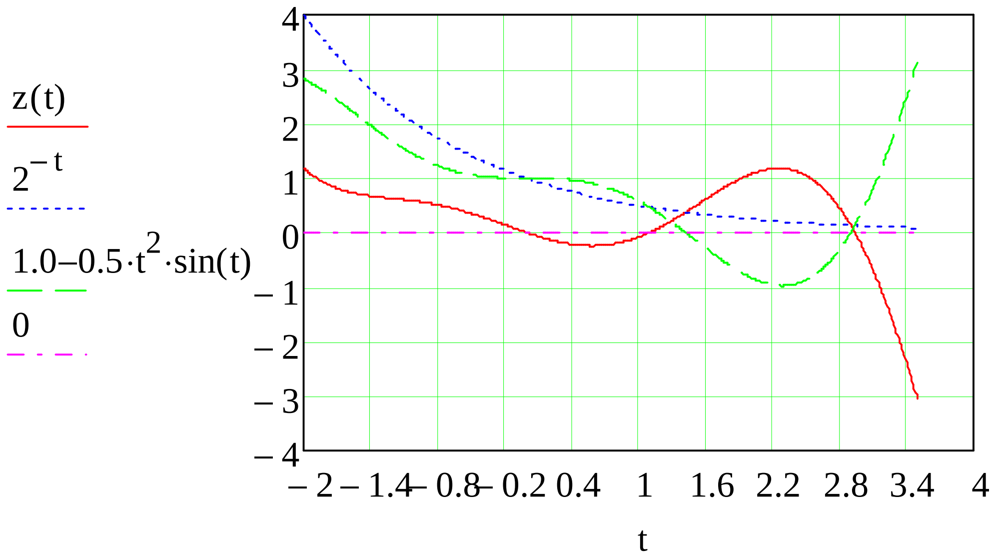


Рис. 17. Уравнение со сложной трансцендентной функцией.

Для решения уравнения воспользуемся встроенной функцией $\mathrm{Root}\left(z(t), t, Lb, Rb\right)$. В круглых скобках функции Root() на первом месте указана функция, определенная внутри Solve Block с перечислением всех аргументов. Здесь на первом месте указана функция $z(t)$. Два последних аргумента функции представляют левую и правую границы, между которыми будет проведен поиск решения t. Числовое значение левой границы должно быть меньше числового значения правой границы $Lb < Rb$.

Для нахождения большего корня ($z(t) = 0$) зададим начальное приближение и сформируем Solve Block (рис. 18).

$$t := 2.5$$

Given

$$2^{-t} - \left(1.0 - 0.5 \cdot t^2 \cdot \sin(t)\right) = 0$$

$$tt0 := \mathrm{root}(z(t), t, 2.6, 4.8)$$

$$tt0 = 2.938838$$

Проверка решения

$$z(2.939) = -6.051 \times 10^{-4}$$

$$z(2.938838) = -9.824 \times 10^{-7}$$

Рис. 18. Решение уравнения с показательной функцией.

Последние две строчки (рис. 18) демонстрируют зависимость невязки от представления числового значения корня. При трех знаках невязка имеет порядок 10^{-4} , а при шести знаках уменьшается до 10^{-7}.

Для нахождения среднего корня последние две строки Solve Block нужно переписать в виде (рис. 18,а)

$$tt0 := \mathrm{root}(z(t), t, 1.0, 1.5)$$

$$tt0 = 1.093851$$

Проверка решения

$z(tt0) = 0$ Решение точное.

Рис. 18,а. Решение уравнения с показательной функцией.

При нахождении наименьшего корня последние две строки должны иметь вид (рис. 18,б)

$$tt0 := \mathrm{root}(z(t), t, -0.1, 0.4)$$

$$tt0 = 0$$

Проверка решения

$z(tt0) = 0$ $z(0.0000) = 0$

Рис. 18,б. Решение уравнения с показательной функцией.

Для меньшего и среднего корней невязка равна нулю в представлении, которое обеспечивает программа. Не следует забывать, что решение приближенное.

Одним из наиболее важных видов показательного уравнения для физиков является уравнение вида

$$e^x = b, \tag{37}$$

где $e = 2,71...$ - основание натуральных логарифмов; а x может принимать комплексные значения.

Получим решение уравнения

$$0,5e^p - p - 1 = 0. \tag{38}$$

Сначала убедимся в наличии корней выбранного уравнения (38), построив график функции $s(p) = 0,5e^p - p - 1$

Показательное уравнение

$$z(p) := 0.5 \cdot e^p - p - 1$$

$$p := -1, -0.99 .. 2.1$$

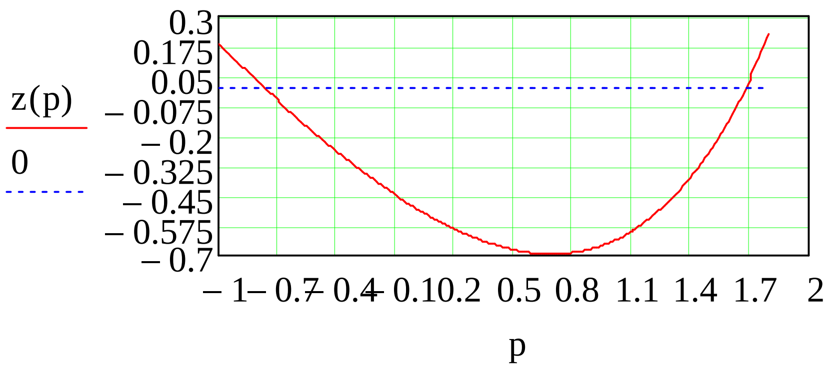


Рис. 19. Выявление корней уравнения.

Зададим начальное приближение и сформируем Solve Block для решения уравнения, содержащего экспоненциальную функцию.

$$t := 1.5$$

Given

$$0.5 \cdot e^t - t - 1 = 0$$

$$tt0 := \mathrm{root}(z(t), t, 1.5, 2)$$

$$tt0 = 1.67834699$$

Проверка решения

$$z(1.67834699) = -2.796 \times 10^{-11}$$

$$t := -1.5$$

Given

$$0.5 \cdot e^{t} - t - 1 = 0$$

$$tt0 := \mathrm{root}(z(t), t, -1.5, 0)$$

$$tt0 = -0.76803905$$

Проверка решения

$$z(-0.76803905) = 2.294 \times 10^{-9}$$

Корни уравнения

$$t1 := -0.76803905$$

$$t2 := 1.67834699$$

Рис. 20. Решение уравнения с экспоненциальной функцией.

Для полученных корней достигнута малая невязка решения: для меньшего корня 10^{-11} , а для большего корня 10^{-9}.

4 Трансцендентные уравнения

Уравнение, не сводящееся к алгебраическому уравнению с помощью алгебраических преобразований, называется трансцендентным уравнением.

К трансцендентным уравнениям относятся уравнения, содержащие тригонометрические функции, логарифм, показательные функции.

Рассмотрим уравнение вида

$$2\left(\sin(2x)^2\right)-2\sin(x)+1=0. \tag{39}$$

Функция Symbolic-Solve дает решение, которое с трудом умещается на листах, в 5 раз превышающих размер листа А4, что вызывает трудности анализа восьми числовых значений комплексных корней. Нас в первую очередь должны интересовать действительные корни. Таких получено два: x_3=1.21 и x_7=1.931.

Воспользоваться функцией Find(x) невозможно, поскольку программа **MathCAD** при использовании этой функции не находит решение уравнения (39).

Применим функцию Root к уравнению (39)

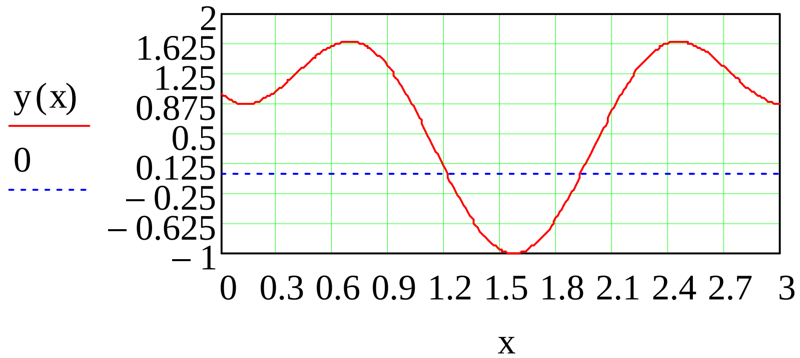
Трансцендетное уравнение

$$y(x) := 2\cdot(\sin(2x))^2 - 2\cdot\sin(x) + 1$$

Область существования корней

$$x := 0, 0.01 .. 3$$

График функции



Формируем Solve Block

Given

$$2\cdot(\sin(2x))^2 - 2\cdot\sin(x) + 1 = 0$$

$$x1 := \mathrm{root}(y(x), x, 1.0, 1.5)$$

$$x2 := \mathrm{root}(y(x), x, 1.5, 2.5)$$

$$x1 = 1.21 \qquad x2 = 1.931$$

Проверка решения

$$y(x1) = 0 \qquad y(x2) = -1.554 \times 10^{-15}$$

Рис. 21. Решение трансцендентного уравнения.

Оба действительных корня имеют малую невязку.

Решим уравнение

$$3x + \cos(x) = 2. \tag{40}$$

Уравнение (40) можно решать в приведенном виде, но всегда следует помнить, что правая часть не равна нулю, и это может являться источником ошибок оператора в правильной интерпретации полученных результатов (рис.22). Верхняя кривая соответствует уравнению (42), а нижняя - уравнению (43).

$$3x + \cos(x) - 2 = 0. \tag{41}$$

Трансцендетная функция

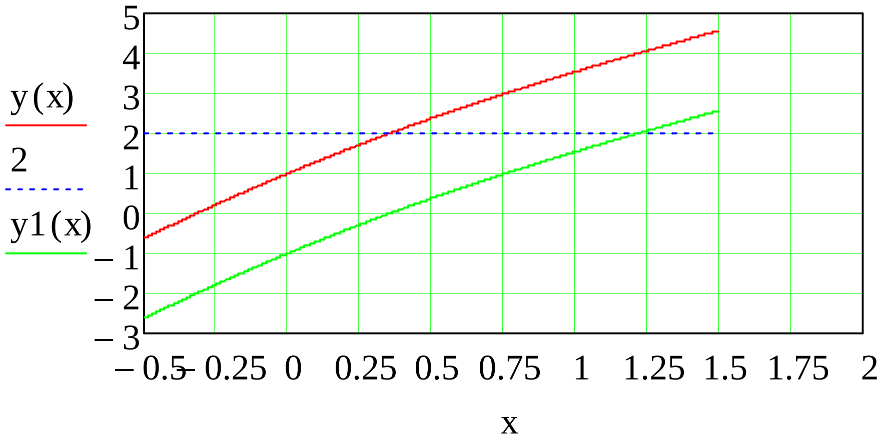
$$y(x) := 3\cdot x + \cos(x) \tag{42}$$

$$y1(x) := 3\cdot x + \cos(x) - 2 \tag{43}$$

Область существования корней

$$x := -0.5, -0.499 \,..\, 1.0$$

График функции



Формируем Solve Block

Given

$$3 \cdot x - \cos(x) = 2$$

$$x1 := \mathrm{root}(y(x) - 2, x, -1.0, 1.5)$$

$$x1 = 0.35401671$$

Проверка решения

$$y(x1) - 2 = 3.795 \times 10^{-5}$$

Рис. 22. Решение трансцендентного уравнения.

Корень найден с величиной невязки, превышающей ожидаемую величину и должен быть уточнен. Повысить точность корня можно, применив другую функцию для решения уравнения. Функция Find(x) не решает уравнение такого вида и выражение становится красного цвета. Символьное решение с помощью функции Solve из меню Symbolic обеспечивает только приближенное решение в цифровом виде.

$$3 \cdot t + \cos(t) - 2 = 0 \text{ solve } \rightarrow 0.35400240816530080161$$

Корень уравнения

$$t1 := 0.35400240816530080161$$

$$p(t1) = 0$$

Рис. 23. Применение функции Solve для решения уравнения.

С помощью функции Solve получено точное решение. Этот пример показывает необходимость проверки численных решений несколькими способами, чтобы убедиться в правильности полученного решения и его устойчивости.

Для применения функции Solve необходимо выполнить следующие действия:

1) напечатать уравнение $3 \cdot t + \cos(t) - 2$;

2) напечатать знак равенства с помощью комбинации клавиш Ctrl+ = (клавишу Ctrl удерживаем постоянно, знак равенства нажимаем кратковременно);

3) после знака равенства печатаем ноль;

4) набираем комбинацию клавиш Ctrl, Shift, «.» (клавиши Ctrl и Shift удерживаем в нажатом состоянии, а точку в латинском регистре нажимаем кратковременно);

5) слева от стрелки печатаем название функции Solve и убираем курсор из строки щелчком на пустом месте;

6) если уравнение имеет решение, то справа от стрелки появляется или символьное решение или числовое значение корня.

Решим уравнение (44), содержащее логарифмическую функцию, по основанию 10 вида

$$3 + 3\log(x) = 1. \tag{44}$$

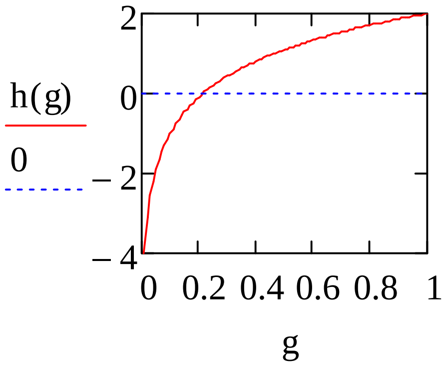
Трансцендетная функция

$$h(g) := 3 + 3 \cdot \log(g) - 1$$

Область существования корней

$$g := 0, 0.01 .. 1$$

График функции



Формируем Solve Block

Given

$$3+3\cdot\log(g)-1=0$$

$$g1 := \mathrm{root}(3+3\cdot\log(g)-1, g, 0.01, 1.0)$$

$$g1 = 0.215$$

Символьное решение уравнения

$$3+3\cdot\log(g)-1=0$$

$$g2 := \frac{10^{\frac{1}{3}}}{10} \qquad g2 = 0.215$$

Проверка решения

$$h(g1) = -5.911\times10^{-7}$$

$$h(g2) = 0$$

Рис. 24. Решение уравнения с логарифмической функцией.

При работе с логарифмической функцией (44) следует обратить внимание на ее область определения. Аргумент логарифмической функции должен быть положительным.

Решим уравнение вида

$$e^{x-10}+\sin\left(\frac{25x}{x^4+25}\right)\ln(x+3)-0,5=0. \qquad (45)$$

В список функций уравнения (45) входит натуральный логарифм, аргумент которого должен быть положительным $x > -3$. Область поиска корней находится справа от $x = -3$.

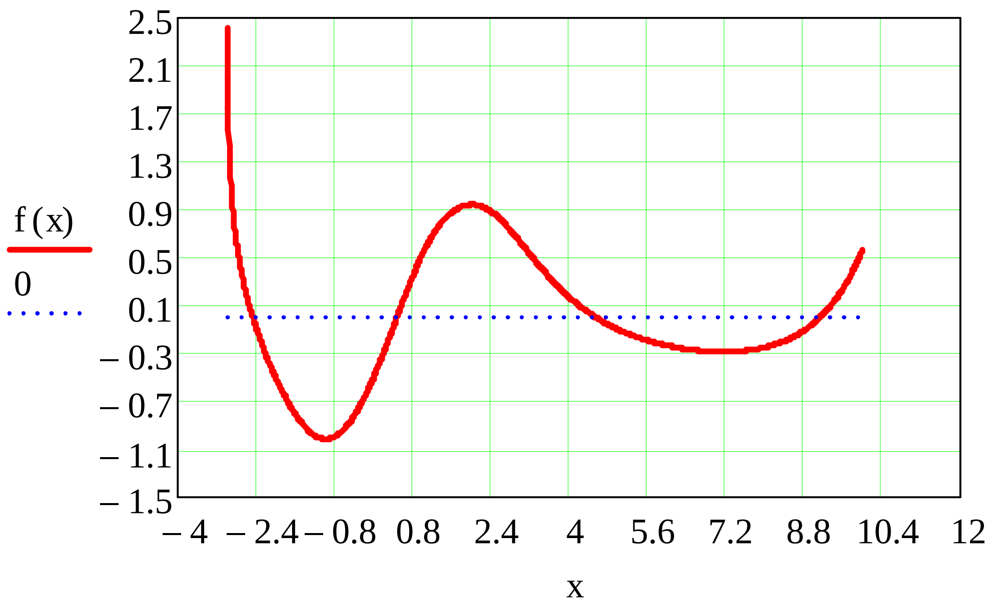
Трансцендентное уравнение

Область поиска корней

$$x := -2.99, -2.98 .. 10$$

График функции

$$f(x) := e^{x-10} + \sin\left(\frac{25x}{x^4 + 29}\right) \cdot \ln(x+3) - 0.5$$



Начальное приближение 1

$$s := -2$$

Формируем Solve Block

Given

$$e^{s-10} + \sin\left(\frac{25s}{s^4 + 29}\right) \cdot \ln(s+3) - 0.5 = 0$$

$$F1 := \mathrm{Find}(s) \quad F1 = -2.46258$$

Начальное приближение 2

$$s := 0$$

Формируем Solve Block

Given

$$e^{s-10} + \sin\left(\frac{25s}{s^4 + 29}\right) \cdot \ln(s + 3) - 0.5 = 0$$

$$F2 := \mathrm{Find}(s) \quad F2 = 0.479429$$

Начальное приближение 3

$$s := 4$$

Формируем Solve Block

Given

$$e^{s-10} + \sin\left(\frac{25s}{s^4 + 29}\right) \cdot \ln(s + 3) - 0.5 = 0$$

$$F3 := \mathrm{Find}(s) \quad F3 = 4.556467$$

Начальное приближение 4

$$s := 9$$

Формируем Solve Block

Given

$$e^{s-10} + \sin\left(\frac{25s}{s^4 + 29}\right) \cdot \ln(s + 3) - 0.5 = 0$$

$$F4 := \mathrm{Find}(s) \quad F4 = 9.128536$$

Проверка решения

$$f(F1) = 0$$

$$f(F2) = 0$$

$$f(F3) = 0$$

$$f(F4) = 0$$

Рис. 25. Решение сложного уравнения.

Получено 4 корня точного решения уравнения (45).

5 Вопросы к зачету

1 Какие формы записи уравнений Вам известны?

2 Какие типы уравнений Вам известны?

3 Какие уравнения называют алгебраическими?

4 Какие типы линейных уравнений Вам известны?

5 Как записать квадратное уравнение?

6 Чем отличается символьный способ решения уравнения от приближенного цифрового?

7 Можно ли считать эквивалентными понятия «символьное решение уравнения» и «аналитическое решение уравнения?

8 Можно ли применить символьный метод решения уравнения к линейным уравнениям?

9 Можно ли применить символьный метод решения уравнения к квадратным уравнениям?

10 Какие уравнения называются экспоненциальными?

11 Какие уравнения можно отнести к показательным?

12 Какие типы встроенных функций в программе MathCAD Вам известны?

13 Как выполняется проверка найденных корней уравнения?

14 Что такое “невязка” и как ее определяют?

15 Какие методы снижения невязки Вы могли бы предложить при решении уравнений с геометрическими функциями?

16 К какому типу уравнений относится уравнение (37)?

17 Какой тип имеет уравнение (34)?

18 Что такое Solve Block и как его формируют?

19 Какой смысл имеет приравнивание искомой переменной перед Solve Block какой-либо константе?

20 Как задать текстовый блок?

21 Как происходит поиск корней графическим способом в программе MathCAD?

22 Как задать для построения графика область определения выбранной функции?

23 Чем отличается целочисленный цикл от цикла с дробным шагом?

24 Каким образом выделить корни уравнения на графике функции?

25 Как на одной системе координат расположить несколько

графиков разных функций?

26 Можно ли на одном поле графика построить два графика функций от различных аргументов $y(x)$ и $s(p)$?

27 Где в программе MathCAD задают начальные данные для расчета? (Правило хорошего тона).

28 Почему не принято «рассредоточивать» присвоение начальных значений по всему телу программы? Чем это опасно?

29 Почему в программе MathCAD принято использовать только имена инициализированных выше констант и переменных?

30 При вычислении выражений в программе MathCAD где могут находиться используемые в программе константы и переменные?

31 Для чего используют кнопку выравнивания по строке?

32 Для чего используют кнопку выравнивания по столбцу?

33 Как использовать функцию Solve символьно?

34 Как использовать функцию Solve для приближенного решения уравнения?

35 Как использовать функцию Find?

36 Как использовать функцию Root()?

37 С помощью какой функции можно решить систему уравнений?

38 Какие еще функции удобно использовать для решения систем уравнений?

39 К какому типу функций относится логарифм?

40 К какому типу уравнений относится выражение, содержащее куб синуса?

6 Задания для самостоятельного решения

1 $\sin(2x)-\ln(x)=0$.

2 $\dfrac{1}{2x\sqrt{1-\left[\ln(x)\right]^2}}$.

3 $(0,2x)^3=\cos(x)$ при $x<10$.

4 $x-10\sin(x)=0$ при $x>-10$.

5 $2^{-x}=\sin(x)$ при $x<5$.

6 $2^x-2\cos(x)=0$

7 $\lg(x+5)=\cos(x)$

8 $\sqrt{4x+7}=3\cos(x)$

9 $x\sin(x)-1=0$

10 $8\cos(x)-x=6$

11 $\sin(x)-0,2x=0$

12 $10\cos(x)-0,1x^2=0$

13 $2\lg(x+7)-5\sin(x)=0$

14 $4\cos(x)+0,3x=0$

15 $2x^2-5=2^x$

16 $2^{-x}=10-0,5x^2$

17 $4x^4-6,2=\cos(0,6x)$

18 $3\sin(8x)=0,7x-0,9$ на отрезке $[-1;1]$.

19 $1,2-\ln(x)=4\cos(2x)$

20 $\ln(x+6,1)=2\sin(x-1,4)$.

21 $x^4-3x-20=0$

22 $x^3+3x+5=0$

23 $0,5e^x-x-1=0$

24 $\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^x}{2} = 0$ при $x > 0$.

7 Список использованных источников

1 http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm.

2 Мудров А.В. Численные методы для ПЭВМ на языках Бэйсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «РАСКО», 1991.- 272 с.:ил.

3 Зварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы: Учебное пособие для студентов. – М.: Просвещение, 1990, - 176 с.: Ил.

4 Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров.: Учебное пособие.- М.: Высшая школа, 1998. – 383 с. Ил..

5 Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad: Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.: Ил.

6 Поршнев С.В. Беленкова И.В. Численные методы на базе MathCad. – СПб.: БХВ-Петербург. 2005. – 464 с.: Ил.

7 Очков В.Ф. MathCad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.: Ил.

8 Черняк А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А. Высшая математика на базе MathCad. Общий курс. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 608 с.: Ил.

9 Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер М. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.: Ил.

10 Каханер Д., Моулер К. Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с.: Ил.

11 http://www.pm298.ru Прикладная математика.

12 Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средней школы. Под ред. Степанова С.А. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 400 с.: Ил.