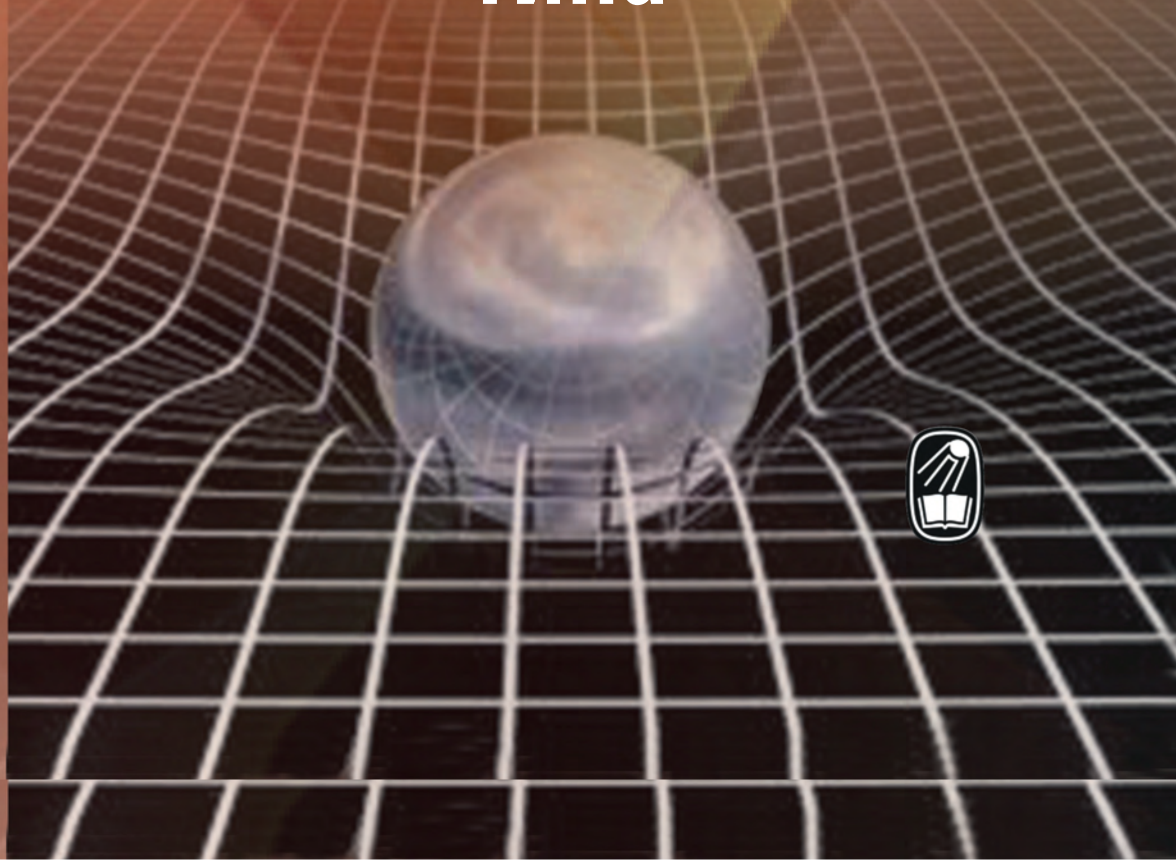
Copyright

К.Б. САБИТОВ

Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа



К.Б. САБИТОВ

Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

МОСКВА НАУКА 2016

УДК 517.95
ББК 22.161
С12

Издание осуществлено при финансовой поддержке Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Жегалов*,
доктор физико-математических наук, профессор *А.М. Елизаров*,
доктор физико-математических наук, профессор *А.М. Нахушев*

Сабитов К.Б.
Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа / К.Б. Сабитов. – М. : Наука, 2016. – 272 с. – ISBN 978-5-02-039969-3.

Монография посвящена изучению качественных и спектральных свойств решений уравнений смешанного параболо-гиперболического типа и разработке методов спектрального анализа для изучения аналога задачи Трикоми, начально-граничных задач с локальными и нелокальными краевыми условиями и обратных задач.
Для научных работников в области дифференциальных уравнений в частных производных, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических факультетов вузов.

ISBN 978-5-02-039969-3
© Сабитов К.Б., 2016
© ФГУП Издательство «Наука», редакционно-издательское оформление. 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Как известно [133, с. 438], электромагнитное поле характеризуется векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей и векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ электрической и магнитной индукций, которые связаны между собой системой уравнений Максвелла.

В случае однородной среды из этой системы получаются уравнения для каждой из величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в отдельности:

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{0.1}$$

$$\Delta\mathbf{H} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{0.2}$$

где σ – проводимость среды, μ – магнитная проницаемость, c – скорость света в пустоте, $a^2 = c^2/\varepsilon\mu$, ε – диэлектрическая постоянная.

Уравнению (0.1) или (0.2) будут удовлетворять компоненты E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z, т.е.

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}u_{tt} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}u_t, \tag{0.3}$$

где u – одна из указанных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Если при этом среда непроводящая или слабо проводящая, то можно положить $\sigma = 0$ и из (0.3) получаем волновое уравнение

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}u_{tt},$$

т.е. электромагнитные процессы распространяются в такой среде со скоростью a. Если среда обладает большой проводимостью и можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то уравнение (0.3) переходит в уравнение параболического типа

$$\Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}u_t.$$

Рассмотрим электрическое поле в области, заполненной вещественной средой с малой проводимостью. Поскольку газы в естественном состоянии не проводят электричество, то такой средой может служить какой-нибудь газ. Пусть, начиная с определенного момента времени, на газ начал действовать какой-нибудь ионизатор (рентгеновские, ультрафиолетовые или радиоактивные излучения, высокая температура). В результате достаточно большой ионизации газ с некоторого момента приобретает большую проводимость. Следовательно, определение напряженности электрического поля за промежуток времени, содержащий в себе упомянутый момент, будет связано с решением краевой задачи для двух уравнений гиперболического и параболического типов с условиями сопряжения на поверхности изменения типа. В связи с этим интересно выяснить, какие задачи являются корректно поставленными одновременно для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. В данной работе в определенной мере дается ответ на поставленный вопрос в случае одной пространственной переменной.

Остановимся на обзоре некоторых результатов, полученных для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. На необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое, было указано в 1959 г. И.М. Гельфандом [16]. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке $0 < x < l$ полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, Я.С. Уфлянд [137] свел к решению системы уравнений

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial I_1}{\partial t} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = 0, \ C_1\dfrac{\partial U_1}{\partial t} + \dfrac{\partial I_1}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \\ \\ RI_2 + \dfrac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \quad C_2\dfrac{\partial U_2}{\partial t} + \dfrac{\partial I_2}{\partial x} = 0, \quad l < x < \infty \end{cases} \tag{0.4}$$

при начальных

$$U_1\Big|_{t=0} = 0, \ I_1\Big|_{t=0} = 0, \ U_2\Big|_{t=0} = 0$$

и граничных

$$U_1\Big|_{x=0} = E(t), \ \lim_{x\to\infty} U_2 = 0$$

условиях, а также при требованиях непрерывности напряжения и тока

$$U_1\Big|_{x=l} = U_2\Big|_{x=l}, \ I_1\Big|_{x=l} = I_2\Big|_{x=l},$$

здесь $L,\ C_1$ – самоиндукция и емкость (на единицу длины) первого участка линии; $R,\ C_2$ – сопротивление и емкость второго участка (см. также [69]).

Если теперь из системы уравнений (0.4) исключить токи, то приходим к задаче:

$$0 = \begin{cases} a_1^2 u_{xx} - u_{tt}, & 0 < x < l, \\ a_2^2 u_{xx} - u_t, & l < x < \infty, \end{cases} \tag{0.5}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ u(x,0) = 0,\ l \leqslant x < \infty,$$

$$u(0,t) = E(t),\ \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0,$$

$$u(l-0,t) = u(l+0,t),\ u_x(l+0,t) = \frac{R}{L}\int\limits_0^t u_x(l-0,\eta)\,d\eta, \tag{0.6}$$

здесь

$$u(x,t) = \begin{cases} U_1(x,t), & x < l, \\ U_2(x,t), & x > l, \end{cases} \quad a_1^2 = \frac{1}{LC_1},\ a_2^2 = \frac{1}{LC_2}.$$

Эта задача для более общего уравнения, чем уравнения (0.5) с общими условиями склеивания вида (0.6), изучена в монографии [21, §5 гл. 1].

Некоторые задачи на сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов изучены в работах Г.М. Стручиной [131], С.И. Гайдука, Л.В. Иванова [15].

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис [63, 132] в многомерном пространстве рассмотрели начально краевые задачи на сопряжения параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

Л.А. Золина [29] изучила аналог задачи Трикоми для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_t, & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt}, & t < 0, \end{cases} \tag{0.7}$$

в области, ограниченной при $t < 0$ характеристиками уравнения (0.7) $AC : x + t = 0$ и $BC : x - t = 1$, а при $t > 0$ – с боков гладкими монотонными кривыми AA_0 и BB_0, сверху отрезком A_0B_0 прямой $t = h$, с условиями

$$u\big|_{AA_0} = \varphi_1(t),\ \ u\big|_{BB_0} = \varphi_2(t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant h;\ \ u\big|_{AC} = \psi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1/2;$$

$$u(x,+0)=\lambda(x)u(x,-0),\quad u_t(x,+0)=\mu(x)u_t(x,-0),\quad 0<x<1,$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi(x)$, $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – заданные функции.

После этих статей появился целый ряд работ, где исследуются задача Трикоми и ее обобщения, задачи со смещениями, задача типа задачи Бицадзе–Самарского и другие краевые задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений второго порядка. Это работы М.А. Абдрахманова [1], А.М. Нахушева, Х.Г. Бжихатлова [77, 79, 4], В.Н. Врагова [13, 14], В.А. Елеева [22, 23], М.С. Салахитдинова, А.С. Бердышева [115, 116], Т.Д. Джураева, А. Сопуева, А. Мамажанова [18] – [21] и др. Отметим, что в монографиях [18, 21] приведен достаточно полный обзор исследований краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа до середины 80-х годов прошлого столетия. Поэтому в дальнейшем отметим те работы, которые были опубликованы в 90-е годы и ранее и связаны разработкой методов спектрального анализа для решения различных краевых задач для уравнений смешанного типа. Это прежде всего работы Е.И. Моисеева, Н.Ю. Капустина [73] – [75], [49] – [51], [147, 148] и автора.

Данная монография написана на основе работ автора, опубликованных в статьях [92] – [94], [96] – [108].

Основной задачей предлагаемой монографии являются изучение качественных и спектральных свойств решений уравнений смешанного параболо-гиперболического типа и разработка методов спектрального анализа для изучения таких уравнений аналога задачи Трикоми, начально-граничных задач с локальными и нелокальными краевыми условиями и обратных задач. Ранее аналогичные задачи и другие нами изучались для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа в монографии [110].

Далее перейдем к изложению содержания монографии, которая состоит из пяти глав, разбитых на 20 параграфов. При этом принята тройная нумерация формул, определений, теорем, лемм, замечаний и рисунков.

В первой главе изучены экстремальные свойства решений общего уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, качественные свойства решения для одного класса уравнений смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка, в частности, поликалорического уравнения, и спектральные свойства решения задачи Трикоми для двух классов уравнений параболо-гиперболического типа.

Вторая глава посвящена изучению начально-граничных задач для уравнения

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{0.8}$$

где $b = \text{const} \geqslant 0$, в прямоугольной области $D = \{(x, t) | \, 0 < x < l, \ -\alpha < t < \beta\}$, здесь l, α, β – заданные положительные постоянные, с локальными граничными условиями. Для каждой из трех поставленных задач установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной задачи на собственные значения. При обосновании равномерной сходимости рядов возникает проблема малых знаменателей, в связи с чем найдены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. На основе этих оценок обоснована сходимость рядов в классах регулярных решений уравнения (0.8) и устойчивость решения задач от начальных данных.

В третьей главе для уравнения (0.8) в прямоугольной области D изучены краевые задачи с нелокальными граничными условиями. Здесь также методами спектрального анализа установлены критерии единственности. Решения поставленных задач построены в виде суммы ортогонального ряда по системе собственных функций или в виде суммы биортогонального ряда по системам корневых функций двух взаимно сопряженных задач на собственные значения. Установленные оценки малых знаменателей позволяют обосновать сходимость рядов в классах регулярных решений уравнения (0.8) и устойчивость решения задач от начальных данных.

Отметим, что ранее первыми нелокальные задачи для уравнений смешанного типа были изучены в работах [138, 26, 78]. Затем эти исследования были продолжены и получены интересные результаты в работах [9, 27, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 55, 57, 58, 67, 68, 75, 80, 81, 82, 89, 111, 112, 113, 114, 119, 121, 123, 124, 126, 144] для различных типов и классов дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее полный обзор работ, посвященных изучению нелокальных задач для уравнений гиперболического и других типов, приведены в монографиях [89, 80].

В четвертой главе для параболо-гиперболического уравнения

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x) g_1(t), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f_2(x) g_2(t), & t < 0, \end{cases} \tag{0.9}$$

где в прямоугольной области D доказаны теоремы единственности и существования решения обратных задач по отысканию функций

$u(x,t)$ и $f_i(x)$ или $g_i(t)$, $i = 1, 2$, из правой части уравнения (0.9). Решения которых построены в виде суммы рядов. Установлены оценки об устойчивости решений таких задач по граничным данным.

В пятой главе для уравнения смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + q(x)u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{0.10}$$

где $q(x)$ – определенная на $[0, \pi]$ достаточно гладкая функция, в прямоугольной области $\{(x,t)|\, 0 < x < \pi,\ -\alpha < t < \beta\}$ изучена начально-граничная задача с краевыми условиями третьего рода. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При условии, когда отношение сторон прямоугольника, являющегося областью гиперболичности, является рациональным числом, показана сходимость ряда в классе регулярных решений уравнения (0.10), после чего приведены постановки обратных задач для данного уравнения с неизвестными коэффициентами при неизвестной функции и граничных условиях. Опираясь на теорию обратных задач Штурма-Лиувилля, доказаны теоремы единственности поставленных обратных задач и для некоторых из них приведены необходимые и достаточные условия разрешимости.

Отметим, что различные обратные задачи для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений изучены достаточно полно. Создана достаточно полная теория обратных и некорректных задач (см. монографии [134, 30, 61, 62, 91, 17, 155, 145, 146, 40] и приведенную там обширную библиографию), а также отметим работы [86, 83, 87, 59, 128, 129, 48, 55, 56, 135, 127], посвященные вопросам разрешимости обратных задач для уравнений параболического типа.

Здесь впервые предлагаются и изучаются обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.

При подготовке данной монографии (первое издание вышло в издательстве «Гилем. Башкирская энциклопедия», Уфа, 2015, 240 с.) к печати существенную помощь при наборе и верстке оказал мой ученик к.ф.-м.н. Сидоров С.Н. Пользуясь случаем, выражаю ему и рецензентам книги д.ф.-м.н. проф. Жегалову В.И., д.ф.-м.н. проф. Елизарову А.М. и д.ф.-м.н. проф. Нахушеву А.М. признательность за поддержку и указанные замечания.

Буду также благодарен всем, кто пришлет свои замечания и пожелания на мой адрес: sabitov_fmf@mail.ru.

Глава 1

Качественные свойства решений

§ 1.1. Принцип максимума для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

Рассмотрим уравнение

$$L_1 u \equiv \begin{cases} u_{xx} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

где $K(y) < 0$ при $y < 0$, $B(x, y) < 0$ при $y \geq 0$, $K(y)$, $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и $F(x, y)$ – заданные функции, гладкость которых будет указана ниже,

$$L_2 u \equiv \begin{cases} u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где $A(x, y) < 0$ при $y \geq 0$, в области Ω, ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_1, A_1B_1 и B_1B, где $A = (0, 0)$, $A_1 = (0, d)$, $B = (l, 0)$, $B_1 = (l, d)$, $l, d > 0$, а при $y < 0$ характеристиками AC и CB уравнения (1.1.1) или (1.1.2) (рис. 1).

Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}$. Отметим, что уравнение (1.1.1) является уравнением смешанного типа с характеристической линией изменения типа (т.е. время в области Ω_+ направлено вдоль оси $x = 0$), а (1.1.2) – уравнением смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа (время в параболической части направлено вдоль оси $y = 0$). Этот момент существенно влияет на постановку краевых задач для уравнений (1.1.1) и (1.1.2) в области Ω.

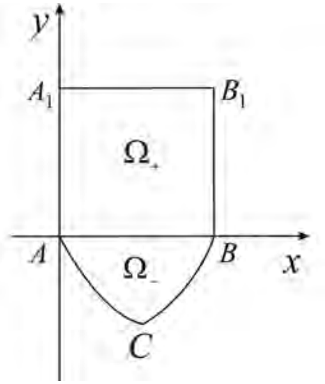


Рис. 1

1.1.1. Принцип максимума для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$L_0u \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta) \qquad (1.1.3)$$

в характеристическом треугольнике Δ (рис. 2), ограниченном отрезками прямых $\xi = 0$, $\eta = \xi$ и $\eta = l$.

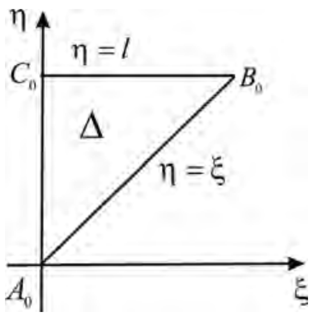


Рис. 2

Пусть $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (l,l)$, $C_0 = (0,l)$ – вершины треугольника Δ; $\alpha(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\beta(\xi,\eta)$, $\beta(\xi,\eta) = \exp\int b(\xi,\eta)d\xi$, $h(\xi,\eta) = a_\xi(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)b(\xi,\eta) - c(\xi,\eta)$.

Пусть функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$ и $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\Delta\cup A_0C_0$ и при $(\xi,\eta)\in\Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h(\xi,\eta)\geq 0, \\ \alpha(0,\eta)+\int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)dt>0; \end{cases} \tag{1.1.4}$$

$$\alpha(\xi,\eta)-\int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|dt>0. \tag{1.1.5}$$

Отметим, что в условиях (1.1.4) и (1.1.5) интегральные неравенства могут быть нестрогими (т.е. ≥ 0), но в этом случае на каждом отрезке $[0,\xi]$ характеристики $\eta=\text{const}$ множество точек, в которых $h(t,\eta)=0$, имеет меру нуль.

Предполагается, что правая часть $f(\xi,\eta)$ интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ характеристики $\eta=\eta_0$, $0<\xi_0<\eta_0<l$.

Определение 1.1.1. Регулярным решением уравнения (1.1.3) в области Δ назовем функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u\in C(\overline{\Delta})\cap C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta}\in C(\Delta)$, $L_0u\equiv f$ *в* Δ*;*

2) *производная* u_η *непрерывна на множестве* $\Delta\cup A_0C_0$.

Теорема 1.1.1 (Принцип экстремума). *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.3) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (1.1.4); 2) $f(\xi,\eta)\leq 0$ (≥ 0) *в* Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ *– регулярное в* Δ *решение уравнения* (1.1.3), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta)>0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta)<0)$, *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u)$ *достигаются на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Рассмотрим в области Δ тождество

$$\beta L_0u\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}(\beta u_\eta+\alpha u)-\beta hu=f\beta$$

и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta=\text{const}$, принадлежащему Δ. Тогда получим

$$(\beta u_\eta+\alpha u)\Big|_N^M=\int\limits_{NM}\beta hud\xi+\int\limits_{NM}\beta fd\xi. \tag{1.1.6}$$

В равенстве (1.1.6) отрезок NM может принадлежать не только области Δ, но и $\Delta\cup A_0C_0$. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta)=u(Q)>0$ и он не достигается на отрезке $\overline{A_0B_0}$, т.е. $u(Q)>\max\limits_{\overline{A_0B_0}} u(\xi,\eta)$. Тогда точка $Q\in\Delta\cup C_0B_0$.

Рассмотрим случай, когда $Q \in \Delta$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P. В равенстве (1.1.6) в качестве отрезка NM возьмем PQ. Тогда будем иметь

$$\beta(Q)u_\eta(Q) = \int\limits_{PQ} \beta hud\xi + \int\limits_{PQ} \beta fd\xi - \alpha(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{PQ} \beta fd\xi + \int\limits_{PQ} \beta h[u - u(Q)]d\xi + u(Q)\int\limits_{PQ} \beta hd\xi - \alpha(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{PQ} \beta fd\xi + \int\limits_{PQ} \beta h[u - u(Q)]d\xi - u(Q)\Big[\alpha(P) + \int\limits_{PQ} \beta cd\xi\Big].$$

Отсюда в силу условия (1.1.4), $f \le 0$ в Δ и $u(Q) > 0$ следует, что $u_\eta(Q) < 0$. Но это противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta$ максимума функции $u(\xi,\eta)$ производная $u_\eta(Q) = 0$.

Пусть теперь $Q \in C_0B_0$. В силу непрерывности функции $u(\xi,\eta)$ на $\overline{\Delta}$ в некоторой окрестности точки Q существует точка $Q_1 = (\xi_1,\eta_1) \in \Delta$ такая, что

$$u(Q_1) > \max_{A_0B_0} u(\xi,\eta). \tag{1.1.7}$$

Из точки Q_1 проведем прямую $\eta = \eta_1$ и точку пересечения с отрезком A_0B_0 обозначим через B_1. Пусть $\Delta_1 = \Delta \cap \{\eta < \eta_1\}$. Тогда по рассмотренному выше случаю $\max\limits_{\overline{\Delta}_1} u$ достигается только на отрезке $\overline{A_0B_1}$. Поэтому

$$u(Q_1) < \max_{A_0B_1} u \le \max_{A_0B_0} u,$$

что противоречит неравенству (1.1.7). Тем самым теорема 1.1.1 полностью доказана.

Теорема 1.1.2 (Принцип максимума модуля). *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.3) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (1.1.5); 2) $f(\xi,\eta) \equiv 0$ *в* Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ – *регулярное решение уравнения* (1.1.3), *равное нулю на характеристике* $\overline{A_0C_0}$. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| > 0$, *то он достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1.1.3), не теряя общности, можно считать, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ и $|u(\xi,\eta)| \le u(Q)$. Допустим, что $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Следовательно, точка $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Пусть

$Q \in \Delta$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P. Обозначим через E_1 множество точек отрезка PQ, в которых $h \geq 0$, а через E_2 – множество точек отрезка PQ, где $h \leq 0$. Тогда, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1.1.1, из равенства (1.1.6) получим

$$\beta(Q)u_\eta(Q) = \int\limits_{PQ} \beta hud\xi - \alpha(Q)u(Q) = \int\limits_{E_1} \beta h[u - u(Q)]d\xi +$$

$$+ \int\limits_{E_2} \beta h[u + u(Q)]d\xi - u(Q)\Big[\alpha(Q) - \int\limits_{PQ} \beta|h|d\xi\Big].$$

Отсюда, в силу неравенства (1.1.5), $u(Q) > 0$ и $|u| \leq u(Q)$ следует, что $u_\eta(Q) < 0$. Это противоречит тому, что в точке Q максимума функции u частная производная $u_\eta(Q) = 0$.

Случай $Q \in C_0B_0$ рассматривается аналогично теореме 1.1.1.

Замечание 1.1.1. Принцип экстремума для уравнения (1.1.3) впервые был установлен в [142] при условиях: $u_\eta(0, \eta) \leq 0$ (≥ 0), $u \in C^1(\overline{\Delta}) \cap C^2(\Delta)$, $L_0u \leq 0$ (≥ 0) в $\overline{\Delta} \setminus \overline{A_0B_0}$; a, a_ξ, b, $c \in C(\overline{\Delta})$; $a \geq 0$, $h \geq 0$, $c \geq 0$ в $\overline{\Delta}$.

Заметим, что из доказательства теорем 1.1.1 и 1.1.2 следует, что если условия 1) и 2) этих утверждений выполнены вплоть до характеристики C_0B_0 и производная u_η непрерывна вплоть до C_0B_0, то $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u)$ и $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u|$ достигаются только на отрезке $\overline{A_0B_0}$. В этом случае говорят, что для гиперболического уравнения (1.1.3) имеет место сильный вариант принципа максимума.

1.1.2. Принцип максимума для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

Теорема 1.1.3. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* Ω_+ *ограничены и* $B(x, y) < 0$, $C(x, y) \leq 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1.1; 3) $F(x, y) \geq 0$ (≤ 0) *на множестве* $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1$; 4) $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_+ \cup A_1B_1) \cap C^2(\Omega_-)$, $L_1u \equiv F(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1$; 5) $u(x, y) = 0$ *на характеристике* $\overline{AC}$.

Тогда, если $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x, y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Omega}} u(x, y) < 0)$, *то этот максимум (минимум) достигается на множестве* $\overline{AA_1 \cup BB_1}$.

Теорема 1.1.4. *Пусть*: 1) *выполнены условия* 1), 4) *и* 5) *теоремы* 1.1.1; 2) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1.2; 3) $F(x, y) \equiv 0$.

Тогда, если $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на множестве* $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$.

Доказательство теорем 1.1.3 и 1.1.4 по существу одинаково, поэтому убедимся в справедливости теоремы 1.1.3.

Пусть $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x, y) = u(Q) > 0$. Поскольку выполнены условия теоремы 1.1.1, то в силу этой теоремы точка $Q \in \overline{\Omega}_+$. Точка Q не принадлежит множеству $\Omega_+ \cup A_1B_1$, так как для уравнения (1.1.1) в области Ω_+ справедлив принцип максимума [151], [139]. Поэтому точка $Q \in AB \cup AA_1 \cup BB_1$. Если точка $Q \in AB$, $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$, то в силу работы [12]

$$\lim_{y \to 0+0} u_y(x_0, y) = u_y(x_0, 0+0) < 0. \tag{1.1.8}$$

На основании теоремы 1.1.1 в точке $Q = (x_0, 0)$ из гиперболической части области Ω производная $u_y(x_0, 0-0) \geq 0$, что в силу непрерывности $u_y(x, y)$ в точке Q противоречит неравенству (1.1.8). Следовательно, $Q \in AA_1 \cup BB_1$.

Теперь сформулируем принцип максимума для уравнения (1.1.2) в области Ω.

Теорема 1.1.5. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.2) *в области* Ω_+ *ограничены и* $A(x, y) < 0$, $C(x, y) \leq 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.1.2) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1.1; 3) $F(x, y) \geq 0$ (≤ 0) *на множестве* $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup BB_1$; 4) $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_+ \cup BB_1) \cap C^2(\Omega_-)$, $L_2 u \equiv F(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup BB_1$; 5) $u(x, y) = 0$ *на характеристике* AC. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x, y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Omega}} u(x, y) < 0)$, *то этот максимум (минимум) достигается на множестве* $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$.

Теорема 1.1.6. *Пусть*: 1)*выполнены условия* 1), 4) *и* 5) *теоремы* 1.1.5; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.7) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1.2; 3) $F(x, y) \equiv 0$. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на множестве* $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$.

Доказательство теоремы 1.1.6. Пусть $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x, y)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1.1.2) можно полагать $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) = u(Q)$ и $|u| \le u(Q)$. В силу теоремы 1.1.4 точка $Q \in \overline{\Omega}_+$. На основании внутреннего принципа максимума для параболических уравнений $Q \in \Omega_+ \cup BB_1$. Следовательно, $Q \notin AB \cup B \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$. Пусть $Q = (x_0, 0) \in AB$. Тогда в точке $(x_0, 0)$ из параболической части области Ω, согласно [12], производная u_y удовлетворяет неравенству (1.1.8). С другой стороны, в силу теоремы 1.1.2, $u_y(x_0, 0-0) \ge 0$, что противоречит (1.1.8). Значит, $Q \notin AB$. Допустим, что $Q \notin \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$. Следовательно, точка $Q \equiv B$. В силу непрерывности функции $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}$ в малой окрестности точки $B \equiv Q$ существует точка $P_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Omega$ такая, что

$$u(P_\varepsilon) > \max u(x,y) \quad \text{на} \quad \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}. \tag{1.1.9}$$

Пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{x < x_\varepsilon\}$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Omega}_\varepsilon} u(x,y) = u(Q_\varepsilon) > 0$. Из теоремы 1.1.2 следует, что $Q_\varepsilon \notin \overline{\Omega}_{-\varepsilon} \setminus \overline{AB}_\varepsilon$, где $B_\varepsilon = (x_\varepsilon, 0)$, $\Omega_{-\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap \{y < 0\}$. Далее, рассуждая аналогично приведенному выше, получим, что Q_ε принадлежит только множеству $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B}_{1\varepsilon}$, $B_{1\varepsilon} = (x_\varepsilon, d)$. Отсюда следует:

$$u(P_\varepsilon) < \max_{\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B}_{1\varepsilon}} u(x,y) \le \max_{\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}} u(x,y),$$

что противоречит неравенству (1.1.9). Значит, точка $Q \in \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$.

Замечание 1.1.2. В статье [4] впервые был установлен принцип максимума для уравнения (1.1.1) при $F(x,y) \equiv 0$ и тех же ограничениях на его коэффициенты в области Ω_-, что и в работе [142], в несколько иной формулировке.

1.1.3. Применение принципа максимума

Пример 1. Пусть в уравнении (1.1.2) $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $F(x,y) \equiv 0$,

$$A(x,y) = \begin{cases} A_+(x,y) < 0, & y \ge 0, \\ A_-(x,y), & y \le 0, \end{cases}$$

$$B(x,y) = \begin{cases} B_+(x,y), & y \ge 0, \\ B_-(x,y), & y \le 0, \end{cases}$$

$$C(x,y) = \begin{cases} C_+(x,y), & y \ge 0, \\ C_-(x,y), & y \le 0; \end{cases}$$

$A_+(x,y)$, $B_+(x,y)$, $C_+(x,y) \in C(\overline{\Omega}_+)$, $C_-(x,y) \in C(\overline{\Omega}_-)$, $A_-(x,y)$, $B_-(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}_-)$.

При этих условиях докажем, что задача Трикоми для уравнения (1.1.2) с краевым условием $u = 0$ на $\overline{AC} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$ в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_+ \cup BB_0) \cap C^2(\Omega_-)$, $L_2 u \equiv 0$ на множестве $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup BB_1$ может иметь не более одного решения.

Введем новую функцию $v(x,y) = u(x,y)\exp(-\mu x)$, где $\mu = \text{const} > 0$, которая является решением уравнения

$$\begin{cases} v_{yy} + Av_x + Bv_y + (C + \mu A)v = 0, \quad y > 0, \\ v_{xx} - v_{yy} + (2\mu - A)v_x - Bv_y + (\mu^2 - C - A\mu)v = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

В области Ω_- перейдем в характеристические координаты $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Тогда уравнение (1.1.10) при $y < 0$ примет вид

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}(2\mu - A - B)v_\xi + \frac{1}{4}(2\mu - A + B)v_\eta + \frac{1}{4}(\mu^2 - A\mu - C)v = 0, \tag{1.1.11}$$

а область Ω_- отобразится в область Δ (см. §1.2).

Теперь за счет выбора постоянной μ покажем, что коэффициенты уравнения (1.1.10) удовлетворяют условиям теоремы 1.1.6. Для этого достаточно потребовать выполнения двух условий:

$$C - \mu|A| \le 0 \quad \text{в} \quad \Omega_+, \tag{1.1.12}$$

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|dt > 0 \quad \text{в} \quad \Delta. \tag{1.1.13}$$

В случае уравнения (1.1.11):

$$a(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2\mu - A - B), \quad b(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2\mu - A - B),$$

$$C(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\mu^2 - A\mu - C),$$

$$\beta = e^{\frac{\mu\xi}{2}} e^g, \quad g = -\frac{1}{4}\int (A - B)d\xi.$$

Тогда левая часть условия (1.1.13) принимает вид

$$\frac{1}{4}(2\mu - A - B)e^{\frac{\xi\mu}{2}} e^g - \int\limits_0^\xi e^{\frac{\mu t}{2}} e^{g(t,\eta)}|h(t,\eta)|dt \ge$$

$$\geq \frac{1}{4}(2\mu - A - B)e^{\frac{\mu\xi}{2}}e^{g} - e^{\frac{\mu\xi}{2}}\int\limits_{0}^{\xi} e^{g(t,\eta)}|h(t,\eta)|dt.$$

Отсюда видно, что если $\mu > \max\{0, \mu_1\}$,

$$\mu_1 = \max_{\overline{\Delta}}\left\{2e^{-g}\int\limits_{0}^{\xi} e^{g(t,\eta)}|h(t,\eta)|dt + \frac{1}{2}(A+B)\right\},$$

то условие (1.1.13) выполнено. А для справедливости условия (1.1.12) достаточно взять

$$\mu \geq \mu_2 = \max_{\overline{\Omega}_+}\frac{C}{|A|}.$$

Таким образом, если $\mu > \max\{0, \mu_1, \mu_2\}$, то для уравнения (1.1.10) имеет место теорема 1.1.6. Отсюда следует, что $v(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и, стало быть, $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Следовательно, в классе регулярных в Ω решений уравнения (1.1.2) при $K(y) = \operatorname{sgn} y$ задача Трикоми не имеет вещественного спектра.

§ 1.2. Экстремальные свойства решений одного класса параболических систем и их применения

В теории дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка важную роль играют внутренние и граничные принципы экстремума, так как на их основе получены и получаются интересные результаты как теоретического, так и прикладного характера.

Принципы экстремума в случае одного параболического уравнения второго порядка достаточно хорошо изучены [151]. Однако для систем параболического типа экстремальные свойства решений практически не изучены.

Здесь для одного класса параболических систем второго порядка установлены новые принципы экстремума, найдены достаточно простые условия для их справедливости и показаны применения этих принципов при изучении краевых задач.

1.2.1. Принципы экстремума. Пусть G – ограниченная область пространства точек $(x,t) = (x_1, x_2, \ \ldots, t)$, $m \geqslant 1$; $\partial G = \gamma \cup \gamma_0 \cup \Sigma$ – граница области G, где γ — верхняя крышка, γ_0 – нижняя крышка, Σ – боковая часть параболической границы $\Gamma = \partial G \backslash \gamma$ области G.

На множестве $G \cup \gamma$ рассмотрим систему второго порядка

$$L_i(u) \equiv a_{ipq} u_{ix_p x_q} + b_{ip} u_{ix_p} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} u_k u_{it} - f_i, \tag{1.2.1}$$

где $i = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$, повторение индексов p и q означает суммирование по этим индексам от 1 до m; $a_{ipq}(x,t)$, $b_{ip}(x,t)$, $c_{ik}(x,t)$ – заданные в G вещественные ограниченные функции, причем для каждого i: $a_{ipq}(x,t) = a_{ipq}(x,t)$ и квадратичная форма $a_{ipq}\xi_p\xi_q$ неотрицательно определена на множестве $G \cup \gamma$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$; функции $f_i(x,t)$ определены на $G \cup \gamma$; $u = (u_1, u_2, \ \ldots, u_n)$.

Определение 1.2.1. Под регулярным решением системы (1.2.1) будем понимать функцию $u(M) = u(x,t)$, удовлетворяющую условиям: $u(M) \in C(\overline{G}) \cap C^{2,1}_{x,t}(G \cup \gamma)$, $L_i(u) \equiv f_i$ на множестве $G \cup \gamma$ при всех i.

Теорема 1.2.1. *Пусть на множестве* $G \cup \gamma$

$$c_{ik} \geqslant 0 \textit{ при } k \neq i, \ c_{ii} + \sum_{k \neq i} c_{ik} < 0, \ f_i \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \tag{1.2.2}$$

или

$$c_{ik} \geqslant 0 \textit{ при } k \neq i, \ c_{ii} + \sum_{k \neq i} c_{ik} \leqslant 0, \ f_i > 0 \ (< 0) \tag{1.2.3}$$

и $u(M)$ – *регулярное решение системы* (1.2.1). *Тогда, если* $\max\limits_{i} \max\limits_{\overline{G}} u_i(M) > 0$ ($\min\limits_{i} \min\limits_{\overline{G}} u_i(M) < 0$), *то* $\max\limits_{i} \max\limits_{\overline{G}} u_i$ ($\max\limits_{i} \max\limits_{\overline{G}} u_i$) *достигается только на* Γ.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{i} \max\limits_{\overline{G}} u_i(M) = u_j(M_0) > 0$. Допустим, что точка $M_0 = (x_0, t_0) \in G \cup \gamma$. Тогда в точке M_0 в силу условий (1.2.2) будем иметь

$$L_j[u(M_0)] = a_{jpq}(M_0) \frac{\partial^2 u_j(M_0)}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{k \neq j}^{n} c_{jk}(M_0)[u_k(M_0) - u_j(M_0)] +$$

$$+ u_j(M_0) \left(c_{ij} + \sum_{i \neq j}^{n} c_{ij} \right) - \frac{\partial u_j(M_0)}{\partial t} < 0.$$

Но, с другой стороны, $L_j[u(M_0)] = f_j(M_0) \geqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает справедливость принципа максимума с условиями (1.2.2). Аналогично показывается принцип максимума при выполнении условий (1.2.3). Для доказательства принципа минимума достаточно в силу линейности системы (1.2.1) ввести в рассмотрение функцию $-u(x,t)$. ■

Следствие 1.2.1. *Пусть на множестве $G \cup \gamma$*

$$c_{ik}(x,t) \geqslant 0 \text{ при } k \neq j,\ \ f_i \leqslant 0\ (\geqslant 0) \tag{1.2.4}$$

и $u(M)$ – регулярное решение системы (1.2.1). Тогда, если $u_i(M) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на Γ при любом i, $i=\overline{1,n}$, то $u_i(M) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ в $\overline{G}$ при любом i.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$v(x,t) = u(x,t)\exp(-\alpha t),\ \ \alpha = \text{const} > 0, \tag{1.2.5}$$

которая является регулярным решением системы.

$$\widetilde{L}_i(v) \equiv L_i(v) - \alpha v_i = f_i e^{-\alpha t},\ \ i=\overline{1,n}. \tag{1.2.6}$$

Если теперь положить $\alpha > \max\limits_i \sup\limits_G \left(\sum\limits_{k=1}^n c_{ik}\right)$, то учетом (1.2.4) для системы (1.2.6) выполнены все условия теоремы 1.2.1. Отсюда следует, что если $\min\limits_i \min\limits_{\overline{G}} v_i(M) = v_j(M_0) < 0$, то точка M_0 принадлежит только Γ. Допустим, что существуют $i=s$ и точка $M_1 \in G\cup\gamma$, такие, что $u_s(M_1) < 0$. Тогда $\min\limits_i \min\limits_{\overline{G}} v_i(x,t) = v_j(M_0) < 0$ и в силу сказанного выше точка $M_0 \in \Gamma$. Но, с другой стороны, $v_j(M_0) \geqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.■

Следствие 1.2.2. *Пусть на множестве $G\cup\gamma:$ $c_{ik}(x,t) \geqslant 0$ при $k \neq i$, $\sum\limits_{k=1}^n c_{ik}(x,t) \leqslant c_i^* < 0$ и $u(M)$ – регулярное решение системы (1.2.1), где f_i – ограниченные функции $(|f_i| \leqslant N_i)$. Пусть $|u_i(x,t)| \leqslant m_i$ на Γ. Тогда*

$$|u_i(x,t) \leqslant \max_i \left\{\frac{N_i}{|c_i^*|}, m_i\right\}. \tag{1.2.7}$$

Доказательство. Пусть $N = \max\limits_i \left\{\frac{N_i}{|c_i^*|}, m_i\right\}$ и рассмотрим в $\overline{G}$ вспомогательные функции $\omega^{\pm}(x,t) = (\omega_1^{\pm}, \omega_2^{\pm},\ \ldots, \omega_n^{\pm})$, где

$$\omega_i^{\pm}(x,t) = N \pm u_i(x,t),\ \ i=\overline{1,n}. \tag{1.2.8}$$

Функции $\omega_i^{\pm}(x,t) \geqslant 0$ на Γ, а на множестве $G\cup\gamma$

$$L_i(\omega^{\pm}) = N\sum_{k=1}^n c_{ik} \pm f_i \leqslant Nc_i^* + N_i \leqslant 0.$$

Тогда по теореме 1.2.1 функции $\omega_i^{\pm} \geqslant 0$ в $G \cup \gamma$. Поэтому из (1.2.8) следует (1.2.7).

Следствие 1.2.3. Пусть на множестве $G \cup \gamma$ функции $c_{ik}(x,t) \geqslant 0$, при $k \neq 0$ и $u(x,t)$ – регулярное решение системы (1.2.1), где f_i – ограниченные функции ($|f_i| \leqslant N_i$). Пусть $|u_i(x,t)| \leqslant m_i$ на Γ и $\alpha > \max\limits_i \sup\limits_G \sum\limits_{k=1}^n c_{ik}$ и $\alpha > 0$. Тогда для всех $(x,t) \in \overline{G}$, справедлива оценка

$$|u_i(x,t)| \leqslant e^{\alpha t}(\widetilde{N}t + \widetilde{m}), \qquad (1.2.9)$$

где $\widetilde{N} = \max_i N_i$, $\widetilde{m} = \max_i m_i$.

Доказательство. По формуле (1.2.5) введем вспомогательную функцию $v(x,t)$, которая является регулярным решением системы (1.2.6). Рассмотрим в G две функции $\omega^{\pm}(x,t) = (\omega_1^{\pm}, \omega_2^{\pm}, \ \ldots, \omega_n^{\pm})$, где

$$\omega_i^{\pm}(x,t) = \widetilde{N}t + \widetilde{m} \pm v_i(x,t), \ i = \overline{1,n}. \qquad (1.2.10)$$

Легко заметить, что $\omega_i^{\pm}(x,t) \geqslant 0$ на Γ, а на множестве $G \cup \gamma$ удовлетворяют системе уравнений

$$\widetilde{L}_i(\omega^{\pm}) = L_i(\omega^{\pm}) - \alpha\omega_i^{\pm} = (\widetilde{N}t + \widetilde{m}) \sum_{k=1}^n c_{ik} - \widetilde{N} - \alpha(\widetilde{N}t + \widetilde{m}) \pm \widetilde{L}_i(\omega^{\pm}) =$$

$$= (\widetilde{N}t + \widetilde{m}) \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} - \alpha \right) -$$

$$-\widetilde{N} \pm f_i e^{-\alpha t} < -\widetilde{N} + |f_i| \leqslant 0, \ i = \overline{1,n},$$

правые части которых отрицательны. Отсюда следует, что функции $\omega_t^{\pm}(x,t)$ и операторы $\widetilde{L}_i$ полностью удовлетворяют условиям следствия 1.2.1. Поэтому $\omega_i^{\pm}(x,t) \geqslant 0$ на $G \cup \gamma$ и из (1.2.10) получим

$$|v_i(x,t)| \leqslant \widetilde{N}t + \widetilde{m}. \qquad (1.2.11)$$

Тогда из соотношений (1.2.11) и (1.2.5) следует (1.2.9).■

Замечание 1.2.1. Отметим, что при доказательстве следствия 1.2.3 предполагалось, что в области G переменная $t > 0$.

Теорема 1.2.2. *Пусть на множестве* $G \cup \gamma$

$$c_{ii} + \sum_{k \neq i} |c_{ik}| < 0, \ f_i \equiv 0 \qquad (1.2.12)$$

$u(M)$ *– регулярное решение системы* (1.2.1). *Тогда* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{G}} |u_i(M)| > 0$ *достигается только на* Γ.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{G}} |u_i(M)| = |u_j(M_0)| > 0$. В силу линейности системы (1.2.1) и $f_i \equiv 0$ можно считать, что $u_j(M_0)$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{G}} u_i(M) = u_j(M_0) > 0$ и $|u_i(M)| \leqslant u_j(M_0)$ в $\overline{G}$. Допустим, что $M_0 \in G \cup \gamma$. Тогда в этой точке в силу условий (1.2.12) будем иметь

$$L_j[u(M_0)] = a_{jpq}(M_0)\frac{\partial u_j(M_0)}{\partial x_p \partial x_q} + c_{jj}u_j(M_0) - \frac{\partial u_j(M_0)}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{k \neq j} c_{jk}u_k(M_0) \leqslant a_{ipq}(M_0)\frac{\partial^2 u_j(M_0)}{\partial x_p \partial x_q} -$$

$$- \frac{\partial u_j(M_0)}{\partial t} + u_j(M_0)\left(c_{jj} + \sum_{k \neq j} |c_{jk}|\right) < 0,$$

что противоречит $L_j[u(M_0)] = 0$.■

Следствие 1.2.4. Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2. Тогда всюду в G справедлива оценка

$$|u_i(x,t)| < \max_i \max_\Gamma |u_i(x,t)|.$$

В дальнейшем будем предполагать, что оператор L_i при каждом i локально равномерно параболичен в области G.

Определение 1.2.2. Пусть $M_0 = (x_0, t_0) \in G \cup \gamma$. Область $G(M_0)$ назовем подчиненной точке M_0, если $G(M_0) \subset G$ и любую точку $M \in G(M_0)$ при $t < t_0$ можно соединить с точкой M_0 ломаной, принадлежащей $G \cup \{(x_0, t_0)\}$ и однозначно проецирующейся на ось Ot.

Теорема 1.2.3. *Пусть на множестве* $G \cup \gamma$

$$c_{ik} \geqslant 0 \text{ при } k \neq i,\ c_{ii} + \sum_{k \neq i} c_{ik} \leqslant 0,\ f_i \geqslant 0\ (\leqslant 0) \qquad (1.2.13)$$

и $u(M)$ – *регулярное решение системы* (1.2.1). *Пусть* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{G}} u_i(M) = u_j(M_0) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{G}} u_i(M) = u_j(M_0) < 0)$. *Если точка* $M_0 \in G \cup \gamma$, *то* $u_j(M) \equiv \mathrm{const}$ *в подобласти* $G(M_0)$, *подчиненной точке* $M_0 = (x_0, t_0)$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\omega(M) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, где $\omega_i(M) = u_i(M) - u_j(M_0)$, которая является регулярным решением системы

$$L_i(\omega) = f_i - u_j(M_0)\sum_{k=1}^n c_{ik}$$

и $\omega_i(M) \leqslant 0$ в $\overline{G}$, $\max_i \max_{\overline{G}} \omega_i(M) = \omega_j(M_0) = 0$. Отсюда легко заметить, что функция $\omega_j(M)$ является регулярным решением параболического уравнения

$$\Pi_j(\omega_j) \equiv a_{jpg}\omega_{jx_px_q} + b_{jp}\omega_j + c_{jj}\omega_j - \omega_{ji} = g_j, \tag{1.2.14}$$

где

$$g_j = f_i - u_j(M_0)\sum_{k=1}^{n} c_{jk} - \sum_{k\neq j} c_{jk}\omega_k.$$

В силу условий (1.2.13) правая часть уравнения (1.2.14) неотрицательна на множестве $G \cup \gamma$ Поскольку оператор Π_j локально равномерно параболичен и его коэффициенты ограничены в G, то в силу результатов Ниренберга [151] функция $\omega_j(M) \equiv \mathrm{const}$ в подчиненной точке $M_0 \in G \cup \gamma$ области $G(M_0)$. ■

Теорема 1.2.4. *Пусть на множестве* $G \cup \gamma$

$$c_{ii} + \sum_{k\neq i} |c_{ik}| \leqslant 0, \;\; f_i \equiv 0 \tag{1.2.15}$$

и $u(M)$ *– регулярное решение системы* (1.2.1). *Пусть* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{G}} |u_i(M)| = |u_j(M_0)| > 0$. *Если точка* $M_0 \in G \cup \gamma$, *то* $u_j(M) \equiv \mathrm{const}$ *в области* $G(M_0)$, *подчиненной точке* M_0.

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что $u_j(M_0) > 0$. Тогда $\max_i \max_{\overline{G}} u_i(M) = u_j(M_0) > 0$ и $|u_i(M)| \leqslant u_j(M_0)$ в $\overline{G}$. Теперь, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1.2.3, введем новую функцию $\omega(M)$. При этом функция $\omega_j(M) = u_j(M) - u_j(M_0)$ является решением параболического уравнения (1.2.14), правая часть которого в силу условия (1.2.15) на множестве $G \cup \gamma$ неотрицательна. В самом деле,

$$g_j = -u_j(M_0)c_{jj} - \sum_{k\neq j} c_{jk}[u_j(M_0) + \omega_k] \geqslant -u_j(M_0)\left(c_{jj} + \sum_{k\neq j}|c_{jk}|\right) \geqslant 0.$$

Если теперь точка $M_0 \in G \cup \gamma$, то в силу результатов [151] функция $\omega_j(M) \equiv \mathrm{const}$ в области $G(M_0)$, подчиненной точке M_0. ■

Замечание 1.2.2. Если в условиях теоремы 1.2.3 или 1.2.4 функции $u_i(M)$ не равны постоянной в любой подобласти области G, то точка M_0 принадлежит только Γ.

Замечание 1.2.3. В теореме 1.2.4 условия (1.2.15) существенны, ибо их нарушение влечет за собой несправедливость утверждения этой теоремы. В качестве примера рассмотрим в цилиндре $Q = \{(x_1, x_2, t)|x_1^2 + x_2^2 < r^2,\ 0 < t < T\}$ систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 4\beta u_1 - 4\beta^2(x_1^2 + x_2^2)u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - 4\beta^2(x_1^2 + x_2^2)u_1 + 4\beta u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

где $\beta = \mathrm{const} > 0$, для которой условие (1.2.15) имеет вид

$$c_{ii} + \sum_{k \neq i} |c_{ik}| = 4\beta + 4\beta^2(x_1^2 + x_2^2) > 0.$$

Система (1.2.16) имеет решение $u = (u_1, u_2)$, где $u_1 = u_2 = \exp[-\beta(x_1^2 + x_2^2) + t]$. Отсюда видно, что функции u_1 и u_2 достигают своего положительного наибольшего значения на верхней крышке γ области Q, т. е. на множестве $Q \cup \gamma$, хотя не являются постоянными в цилиндре Q.

Замечание 1.2.4. Если в теореме 1.2.3 $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik} \equiv 0$ в $G \cup \gamma$ при любом i, $i = \overline{1, n}$, то нет необходимости в условии

$$\max_i \max_{\overline{G}} u_i(M) > 0 \ (\min_i \min_{\overline{G}} u_i(M) < 0).$$

Следствие 1.2.5. Пусть выполнены условия теоремы 1.2.4. Тогда всюду в G справедлива оценка

$$|u_i(x, t) \leqslant | \max_i \max_{\Gamma} |u_i(x, t)|.$$

Доказательство. Пусть $N = \max\limits_i \max\limits_{\Gamma} |u_i(x, t)|$. Рассмотрим в $\overline{G}$ две функции $\omega^{\pm}(x, t) = N \pm u(x, t)$. Легко видеть, что $\omega_i^{\pm}(x, t) \geqslant 0$ на Γ, а на $G \cup \gamma$

$$L_i(\omega^{\pm}) = N \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \pm L_i(u) \leqslant N \left(c_{ii} + \sum_{k \neq i} |c_{ik}| \right) \leqslant 0.$$

Тогда в силу следствия 1.2.1 функции $\omega_i^{\pm} = N \pm u_i(x, t) \geqslant 0$ в $\overline{G}$. Отсюда следует $|u_i(x, t)| \leqslant N$ в $\overline{G}$. ■

Определение 1.2.3. Будем говорить, что граничная точка $M_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$ области G обладает свойством строгой сферичности изнутри, если существует шар B с центром в точке $M_1 = (x_1, t_1)$, такой, что $B \subset G$, $\overline{B} \cap \Gamma = \{M_0\}$ и $x_1 \neq x_0$.

Теорема 1.2.5. *Пусть:* 1) *выполнены условия теоремы* 1.2.3*;* 2) *точка* $M_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$ *и* Γ *обладает свойством строгой сферичности изнутри. Тогда либо функция* $u_j(M) \equiv \mathrm{const}$ *в окрестности точки* M_0 *при* $t \leqslant t_0$*, либо для любого направления* l*, исходящего из точки* M_0 *и удовлетворяющего условию* $\cos\widehat{(l, \vec{n})} > 0$*, справедливо неравенство*

$$\frac{\partial u_j(M_0)}{\underline{\partial l}} = \underline{\lim_{\delta \to 0+0}} \frac{u_j(M_0 + \delta l) - u_j(M_0)}{\delta} < 0, \tag{1.2.17}$$

$$\left(\frac{\overline{\partial u_j(M_0)}}{\partial l} = \overline{\lim_{\delta \to 0+0}} \frac{u_j(M_0 + \delta l) - u_j(M_0)}{\delta} > 0 \right)$$

где $\vec{n}$ *– вектор внутренней нормали к границе* Γ *в точке* M_0.

Доказательство. Пусть $u_j(M) = \mathrm{const}$. Тогда существует окрестность V точки M_0, такая, что $u_j(M) < u_j(M_0) <$ при всех $M \in (G \cup \gamma) \cap V$. Аналогично доказательству теоремы 1.2.3 введем вспомогательную функцию $\omega(M) = (\omega_1, \omega_2, \ \ldots, \omega_n)$, где $\omega_i(M) = u_i(M) - u_j(M_0)$. При этом функция $\omega_j(M)$ является регулярным решением параболического уравнения (1.2.14), у которого оператор Π_j локально равномерно параболичен и правая часть $g_j \geqslant 0$ на множестве $G \cup \gamma$. Тогда в силу результатов Р.О. Выборного [12] и А. Фридмана [139, с. 69] справедливо

$$\frac{\partial \omega_j(M_0)}{\underline{\partial l}} < 0. \tag{1.2.18}$$

Из оценки (1.2.18) уже просто следует (1.2.17). ∎

Теорема 1.2.6. *Пусть:* 1) *выполнены условия теоремы* 1.2.4*;* 2) *точка* $M_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$ *и* Γ *обладает свойством строгой сферичности изнутри. Тогда либо функция* $u_j(M) \equiv \mathrm{const}$ *в окрестности точки* M_0 *при* $t \leqslant t_0$*, либо для любого направления* l*, исходящего из точки* M_0 *и удовлетворяющего условию* $\cos\widehat{(l, \vec{n})} > 0$*, справедливо неравенство*

$$\frac{\partial |u_j(M_0)|}{\underline{\partial l}} < 0.$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.5.

В теоремах 1.2.5 и 1.2.6 условие 2) о гладкости параболической границы Γ области G является довольно сильным требованием. Поэтому при изучении краевых задач представляет интерес доказательство аналогов теорем 1.2.5 и 1.2.6 при более слабых ограничениях на гладкость боковой поверхности Σ.

Пусть $M=(x,t),\ M_0=(x_0,t_0),\ M^0=(x,t_0)$;

$$\Sigma_0=\{M_0\in\Sigma\,|\,\forall M_0\ \exists M^0\in G\cup\gamma((M_0M^0]\subset G\cup\gamma)\}.$$

Пусть в граничной точке $M_0\in\Sigma_0$ задан орт

$$M_0\nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m,0),\ \nu_i=\cos(Ox_i,M_0\nu),\ i=\overline{1,m}, \tag{1.2.19}$$

и $(y,\tau)=(y_1,y_2.\ \ldots,y_m,\tau)$ – местная декартова система координат с началом в точке M_0, ось M_0y_1 которой имеет направляющим ортом (1.2.19), а ось $M_0\tau$ — одинаковое направление с осью Ot; $y=(y_1,y'),\ y'=(y_2,\ \ldots,y_m)$ (при $m\geqslant 2$), $z'=(y',\tau),\ |y'|^2=\sum\limits_{i=2}^{m}y_i^2,\ |z_i'|_0^2=|y'|^2+|\tau|$.

Определение 1.2.4. Полуконусом с вершиной в точке $M_0\in\Sigma_0$ с осью вдоль орта (1.2.19) назовем множество

$$K(M_0)=\{(y,\tau)|\sqrt{k}\,|\,z'|_0<y_1\leqslant h;\ \tau\leqslant 0\}, \tag{1.2.20}$$

где k и h – положительные постоянные.

Определение 1.2.5. Будем говорить, что поверхность Σ_0 удовлетворяет условию полуконуса, если существуют положительные числа $k,\ h$ и единичное непрерывное векторное поле ортов $M_0\nu$, заданное на Σ_0, такие, что для каждой точки $M_0\in\Sigma_0$ существует полуконус (1.2.20) такой, что

$$\overline{K}(M_0)\backslash\{M_0\}\subset G\cup\gamma,\ \overline{K}(M_0)\cap\gamma_0=\varnothing.$$

Например, поверхность Σ_0 удовлетворяет условию полуконуса, если сечения $\Sigma_0\cap\{t=t_0\}$ по переменной x удовлетворяют условию Липшица, а сечения поверхности Σ_0 с гиперплоскостями, параллельными оси Ot, удовлетворяют по t условию Гёльдера с показателем $\geqslant 1/2$, т.е. когда $\Sigma_0\in H_{x,t}^{1,1/2}$.

Теорема 1.2.7. *Пусть:* 1) *выполнены условия теоремы* 1.2.3*;* 2) *точка $M_0\in\Sigma_0$ и поверхность Σ_0 удовлетворяет условию полуконуса;* 3) $u_j(M)<u_j(M_0)$ $(u_j(M)>u_j(M_0))$ *при всех* $M\in G\cup\gamma\cap\{t\leqslant t_0\}$.

Тогда в любой полуокрестности $V^-(M_0) \subset \Sigma \cap \{t \leqslant t_0\}$ *точки* M_0 *существует точка* $M_1 \in \Sigma_0 \cap V^-(M_0)$ *такая, что*

$$\frac{\partial u_j(M_1)}{\underline{\partial M_1 v}} < 0 \quad \left(\frac{\overline{\partial u_j(M_1)}}{\partial M_1 v} > 0 \right). \tag{1.2.21}$$

Доказательство. Как и в случае доказательства теоремы 1.2.3, введем вспомогательную функцию $\omega(M) = (\omega_1, \omega_2, \ \ldots, \omega_n)$, где $\omega_j(M) = u_j(M) - u_j(M_0)$ является регулярным решением параболического уравнения (1.2.14). Поскольку оператор Π_j, определенный левой частью уравнения (1.2.14), локально равномерно параболичен и его коэффициенты ограничены в G и правая часть уравнения (1.2.14) неотрицательна на $G \cup \gamma$ (см. доказательство теоремы 1.1.3), то в силу результатов Л.И. Камынина и Б.П. Химченко [46, 47] в любой полуокрестности $V^-(M_0) \subset \Sigma \cap \{t \leqslant t_0\}$ точки M_0 максимума функции $\omega_j(M)$ найдется точка $M_1 \in \Sigma_0 \cap V^-(M_0)$ такая, что $\partial\omega_j(M_1)/\partial M_1 \nu < 0$. Отсюда следует справедливость оценки (1.2.21). ■

Теорема 1.2.8. *Пусть:* 1) *выполнены условия теоремы* 1.2.4*;* 2) *точка* $M_0 \in \Sigma_0$ *и* Σ_0 *удовлетворяет условию полуконуса;* 3) $|u_j(M)| < |u_j(M_0)|$ *при всех* $M \in G \cup \gamma \cap \{t \leqslant t_0\}$. *Тогда в любой полуокрестности* $V^-(M_0) \subset \Sigma \cap \{t \leqslant t_0\}$ *точки* M_0 *существует точка* $M_1 \in \Sigma_0 \cap V^-(M_0)$ *такая, что* $\partial|u_j(M_1)|/\partial M_1 \nu < 0$.

Справедливость этой теоремы доказывается аналогично теоремам 1.2.4, 1.2.7.

Замечание 1.2.5. Аналог теоремы 1.2.7 для одного равномерно эллиптического уравнения второго порядка впервые был установлен Н.С. Надирашвили [76], когда граница рассматриваемой области удовлетворяет условию конуса. Его результаты Л.И. Камынин и Б.Н. Химченко [46, 47] перенесли на вырождающиеся параболические уравнения.

На основании установленных выше результатов нетрудно получить единственность и устойчивость решения начально-граничных задач [93].

1.2.2. Задача Коши. В этом пункте систему (1.2.1) рассмотрим в полосе $G = \mathbb{R}^m \times (0, T)$ и предположим, что функции $a_{ipq}(x,t)$ и $c_{ik}(x,t)$ при $k \neq i$ ограничены в G, а остальные коэффициенты системы (1.2.1) ограничены в любой ограниченной подобласти области G.

Задача Коши. Найти в области G регулярное решение системы (1.2.1), удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, где $u_0(x)$ – заданная непрерывная вектор-функция.

Лемма 1.2.1. *Пусть на множестве* $G \cup \gamma$: $c_{ik}(x,t) \geqslant 0$ *при* $k \neq i$, $f_i \leqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}(x,t)$ *ограничена сверху и* $u(x,t)$ *– регулярное решение системы* (1.2.1). *Тогда если* $u_i(x,0) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^m$ *и равномерно по* $t \in [0,T]$ *существует предел*

$$\underline{\lim}_{|x|\to\infty} u_i(x,t) \geqslant 0, \tag{1.2.22}$$

то $u_i(x,t) \geqslant 0$ *в* $\overline{G}$.

Доказательство. В силу предела (1.2.22) существует достаточно большое число $R > 0$, такое, что при $|x| = R$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ $u_i(x,t) \geqslant 0$. Тогда на основании следствия 1.2.1 функции $u_i(x,t) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant R$ и $0 \leqslant t \leqslant R$. Отсюда следует утверждение леммы. ■

Пусть

$$M_1 = \max_i \sup_G \max_{|\xi|=1} \sum_{p,q=1}^{m} a_{ipq}\xi_p\xi_q, \quad M_2 = \max_i \sup_G \sum_{p=1}^{m} a_{ipp}.$$

Лемма 1.2.2. *Пусты:* 1) *на множестве* $G \cup \gamma$ *выполнены* $c_{ik}(x,t) \geqslant 0$ *при* $k \neq i$, $f_i \leqslant 0$, $\sum_{p=1}^{m} |b_{ip}| \leqslant K_1(|x|+1)$, $c_{ii}(x,t) \leqslant K_2(|x|^2+1)$, K_1, K_2 *– положительные постоянные;* 2) $u_i(x,t) \geqslant -c_1 \exp(c_2|x|^2)$ *в* $\overline{G}$ *некоторых положительных постоянных* c_1 *и* c_2*;* *3)* $u_i(x,0) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^m$. *Тогда* $u_i(x,t) \geqslant 0$ *в* $\overline{G}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $v = uE^{-1}$, где $E(x,t) = \exp\left(\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \alpha t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2\mu}$; k, α, μ – положительные постоянные, которая является решением системы

$$\sum_{p,q=1}^{m} a_{ipq} v_{ix_px_q} + \sum_{p=1}^{m} \overline{b}_{ip} v_{ix_p} + \sum_{k=1}^{m} \overline{c}_{ik} v_k = \overline{f}_i, \tag{1.2.23}$$

где $\overline{f}_i = f_i E^{-1}$, $\overline{c}_{ii} = \Pi_i(E)E^{-1}$, $\overline{c}_{ik} = c_{ik}$ при $k \neq i$,

$$\overline{b}_{ip} = b_{ip} + 2\sum_{q=1}^{m} a_{ipq} E_{x_q} E^{-1}.$$

В силу условия 1) нетрудно показать, что $\overline{c}_{ii} < 0$ в $\overline{G}$. В самом деле,

$$\overline{c}_{ii} = E^{-1}\Pi_i(E) = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2} \sum_{p,q=1}^{m} a_{ipq} x_p x_q + \frac{2k}{1-\mu t} \sum_{p=1}^{m} a_{ipp} +$$

$$+\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{p=1}^{m} b_{ip}x_p + c_{ii} - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \alpha \leqslant$$

$$\leqslant \left(16k^2M_1 + 8kK_1 + K_2 - \mu k\right)|x|^2 -$$

$$-4kK_1\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + (kK_1 + 4kM_2 + K_2 - \alpha) \leqslant 0$$

при надлежащем подборе постоянных μ и α при любом $k > 0$. После этого легко видеть, что коэффициенты системы (1.2.23) удовлетворяют условиям леммы 1.2.1. Из условия 2) леммы следует, что при фиксированном $k > c_2$ равномерно по $t \in [0, 1/2\mu]$

$$\varliminf_{|x|\to\infty} v_i(x,t) = \varliminf_{|x|\to\infty} u_i E^{-1} \geqslant 0.$$

Следовательно, для системы (1.2.23) выполнены все условия леммы 1.2.1. Тогда $v_i(x,t) \geqslant 0$ и, стало быть, $u_i(x,t) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^m \times [0, 1/2\mu]$. Повторяя приведенные выше рассуждения для полосы $[1/2\mu, 1/\mu]$, потом для полосы $[1/\mu, 2/\mu]$ и т.д., установим, что $u_i(x,t) \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}$.

Определение 1.2.6. Функцию $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, заданную в $\overline{G}$, будем называть принадлежащей классу Тихонова, если существуют постоянные c_1, $c_2 > 0$, такие, что $|u_i(x,t)| \leqslant c_1 \exp(c_2|x|^2)$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 1.2.14. *Если коэффициенты системы* (1.2.1) *удовлетворяют условию* 1) *леммы* 1.2.2*, то задача Коши в классе Тихонова может иметь не более одного решения.*

Справедливость этой теоремы следует из леммы 2.

Замечание 1.2.6. Отметим, что система (1.2.1) возникает при изучении математических моделей хищник-жертва, при исследовании вопроса о распределении концентраций веществ, участвующих в процессе жизнедеятельности живой клетки [120] и в других моделях. В работах [44, 45] для системы (1.2.1) исследована краевая задача на сопряжение из [120] в более общей постановке и получены теорема единственности решения этой задачи и оценка модуля компонент вектор-функции $u(x,t)$ в классе непрерывных функций. Используя изложенные выше результаты, можно получить утверждения из [44, 45] при довольно слабых ограничениях на заданные функции и гладкость границы рассматриваемой области.

§ 1.3. О спектральном влиянии гиперболической части уравнений смешанного типа на корректность задачи Трикоми

1.3.1. Постановка задач. Формулировка основных результатов

Рассмотрим уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$L_1u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} - \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$L_2u \equiv \begin{cases} u_x - u_{yy} - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

где λ_1 и λ_2 – вещественные параметры, в области Ω (см. рис. 1) и поставим аналоги задачи Трикоми.

Задача T_1**.** *Найти функцию* $u(x, y)$*, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_+ \cup A_1B_1) \cap C^2(\Omega_-), \tag{1.3.3}$$

$$L_1u \equiv 0, \quad (x, y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1; \tag{1.3.4}$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{CA} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}, \tag{1.3.5}$$

где φ *– заданная достаточно гладкая функция.*

Задача T_2**.** *Найти функцию* $u(x, y)$*, удовлетворяющую условиям* (1.3.3) *и*

$$L_2u \equiv 0, \quad (x, y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1; \tag{1.3.6}$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{CA} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}, \tag{1.3.7}$$

где ψ *– заданная достаточно гладкая функция.*

В 1977 г. Т.Ш. Кальменов [41] впервые на основе принципа экстремума А.В. Бицадзе [6] и теории положительных решений операторных уравнений М.А. Красносельского [60] доказал существование спектра задачи Трикоми для уравнения

$$L(z) = -(\operatorname{sgn} y)z_{xx} - z_{yy} = \lambda z. \tag{1.3.8}$$

В работах [73, 85, 92] путем развития метода Трикоми [136] доказательства единственности решения задачи Трикоми получены достаточные условия отсутствия спектра этой задачи для уравнения (1.3.8) на плоскости изменения параметра λ, для специальных областей построены собственные функции задачи Трикоми и изучены их свойства.

При исследовании задачи Трикоми для общих уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов, кроме естественных условий гладкости, возникают жесткие ограничения неравенственного характера на их коэффициенты в области гиперболичности [3, 142, 88, 4, 74, 21, 106], которые являются достаточными условиями для единственности решения задачи Трикоми в определенном классе решений. В связи с этим возникают следующие вопросы.

1. Можно ли снять эти ограничения в области гиперболичности, т.е. можно ли доказать хотя бы единственность решения задачи Трикоми без каких-либо ограничений неравенственного характера в области гиперболичности?

2. Если же не удается избавиться от этих ограничений, то можно ли их существенно ослабить и выяснить, насколько они близки к необходимым условиям однозначной разрешимости задачи Трикоми?

В данной работе эти вопросы решаются для уравнений (1.3.1), (1.3.2), которые являются представителями уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уравнение (1.3.1) является уравнением смешанного типа с характеристической линией изменения типа (т.е. время направлено вдоль оси Oy), а (1.3.2) – уравнением смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа (время в параболической части направлено вдоль оси Ox). Поэтому краевые условия в задачах T_1 и T_2 в области параболичности заданы по-разному. Оказывается, этот момент играет существенную роль при исследовании задач .

В п. 1.3.2 изучена задача T_1 и показано, что единственность ее решения в классе регулярных решений уравнения (1.3.1) существенным образом зависит от параметров λ_1 и λ_2. Если $\lambda_1 > 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума, то найдется такое значение λ_2, при котором однородная задача имеет ненулевое неотрицательное решение.

В п. 1.3.3 изучена задача T_2 и доказано, что она вообще не имеет ни вещественного, ни комплексного спектра.

1.3.2. Исследование задачи T_1

Определение 1.3.1. *Под регулярным в* Ω *решением уравнения* (1.3.1) *будем понимать функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям*

(1.3.3), (1.3.4) *и, кроме того,* $2u_\eta = u_x - u_y \in C(\Omega_- \cup AC)$, $|\nabla u| = O(r_A^{-1/2+\varepsilon_1})$, $|\nabla u| = O(r_B^{-1/2+\varepsilon_2})$, $r_A^2 = x^2 + y^2$, $r_B^2 = (l-x)^2 + y^2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

1^0**. Случай, когда $\lambda_2 \geq 0$.** В области Ω_- для уравнения (1.3.1) рассмотрим задачу Дарбу (см. [94], [110, §2.1]): найти регулярное решение в Ω_- уравнения (1.3.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u(x,-x) = 0, 0 \leq x \leq l/2, \quad \tau(0) = 0.$$

Решение этой задачи построено в явном виде и оно определяется формулой (2.1.13) [110, с. 76]). Из этой формулы вычислим

$$\nu(x) = \tau'(x) + \lambda_2 \int_0^x \tau(t)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2}(x-t)\right]dt. \tag{1.3.9}$$

Справедлива следующая

Лемма 1.3.1. *Если $u = 0$ на характеристике AC и $\lambda_2 \geq 0$, то для любого регулярного решения уравнения* (1.3.1) *имеет место неравенство*

$$J = \int_0^x \tau(t)\nu(t)dt \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Доказательство. Используя равенство (1.3.9), преобразуем интеграл

$$J = \frac{\tau^2(x)}{2} + \lambda_2 \int_0^x \tau(t) \int_0^t \overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\right]\tau(s)dsdt.$$

Заменим функцию Бесселя $J_1(\,\cdot\,)$ ее интегральным представлением [5. Т. II, с. 92]:

$$J_1\left[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\right] = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\pi}(t-s)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}\cos\left[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\xi\right]d\xi.$$

Тогда выражение для интеграла J примет вид

$$J = \frac{\tau^2(x)}{2} + \frac{\lambda_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}d\xi\int_0^x \tau(t)dt\int_0^t \tau(s)\cos\left[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\xi\right]ds =$$

$$= \frac{\tau^2(x)}{2} + \frac{\lambda_2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2} d\xi \times$$

$$\times \left[\int\limits_0^x \tau(t) \cos\left(t\xi\sqrt{\lambda_2}\right) dt \int\limits_0^t \tau(s) \cos\left(s\xi\sqrt{\lambda_2}\right) ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^x \tau(t) \sin\left(t\xi\sqrt{\lambda_2}\right) dt \int\limits_0^t \tau(s) \sin\left(s\xi\sqrt{\lambda_2}\right) ds \right] =$$

$$= \frac{\tau^2(x)}{2} + \frac{\lambda_2}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2} \, \left[\Phi^2(x,\xi) + F^2(x,\xi)\right] d\xi \geq 0,$$

где

$$\Phi(x,\xi) = \int\limits_0^t \tau(s) \cos\left(s\xi\sqrt{\lambda_2}\right) ds, \quad F(x,\xi) = \int\limits_0^t \tau(s) \sin\left(s\xi\sqrt{\lambda_2}\right) ds.$$

Отметим, что знакоопределенность интеграла J показана также в работах [85, 117, 21], близких к нашим рассуждениям.

Лемма 1.3.2. *Если* $\lambda_1 \geq 0$ *и*

$$\lim_{x\to 0+0} u(x,0)u_x(x,0) = \lim_{x\to l-0} u(x,0)u_x(x,0) = 0, \tag{1.3.10}$$

то для любого регулярного в области Ω_+ *решения уравнения* (1.3.1) *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^l \tau(x)\nu(x)dx \leq 0.$$

Доказательство. В области Ω_+ рассмотрим тождество

$$u(u_{xx} - u_y - \lambda_1 u) = (uu_x)_x - uu_y - u_x^2 - \lambda_1 u^2$$

и интегрируем его по x вдоль отрезка A_hB_h прямой $y = h$, $0 < h < d$, где $A_h = (\varepsilon, h)$, $B_h = (l-\varepsilon, h)$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В полученном равенстве, переходя к пределу при $h \to 0$, затем при $\varepsilon \to 0$, с учетом условия (1.3.10) получим

$$\int\limits_0^l \tau(x)\nu(x)dx = -\int\limits_0^l [\tau'^{\,2}(x) + \lambda_1\tau^2(x)]dx. \tag{1.3.11}$$

Отсюда и следует утверждение леммы при $\lambda_1 \geq 0$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $u(x,y)$ – *решение однородной задачи* (1.3.3) – (1.3.5) *из класса регулярных решений уравнения* (1.3.1), *удовлетворяющее условию* (1.3.10). *Тогда* $u \equiv 0$ *в* Ω *при всех* $\lambda_2 \geq 0$ *и* $\lambda_1 > -(\pi/l)^2$.

Доказательство. Легко видеть, что из равенства (1.3.11) в силу лемм 1.3.1 и 1.3.2 при $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 \geq 0$ следует $u(x,0) \equiv \tau(x) = 0$ на $[0,l]$. Тогда отсюда вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в Ω.

Пусть теперь $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 < 0$. Тогда в силу леммы 1.3.1 из равенства (1.3.11) имеем

$$\int\limits_0^l \tau'^{\,2}(x)dx \leq -\lambda_1 \int\limits_0^l \tau^2(x)dx. \tag{1.3.12}$$

С другой стороны, на основании неравенства Фридрихса [90, с. 190]

$$\int\limits_0^l \tau^2(x)dx \leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^l \tau'^{\,2}(x)dx. \tag{1.3.13}$$

Тогда из (1.3.12) и (1.3.13) при $-(\pi/l)^2 < \lambda_1 < 0$ следует единственность решения задачи T_1.

2^0. **Случай, когда $\lambda_2 < 0$.** Введем новую функцию

$$w(x,y) = u(x,y)\mathrm{exp}(-\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.3.14}$$

которая в области Ω является регулярным решением уравнения

$$K_1(w) \equiv \begin{cases} w_{xx} - w_y + 2\alpha w_x + (\alpha^2 - \lambda_1)w = 0, & y > 0, \\ w_{xx} - w_{yy} + 2\alpha w_x + (\alpha^2 + \lambda_2)w = 0, & y < 0. \end{cases} \tag{1.3.15}$$

В области Ω_- перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. При этом уравнение (1.3.15) принимает вид

$$w_{\xi\eta} + \frac{\alpha}{2}w_\xi + \frac{\alpha}{2}w_\eta + \frac{\alpha^2 + \lambda_2}{2}w = 0, \tag{1.3.16}$$

а область Ω_- отобразится в область Δ.

В области Δ рассмотрим более общее, чем (1.3.15), уравнение

$$\widetilde{K}_1(w) \equiv w_{\xi\eta} + a(\xi\eta)w_\xi + b(\xi,\eta)w_\eta + c(\xi,\eta)w = 0, \tag{1.3.17}$$

и пусть его коэффициенты являются достаточно гладкими в $\overline{\Delta}$.

Лемма 1.3.3. *Если $w = 0$ на характеристике AC и коэффициенты уравнения* (1.3.17) *удовлетворяют условиям* (I) *или* (II):

$$\begin{cases} 2c - a_\xi - b_\eta - c^2/(a_\xi + 2ab) \geq 0 \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a_\xi + 2ab > 0, \quad a \neq 0 \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a > 0 \quad \text{на} \quad \eta = \xi, \quad b \geq 0 \quad \text{на} \quad \eta = l; \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} 2c - a_\xi - b_\eta - (c/a)_\eta \geq 0 \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a_\xi + 2ab \geq 0, \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a > 0, \quad c \leq 0 \quad \text{на} \quad \eta = \xi, \\ b + c/a \geq 0 \quad \text{на} \quad \eta = l, \end{cases} \tag{II}$$

то для любого регулярного решения уравнения (1.3.17) *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^x [w(t,0)w_y(t,0) + (b-a)w^2(t,0)]dt \geq 0, \quad x \in [0,l]. \tag{1.3.18}$$

Доказательство. В области Δ рассмотрим тождества

$$2w\widetilde{K}_1(w) \equiv \left(ww_\eta + aw^2 + \frac{1}{a}w_\eta^2\right)_\xi + \left(ww_\xi + bw^2\right)_\eta +$$

$$+a^{-2}(a_\xi + 2ab)^{-1}\left[(a_\xi + 2ab)w_\eta + acw\right]^2 +$$
$$+(2c - a_\xi - b_\eta - c^2/(a_\xi + 2ab))w^2 \equiv 0, \tag{1.3.19}$$

$$2w\widetilde{K}_1(w) \equiv \left(ww_\eta + aw^2 + \frac{1}{a}w_\eta^2\right)_\xi + \left(ww_\xi + bw^2 + \frac{c}{a}w^2\right)_\eta +$$

$$+\frac{a_\xi + 2ab}{a^2}w_\eta^2 + \left[2c - a_\xi - b_\eta - \left(\frac{c}{a}\right)'_\eta\right]w^2 \equiv 0. \tag{1.3.20}$$

На прямой $\eta = \xi$ возьмем точку (x,x), $0 < x < l$, и через нее проведем характеристику $\eta = x$ уравнения (1.3.17). Обозначим через Δ_x область, ограниченную отрезками прямых $\eta = x$, $\eta = \xi$ и $\xi = 0$. Пусть коэффициенты уравнения (1.3.17) удовлетворяют условиям (I). Тогда, интегрируя тождество (1.3.19) по области Δ_x, получим требуемое неравенство. Когда выполнены условия (II), то, интегрируя тождество (1.3.20) по области Δ_x, снова получим (1.3.18).

Следствие 1.3.1. *Если $w = 0$ на AC и $\alpha \geq \sqrt{|\lambda_2|}$, то для любого регулярного решения уравнения* (1.3.16) *справедливо неравенство* (1.3.18).

Теорема 1.3.2. *Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи T из класса регулярных в Ω решений уравнения* (1.3.1), *удовлетворяющее условию* (1.3.10). *Тогда $u(x,y) \equiv 0$ в Ω при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - (\pi/l)^2$.*

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Введем функцию $w(x,y) = u(x,y)\exp(-\alpha x)$, где $\alpha \geq \sqrt{|\lambda_2|}$, которая в области Ω является решением однородной задачи T для уравнения (1.3.15).

В области Ω_+ рассмотрим тождество

$$wK_1(w) = \left(ww_x + \alpha w^2\right)_x - ww_y - w_x^2 - (\lambda_1 - \alpha^2)w^2 \equiv 0$$

и проинтегрируем его по отрезку A_hB_h (см. доказательство леммы 1.3.2). В полученном равенстве, переходя к пределу при $h \to 0$, затем при $\varepsilon \to 0$, с учетом (1.3.10) получим

$$\int\limits_0^l w(x,0)w_y(x,0)dx = -\int\limits_0^l [w_x^2(x,0) + (\lambda_1 + \lambda_2)w^2(x,0)]dx.$$

На основании последнего равенства и следствия 2.4.1 аналогично доказательству теоремы 2.4.1 нетрудно показать, что $w(x,y) \equiv 0$ в Ω. Но тогда $u(x,y) \equiv 0$ в Ω.

Замечание 1.3.1. Используя интегральные представления решений уравнения (1.3.1) в областях Ω_+ и Ω_- на основании теорем 1.3.1 и 1.3.2, несложно получить соответствующие теоремы существования решения задачи T_1 при некоторых ограничениях на краевую функцию $\varphi(x,y)$ (см., например, [21]).

3^0. **Случай, когда $\lambda_2 = 0$.** Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи T. Тогда, переходя к пределу в уравнении (1.3.1) при $y \to 0+0$, получим

$$\tau''(x) - \nu(x) - \lambda_1\tau(x) = 0. \tag{1.3.21}$$

Из гиперболической части

$$\nu(x) = \tau'(x). \tag{1.3.22}$$

Исключая из уравнения (1.3.21) и (1.3.22) функцию $\nu(x)$, будем иметь

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \lambda_1\tau(x) = 0, \quad \tau(0) = \tau(l) = 0. \tag{1.3.23}$$

Легко видеть, что если $\lambda_1 = -1/4 - (n\pi/l)^2$, $n \in \mathbb{N}$, то краевая задача (1.3.23) имеет собственные функции

$$\tau_n(x) = e^{x/2} \sin \sqrt{|\lambda_1 + 1/4|}x = e^{x/2} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Следовательно, при $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 \neq -\frac{1}{4} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, нетрудно показать, что задача T имеет единственное решение. Поэтому числа $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ образуют спектр задачи T и в этом случае несложно выписать все соответствующие собственные функции задачи T.

4^0. **Случай, когда $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq -(\pi/l)^2$.** В области Ω_- для уравнения (1.3.1) снова рассмотрим первую задачу Дарбу. Решение этой задачи определяется формулой (2.1.13) [110, с. 76]. Отсюда при $u(x, -x) = \psi(x) = 0$ и $g(\xi, \eta) \equiv 0$ получим

$$u(x, y) = \tau(x + y) - y\beta^2 \int_0^{x+y} \tau(t)\overline{I}_1 \left[\beta\sqrt{(x + y - t)(x - y - t)}\right] dt, \tag{1.3.24}$$

где $\beta = \sqrt{|\lambda_2|}$, $\overline{I}_1(z) = I_1(z)/z$, $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Лемма 1.3.4. *Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи T_1. Тогда $u(x, y) \geq 0$ в Ω только тогда, когда $\tau(x) \geq 0$ на $[0, l]$.*

Доказательство. В самом деле, любое регулярное в Ω_- решение задачи T_1, равное нулю на характеристике $AC(x + y = 0)$, может быть представлено в виде формулы (1.3.24). Из этой формулы легко заметить, что если $\tau(x) \geq 0$ на $[0, l]$, то $u(x, y) \geq 0$ в $\overline{\Omega}_-$. На основании свойства положительности решения параболического уравнения [139, с. 62] функция $u(x, y) \geq 0$ в области Ω_+, когда $\tau(x) \geq 0$ на $[0, l]$. Справедливость обратного утверждения очевидна.

Из формулы (1.3.24) вычислим

$$\nu(x) = \tau'(x) - \beta^2 \int_0^x \tau(t)\overline{I}_1 [\beta(x - t)] dt. \tag{1.3.25}$$

Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи T для уравнения (1.3.1). Тогда, переходя к пределу при $y \to 0 + 0$ в уравнении (1.3.1), получим (1.3.21). Исключая из уравнений (1.3.21) и (1.3.25) функцию

$\nu(x)$, получим интерально-дифференциальное уравнение относительно функции $\tau(x)$:

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \lambda_1 \tau(x) = f(x), \tag{1.3.26}$$

где

$$f(x) = -\beta^2 \int\limits_0^x \tau(t)\overline{I}_1 \left[\beta(x-t)\right] dt. \tag{1.3.27}$$

Решение уравнения (1.3.26), удовлетворяющее краевым условиям $\tau(0) = \tau(l) = 0$ при $\lambda_1 > -1/4$, имеет вид

$$\tau(x) = \int\limits_0^l \exp\left(\frac{x-\xi}{2}\right) G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{1.3.28}$$

где

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{k\,\mathrm{sh}kl} \begin{cases} \mathrm{sh}kx\,\mathrm{sh}k(l-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \mathrm{sh}k\xi\,\mathrm{sh}k(l-x), & \xi \le x \le l, \end{cases}$$

есть функция Грина первой краевой задачи для уравнения

$$y''(x) - k^2 y(x) = 0, \quad k^2 = \lambda_1 + \frac{1}{4}.$$

Подставляя (1.3.27) в (1.3.28), получим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau(x) = \int\limits_0^l K(x,t)\tau(t) dt, \tag{1.3.29}$$

$$K(x,t) = \frac{\beta^2}{k\,\mathrm{sh}\,kl} \int\limits_t^l \exp\left(\frac{x-\xi}{2}\right) G^*(x,\xi)\overline{I}_1[\beta(\xi-t)] d\xi,$$

$$G^*(x,\xi) = -k\,\mathrm{sh}klG(x,\xi).$$

Поскольку ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1.3.29) неотрицательно и непрерывно на замкнутом квадрате $0 \le x, y \le l$, то линейный оператор

$$A\tau(x) \equiv \int\limits_0^l K(x,t)\tau(t)\,dt,$$

действующий в пространстве $C[0,l]$, оставляет инвариантным конус $K_0 = \{\tau(x) \in C[0,l] : \tau(x) \geq 0,\ \tau(0) = \tau(l) = 0\}$ неотрицательных функций и является вполне непрерывным.

Покажем, что оператор A является u_0–положительным [60, гл. 7], т.е. существует $u_0(x) \in K_0$ такая, что для любой функции $\tau(x) \in K_0$ и отличной от нулевой, существуют положительные числа p и q такие, что

$$pu_0(x) \leq A\tau(x) \leq qu_0(x). \tag{1.3.30}$$

Лемма 1.3.5. *Пусть* $[a,b] \subset (0,l)$. *Тогда существует* $\varepsilon = \varepsilon(a,b) > 0$ *такое, что*

$$\varepsilon \int\limits_0^l K(x,t)dt \leq \int\limits_a^b K(x,t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $\tau(t)$ – любая неотрицательная кусочно-непрерывная функция, заданная на $[0,l]$ и отличная от нулевой. Поскольку ядро $K(x,t) = 0$ при $x = 0$, $x = l$ и $t = l$ и строго положительно и непрерывно на множестве $\{(x,t) : 0 \leq t < l, 0 < x < l\}$, то оно ограничено снизу некоторой положительной постоянной на $[a,b] \times [0,d]$, где $0 < d < l$. Поэтому функция $A\tau(x)$ положительна при $x \in (0,l)$ и равна нулю только при $x = 0$ и $x = l$.

Вычислим производную $A'\tau(x)$ и выясним ее знак в точках $x = 0$ и $x = l$:

$$\frac{dA\tau(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{\beta^2}{\mathrm{sh}kl} \int\limits_0^l \tau(t) \int\limits_t^l \mathrm{sh}k(l-\xi)\overline{I}_1\left[\beta(\xi - t)\right] e^{-\frac{\xi}{2}}\, d\xi\, dt > 0, \tag{1.3.31}$$

$$\frac{dA\tau(x)}{dx}\Big|_{x=l} = -\frac{\beta^2 e^{\frac{l}{2}}}{\mathrm{sh}kl} \int\limits_0^l \tau(t) \int\limits_t^l \mathrm{sh}k\,\xi\,\overline{I}_1\left[\beta(\xi - t)\right] e^{-\frac{\xi}{2}}\, d\xi\, dt < 0. \tag{1.3.32}$$

Введем новые функции: $\tau_0(x) \equiv 1$, $x \in [0,l]$ и

$$\tau_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,l]/[a,b], \\ 1, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Согласно вышеуказанному, функции $A\tau_0(x)$ и $A\tau_1(x)$ будут положительны на $(0,l)$ и равны нулю только при $x = 0$, $x = l$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\psi_\varepsilon(x) = A\tau_1(x) - \varepsilon A\tau_0(x)$. В силу оценок (1.3.31) и (1.3.32) существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ имеем $\psi'_\varepsilon(0) > 0$ и $\psi'_\varepsilon(l) < 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точек $x = 0$, $x = l$ функция $\psi_\varepsilon(x)$ неотрицательна. Поэтому на сегментах $[0, \delta]$ и $[l - \delta, l]$, где $\delta > 0$ – достаточно малое число, $\psi_\varepsilon(x) \geq 0$ при всех $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$. Существует $\varepsilon_2 > 0$, такое, что на сегменте $[\delta, l-\delta]$ функция $\psi_\varepsilon(x) \geq 0$ при всех $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2]$, так как на этом сегменте функции $A\tau_0(x)$ и $A\tau_1(x)$ ограничены снизу с положительными постоянными. Поэтому при любом $x \in [0, l]$ и $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, функция $\psi_\varepsilon(x) \geq 0$. Отсюда

$$\varepsilon \int_0^l K(x,t)\tau_0(t)dt \leq \int_0^l K(x,t)\tau_1(t)dt$$

или

$$\varepsilon \int_0^l K(x,t)dt \leq \int_a^b K(x,t)dt.$$

На основании этой леммы нетрудно доказать справедливость неравенства (1.3.30). В качестве $u_0(x)$ примем функцию

$$u_0(x) = \int_0^l dt \int_t^l G^*(x,\xi)\overline{I}_1\left[\beta(\xi - t)\right] \exp\left(\frac{x-\xi}{2}\right) d\xi,$$

которая, очевидно, принадлежит K_0. Тогда для любой функции $\tau(x) \in K_0$, отличной от нулевой, будем иметь

$$A\tau(x) = \int_0^l K(x,t)\tau(t)dt \leq \max_t \tau(t) \int_0^l K(x,t)dt =$$

$$= \max_t \tau(t) \frac{\beta^2}{k\,\mathrm{sh} k\, l} u_0(x) = q u_0(x).$$

Поскольку $\tau(t) \not\equiv 0$ и $\tau(t) \geq 0$, то существует $[a, b]$, на котором $\tau(t) \geq \tau_1 > 0$ при всех $t \in [a, b]$. Следовательно, в силу леммы 1.3.5

$$A\tau(x) = \int_0^l K(x,t)\tau(t)dt \geq \tau_1 \int_a^b K(x,t)dt \geq$$

$$\geq \tau_1 \varepsilon \int\limits_0^l K(x,t)dt = \frac{\tau_1 \varepsilon \beta^2}{k \operatorname{sh} kl} u_0(x) = p u_0(x).$$

Таким образом, выполнены все условия известной теоремы о существовании положительного собственного числа у положительного непрерывного оператора [60, с. 68], поэтому существует единственная нормированная собственная функция $\tau_0(x) \in K_0$, такая, что

$$A\tau_0(x) = \mu\tau_0(x), \ \ \mu_0 \geq p, \ \ pu_0 \leq \tau_0 \leq qu_0.$$

Этой собственной функции соответствует простое собственное значение, которое строго больше абсолютной величины всех остальных собственных значений оператора A. Так как однородная задача T_1 эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению (1.3.29), то из полученных результатов и леммы 2.4.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.3.3. *Однородная задача* T_1 *для уравнения* (1.3.1) *при* $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 + \lambda_2 \leq -(\pi/l)^2$ *имеет неотрицательную собственную функцию, которой соответствует положительное собственное значение* $1/\mu_0$. *Это собственное значение простое и строго меньше абсолютной величины остальных собственных значений.*

Таким образом, если даже $\lambda_1 \geq 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума, то найдется такое значение $\lambda_2 < 0$, при котором однородная задача T_1 для уравнения (1.3.1) имеет ненулевое неотрицательное решение.

При этом нетрудно заметить, что в области гиперболичности Ω_- для уравнения (1.3.1) нарушено условие (1.1.5) из § 1.1. Следовательно, условие (1.1.5) существенно для единственности решения задачи T_1 для уравнений смешанного типа.

Результаты этого параграфа примечательны тем, что, хотя краевые задачи для уравнения (1.3.1) в областях Ω_- и Ω_+ корректно поставлены при любых λ_1 и λ_2, но, тем не менее, корректность задачи T_1 в смешанной области Ω существенным образом зависит от параметров λ_1 и λ_2.

1.3.3. Исследование задачи T_2

Пусть $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, 2$, α_k, β_k – вещественные параметры и $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1.3.2). При этом понятие регулярного решения уравнения (1.3.2) вводится аналогично п. 1.3.2.

Введем в рассмотрение функцию $w(x,y)$ по формуле (1.3.14), которая является решением уравнения

$$K_2(w) \equiv \begin{cases} w_x - w_{yy} + (\alpha - \lambda_1)w = 0, & y > 0, \\ w_{xx} - w_{yy} + (\alpha + \lambda_2)w = 0, & y < 0. \end{cases} \tag{1.3.33}$$

Пусть $\operatorname{Re} w = u(x,y)$, $\operatorname{Im} w = v(x,y)$. Тогда в области Ω_- уравнение (1.3.33) в характеристических координатах (ξ, η) равносильно системе

$$K_{2,1}(u,v) \equiv u_{\xi\eta} + \frac{\alpha}{2}(u_\xi + u_\eta) + \frac{\alpha^2 + \alpha_2}{4}u - \frac{\beta_2}{4}v = 0, \tag{1.3.34}$$

$$K_{2,2}(u,v) \equiv v_{\xi\eta} + \frac{\alpha}{2}(v_\xi + v_\eta) + \frac{\alpha^2 + \alpha_2}{4}v - \frac{\beta_2}{4}u = 0. \tag{1.3.35}$$

Справедлива следующая

Лемма 1.3.6. *Если $w = u + iv = 0$ на $\overline{AC}$ и $\alpha > 0$, $\alpha^2 \geq \left(-\alpha_2 + \sqrt{4\alpha_2^2 + 3\beta_2^2}\right)/3$, то для любого регулярного решения уравнения* (1.3.33) *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re} \int_0^x \overline{w}(t,0) w_y(t,0)\, dt \geq 0$$

при любом $x \in [0, l]$.

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$4(uK_{2,1} + vK_{2,2}) = \left(2uu_\eta + 2vv_\eta + \alpha u^2 + \alpha v^2\right)_\xi +$$

$$+ \left(2uu_\xi + 2vv_\xi + \alpha u^2 + \alpha v^2\right)_\eta + \left(\alpha^2 + \alpha_2\right)\left(u^2 + v^2\right) - 4u_\xi u_\eta - 4v_\xi v_\eta. \tag{1.3.36}$$

Из уравнений (1.3.34) и (1.3.35) выразим соответственно u_ξ и v_ξ, преобразуем следующее выражение:

$$-4u_\xi u_\eta - 4v_\xi v_\eta = \frac{4}{\alpha}\left(u_\eta^2 + v_\eta^2\right)_\xi + \left(2u_\eta + \frac{\alpha^2 + \alpha_2}{2\alpha}u - \frac{\beta_2}{2\alpha}v\right)^2 +$$

$$+ \left(2v_\eta + \frac{\alpha^2 + \alpha_2}{2\alpha}v + \frac{\beta_2}{2\alpha}u\right)^2 - \frac{(\alpha^2 + \alpha_2)^2 + \beta_2^2}{4\alpha^2}(u^2 + v^2),$$

с учетом этого, интегрируя тождество (1.3.36) по области Δ_x (см. лемму 1.3.3), получим

$$2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^x \overline{w}(t,0)w_y(t,0)\,dt = u^2(x,x) = v^2(x,x)+$$

$$+\alpha\int\limits_0^x \left[u^2(\xi,x)+v^2(\xi,x)\right]\,d\xi + \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^x \left[u_\eta^2(\xi,\xi)+v_\eta^2(\xi,\xi)\right]\,d\xi+$$

$$+\iint\limits_{\Delta_x}\Bigg[\left(2u_\eta+\frac{\alpha^2+\alpha_2}{2\alpha}u-\frac{\beta_2}{2\alpha}v\right)^2+\left(2v_\eta+\frac{\alpha^2+\alpha_2}{2\alpha}v+\frac{\beta_2}{2\alpha}u\right)^2+$$

$$+\frac{3\alpha^4+2\alpha_2\alpha^2-\alpha_2-\beta_2}{4\alpha^2}(u^2+v^2)\Bigg]\,d\xi d\eta\geq 0.$$

Теорема 1.3.4. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1.3.2) *существует решение задачи* T_2*, то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2*, т.е. задача* T_2 *не имеет спектра.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи T_2 из класса регулярных решений уравнения (1.3.2).

Рассмотрим функцию $w(x,y)=u(x,y)\exp(-\alpha x)$, где $\alpha>\max\left\{\alpha_1,0,\left(-\alpha_2+\sqrt{4\alpha_2^2+3\beta_2^2}\right)^{1/2}/\sqrt{3}\right\}$, которая является решением однородной задачи T_2, для уравнения (1.3.33), и интеграл

$$\mathrm{Re}\,2\iint\limits_{\Omega_+}\overline{w}\left[w_x-w_{yy}+(\alpha-\lambda_1)w\right]\,dxdy=0.$$

Интегрируя его по частям, с учетом того, что $w=u+iv=0$ на $\overline{AA_1}\cup\overline{A_1B_1}$, получим

$$2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^l \overline{w}(x,0)w_y(x,0)\,dx+\int\limits_0^d |w(l,y)|^2\,dy+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_+}\left[|w_y|^2+(\alpha-\alpha_1)|w|^2\right]\,dxdy=0.$$

Отсюда в силу леммы 1.3.6 следует справедливость теоремы 1.3.4.

§ 1.4. О знакоопределенности решения неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка

1.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка

$$S^m u(x,y) = g(x,y),\ m \in \mathbb{N}, \tag{1.4.1}$$

где

$$S^1 v = Sv = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad g(x,y) = \begin{cases} g_1(x,y), & y > 0, \\ g_2(x,y), & y < 0, \end{cases}$$

в области G, ограниченной при $y > 0$ отрезками $AA_1,\ A_1B_1,\ B_1B$, где $A = (0,0),\ A_1 = (0,d),\ B = (0,l),\ B_1 = (l,d),\ l,d > 0$, а при $y < 0$ характеристиками AC $(x + y = 0)$ и CB $(x - y = l)$ уравнения (1.4.1).

Задача. Найти определенной в области G функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^{2m}(G_-) \cap C^{2m,m}_{x,y}(G_+ \cup A_1B_1) \cap C^{2m-1,m}_{x,y}(G) \cap C^{2m-2,m-1}_{x,y}(\overline{G}); \tag{1.4.2}$$

$$S^m u(x,y) \equiv g(x,y),\ (x,y) \in G_- \cup G_+ \cup A_1B_1; \tag{1.4.3}$$

$$S^k u(x,y) = 0 \ \text{ на } \ AA_1 \cup BB_1; \tag{1.4.4}$$

$$S^k u(x,y) = 0 \ \text{ на } \ AC, \tag{1.4.5}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Отметим, что на важность изучения такого рода задач на сопряжение отмечалось А.В. Бицадзе [7, с. 117]. Краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов высоких порядков изучались во многих работах [25, 8, 18, 21, 53, 98, 105, 106]. Среди этих работ выделим статью Жегалова В.И. [25], где впервые был изучен аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа высокого порядка

$$L^m u(x,y) = 0,$$

здесь

$$L^1 u = Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases}$$

известный оператор Лаврентьева-Бицадзе.

В данной работе ставится задача качественного характера о том, как ведет себя функция $u(x,y)$ в G, если правая часть уравнения (1.4.1) $g(x,y) > 0$ на $G_+ \cup G_-$, т.е. требуется доказать, что $u(x,y) \neq 0$ на $G_+ \cup G_-$.

Поскольку оператор $S^m u$ в области G_+ совпадает с оператором теплопроводности в степени, т.е. с поликалорическим, то, естественно, возникает вопрос о знакоопределенности решения неоднородного поликалорического уравнения в зависимости от знака правой части. В связи с чем в данной работе исследован этот вопрос и дан полный ответ на поставленную задачу, т.е. показано, что если в задаче (1.4.2) – (1.4.5) функция $g_1(x,y) \geq 0$ (≤ 0) и $g_1(x,y) \not\equiv 0$ на $G_+ \cup A_1B_1$, $g_2(x,y) > 0$ (< 0) на G_-, то $u(x,y) > 0$ (< 0) на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$, когда m – четное натуральное число; $u(x,y) < 0$ (> 0) на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$, когда m – нечетное натуральное число.

Отметим, что в работах [143, 71, 72, 152, 153] для эллиптических уравнений высокого порядка, в частности для полигармонического уравнения, установлены оценки решения задачи Дирихле через граничные функции или правую часть. Эти оценки названы принципом максимума, из которых не следуют классический принцип максимума (максимум решения не может достигаться внутри области) и, следовательно, и знакоопределенность решения.

1.4.2. О знакоопределенности решения неоднородного поликалорического уравнения

Пусть Ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$. Обозначим через Q цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, у которого нижним основанием является область Ω, образующая параллельные оси Ot, а верхнее основание γ есть часть плоскости $t = T > 0$, т.е. $Q = D \times (0,T)$. Пусть Σ – боковая поверхность цилиндра Q; ∂Q – вся граница области Q; $\Gamma = \partial Q \backslash \gamma$ – параболическая граница.

На множестве $Q \cup \gamma$ рассмотрим уравнение

$$T^m u(x,t) = (u_t - a^2 \triangle u)^m = f(x,t), \qquad (1.4.6)$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, m – любое натуральное число, $\triangle u$ – оператор Лапласа по переменной x, $f(x,t)$ – заданная на $Q \cup \gamma$ функция, $T^1 u(x,t) = Tu(x,t) \equiv u_t - a^2 \triangle u$, $T^m u = T(T^{m-1}u)$.

Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (1.4.6) из класса

$$u(x,t) \in C^{2m,m}_{x,t}(Q \cup \gamma) \cap C^{2m-2,m-1}_{x,t}(\overline{Q}), \qquad (1.4.7)$$

удовлетворяющее граничным условиям на Γ :

$$u(x,t)=0,\ Tu=0,\ldots,\ T^{m-1}u=0. \tag{1.4.8}$$

Отметим, что условия (1.4.8) равносильны следующим:

$$u=0,\ \triangle u=0,\ldots,\ \triangle^{m-1}u=0 \text{ на } \Sigma,$$

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=0,\ldots,\ \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}=0 \text{ на } t=0.$$

Вначале рассмотрим случай, когда $m=2$. Тогда будем иметь условия:

$$T^2u=T(Tu)=f(x,t), \tag{1.4.9}$$

$$u(x,t)\in C^{2,4}_{x,t}(Q\cup\gamma)\cap Q^{2,1}_{x,t}(\overline{Q}), \tag{1.4.10}$$

$$u(x,t)=0,\ \ x\in\Gamma, \tag{1.4.11}$$

$$Tu(x,t)=0,\ \ x\in\Gamma. \tag{1.4.12}$$

Теорема 1.4.1. *Если выполнены условия* (1.4.9) – (1.4.12) *и* $f(x,t)>0$ (<0) *на* $Q\cup\gamma$, *то* $u(x,t)>0$ (<0) *на* $Q\cup\gamma$.

Доказательство. Задача (1.4.9) – (1.4.12) равносильна первой граничной задаче для системы уравнений теплопроводности:

$$Tv=f(x,t),\ \ v|_\Gamma=0, \tag{1.4.13}$$

$$Tu=v(x,t),\ \ u|_\Gamma=0. \tag{1.4.14}$$

Из (1.4.13) видно, что функция $v(x,t)$ является решением неоднородного уравнения теплопроводности, для которого справедливы следующие известные утверждения.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $v(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(Q\cup\gamma)\cap C(\overline{Q})$ *и* $Tv(x,t)\equiv f(x,t)$ *на* $Q\cup\gamma$. *Тогда, если* $f(x,t)<0$ (>0) *на* $Q\cup\gamma$, *то* $v(x,t)$ *не может иметь точек локального максимума (минимума) на множестве* $Q\cup\gamma$ *и наибольшее (наименьшее) значение функции* $v(x,t)$ *по* $\overline{Q}$ *достигается только на параболической границе* Γ *области* Q.

Следствие 1.4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 1.4.1 *и* $f(x,t)>0$ (<0) *на* $Q\cup\gamma$. *Тогда, если* $v(x,t)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* Γ, *то* $v(x,t)>0$ (<0) *на* $Q\cup\gamma$.

На основании этих утверждений $\min\limits_{\overline{Q}} v(x,t)$ достигается только на параболической границе Γ. По условию функция $v(x,t)=0$ на Γ, следовательно, $v(x,t)>0$ на $Q\cup\gamma$. Функция $u(x,t)$ в силу (1.4.14) является решением уравнения $Tu=v(x,t)$, у которого правая часть

$v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда по лемме 1.4.1 наименьшее по $\overline{Q}$ значение функции $u(x,t)$ достигается только на Γ. По условию $u(x,t) = 0$ на Γ, следовательно, $u(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. ■

Естественно возникает вопрос: если $f(x,t) \geqslant 0$ и $f(x,t) \not\equiv 0$ на $Q \cup \gamma$, то останется ли справедливым утверждение теоремы 1.4.1?

Лемма 1.4.2. *Пусть выполнены условия леммы* 1.4.1. *Тогда, если $f(x,t) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ на $Q \cup \gamma$, то $v(x,t)$ наибольшее (наименьшее) значения функции $v(x,t)$ по $\overline{Q}$ не может достигаться на множестве $Q \cup \gamma$, т.е. наибольшее (наименьшее) значение достигается только на параболической границе* Γ.

Доказательство проведем, следуя [84, с. 211], [109, с. 259]. Пусть $\max\limits_{\Gamma} v(x,t) = m$. Допустим, что функция $v(x,t)$ на $Q \cup \gamma$ принимает значения, большие, чем m. Обозначим $\max\limits_{\overline{Q}} u(x,t) = M$. Ясно, что $M > m$ и существует точка $(x_0, t_0) = N_0 \in Q \cup \gamma$ такая, что $u(N_0) = M$. Введем в рассмотрение функцию

$$z(x,t) = v(x,t) + \frac{M-m}{2d^2} r^2, \tag{1.4.15}$$

где d – диаметр области Ω, r – расстояние между точками x и x_0 области Ω, которая $z(N_0) = v(N_0) = M$ и $z(x,t) < M$ на границе Γ. Следовательно, функция $z(x,t)$ в точке $(x_1, t_1) = N_1 \in Q \cup \gamma$ принимает наибольшее по $\overline{Q}$ значение. Тогда в этой точке

$$Tz(N_1) = z_t(N_1) - a^2 \triangle z(N_1) \geqslant 0. \tag{1.4.16}$$

С другой стороны, на основании (1.4.15) для всех $(x,t) \in Q \cup \gamma$

$$Tz(x,t) = Tv(x,t) - \frac{M-m}{2d^2} a^2 \triangle r^2 = f(x,t) - \frac{M-m}{2d^2} a^2 n < 0,$$

что в точке $N_1 \in Q \cup \gamma$ противоречит (1.4.16). ■

Следствие 1.4.2. *Пусть выполнены условия леммы* 1.4.2 *и $f(x,t) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на $Q \cup \gamma$. Тогда, если $v(x,t) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на Γ, то $v(x,t) > 0$ (< 0) на $Q \cup \gamma$.*

В силу леммы 1.4.2 наименьшее на $\overline{Q}$ значение функции $v(x,t)$ достигается только на Γ. По условию (1.4.13) функция $v(x,t) = 0$ на Γ. Тогда на основании следствия 1.4.3 функция $v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. В силу (1.4.14) функция $u(x,t)$ является решением уравнения $Tu(x,t) = v(x,t)$, где $v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда из следствия 1 вытекает, что $u(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены условия* (1.4.9) – (1.4.12) *и* $f(x,t) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *и* $f(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

Теперь рассмотрим общий случай, т.е. когда m – любое натуральное число.

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнены условия* (1.4.6) – (1.4.8) *и* $f(x,t) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *и* $f(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

Доказательство. При $m \geqslant 2$ задача (1.4.6) – (1.4.8) равносильна первой начально-граничной задаче для системы из m уравнений теплопроводности:

$$Tv_1(x,t) = f(x,t),\ \ v_1(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{1.4.17}$$

$$Tv_2(x,t) = v_1(x,t),\ \ v_2(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{1.4.18}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Tv_{m-1}(x,t) = v_{m-2}(x,t),\ \ v_{m-1}(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{1.4.19}$$

$$Tu(x,t) = v_{m-1}(x,t),\ \ u(x,t)|_\Gamma = 0. \tag{1.4.20}$$

Рассмотрим задачу (1.4.17) и, применяя к ней следствие 1.4.2, получим $v_1(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Затем, снова применив это утверждение к задаче (1.4.18), будем иметь $v_2(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Повторяя аналогичные рассуждения придем к задаче (1.4.19), у которой $v_{m-1}(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда из последней задачи (1.4.20) на основании следствия 1.4.2 будет вытекать положительность решения задачи (1.4.6) – (1.4.8) на множестве $Q \cup \gamma$.

Следствие 1.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.3. *Тогда наименьшее (наибольшее) значение функции* $u(x,t)$ *по* $\overline{Q}$ *достигается только на границе* Γ.

Доказательство. Допустим $\min\limits_{\overline{Q}} u(x,t) = u(x_0,t_0)$ достигается на $Q \cup \gamma$, т.е. $(x_0,t_0) \in Q \cup \gamma$. Тогда в этой точке

$$Tu(x_0,t_0) = u_t(x_0,t_0) - a^2 \triangle u(x_0,t_0) \leqslant 0,$$

что в силу (1.4.20) противоречит неравенству $Tu(x_0,t_0) = v_{m-1}(x_0,t_0) > 0$. ■

Далее на множестве $Q \cup \gamma$ рассмотрим видоизмененное уравнение

$$S^m u(x,t) = (\triangle u - b^2 u_t)^m = g(x,t), \tag{1.4.21}$$

где $b = \mathrm{const} > 0$, $g(x,t)$ – заданная на $Q \cup \gamma$ функция.

Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (1.4.21), удовлетворяющее условиям (1.4.7) и (1.4.8). Предварительно рассмотрим случай $m = 2$. Тогда функция $u(x,t)$ на $Q \cup \gamma$ удовлетворяет уравнению

$$S^2 u(x,t) = S(Su) = g(x,t) \tag{1.4.22}$$

и условиям (1.4.10) – (1.4.12).

Теорема 1.4.4. *Пусть выполнены условия* (1.4.22), (1.4.10) – (1.4.12). *Тогда, если* $g(x,t) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *и* $g(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$, *то* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

Доказательство. Задача (1.4.22), (1.4.10) – (1.4.12) равносильна первой граничной задаче для системы уравнений второго порядка

$$Sv = g(x,t), \ v|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.23}$$

$$Su = v(x,t), \ u|_{\Gamma} = 0. \tag{1.4.24}$$

В силу (1.4.23) функция $v(x,t)$ является решением неоднородного уравнения теплопроводности $Sv = g$, для которого правая часть $g(x,t) \geqslant 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда на основании следствия 1.4.3 функция $v(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$. Функция $u(x,t)$ в силу (1.4.24) является решением уравнения $Su = v(x,t)$, у которого правая часть $v(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$. Отсюда в силу следствия 1.4.1 функция $u(x,t) > 0$ на множестве $Q \cup \gamma$. ■

Отметим, что при $m = 1$ и из условия $g(x,t) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) на $Q \cup \gamma$ в силу следствия 1.4.2 получаем, что $u(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $m \geqslant 2$.

Теорема 1.4.5. *Пусть выполнены условия* (1.4.21) *и* (1.4.7), (1.4.8). *Тогда, если* $g(x,t) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *и* $g(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$, *то* $u(x,t) < 0$ (> 0) *на* $Q \cup \gamma$ *при нечетном* m *и* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$ *при четном* m.

Доказательство. При $m \geqslant 2$ задача (1.4.21), (1.4.7), (1.4.8) равносильна первой начальной граничной задаче для системы из m уравнений второго порядка:

$$Sv_1(x,t) = g(x,t), \ v_1(x,t)|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.25}$$

$$Sv_2(x,t) = v_1(x,t), \ v_2(x,t)|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.26}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Sv_{m-1}(x,t) = v_{m-2}(x,t), \ v_{m-1}(x,t)|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.27}$$

$$Su(x,t) = v_{m-1}(x,t), \ u(x,t)|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.28}$$

Рассмотрим задачи (1.4.25) и (1.4.26) и, применив к ним теорему 1.4.4, получим $v_2(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Повторяя аналогичные рассуждения при четном m, придем к последней паре задач (1.4.27) и (1.4.28), где $v_{m-2}(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Отсюда в силу теоремы 1.4.4 следует, что $u(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$.

Если m – нечетное число, то из задачи (1.4.27) следует, что $v_{m-1} > 0$ на $Q \cup \gamma$. Далее, применяя к задаче (1.4.28) следствие 1.4.1, получим, что $u(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$. ■

1.4.3. Принцип экстремума для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$Lv(x,y) = \begin{cases} v_y - v_{xx} = f_1(x,y), & y > 0, \\ v_{yy} - v_{xx} = f_2(x,y), & y < 0, \end{cases} \tag{1.4.29}$$

в области G, описанной в п. 1.4.1.

Теорема 1.4.6. *Пусть функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям:*

$$v(x,y) \in C^2(G_-) \cap C^1(G) \cap C^{2,1}_{x,y}(G_+ \cup A_1B_1 \cup AB) \cap C(\overline{G}); \tag{1.4.30}$$

$$Lv(x,y) \equiv f(x,y), \ \ (x,y) \in G_- \cup G_+ \cup A_1B_1; \tag{1.4.31}$$

$$v(x,y)|_{AC} = v(x,-x) = 0, \ \ 0 \leqslant x \leqslant l/2. \tag{1.4.32}$$

Тогда, если $f_1(x,y) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) и $f_1(x,y) \not\equiv 0$ на $G_+ \cup A_1B_1$, $f_1(x,y) \in C(G_+ \cup A_1B_1)$; $f_2(x,y) > 0$ (< 0) на G_-, $f_2(x,y) \in C^1(G_-)$, то $\max\limits_{\overline{G}} v(x,t)$ ($\min\limits_{\overline{G}} v(x,t)$) достигается на $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$.

Доказательство. Пусть функция $v(x,y)$ достигает наибольшего значения по $\overline{G}$ в некоторой точке $(x_0,y_0) \in \overline{G}$, т.е. $\max\limits_{\overline{G}} v(x,y) = v(x_0,y_0) = v(M_0)$, $M_0 \in \overline{G}$. Надо доказать, что точка $M_0 \in \overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$. На множестве $G_+ \cup A_1B_1$ функция $v(x,y)$ является решением уравнения теплопроводности

$$v_y - v_{xx}(x,y) = f_1(x,y).$$

Поскольку $f_1(x,y) \leqslant 0$ на $G_+ \cup A_1B_1$, то в силу леммы 1.4.2 точка $M_0 \notin G_+ \cup A_1B_1$, т.е. $M_0 \in \overline{AA_1} \cup \overline{BB_1} \cup AB$. Пусть $M_0 \in AB$, т.е. $0 < x_0 < l$, $y_0 = 0$. В области G_- для уравнения (1.4.31) в силу граничного условия (1.4.32) рассмотрим задачу Дарбу:

$$v_{xx} - v_{yy} = -f_2(x,y), \ \ (x,y) \in G_-, \tag{1.4.33}$$

$$v(x,0)=\tau(x),\ \ 0\leqslant x\leqslant l,\ \ v(x,-x)=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant l/2. \tag{1.4.34}$$

Если $\tau(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$, $\tau(0)=0$ и $f_2(x,y)\in C^1(G_-)$, то единственное решение задачи (1.4.33) и (1.4.34) определяется по формуле [94]

$$v(x,y)=\tau(x+y)-\int_0^{x+y}d\xi\int_{x+y}^{x-y}g(\xi,\eta)d\eta, \tag{1.4.35}$$

где $g(\xi,\eta)=\dfrac{1}{4}f_2\left(\dfrac{\xi+\eta}{2},\dfrac{\xi-\eta}{2}\right)$. Из формулы (1.4.35) видно, что

$$\max_{\overline{G}_-}v(x,t)\leqslant\max_{\overline{AB}}\tau(x+y)=\max_{0\leqslant t\leqslant l}\tau(t)=\tau(x_0).$$

На основании формулы (1.4.35) вычислим

$$v_y(x,y)=\tau'(x+y)-\int_{x+y}^{x-y}g(x+y,\eta)d\eta+\int_0^{x+y}[g(\xi,x-y)+g(\xi,x+y)]d\xi. \tag{1.4.36}$$

Переходя в равенстве (1.4.36) к пределу при $y\to 0-0$, найдем

$$v_y(x_0,0-0)=\tau'(x_0)+2\int_0^{x_0}g(\xi,x_0)d\xi>0. \tag{1.4.37}$$

С другой стороны, переходя к пределу в уравнении (1.4.29) при $y\to 0+0$, получим

$$v_y(x_0,0+0)=\tau''(x_0)+f_1(x_0,0+0)\leqslant 0. \tag{1.4.38}$$

Неравенство (1.4.38) в силу (1.4.30) противоречит (1.4.37). Следовательно, точка $M_0\notin AB$, и остается случай, когда $M_0\in\overline{AA_1}\cup\overline{BB_1}$. ■

Замечание 1.4.1. Условие $f_2(x,y)>0$ (<0) в G_- можно ослабить, заменив на $f_2(x,y)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ в G_- и дополнительно потребовав, чтобы интеграл

$$\int_0^{x_0}g(\xi,x_0)d\xi>0\ \ (<0).$$

Последнее неравенство будет иметь место, если на каждой прямой $\eta=x_0\in(0,l)$ хотя бы в одной точке $\xi=\xi_1\in(0,x_0]$ функция $g(\xi_1,x_0)>0$ (<0).

Следствие 1.4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.6 *и* $v(x,y)\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *на* $\overline{AA_1}\cup\overline{BB_1}$, *то* $v(x,y)\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *на* $G\cup A_1B_1$.

Доказательство. Допустим, что существует точка $M_1 \in G \cup A_1B_1$, такая, что $v(M_1) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{G}} v(x,y) = v(M_0) > 0$ и в силу теоремы 1.4.6 точка $M_0 \in \overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$, что противоречит условию $v(x,y) \leqslant 0$ на $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$. Следовательно, $v(x,y) \leqslant 0$ на $G \cup A_1B_1$. ■

Допустим, что существует точка $M \in G_+ \cup A_1B_1$ такая, что $v(M) = 0$. Тогда получается, что функция $v(x,y)$ свое наибольшее на $\overline{G}_+$ значение достигает на множестве $G_+ \cup A_1B_1$, что противоречит лемме 1.4.2. Следовательно, $v(x,y) < 0$ на $G_+ \cup A_1B_1$. По условию $f_2(x,y) > 0$ в G_-, а функция $v(x,0) = \tau(x) \leqslant 0$ на $[0,l]$, то из формулы (1.4.35)) решения задачи (1.4.33) и (1.4.34) следует, что $v(x,y) < 0$ в области G_-. ■

Следствие 1.4.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.6 *и* $f(x,y) \equiv 0$ *на* $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$. *Тогда наибольшее и наименьшее значения функции* $v(x,y)$ *по* $\overline{G}$ *достигаются на* $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 1.4.6. следует, что $\max\limits_{\overline{G}} v(x,y) = v(M_0)$ может достигать лишь на $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1} \cup AB$. Далее, из равенств (1.4.37) и (1.4.38) при $f(x,y) \equiv 0$ получаем, что

$$\tau''(x) - \tau'(x) = 0, \ \tau(0) = 0. \tag{1.4.39}$$

Решение задачи (1.4.39) определяется по формуле

$$\tau(x) = C(e^x - 1), \ C = \text{const}\,. \tag{1.4.40}$$

Из формулы (1.4.40) видно, что, если $C \neq 0$, то точка $M_0 \notin AB$. Если $C = 0$, тогда возможна ситуация, такая, что всюду на отрезке $\overline{AB}$ функция $v(x,y)$ принимает наибольшее значение, равное нулю. Но это значение также достигается в точках A и B, которые принадлежат соответственно отрезкам $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$. ■

Следствие 1.4.6. *Если существует решение задачи Трикоми для уравнения* (1.4.29) *в классе функций* (1.4.30), (1.4.31), *удовлетворяющее граничным условиям первого рода на отрезках* $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$ *и* $\overline{BB_1}$, *то оно единственно.*

Следствие 1.4.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4.8. *Тогда, если* $v(x,y) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *на* $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$, *то 1)* $v(x,y) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *на* $G \cup A_1B_1$; *2)* $v(x,y) < 0$ (> 0) *на* $G_+ \cup A_1B_1$.

Доказательство. Предположим, что существует точка $M_1 \in G \cup A_1B_1$, такая, что $v(M_1) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{G}} v(x,y) = v(M_0) > 0$ и в силу следствия 1.4.5 достигается на $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$, что противоречит условию $v(x,y) \leqslant 0$ на $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$. Следовательно, $v(x,y) \leqslant 0$ на $G \cup A_1B_1$.

По доказанному $v(x,y) \leqslant 0$ на $G \cup A_1B_1$. Допустим, что существует точка $M \in G_+ \cup A_1B_1$ такая, что $v(M) = 0$. Тогда функция $v(x,y)$ свое наибольшее и наименьшее значение по $\overline{G}_+$ достигает на множестве $G_+ \cup A_1B_1$, а это противоречит лемме 1.4.2.

Далее рассмотрим в области G несколько видоизмененное уравнение

$$Sv(x,y) = \begin{cases} v_{xx} - v_y = g_1(x,y), & y > 0, \\ -v_{xx} + v_{yy} = g_2(x,y), & y < 0 \end{cases} \tag{1.4.41}$$

и для него сформулируем основные утверждения, которые непосредственно следуют из теоремы 1.4.6 и следствия 1.4.4 и необходимы в дальнейшем.

Теорема 1.4.7. *Пусть функция $v(x,y)$ из класса* (1.4.30) *на множестве $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$ удовлетворяет уравнению* (1.4.41) *и граничному условию* (1.4.32). *Тогда, если $g_1(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) на $G_+ \cup A_1B_1$ и $g_2(x,y) > 0$ (< 0) на G_- и $g_2(x,y) \in C^1(G_-)$, то $\max\limits_{\overline{G}} v(x,y)$ ($\min\limits_{\overline{G}} v(x,y)$) достигается на $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$.*

Следствие 1.4.8. *Если выполнены все условия теоремы* 1.4.7 *и $v(x,y) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) на $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$, то $v(x,y) < 0$ (> 0) на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$.*

1.4.4. О знакоопределенности решения неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка

По аналогии с п. 1.4.2 предварительно исследуем случай, когда $m = 2$. В этом случае задача (1.4.2) – (1.4.5) равносильна задаче Трикоми для системы уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка

$$Sv(x,t) = g(x,t),\ \ v|_{AC \cup AA_1 \cup BB_1} = 0, \tag{1.4.42}$$

$$Su(x,t) = v(x,t),\ \ u|_{AC \cup AA_1 \cup BB_1} = 0. \tag{1.4.43}$$

Задача (1.4.42) представляет собой задачу Трикоми для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нулевыми граничными условиями. Если функция $g(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.9, то в силу теоремы 1.4.10 функция $v(x,y) < 0$ на множестве $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$. Функция $u(x,y)$, в свою очередь, в силу (1.4.43) является решением уравнения $Su = v(x,y)$, у которого правая часть $v(x,y) < 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$. Тогда на основании теоремы 10 получаем, что $v(x,y) \geqslant 0$ в $\overline{G}$ и $u(x,y) > 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$.

При произвольном $m \geqslant 2$ задача (1.4.2) – (1.4.5) эквивалентна задаче Трикоми для системы m уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка

$$Sv_1(x,t) = g(x,t),\ v_1|_{AC\cup AA_1\cup BB_1} = 0, \tag{1.4.44}$$

$$Sv_2(x,t) = v_1(x,t),\ v_2|_{AC\cup AA_1\cup BB_1} = 0, \tag{1.4.45}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Sv_{m-1}(x,t) = v_{m-2}(x,t),\ v_{m-1}|_{AC\cup AA_1\cup BB_1} = 0, \tag{1.4.46}$$

$$Su(x,t) = v_{m-1}(x,t),\ u|_{AC\cup AA_1\cup BB_1} = 0. \tag{1.4.47}$$

Рассмотрим задачи (1.4.44) и (1.4.45) и на основе приведенных выше рассуждений получим, что $v_2(x,y) > 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$. Рассуждая аналогично при четном m, придем к последней паре задач (1.4.46) и (1.4.47), $v_{m-2}(x,y) > 0$ и $v_{m-1}(x,y) < 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$. Отсюда на основании следствия 1.4.8 получим $u(x,y) > 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$.

При нечетном m из последней пары задач следует, что $v_{m-1}(x,y) > 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$. Тогда снова применяя следствие 1.4.8 к задаче (1.4.47), получим $u(x,y) < 0$ на $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$.

Таким образом, нами доказано следующее основное утверждение:

Теорема 1.4.8. *Пусть выполнены условия* (1.4.2) – (1.4.5) *и* $g_1(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *и* $g_1(x,y) \not\equiv 0$ *на* $G_+ \cup A_1B_1$, $g_1(x,y) \in C(G_+ \cup A_1B_1)$; $g_2(x,y) > 0$ (< 0) *на* $\overline{G}$, $g_2(x,y) \in C^1(G_-)$. *Тогда* $u(x,y) > 0$ (< 0) *на* $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$ *при четном* m *и* $u(x,y) < 0$ (> 0) *на* $G_- \cup G_+ \cup A_1B_1$ *при нечетном* m.

На основании этих результатов аналогично [92] можно доказать существование спектра оператора S^m на множестве функций, удовлетворяющих условиям (1.4.2), (1.4.4) и (1.4.5).

Г л а в а 2

Начально-граничные задачи с локальными граничными условиями

§ 2.1. Задача с граничным условием первого рода

2.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача 2.1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{2.1.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{2.1.3}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{2.1.4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{2.1.5}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, при этом $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Как отмечалось выше, задача Трикоми для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучалась многими авторами в областях, где гиперболическая часть представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками $x + t = l$, $x - t = 0$ и линией изменения типа $t = 0$. Более полную библиографию работ, посвященных данной теме, можно найти в монографиях [18, 21] и диссертации [51]. В 1959 г. И.М. Гельфанд [16] предложил изучить задачу о движении газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его – уравнением диффузии. В этой работе не было математической постановки задачи, и из физического смысла предлагаемой задачи следует, что такая задача должна изучаться в прямоугольной области, в связи с чем нами впервые [97] исследована задача 2.1 в прямоугольной области D. После этой работы были изучены и другие задачи в прямоугольной области, которые будут изложены ниже.

В данном параграфе установлены критерий единственности и существование решения задачи (2.1.2) – (2.1.5) на основе методов спектрального анализа.

Ранее теорема единственности решения задачи T доказывалась на основании принципа максимума или метода интегральных тождеств, а существование решения – методом интегральных уравнений или априорных оценок.

2.1.2. Единственность решения

Частные решения уравнения (2.1.1), не равные нулю области D и удовлетворяющие нулевым граничным условиям (2.1.5), будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда получим

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad \mu = \text{const}, \tag{2.1.6}$$

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{2.1.7}$$

$$T'(t) + (b^2 + \mu^2)T(t) = 0, \quad 0 < t < \beta, \tag{2.1.8}$$

$$T''(t) + (b^2 + \mu^2)T(t) = 0, \quad -\alpha < t < 0. \tag{2.1.9}$$

Как известно, спектральная задача (2.1.6) и (2.1.7) имеет решение

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin \mu_k x = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin \frac{\pi k}{l}x, \quad \mu_k = \pi k/l, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{2.1.10}$$

При этом система $\{X_k(x)\}$ ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0,l]$. Тогда дифференциальные уравнения (2.1.8) и (2.1.9) имеют общие решения

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \tag{2.1.11}$$

где a_k, b_k и c_k – произвольные постоянные,

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k^2} = \sqrt{b^2 + (\pi k/l)^2}.$$

Поскольку решения $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ должны удовлетворять условию (2.1.2), то постоянные a_k, b_k и c_k подберем так, чтобы выполнялись условия:

$$T_k(0+0) = T_k(0-0), \quad T_k'(0+0) = T_k'(0-0). \tag{2.1.12}$$

Функции (2.1.11) удовлетворяют условиям (2.1.12) только тогда, когда $a_k = c_k$ и $b_k = -c_k\lambda_k$. С учетом последних равенств функции (2.1.11) принимают вид

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k \cos\lambda_k t - c_k\lambda_k \sin\lambda_k t, & t < 0. \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (2.1.2) – (2.1.5). Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin\mu_k x dx, \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.1.14}$$

В дальнейшем предположим, что частная производная $u_x(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\longrightarrow 0+0} u_x \sin\mu_k x = \lim_{x\longrightarrow l-0} u_x \sin\mu_k x = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta. \tag{2.1.15}$$

На основании (2.1.14) введем функции

$$v_\varepsilon(t) = u_k^\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t) \sin\mu_k x dx, \tag{2.1.16}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (2.1.16) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза и учитывая уравнение (2.1.1), получим

$$v_\varepsilon'(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t \sin\mu_k x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} (u_{xx} - b^2 u) \sin\mu_k x dx =$$

$$= -b^2 \upsilon_\varepsilon(t) + \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx} \sin \mu_k x dx, \tag{2.1.17}$$

$$\upsilon_\varepsilon''(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt} \sin \mu_k x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} (u_{xx} - b^2 u) \sin \mu_k x dx =$$

$$= -b^2 \upsilon_\varepsilon(t) + \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx} \sin \mu_k x dx. \tag{2.1.18}$$

В интегралах (2.1.17) и (2.1.18), интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (2.1.15) и (2.1.5), найдем уравнения:

$$u_k'(t) + (b^2 + \mu_k^2) u_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.1.19}$$

$$u_k''(t) + (b^2 + \mu_k^2) u_k(t) = 0, \quad t < 0. \tag{2.1.20}$$

Дифференциальные уравнения (2.1.19) и (2.1.20) совпадают соответственно с уравнениями (2.1.8) и (2.1.9) при $\mu = \mu_k$. Тогда $u_k(t) \equiv T_k(t)$ при $-\alpha \le t \le \beta$, т.е. $u_k(t)$ определяются по формуле (2.1.13). Для нахождения постоянных c_k воспользуемся граничным условием (2.1.4) и формулой (2.1.14):

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x, -\alpha) \sin \mu_k x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x dx = \psi_k. \tag{2.1.21}$$

Тогда из (2.1.13) и (2.1.21) имеем

$$c_k [\cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha] = \psi_k. \tag{2.1.22}$$

Отсюда при условии

$$\delta(k) = \cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha \ne 0 \tag{2.1.23}$$

найдем

$$c_k = \frac{\psi_k}{\cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha}. \tag{2.1.24}$$

Подставляя (2.1.24) в формулу (2.1.13), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k e^{-\lambda_k^2 t}}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha}, & t > 0, \\[2ex] \dfrac{\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha}\psi_k, & t < 0. \end{cases} \tag{2.1.25}$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv 0$ и выполнены условия (2.1.23) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi_k \equiv 0$ и из формул (2.1.25) и (2.1.14) при любом $t \in [-\alpha, \beta]$ следует

$$\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, \ \ldots \ .$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2/l}\sin\mu_k x\}_{k\ge1}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2.1.2) функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Итак, справедлива следующая

Теорема 2.1.1. *Если существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (2.1.2)–(2.1.5)*, удовлетворяющее условиям* (2.1.15)*, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (2.1.23) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Действительно, если выполнены условия (2.1.23) при всех $k \in \mathbb{N}$ и существует решение задачи (2.1.2) – (2.1.5) при условии (2.1.15), то по доказанному выше оно единственно.

Пусть при некоторых l, α, b и $k = p$ нарушено условие (2.1.23), т.е. $\delta(p) = \cos\lambda_p\alpha + \lambda_p\sin\lambda_p\alpha = 0$, тогда однородная задача (2.1.2) – (2.1.5) (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет тривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t}\sin\mu_p x, & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p\sin\lambda_p t)\sin\mu_p x, & t < 0. \end{cases} \tag{2.1.26}$$

Замечание 2.1.1. Отметим, что условия (2.1.15) определяют поведение производной u_x вблизи боковых сторон прямоугольника D, т.е. производная u_x при $x \to 0+0$ и $x \to l-0$ может обращаться в бесконечность, но так, чтобы выполнялись условия (2.1.15). Обычно при доказательстве единственности решения краевых задач для уравнений смешанного типа требуется, чтобы первые производные u_x и u_y были непрерывными в смешанной области $\overline{D}$, за исключением особых угловых точек, где они могут иметь особенность интегрируемого порядка.

Естественно, возникают вопросы: 1) при каких α, l, b и $k \in \mathbb{N}$ выражение $\delta(k) = 0$; 2) если имеются нули выражения $\delta(k)$, то сколько их и как они расположены; 3) если нулей счетное множество, то существуют ли положительные α, l, b и постоянные C_0 и k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка

$$|\delta(k)| \geq C_0 > 0. \tag{2.1.27}$$

Чтобы ответить на эти вопросы, представим $\delta(k)$ в следующем виде:

$$\delta(k) = \sqrt{1 + \lambda_k^2}\,\sin(\pi k \widetilde{\alpha} \widetilde{\lambda}_k + \gamma_k), \tag{2.1.28}$$

где $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + (b\,l/\pi k)^2}$, $\gamma_k = \arcsin\left(1/\sqrt{1 + \lambda_k^2}\right)$. Из представления (2.1.28) видно, что выражение $\delta(k) = 0$ относительно $\widetilde{\alpha}$ только в том случае, когда

$$\widetilde{\alpha} = \frac{n}{k\widetilde{\lambda}_k} - \frac{\gamma_k}{k\widetilde{\lambda}_k}, \quad k,\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.29}$$

Обозначим через $M = \{m_{kn} = n/(k\widetilde{\lambda}_k) - \gamma_k/(k\widetilde{\lambda}_k) \,|\, k, n \in N\}$ множество нулей уравнения $\delta(k) = 0$ относительно $\widetilde{\alpha}$, т.е. если $\widetilde{\alpha} = m_{kn}$ при некоторых k и n, то $\delta(k) = 0$. Поскольку $\widetilde{\alpha}$ любое положительное число, то оно, не будучи элементом множества M, может принимать значения, сколь угодно близкие к нулям $\delta(k)$. Поэтому при больших k выражение $\delta(k)$ при таких $\widetilde{\alpha}$ может стать достаточно малым, т.е. возникнет проблема «малых знаменателей» [2], [70, с. 357]. Чтобы такой ситуации не было, надо показать существование чисел $\widetilde{\alpha} > 0$ и положительных постоянных C_0 и k_0, таких, что справедлива оценка (2.1.27).

Лемма 2.1.1. *Если $b = 0$ и $\widetilde{\alpha}$ является произвольным натуральным числом, то существует постоянная C_0, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$*

$$|\delta(k)| = C_0 = 1 > 0. \tag{2.1.30}$$

Доказательство. При $b = 0$ выражение $\widetilde{\lambda}_k \equiv 1$ и из равенства (2.1.28) при $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$ вытекает справедливость оценки (2.1.30) при всех $k \in \mathbb{N}$. ■

Лемма 2.1.2. *Если $b \geq 0$ и $\widetilde{\alpha} = p/q$ является произвольным рациональным числом, где $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, ($k_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \geq \widetilde{C}_0 > 0. \tag{2.1.31}$$

Доказательство. В случае $b > 0$ выражение $\widetilde{\lambda}_k$, которое зависит от $b\,l$, при условии

$$\frac{b\,l}{\pi} < 1 \quad \text{или} \quad k > \frac{b\,l}{\pi} = k_1 \tag{2.1.32}$$

можно представить в виде:

$$\widetilde{\lambda}_k = \left[1 + \left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \theta_k, \tag{2.1.33}$$

при этом для θ_k справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2 < \theta_k < \frac{1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2. \tag{2.1.34}$$

В силу известных неравенств

$$|x| \le |\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}|x|, \quad 0 \le |x| \le 1, \tag{2.1.35}$$

для выражения γ_k справедлива оценка

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \le \gamma_k \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} < \frac{l}{2k}. \tag{2.1.36}$$

Тогда соотношение (2.1.28) с учетом (2.1.33) принимает вид

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\,\sin\left(\pi k\,\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right), \quad \widetilde{\theta}_k = \pi k \theta_k. \tag{2.1.37}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p/q$, $(p,q) = 1$. Разделив kp на q с остатком $kp = sq + r$, s, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \le r < q$, представлению (2.1.37) придадим вид

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}(-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right). \tag{2.1.38}$$

Если $r = 0$, то из (2.1.38) имеем

$$|\delta(k)| = \sqrt{1+\lambda_k^2}\left|\sin\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)\right|. \tag{2.1.39}$$

Поскольку последовательности $\widetilde{\theta}_k$ и γ_k в силу оценок (2.1.34) и (2.1.36) являются бесконечно малыми при $k \to \infty$, то существует число $k_2 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{2.1.40}$$

на основании (2.1.39), (2.1.34) и (2.1.36) получим

$$|\delta(k)| > \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\lambda_k^2}\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) \geq \frac{2\widetilde{\alpha}}{\pi}\frac{3}{8}\sqrt{1+\lambda_k^2}\,\frac{(b\,l)^2}{\pi k} + \frac{2}{\pi} \geq C_1 > 0 \tag{2.1.41}$$

при $k \geq \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть теперь $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leq r \leq q-1$, $q \geq 2$. Поскольку выражение $\widetilde{\delta}(k) = \sin(\pi r/q + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k)$ имеет конечный предел при $k \to \infty$, то существует $k_3 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_3$ из представления (2.1.38) будем иметь

$$|\delta(k)| \geq \sqrt{1+\lambda_k^2}\,\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| \geq \frac{\pi k}{2l}\left|\sin\frac{\pi}{q}\right| = kC_2 \geq C_2 > 0. \tag{2.1.42}$$

Тогда из неравенств (2.1.41) и (2.1.42) следует справедливость оценки (4.4.45) при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$.

Если $b = 0$, то $\widetilde{\lambda}_k \equiv 1$ и $\theta_k \equiv 0$ и, рассуждая аналогично, получим оценку (2.1.30). ■

Пусть число $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным числом. В этом случае соотношение (2.1.28) представим в виде

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}(-1)^n \sin\left[\pi k\left(\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right) + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right], \tag{2.1.43}$$

где n – произвольное натуральное число.

Отметим, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left|\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}. \tag{2.1.44}$$

Действительно, достаточно принять за

$$n = \begin{cases} [\widetilde{\alpha}k], & \{\widetilde{\alpha}k\} < 1/2, \\ [\widetilde{\alpha}k] + 1, & \{\widetilde{\alpha}k\} > 1/2, \end{cases}$$

где $[\widetilde{\alpha}k]$ и $\{\widetilde{\alpha}k\}$ – целая и дробная части иррационального числа $\widetilde{\alpha}k$.

Число n возьмем таким, что в силу неравенства (2.1.44) выполнялось неравенство

$$\left|\pi k\left(\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right)\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{2.1.45}$$

Если $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени два, т.е. является квадратическим иррациональным числом, то в силу теоремы Лиувилля [140, с. 60] существует положительное число δ, зависящее от $\widetilde{\alpha}$, такое, что при любых целых n и k, $k>0$, выполняется неравенство

$$\left|\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right| \geq \frac{\delta}{k^2}. \qquad (2.1.46)$$

В силу оценок (2.1.34) и (2.1.36) имеем

$$0<\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k<\frac{\widetilde{\alpha}}{2}\frac{(b\,l)^2}{\pi k}+\frac{l}{2k}=\frac{C_3}{k}, \qquad (2.1.47)$$

где от постоянной C_3 потребуем, чтобы

$$C_3=\frac{\widetilde{\alpha}}{2\pi}(b\,l)^2+\frac{l}{2}<\frac{\pi}{2}. \qquad (2.1.48)$$

Тогда на основании неравенств (2.1.45) и (2.1.47) возможны два случая:

$$1)\quad \frac{\pi}{2}\leq \pi k\left(\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k<\frac{\pi}{2}+C_3<\pi,$$

$$2)\quad -\frac{\pi}{2}\leq \pi k\left(\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k<\frac{\pi}{2}.$$

В первом случае

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k\right]\right| \geq \sin\left(\frac{\pi}{2}+C_3\right)=\cos C_3\geq \frac{C_4}{k}. \qquad (2.1.49)$$

Во втором случае с учетом неравенств (2.1.36) и (2.1.46) имеем

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k\right]\right| > \frac{2}{\pi}\left|\pi k\left(\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k\right| \geq$$

$$\geq 2k\left|\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right|-\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k+\gamma_k\right)\frac{2}{\pi}\geq \frac{2\delta}{k}-\frac{2C_3}{k\pi}=\frac{2}{k}\left(\delta-\frac{C_3}{\pi}\right). \qquad (2.1.50)$$

Теперь потребуем, чтобы постоянные α, l, b и δ удовлетворяли неравенству

$$\delta-\frac{\widetilde{\alpha}}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi}\right)^2-\frac{l}{2\pi}>0, \qquad (2.1.51)$$

которое, например, при малых l всегда имеет место. Тем не менее уточним число δ из оценки (2.1.51). По условию $\widetilde{\alpha}$ является алгебраическим числом степени два. Тогда оно является корнем многочлена

второй степени $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ с целыми коэффициентами, при этом $a_2 > 0$. Тогда
$$f(x) = (x - \widetilde{\alpha})f_1(x), \tag{2.1.52}$$
где $f_1(x) = a_2x + a_2\widetilde{\alpha} + a_1$, при этом пусть $f_1(\widetilde{\alpha}) > 0$, т.е. $a_1 + 2a_2\widetilde{\alpha} > 0$. Тогда существует окрестность $(\widetilde{\alpha}-\varepsilon,\ \widetilde{\alpha}+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, такая, что $f_1(x) > 0$. Пусть n и k – любая пара натуральных чисел; если $|\widetilde{\alpha} - n/k| < \varepsilon$, то $f_1(n/k) > 0$. Тогда из равенства (2.1.52) при $x = n/k$ имеем
$$\frac{n}{k} - \widetilde{\alpha} = \frac{f(n/k)}{f_1(n/k)} = \frac{k^2a_0 + a_1kn + a_2n^2}{n^2f_1(n/k)}. \tag{2.1.53}$$

Числитель дроби (2.1.53) есть целое число, отличное от нуля. Следовательно, этот числитель по абсолютной величине не меньше единицы. Обозначим через M верхнюю грань функции $f_1(x)$ на интервале $(\widetilde{\alpha} - \varepsilon,\ \widetilde{\alpha} + \varepsilon)$. Тогда из равенства (2.1.53) получим
$$\left|\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right| \geq \frac{1}{k^2M}. \tag{2.1.54}$$

В случае же $|\widetilde{\alpha} - n/k| \geq \varepsilon$ тем более, так как $k \geq 1$, имеем
$$\left|\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right| \geq \frac{\varepsilon}{k^2}. \tag{2.1.55}$$

Тогда из оценок (2.1.54) и (2.1.55) находим оценку (2.1.46):
$$\left|\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right| \geq \frac{\delta}{k^2},\ \ \delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{M}\right\}.$$

Теперь вычислим δ через коэффициенты многочлена $f(x)$. Выберем ε так, чтобы $f_1(\widetilde{\alpha} - \varepsilon) = 2a_2\widetilde{\alpha} - a_2\varepsilon + a_1 \geq 0$. Отсюда найдем условие: $\varepsilon \leq 2\widetilde{\alpha} + a_1/a_2 = (2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)/a_2$. Положим $\varepsilon = (2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)/(a_2\widetilde{l})$, $\widetilde{l} \geq 1$. Далее найдем
$$M = f_1(\widetilde{\alpha} + \varepsilon) = 2a_2\widetilde{\alpha} + a_2\varepsilon + a_1 =$$
$$= 2a_2\widetilde{\alpha} + \frac{2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1}{\widetilde{l}} + a_1 = \frac{\widetilde{l} + 1}{\widetilde{l}}(2a_2\widetilde{\alpha} + a_1)$$
и δ из условия $\varepsilon = 1/M$. Отсюда получим уравнение относительно $\widetilde{l}$:
$$a_2\widetilde{l}^2 - (2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)^2\widetilde{l} - (2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\widetilde{l} = \frac{(2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 + (2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)\sqrt{(2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 + 4a_2}}{2a_2}. \tag{2.1.56}$$

Тогда число δ находится по формуле

$$\delta = \frac{2}{2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1 + \sqrt{(2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 + 4a_2}} \tag{2.1.57}$$

при условии, когда правая часть равенства (2.1.56) не меньше единицы. Это условие выполнено, когда

$$2\widetilde{\alpha}a_2 + a_1 \geq \sqrt{a_2/2}. \tag{2.1.58}$$

Если, например, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, т.е. $\widetilde{\alpha}$ является решением уравнения $x^2 - d = 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, $\widetilde{\alpha} = \sqrt{d}$, то $\widetilde{l} > 2$ и δ определяется по формуле

$$\delta = \frac{1}{\widetilde{\alpha} + \sqrt{\widetilde{\alpha}^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{d} + \sqrt{d+1}}.$$

Тогда, например, при $b = 0$, $l \leq 1$ и $\widetilde{\alpha} = \sqrt{d}$, где $d = 2, 3, 5, 6, 7$ и 8, выполняются условия (2.1.48), (2.1.51) и (2.1.58).

Таким образом, на основании (2.1.49) и (2.1.50) приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ – иррациональное алгебраическое число степени два, $b\,l < \pi$ и выполнены условия* (2.1.48) *и* (2.1.51), *где δ определяется по формуле* (2.1.57) *при условии* (2.1.58). *Тогда существует положительная постоянная C_0, зависящая от α, l и b, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$|\delta(k)| > C_0. \tag{2.1.59}$$

2.1.3. Существование решения задачи

Если выполнены условия (2.1.23) и (2.1.27), то на основании частных решений (2.1.10) и (2.1.25) решение задачи (2.1.2) – (2.1.5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \mu_k x. \tag{2.1.60}$$

Далее покажем, что при определенных условиях относительно функции $\psi(x)$ сумма $u(x,t)$ ряда (2.1.60) удовлетворяет условиям (2.1.2).

Из выражения (2.1.25) следует справедливость следующих утверждений.

Лемма 2.1.4. *Если выполнены условия леммы* 2.1.1 *или леммы* 2.1.3, *то при всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \le C_1 k|\psi_k|, \quad |u_k'(t)| \le C_2 k^2 |\psi_k|, \quad t \in [-\alpha, \beta], \tag{2.1.61}$$

$$|u_k''(t)| \le C_3 k^3 |\psi_k|, \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{2.1.62}$$

C_i *− здесь и далее положительные постоянные.*

Справедливость оценок (2.1.61) и (2.1.62) непосредственно вытекает из формулы (2.1.25) на основании оценки (2.1.30).

Лемма 2.1.5. *Если выполнены условия леммы* 2.1.2, *то при всех* $k > k_0$ *справедливы оценки* (2.1.61) *и* (2.1.62).

Эти оценки устанавливаются на основании неравенства (2.1.59).

Пусть выполнены условия леммы 2.1.1 или леммы 2.1.3. Тогда ряд (2.1.60) и ряды из производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, ряды из производных второго порядка соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ на основании оценок (2.1.61) и (2.1.62) мажорируются числовым рядом

$$C_6 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 |\psi_k|. \tag{2.1.63}$$

Лемма 2.1.6. *Пусть* $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0,\ i = 0, 2$. *Тогда справедливо следующее представление:*

$$\psi_k = \frac{1}{\mu_k^4} \psi_k^{(4)}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.1.64}$$

где

$$\psi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \le \|\psi^{(4)}\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{2.1.65}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям четыре раза интеграл из формулы (2.1.21). Тогда, учитывая, что $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0,\ i = 0, 2$, получим (2.1.64). По условию функция $\psi^{(4)}(x)$ непрерывна на $[0,l]$, тогда из теории рядов Фурье известно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\psi_k^{(4)}\right|^2$ сходится и справедливо неравенство Бесселя (2.1.65). ■

При выполнении условий леммы 2.1.6 ряд (2.1.63) оценивается сходящимся числовым рядом

$$C_7\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}|\psi_k^{(4)}|. \tag{2.1.66}$$

Тогда на основании сходимости ряда (2.1.66) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряд (2.1.60) и ряды из производных первого порядка членов этого ряда в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по x и t дважды при $t \le 0$ и любое число раз при $t > 0$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1.1 *или леммы* 2.1.3 *и функция* $\psi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.1.6, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (2.1.2) – (2.1.5) *и оно определяется рядом* (2.1.60) *и* $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(\overline{D}_-)\cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 2.1.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $\delta(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи (2.1.2) – (2.1.5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\mu_k x\,dx=0,\quad k=k_1,k_2,\ldots,k_m. \tag{2.1.67}$$

В этом случае решение задачи (2.1.2) – (2.1.5) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)u_k(t)\sin\mu_k x+$$

$$+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{2.1.68}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2 \ldots, k_m$, A_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (2.1.26), если в конечных суммах в правой части (2.1.68) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 2.1.6. *Тогда, если $\delta(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи* (2.1.2) – (2.1.5) *и это решение определяется рядом* (2.1.60)*; если $\delta(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leq k_0$, то задача* (2.1.2) – (2.1.5) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (2.1.67) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (2.1.68)*, при этом $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.*

2.1.4. Устойчивость решения

Рассмотрим следующие нормы:

$$||u(x,t)||_{L_2[0,l]} = ||u(x,t)||_{L_2} = \left(\int\limits_0^l |u(x,t)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

$$||f(x)||_{L_2[0,l]} = \left(\int\limits_0^l |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad ||u(x,t)||_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,t)|.$$

Теорема 2.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.2, *тогда для решения* (2.1.60) *задачи* (2.1.2) – (2.1.5) *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leq C_8 \|\psi'(x)\|_{L_2[0,l]}, \tag{2.1.69}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leq C_9 \|\psi''(x)\|_{C[0,l]}, \tag{2.1.70}$$

где постоянные C_8 и C_9 не зависят от функции $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку тригонометрическая система $\{\sqrt{2/l} \sin \mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы (2.1.60) и леммы 2.1.4 на основании оценки (2.1.61) имеем

$$||u(x,t)||^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leq C_1^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 |\psi_k|^2. \tag{2.1.71}$$

Тогда в силу представления

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

из неравенства (2.1.71) получим

$$||u(x,t)||^2_{L_2[0,l]} \le \left(\frac{C_1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} [\psi_k^{(1)}]^2 \le \left(\frac{C_1}{\pi}\right)^2 ||\psi'(x)||^2_{L_2[0,l]}.$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (2.1.69).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулу (2.1.60) на основании леммы 2.1.4, представления

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \quad \psi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi''(x) \sin \mu_k x \, dx$$

и неравенства Коши–Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| \le C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} k|\psi_k| \le$$

$$\le C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |\psi_k^{(2)}| \le$$

$$\le C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(2)}|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le C_1 \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{l}{3}} ||\psi''(x)||_{L_2[0,l]},$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Отсюда непосредственно следует оценка (2.1.70). ■

В следующем параграфе в связи с предстоящим изучением в главе 4 обратных задач возникает необходимость изучения задачи 2.1 для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с неоднородными граничными и начальным условиями.

§ 2.2. Первая начально-граничная задача для неоднородного уравнения

2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{2.2.1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,t), & t > 0, \\ F_2(x,t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) |\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\},$$

где $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, $F_i(x,t)$, $i = 1, 2$, – известные функции, и поставим следующую задачу.

Задача 2.1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2.2.2}$$

$$Lu(x,t) = F(x,t),\ \ (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{2.2.3}$$

$$u(0,t) = h_1(t),\ \ u(l,t) = h_2(t),\ \ -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{2.2.4}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x),\ \ 0 \leq x \leq l, \tag{2.2.5}$$

где $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$, $\varphi(x)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом

$$h_1(-\alpha) = \varphi(0),\ \ h_2(-\alpha) = \varphi(l),$$

$$D_- = D \cap \{t < 0\},\ \ D_+ = D \cap \{t > 0\}.$$

Не теряя общности в постановке задачи (2.2.2) – (2.2.5) можно положить, что

$$h_1(t) = h_2(t) \equiv 0,\ \ -\alpha \leq t \leq \beta, \quad \varphi(x) \equiv 0,\ \ 0 \leq x \leq l.$$

Действительно, вместо функции $u(x,t)$ введем новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - z(x,t) - w(x,t), \tag{2.2.6}$$

где

$$z(x,t) = h_1(t) + [h_2(t) - h_1(t)]\,\frac{x}{l}, \tag{2.2.7}$$

$$w(x,t) = -\frac{t\varphi(x)}{\alpha} + \frac{t}{\alpha l}\left[\varphi(0)(l-x) + x\varphi(l)\right]. \tag{2.2.8}$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$v(0,t) = u(0,t) - z(0,t) - w(0,t) =$$

$$= h_1(t) - h_1(t) + \frac{t\varphi(0)}{\alpha} - \frac{t\varphi(0)}{\alpha} = 0, \tag{2.2.9}$$

$$v(l,t) = u(l,t) - z(l,t) - w(l,t) =$$

$$= h_2(t) - h_2(t) + \frac{t\varphi(l)}{\alpha} - \frac{t\varphi(l)}{\alpha} = 0, \tag{2.2.10}$$

$$v(x,-\alpha) = u(x,-\alpha) - z(x,-\alpha) - w(x,-\alpha) =$$

$$= \varphi(x) - h_1(-\alpha) - [h_2(-\alpha) - h_1(-\alpha)]\,\frac{x}{l} -$$

$$-\varphi(x) + \varphi(0)\frac{l-x}{l} + \varphi(l)\frac{x}{l} = 0, \tag{2.2.11}$$

так как $h_1(-\alpha) = \varphi(0)$, $h_2(-\alpha) = \varphi(l)$.

Подставляя (2.2.6) – (2.2.8) в уравнение (2.2.1), имеем

$$Lv(x,t) = G(x,t), \tag{2.2.12}$$

где

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) = F_1(x,t) - Lz - Lw, & t > 0, \\ G_2(x,t) = F_2(x,t) - Lz - Lw, & t < 0, \end{cases}$$

$$G_1(x,t) = F_1(x,t) - \frac{l-x}{l}\left[h_1'(t) + b^2 h_1(t)\right] - \frac{x}{l}\left[h_2'(t) + b^2 h_2(t)\right] -$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[\varphi''(x) - (1+b^2 t)\varphi(x)\right] - \frac{(1+b^2 t)}{\alpha\, l}\left[\varphi(0)(l-x) + x\varphi(l)\right], \tag{2.2.13}$$

$$G_2(x,t) = F_2(x,t) - \frac{l-x}{l}\left[h_1''(t) + b^2 h_1(t)\right] - \frac{x}{l}\left[h_2''(t) + b^2 h_2(t)\right] -$$

$$-\frac{t}{\alpha}\left[\varphi''(x)-b^2\varphi(x)\right]-\frac{b^2t}{\alpha\, l}\left[\varphi(0)(l-x)+x\varphi(l)\right]. \qquad (2.2.14)$$

Поэтому в дальнейшем вместо задачи (2.2.2) – (2.2.5) будем изучать задачу (2.2.9) – (2.2.12) в классе функций (2.2.2):

$$v(x,t)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^1_x(\overline{D})\cap C^2_x(D_+)\cap C^2(D_-). \qquad (2.2.15)$$

2.2.2. Формальное построение решения задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15)

Решение задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15) будем искать в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи

$$v(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\mu_k x,\ \ \mu_k=\frac{\pi k}{l}, \qquad (2.2.16)$$

здесь $T_k(t)$ – пока неизвестные функции и они формально определяются по формуле

$$T_k(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l v(x,t)\sin\mu_k x\,dx. \qquad (2.2.17)$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$T_{k,\varepsilon}(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v(x,t)\sin\mu_k x\,dx, \qquad (2.2.18)$$

здесь ε – достаточно малое положительное число. Дифференцируя равенство (2.2.18) по t при $t>0$ один раз, а при $t<0$ – два раза и учитывая уравнение (2.2.12), получим

$$T'_{k,\varepsilon}(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_t\sin\mu_k x\,dx=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\left[v_{xx}-b^2v+G_1(x,t)\right]\sin\mu_k x\,dx=$$

$$=-b^2T_{k,\varepsilon}(t)+\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}G_1(x,t)\sin\mu_k x\,dx+\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}v_{xx}\sin\mu_k x\,dx \qquad (2.2.19)$$

$$T''_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{tt} \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left[v_{xx} - b^2 v + G_2(x,t) \right] \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= -b^2 T_{k,\varepsilon}(t) + \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_2(x,t) \sin \mu_k x \, dx + \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx. \tag{2.2.20}$$

В интегралах, содержащих производные v_{xx}, равенств (2.2.19) и (2.2.20), интегрируя по частям два раза и переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (2.2.9) и (2.2.10), получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов $T_k(t)$ ряда (2.2.16):

$$T'_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = g_{1k}(t), \quad t > 0, \tag{2.2.21}$$

$$T''_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = g_{2k}(t), \quad t < 0, \tag{2.2.22}$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$,

$$g_{ik}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l G_i(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad i = 1, 2. \tag{2.2.23}$$

Построим общие решения уравнений (2.2.21) и (2.2.22):

$$T_k(t) = c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \int\limits_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)} \, ds, \quad t > 0, \tag{2.2.24}$$

$$T_k(t) = a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t - \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_t^0 g_{2k}(s) \sin\left[\lambda_k (t-s)\right] \, ds, \quad t < 0, \tag{2.2.25}$$

здесь a_k, b_k и c_k – произвольные постоянные.

Для функций (2.2.24) и (2.2.25) в силу (2.2.15) выполнены условия склеивания

$$T_k(0+0) = T_k(0-0), \;\; T'_k(0+0) = T'_k(0-0), \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{2.2.26}$$

Функции (2.2.24) и (2.2.25), удовлетворив условиям (2.2.26), найдем

$$a_k = c_k, \;\; b_k = -\lambda_k c_k + \frac{1}{\lambda_k} g_{1k}(0+0).$$

Тогда в силу последних равенств функции (2.2.24) и (2.2.25) принимают вид

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \int\limits_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)}\, ds, & t > 0, \\ c_k \left(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t\right) + \dfrac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin\lambda_k t - \\ \qquad - \dfrac{1}{\lambda_k} \int\limits_t^0 g_{2k}(s) \sin\left[\lambda_k (t-s)\right]\, ds, & t < 0. \end{cases} \tag{2.2.27}$$

Для нахождения коэффициентов c_k функцию (2.2.17) удовлетворим граничному условию (2.2.11). Отсюда получим, что

$$T_k(-\alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.2.28}$$

Подставляя (2.2.27) в (2.2.28) будем иметь

$$c_k \left(\cos\lambda_k \alpha + \lambda_k \sin\lambda_k \alpha\right) = \frac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin\lambda_k \alpha -$$

$$-\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{-\alpha}^{0} g_{2k}(s) \sin\left[\lambda_k (s+\alpha)\right]\, ds = w_k. \tag{2.2.29}$$

Из равенства (2.2.29) при условии, что при при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta(k) = \cos\lambda_k \alpha + \lambda_k \sin\lambda_k \alpha \neq 0, \tag{2.2.30}$$

находим

$$c_k = \frac{w_k}{\delta(k)}. \tag{2.2.31}$$

Таким образом, нами формально решение задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15) построено в виде суммы ряда (2.2.16), так как коэффициенты его при условии (2.2.30) однозначно построены и они определяются по формулам (2.2.27) и (2.2.31).

2.2.3. Единственность решения задачи (2.2.2) – (2.2.5)

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (2.2.2) – (2.2.5) и $F_1(x,t) = F_2(x,t) \equiv 0$, $h_1(y) = h_2(y) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$, и выполнены условия (2.2.30) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $G_1(x,t) = G_2(x,t) \equiv 0$, следовательно, $c_k \equiv 0$ и $T_k \equiv 0$. Отсюда в силу формулы (2.2.17) при всех $t \in [-\alpha, \beta]$ и $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\int_0^l v(x,t) \sin \mu_k x \, dx = 0. \tag{2.2.32}$$

Из равенств (2.2.32) в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x\}_{k \geq 1}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что $v(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку функция $v(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $v(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Тогда из равенства (2.2.6) следует, что $u(x,y) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, l, b и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (2.2.30), т.е. $\delta(p) = 0$. Тогда однородная задача (2.2.2) – (2.2.5) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $h_1(y) = h_2(y) \equiv 0$, $F_i(x,t) \equiv 0$, $i = 1, 2$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} c_p e^{-\lambda_p^2 t} \sin \mu_p x, & t > 0, \\ c_p \left(\cos \lambda_p t - \lambda_p \sin \lambda_p t\right) \sin \mu_p x, & t < 0, \end{cases} \tag{2.2.33}$$

где $c_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи (2.2.2) – (2.2.5).

Теорема 2.2.1. *Если существует решение задачи* (2.2.2) – (2.2.5)*, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (2.2.30) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

2.2.4. Обоснование существования решения задачи

Формально решение задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15) построено в виде суммы ряда (2.2.16), коэффициенты которого находятся по формулам (2.2.27) и (2.2.31). Поскольку $\delta(k)$ входит в знаменатель коэффициентов ряда (2.2.16) и как показано в § 2.1, что уравнение $\delta(k) = 0$ имеет относительно $\widetilde{\alpha}$ счетное множество нулей (2.1.29), то возникает проблема малых знаменателей. Так как в формуле (2.2.30) знаменатель $\delta(k)$ совпадает с соответствующим $\delta(k)$ формулы (2.1.25) из § 2.1, то для него будут справедливы утверждения, аналогичные соответствующим леммам 2.1.1 – 2.1.3 из § 2.1.

Далее на основании лемм 2.1.1 – 2.1.3 установим справедливость следующих утверждений.

Лемма 2.2.1. *Если выполнены условия леммы* 2.1.1 *или леммы* 2.1.3, *то при всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки:*

$$|T_k(t)| \leq \begin{cases} \dfrac{C_1}{\lambda_k}\Big[\|g_{1k}(t)\|_C + \|g_{2k}(t)\|_C\Big], & t \geq 0, \\ C_2\Big[\|g_{1k}(t)\|_C + \|g_{2k}(t)\|_C\Big], & t \leq 0, \end{cases} \tag{2.2.34}$$

$$|T'_k(t)| \leq \begin{cases} (C_1\lambda_k + 1)\,\|g_{1k}(t)\|_C + C_1\lambda_k\|g_{2k}(t)\|_C, & t > 0, \\ \lambda_k C_2\Big[\|g_{1k}(t)\|_C + \|g_{2k}(t)\|_C\Big], & t < 0, \end{cases} \tag{2.2.35}$$

$$|T'_k(t)| \leq \lambda_k^2 C_2\|g_{1k}(t)\|_C + \big(\lambda_k^2 C_2 + 1\big)\,\|g_{2k}(t)\|_C, \quad t \leq 0, \tag{2.2.36}$$

где C_1 *и* C_2 *– положительные постоянные, которые зависят от* α, l *и* b,

$$\|g_{1k}(t)\|_C = \max_{0\leq t\leq\beta}|g_{1k}(t)|, \quad \|g_{2k}(t)\|_C = \max_{-\alpha\leq t\leq 0}|g_{2k}(t)|.$$

Доказательство. Справедливость оценки (2.2.34) непосредственно следует из формул (2.2.27), (2.2.30) и оценок (2.1.30), (2.1.59). Далее из формулы (2.2.27) вычислим

$$T'_k(t) = \begin{cases} -\lambda_k^2 T_k(t) + g_{1k}(t), & t > 0, \\ -\lambda_k c_k\,(\sin\lambda_k t + \lambda_k\cos\lambda_k t) + g_{1k}(0+0)\cos\lambda_k t - \\ \qquad -\displaystyle\int_t^0 g_{2k}(s)\cos\left[\lambda_k(t-s)\right]\,ds, & t < 0, \end{cases} \tag{2.2.37}$$

$$T''_k(t) = -\lambda_k^2 T_k(t) + g_{2k}(t), \quad t < 0. \tag{2.2.38}$$

Тогда из формулы (2.2.37) на основании оценок (2.2.34), (2.1.30), (2.1.59), получим (2.2.35). Аналогично из (2.2.38), используя (2.2.34) убеждаемся в справедливости (2.2.36). ■

Лемма 2.2.2. *Если выполнены условия леммы* 2.1.2, *то при всех* $k > k_0$ *справедливы оценки* (2.2.34) *–* (2.2.36).

Эти оценки устанавливаются на основе неравенства (2.1.31), которое имеет место при всех $k > k_0$.

Пусть выполнены условия леммы 2.1.1 или леммы 2.1.3. Формально из (2.2.16) почленным дифференцированием составим ряды:

$$v_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t)\sin\mu_k x = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\lambda_k^2 T_k(t) - g_{1k}(t)\big)\sin\mu_k x =$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 T_k(t)\sin\mu_k x + G_1(x,t),\quad t>0, \tag{2.2.39}$$

$$v_{xx}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k^2 T_k(t)\sin\mu_k x, \tag{2.2.40}$$

$$v_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}T_k'(t)\sin\mu_k x,\quad t<0, \tag{2.2.41}$$

$$v_{tt}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}T_k''(t)\sin\mu_k x = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\lambda_k^2 T_k(t) - g_{2k}(t)\right)\sin\mu_k x =$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 T_k(t)\sin\mu_k x + G_2(x,t),\quad t>0. \tag{2.2.42}$$

Ряды (2.2.16) и (2.2.39) – (2.2.42) в силу леммы 2.2.1 мажорируются рядом

$$C_3\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left[\|g_{1k}(t)\|_C + \|g_{2k}(t)\|_C\right]. \tag{2.2.43}$$

Лемма 2.2.3. *Пусть* $G_1(x,t)\in C(\overline{D}_+)\cap C^{3,0}_{x,t}(\overline{D}_+)$, $G_1(0,t) = G_1(l,t) = 0$, $G''_{1xx}(0,t) = G''_{1xx}(l,t) = 0$, $0\le t\le\beta$; $G_2(x,t)\in C(\overline{D}_-)\cap C^{3,0}_{x,t}(\overline{D}_-)$, $G_2(0,t) = G_2(l,t) = 0$, $G''_{2xx}(0,t) = G''_{2xx}(l,t) = 0$, $-\alpha\le t\le 0$. *Тогда справедливы представления*

$$g_{ik} = -\frac{1}{\mu_k^3}\int_0^l G'''_{ixxx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx = -\frac{g_{ik}^{(3)}(t)}{\mu_k^3},\quad i=1,2, \tag{2.2.44}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|g_{ik}^{(3)}(t)|^2 \le \|g_i^{(3)}(x,t)\|^2_{L_2[0,l]},\quad -\alpha\le t\le\beta. \tag{2.2.45}$$

Доказательство. Интегрируя по частям три раза в интеграле формулы (2.2.23), с учетом условий леммы, получим представления (2.2.44). Справедливость оценки (2.2.45) при любом фиксированном $t\in[-\alpha,\beta]$ следует из неравенства Бесселя по тригонометрической системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\right\}$. ■

Тогда в силу леммы 2.2.3 ряд (2.2.43) оценивается рядом

$$C_4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left[\|g_{1k}^{(3)}(t)\|_C + \|g_{2k}^{(3)}(t)\|_C\right]. \tag{2.2.46}$$

Из сходимости ряда (2.2.46) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (2.2.16), (2.2.39) и (2.2.41) на $\overline{D}$, а ряды (2.2.40) и (2.2.42) на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $v(x,t)$, определенная рядом (2.2.16), удовлетворяет условиям задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15).

Следовательно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Если функции $G_i(x,t)$, $i=1,2$, удовлетворяют условиям леммы* 2.2.3 *и выполнены условия леммы* 2.1.1 *или леммы* 2.1.3, *то существует единственное решение задачи* (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15) *и оно определяется рядом* (2.2.16).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 2.1.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $\delta(p)=0$, то для разрешимости задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15) необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{1p}(0+0)\sin\lambda_p\alpha - \int\limits_{-\alpha}^{0} g_{2p}(s)\sin\left[\lambda_p(s+\alpha)\right]\,ds = 0, \quad p = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{2.2.47}$$

В этом случае решение задачи (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15) определяется в виде суммы ряда

$$v(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right) T_k(t)\sin\mu_k x + \\ + \sum_p A_p v_p(x,t), \tag{2.2.48}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2 \ldots, k_m$, A_p – произвольные постоянные, функции $v_p(x,t) = T_p(t)\sin\mu_p x$, $T_p(t)$ здесь определяется по формуле (2.2.27), где k надо заменить на p и c_p – произвольная постоянная, если в конечных суммах в правой части (2.2.48) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом в случае леммы 2.1.2 имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функции $G_i(x,t)$, $i=1,2$, удовлетворяют условиям леммы* 2.2.3. *Тогда, если $\delta(k) \neq 0$ при $k = \overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* (2.2.9) – (2.2.12), (2.2.15), *которое определяется рядом* (2.2.16); *если $\delta(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \le k_0$, то задача* (2.2.9)

– (2.2.12), (2.2.15) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (2.2.47) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (2.2.48).

На основании теорем 2.2.2 и 2.2.3 и формул (2.2.6) – (2.2.8) нетрудно найти решение задачи (2.2.2) – (2.2.5). Предварительно на основании равенств (2.2.12) и (2.2.13) вычислим равенственные условия леммы 2.2.3:

$$F_1(0,t)-h_1'(t)-b^2h_1(t)-\frac{1}{\alpha}\varphi''(0)=F_1(l,t)-h_2'(t)-b^2h_2(t)-\frac{1}{\alpha}\varphi''(l)=0,$$

$$F_{1xx}''(0,t)-\frac{1}{\alpha}\varphi^{IV}(0)+\frac{1+b^2t}{\alpha}\varphi''(0)=$$

$$=F_{1xx}''(l,t)-\frac{1}{\alpha}\varphi^{IV}(l)+\frac{1+b^2t}{\alpha}\varphi''(l)=0,\quad 0\le t\le\beta; \tag{2.2.49}$$

$$F_2(0,t)-h_1''(t)-b^2h_1(t)-\frac{t}{\alpha}\varphi''(0)=F_2(l,t)-h_2''(t)-b^2h_2(t)-\frac{t}{\alpha}\varphi''(l)=0,$$

$$F_{2xx}''(0,t)-\frac{t}{\alpha}\varphi^{IV}(0)+\frac{tb^2}{\alpha}\varphi''(0)=$$

$$=F_{2xx}''(l,t)-\frac{t}{\alpha}\varphi^{IV}(l)+\frac{tb^2}{\alpha}\varphi''(l)=0,\quad -\alpha\le t\le 0. \tag{2.2.50}$$

Теорема 2.2.4. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1.1 *или леммы* 2.1.3 *и* $F_1(x,t)\in C(\overline{D}_+)\cap C^{3,0}_{x,t}(\overline{D}_+)$, $F_2(x,t)\in C(\overline{D}_-)\cap C^{3,0}_{x,t}(\overline{D}_-)$, $\varphi(x)\in C^5[0,l]$, $h_1(t)$, $h_2(t)\in C^1[0,\beta]\cap C^2[-\alpha,0]$ *и имеют место равенства* (2.2.49) *и* (2.2.50). *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.2) – (2.2.5) *и оно определяется по формуле*

$$u(x,t)=v(x,t)+z(x,t)+w(x,t),$$

где функции $v(x,t)$, $z(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *определяются соответственно формулами* (2.2.16), (2.2.7) *и* (2.2.8).

Аналогично на основании теоремы 2.2.3 можно сформулировать аналог этой теоремы для задачи (2.2.2) – (2.2.5).

§ 2.3. Задача с граничным условием второго рода

В этом параграфе для уравнения (2.1.1) изучим задачу с граничными условиями второго рода на боковых сторонах в прямоугольной области D.

2.3.1. Постановка задачи. Единственность решения

Задача 2.3. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{2.3.1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{2.3.2}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{2.3.3}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{2.3.4}$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, при этом $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

В случае задачи 2.3 введем в рассмотрение следующие функции:

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int\limits_0^l u(x,t)dx, \tag{2.3.5}$$

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.3.6}$$

так как соответствующая одномерная спектральная задача по переменной x имеет систему собственных функций $\{1/\sqrt{l},\ \sqrt{2/l}\,\cos\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$.

Аналогично § 2.1 для функций $u_k(t)$, где $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаем следующую краевую задачу на сопряжение:

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \ \ t > 0, \tag{2.3.7}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \ \ t < 0, \tag{2.3.8}$$

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \tag{2.3.9}$$

$$u_0(-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int\limits_0^l \psi(x)\,dx = \psi_0, \tag{2.3.10}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2} \int\limits_0^l \psi(x)\cos\mu_k x\,dx = \psi_k, \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{2.3.11}$$

здесь $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$.

Единственное решение задачи (2.3.7) – (2.3.11) существует и определяется по формуле

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k e^{-\lambda_k^2 t}}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha}, & t > 0, \\ \\ \dfrac{\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha}\psi_k, & t < 0 \end{cases} \tag{2.3.12}$$

при условии, что при всех $b > 0$ и $k \in \mathbb{N}_0$

$$\delta(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha \neq 0, \tag{2.3.13}$$

а при $b = 0$ и $k = 0$ функция $u_0(t)$ имеет вид

$$u_0(t) = \psi_0, \ \ -\alpha \leq t \leq \beta. \tag{2.3.14}$$

Теперь докажем единственность решения задачи 2.3. Пусть $\psi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ и выполнены условия (2.3.13) при всех $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\psi_k \equiv 0$ и из (2.3.12) и (2.3.14) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на $[-\alpha, \beta]$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, в силу (2.3.5), (2.3.6) имеем:

$$\int_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отсюда в силу полноты системы $\{1/\sqrt{l},\ \sqrt{2/l}\,\cos\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2.3.1) функция $u(x, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Предположим, что условия (2.3.13) нарушены при $k = p \in \mathbb{N}_0$ и некоторых $\alpha > 0$ и $b > 0$, т.е.

$$\delta(p) = \cos\lambda_p\alpha + \lambda_p \sin\lambda_p\alpha = 0.$$

Тогда задача 2.3 при $\psi(x) \equiv 0$ имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t}\cos\mu_p x, & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p \sin\lambda_p t)\cos\mu_p x, & t < 0. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Построенная функция (2.3.15) удовлетворяют условиям (2.1.2) – (2.1.4) и

$$u_p(x, -\alpha) = 0, \ \ 0 \leq x \leq l.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2.3.1. *Если существует решение задачи* 2.3, *т.е. задачи* (2.3.1) – (2.3.4), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (2.3.13) *при всех* $k \in \mathbb{N}_0$.

2.3.2. Существование решения задачи

Поскольку в формуле (2.3.12) знаменатель $\delta(k)$ совпадает с соответствующим $\delta(k)$ формулы (2.1.25) из § 2.1, то для него будут справедливы утверждения, аналогичные соответствующим леммам 2.1.1 – 2.1.3 из § 2.1 с учетом значения $\delta(0)$.

Лемма 2.3.1. *Если* $b = 0$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *является произвольным натуральным числом, то существует постоянная* C_0, *такая, что при всех* $k \in \mathbb{N}_0$

$$|\delta(k)| = C_0 = 1 > 0.$$

Лемма 2.3.2. *Если* $b \geq 0$ *и* $\widetilde{\alpha} = p/q$ *является произвольным рациональным числом, где* $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $(k_0 \in \mathbb{N}_0)$, *такие, что при всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \geq C_0 > 0.$$

Лемма 2.3.3. *Пусть* $\widetilde{\alpha}$ – *иррациональное алгебраическое число степени два,* $b\,l < \pi$ *и выполнены условия* (2.1.48) *и* (2.1.51), *где* δ *определяется по формуле* (2.1.57) *при условии* (2.1.58). *Тогда существует положительная постоянная* C_0, *зависящая от* α, l *и* b, *такая, что при всех* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место оценка*

$$|\delta(k)| \geq C_0 > 0, \tag{2.3.16}$$

а при $k = 0$

$$\delta(0) = \cos b\alpha + b \sin b\alpha \neq 0. \tag{2.3.17}$$

Оценки для функций $u_k(t)$ из лемм 2.1.4 – 2.1.6 остаются справедливыми и в случае задачи 2.3.

Решение задачи 2.3 можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{l}} u_0(t) + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \mu_k x, \tag{2.3.18}$$

где $u_k(t)$ определяются соответственно по формулам (2.3.12) и (2.3.14).

Пусть выполнены условия леммы 2.3.1 или леммы 2.3.3. Тогда ряд (2.3.18) и ряды из производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, ряды из производных второго порядка соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ на основании оценок (2.1.61) и (2.1.62) мажорируются числовым рядом

$$C_1 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 |\psi_k|. \tag{2.3.19}$$

Лемма 2.3.4. *Пусть $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 1,3$. Тогда справедливо следующее представление:*

$$\psi_k = \frac{1}{\mu_k^4} \psi_k^{(4)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$\psi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(4)}(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \le \|\psi^{(4)}\|^2_{L_2[0,l]}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.7.

При выполнении условий леммы 2.3.4 ряд (2.3.19) оценивается сходящимся числовым рядом

$$C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} |\psi_k^{(4)}|. \tag{2.3.20}$$

Тогда на основании сходимости ряда (2.3.20) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряд (2.3.18) и ряды из производных первого порядка членов этого ряда в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по x и t дважды при $t \le 0$ и любое число раз при $t > 0$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.3.1 *или леммы* 2.3.3 *и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 2.3.4*, то существует единственное решение задачи* 2.3 *и оно определяется рядом* (2.3.18)*, и $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.*

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 2.3.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m –

заданные натуральные числа, $\delta(p)=0$, тогда для разрешимости задачи 2.3 необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\mu_k x dx=0,\quad k=k_1,k_2,\ldots,k_m. \tag{2.3.21}$$

В этом случае решение задачи 2.3 определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{l}}u_0(t)+\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)u_k(t)\cos\mu_k x+$$
$$+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{2.3.22}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1,k_2\ldots,k_m$, C_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (2.3.15), если в конечных суммах в правой части (2.3.22) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 2.3.4. *Тогда, если $\delta(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* 2.3 *и это решение определяется рядом* (2.3.18)*; если $\delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\ldots,k_m\le k_0$, то задача* 2.3 *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (2.3.21) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (2.3.22), *при этом $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(\overline{D}_-)\cap C_x^2(\overline{D}_+)$.*

2.3.3. Устойчивость решения

Рассмотрим следующие известные нормы:

$$\|f(x)\|_{W_2^p[0,l]}=\left(\int\limits_0^l\sum_{k=0}^p|f^{(k)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

$$\|f(x)\|_{C^p[0,l]}=\sum_{k=0}^p\max_{0\le x\le l}|f^{(k)}(x)|,\ \ p\ge 1.$$

Теорема 2.3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.2, *тогда для решения* (2.3.18) *задачи* 2.3 *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\le C_3\|\psi(x)\|_{W_2^1[0,l]}, \tag{2.3.23}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leq C_4 \|\psi(x)\|_{C^2[0,l]}, \tag{2.3.24}$$

где постоянные C_3 и C_4 не зависят от функции $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку тригонометрическая система $\{1/\sqrt{l},\ \sqrt{2/l}\cos\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы (2.3.18) и леммы 2.1.4 на основании оценки (2.1.61) имеем

$$||u(x,t)||^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2(t) \leq \widetilde{C}_1^2 \left[\psi_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 |\psi_k|^2\right], \tag{2.3.25}$$

здесь $\widetilde{C}_i$ и далее положительные постоянные. Тогда в силу представления

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi'(x) \sin\mu_k x\, dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

из неравенства (2.3.25) получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} \leq \widetilde{C}_2^2 \left[\psi_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [\psi_k^{(1)}]^2\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_2^2 \left[\|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}\right] = C_3^2 \|\psi(x)\|^2_{W_2^1[0,l]}.$$

Отсюда получаем оценку (2.3.23).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулу (2.3.18) на основании леммы 2.1.4, представления

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \quad \psi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi''(x) \cos\mu_k x\, dx$$

и неравенства Коши–Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{l} \left[|u_0(t)| + \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)|\right] \leq \widetilde{C}_3 \left[|\psi_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} k|\psi_k|\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_4 \left[|\psi_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |\psi_k^{(2)}|\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_5 \left[\|\psi\|_{L_2[0,l]} + \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(2)}|^2\Big)^{1/2}\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_6 \left[\|\psi\|_{L_2[0,l]} + ||\psi''(x)||_{L_2[0,l]}\right] \leq$$

$$\leq C_4 \left[\|\psi\|_{C[0,l]} + ||\psi''(x)||_{C[0,l]}\right] \leq C_4||\psi(x)||_{C^2[0,l]}.$$

Откуда непосредственно следует оценка (2.3.24). ■

§ 2.4. Задача с граничным условием третьего рода

В этом параграфе для уравнения (2.1.1) рассмотрим задачу с краевыми условиями третьего рода на сторонах $x = 0$ и $x = l$ области D (см. § 2.1).

2.4.1. Постановка задачи. Единственность решения

Задача 2.4. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{2.4.1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{2.4.2}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{2.4.3}$$

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{2.4.4}$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, при этом

$$\psi'(0) - h_1\psi(0) = 0, \quad \psi'(l) + h_2\psi(l) = 0.$$

Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ в задаче 2.4 относительно $X(x)$, получим спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \ \ 0 < x < l, \tag{2.4.5}$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \ \ X'(l) + h_2 X(l) = 0. \tag{2.4.6}$$

Из работ [11, с. 233], [95, с. 510] следует справедливость следующей леммы.

Лемма 2.4.1. *Для решения задачи* (2.4.5) *и* (2.4.6) *справедливы утверждения:*

1) *Собственные значения $\mu_k > 0$ являются корнями уравнения*

$$\operatorname{ctg} \mu l = \frac{\mu}{(h_1 + h_2)} - \frac{h_1 h_2}{\mu(h_1 + h_2)}, \tag{2.4.7}$$

а соответствующие собственные функции определяются по формуле

$$X_k(x) = \sqrt{\nu_k}\,(\mu_k \cos\mu_k x + h_1 \sin\mu_k x)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.4.8}$$

$$\nu_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} = \frac{2(\mu_k^2 + h_2^2)}{l(\mu_k^2 + h_1^2)(\mu_k^2 + h_2^2) + (h_1 + h_2)(\mu_k^2 + h_1 h_2)}. \tag{2.4.9}$$

2) *Система собственных функций* $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *ортонормированна и полна в пространстве* $L_2[0, l]$.

Следующее утверждение дает ответ об асимптотике собственных значений задачи (2.4.5), (2.4.6).

Лемма 2.4.2. *Для корней уравнения* (2.4.7) *при достаточно больших* k *справедлива формула*

$$\mu_k = \frac{\pi k}{l} - \frac{2(h_1 + h_2)}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \tag{2.4.10}$$

Доказательство. Из графиков функций $\operatorname{ctg}\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu} = \mu l$ и $\dfrac{\widetilde{\mu}}{l(h_1 + h_2)} - \dfrac{h_1 h_2 l}{\widetilde{\mu}(h_1 + h_2)}$ следует, что уравнение (2.4.7) имеет ровно по одному корню $\widetilde{\mu}_k$ в каждом из интервалов $(\pi k - 1, \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$. Пользуясь формулой обращения Лагранжа [10, с. 33], определим асимптотическое поведение μ_k при $k \to \infty$. Поскольку

$$\operatorname{ctg}(\widetilde{\mu}_k - \pi k) = \frac{\widetilde{\mu}_k}{l(h_1 + h_2)} - \frac{h_1 h_2 l}{\widetilde{\mu}_k (h_1 + h_2)} \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то имеем $\widetilde{\mu}_k - \pi k \to 0$. Полагая $\widetilde{\mu}_k = \pi k - z$, $w = \dfrac{1}{\pi k}$, из уравнения (2.4.7) получим

$$-\operatorname{ctg} z = \frac{(1/w - z)^2 - h_1 h_2 l^2}{l(h_1 + h_2)(1/w - z)},$$

откуда следует

$$\left(\frac{1}{w} - z\right)^2 + (h_1 + h_2)\left(\frac{1}{w} - z\right) l \operatorname{ctg} z - h_1 h_2 l^2 = 0$$

или

$$\frac{1}{w^2} - [2z - (h_1 + h_2) l \operatorname{ctg} z]\,\frac{1}{w} + z^2 - (h_1 + h_2) l z \operatorname{ctg} z - h_1 h_2 l^2 = 0.$$

Из последнего уравнения найдем $\dfrac{1}{w}$. Для этого вычислим дискриминант уравнения:

$$D = (2z - (h_1 + h_2) l \operatorname{ctg} z)^2 - 4(z^2 - (h_1 + h_2) l z \operatorname{ctg} z - h_1 h_2 l^2) =$$

$$= (h_1 + h_2)^2 l^2 \operatorname{ctg}^2 z + 4h_1 h_2 l^2 \geq 0,$$

тогда будем иметь

$$\frac{1}{w} = 2z - (h_1 + h_2) l \operatorname{ctg} z + l\sqrt{(h_1 + h_2)^2 \operatorname{ctg}^2 z + 4h_1 h_2}\ .$$

Отсюда найдем функцию

$$z = \omega g(z),$$

где

$$g(z) = 2z^2 - (h_1 + h_2) l z \operatorname{ctg} z + l\sqrt{(h_1 + h_2)^2 z^2 \operatorname{ctg}^2 z + 4h_1 h_2 z^2},$$

где $g(z)$ аналитична в точке $z = 0$ и $g(0) = -2(h_1 + h_2)l$. Поэтому z разлагается в степенной ряд по степеням w, т.е.

$$z = wg(0) + w^2 g'(0) + w^3 \frac{g''(0)}{2!} + \dots\ .$$

Отсюда при достаточно большом k и с учетом четности функции $g(z)$ получим

$$\widetilde{\mu}_k = \pi k - \frac{2(h_1 + h_2)l}{\pi k} + \frac{g''(0)}{2(\pi k)^3} + \dots\ . \tag{2.4.11}$$

Из разложения (2.4.11) следует формула (2.4.10). ■

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи 2.4. Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \int\limits_0^l u(x,t) X_k(x)\, dx,\ \ k \in \mathbb{N}. \tag{2.4.12}$$

Аналогично § 2.1 для функций $u_k(t)$ получаем следующую краевую задачу на сопряжение:

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0,\ \ t > 0, \tag{2.4.13}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0,\ \ t < 0,\ \ \lambda_k^2 = \mu_k^2 + b^2, \tag{2.4.14}$$

$$u_k(0+0) = u_k(0-0),\quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \tag{2.4.15}$$

$$u_k(-\alpha) = \int\limits_0^l \psi(x) X_k(x) dx = \psi_k. \tag{2.4.16}$$

Единственное решение задачи (2.4.12) – (2.4.16) при условии

$$\delta(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.4.17}$$

существует и определяется по формуле

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k e^{-\lambda_k^2 t}}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha}, & t > 0, \\[2ex] \dfrac{\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha}\psi_k, & t < 0. \end{cases} \tag{2.4.18}$$

Отметим, что выражение (2.4.17) для $\delta(k)$, несмотря на внешнюю одинаковость с выражением $\delta(k)$ из §§ 2.1 – 2.3, вообще говоря, зависит от шести параметров α, l, b, h_1 и h_2, и здесь μ_k при больших k определяется формулой (2.4.10).

Теперь докажем единственность решения задачи 2.4. Пусть $\psi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ и выполнены условия (2.4.17) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi_k \equiv 0$ и из (2.4.18) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на $[-\alpha, \beta]$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу (2.4.12) имеем:

$$\int_0^l u(x,t) X_k(x)\, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу полноты системы $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2.4.1) функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Предположим, что условие (2.4.17) нарушено при $k = p$ и некоторых α, l, b, h_1 и h_2, т.е. $\delta(p) = 0$. Тогда задача 2.4 при $\psi(x) \equiv 0$ имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t} X_p(x), & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p \sin\lambda_p t)\, X_p(x), & t < 0. \end{cases} \tag{2.4.19}$$

Построенная функция (2.4.19) удовлетворяет условиям (2.4.1) – (2.4.4) при $\psi(x) \equiv 0$.

Чтобы найти нули выражения $\delta(k)$, представим его в виде

$$\delta(k) = \sqrt{1 + \lambda_k^2}\, \sin\left(\widetilde{\alpha} l \lambda_k + \gamma_k\right), \tag{2.4.20}$$

где $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$, $\gamma_k = \arcsin\left(1/\sqrt{1+\lambda_k^2}\right)$. Отсюда находим нули $\delta(k)$:

$$\widetilde{\alpha} = \frac{n}{l\lambda_k} - \frac{\gamma_k}{l\lambda_k}, \quad k,\, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2.4.1. *Если существует решение задачи* 2.4, *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (2.4.17) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

2.4.2. Существование решения задачи

Из формулы (2.4.20) видно, что выражение $\delta(k)$, заданное левой частью неравенства (2.4.17), имеет счетное множество нулей относительно $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$. Поэтому аналогично § 2.1 нам следует установить оценки об отделенности от нуля выражения $\delta(k)$ с учетом леммы 2.4.2.

Лемма 2.4.3. *Если* $\widetilde{\alpha} = p/q$ *является произвольным рациональным числом, где* $(p, q) = 1$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $(k_0 \in \mathbb{N})$, *такие, что при всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \geq C_0 > 0. \tag{2.4.21}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность λ_k и с учетом (2.4.10) при $k > k_1$, k_1 – достаточно большое натуральное число, представим ее в виде

$$\lambda_k = \sqrt{b^2+\mu_k^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 - \frac{4(h_1+h_2)}{l} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)} =$$

$$= \frac{\pi k}{l}\sqrt{1 + \frac{(l\,b)^2 - 4l(h_1+h_2)}{(\pi k)^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)} = \frac{\pi k}{l}\widetilde{\lambda}_k, \tag{2.4.22}$$

при этом

$$\widetilde{\lambda}_k = 1 + \theta_k, \quad \theta_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{2.4.23}$$

при $k > \frac{1}{\pi}\sqrt{|l\,b^2 - 4l(h_1+h_2)|} = k_2$. Тогда выражение (2.4.20) в силу представлений (2.4.22) и (2.4.23) принимает вид

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\,\sin\left(\pi k\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right), \quad \widetilde{\theta}_k = \pi k\theta_k. \tag{2.4.24}$$

Далее на основании (2.4.24) аналогично лемме 2.1.2 доказывается справедливость оценки (2.4.21). ■

Если выполнены условия (2.4.17) и (2.4.21), то на основании частных решений (2.4.8) и (2.4.18) решение задачи (2.4.1) – (2.4.4) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{2.4.25}$$

Далее покажем, что при определенных условиях относительно функции $\psi(x)$ сумма $u(x,t)$ ряда (2.4.25) удовлетворяет условиям (2.4.1) и (2.4.2).

Из формулы (2.4.18) следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.4.4. *Если выполнены условия леммы* 2.4.3*, то при всех* $k > k_0$ *справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \le C_1 k |\psi_k|, \quad |u_k'(t)| \le C_2 k^2 |\psi_k|, \quad t \in [-\alpha, \beta], \tag{2.4.26}$$

$$|u_k''(t)| \le C_3 k^3 |\psi_k|, \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{2.4.27}$$

C_i *– здесь и далее положительные постоянные.*

Тогда ряд (2.4.25) и ряды из производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, ряды из производных второго порядка соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ на основании оценок (2.4.26) и (2.4.27) мажорируются числовым рядом

$$C_6 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^3 |\psi_k|. \tag{2.4.28}$$

Лемма 2.4.5. *Пусть* $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi^{(i+1)}(0) - h_1\psi^{(i)}(0) = 0$, $\psi^{(i+1)}(l) + h_2\psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2$. *Тогда справедливо следующее представление:*

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.4.29}$$

где

$$\psi_k^{(4)} = \int_0^l \psi^{(4)}(x) X_k(x)\, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \le \|\psi^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{2.4.30}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл из формулы (2.4.16). С учетом уравнения (2.4.5) представим его в виде

$$\psi_k = \int\limits_0^l \psi(x) X_k(x)\, dx = -\frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi(x) X_k''(x)\, dx.$$

Далее, интегрируя по частям два раза последний интеграл и учитывая условия леммы, получим

$$\psi_k = -\frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi''(x) X_k(x)\, dx = -\frac{1}{\mu_k^2} \psi_k^{(2)}. \tag{2.4.31}$$

Аналогично проводя рассуждения для интеграла (2.4.31), получим

$$\psi_k^{(2)} = -\frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi^{IV}(x) X_k(x)\, dx = -\frac{1}{\mu_k^2} \psi_k^{(4)}. \tag{2.4.32}$$

Подставляя (2.4.32) в (2.4.31), получим представление (2.4.29).

По условию функция $\psi^{(4)}(x)$ непрерывна на $[0, l]$, тогда из теории рядов Фурье известно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(4)}|^2$ сходится и справедливо неравенство Бесселя (2.4.30). ■

При выполнении условий леммы 2.4.5 ряд (2.4.28) оценивается сходящимся числовым рядом

$$C_7 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} |\psi_k^{(4)}|. \tag{2.4.33}$$

Тогда на основании сходимости ряда (2.4.33) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряд (2.4.25) и ряды из производных первого порядка членов этого ряда в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по x и t дважды при $t \le 0$ и любое число раз при $t > 0$.

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 2.4.3 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1, m}$, m – заданные натуральные числа, $\delta(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи (2.4.1) – (2.4.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_k = \int\limits_0^l \psi(x) X_k(x)\, dx = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{2.4.34}$$

В этом случае решение задачи (2.4.1) – (2.4.4) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)u_k(t)X_k(x)+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{2.4.35}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2\ldots, k_m$, A_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (2.4.19), если в конечных суммах в правой части (2.4.35) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 2.4.5. *Тогда, если $\delta(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* (2.4.1) – (2.4.4) *и это решение определяется рядом* (2.4.25)*; если $\delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\ldots,k_m\leq k_0$, то задача* (2.4.1) – (2.4.4) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (2.4.34) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (2.4.35)*, при этом $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(\overline{D}_-)\cap C_x^2(\overline{D}_+)$.*

2.4.3. Устойчивость решения

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.2 *и $\delta(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$. Тогда для решения* (2.4.25) *задачи* (2.4.1) – (2.4.4) *справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leq C_8\|\psi''(x)\|_{C[0,l]}, \tag{2.4.36}$$

где постоянная C_8 не зависит от функции $\psi(x)$.

Доказательство. Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулу (2.4.25) на основании леммы 2.4.4, неравенства

$$|X_k(x)|\leq\sqrt{\nu_k}\sqrt{\mu_k^2+h_1^2}\;|\sin(\mu_k x+\varphi_k)|\leq\frac{C_9}{\mu_k}\sqrt{\mu_k^2+h_1^2}\leq C_{10},$$

$\varphi_k=\arcsin\left(\mu_k/\sqrt{\mu_k^2+h_1^2}\right)$, представления (2.4.31) и неравенства Коши–Буняковского, получим

$$|u(x,t)|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)|\,|X_k(x)|\leq\widetilde{C}_1\sum_{k=1}^{+\infty}k|\psi_k|\leq\frac{\widetilde{C}_1 l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}|\psi_k^{(2)}|\leq$$

$$\leq\frac{\widetilde{C}_1 l^2}{\pi^2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{(2)}|^2\Big)^{1/2}\leq\frac{\widetilde{C}_1 l^2}{\pi\sqrt{6}}\|\psi''(x)\|_{L_2[0,l]}.$$

Откуда непосредственно следует оценка (2.4.36). ∎

Глава 3

Краевые задачи с нелокальными граничными условиями

В этой главе для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.0.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)| \quad 0 < x < l, \quad -\alpha < t < \beta\}$, где $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения краевых задач с различными нелокальными граничными условиями.

§ 3.1. Задача с условиями периодичности

3.1.1. Постановка задачи. Единственность решения

Рассмотрим уравнение (3.0.1) в смешанной области D и поставим следующую задачу с двумя нелокальными граничными условиями.

Задача 3.1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{3.1.1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{3.1.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad u_x(0,t) = u_x(l,t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{3.1.3}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3.1.4}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(l)$, $\psi'(0) = \psi'(l)$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Частные решения уравнения (3.0.1), не равные нулю в области D, будем искать в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

удовлетворяющего граничным условиям (3.1.3). Подставляя данное произведение в уравнение (3.0.1), относительно $X(x)$ получим

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \;\; 0 < x < l, \tag{3.1.5}$$

$$X(0) = X(l), \quad X'(l) = X'(0), \tag{3.1.6}$$

где μ – постоянная разделения.

Решением спектральной задачи (3.1.5) и (3.1.6) является система функций:

$$X_k(x): \;\; \frac{1}{\sqrt{l}}, \;\; \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x, \quad \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x, \quad k = 0,1,2,\dots\,, \tag{3.1.7}$$

где $X_0(x) = 1/\sqrt{l}$, $\mu_k = 2\pi k/l$, которая полна, ортонормированна и образует базис в пространстве $L_2[0,l]$.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3.1.1) – (3.1.4). Рассмотрим следующие функции:

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx, \quad k = 1,2,\dots\,, \tag{3.1.8}$$

$$\upsilon_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx, \quad k = 1,2,\dots\,, \tag{3.1.9}$$

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{l}}\int\limits_0^l u(x,t)\,dx. \tag{3.1.10}$$

Аналогично главе 2 получаем, что функции $u_k(t)$, $u_0(t)$ и $\upsilon_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$u_k'(t) + (b^2 + \mu_k^2)u_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.1.11}$$

$$u_k''(t) + (b^2 + \mu_k^2)u_k(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.1.12}$$

$$u_0'(t) + b^2 u_0(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.1.13}$$

$$u_0''(t) + b^2 u_0(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.1.14}$$

$$v_k'(t) + (b^2 + \mu_k^2) v_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.1.15}$$

$$v_k''(t) + (b^2 + \mu_k^2) v_k(t) = 0, \quad t < 0. \tag{3.1.16}$$

Найдем общие решения уравнений (3.1.11) и (3.1.12)

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \tag{3.1.17}$$

где a_k, b_k и c_k – произвольные постоянные, $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$. Выберем эти постоянные так, чтобы в силу (3.1.1) выполнялись условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \tag{3.1.18}$$

Удовлетворяя функции (3.1.17) условиям (3.1.18), найдем

$$a_k = c_k, \quad b_k = -c_k \lambda_k.$$

С учетом этих значений функции (3.1.17) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k \left(\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t\right), & t < 0. \end{cases} \tag{3.1.19}$$

Для нахождения постоянных c_k воспользуемся граничным условием (3.1.4) и формулой (3.1.8):

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x, -\alpha) \cos \mu_k x \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \mu_k x \, dx = \psi_k. \tag{3.1.20}$$

Тогда, удовлетворяя функции (3.1.19) граничному условию (3.1.20) при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$d(k) = \cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha \neq 0, \tag{3.1.21}$$

найдем

$$c_k = \frac{\psi_k}{d(k)}.$$

Подставляя значения c_k в формулу (3.1.19), получим окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_k}{d(k)} (\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Точно так же, исходя из уравнений (3.1.15) и (3.1.16) аналогично функций (3.1.22), построим функции

$$v_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{\psi}_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\widetilde{\psi}_k}{d(k)} (\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.1.23}$$

где

$$\widetilde{\psi}_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin\mu_k x \, dx. \tag{3.1.24}$$

По аналогичной схеме на основании общих решений уравнений (3.1.13) и (3.1.14), условий сопряжения и граничного условия (3.1.4) найдем

$$u_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_0}{d(0)} e^{-b^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_0}{d(0)} (\cos bt - b \sin bt), & t < 0, \end{cases} \tag{3.1.25}$$

здесь

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l \psi(x) \, dx. \tag{3.1.26}$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv 0$, тогда $\psi_k = \psi_0 = \widetilde{\psi}_k \equiv 0$ и из формул (3.1.22), (3.1.23), (3.1.25) и (3.1.8) – (3.1.10) следует

$$\int_0^l u(x,t) \sin\mu_k x \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

$$\int_0^l u(x,t) \cos\mu_k x \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

$$\int_0^l u(x,t)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (3.1.7) в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти для всех $x \in [0,l]$ и при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (3.1.1) функция $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, l, b и $k = p$, $p \in \mathbb{N}_0$ $(b \neq 0)$ нарушено условие (3.1.21), т.е. $d(p) = 0$, тогда однородная задача (3.1.1) – (3.1.4) и (3.1.4) (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение:

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t}(C_{0p} + C_{1p}\cos\mu_p x + C_{2p}\sin 2\mu_p x), & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p \sin\lambda_p t)\times \\ \qquad \times(C_{0p} + C_{1p}\cos\mu_p x + C_{2p}\sin\mu_p x), & t < 0, \end{cases} \tag{3.1.27}$$

где C_{0p}, C_{1p}, C_{2p} – произвольные постоянные.

Аналогично § 2.1 выражение $d(k)$ представим в следующем виде:

$$d(k) = \sqrt{1 + \lambda_k^2}\,\sin(2\pi k\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_k + \varphi_k), \tag{3.1.28}$$

где $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\widetilde{\lambda}_k = 1 + (b\,l/(2\pi k))^2$, $\varphi_k = \arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_k^2})$.

Из представления (3.1.28) видно, что выражение $d(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\widetilde{\alpha} = \frac{n}{2k\widetilde{\lambda}_k} - \frac{\varphi_k}{\lambda_k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.29}$$

Итак, справедлива

Теорема 3.1.1. *Если существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (3.1.1) – (3.1.4), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (3.1.21) *при всех* $k \in \mathbb{N}_0$.

3.1.2. Существование решения задачи

Поскольку $d(k)$ имеет счетное множество нулей (3.1.29) относительно $\widetilde{\alpha}$, то снова возникает задача по получению оценок об отделенности от нуля. Выражение $d(k)$ по внешнему виду совпадает с $\delta(k)$ из главы 2, отличие состоит только в $\mu_k = 2\pi k/l$. Поэтому леммы 2.1.1 – 2.1.3, установленные для $\delta(k)$ в § 2.1, имеют место и для $d(k)$ при $\mu_k = 2\pi k/l$.

Лемма 3.1.1. *Если $b = 0$ и $\widetilde{\alpha}$ является произвольным натуральным числом, то существует постоянная C_0, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$*

$$|d(k)| = C_0 = 1 > 0. \tag{3.1.30}$$

Лемма 3.1.2. *Если $b \geq 0$ и $\widetilde{\alpha} = p/q$ является произвольным рациональным числом, где $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, ($k_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|d(k)| \geq C_0 > 0. \tag{3.1.31}$$

Лемма 3.1.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ – иррациональное алгебраическое число степени два, $b\,l < \pi$ и выполнены условия* (2.1.48) *и* (2.1.51)*, где δ определяется по формуле* (2.1.57) *при условии* (2.1.58)*. Тогда существует положительная постоянная C_0, зависящая от α, l и b, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$|d(k)| > C_0. \tag{3.1.32}$$

На основании частных решений (3.1.22), (3.1.23) и (3.1.25) решение задачи (3.1.1) – (3.1.4) можно представить в виде суммы ряда Фурье:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{l}} u_0(t) + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \cos \mu_k x + \upsilon_k(t) \sin \mu_k x. \tag{3.1.33}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функции $\psi(x)$ ряд (3.1.33) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ и там его можно почленно дифференцировать дважды по x и t при $t \leq 0$ и один раз по t и дважды по x при $t > 0$.

Лемма 3.1.4. *Если выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы 3.1.3, то при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \leq C_1 k |\psi_k|, \quad |\upsilon_k(t)| \leq C_1 k |\widetilde{\psi}_k|, \quad t \in [-\alpha, \beta], \tag{3.1.34}$$

$$|u_k'(t)| \leq C_2 k^2 |\psi_k|, \quad |\upsilon_k'(t)| \leq C_2 k^2 |\widetilde{\psi}_k|, \quad t \in [-\alpha, \beta], \tag{3.1.35}$$

$$|u_k''(t)| \leq C_3 k^3 |\psi_k|, \quad |\upsilon_k''(t)| \leq C_3 k^3 |\widetilde{\psi}_k|, \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{3.1.36}$$

C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость оценок (3.1.34) – (3.1.36) непосредственно вытекает из формул (3.1.22) и (3.1.23) на основании оценки (3.1.30).

Лемма 3.1.5. *Если выполнены условия леммы* 3.1.2, *то при всех* $k > k_0$ *справедливы оценки* (3.1.34) – (3.1.36).

Эти оценки устанавливаются исходя из неравенства (3.1.32).

Пусть выполнены условия леммы 3.1.1 или леммы 3.1.3. Тогда ряд (3.1.33) и ряды из производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, ряды из производных второго порядка соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ на основании оценок (3.1.34) – (3.1.36) мажорируются числовым рядом

$$C_6 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 \left(|\psi_k| + |\widetilde{\psi}_k|\right). \tag{3.1.37}$$

Лемма 3.1.6. *Пусть* $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = \overline{0,3}$. *Тогда справедливы следующие представления:*

$$\psi_k = \frac{1}{\mu_k^4}\psi_k^{(4)}, \quad \widetilde{\psi}_k = \frac{1}{\mu_k^4}\widetilde{\psi}_k^{(4)}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1.38}$$

где

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \le \int_0^l [\psi^{(IV)}(x)]^2\,dx, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{\psi}_k^{(4)}|^2 \le \int_0^l [\psi^{(IV)}(x)]^2\,dx.$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям четыре раза в интегралах из формул (3.1.20) и (3.1.24). Тогда с учетом условий леммы получим

$$\psi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \cos \mu_k x\,dx = \frac{1}{\mu_k^4}\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(IV)}(x) \cos \mu_k x\,dx = \frac{1}{\mu_k^4}\psi_k^{(4)},$$

$$\widetilde{\psi}_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x\,dx = \frac{1}{\mu_k^4}\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(IV)}(x) \sin \mu_k x\,dx = \frac{1}{\mu_k^4}\widetilde{\psi}_k^{(4)}.$$

Отсюда следует справедливость представлений (3.1.38). Поскольку функция $\psi^{(IV)}(x)$ кусочно-непрерывна на $[0,l]$, то из теории рядов Фурье следует справедливость неравенств Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\psi_k^{(4)}|^2 \le \|\psi^{IV}(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|\widetilde{\psi}_k^{(4)}|^2 \le \|\psi^{IV}(x)\|^2_{L_2[0,l]},$$

из которых вытекает сходимость указанных рядов. ■

При выполнении условий леммы 3.1.6 ряд (3.1.37) оценивается числовым рядом

$$C_7 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(|\psi_k^{(4)}| + |\widetilde{\psi}_k^{(4)}|\right). \tag{3.1.39}$$

Тогда на основании сходимости ряда (3.2.59) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряд (3.1.33) и ряды из производных первого порядка членов этого ряда в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по x и t дважды при $t \leq 0$ и любое число раз при $t > 0$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.1.2. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1.3 *или леммы* 3.1.3 *и функция* $\psi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.1.6, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (3.1.1) – (3.1.4) *и оно определяется рядом* (3.1.33), *и* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 3.1.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $d(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи (3.1.1) – (3.1.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^l \psi(x)\cos\mu_k x\,dx = \int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{3.1.40}$$

В этом случае решение задачи (3.1.1) – (3.1.4) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{l}}u_0(t) + \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right) u_k(t)\cos\mu_k x +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right) v_k(t)\sin\mu_k x + \sum_p u_p(x,t), \tag{3.1.41}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2 \ldots, k_m$, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (3.1.27), если в конечных суммах в правой части (3.1.41) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1.3. *Пусть* $\widetilde{\alpha}$ *является рациональным числом и функция* $\psi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.1.6. *Тогда, если* $d(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (3.1.1) – (3.1.4) *и это решение определяется рядом* (3.1.33); *если* $d(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leq k_0$, *то задача* (3.1.1) – (3.1.4) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (3.1.40) *и решение* $u(x,t)$ *в этом случае определяется в виде суммы ряда* (3.1.41), *при этом* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

3.1.3. Устойчивость решения

Теорема 3.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2, *тогда для решения* (3.1.33) *задачи* (3.1.1) – (3.1.4) *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leq C_8 \|\psi(x)\|_{W_2^1[0,l]}, \tag{3.1.42}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leq C_9 \|\psi(x)\|_{C^2[0,l]}, \tag{3.1.43}$$

где постоянные C_8 *и* C_9 *не зависят от функции* $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку система (3.1.7) ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы (3.1.33) на основании оценки (3.1.34) имеем

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = u_0^2(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k^2(t) + \upsilon_k^2(t)\right) \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_1 \left[|\psi_0|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(|\psi_k|^2 + |\widetilde{\psi}_k|^2 \right) \right], \tag{3.1.44}$$

где $\widetilde{C}_i$ – здесь и далее положительные постоянные.

В силу представлений

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \widetilde{\psi}_k = \frac{\widetilde{\psi}_k^{(1)}}{\mu_k},$$

$$\psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi'(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \widetilde{\psi}_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x \, dx$$

из неравенства (3.1.44) получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2} \le \widetilde{C}^2_2 \left[\psi^2_0 + [\psi^{(1)}_0]^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [\psi^{(1)}_k]^2 + [\widetilde{\psi}^{(1)}_k]^2\right] \le$$

$$\le \widetilde{C}^2_3 \left[\|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}\right] = \widetilde{C}^2_3 \|\psi(x)\|^2_{W^1_2[0,l]}.$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (3.1.42).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулы (3.1.25) и (3.1.33) на основании леммы 3.1.4, представлений

$$\psi_k = -\frac{\psi^{(2)}_k}{\mu^2_k}, \quad \widetilde{\psi}_k = -\frac{\widetilde{\psi}^{(2)}_k}{\mu^2_k},$$

$$\psi^{(2)}_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi''(x) \cos \mu_k x \, dx, \quad \widetilde{\psi}^{(2)}_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi''(x) \sin \mu_k x \, dx$$

и неравенства Коши–Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \le \widetilde{C}_4 \left[|u_0(t)| + \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| + |v_k(t)|\right] \le$$

$$\le \widetilde{C}_1 \left[|\psi_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(|\psi_k| + |\widetilde{\psi}_k|\right)\right] \le$$

$$\le \widetilde{C}_2 \left[|\psi_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(|\psi^{(2)}_k| + |\widetilde{\psi}^{(2)}_k|\right)\right] \le$$

$$\le \widetilde{C}_3 \left\{\|\psi\|_{L_2[0,l]} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi^{(2)}_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{\psi}^{(2)}_k|^2\right)^{1/2}\right]\right\} \le$$

$$\le \widetilde{C}_4 \left[\|\psi\|_{L_2[0,l]} + ||\psi''(x)||_{L_2[0,l]}\right] \le$$

$$\le \widetilde{C}_5 \left[\|\psi\|_{C[0,l]} + ||\psi''(x)||_{C[0,l]}\right] \le \widetilde{C}_5 ||\psi(x)||_{C^2[0,l]}.$$

Откуда непосредственно следует оценка (3.1.43). ■

§ 3.2. Краевая задача с нелокальным граничным условием первого рода

В этом параграфе для уравнения (3.0.1) в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ поставим задачу с нелокальным граничным условием типа Бицадзе–Самарского.

3.2.1. Постановка задачи. Единственность решения

Задача 3.2. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{3.2.1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{3.2.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{3.2.3}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.2.4}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(l)$, $\psi'(0) = 0$.

Решение задачи 3.2 будем искать методом разделения переменных: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя данное произведение в уравнение (3.0.1), относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.2.5}$$

$$X(0) = X(l), \quad X'(0) = 0, \tag{3.2.6}$$

где μ – постоянная.

Как известно [37, 33], спектральная задача (3.2.5) и (3.2.6) является несамосопряженной и имеет следующую систему собственных чисел и собственных и присоединенных функций:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_k = \frac{2\pi k}{l} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.2.7}$$

$$Z_k(x) = \left\{\frac{1}{l},\ \frac{1}{l}\cos\mu_k x,\ \frac{x}{l}\sin\mu_k x\right\}. \tag{3.2.8}$$

Отметим, что здесь каждому собственному значению μ_k из (3.2.7), кроме нулевого, отвечают одна собственная функция $X_k(x) =$

$\frac{1}{l}\cos\mu_k x$ и одна присоединенная функция $\widetilde{X}_k(x) = \frac{x}{l}\sin\mu_k x$[1]. Согласно известной теореме Келдыша [52], система корневых функций (3.2.8) задачи (3.2.5) и (3.2.6) является полной в $L_2[0,l]$. Но для решения исходной задачи 3.2 одной полноты системы функций (3.2.8) не достаточно, т.е. система (3.2.8) дополнительно обладала свойством базисности. Тогда по этой системе можно однозначно разложить в ряд любую функцию из $L_2[0,l]$. Для этого рассмотрим сопряженную задачу:

$$Y''(x) + \mu^2 Y(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.2.9}$$

$$Y'(0) = Y'(l), \quad Y(l) = 0, \tag{3.2.10}$$

которая имеет те же собственные значения, но другую систему корневых функций:

$$Y_k(x) = \left\{\frac{2(l-x)}{l},\ \frac{4(l-x)}{l}\cos\mu_k x,\ \frac{4}{l}\sin\mu_k x\right\}. \tag{3.2.11}$$

Системы функций (3.2.8) и (3.2.11) образуют биортогональную систему, т.е.

$$\int\limits_0^l Z_k(x)Y_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n \end{cases}$$

и удовлетворяют необходимому и достаточному условию базисности в пространстве $L_2[0,l]$, которое было впервые установлено В.А. Ильиным [33] .

Теорема 3.2.1. *Если существует решение нелокальной задачи* 3.2*, то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}_0$ выполнены условия* (3.1.16) *из* § 3.1*:*

$$d(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha \neq 0. \tag{3.2.12}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ является решением задачи (3.2.1) – (3.2.4). На основе системы (3.2.11) введем в рассмотрение функции

$$v_k(t) = \frac{4}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx,\ k = 1,2,\dots\ , \tag{3.2.13}$$

---

[1]Функция $\widetilde{X}_k(x)$ является решением задачи: $\widetilde{X}_k''(x) + \mu_k^2\widetilde{X}_k(x) = 2\mu_k X_k(x)$ при $0 < x < l$, $\widetilde{X}_k(0) = \widetilde{X}_k(l)$, $\widetilde{X}_k'(0) = 0$.

$$u_0(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x,t)(l-x)\,dx, \qquad (3.2.14)$$

$$u_k(t) = \frac{4}{l}\int\limits_0^l u(x,t)(l-x)\cos\mu_k x\,dx, \;\; k = 1,2,\dots\,. \qquad (3.2.15)$$

На основании формул (3.2.13) – (3.2.15) введем вспомогательные функции

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)(1-x)\cos\mu_k x\,dx, \;\; k = 1,2\dots\,, \qquad (3.2.16)$$

$$u_{0,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)(l-x)\,dx, \qquad (3.2.17)$$

$$v_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\sin\mu_k x\,dx, \;\; k = 1,2\dots\,, \qquad (3.2.18)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Дифференцируя равенства (3.2.16) – (3.2.18) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза и, учитывая уравнение (3.0.1), получим

$$v'_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t\sin\mu_k x\,dx = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\sin\mu_k x\,dx -$$

$$-b^2\frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = \frac{4}{l}I_1 - b^2 v_{k,\varepsilon}(t), \quad t > 0, \qquad (3.2.19)$$

$$v''_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt}\sin\mu_k x\,dx = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\sin\mu_k x\,dx -$$

$$-b^2\frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = \frac{4}{l}I_1 - b^2 v_{k,\varepsilon}(t), \quad t < 0, \qquad (3.2.20)$$

$$u'_{0,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t(l-x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}(l-x)\,dx -$$

$$-b^2\frac{2}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)(l-x)\,dx=\frac{2}{l}I_2-b^2u_{0,\varepsilon}(t),\quad t>0,\tag{3.2.21}$$

$$u''_{0,\varepsilon}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{tt}(l-x)\,dx=\frac{2}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(l-x)\,dx-$$

$$-b^2\frac{2}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)(l-x)\,dx=\frac{2}{l}I_2-b^2u_{0,\varepsilon}(t),\quad t<0,\tag{3.2.22}$$

$$u'_{k,\varepsilon}(t)=\frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_t(l-x)\cos\mu_kx\,dx=\frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(l-x)\cos\mu_kx\,dx-$$

$$-b^2\frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)(l-x)\cos\mu_kx\,dx=\frac{4}{l}I_3-b^2u_{k,\varepsilon}(t),\quad t>0,\tag{3.2.23}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(t)=\frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{tt}(l-x)\cos\mu_kx\,dx=\frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(l-x)\cos\mu_kx\,dx-$$

$$-b^2\frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)(l-x)\cos\mu_kx\,dx=\frac{4}{l}I_3-b^2u_{k,\varepsilon}(t),\quad t<0.\tag{3.2.24}$$

Интегрируя два раза по частям интегралы $I_1 - I_3$, получим

$$I_1=\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}\sin\mu_kx\,dx=u_x\sin\mu_kx\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-\mu_ku(x,t)\cos\mu_kx\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-$$

$$-\mu_k^2\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)\sin\mu_kx\,dx,$$

$$I_2=\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)(l-x)\,dx=-u_x(x,t)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}+u(l-\varepsilon,t)-u(\varepsilon,t),$$

$$I_3=\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)(l-x)\cos\mu_kx\,dx=(l-x)u_x(x,t)\cos\mu_kx\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}+$$

$$+u(x,t)\cos\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} + u(x,t)\mu_k(l-x)\sin\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} +$$

$$+2\mu_k \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x(x,t)u(x,t)\sin\mu_k x\,dx - \mu_k^2 \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)(l-x)\cos\mu_k x\,dx.$$

Подставим значения интегралов I_1, I_2 и I_3 в равенства (3.2.19) – (3.2.24). Затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (3.2.3), получим, что $v_k(t)$, $u_0(t)$ и $u_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$v_k'(t) + (b^2 + \mu_k^2)v_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.2.25}$$

$$v_k''(t) + (b^2 + \mu_k^2)v_k(t) = 0, \quad t < 0, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.2.26}$$

$$u_0'(t) + b^2 u_0(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.2.27}$$

$$u_0''(t) + b^2 u_0(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.2.28}$$

$$u_k'(t) + (b^2 + \mu_k^2)u_k(t) = 2\mu_k v_k(t), \quad t > 0, \tag{3.2.29}$$

$$u_k''(t) + (b^2 + \mu_k^2)u_k(t) = 2\mu_k v_k(t), \quad t < 0, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.2.30}$$

Заметим, что функции $u_k(t)$ являются присоединенными по отношению к $v_k(t)$.

Общие решения уравнений (3.2.25) и (3.2.26), удовлетворяющие условиям сопряжения

$$v_k(0+0) = v_k(0-0), \quad v_k'(0+0) = v_k'(0-0),$$

имеют вид

$$v_k(t) = \begin{cases} \widetilde{c}_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \widetilde{c}_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0, \end{cases} \tag{3.2.31}$$

где $\widetilde{c}_k$ – произвольная постоянная, $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$. Для нахождения постоянных $\widetilde{c}_k$ воспользуемся граничным условием (3.2.4) и формулой (3.2.13):

$$v_k(-\alpha) = \frac{4}{l}\int\limits_0^l u(x,-\alpha)\sin\mu_k x\,dx = \frac{4}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx = \widetilde{\psi}_k. \tag{3.2.32}$$

Удовлетворяя функции (3.2.31) граничным условиям (3.2.32), найдем

$$\widetilde{c}_k = \frac{\widetilde{\psi}_k}{\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha} = \frac{\widetilde{\psi}_k}{d(k)} \tag{3.2.33}$$

при выполнении условий (3.2.12): $d(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Подставляя (3.2.33) в формулу (3.2.31), получим окончательный вид функций

$$v_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{\psi}_k}{d_\alpha(k)} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\widetilde{\psi}_k}{d_\alpha(k)} (\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \tag{3.2.34}$$

Функция $u_0(t)$ является решением дифференциальных уравнений (3.2.27) и (3.2.28) и удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_0(0+0) = u_0(0-0), \quad u_0'(0+0) = u_0'(0-0)$$

и граничному условию

$$u_0(-\alpha) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x,-\alpha)(l-x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)(l-x)\,dx = \psi_0. \tag{3.2.35}$$

Решением такой задачи при условии $d(0) \neq 0$ $(b > 0)$ является единственная функция

$$u_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_0}{d(0)} e^{-b^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_0}{d(0)} (\cos bt - b\sin bt), & t < 0. \end{cases} \tag{3.2.36}$$

Общее решение уравнений (3.2.29) и (3.2.30) построим методом вариации постоянных. Общее решение неоднородного уравнения (3.2.29) имеет вид

$$u_k(t) = c_k e^{-\lambda_k^2 t} + 2\mu_k e^{-\lambda_k^2 t}\int v_k(t) e^{\lambda_k^2 t}\,dt, \tag{3.2.37}$$

здесь c_k – произвольная постоянная.

Подставляя функцию $v_k(t)$, определенной по формуле (3.2.34) при $t > 0$, в (3.2.37), найдем

$$u_k(t) = c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \frac{2\mu_k\widetilde{\psi}_k}{d(k)} t e^{-\lambda_k^2 t}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.2.38}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3.2.30) будем искать в виде

$$u_k(t) = a_k(t)\cos\lambda_k t + b_k(t)\sin\lambda_k t, \tag{3.2.39}$$

а неизвестные произвольные функции $a_k(t)$ и $b_k(t)$ найдем из системы [95, с. 289]:

$$\begin{cases} a_k'(t)\cos\lambda_k t + b_k'(t)\sin\lambda_k t = 0, \\ -a_k'(t)\sin\lambda_k t + b_k'(t)\cos\lambda_k t = \dfrac{2\mu_k}{\lambda_k} v_k(t). \end{cases}$$

Отсюда с учетом формулы (3.2.34) при $t < 0$ получим

$$a_k'(t) = -\frac{2\mu_k\widetilde{\psi}_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t)}{\lambda_k d(k)}\sin\lambda_k t,$$

$$b_k'(t) = \frac{2\mu_k\widetilde{\psi}_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t)}{\lambda_k d(k)}\cos\lambda_k t.$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения, найдем

$$a_k(t) = -\frac{2\mu_k\widetilde{\psi}_k}{\lambda_k d(k)}\left[\frac{\sin^2\lambda_k t}{2\lambda_k} + \frac{\sin 2\lambda_k t}{4} - \frac{\lambda_k t}{2}\right] + a_k, \tag{3.2.40}$$

$$b_k(t) = -\frac{2\mu_k\widetilde{\psi}_k}{\lambda_k d_\alpha(k)}\left[\frac{\sin^2\lambda_k t}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k t}{4\lambda_k} - \frac{t}{2}\right] + b_k, \tag{3.2.41}$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные. Подставляя (3.2.40) и (3.2.41) в (3.2.39), будем иметь

$$u_k(t) = a_k\cos\lambda_k t + b_k\sin\lambda_k t + w_k(t), \tag{3.2.42}$$

где

$$w_k(t) = \frac{\mu_k\widetilde{\psi}_k}{\lambda_k d(k)}\left[t(\lambda_k\cos\lambda_k t + \sin\lambda_k t) - \sin\lambda_k t\right]. \tag{3.2.43}$$

Заметим, что функция (3.2.43) удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$w_k(0-0) = 0, \quad w_k'(0-0) = 0. \tag{3.2.44}$$

Таким образом, функция $u_k(t)$ при $t > 0$ и $t < 0$ построена и в силу (3.2.38) и (3.2.42) имеет вид

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{2\mu_k\widetilde{\psi}_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t} t, & t > 0, \\ a_k\cos\lambda_k t + b_k\sin\lambda_k t + w_k(t), & t < 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.2.45}$$

Поскольку решения $u_k(t)$ должны удовлетворять условию (3.2.1), то постоянные c_k, a_k и b_k подберем так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.2.46}$$

Функции (3.2.45) удовлетворив условиям (3.2.46) с учетом равенств (3.2.44), найдем

$$a_k = c_k, \quad b_k = -c_k\lambda_k + \frac{2\mu_k \widetilde{\psi}_k}{\lambda_k d(k)}.$$

В силу последних равенств функции (3.2.45) принимают вид:

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{2\mu_k \widetilde{\psi}_k}{d(k)} t e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t) + \widetilde{\psi}_k \widetilde{w}_k(t), & t < 0, \end{cases} \tag{3.2.47}$$

$$\widetilde{w}_k(t) = \frac{\mu_k}{\lambda_k d(k)} \left[(1+t)\sin\lambda_k t + \lambda_k t \cos\lambda_k t\right]. \tag{3.2.48}$$

Для нахождения постоянных c_k воспользуемся граничным условием (3.2.4) и формулой (3.2.15):

$$u_k(-\alpha) = \frac{4}{l}\int_0^l u(x, -\alpha)(l-x)\cos\mu_k x\, dx =$$

$$= \frac{4}{l}\int_0^l \psi(x)(l-x)\cos\mu_k x\, dx = \psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.2.49}$$

Тогда из (3.2.47) и (3.2.49) при условии $d(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_k = \frac{\psi_k}{d(k)} - \frac{\widetilde{\psi}_k \widetilde{w}_k(-\alpha)}{d(k)}. \tag{3.2.50}$$

Подставив (3.2.50) в (3.2.47), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda_k^2 t}}{d(k)} \Big[\psi_k + \widetilde{\psi}_k(2\mu_k t - \widetilde{w}_k(-\alpha))\Big], & t > 0, \\ \dfrac{1}{d(k)}\Big\{\psi_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t) + \\ + \widetilde{\psi}_k \left[d(k)\widetilde{w}_k(t) - (\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t)\widetilde{w}_k(-\alpha)\right]\Big\}, & t < 0. \end{cases} \tag{3.2.51}$$

Таким образом, функции (3.2.13) – (3.2.15) однозначно и в явном виде построены, что позволяет нам непосредственно перейти к доказательству единственности решения задачи 3.2. Действительно, если выполнены условия (3.2.12) при всех $k \in \mathbb{N}$, то из формул (3.2.34), (3.2.36) и (3.2.51) следует единственность решения задачи (3.2.1) – (3.2.4). Так как, если $\psi(x) = 0$ на $[0, l]$, то $\psi_0 = \psi_k = \widetilde{\psi_k} \equiv 0$, отсюда в силу формул (3.2.34), (3.2.36) и (3.2.51) следует, что $u_0(t) \equiv 0$, $u_k(t) \equiv 0$, $v_k(t) \equiv 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда из (3.2.13) – (3.2.15) будем при всех $k \in \mathbb{N}$ иметь

$$\int\limits_0^l u(x,t)(l-x)\cos\mu_k x\,dx = 0, \quad \int\limits_0^l u(x,t)(l-x)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (3.2.11) в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что функция $u(x, t) = 0$ почти для всех $x \in [0, l]$ и при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x, t) \in C(\overline{D})$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых l, α, b и $k = p \in \mathbb{N}_0$ $(b \neq 0)$ нарушено условие (3.2.12), т.е. $d(p) = 0$, тогда однородная задача (3.2.1) – (3.2.4) (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = v_p(t)\left(A_{1p} + A_{2p}\cos\mu_p x\right), \tag{3.2.52}$$

где $v_p(t)$ определяется по формуле (3.2.31), где $\widetilde{c}_p \neq 0$ – произвольная постоянная, A_{1p} и A_{2p} – произвольные постоянные.

Действительно, с непосредственной проверкой можно показать, что функция (3.2.52) при условии $d(p) = 0$ удовлетворяет граничным условиям: $u_p(0, t) = u_p(l, t)$, $u_{px}(0, t) = 0$ при $t \in [-\alpha, \beta]$, $u_p(x, -\alpha) = 0$, $x \in [0, l]$ и условиям сопряжения:

$$u_p(x, 0+0) = u_p(x, 0-0), \quad u_{pt}(x, 0+0) = u_{pt}(x, 0-0), \quad x \in [0, l].$$

А также удовлетворяет уравнению (3.0.1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

3.2.2. Существование решения задачи

Поскольку знаменатель $d(k)$ в формулах (3.2.34), (3.2.36) и (3.2.51) совпадает с соответствующим $d(k)$ из § 3.1, то для него будут справедливы леммы 3.1.1 – 3.1.3. На основании этих лемм установим теоремы существования решения задачи 3.2.

На основании частных решений (3.2.34), (3.2.36) и (3.2.51) решение задачи (3.2.1) – (3.2.4) можно представить в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x,t)=\frac{1}{l}u_0(t)+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\cos\mu_k x+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}v_k(t)x\sin\mu_k x. \tag{3.2.53}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно числа $\widetilde{\alpha}=\alpha/l$ и функции $\psi(x)$ ряд (3.2.53) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ и там его можно почленно дифференцировать дважды по x и t при $t\le 0$ и один раз по t и дважды по x при $t>0$.

Лемма 3.2.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы* 3.1.3. *Тогда при всех k и при любом $t\in[-\alpha,0]$ справедлива оценка*

$$|\widetilde{w}_k(t)|\le Bk, \tag{3.2.54}$$

где B – положительная постоянная.

Доказательство. В силу леммы 3.1.1 из (3.2.48) имеем

$$|\widetilde{w}_k(t)|\le\frac{\mu_k}{\lambda_k|d(k)|}\sqrt{(1+t)^2+\lambda_k^2t^2}\le Bk. \quad\blacksquare$$

Лемма 3.2.2. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы* 3.1.3. *Тогда при всех $k\in\mathbb{N}$ и для любого $t\in[-\alpha,\beta]$ справедливы оценки:*

$$|v_k(t)|\le B_1k|\widetilde{\psi}_k|,\quad |v_k'(t)|\le B_2k^2|\widetilde{\psi}_k|; \tag{3.2.55}$$

$$|u_k(t)|\le B_3k(k|\widetilde{\psi}_k|+|\psi_k|),\quad |u_k'(t)|\le B_4k^2(k|\widetilde{\psi}_k|+|\psi_k|) \tag{3.2.56}$$

и при $t\in[-\alpha,0]$:

$$|v_k''(t)|\le B_5k^3|\widetilde{\psi}_k|,\quad u_k''(t)|\le B_6k^3(k|\widetilde{\psi}_k|+|\psi_k|), \tag{3.2.57}$$

B_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Пусть для определенности выполнены условия леммы 3.1.1. Для любого $t \in [0,\beta]$ из формул (3.2.34) и (3.2.51) на основании оценок (3.1.30) и (3.2.54) будем иметь:

$$|v_k(t)| = |\frac{\widetilde{\psi}_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t}| \leq \frac{1}{C_0} |\widetilde{\psi}_k| \leq \widetilde{B}_1 |\widetilde{\psi}_k|,$$

$$|v_k'(t)| = |\frac{-\lambda_k^2 \widetilde{\psi}_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t}| \leq \frac{\lambda_k^2}{C_0} |\widetilde{\psi}_k| \leq \widetilde{B}_2 k^2 |\widetilde{\psi}_k|;$$

$$|u_k(t)| = \left| \left(\psi_k + \widetilde{\psi}_k (2\mu_k t - \widetilde{w}_k(-\alpha))\right) \frac{e^{-\lambda_k^2 t}}{d(k)} \right| \leq$$

$$\leq \widetilde{B}_3 |\psi_k| + \widetilde{B}_4 k |\widetilde{\psi}_k| + |2\mu_k \widetilde{\psi}_k| \leq \widetilde{B}_5 \left(k|\widetilde{\psi}_k| + |\psi_k|\right),$$

$$|u_k'(t)| \leq \frac{2\mu_k |\widetilde{\psi}_k|}{d(k)} + \frac{\lambda_k^2 \widetilde{B}_5}{|d(k)|} \left(|\psi_k| + k|\widetilde{\psi}_k|\right) \leq \widetilde{B}_6 \left(k^2 (|\psi_k| + k|\widetilde{\psi}_k|)\right).$$

Аналогично на основании формул (3.2.34) и (3.2.51) при $t \in [-\alpha, 0]$ получим

$$|v_k(t)| = |\frac{\widetilde{\psi}_k}{d(k)} (\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t)| \leq \frac{|\widetilde{\psi}_k|}{C_0} \sqrt{1+\lambda_k^2} \leq \widetilde{B}_7 k |\widetilde{\psi}_k|,$$

$$|v_k'(t)| = |\frac{\widetilde{\psi}_k \lambda_k}{d(k)} (\sin\lambda_k t + \lambda_k \cos\lambda_k t)| \leq \frac{\lambda_k |\widetilde{\psi}_k|}{C_0} \sqrt{1+\lambda_k^2} \leq \widetilde{B}_8 k^2 |\widetilde{\psi}_k|,$$

$$|u_k(t)| \leq \widetilde{B}_9 k (k|\widetilde{\psi}_k| + |\psi_k|),$$

$$|u_k'(t)| \leq \widetilde{B}_{10} k^2 (k|\widetilde{\psi}_k| + |\psi_k|).$$

Из уравнений (3.2.26) и (3.2.30) при $t \in [-\alpha, 0]$ найдем

$$|v_k''(t)| = \lambda_k^2 |v_k(t)| \leq \widetilde{B}_{11} k^3 |\widetilde{\psi}_k|,$$

$$|u_k''(t)| = |2\mu_k v_k(t) - \lambda_k^2 u_k(t)| \leq \widetilde{B}_{12} k^3 (k|\widetilde{\psi}_k| + |\psi_k|).$$

Из полученных оценок для функций $v_k(t)$, $v_k'(t)$, $u_k(t)$, $u_k'(t)$ при $t \in [0,\beta]$ и $t \in [-\alpha, 0]$ следует справедливость леммы. ■

Лемма 3.2.3. *Если выполнены условия леммы* 3.1.2, *то при всех* $k > k_0$ *справедливы оценки* (3.2.55) – (3.2.57).

Пусть выполнены условия леммы 3.1.1 или леммы 3.1.3. Тогда ряд (3.2.53) и ряды из производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, ряды из производных второго порядка соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ на основании оценок (3.2.55) – (3.2.57) мажорируются числовым рядом

$$C_6 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 \left(k|\widetilde{\psi}_k| + |\psi_k| \right). \tag{3.2.58}$$

Лемма 3.2.4. *Если $\psi(x) \in C^4[0,l]$ и на сегменте $[0,l]$ имеет кусочно-непрерывную производную пятого порядка и $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = 0, 2, 4$, $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, 3$, то*

$$\widetilde{\psi}_k = \frac{\widetilde{\psi}_k^{(5)}}{\mu_k^5}, \quad \psi_k = -\frac{\psi_k^{(5)}}{\mu_k^5} + \frac{5\widetilde{\psi}_k^{(5)}}{\mu_k^6},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [\widetilde{\psi}_k^{(5)}]^2 \le \frac{8}{l} \|\psi^{(V)}\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} [\psi_k^{(5)}]^2 \le 8l \|\psi^{(V)}\|^2_{L_2[0,l]}.$$

Доказательство. Интегрируем по частям пять раз в интеграле из равенства (3.2.32). Тогда с учетом условий леммы получим

$$\widetilde{\psi}_k = \frac{4}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx = \frac{\widetilde{\psi}_k^{(5)}}{\mu_k^5},$$

где

$$\widetilde{\psi}_k^{(5)} = \frac{4}{l} \int\limits_0^l \psi^{(V)}(x) \cos \mu_k x \, dx.$$

Аналогично, интегрируя по частям пять раз в интеграле (3.2.49), имеем

$$\psi_k = \frac{4}{l} \int\limits_0^l \psi(x)(l - x) \cos \mu_k x \, dx = \frac{4}{l} I,$$

$$I = \int\limits_0^l \psi(x)(l - x) \cos \mu_k x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{\mu_k} \int\limits_0^l \psi'(x)(l - x) \sin \mu_k x \, dx + \frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{\mu_k} I_1 + \frac{1}{\mu_k^2} I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_0^l \psi'(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^l \psi''(x)(l-x)\cos\mu_k x\,dx + \frac{1}{\mu_k^2}\int\limits_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\,dx,$$

$$I_2 = \int\limits_0^l \psi'(x)\cos\mu_k x\,dx = -\frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

Тогда

$$I = -\frac{1}{\mu_k^2}\int\limits_0^l \psi''(x)(l-x)\cos\mu_k x\,dx - \frac{2}{\mu_k^3}\int\limits_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\mu_k^2}M_1 - \frac{2}{\mu_k^3}M_2.$$

По аналогии с интегралом I вычислим M_1 и M_2:

$$M_1 = \int\limits_0^l \psi''(x)(l-x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\mu_k^2}\int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x)(l-x)\cos\mu_k x\,dx - \frac{2}{\mu_k^3}\int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x)\sin\mu_k x\,dx,$$

$$M_2 = \int\limits_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\,dx = -\frac{1}{\mu_k)^2}\int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

Тогда интеграл I примет вид

$$I = \frac{1}{\mu_k^4}\int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x)(l-x)\cos\mu_k x\,dx + \frac{4}{\mu_k^5}\int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x)\sin\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^4}M_3 + \frac{4}{\mu_k^5}M_4.$$

Снова интегрируя по частям в интегралах M_3 и M_4, получим

$$M_3 = -\frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^l \psi^{(V)}(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx + \frac{1}{\mu_k^2}\int\limits_0^l \psi^{(V)}(x)\cos\mu_k x\,dx,$$

$$M_4 = \frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^l \psi^{(V)}(x)\cos\mu_k x\,dx.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\psi_k = -\frac{4}{l\mu_k^5}\int\limits_0^l \psi^{(V)}(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx + \frac{20}{l\mu_k^6}\int\limits_0^l \psi^{(V)}(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= -\frac{\psi_k^{(5)}}{\mu_k^5} + \frac{5\widetilde{\psi}_k^{(5)}}{\mu_k^6},$$

где

$$\psi_k^{(5)} = \frac{4}{l}\int\limits_0^l \psi^{(V)}(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx.$$

В силу неравенств Коши–Буняковского и Бесселя для ортонормированных систем функции имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}[\psi_k^{(5)}]^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi^{(V)}(x), \frac{4}{l}(l-x)\sin\mu_k x\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi^{(V)}(x)(l-x), \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x\right)^2 \le 8l||\psi^{(V)}||^2_{L_2[0,l]},$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[\widetilde{\psi}_k^{(5)}]^2 = |\widetilde{\psi}_0^{(5)}|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}[\widetilde{\psi}_k^{(5)}]^2 =$$

$$= \frac{8}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi^{(V)}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\right)^2 \le \frac{8}{l}||\psi^{(V)}||^2_{L_2[0,l]}. \quad \blacksquare$$

При выполнении условий леммы 3.2.4 ряд (3.2.58) оценивается числовым рядом

$$B_8\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}|\psi_k^{(5)}| + |\widetilde{\psi}_k^{(5)}|\right). \tag{3.2.59}$$

В силу сходимости ряда (3.2.59) функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.2.53), ее производные $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$, а производные второго порядка u_{tt}, u_{xx} непрерывны в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_-$ и $\overline{D}_+$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.2.53), удовлетворяет условию (3.2.1). Подставляя ряд (3.2.53) в уравнение (3.0.1), получим

$$Lu = u_t - u_{xx} + b^2 u = \frac{1}{l}\Big[u_0'(t) + b^2 u_0(t)\Big] +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big\{\Big[u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) - 2\mu_k v_k(t)\Big]\cos\mu_k x +$$

$$+\Big[v_k'(t) + \lambda_k^2 v_k(t)\Big] x\sin\mu_k x\Big\} \equiv 0, \quad t > 0,$$

$$Lu = u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = \frac{1}{l}\Big[u_0''(t) + b^2 u_0(t)\Big] +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big\{\Big[u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) - 2\mu_k v_k(t)\Big]\cos\mu_k x +$$

$$+\Big[v_k''(t) + \lambda_k^2 v_k(t)\Big] x\sin\mu_k x\Big\} \equiv 0, \quad t < 0.$$

Следовательно, функция (3.2.53) удовлетворяет и условию (3.2.2).

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1.1 *или* 3.1.3 *и функция* $\psi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.2.4, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (3.2.1) – (3.2.4) *и оно определяется рядом* (3.2.53), *и* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 3.1.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $d(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи (3.2.1) – (3.2.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^l \psi(x)(l-x)\cos\mu_k x\,dx = \int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{3.2.60}$$

В этом случае решение задачи (3.2.1) – (3.2.4) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \frac{1}{l}u_0(t) + \frac{1}{l}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right) u_k(t)\cos\mu_k x +$$

$$+\frac{1}{l}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)v_k(t)x\sin\mu_k x+\sum_p u_p(x,t), \tag{3.2.61}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2 \ldots, k_m$, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (3.2.52).

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 3.2.4. *Тогда, если $d(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи* (3.2.1) – (3.2.4) *и это решение $u(x,t)$ определяется рядом* (3.2.53)*; если $d(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leq k_0$, то задача* (3.2.1) – (3.2.4) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (3.2.60) *и решение $u(x,t)$ в этом случае определяется в виде суммы ряда* (3.2.61)*, при этом $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C^2_x(\overline{D}_+)$.*

§ 3.3. Краевая задача с нелокальным граничным условием второго рода

Рассмотрим уравнение (3.0.1) в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ и для него исследуем следующую нелокальную задачу.

3.3.1. Постановка задачи. Единственность решения

Задача 3.3. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+); \tag{3.3.1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{3.3.2}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t), \quad u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{3.3.3}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3.3.4}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция,

$$\psi'(0) = \psi'(l), \quad \psi(l) = 0.$$

Решение задачи 3.3 будем искать методом разделения переменных: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя данное произведение в уравнение (3.0.1), относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.3.5}$$

$$X'(0) = X'(l), \quad X(l) = 0, \tag{3.3.6}$$

где μ – постоянная, которая совпадает с сопряженной задачей (3.2.9) и (3.2.10) из § 3.2. Следовательно, спектральная задача (3.3.5) и (3.3.6) имеет те же собственные значения $\mu_k = 2\pi k/l$, $k \in \mathbb{N}_0$ и систему корневых функций (3.2.11):

$$\left\{ \frac{2(l-x)}{l},\ \frac{4(l-x)}{l}\cos\mu_k x,\ \frac{4}{l}\sin\mu_k x \right\}. \tag{3.3.7}$$

А сопряженной по отношению задачи (3.3.5) и (3.3.6) является задача (3.2.5) и (3.2.6). Поэтому наряду с системой (3.3.7) рассмотрим систему

$$\left\{ \frac{1}{l},\ \frac{1}{l}\cos\mu_k x,\ \frac{x}{l}\sin\mu_k x \right\}. \tag{3.3.8}$$

Системы функций (3.3.7) и (3.3.8) образуют биортогональную систему.

Теорема 3.3.1. *Если существует решение нелокальной задачи* (3.3.1) – (3.3.4), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}_0$ *выполнены условия* (3.1.21):

$$d(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha \neq 0. \tag{3.3.9}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3.3.1) – (3.3.4). На основании системы (3.3.8) рассмотрим функции

$$\overline{u}_k(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx,\ \ k = 1, 2, \dots\ , \tag{3.3.10}$$

$$\overline{u}_0(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\,dx, \tag{3.3.11}$$

$$\overline{v}_k(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,t)x\sin\mu_k x\,dx,\ \ k = 1, 2, \dots\ . \tag{3.3.12}$$

На основе системы (3.3.10) – (3.3.12) введем в рассмотрение функции

$$\overline{u}_{k,\varepsilon}(t)=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)\cos\mu_k x\,dx,\;\;k=1,2,\ldots\;, \tag{3.3.13}$$

$$\overline{u}_{0,\varepsilon}(t)=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)\,dx, \tag{3.3.14}$$

$$\overline{v}_{k,\varepsilon}(t)=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)x\sin\mu_k x\,dx,\;\;k=1,2,\ldots\;. \tag{3.3.15}$$

Дифференцируя (3.3.13) по t при $t>0$ один раз, а при $t<0$ два раза с учетом уравнения (3.0.1), получим

$$\overline{u}'_{k,\varepsilon}(t)=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx-b^2\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)\cos\mu_k x\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx-b^2\overline{u}_{k,\varepsilon}(t),\quad t>0, \tag{3.3.16}$$

$$\overline{u}''_{k,\varepsilon}(t)=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx-b^2\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u(x,t)\cos\mu_k x\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx-b^2\overline{u}_{k,\varepsilon}(t),\quad t<0. \tag{3.3.17}$$

Интегрируя по частям в следующем интеграле, будем иметь

$$J=\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx=$$

$$=u_x(x,t)\cos\mu_k x\,\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}+\mu_k u(x,t)\sin\mu_k x\,\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-$$

$$-\mu_k^2\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,t)\cos\mu_k x\,dx.$$

Подставив J в (3.3.16), (3.3.17) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (3.3.3), получим, что функции $\overline{u}_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\overline{u}_k'(t) + \lambda_k^2 \overline{u}_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.3.18}$$

$$\overline{u}_k''(t) + \lambda_k^2 \overline{u}_k(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.3.19}$$

граничному условию

$$\overline{u}_k(-\alpha) = \frac{1}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \mu_k x \, dx = \psi_k \tag{3.3.20}$$

и в силу (3.1.1) условиям сопряжения

$$\overline{u}_k(0-0) = \overline{u}_k(0+0), \quad \overline{u}_k'(0-0) = \overline{u}_k'(0+0). \tag{3.3.21}$$

Рассуждая аналогично § 3.2 получим, что единственное решение задачи (3.3.18) – (3.3.21) существует и имеет вид

$$\overline{u}_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_k}{d(k)} (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t), & t < 0, \end{cases} \tag{3.3.22}$$

когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (3.3.9), т.е.

$$d(k) = \cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha \neq 0.$$

Найдем теперь явный вид функции $\overline{u}_0(t)$. Дифференцируя (3.3.14) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза в силу уравнения (3.0.1), имеем

$$\overline{u}_{0,\varepsilon}'(t) = \frac{1}{l} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t) \, dx - \frac{b^2}{l} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) \, dx, \quad t > 0,$$

$$\overline{u}_{0,\varepsilon}''(t) = \frac{1}{l} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t) \, dx - \frac{b^2}{l} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) \, dx, \quad t < 0.$$

Первый интеграл из правой части последних равенств равен

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t)\,dx = u_x(l-\varepsilon,t) - u_x(\varepsilon,t).$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условия (3.3.3), имеем $u_x(l,t) - u_x(0,t) = 0$. Следовательно, $\overline{u}_0(t)$ является решением следующей задачи:

$$\overline{u}_0'(t) + b^2\overline{u}_0(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.3.23}$$

$$\overline{u}_0''(t) + b^2\overline{u}_0(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.3.24}$$

$$\overline{u}_0(-\alpha) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \psi(x)dx = \psi_0, \tag{3.3.25}$$

$$\overline{u}_0(0-0) = \overline{u}_0(0+0), \quad \overline{u}_0'(0-0) = \overline{u}_0'(0+0). \tag{3.3.26}$$

Единственное решение задачи (3.3.23) – (3.3.26) представляется в виде

$$\overline{u}_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_0}{d(0)}e^{-b^2t}, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_0}{d(0)}(\cos bt - b\sin bt), & t < 0, \end{cases} \tag{3.3.27}$$

которое можно было получить из формулы (3.3.22) при $k = 0$. В случае $b = 0$ имеем $\overline{u}_0(t) = \psi_0$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$.

Дифференцируя (3.3.15) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза с учетом уравнения (3.0.1), получим

$$\overline{v}_{k,\varepsilon}'(t) = \frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t)x\sin\mu_k x\,dx - b^2\overline{v}_{k,\varepsilon}(t), \quad t > 0, \tag{3.3.28}$$

$$\overline{v}_{k,\varepsilon}''(t) = \frac{1}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t)x\sin\mu_k x\,dx - b^2\overline{v}_{k,\varepsilon}(t), \quad t < 0. \tag{3.3.29}$$

Проинтегрируем по частям два раза в интеграле:

$$J_1 = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}x\sin\mu_k x\,dx = u_x\sin\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} -$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x \sin\mu_k x\,dx - \mu_k \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x x\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= u_x \sin\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - J_2 - \mu_k J_3,$$

$$J_2 = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x \sin\mu_k x\,dx = u(x,t)\sin\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \mu_k \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\cos\mu_k x\,dx,$$

$$J_3 = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x x\cos\mu_k x\,dx = u(x,t)x\cos\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} -$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\cos\mu_k x\,dx + \mu_k \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x\sin\mu_k x\,dx.$$

С учетом значений интегралов J_2 и J_3 интеграл J_1 принимает вид

$$J_1 = u_x \sin\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - u(x,t)\sin\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \mu_k u(x,t)x\cos\mu_k x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} +$$

$$+2\mu_k \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\cos\mu_k x\,dx - \mu_k^2 \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x\sin\mu_k x\,dx.$$

Подставив J_1 в (3.3.28), (3.3.29) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $\overline{v}_k(t)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\overline{v}_k{}'(t) + \left(\mu_k^2 + b^2\right)\overline{v}_k(t) = 2\mu_k \overline{u}_k(t), \quad t > 0, \tag{3.3.30}$$

$$\overline{v}_k{}''(t) + \left(\mu_k^2 + b^2\right)\overline{v}_k(t) = 2\mu_k \overline{u}_k(t), \quad t < 0, \tag{3.3.31}$$

граничному условию

$$\overline{v}_k(-\alpha) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \psi(x)x\sin\mu_k x\,dx = \widetilde{\psi}_k \tag{3.3.32}$$

и условиям сопряжения

$$\overline{v}_k(0-0) = \overline{v}_k(0+0), \quad \overline{v}'_k(0-0) = \overline{v}'_k(0+0). \tag{3.3.33}$$

Общее решение уравнений (3.3.30) и (3.3.31) построим методом вариации постоянных. Общее решение неоднородного уравнения (3.3.30) имеет вид

$$\overline{v}_k(t) = c_k e^{-\lambda_k^2 t} + 2\mu_k e^{-\lambda_k^2 t} \int \overline{u}_k(t) e^{\lambda_k^2 t} dt, \tag{3.3.34}$$

c_k – произвольная постоянная.

Подставляя функцию $\overline{u}_k(t)$, определенной по формуле (3.3.22) при $t > 0$, в (3.3.34), найдем

$$\overline{v}_k(t) = c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \frac{2\mu_k \psi_k}{d_\alpha(k)} t e^{-\lambda_k^2 t}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3.35}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3.3.31) определяется по формуле

$$\overline{v}_k(t) = a_k(t) \cos \lambda_k t + b_k(t) \sin \lambda_k t, \tag{3.3.36}$$

где неизвестные функции $a_k(t)$ и $b_k(t)$ находятся из системы:

$$\begin{cases} a_k'(t) \cos \lambda_k t + b_k'(t) \sin \lambda_k t = 0, \\ -a_k'(t) \lambda_k \sin \lambda_k t + b_k'(t) \lambda_k \cos \lambda_k t = 2\mu_k \overline{u}_k(t). \end{cases}$$

Из этой системы с учетом формулы (3.3.22) при $t < 0$ получим

$$a_k'(t) = -\frac{2\mu_k \psi_k (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t)}{\lambda_k d(k)} \sin \lambda_k t,$$

$$b_k'(t) = \frac{2\mu_k \psi_k (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t)}{\lambda_k d(k)} \cos \lambda_k t.$$

Из этих дифференциальных уравнений найдем

$$a_k(t) = -\frac{2\mu_k \psi_k}{\lambda_k d(k)} \left[\frac{\sin^2 \lambda_k t}{2\lambda_k} + \frac{\sin 2\lambda_k t}{4} - \frac{\lambda_k t}{2} \right] + a_k, \tag{3.3.37}$$

$$b_k(t) = -\frac{2\mu_k \psi_k}{\lambda_k d(k)} \left[\frac{\sin^2 \lambda_k t}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k t}{4\lambda_k} - \frac{t}{2} \right] + b_k, \tag{3.3.38}$$

здесь a_k и b_k – произвольные постоянные. Подставляя (3.3.37) и (3.3.38) в (3.3.36), будем иметь

$$\overline{v}_k(t) = a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t + \overline{w}_k(t), \tag{3.3.39}$$

где

$$\overline{w}_k(t) = \frac{\mu_k \psi_k}{\lambda_k d(k)} \Big[t(\lambda_k \cos \lambda_k t + \sin \lambda_k t) - \sin \lambda_k t \Big]. \tag{3.3.40}$$

Заметим, что функция (3.3.40) удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$\overline{w}_k(0-0) = 0, \quad \overline{w}_k'(0-0) = 0.$$

Таким образом, функция $\overline{v}_k(t)$ при $t > 0$ и $t < 0$ построена и в силу формул (3.3.35) и (3.3.39) окончательно имеет вид

$$\overline{v}_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2\mu_k \psi_k}{d(k)} e^{-\lambda_k^2 t} t + c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t + \overline{w}_k(t), & t < 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.3.41}$$

Функции (3.3.41) удовлетворяют условиям (3.3.33) только тогда, когда

$$a_k = c_k \ \text{ и } \ b_k = -c_k \lambda_k + \frac{2\mu_k \psi_k}{\lambda_k d(k)}.$$

С учетом последних равенств функции (3.3.41) принимают вид

$$\overline{v}_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{2\mu_k \psi_k}{d(k)} t e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k(\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t) + \psi_k \widetilde{w}_k(t), & t < 0, \end{cases} \tag{3.3.42}$$

здесь

$$\widetilde{w}_k(t) = \frac{\mu_k}{\lambda_k d(k)} \Big[(1+t) \sin \lambda_k t + \lambda_k t \cos \lambda_k t \Big].$$

Для нахождения постоянных c_k воспользуемся граничным условием (3.3.32) и формулой (3.3.42):

$$\overline{v}_k(-\alpha) = \frac{1}{l} \int\limits_0^l u(x, -\alpha) x \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= \frac{1}{l} \int\limits_0^l \psi(x) x \sin \mu_k x \, dx = \widetilde{\psi}_k, \ \ k = 1, 2, \ \ldots \quad . \tag{3.3.43}$$

Тогда из (3.3.42) и (3.3.43) при условии $d(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_k = \frac{\widetilde{\psi}_k}{d(k)} - \frac{\psi_k \widetilde{w}_k(-\alpha)}{d(k)}. \tag{3.3.44}$$

Подставив (3.3.44) в (3.3.42), найдем окончательный вид функций

$$\overline{v}_k(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda_k^2 t}}{d(k)}\left[\widetilde{\psi}_k + \psi_k(2\mu_k t - \widetilde{w}_k(-\alpha))\right], & t > 0, \\ \dfrac{1}{d(k)}\Big\{\widetilde{\psi}_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t) + \\ +\psi_k\left[d(k)\widetilde{w}_k(t) - (\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t)\widetilde{w}_k(-\alpha)\right]\Big\}, & t < 0. \end{cases} \tag{3.3.45}$$

Из формул (3.3.22), (3.3.27), (3.3.45) при условий (3.3.9) следует единственность решения задачи (3.3.1) – (3.3.4), так как, если $\psi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$, то $\overline{u}_k(t) = 0$, $\overline{u}_0(t) = 0$, $\overline{v}_k(t) = 0$. Тогда из (3.3.10) – (3.3.12) будем иметь

$$\int_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx = 0,\ \ k = 1, 2,\ \dots,$$

$$\int_0^l u(x,t)\,dx = 0,$$

$$\int_0^l u(x,t)x\sin\mu_k x\,dx = 0,\ \ k = 1, 2,\ \dots.$$

Отсюда в силу полноты системы (3.3.8) в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что функция $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha,\beta]$.

Пусть при некоторых l, α и $k = p \in \mathbb{N}_0$ $(b \neq 0)$ нарушено условие (3.3.9), тогда однородная задача 3.3 (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \overline{u}_p(t)\sin\mu_p x, \tag{3.3.46}$$

где $\overline{u}_p(t)$ определяется по формуле

$$\overline{u}_p(t) = \begin{cases} c_p e^{-\lambda_p^2 t}, & t > 0, \\ c_p(\cos\lambda_p t - \lambda_k\sin\lambda_p t), & t < 0, \end{cases}$$

$c_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

Действительно, с непосредственной проверкой можно показать, что функция (3.3.46) при условии $d(p) = 0$ удовлетворяет граничным условиям: $u_{px}(0,t) = u_{px}(l,t)$, $u_p(l,t) = 0$ при $t \in [-\alpha,\beta]$, $u_p(x,-\alpha) = 0$, $x \in [0,l]$; условиям сопряжения: $u_p(x,0+0) = u_p(x,0-0)$, $u_{pt}(x,0+0) = u_{pt}(x,0-0)$, $x \in [0,l]$, а также удовлетворяет уравнению (3.0.1) на множестве $D_+ \cup D_-$. ■

3.3.2. Существование решения задачи

Поскольку знаменатель $d(k)$ в формулах (3.2.34), (3.2.36) и (3.2.51) совпадает с соответствующим $d(k)$ из § 3.1, то для него будут справедливы леммы 3.1.1 – 3.1.3. На основании этих лемм установим теоремы существования решения задачи 3.3.

На основании частных решений (3.3.22), (3.3.27) и (3.3.45) решение задачи 3.3 можно представить в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x,t)=\frac{2(l-x)}{l}\overline{u}_0(t)+\frac{4(l-x)}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\overline{u}_k(t)\cos\mu_k x+\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\overline{v}_k(t)\sin\mu_k x. \tag{3.3.47}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно числа $\widetilde{\alpha}=\alpha/l$ и функции $\psi(x)$ ряд (3.3.47) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ и там его можно почленно дифференцировать дважды по x и t при $t\le 0$, один раз по t и дважды по x при $t>0$.

Лемма 3.3.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы* 3.1.3. *Тогда для любого $t\in[-\alpha,\beta]$ при всех k справедливы оценки:*

$$|\overline{u}_k(t)|\le C_1k|\psi_k|,\quad |\overline{u}'_k(t)|\le C_2k^2|\psi_k|;$$

$$|\overline{v}_k(t)|\le C_3\left(k^2|\psi_k|+k|\widetilde{\psi}_k|\right),\quad |\overline{v}'_k(t)|\le C_4\left(k^3|\psi_k|+k^2|\widetilde{\psi}_k|\right),$$

и при $t\in[-\alpha,0]$:

$$|\overline{u}''_k(t)|\le C_5k^3|\psi_k|,\quad |\overline{v}''_k(t)|\le C_6k^4\left(|\psi_k|+k^3|\widetilde{\psi}_k|\right),$$

где C_i – здесь и в дальнейшем положительные постоянные.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.1.4.

В силу леммы 3.3.1 ряд (3.3.47) и ряды из производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, ряды из производных второго порядка соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ мажорируются числовым рядом

$$C_7\sum_{k=1}^{+\infty}k^3\left(k|\psi_k|+|\widetilde{\psi}_k|\right). \tag{3.3.48}$$

Лемма 3.3.2. *Если $\psi(x)\in C^4[0,l]$ и на сегменте имеет кусочно-непрерывную производную пятого порядка и $\psi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$, $\psi^{(j)}(0)=\psi^{(j)}(l)$, $j=1,3$, то*

$$\psi_k=\frac{\psi_k^{(5)}}{\mu_k^5},\qquad \widetilde{\psi}_k=-\frac{\widetilde{\psi}_k^{(5)}}{\mu_k^5}+\frac{3\psi_k^{(5)}}{\mu_k^6},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}[\psi_k^{(5)}]^2 \leq \frac{1}{2l}\int_0^l [\psi^{(V)}(x)]^2 dx, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}[\widetilde{\psi}_k^{(5)}]^2 \leq \frac{1}{2l}\int_0^l [\psi^{(V)}(x)]^2 dx.$$

Доказательство. Интегрируем по частям пять раз в интеграле из соотношения (3.3.20). Тогда с учетом условий леммы получим

$$\psi_k = J = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{l\mu_k^5}\int_0^l \psi^{(V)}(x)\sin\mu_k x\,dx = -\frac{\psi_k^{(5)}}{\mu_k^5},$$

где

$$\psi_k^{(5)} = \frac{1}{l}\int_0^l \psi^{(V)}(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

Теперь рассмотрим интеграл из (3.3.32) и, интегрируя по частям, будем иметь

$$\widetilde{\psi}_k = I = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)x\sin\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{1}{l\mu_k}\int_0^l \psi'(x)x\cos\mu_k x\,dx - \frac{1}{l\mu_k^2}\int_0^l \psi'(x)\sin\mu_k x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{l\mu_k^2}I_1 + \frac{1}{l\mu_k}I_2,$$

$$I_1 = \int_0^l \psi'(x)\sin\mu_k x\,dx = \frac{1}{\mu_k}\int_0^l \psi''(x)\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_k}\int_0^l \psi''(x)\cos\mu_k x)\,dx = \frac{1}{\mu_k}I_3.$$

По аналогии вычисления интеграла J имеем

$$I_3 = \frac{1}{\mu_k^3}\int_0^l \psi^{(V)}(x)\sin\mu_k x\,dx. \tag{3.3.49}$$

Тогда интеграл I_1 примет вид

$$I_1 = \frac{1}{\mu_k^4} \int\limits_0^l \psi^{(V)}(x) \sin \mu_k x \, dx.$$

Теперь интегрируем по частям в интеграле I_2:

$$I_2 = \int\limits_0^l \psi'(x) x \cos \mu_k x \, dx = -\frac{1}{\mu_k} \int\limits_0^l \psi''(x) x \sin \mu_k x \, dx -$$

$$-\frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi''(x) \cos \mu_k x \, dx = -\frac{1}{\mu_k} I_4 - \frac{1}{\mu_k^2} I_3. \tag{3.3.50}$$

Аналогично интегралу I интегрируем по частям в I_4:

$$I_4 = \int\limits_0^l \psi''(x) x \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_k} \int\limits_0^l \psi'''(x) x \cos \mu_k x \, dx - \frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi'''(x) \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{\mu_k^2} \int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x) x \sin \mu_k x \, dx - \frac{2}{\mu_k^3} \int\limits_0^l \psi^{(IV)}(x) \cos \mu_k x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^3} \int\limits_0^l \psi^{(V)}(x) x \cos \mu_k x \, dx - \frac{1}{\mu_k^4} \int\limits_0^l \psi^{(V)} \sin \mu_k x \, dx +$$

$$+ \frac{2}{\mu_k^4} \int\limits_0^l \psi^{(V)} \sin \mu_k x \, dx \tag{3.3.51}$$

Тогда, подставляя (3.3.51) и (3.3.49) в (3.3.50), найдем значение I_2. Затем с учетом значений интегралов I_1 и I_2 получим

$$\widetilde{\psi}_k = -\frac{1}{l\mu_k^5} \int\limits_0^l \psi^{(V)}(x) x \cos \mu_k x \, dx + \frac{3}{l\mu_k^6} \int\limits_0^l \psi^{(V)}(x) \sin \mu_k x \, dx =$$

$$= -\frac{\widetilde{\psi}_k^{(5)}}{\mu_k^5} + \frac{3\psi_k^{(5)}}{\mu_k^6},$$

где

$$\widetilde{\psi}_k^{(5)} = \frac{1}{l}\int_0^1 \psi^{(V)}(x) x \cos\mu_k x\,dx, \quad \psi_k^{(5)} = \frac{1}{l}\int_0^1 \psi^{(V)}(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

По условию функция $\psi^{(V)}(x)$ кусочно-непрерывна на $[0,l]$, поэтому на основании неравенств Коши–Буняковского и Бесселя будем иметь

$$\sum_{k=1}^{+\infty}[\psi_k^{(5)}]^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi^{(V)}(x), \frac{1}{l}\sin\mu_k x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi^{(V)}(x), \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x\right)^2 \leq \frac{1}{2l}\int_0^l [\psi^{(V)}(x)]^2\,dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}[\widetilde{\psi}_k^{(5)}]^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\psi^{(V)}(x), \frac{x}{l}\cos\mu_k x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(x\psi^{(V)}(x), \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\right)^2 \leq \frac{1}{2l}\int_0^l [\psi^{(V)}(x)]^2\,dx. \qquad \blacksquare$$

При выполнении условий леммы 3.3.2 ряд (3.3.48) оценивается числовым рядом

$$B_8\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(|\psi_k^{(5)}| + \frac{1}{k}|\widetilde{\psi}_k^{(5)}|\right). \tag{3.3.52}$$

В силу сходимости ряда (3.3.52) функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.3.47), ее производные $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$, а производные второго порядка u_{tt}, u_{xx} непрерывны в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_-$ и $\overline{D}_+$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.3.47), удовлетворяет условиям (3.3.1) и (3.3.2).

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.3.2. *Если выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы* 3.1.3 *и функция* $\psi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.3.2, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* 3.3 *и оно определяется рядом* (3.3.47), *и* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 3.1.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1, m}$, m – заданные натуральные числа, $d(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи 3.3 необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^l \psi(x) \cos \mu_k x \, dx = \int\limits_0^l \psi(x) x \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{3.3.53}$$

В этом случае решение задачи 3.3 определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \frac{2(l-x)}{l} \overline{u}_0(t) +$$

$$+ \frac{4(l-x)}{l} \left(\sum_{k=1}^{k_1 - 1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m - 1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) \overline{u}_k(t) \cos \mu_k x +$$

$$+ \frac{4}{l} \left(\sum_{k=1}^{k_1 - 1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m - 1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) \overline{v}_k(t) \sin \mu_k x + \sum_p u_p(x,t), \tag{3.3.54}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2 \ldots, k_m$, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (3.3.46), если в конечных суммах в правой части (3.3.54) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 3.3.2. *Тогда, если $d(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи* 3.3 *и это решение определяется рядом* (3.3.47)*; если $d(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \le k_0$, то задача* 3.3 *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (3.3.53)*, и решение $u(x,t)$ в этом случае определяется в виде суммы ряда* (3.3.54)*, при этом $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.*

§ 3.4. Краевая задача с нелокальным интегральным условием

3.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ \ 0 < x < l, \ \ -\alpha < t < \beta\}$, где l, α и β – заданные положительные действительные числа, и следующую нелокальную задачу с интегральным условием Самарского–Ионкина.

Задача 3.4. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+); \tag{3.4.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D \cup D_+; \tag{3.4.3}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{3.4.4}$$

$$u(0,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{3.4.5}$$

$$\int_0^l u(x,t)\,dx = A = \mathrm{const}, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{3.4.6}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\varphi(0) = 0, \quad \int_0^l \varphi(x)dx = A. \tag{3.4.7}$$

Как видим, что граничное условие (3.4.6) является нелокальным. Такое интегральное условие возникло в работах [144, 43, 37], например, в [37] при изучении вопроса об устойчивости разреженной плазмы. Физически нелокальное условие (3.4.6) означает постоянство внутренней энергии плазмы (или, что то же самое в линейном случае, постоянство ее средней температуры).

Отметим, что краевая задача с граничными условиями (3.4.4) – (3.4.6) впервые изучалась в работе [37] для уравнения теплопроводности в области D_+ методами спектрального анализа.

Если интегрировать при фиксированном t по переменной x от ε до $l-\varepsilon$, ε – достаточно малое число, уравнение (3.4.1), то получим

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_t\,dx - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}\,dx = 0, \quad t \in (0,\beta),$$

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}\,dx - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}\,dx = 0, \quad t \in (-\alpha,0).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^l u\,dx\right) - u_x(l,t) + u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^l u\,dx\right) - u_x(l,t) + u_x(0,t) = 0, \quad t \leq 0,$$

т.е. нелокальное интегральное условие (3.4.6) переходит к дифференциальному нелокальному условию

$$u_x(0,t) = u_x(l,t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{3.4.8}$$

выражающему равенство потоков через стороны $x=0$ и $x=l$ прямоугольника D.

Итак, мы в дальнейшем вместо задачи (3.4.2) – (3.4.6) будем изучать задачу (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8). В этом параграфе методом спектрального анализа будет установлен критерий единственности решения задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8). При определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ и числа l, α само решение определяется в виде суммы биортогонального ряда. Установлена устойчивость решения по начальному условию (3.4.4) в нормах пространств $L_2[0,l]$, $C(\overline{D})$ и $W_2^n(0,l)$, $n \in \mathbb{N}$.

3.4.2. Единственность решения задачи

Решение задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) будем искать методом разделения переменных: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя данное произведение в уравнение (3.4.1), относительно $X(x)$ получим спектральную задачу

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.4.9}$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(l), \tag{3.4.10}$$

где μ – постоянная, которая почти совпадает со спектральной задачей (3.3.5) и (3.3.6). Как известно [37, 33], спектральная задача (3.4.9) и (3.4.10) является несамосопряженной и имеет следующую систему собственных чисел и собственных и присоединенных функций:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_k = \frac{2\pi k}{l}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.4.11}$$

$$Z_k(x) = \left\{ \frac{x}{l}, \ \frac{1}{l} \sin \mu_k x, \ \frac{x}{l} \cos \mu_k x \right\}. \tag{3.4.12}$$

Отметим, что здесь каждому собственному значению μ_k из (3.4.11), кроме нулевого, отвечает одна собственная функция $X_k(x) = \frac{1}{l} \sin \mu_k x$ и одна присоединенная функция $\widetilde{X}_k(x) = \frac{x}{l} \cos \mu_k x$[1]. Согласно теореме Келдыша [52], система корневых функций (3.4.12) задачи (3.4.9) и (3.4.10) является полной в $L_2[0, l]$. Но для решения исходной задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) одной полноты системы функций (3.4.12) не достаточно, т.е. система (3.4.12) дополнительно обладала свойством базисности. Тогда по этой системе можно однозначно разложить в ряд любую функцию из $L_2[0, l]$. Для этого рассмотрим сопряженную задачу:

$$Y''(x) + \mu^2 Y(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$Y(0) = Y(l), \quad Y'(l) = 0,$$

которая имеет те же собственные значения, но другую систему корневых функций:

$$Y_k(x) = \left\{ \tfrac{2}{l}, \ \tfrac{4(l-x)}{l} \sin \mu_k x, \ \tfrac{4}{l} \cos \mu_k x \right\}. \tag{3.4.13}$$

Системы функций (3.4.12) и (3.4.13) образуют биортогональную систему, т.е.

$$\int_0^l Z_k(x) Y_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

и удовлетворяют необходимому и достаточному условию базисности В.А. Ильина [33] в пространстве $L_2[0, l]$.

---

[1]Функция $\widetilde{X}_{2k}(x)$ является решением задачи: $\widetilde{X}''_k(x) + \mu_k^2 \widetilde{X}_k(x) = -2\mu_k X_k(x)$ при $0 < x < l$, $\widetilde{X}_k(0) = 0, \quad X'_{2k}(0) = X'_{2k}(l)$.

Рассмотрим функции

$$T_0(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\,dx, \tag{3.4.14}$$

$$\widetilde{T}_k(t) = \frac{4}{l}\int\limits_0^l u(x,t)(l-x)\sin\mu_k x\,dx, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.4.15}$$

$$T_k(t) = \frac{4}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.4.16}$$

На основании (3.4.14) – (3.4.16) введем функции

$$T_{0,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\,dx, \tag{3.4.17}$$

$$\widetilde{T}_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)(l-x)\sin\mu_k x\,dx, \tag{3.4.18}$$

$$T_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\cos\mu_k x\,dx, \tag{3.4.19}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенства (3.4.17) – (3.4.19) по t при $t \in (0,\beta)$ один раз, а при $t \in (-\alpha, 0)$ два раза и учитывая уравнение (3.4.1), получим

$$T'_{0,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}dx, \quad t > 0, \tag{3.4.20}$$

$$T''_{0,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt}\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\,dx, \quad t < 0, \tag{3.4.21}$$

$$\widetilde{T}'_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}(l-x)\sin\mu_k x\,dx, \quad t > 0, \tag{3.4.22}$$

$$\widetilde{T}''_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(l-x)\sin\mu_k x\,dx, \quad t<0, \tag{3.4.23}$$

$$T'_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}\cos\mu_k x\,dx, \quad t>0, \tag{3.4.24}$$

$$T''_{k,\varepsilon}(t) = \frac{4}{l}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}\cos\mu_k x\,dx, \quad t<0. \tag{3.4.25}$$

В интегралах (3.4.20) – (3.4.25) интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (3.4.5), (3.4.8), найдем следующие уравнения:

$$T'_0(t) = 0, \quad t>0, \tag{3.4.26}$$

$$T''_0(t) = 0, \quad t<0, \tag{3.4.27}$$

$$T'_k(t) + \mu_k^2 T_k(t) = 0, \quad t>0, \tag{3.4.28}$$

$$T''_k(t) + \mu_k^2 T_k(t) = 0, \quad t<0, \tag{3.4.29}$$

$$\widetilde{T}'_k(t) + \mu_k^2 \widetilde{T}_k(t) = -2\mu_k T_k(t), \quad t>0, \tag{3.4.30}$$

$$\widetilde{T}''_k(t) + \mu_k^2 \widetilde{T}_k(t) = -2\mu_k T_k(t), \quad t<0. \tag{3.4.31}$$

Отметим, что уравнения (3.4.30) и (3.4.31) определяют $\widetilde{T}_k(t)$ как присоединенную функцию. Дифференциальные уравнения (3.4.26) – (3.4.31) имеют общие решения

$$T_0(t) = \begin{cases} c_0, & t>0, \\ a_0 t + b_0, & t<0, \end{cases} \tag{3.4.32}$$

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\mu_k^2 t}, & t>0, \\ a_k\cos\mu_k t + b_k\sin\mu_k t, & t<0, \end{cases} \tag{3.4.33}$$

$$\widetilde{T}_k(t) = \begin{cases} \tilde{c}_k e^{-\mu_k^2 t} + \omega_k^+(t), & t>0, \\ \tilde{a}_k\cos\mu_k t + \tilde{b}_k\sin\mu_k t + \omega_k^-(t), & t<0, \end{cases} \tag{3.4.34}$$

где a_0, b_0, c_0, a_k, b_k, c_k, $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, $\tilde{c}_k$ – произвольные постоянные,

$$\omega_k^+(t) = -2\mu_k c_k t e^{-\mu_k^2 t}, \quad t>0, \tag{3.4.35}$$

$$\omega_k^-(t) = -b_k\mu_k^{-1}\sin\mu_k t - t(a_k\sin\mu_k t - b_k\cos\mu_k t), \quad t<0. \qquad (3.4.36)$$

Заметим,что для функций (3.4.35) и (3.4.36) выполнены следующие равенства:

$$\omega_k^+(0+0)=0, \quad w_k^{+'}(0+0) = -2\mu_k c_k, \quad \omega_k^-(0-0) = w_k^{-'}(0-0)=0.$$

В силу (3.4.2) для функций (3.4.32) – (3.4.34) выполнены условия сопряжения

$$\begin{aligned} &T_k(0+0)=T_k(0-0), \quad T_k'(0+0)=T_k'(0-0), \quad k=0,1,2,\dots,\\ &\widetilde{T}_k(0+0)=\widetilde{T}_k(0-0), \quad \widetilde{T}_k'(0+0)=\widetilde{T}_k'(0-0), \quad k=1,2,\dots. \end{aligned} \qquad (3.4.37)$$

Удовлетворяя функции (3.4.32) – (3.4.34) условиям (3.4.37), найдем

$$a_0=0, \quad b_0=c_0, \quad a_k=c_k, \quad b_k=-c_k\mu_k, \quad \tilde{a}_k=\tilde{c}_k, \quad \tilde{b}_k=-\tilde{c}_k\mu_k-2c_k.$$

С учетом найденных значений $a_0, b_0, a_k, b_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ функции (3.4.32) – (3.4.34) примут вид

$$T_0(t)=c_0, \quad -\alpha\le t\le\beta, \qquad (3.4.38)$$

$$T_{2k}(t)=\begin{cases} c_k e^{-\mu_k^2 t}, & t>0,\\ c_k(\cos\mu_k t-\mu_k\sin\mu_k t), & t<0, \end{cases} \qquad (3.4.39)$$

$$\widetilde{T}_k(t)=\begin{cases} \tilde{c}_k e^{-\mu_k^2 t}-2\mu_k c_k t e^{-\mu_k^2 t}, & t>0,\\ \tilde{c}_k(\cos\mu_k t-\mu_k\sin\mu_k t)-2c_k\sin\mu_k t+\omega_k(t), & t<0, \end{cases} \qquad (3.4.40)$$

где

$$\omega_k(t)=c_k[\sin\mu_k t - t(\sin\mu_k t+\mu_k\cos\mu_k t)]. \qquad (3.4.41)$$

Для нахождения постоянных c_0, c_k, $\tilde{c}_k$ воспользуемся начальным условием (3.4.5). Из равенств (3.4.14) – (3.4.16) в силу условия (3.4.5) получим

$$T_0(-\alpha)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)dx=\varphi_0, \qquad (3.4.42)$$

$$T_k(-\alpha)=\frac{4}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\mu_k x\,dx=\varphi_k, \qquad (3.4.43)$$

$$\widetilde{T}_k(-\alpha)=\frac{4}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx=\widetilde{\varphi}_k, \qquad (3.4.44)$$

т.е. φ_0, φ_k и $\widetilde{\varphi}_k$ являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$ в биортогональный ряд

$$\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_k X_k(x) + \varphi_k \widetilde{X}_k(x), \tag{3.4.45}$$

при этом аналогично [38] можно показать справедливость двусторонней оценки

$$R_2 \|\varphi(x)\|^2_{L_2} \le \varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\widetilde{\varphi}_k^2 + \varphi_k^2) \le R_1 \|\varphi(x)\|^2_{L_2}, \tag{3.4.46}$$

где

$$\|\varphi(x)\|_{L_2} = \left(\int_0^l \varphi^2(x)\, dx \right)^{1/2}, \quad R_1 = \frac{20}{l}, \quad R_2 = \frac{3l}{l^2+3}.$$

Действительно, на основании неравенств Коши-Буняковского и Бесселя для ортонормированных систем имеем

$$\varphi_0^2 = \frac{4}{l^2}(\varphi, 1)^2 \le \frac{4}{l^2} \int_0^l 1^2\, dx \int_0^l \varphi^2(x)\, dx = \frac{4}{l} \|\varphi\|^2_{L_2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k^2 = \frac{16}{l^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi, \cos\mu_k x)^2 = \frac{8}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\varphi, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\mu_k x \right)^2 \le \frac{8}{l} \|\varphi\|^2_{L_2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_k^2 = \frac{16}{l^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\varphi(x)(l-x), \sin\mu_k x \Big)^2 \le \frac{8}{l} \|\varphi\|^2_{L_2}.$$

Суммируя эти неравенства, устанавливаем справедливость оценки (3.4.46) сверху.

Система функций (3.4.13) также образует базис в пространстве $L_2[0,l]$, поэтому справедливо разложение

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}_0 \frac{2}{l} + \frac{4}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{\overline{\varphi}}_k \cos\mu_k x + \overline{\varphi}_k (l-x) \sin\mu_k x, \tag{3.4.47}$$

здесь

$$\overline{\varphi}_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) x\, dx, \quad \widetilde{\overline{\varphi}}_k = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) x \cos\mu_k x\, dx,$$

$$\overline{\varphi}_k = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

Для коэффициентов разложения (3.4.47) имеем следующие оценки:

$$\overline{\varphi}_0 = \frac{1}{l^2}\Big(\varphi(x), x\Big)^2 \le \frac{1}{l^2}\int\limits_0^l x^2\,dx\int\limits_0^l \varphi^2(x)\,dx = \frac{l}{3}\|\varphi\|^2_{L_2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\overline{\varphi}_k = \frac{1}{l^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\varphi, \sin\mu_k x\Big)^2 \le \frac{1}{2l}\|\varphi\|^2_{L_2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\widetilde{\overline{\varphi}}_k = \frac{1}{l^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\varphi, x\cos\mu_k x\Big)^2 \le \frac{1}{2l}\|\varphi\|^2_{L_2}.$$

Отсюда получим

$$\overline{\varphi}_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\widetilde{\overline{\varphi}}_k^2 + \overline{\varphi}_k^2 \le \frac{l^2+3}{3l}\|\varphi\|^2_{L_2}. \tag{3.4.48}$$

Теперь умножим равенство (3.4.45) на $\varphi(x)$ и интегрируем от нуля до l, затем воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для рядов и оценкой (3.4.48):

$$\|\varphi\|^2_{L_2} = \varphi_0\overline{\varphi}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\widetilde{\varphi}_k\overline{\varphi}_k + \varphi_k\widetilde{\overline{\varphi}}_k\Big) \le$$

$$\le \left(\varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\widetilde{\varphi}_k^2 + \varphi_k^2\right)^{1/2}\left(\overline{\varphi}_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\widetilde{\overline{\varphi}}_k^2 + \overline{\varphi}_k^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\frac{l^2+3}{3l}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{L_2}\left(\varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\widetilde{\varphi}_k^2 + \varphi_k^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (3.4.46) снизу.

Удовлетворив функции (3.4.38) – (3.4.40) соответственно условиям (3.4.42) – (3.4.44), найдем

$$c_0 = \varphi_0, \quad c_k = \frac{\varphi_k}{d(k)}, \quad \tilde{c}_k = \frac{\widetilde{\varphi}_k}{d(k)} - \frac{2\varphi_k\sin\mu_k\alpha}{d^2(k)} - \frac{1}{d(k)}\omega_k(-\alpha) \tag{3.4.49}$$

при условии, что при любом $k \in \mathbb{N}$

$$d(k) = \cos \mu_k \alpha + \mu_k \sin \mu_k \alpha \neq 0. \tag{3.4.50}$$

Таким образом, функции (3.4.38) – (3.4.40) однозначно и в явном виде построены. Теперь мы в состоянии доказать единственность решения задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8). Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) при $\varphi(x) \equiv 0$ и выполнены условия (3.4.50) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi_0 = \varphi_k = \widetilde{\varphi}_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу (3.4.49) коэффициенты $c_0 = 0, \quad c_k = \widetilde{c}_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и поэтому из (3.4.38) – (3.4.40) и (3.4.14) – (3.4.16) следуют равенства:

$$\int_0^l u(x,t)\,dx = 0, \quad \int_0^l u(x,t)(l-x)\sin \mu_k x\,dx = 0,$$

$$\int_0^l u(x,t)\cos \mu_k x\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда в силу полноты системы корневых функций (3.4.13) в пространстве $L_2[0,l]$ вытекает, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x,t) \in C(\overline{D})$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых l, α и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (3.4.50), т.е. $d(p) = 0$. Тогда однородная задача (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) (где $\varphi(x) = 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = T_p(t)\sin \mu_p x, \tag{3.4.51}$$

где

$$T_p(t) = \begin{cases} e^{-\mu_p^2 t}, & t > 0, \\ \cos \mu_p t - \mu_p \sin \mu_p t, & t < 0. \end{cases}$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 3.4.1. *Если существует решение задачи* (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (3.4.50).

3.4.3. Существование решения задачи

Решение задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) при условии (3.4.50) будем искать в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x,t) = T_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{T}_k(t)X_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t)\widetilde{X}_k(x) =$$

$$= \frac{x}{l}\varphi_0 + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{T}_k(t)\sin\mu_k x + \frac{x}{l}\sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t)\cos\mu_k x, \qquad (3.4.52)$$

где $T_k(t)$, $\widetilde{T}_k(t)$ на основании (3.4.39) – (3.4.41) и (3.4.49) определяются по следующим формулам:

$$T_k(t) = \begin{cases} d^{-1}(k)\varphi_k e^{-\mu_k^2 t}, & t > 0, \\ d^{-1}(k)\varphi_k(\cos\mu_k t - \mu_k \sin\mu_k t), & t < 0, \end{cases} \qquad (3.4.53)$$

$$\widetilde{T}_k(t) = \begin{cases} \Big[d^{-1}(k)(\varphi_{2k-1} - \omega_k(-\alpha) - 2\mu_k\varphi_k t) - \\ \qquad -2d^{-2}(k)\varphi_{2k}\sin\mu_k\alpha\Big] e^{-\mu_k^2 t}, & t > 0, \\ \Big[d^{-1}(k)(\widetilde{\varphi}_k - \omega_k(-\alpha)) - 2d^{-2}(k)\varphi_k\sin\mu_k\alpha\Big]\times \\ \times(\cos\mu_k t - \mu_k\sin\mu_k t) - 2d^{-1}(k)\varphi_k\sin\mu_k t + \omega_k(t), & t < 0. \end{cases} \qquad (3.4.54)$$

Как видим, $d(k)$ входит в знаменатель формул (3.4.53) и (3.4.54), для обоснования существования решения задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8), помимо условия (3.4.50), необходимо показать существование чисел $\alpha > 0$, таких, что выражение $d(k)$ отделено от нуля. Поскольку $d(k)$ совпадает с (3.1.21), то для него справедливы леммы 3.1.1 – 3.1.3 из § 3.1. На основании этих лемм установим существование решения задачи 3.4.

Теперь при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ и число $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$ покажем, что функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.4.52), удовлетворяет условиям (3.4.2) и (3.4.3). Формально из (3.4.52) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{T}'_k(t)X_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t)\widetilde{X}_k(x), \quad t > 0, \qquad (3.4.55)$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{T}''_k(t)X_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} T''_k(t)\widetilde{X}_k(x), \quad t < 0, \qquad (3.4.56)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{T}_k(t) X_k''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) \widetilde{X}_k''(x), \quad t < 0. \tag{3.4.57}$$

Лемма 3.4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы* 3.1.3. *Тогда при всех k и при любом $t \in [-\alpha, \beta]$ справедливы оценки:*

$$|\, T_k(t) \,| \leq \begin{cases} C_1 k \,|\, \varphi_k \,|, & t \leq 0, \\ C_1 \,|\, \varphi_k \,|, & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.4.58}$$

$$|\, \omega_k(t) \,| \leq C_2 k \,|\, \varphi_k \,|, \quad t \leq 0, \tag{3.4.59}$$

$$|\, \widetilde{T}_k(t) \,| \leq \begin{cases} C_3 k(k \,|\, \varphi_k \,| + |\, \widetilde{\varphi}_k \,|), & t \leq 0, \\ C_3 (k \,|\, \varphi_k \,| + |\, \widetilde{\varphi}_k \,|), & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.4.60}$$

$$|\, T_k'(t) \,| \leq C_4 k^2 \,|\, \varphi_k \,|, \quad t \geq 0, \tag{3.4.61}$$

$$|\, T_k''(t) \,| \leq C_4 k^3 \,|\, \varphi_k \,|, \quad t \leq 0, \tag{3.4.62}$$

$$|\, \widetilde{T}_k'(t) \,| \leq C_5 k^2 (k \,|\, \varphi_k \,| + |\, \widetilde{\varphi}_k \,|), \quad t \geq 0, \tag{3.4.63}$$

$$|\, T_k''(t) \,| \leq C_5 k^3 (k \,|\, \varphi_k \,| + |\, \widetilde{\varphi}_k \,|), \quad t \leq 0, \tag{3.4.64}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Из формул (3.4.53), (3.4.41) и (3.4.54) с учетом леммы 3.1.1 получим

$$|\, T_k(t) \,| \leq \frac{|\, \varphi_k \,|}{|\, d(k) \,|} \sqrt{1 + \mu_k^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\pi k}{C_0} \,|\, \varphi_k \,| = C_1 k \,|\, \varphi_k, \quad t \leq 0,$$

$$|\, T_k(t) \,| \leq \frac{|\, \varphi_k \,|}{|\, d(k) \,|} \leq \frac{1}{C_0} \,|\, \varphi_k \,| \leq C_1 \,|\, \varphi_k \,|, \quad t \geq 0,$$

$$|\, \omega_k(t) \,| \leq \frac{|\, \varphi_k \,|}{|\, d(k) \,|} \left(1 + \alpha \sqrt{1 + \mu_k^2} \right) = \frac{(1 + 2\sqrt{2}\pi\alpha k)}{C_0} \,|\, \varphi_k \,| \leq$$

$$\leq \frac{4\sqrt{2}\pi\alpha}{C_0} k \,|\, \varphi_k \,| = C_2 k \,|\, \varphi_k \,| \ \textit{при} \ \ t \leq 0,$$

$$|\, \widetilde{T}_k(t) \,| \leq C_3 k(|\, \widetilde{\varphi}_k \,| + k \,|\, \varphi_k \,|), \quad t \leq 0,$$

$$|\, \widetilde{T}_k(t) \,| \leq C_3 (|\, \widetilde{\varphi}_k \,| + k \,|\, \varphi_k \,|), \quad t \geq 0.$$

Нетрудно показать справедливость следующих равенств:

$$T_k'(t) = -\mu_k^2 T_k(t), \quad t \geq 0; \quad T_k''(t) = -\mu_k^2 T_k(t), \quad t \leq 0;$$

$$\widetilde{T}_k'(t) = -\mu_k^2 \widetilde{T}_k(t) - 2\mu_k T_k(t), \quad t \geq 0;$$

$$\omega_k''(t) = -\mu_k^2 \omega_k(t) - 2\mu_k T_k(t), \quad t \leq 0;$$

$$T_k''(t) = -\mu_k^2 \widetilde{T}_k(t) - 2\mu_k T_k(t), \quad t \leq 0.$$

Отсюда в силу доказанных оценок (3.4.58) – (3.4.60) вытекает справедливость оценок (3.4.61) – (3.4.64).

Тогда на основании леммы 3.4.1 ряды (3.4.52), (3.4.55) – (3.4.57) мажорируются рядом

$$C_{10} \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 (k \mid \varphi_k \mid + \mid \widetilde{\varphi}_k \mid). \tag{3.4.65}$$

Лемма 3.4.2. *Если* $\varphi(x) \in C^5[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(IV)}(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(l)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(l)$, *то для коэффициентов* φ_k и $\widetilde{\varphi}_k$ *имеют место следующие представления:*

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(V)}}{\mu_k^5}, \quad \widetilde{\varphi}_k = \frac{\varphi_k^{(V)}}{\mu_k^5} + \frac{5\varphi_k^{(V)}}{\mu_k^6}, \tag{3.4.66}$$

где

$$\varphi_k^{(V)} = \frac{4}{l} \int\limits_0^l \varphi^{(V)}(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \widetilde{\varphi}_k^{(V)} = \frac{4}{l} \int\limits_0^l \varphi^{(V)}(x)(l-x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(V)}|^2 \leq \frac{8}{l} \|\varphi^{(V)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{\varphi}_k^{(V)}|^2 \leq \frac{8}{l} \|\varphi^{(V)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{3.4.67}$$

Доказательство. Рассмотрим интегралы (3.4.43) и (3.4.44). Интегрируя их по частям пять раз с учетом условий леммы, получим

$$\varphi_k^{(V)} = -\mu_k^5 \varphi_k, \quad \widetilde{\varphi}_k^{(V)} = \mu_k^5 \widetilde{\varphi}_k + 5\mu_k^4 \varphi_k.$$

Отсюда уже следуют требуемые представления (3.4.66). Справедливость оценки (3.4.67) следует из (3.4.46).

При выполнении условий леммы 3.4.2 ряд (3.4.65) оценивается числовым рядом

$$C_{11} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\varphi_k^{(V)} + \frac{1}{k} \widetilde{\varphi}_k^{(V)} \right). \tag{3.4.68}$$

Из сходимости ряда (3.4.68) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (3.4.52), (3.4.55) – (3.4.57) в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.4.53), удовлетворяет условию (3.4.2). Подставляя ряды (3.4.52), (3.4.55) и (3.4.57) в уравнение (3.4.1) при $t > 0$, а ряды (3.4.52), (3.4.56) и (3.4.57) в уравнение (3.4.1) при $t < 0$, получим

$$u_t - u_{xx} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\widetilde{T}_k'(t) + \mu_k^2 \widetilde{T}_k(t) + 2\mu_k T_k(t)) X_k(x) +$$

$$+ (T_k'(t) + \mu_k^2 T_k(t)) \widetilde{X}_k(x) \equiv 0, \quad t > 0,$$

$$u_{tt} - u_{xx} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\widetilde{T}_k''(t) + \mu_k^2 \widetilde{T}_k(t) + 2\mu_k T_k(t)) X_k(x) +$$

$$+ (T_k''(t) + \mu 2_k T_k(t)) \widetilde{X}_k(x) \equiv 0, \quad t < 0.$$

Следовательно, функция (3.4.52) удовлетворяет и условию (3.4.3). Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.4.2. *Если выполнены условия леммы* 3.1.1 *или леммы* 3.1.3 *и функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.4.2, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) *и оно определяется рядом* (3.4.52), *и* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

В силу доказанной теоремы 3.4.2 построенная нами функция (3.4.52) удовлетворяет всем условиям задачи (3.4.2) – (3.4.5) и (3.4.8), когда для функции $\varphi(x)$ выполнены условия леммы 3.4.2, но при этом функция (3.4.52) не удовлетворяет условию (3.4.6), т.е. функция (3.4.52) не является решением задачи (3.4.2) – (3.4.6).

Теорема 3.4.3. *Если выполнены все условия теоремы* 3.4.2 *и* (3.4.7), *то существует единственное решение задачи* (3.4.2) – (3.4.6) *и оно определяется рядом* (3.4.52).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 3.1.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $d(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи 3.4 необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^l \psi(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx = \int_0^l \psi(x)\cos\mu_k x\,dx = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{3.4.69}$$

В этом случае решение задачи 3.4 определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\frac{x}{l}\varphi_0+\frac{1}{l}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)\widetilde{T}_k(t)\sin\mu_k x+$$

$$+\frac{x}{l}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)T_k(t)\cos\mu_k x+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{3.4.70}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1,k_2\ldots,k_m$, A_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (3.4.51), если в конечных суммах в правой части (3.4.70) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.4.4. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 3.4.2. *Тогда, если $d(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) *и это решение определяется рядом* (3.4.52)*; если $d(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\ldots,k_m\leq k_0$, то задача* (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (3.4.69) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (3.4.70).

Теорема 3.4.5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.4.4 *и* (3.4.7). *Тогда, если $d(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* (3.4.2) – (3.4.6) *и это решение определяется рядом* (3.4.52)*; если $d(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\ldots,k_m\leq k_0$, то задача* (3.4.2) – (3.4.6) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (3.4.69) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (3.4.70).

3.4.4. Устойчивость решения

В этом пункте установим устойчивость решения задачи (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) по ее начальному условию $\varphi(x)$.

Теорема 3.4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4.2. *Тогда для решения задачи* (3.4.2) – (3.4.5), (3.4.8) *справедливы оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leq M_1\|\varphi\|_{W_2^2[0,l]}, \tag{3.4.71}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leq M_2\|\varphi\|_{C^3[0,l]}, \tag{3.4.72}$$

где положительные постоянные M_1 и M_2 не зависят от $\varphi(x)$.

Доказательство. Заметим, что ряд (3.4.52) является биортогональным разложением функции $u(x,t)$ при фиксированном $t \in [-\alpha, \beta]$ по системам (3.4.12) и (3.4.13). Поскольку функция $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то для нее справедлива оценка (3.4.46). Отсюда в силу леммы 3.4.1 имеем

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{R_2}[T_0^2(t) + \sum_{k=1}^{+\infty}(\widetilde{T}_k^2(t) + T_k^2(t))] \le$$

$$\le \frac{C_{14}}{R_2}\left[\varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(|k\varphi_k|^2 + |\widetilde{\varphi}_k|^2)\right]. \qquad (3.4.73)$$

Учитывая, что $\varphi_k = -\frac{1}{\mu_k^2}\varphi_k^{(2)}$, где $\varphi_k^{(2)} = \frac{4}{l}\int\limits_0^l \varphi''(x)\cos\mu_k x\,dx$, и оценки

$$k^2|\varphi_k| \le \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 |\varphi_k^{(2)}|, \quad k|\widetilde{\varphi}_k| \le \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 (|\widetilde{\varphi}_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(1)}|),$$

из (3.4.73) будем иметь

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 \le \frac{C_{14}}{R_2}\left[\frac{4}{l}\|\varphi\|_{L_2}^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(2)}|^2 + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty}(|\widetilde{\varphi}_k^{(1)}|^2 + |\varphi_k^{(1)}|^2)\right] \le$$

$$\le \frac{C_{14}}{R_2}\left[\frac{4}{l}\|\varphi\|_{L_2}^2 + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \|\varphi'\|_{L_2}^2 + \frac{1}{(2\pi)^4}\|\varphi''\|_{L_2}^2\right] \le M_1\|\varphi\|_{W_2^2}^2.$$

Из последнего неравенства уже вытекает оценка (3.4.71).

Пусть (x,t) – любая точка из $\overline{D}$. Тогда из ряда (3.4.52), используя лемму 3.4.1, получим

$$|u(x,t)| \le C_{15}\left[|\varphi_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} k(k|\varphi_k| + |\widetilde{\varphi}_k|)\right]. \qquad (3.4.74)$$

В силу условий леммы 3.4.2 нетрудно показать, что

$$\widetilde{\varphi}_k = -\frac{1}{\mu_k^2}\widetilde{\varphi}_k^{(2)} + \frac{2}{\mu_k^3}\varphi_k^{(2)}, \quad \varphi_{2k} = \frac{1}{\mu_k^3}\varphi_k^{(3)}, \qquad (3.4.75)$$

где

$$\varphi_k^{(2)} = \frac{4}{l}\int\limits_0^l \varphi''(x)\cos\mu_k x\,dx, \quad \widetilde{\varphi}_k^{(2)} = \frac{4}{l}\int\limits_0^l \varphi''(x)(l-x)\sin\mu_k x\,dx,$$

$$\varphi_k^{(3)} = \frac{4}{l}\int\limits_0^l \varphi'''(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

Тогда из (3.4.75) и (3.4.74) на основании неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$|u(x,t)| \le C_{15}\left[|\varphi_0| + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}|\varphi_k^{(3)}| + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(|\widetilde{\varphi}_k^{(2)}| + |\varphi_k^{(2)}|)\right] \le$$

$$\le C_{15}\left[\frac{2}{\sqrt{l}}\|\varphi\|_{L_2} + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{(3)}|^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. +\sqrt{2}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(|\widetilde{\varphi}_k^{(2)}|^2 + |\varphi_k^{(2)}|^2)\right)^{1/2}\right] \le$$

$$\le C_{15}\left[\frac{2}{\sqrt{l}}\|\varphi\|_{L_2} + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\varphi'''\|_{L_2} + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{\pi}{\sqrt{3}}\|\varphi''\|_{L_2}\right] \le$$

$$\le C_{16}\|\varphi\|_{W_2^3[0,l]},$$

где $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, из которого непосредственно следует оценка (3.4.72).

§ 3.5. Краевая задача с новым нелокальным граничным условием

Для уравнения (3.0.1) в прямоугольной области D впервые изучим краевую задачу с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения на противоположных сторонах прямоугольника D, принадлежащих разным типам уравнения.

3.5.1. Постановка задачи. Единственность решения

Задача 3.5. *Найти определенной в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+); \tag{3.5.1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \ (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{3.5.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ -\alpha \le t \le \beta; \tag{3.5.3}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \ 0 \le x \le l, \tag{3.5.4}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3.5.1) – (3.5.4). Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.5.5}$$

Аналогично § 2.1, получим, что функции $u_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.5.6}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.5.7}$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2, \ \ k \in \mathbb{N}$.

Дифференциальные уравнения (3.5.6) и (3.5.7) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \tag{3.5.8}$$

где a_k, b_k и c_k – произвольные постоянные. В силу (3.5.1) для функций (3.5.8) выполнены условия сопряжения:

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.5.9}$$

Функции (3.5.8) удовлетворяют условиям (3.5.9) только тогда, когда

$$a_k = c_k, \quad b_k = -c_k \lambda_k. \tag{3.5.10}$$

С учетом равенств (3.5.10) функции (3.5.8) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \tag{3.5.11}$$

Теперь для нахождения коэффициентов c_k воспользуемся нелокальным условием (3.5.4) и формулой (3.5.5):

$$u_k(-\alpha) - u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l [u(x,-\alpha) - u(x,\beta)] \sin\mu_k x \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\mu_k x dx = \varphi_k. \tag{3.5.12}$$

Тогда из (3.5.12) на основании функций (3.5.11) получим

$$c_k = \frac{\varphi_k}{\delta(k)} \tag{3.5.13}$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k^2\beta} \neq 0. \tag{3.5.14}$$

Подставляя (3.5.13) в (3.5.11), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_k}{\delta(k)} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\varphi_k}{\delta(k)}(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \tag{3.5.15}$$

Теперь докажем единственность решения задачи 3.5. Пусть при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (3.5.14) и $\varphi(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_k \equiv 0$ и из формул (3.5.15) и (3.5.5) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на сегменте $[-\alpha, \beta]$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу (3.5.5) имеем:

$$\int\limits_0^l u(x,t) \sin\mu_k x \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sin\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in$

$[-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (3.5.1) функция $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых l, α, β, b и $k = p$ нарушено условие (3.5.14), т.е.

$$\delta(p) = \cos\lambda_p\alpha + \lambda_p \sin\lambda_p\alpha - e^{-\lambda_p^2\beta} = 0.$$

Тогда однородная задача (3.5.1) – (3.5.4) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t}\sin\mu_p x, & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p \sin\lambda_p t)\sin\mu_p x, & t < 0. \end{cases} \tag{3.5.16}$$

Теперь возникает вопрос: при каких l, α, β, b и $k \in \mathbb{N}$ выражение $\delta(k)$ может обратиться в нуль? Для этого его представим в следующем виде:

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\sin\left(\pi k\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_k + \gamma_k\right) - e^{-\lambda_k^2\beta}, \tag{3.5.17}$$

здесь $\gamma_k = \arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_k^2})$, $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1+\left(b\,l/(\pi k)\right)^2}$. Из представления (3.5.17) видно, что при любых фиксированных l, β, b и k выражение $\delta(k)$ относительно α равно нулю только в том случае, когда

$$\widetilde{\alpha} = \frac{(-1)^n}{\pi k\widetilde{\lambda}_k}\arcsin\theta_\kappa + \frac{n}{k\widetilde{\lambda}_k} - \frac{\gamma_k}{\pi k\widetilde{\lambda}_k}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \tag{3.5.18}$$

здесь

$$\theta_k = \frac{e^{-\lambda_k^2\beta}}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}.$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 3.5.1. *Если существует решение задачи* (3.5.1) – (3.5.4), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (3.5.14) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

3.5.2. Существование решения задачи

Поскольку выражение (3.5.17) имеет счетное множество нулей (3.5.18), то для обоснования существования решения задачи (3.5.1) – (3.5.4) необходимо показать существование чисел l, α, β и b, таких, при которых выражение $\delta(k)$ отделено от нуля.

Лемма 3.5.1. *Если $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{N}$ и $b = 0$, то существует положительная постоянная C_0, зависящая от l, β, такая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \geq C_0 > 0. \tag{3.5.19}$$

Доказательство. Поскольку по условию $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$ и $b = 0$, то из (3.5.14) имеем

$$|\delta(k)| = \left|\cos \pi kp + \frac{\pi k}{l} \sin \pi kp - e^{-(\pi k/l)^2 \beta}\right| =$$

$$= |(-1)^{kp} - e^{-(\pi k/l)^2 \beta}| \geq 1 - e^{-(\pi/l)^2 \beta} = C_0.$$

Отсюда следует оценка (3.5.19) ■.

Лемма 3.5.2. *Если $b \geq 0$ и $\widetilde{\alpha} = p/q$ является произвольным рациональным числом, где $p, q \in \mathbb{N}$, $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, $k_0 \in \mathbb{N}$, такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \geq C_0 > 0. \tag{3.5.20}$$

Доказательство. Выражение $\widetilde{\lambda}_k$ при условии

$$\frac{b\,l}{\pi} < 1 \quad \text{или} \quad k > k_1 = \frac{b\,l}{\pi}$$

можно представить в виде:

$$\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2} = 1 + \theta_k, \tag{3.5.21}$$

при этом для θ_k справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2 < \theta_k < \frac{1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2. \tag{3.5.22}$$

На основании известных неравенств

$$|x| \leq |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}|x|, \quad 0 \leq |x| \leq 1, \tag{3.5.23}$$

для выражения γ_k справедлива оценка

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_k^2}} \leq \gamma_k \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_k^2}} < \frac{l}{2k}. \tag{3.5.24}$$

Теперь соотношение (3.5.17) с учетом (3.5.21) принимает вид

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\sin\left(\pi k\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) - e^{-\lambda_k^2\beta}, \quad \widetilde{\theta}_k = \pi k\theta_k. \tag{3.5.25}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p/q$, $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$. Разделив kp на q с остатком $kp = sq + r$, s, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$, соотношению (3.5.21) придадим вид

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}(-1)^s\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) - e^{-\lambda_k^2\beta}. \tag{3.5.26}$$

Если $r = 0$, то из (3.5.26) имеем

$$\delta(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}(-1)^s\sin\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) - e^{-\lambda_k^2\beta}. \tag{3.5.27}$$

Поскольку $\widetilde{\theta}_k$ и γ_k в силу оценок (3.5.22) и (3.5.24) являются бесконечно малыми при $k \to \infty$, то существует число $k_2 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда на основании неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{3.5.28}$$

с учетом оценок (3.5.22) и (3.5.24), имеем

$$|\widetilde{\delta}(k)| = \sqrt{1+\lambda_k^2}\left|\sin\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)\right| \geq \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\lambda_k^2}\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) \geq$$

$$\geq \frac{2\widetilde{\alpha}}{\pi}\frac{3}{8}\frac{(b\,l)^2}{\pi k}\sqrt{1+\lambda_k^2} + \frac{2}{\pi} \geq C_1 > 0. \tag{3.5.29}$$

Если $r > 0$, то $1 \leq r \leq q-1$, $q \geq 2$. Поскольку $\sin\left(\dfrac{\pi r}{q} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)$ имеет конечный предел при $k \to \infty$, то существует $k_3 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_3$

$$|\widetilde{\delta}(k)| = \sqrt{1+\lambda_k^2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)\right| \geq$$

$$\geq \frac{\pi k}{2l}\left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| \geq \frac{\pi}{2l}\left|\sin\frac{\pi}{q}\right| = C_2 > 0. \tag{3.5.30}$$

Пусть $C_3 = \min\{C_1, C_2\}$. Тогда существует натуральное число k_4, такое, что при всех $k > k_4$

$$e^{-\lambda_k^2 \beta} < \frac{C_3}{2}. \tag{3.5.31}$$

Тогда из равенства (3.5.26) в силу оценок (3.5.29) – (3.5.31) при всех $k > k_0 = \max\limits_{1 \le i \le 4} \{k_i\}$ следует

$$|\delta(k)| \ge |\widetilde{\delta}(k)| - e^{-\lambda_k^2 \beta} > \frac{C_3}{2} = C_0 > 0. \tag{3.5.32}$$

Отсюда и следует требуемая оценка (3.5.20). ■

Далее рассмотрим случай, когда $\widetilde{\alpha}$ – алгебраическое иррациональное число степени два, т.е. является корнем многочлена второй степени $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - \widetilde{\alpha})(a_2 x + a_2 \widetilde{\alpha} + a_1)$ с целыми коэффициентами, $a_2 > 0$. Пусть при этом выполнены условия

$$\frac{\widetilde{\alpha}}{2\pi}(b\,l)^2 + \frac{l}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 2\widetilde{\alpha} a_2 + a_1 \ge \sqrt{a_2/2}, \tag{3.5.33}$$

$$\delta - \frac{\widetilde{\alpha}}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi}\right)^2 - \frac{l}{2\pi} > 0, \tag{3.5.34}$$

где δ вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{2}{2\widetilde{\alpha} a_2 + a_1 + \sqrt{(2\widetilde{\alpha} a_2 + a_1)^2 + 4a_2}}.$$

Лемма 3.5.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является алгебраическим иррациональным числом степени два и выполнены условия* (3.5.33), (3.5.34) *и $b\,l < \pi$. Тогда существуют постоянные $C_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, такие, что при всех $\beta > \beta_0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \ge C_0. \tag{3.5.35}$$

Доказательство. По условию число $\widetilde{\alpha}$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.1.3. Тогда в силу этой леммы существует постоянная $\widetilde{C}_0 > 0$, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$|\widetilde{\delta}(k)| \ge \widetilde{C}_0 > 0. \tag{3.5.36}$$

На основании неравенств (3.5.32) и (3.5.36) имеем

$$|\delta(k)| \ge |\widetilde{\delta}(k)| - e^{-\lambda_k^2 \beta} > \widetilde{C}_0 - e^{-\lambda_1^2 \beta} = \widetilde{C}_0 > 0$$

при $\beta > -\dfrac{1}{\lambda_1^2}\ln\widetilde{C}_0$. ■

При выполнении оценки (3.5.19) или оценки (3.5.35) решение задачи (3.5.1) – (3.5.4) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin\mu_k x, \tag{3.5.37}$$

где функции $u_k(t)$ определены формулой (3.5.15).

Для обоснования сходимости ряда (3.5.37) в классе (3.5.1) докажем следующие леммы.

Лемма 3.5.4. *Пусть выполнены условия леммы* 3.5.1 *или леммы* 3.5.3. *Тогда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \le \begin{cases} M_1|\varphi_k|, & t \ge 0, \\ M_2 k|\varphi_k|, & t \le 0, \end{cases} \tag{3.5.38}$$

$$|u_k'(t)| \le \begin{cases} M_1 k^2|\varphi_k|, & t \ge 0, \\ M_2 k^2|\varphi_k|, & t \le 0, \end{cases}$$

$$|u_k''(t)| \le M_3 k^3|\varphi_k|, \quad t \le 0,$$

где M_i *– здесь и далее положительные постоянные.*

Доказательство. Исходя из формулы (3.5.15) при $t \ge 0$ и оценки (3.5.19) или оценки (3.5.35) при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,\beta]$, получим

$$|u_k(t)| \le \left|\frac{\varphi_k}{C_0}\right| e^{-\lambda_k^2 t} \le M_1|\varphi_k|,$$

$$|u_k'(t)| \le \lambda_k^2\left|\frac{\varphi_k}{\delta(k)}\right| e^{-\lambda_k^2 t} \le \lambda_k^2\left|\frac{\varphi_k}{C_0}\right| \le M_2 k^2|\varphi_k|.$$

Аналогично на основании формулы (3.5.15) при $t \le 0$ при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [-\alpha, 0]$ имеем

$$|u_k(t)| = \left|\frac{\varphi_k}{\delta(k)}(\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t)\right| \le 2\lambda_k\left|\frac{\varphi_k}{C_0}\right| \le M_1 k|\varphi_k|,$$

$$|u_k'(t)| = \lambda_k\left|\frac{\varphi_k}{\delta(k)}(-\sin\lambda_k t - \lambda_k\cos\lambda_k t)\right| \le 2\lambda_k^2\left|\frac{\varphi_k}{C_0}\right| \le M_2 k^2|\varphi_k|,$$

$$|u_k''(t)| = \lambda_k^2\left|\frac{\varphi_k}{\delta(k)}(-\cos\lambda_k t + \lambda_k\sin\lambda_k t)\right| \le 2\lambda_k^3\left|\frac{\varphi_k}{C_0}\right| \le M_3 k^3|\varphi_k|. \quad ■$$

Лемма 3.5.5. *Пусть* $\varphi(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2$. *Тогда справедливо следующее представление:*

$$\varphi_k = \frac{1}{\mu_k^4}\varphi_k^{(4)}, \tag{3.5.39}$$

где

$$\varphi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi^{(4)}(x)\sin\mu_k x\,dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{(4)}|^2 \le ||\varphi^{(4)}||^2_{L_2[0,l]}. \tag{3.5.40}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям четыре раза интеграл из формулы (3.5.12). Тогда, учитывая, что $\varphi(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2$, получим представление (3.5.39). По условию функция $\varphi^{(4)}(x)$ непрерывна на $[0,l]$, тогда из теории рядов Фурье известно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k^{(4)}\right|^2$ сходится и справедливо неравенство Бесселя (3.5.40). ■

Далее перейдем к обоснованию сходимости и возможности почленного дифференцирования ряда (3.5.37). Формально из (3.5.37) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\,u_k(t)\cos\mu_k x, \tag{3.5.41}$$

$$u_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k'(t)\sin\mu_k x, \tag{3.5.42}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k''(t)\sin\mu_k x,\ t<0, \tag{3.5.43}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k^2 u_k(t)\sin\mu_k x. \tag{3.5.44}$$

Ряды (3.5.37), (3.5.41) – (3.5.44) при любом $(x,t) \in \overline{D}$ в силу лемм 3.5.4 и 3.5.5 мажорируются рядом

$$M_4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}|\varphi_k^{(4)}|. \tag{3.5.45}$$

Тогда из сходимости ряда (3.5.45) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряды (3.5.37), (3.5.41), (3.5.42) на замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (3.5.43), (3.5.44) в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_-$ и $\overline{D}_+$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (3.5.37), удовлетворяет условию (3.5.1). Подставляя ряд (3.5.37) в уравнение (3.0.1), убеждаемся в том, что функция $u(x,t)$, определенная формулой (3.5.37), удовлетворяет и условию (3.5.2).

Таким образом, доказана

Теорема 3.5.2. *Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 3.5.5 *и выполнены условия леммы* 3.5.1 *или леммы* 3.5.3, *то задача* (3.5.1) – (3.5.4) *однозначно разрешима и это решение определяется рядом* (3.5.37).

Если при указанных числах $\widetilde{\alpha}$ в лемме 3.5.2 выражение $\delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,...,k_m$, где $1\le k_1<k_2<...<k_m\le k_0$, k_n, $n=\overline{1,m}$ и m – заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (3.5.1) – (3.5.4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx=0,\quad k=k_1,...,k_l. \tag{3.5.46}$$

Тогда решение задачи (3.5.1) – (3.5.4) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+...+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)u_k(t)\sin\mu_k x+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{3.5.47}$$

где функции $u_k(t)$, $u_p(x,t)$ определяются соответственно формулами (3.5.15) и (3.5.16), A_p – произвольные постоянные, в сумме $\sum_p$ индекс p принимает значения $k_1,k_2,...,k_m$, конечные суммы выражения (3.5.47) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.5.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 3.5.5. *Тогда, если $\delta(k)\ne0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* (3.5.1) – (3.5.4) *и это решение определяется рядом* (3.5.37)*; если $\delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\ldots,k_l\le k_0$, то задача* (3.5.1) – (3.5.4) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (3.5.46) *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (3.5.47).

3.5.3. Устойчивость решения задачи

Теперь установим устойчивость решения задачи (3.5.1) – (3.5.4) по ее нелокальному условию (3.5.4).

Теорема 3.5.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5.2. *Тогда для решения* (3.5.37) *задачи* (3.5.1) – (3.5.4) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \le M_1\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]}, \quad t \ge 0, \tag{3.5.48}$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \le M_5\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]}, \quad t \le 0, \tag{3.5.49}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)} \le M_6\|\varphi(x)\|_{C^1[0,l]}, \tag{3.5.50}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)} \le M_7\|\varphi(x)\|_{C^2[0,l]}, \tag{3.5.51}$$

где постоянные M_i, $i=\overline{5,7}$, *не зависят от функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Поскольку тригонометрическая система $\{\sqrt{2/l}\sin\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы (3.5.37) и леммы 3.5.4 имеем

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \le M_1^2 \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k|^2 \le M_1^2\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{3.5.52}$$

Аналогично, исходя из формулы (3.5.37) и оценки (3.5.38), при $t \le 0$ будем иметь

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \le M_2^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2|\varphi_k|^2. \tag{3.5.53}$$

Тогда в силу представления

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi'(x)\cos\mu_k x\,dx \tag{3.5.54}$$

из неравенства (3.5.53) получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} \le \left(\frac{lM_2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty}[\varphi_k^{(1)}]^2 \le$$

$$\le \left(\frac{lM_2}{\pi}\right)^2 \|\varphi'\|^2_{L_2[0,l]} \le M_5^2\|\varphi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{3.5.55}$$

Из (3.5.52) и (3.5.55) вытекает справедливость оценок (3.5.48) и (3.5.49).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}_+$. Тогда, используя формулу (3.5.37) и представление (3.5.54), на основании леммы 3.5.4 и неравенства Коши–Буняковского будем иметь

$$|u(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| \le M_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2l}M_1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |\varphi_k^{(1)}| \le \frac{\sqrt{2l}M_1}{\pi} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(1)}|^2 \Big)^{1/2} \le$$

$$\le M_1 \sqrt{\frac{l}{3}} \|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]} \le M_6 \|\varphi(x)\|_{C^1[0,l]},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, из которого получаем оценку (3.5.50). Аналогично из (3.5.37), (3.5.38), равенства

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \quad \varphi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0 \varphi''(x) \sin \mu_k x \, dx$$

при $(x,t) \in \overline{D}_-$ получим

$$|u(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| \le M_2 \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} k|\varphi_k| \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 M_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |\varphi_k^{(2)}| \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 M_2 \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(2)}|^2 \Big)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{l}{3}} M_2 \|\varphi''(x)\|_{L_2[0,l]} \le M_7 \|\varphi(x)\|_{C^2[0,l]},$$

откуда непосредственно следует оценка (3.5.51). ■

Глава 4

Обратные задачи по отысканию правой части

В этой главе для параболо-гиперболического уравнения

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x) g_1(t), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f_2(x) g_2(t), & t < 0, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)| \quad 0 < x < l, \quad -\alpha < t < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b \geq 0$ – заданные действительные числа, доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения обратных задач по отысканию функций $u(x,t)$, $f_i(x)$ и $u(x,t)$, $g_i(t)$, $i = 1, 2$, из правой части уравнения (4.0.1).

§ 4.1. Обратная задача по отысканию правой части, зависящей от пространственной переменной

4.1.1. Постановка задачи. Единственность решения

Рассмотрим уравнение (4.0.1) в прямоугольной области D при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 1$ и $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ и на основе прямой задачи 2.1 из § 2.1 поставим следующую обратную задачу.

Задача 4.1. *Найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{4.1.1}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,l]; \tag{4.1.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4.1.3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{4.1.4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{4.1.5}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4.1.6}$$

где $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Отметим, что в постановке задачи 4.1 граничное условие (4.1.6) является дополнительным условием для определения функции $f(x)$. Здесь такое условие можно было задать и на $t = -\alpha$:

$$u_t(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{4.1.7}$$

В следующем параграфе будет изучена обратная задача (4.1.1) – (4.1.5) и (4.1.7).

Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ решение задачи (4.1.1) – (4.1.6). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.8}$$

Тогда аналогично § 2.1 получим, что функции $u_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_k, \;\; t > 0, \tag{4.1.9}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_k, \;\; t < 0, \tag{4.1.10}$$

где

$$f_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l f(x) \sin \mu_k kx \, dx, \quad \lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.11}$$

Дифференциальные уравнения (4.1.9), (4.1.10) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2}, & t > 0, \\ C_{2k} \cos \lambda_k t + C_{3k} \sin \lambda_k t + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2}, & t < 0, \end{cases} \tag{4.1.12}$$

где C_{1k}, C_{2k} и C_{3k} – произвольные постоянные. По условию функция $u(x,t)$ принадлежит классу (4.1.1), тогда для функций (4.1.12) выполнены равенства

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.13}$$

Функции (4.1.12) удовлетворяет условиям (4.1.13) только тогда, когда

$$C_{2k} = C_{1k}, \;\; C_{3k} = -\lambda_k C_{1k}. \tag{4.1.14}$$

Подставляя (4.1.14) в (4.1.12), получим

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2}, & t > 0, \\ C_{1k}(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t) + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2}, & t < 0. \end{cases} \tag{4.1.15}$$

Теперь для нахождения коэффициентов C_{1k} и f_k воспользуемся граничными условиями (4.1.5), (4.1.6) и формулой (4.1.8):

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,-\alpha)\sin\mu_k kx\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x)\sin\mu_k kx\,dx = \psi_k, \tag{4.1.16}$$

$$u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,\beta)\sin\mu_k kx\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x)\sin\mu_k kx\,dx = \varphi_k. \tag{4.1.17}$$

Удовлетворяя функции (4.1.15) условиям (4.1.16) и (4.1.17), получим систему

$$\begin{cases} C_{1k} e^{-\lambda_k^2 \beta} + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k, \\ C_{1k}(\cos\lambda_k \alpha + \lambda_k \sin\lambda_k \alpha) + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2} = \psi_k. \end{cases} \tag{4.1.18}$$

Если определитель системы (4.1.18) при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k^2\beta} \neq 0, \tag{4.1.19}$$

то она имеет единственное решение

$$C_{1k} = \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta(k)}, \tag{4.1.20}$$

$$\frac{f_k}{\lambda_k^2} = \left[\varphi_k + \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta(k)} e^{-\lambda_k^2\beta}\right]. \tag{4.1.21}$$

С учетом (4.1.20) и (4.1.21) из (4.1.15) найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k - \varphi_k}{\delta(k)} \left(e^{-\lambda_k^2 t} - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right) + \varphi_k, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_k - \varphi_k}{\delta(k)} \left(\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right) + \varphi_k, & t < 0. \end{cases} \tag{4.1.22}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (4.1.1) – (4.1.4).

Пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ и выполнены условия (4.1.19) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi_k = \varphi_k \equiv 0$ и из (4.1.22) и (4.1.21) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на $[-\alpha, \beta]$ и $f_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу (4.1.8) и (4.1.11) имеем:

$$\int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad \int_0^l f(x) \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sin \mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (4.1.1), (4.1.2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно на $\overline{D}$ и $(0, l)$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $(0, l)$.

Предположим, что условие (4.1.19) нарушено при $k = p$ и некоторых l, α, β и b, т.е.

$$\delta(p) = \cos \lambda_p \alpha + \lambda_p \sin \lambda_p \alpha - e^{-\lambda_p^2 \beta} = 0.$$

Тогда задача 4.1 при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ имеет ненулевое решение:

$$u_p(x,t) = \begin{cases} \left(e^{-\lambda_k^2 t} - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right) \sin \mu_p x, & t > 0, \\ \left(\cos \lambda_p t - \lambda_p \sin \lambda_p t - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right) \sin \mu_p x, & t < 0, \end{cases} \tag{4.1.23}$$

$$f_p(x) = -\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2 \beta} \sin \mu_p x. \tag{4.1.24}$$

Нетрудно проверить, что построенные функции (4.1.23) и (4.1.24) удовлетворяют условиям задачи (4.1.1) – (4.1.6) при $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$.

Теперь возникает вопрос о нулях выражения $\delta(k)$. Для этого его представим в следующем виде:

$$\delta(k) = \sqrt{1 + \lambda_k^2} \sin\left(\pi k \widetilde{\alpha} \widetilde{\lambda}_k + \gamma_k\right) - e^{-\lambda_k^2 \beta}, \tag{4.1.25}$$

где $\gamma_k = \arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_k^2})$, $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \big(b\,l/(\pi k)\big)^2}$. Из представления (4.1.25) видно, что выражение $\delta(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\widetilde{\alpha} = \frac{(-1)^n}{\pi k \widetilde{\lambda}_k} \arcsin\theta_\kappa + \frac{n}{k\widetilde{\lambda}_k} - \frac{\gamma_k}{\pi k \widetilde{\lambda}_k}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \tag{4.1.26}$$

здесь

$$\theta_k = \frac{e^{-\lambda_k^2 \beta}}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.1.1. *Если существует решение задачи* 4.1, *т.е. задачи* (4.1.1) – (4.1.6), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (4.1.19) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

4.1.2. Существование решения задачи

Поскольку выражение $\delta(k)$ совпадает с соответствующим $\delta(k)$ из §3.5, то при обосновании теорем существования решения задачи 4.1 воспользуемся леммами 3.5.1 – 3.5.3.

При выполнении оценки (3.5.19) или оценки (3.5.35) при всех $k \in \mathbb{N}$ решение задачи (4.1.1) – (4.1.6) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \mu_k x, \tag{4.1.27}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \mu_k x, \tag{4.1.28}$$

где f_k и $u_k(t)$ определяются соответственно формулами (4.1.21) и (4.1.22).

Для обоснования сходимости рядов (4.1.27) и (4.1.28) в классах (4.1.1) и (4.1.2) докажем следующие утверждения.

Лемма 4.1.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.5.1 *или леммы* 3.5.3. *Тогда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \le \begin{cases} M_1(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t \ge 0, \\ M_2 k(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t \le 0, \end{cases} \tag{4.1.29}$$

$$|u_k'(t)| \le \begin{cases} M_3 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t \ge 0, \\ M_3 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t \le 0, \end{cases}$$

$$|u_k''(t)| \le M_4 k^3(|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad t \le 0,$$

$$|f_k| \le M_5\Big(k^2|\varphi_k| + \frac{1}{k^2}|\psi_k|\Big), \tag{4.1.30}$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные, зависящие от l, b, α, β.

Доказательство. На основании формулы (4.1.22) и оценки (3.5.19) или оценки (3.5.35) при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, \beta]$ имеем

$$|u_k(t)| \le \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{C_0} + |\varphi_k| \le M_1(|\varphi_k| + |\psi_k|),$$

$$|u_k'(t)| = \lambda_k^2 \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{\delta(k)} e^{-\lambda_k^2 t} \le \lambda_k^2 \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{C_0} \le \widetilde{M}_1 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|),$$

где $\widetilde{M}_i$ — здесь и далее положительные постоянные.

Исходя из формул (4.1.22) и (4.1.21) аналогично при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [-\alpha, 0]$, получим

$$|u_k(t)| \le \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{\delta(k)} \left|\left(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right)\right| + \Big|\varphi_k\Big| \le$$

$$\le \left(1 + \sqrt{1 + \lambda_k^2}\right) \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{C_0} + |\varphi_k| \le M_2 k(|\varphi_k| + |\psi_k|),$$

$$|u_k'(t)| = \lambda_k \left|\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta(k)} (\sin\lambda_k t + \lambda_k \cos\lambda_k t)\right| \le$$

$$\le \lambda_k \sqrt{1 + \lambda_k^2} \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{C_0} \le \widetilde{M}_2 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|),$$

$$|u_k''(t)| = \lambda_k^2 \left|\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta(k)} (\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t)\right| \le$$

$$\le \lambda_k^2 \sqrt{1 + \lambda_k^2} \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{C_0} \le M_4 k^3(|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

$$|f_k| \le \lambda_k^2 |\varphi_k| + \frac{|\psi_k - \varphi_k|}{C_0} \frac{\lambda_k^2}{e^{\lambda_k^2 \beta}} <$$

$$< \lambda_k^2 |\varphi_k| + \frac{2|\psi_k - \varphi_k|}{C_0 \beta^2 \lambda_k^2} \le M_5\left(k^2|\varphi_k| + \frac{1}{k^2}|\psi_k|\right),$$

так как $e^x > x^2/2$. ■

Лемма 4.1.2. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2$. *Тогда справедливы следующие представления:*

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(4)}}{\mu_k^4},$$

где

$$\varphi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \psi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k^{(4)}\right|^2 \leq \int\limits_0^l \left[\varphi^{(4)}(x)\right]^2 dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\psi_k^{(4)}\right|^2 \leq \int\limits_0^l \left[\psi^{(4)}(x)\right]^2 dx. \tag{4.1.31}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям четыре раза в интегралах из формул (4.1.16) и (4.1.17). Тогда с учетом условий леммы получим

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \mu_k x \, dx = \frac{1}{\mu_k^4} \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi^{(IV)}(x) \sin \mu_k x \, dx = \frac{\varphi_k^{(4)}}{\mu_k^4},$$

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(4)}}{\mu_k^4}.$$

По условию функции $\varphi^{(IV)}(x)$, $\varphi^{(IV)}(x)$ непрерывны на $[0,l]$, тогда из теории рядов Фурье известно, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k^{(4)}\right|^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\psi_k^{(4)}\right|^2$ сходятся и справедливы неравенства Бесселя (4.1.31). ■

Теперь перейдем к обоснованию сходимости рядов (4.1.27) и (4.1.28) и допустимости почленного дифференцирования. Формально из (4.1.27) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \sin \mu_k x, \tag{4.1.32}$$

$$u_x(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k(t) \cos \mu_k x, \tag{4.1.33}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}u_k''(t)\sin\mu_k x,\quad t<0, \tag{4.1.34}$$

$$u_{xx}(x,t)=-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}{\mu_k}^2 u_k(t)\sin\mu_k x. \tag{4.1.35}$$

Тогда ряды (4.1.27), (4.1.32) – (4.1.35) при любом $(x,t)\in\overline{D}$ на основании лемм 4.1.1 и 4.1.2 мажорируются рядом

$$M_6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(4)}|+|\psi_k^{(4)}|\right). \tag{4.1.36}$$

В силу сходимости ряда (4.1.36) на основании признака Вейрштрасса сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}$ ряды (4.1.27), (4.1.32), (4.1.33), а ряды (4.1.34) и (4.1.35) на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Аналогично функция $f(x)$, определенная рядом (4.1.28), непрерывна на сегменте $[0,l]$. Непосредственной подстановкой (4.1.27) и (4.1.28) в уравнение (4.0.1) убеждаемся в том, что функции $u(x,t)$ и $f(x)$, определенные рядами (4.1.27) и (4.1.28), удовлетворяют условию (4.1.3).

Таким образом, доказана

Теорема 4.1.2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 4.1.2 *и выполнены условия леммы* 3.5.1 *или леммы* 3.5.3, *то задача* (4.1.1) – (4.1.6) *однозначно разрешима и это решение определяется рядами* (4.1.27) *и* (4.1.28).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 3.5.2 при некоторых $k=p=k_1,k_2,\ldots,k_m$, где $1\le k_1<k_2<\ldots<k_m\le k_0$, k_i, $i=\overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $\delta(p)=0$, тогда для разрешимости задачи 4.1 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^l\varphi(x)\sin\mu_k x\,dx=0,\quad \int_0^l\psi(x)\sin\mu_k x\,dx=0,\quad k=k_1,...,k_m. \tag{4.1.37}$$

В этом случае решения задачи (4.1.1) – (4.1.6) определяются в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+...+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)u_k(t)\sin\pi kx+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{4.1.38}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+...+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)f_k\sin\pi kx+\sum_{p}A_pf_p(x), \tag{4.1.39}$$

где в суммах $\sum\limits_{p}$ индекс p принимает значения $l_1,...,l_m$, $A_p\neq 0$ – произвольные постоянные, а выражения $u_k(t)$, f_k, $u_p(x,t)$ и $f_p(x)$ определяются соответственно по формулам (4.1.21) и (4.1.22) – (4.1.24), конечные суммы выражений (4.1.38) и (4.1.39) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1.3. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ является рациональным числом и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4.1.2. Тогда, если $\delta(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи (4.1.1) – (4.1.6) и это решение определяется рядами (4.1.27) и (4.1.28); если $\delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\ldots,k_m\leq k_0$, то задача (4.1.1) – (4.1.6) разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности (4.1.37) и решение в этом случае определяется в виде сумм рядов (4.1.38) и (4.1.39).*

4.1.3. Устойчивость решения

Далее установим устойчивость решений задачи (4.1.1) – (4.1.6) по граничным функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Теорема 4.1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1.2, тогда для решения (4.1.27), (4.1.28) задачи 4.1 справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leq K_1\left(\|\varphi\|_{L_2[0,l]}+\|\psi\|_{L_2[0,l]}\right),\ t\geq 0, \tag{4.1.40}$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leq K_2(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]}+\|\psi\|_{W_2^1[0,l]}),\ t\leq 0, \tag{4.1.41}$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,l]}\leq K_3(\|\varphi\|_{W_2^2[0,l]}+\|\psi\|_{W_2^0[0,l]}), \tag{4.1.42}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)}\leq K_4(\|\varphi'\|_{C[0,l]}+\|\psi'\|_{C[0,l]}), \tag{4.1.43}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)}\leq K_5(\|\varphi''\|_{C[0,l]}+\|\psi''\|_{C[0,l]}), \tag{4.1.44}$$

$$\|f(x)\|_{C[0,l]}\leq K_6(\|\varphi'''\|_{C[0,l]}+\|\psi\|_{C[0,l]}), \tag{4.1.45}$$

где постоянные K_i, $i=\overline{1,6}$, не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку тригонометрическая система $\{\sqrt{2/l}\sin\mu_kx\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы (4.1.27) и равенства Парсеваля на основании оценки (4.1.29) имеем при $t\geq 0$

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]}=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^2(t)\leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} [M_1(|\varphi_k| + |\psi_k|)]^2 \leq 2M_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2\right] \leq$$

$$\leq 2M_1^2 \left(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]}\right) \leq K_1^2 \left(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]}\right).$$

Отсюда следует справедливость оценки (4.1.40). Аналогично, исходя из соотношений (4.1.27) и (4.1.29) при $t \leq 0$, будем иметь

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [M_2 k(|\varphi_k| + |\psi_k|)]^2 \leq$$

$$\leq 2M_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k\varphi_k)^2 + (k\psi_k)^2\right]. \tag{4.1.46}$$

Учитывая представления

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi'(x) \cos \mu_k x \, dx, \tag{4.1.47}$$

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^1 \psi'(x) \cos \mu_k x \, dx, \tag{4.1.48}$$

продолжим оценку (4.1.46). Тогда получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} \leq \widetilde{K}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k^{(1)}|^2 + |\psi_k^{(1)}|^2\right],$$

$$\leq \widetilde{K}_1(\|\varphi'\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi'\|^2_{L_2[0,l]}) \leq K_2^2(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]}),$$

где $\widetilde{K}_i$ – здесь и далее положительные постоянные. Из последнего неравенства вытекает оценка (4.1.41).

На основании формулы (4.1.28) в силу оценки (4.1.30) и равенства

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \quad \varphi_k^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi''(x) \sin \mu_k x \, dx \tag{4.1.49}$$

получим

$$\|f(x)\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq M_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2|\varphi_k| + \frac{1}{k^2}|\psi_k|]^2 \leq$$

$$\le 2M_5^2\sum_{k=1}^{\infty}[k^4\varphi_k^2+\frac{1}{k^4}\psi_k^2]\le \widetilde{K}_2\sum_{k=1}^{\infty}[|\varphi_k^{(2)}|^2+|\psi_k|^2]\le$$

$$\le \widetilde{K}_2(\|\varphi''\|_{L_2}^2+\|\psi\|_{L_2}^2)\le K_3^2(\|\varphi\|_{W_2^2}^2+\|\psi\|_{W_2^0}^2),$$

откуда непосредственно следует справедливость оценки (4.1.42).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}_+$. Тогда из соотношений (4.1.27), (4.1.29), (4.1.47) и (4.1.48), используя неравенство Коши–Буняковского и равенство $\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2=\pi^2/6$, получим

$$|u(x,t)|\le\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(t)|\le\sqrt{\frac{2}{l}}M_1\sum_{k=1}^{\infty}[|\varphi_k|+|\psi_k|]\le$$

$$\le \widetilde{K}_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\varphi_k^{(1)}|+|\psi_k^{(1)}|)\le$$

$$\le \widetilde{K}_3\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right]\le$$

$$\le\frac{\widetilde{K}_3\pi}{\sqrt{6}}(\|\varphi'\|_{L_2}+\|\psi'\|_{L_2})\le K_4(\|\varphi\|_{W_2^1}+\|\psi\|_{W_2^1}).\qquad(4.1.50)$$

Аналогично из (4.1.27), (4.1.29), (4.1.49) и равенства

$$\psi_k=\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2},\quad \psi_k^{(2)}=-\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\psi''(x)\sin\mu_k x\,dx$$

при $(x,t)\in\overline{D}_-$ имеем

$$|u(x,t)|\le\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(t)|\le\sqrt{\frac{2}{l}}M_2\sum_{k=1}^{\infty}k(|\varphi_k|+|\psi_k|)\le$$

$$\le \widetilde{K}_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\varphi_k^{(2)}|+|\psi_k^{(2)}|)\le$$

$$\le \widetilde{K}_4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(2)}|^2\right)^{1/2}\right]\le$$

$$\le\frac{\widetilde{K}_3\pi}{\sqrt{6}}(\|\varphi''\|_{L_2}+\|\psi''\|_{L_2})\le K_5(\|\varphi\|_{W_2^2}+\|\psi\|_{W_2^2}).\qquad(4.1.51)$$

Из неравенств (4.1.50) и (4.1.51) вытекают оценки (4.1.43) и (4.1.44).

Пользуясь формулой (4.1.28), равенством

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad \varphi_k^{(3)} = -\sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi'''(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

и оценкой (4.1.30), будем иметь

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} M_5 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2 |\varphi_k| + \frac{1}{k^2} |\psi_k|] \leq$$

$$\leq \widetilde{K}_5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k|) \leq$$

$$\leq \widetilde{K}_5 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^2 \right)^{1/2} \right] \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{K}_5 \pi}{\sqrt{6}} (\|\varphi'''\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2}) \leq K_6 (\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^0}),$$

откуда следует справедливость оценки (4.1.45). ■

§ 4.2. Обратная задача по отысканию правой части, зависящей от пространственной переменной, с другим дополнительным граничным условием

В этом параграфе для уравнения (4.0.1) при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 1$ и $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ изучим задачу (4.1.1) – (4.1.5) с новым дополнительным условием (4.1.7).

4.2.1. Постановка задачи. Единственность решения

Задача 4.2. *Найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{4.2.1}$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l]; \tag{4.2.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4.2.3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4.2.4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{4.2.5}$$

$$u_t(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4.2.6}$$

где $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\psi(0) = \psi(l) = g(0) = g(l) = 0$*,* $D_+ = D \cap \{t > 0\}$*,* $D_- = D \cap \{t < 0\}$*.*

Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ – решение задачи (4.2.1) – (4.2.6). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2.7}$$

Аналогично § 4.1 для функции $u_k(t)$ получаем следующую краевую задачу на сопряжение:

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_k, \;\; t > 0, \tag{4.2.8}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_k, \;\; t < 0, \tag{4.2.9}$$

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \tag{4.2.10}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx = \psi_k, \tag{4.2.11}$$

$$u_k'(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g(x) \sin \mu_k x \, dx = g_k, \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{4.2.12}$$

где

$$f_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l f(x) \sin \mu_k x \, dx, \; \lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{4.2.13}$$

Единственное решение задачи (4.2.8) – (4.2.12) определяется по формуле

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{g_k}{\lambda_k s(k)} \left(e^{-\lambda_k^2 t} - \cos \lambda_k \alpha - \lambda_k \sin \lambda_k \alpha \right) + \psi_k, & t > 0, \\ \dfrac{g_k}{\lambda_k s(k)} \Big[\cos \lambda_k t - \cos \lambda_k \alpha - \\ \qquad -\lambda_k \left(\sin \lambda_k t + \sin \lambda_k \alpha \right) \Big] + \psi_k, & t < 0, \end{cases} \tag{4.2.14}$$

$$f_k = \left[\psi_k - \frac{g_k}{\lambda_k s(k)} \left(\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha\right)\right]\lambda_k^2 \tag{4.2.15}$$

при условии, что

$$s(k) = \sin\lambda_k\alpha - \lambda_k\cos\lambda_k\alpha \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2.16}$$

Теперь докажем единственность решения задачи 4.2. Пусть $\psi(x) = g(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ и выполнены условия $s(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi_k = g_k \equiv 0$ и из (4.2.14) и (4.2.15) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на $[-\alpha, \beta]$ и $f_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу (4.2.7) и (4.2.13) имеем:

$$\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int\limits_0^l f(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу полноты системы $\{\sqrt{2/l}\sin\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (4.2.1), (4.2.2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно на $\overline{D}$ и $(0,l)$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $(0,l)$.

Предположим, что условия (4.2.16) нарушены при $k = p \in \mathbb{N}$ и некоторых l, α и b, т.е.

$$s(p) = \sin\lambda_p\alpha - \lambda_p\cos\lambda_p\alpha = 0.$$

Тогда задача 4.2 при $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$ имеет ненулевое решение:

$$u_p(x,t) = \begin{cases} C_p\left[e^{-\lambda_p^2 t} - \cos\lambda_p\alpha - \lambda_p\sin\lambda_p\alpha\right]\sin\mu_p x, & t > 0, \\ C_p\Big[\cos\lambda_p t - \cos\lambda_p\alpha - \\ \qquad -\lambda_p\left(\sin\lambda_p t + \sin\lambda_p\alpha\right)\Big]\cos\mu_p x, & t < 0, \end{cases} \tag{4.2.17}$$

$$f_p(x) = -\lambda_p^2 C_p\left(\cos\lambda_p\alpha + \lambda_p\sin\lambda_p\alpha\right)\sin\mu_p x, \tag{4.2.18}$$

где $C_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

Построенные функции (4.2.17) и (4.2.18) удовлетворяют условиям (4.2.1) – (4.2.4) и

$$u_p(x,-\alpha) = 0, \quad u_{pt}(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{4.2.19}$$

Найдем нули выражения $s(k)$. Для этого его представим в виде

$$s(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\sin\left(\lambda_k\alpha - \gamma_k\right) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\sin\left(\pi k\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_k - \gamma_k\right), \tag{4.2.20}$$

где $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2}$, $\gamma_k = \arcsin(\lambda_k/\sqrt{1+\lambda_k^2})$. Отсюда найдем нули

$$\widetilde{\alpha} = \frac{n}{k\widetilde{\lambda}_k} + \frac{\gamma_k}{\pi k \widetilde{\lambda}_k}, k, n \in \mathbb{N}. \qquad (4.2.21)$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.2.1. *Если существует решение задачи* 4.2, *т.е. задачи* (4.2.1) – (4.2.6), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (4.2.16) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

4.2.2. Существование решения задачи

Поскольку выражение $s(k)$ находится в знаменателе формул коэффициентов (4.2.14), (4.2.15) и имеет счетное множество нулей (4.2.21) относительно $\widetilde{\alpha}$, то имеем проблему малых знаменателей. Поэтому необходимо установить оценки об отделенности от нуля $s(k)$.

Лемма 4.2.1. *Если* $b = 0$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *является произвольным натуральным числом, то существует постоянная* $C_0 > 0$, *такая, что при любом* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место оценка*

$$|s(k)| \geq C_0 k > 0. \qquad (4.2.22)$$

Доказательство. По условию $b = 0$, тогда $\widetilde{\lambda}_k \equiv 1$ и из равенства (4.2.20) при $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$ имеем

$$|s(k)| = \sqrt{1+\lambda_k^2}\,|\sin(\pi k p - \gamma_k)| = \lambda_k \geq \frac{\pi}{l} k = C_0 k. \ \blacksquare$$

Лемма 4.2.2. *Если* $b \geq 0$ *и* $\widetilde{\alpha} = p/q$ – *произвольное рациональное число, где* $p, q \in \mathbb{N}$, $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ *и* $(q, 2) = 1$. *Тогда существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $k_0 \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k > k_0$

$$|s(k)| \geq C_0 k > 0. \qquad (4.2.23)$$

Доказательство. При $\widetilde{\alpha} = p/q$ на основании (3.5.21) выражение (4.2.20) принимает вид

$$s(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\sin\left(\pi k \frac{p}{q} + \frac{p}{q}\widetilde{\theta}_k - \gamma_k\right), \qquad (4.2.24)$$

где $\widetilde{\theta}_k = \pi k \theta_k$, а для θ_k справедлива оценка (3.5.22).

Разделим kp на q с остатком $kp = sq + r$, $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \le r \le q-1$, тогда из равенства (4.2.24) получим

$$s(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}(-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p}{q}\widetilde{\theta}_k - \gamma_k\right). \tag{4.2.25}$$

Отсюда, поскольку выражение $\sin\left(\dfrac{\pi r}{q} + \dfrac{p}{q}\widetilde{\theta}_k - \gamma_k\right)$ имеет конечный предел при $k \to +\infty$, можно получить оценку для $|s(k)|$. Действительно, существует натуральное число k_2, такое, что при всех $k > k_2$

$$|s(k)| \ge \frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_k^2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right|. \tag{4.2.26}$$

Если $r = 0$, то из (4.2.26) следует, что

$$|s(k)| \ge C_1 k, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{4.2.27}$$

Если $r > 0$, то $1 \le r \le q-1$, $q \ge 2$, и потребуем, чтобы $\cos\dfrac{\pi r}{q} \ne 0$. Так как

$$\frac{\pi}{q} \le \frac{\pi r}{q} \le \pi - \frac{\pi}{q},$$

то надо исключить значение, когда $\pi r/q = \pi/2$, т.е. тогда, когда $(q,2) = l > 1$. По условию $(q,2) = 1$, поэтому из неравенства (4.2.26) имеем

$$|s(k)| \ge C_2 k, \quad C_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{4.2.28}$$

Следовательно, из доказанных неравенств (4.2.27) и (4.2.28) следует требуемая оценка (4.2.23). ■

Теперь построим решение задачи 4.2. Пусть выполнены условия леммы 4.2.1. Тогда решение задачи (4.2.1) – (4.2.6) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\mu_k x, \tag{4.2.29}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\mu_k x, \tag{4.2.30}$$

где $u_k(t)$ и f_k определяются соответственно формулами (4.2.14), (4.2.15).

Для обоснования сходимости рядов (4.2.29) и (4.2.30) и допустимости почленного дифференцирования докажем следующие утверждения.

Лемма 4.2.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2.1. *Тогда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и* $t \in [-\alpha, \beta]$ *справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \le C_3 \left(\frac{1}{k} |g_k| + |\psi_k| \right), \tag{4.2.31}$$

$$|u_k'(t)| \le C_4 |g_k|, \tag{4.2.32}$$

$$|u_k''(t)| \le C_5 k |g_k|, \quad t \le 0, \tag{4.2.33}$$

$$|f_k| \le C_6 (k^2 |\psi_k| + k |g_k|), \tag{4.2.34}$$

где C_i *– положительные постоянные.*

Действительно, из формул (4.2.14) и (4.2.15) в силу оценки (4.2.22) непосредственно следует справедливость оценок (4.2.32) – (4.2.34). ■

Формально из (4.2.29) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \sin \mu_k x, \tag{4.2.35}$$

$$u_x(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k(t) \cos \mu_k x, \tag{4.2.36}$$

$$u_{tt}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t) \sin \mu_k x, \quad t < 0, \tag{4.2.37}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} {\mu_k}^2 u_k(t) \sin \mu_k x. \tag{4.2.38}$$

Ряды (4.2.29), (4.2.35) и (4.2.36) в силу леммы 4.2.3 при любой точке $(x,t) \in \overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_7 \sum_{k=1}^{\infty} \left(|g_k| + k |\psi_k| \right), \tag{4.2.39}$$

а ряды (4.2.37), (4.2.38) и (4.2.30) – рядом

$$C_8 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|g_k| + k |\psi_k| \right). \tag{4.2.40}$$

Лемма 4.2.4. *Пусть $g(x) \in C^2[0,l]$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $g(0) = g(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = \varphi''(0) = \psi''(l) = 0$. Тогда справедливы равенства*

$$g_k = -\frac{g_k^{(2)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \tag{4.2.41}$$

где

$$g_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g''(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \psi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi'''(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|g_k^{(2)}\right|^2 \le \|g''(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\psi_k^{(3)}\right|^2 \le \|\psi'''(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{4.2.42}$$

Доказательство. Интегрируя по частям два и три раза соответственно в интегралах равенств (4.2.12) и (4.2.11), получим требуемые равенства (4.2.41). Из теории рядов Фурье следует справедливость оценок (4.2.42). ■

Тогда ряды (4.2.39) и (4.2.40) на основании леммы 4.2.4 мажорируются сходящимся рядом

$$C_9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(|g_k^{(2)}| + |\psi_k^{(3)}| \right). \tag{4.2.43}$$

Поэтому ряды (4.2.29), (4.2.35) и (4.2.36) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (4.2.37), (4.2.38) и (4.2.30) – равномерно на замкнутых областях $\overline{D}_-$ и $\overline{D}_+$.

Таким образом, доказана

Теорема 4.2.2. *Если функции $g(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 4.2.4 *и выполнены условия леммы* 4.2.1, *то задача* (4.2.1) – (4.2.6) *однозначно разрешима и это решение определяется рядами* (4.2.29) *и* (4.2.30).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 4.2.2 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1, m}$, m – заданные натуральные числа, $s(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи 4.2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int\limits_0^l g(x) \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad \int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad k = k_1, ..., k_m. \tag{4.2.44}$$

В этом случае решения задачи (4.2.1) – (4.2.6) определяются в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+...+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)u_k(t)\sin\pi kx+\sum_p u_p(x,t), \tag{4.2.45}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+...+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)f_k\sin\pi kx+\sum_p f_p(x), \tag{4.2.46}$$

где в суммах $\sum\limits_p$ индекс p принимает значения $l_1,...,l_m$, а функции $u_p(x,t)$ и $f_p(x)$ определяются соответственно по формулам (4.2.17) и (4.2.18), конечные суммы выражений (4.2.45) и (4.2.46) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2.3. *Пусть* $\widetilde{\alpha}$ *является рациональным числом и функции* $g(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4.2.4. *Тогда, если* $s(k)\neq 0$ *при* $k=\overline{1,k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (4.2.1) – (4.2.6) *и это решение определяется рядами* (4.2.29) *и* (4.2.30)*; если* $s(k)=0$ *при некоторых* $k=k_1,k_2,\dots,k_m\leq k_0$, *то задача* (4.2.1) – (4.2.6) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (4.2.44) *и решение в этом случае определяется в виде сумм рядов* (4.2.45) *и* (4.2.46).

4.2.3. **Устойчивость решения**

Теорема 4.2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2.2, *тогда для решения* (4.2.29), (4.2.30) *задачи* 4.2 *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leq C_{10}\left(\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|g(x)\|_{L_2[0,l]}\right),$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,l]}\leq C_{11}(\|\psi(x)\|_{W_2^1[0,l]}+\|g(x)\|_{W_2^2[0,l]}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leq C_{12}(\|\psi'(x)\|_{C[0,l]}+\|g(x)\|_{C[0,l]}),$$

$$\|f(x)\|_{C[0,l]}\leq C_{13}(\|\psi'''(x)\|_{C[0,l]}+\|g''(x)\|_{C[0,l]}),$$

где положительные постоянные C_i, не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $i=\overline{10,13}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4.1.5.

§ 4.3. Обратная задача по отысканию правых частей, зависящих от пространственной переменной

4.3.1. Постановка задачи. Единственность решения

Рассмотрим уравнение (4.0.1) в прямоугольной области D при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 1$ и $f_1(x) \neq f_2(x)$ и на основании задач 4.1 и 4.2 поставим следующую обратную задачу.

Задача 4.3. *Найти функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{4.3.1}$$

$$f_i(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l], \quad i = 1, 2; \tag{4.3.2}$$

$$Lu(x,t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0, \\ f_2(x), & t < 0; \end{cases} \tag{4.3.3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{4.3.4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{4.3.5}$$

$$u_t(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{4.3.6}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4.3.7}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$.

Пусть $u(x,t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$ – решение задачи (4.3.1) – (4.3.7). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3.8}$$

На основании (4.3.8) введем функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.3.9}$$

где ε – достаточно малое число. По аналогии с § 2.1 дифференцируя равенство (4.3.9) один раз по t при $t > 0$ и два раза при $t < 0$, учитывая уравнение (4.0.1) и условия (4.3.4), интегрируем по частям два раза в интегралах, содержащих u_{xx}, затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $u_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_{1k}, \quad t > 0, \tag{4.3.10}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_{2k}, \quad t < 0, \tag{4.3.11}$$

где

$$f_{ik} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l f_i(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \ \ i = 1, 2. \tag{4.3.12}$$

Дифференциальные уравнения (4.3.10), (4.3.11) имеют общие решения:

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + C_{2k} \cos \lambda_k t + C_{3k} \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \tag{4.3.13}$$

где C_{1k}, C_{2k} и C_{3k} – произвольные постоянные. Поскольку решение удовлетворяет условию (4.3.1), то для функций (4.3.13) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0), \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Эти условия выполнены тогда, когда

$$C_{2k} = \frac{f_{1k} - f_{2k}}{\lambda_k^2} + C_{1k}, \ \ C_{3k} = -\lambda_k C_{1k}.$$

С учетом найденных значений C_{2k} и C_{3k} функции (4.3.13) примут вид

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{f_{1k}}{\lambda_k^2}, & t > 0, \\ \left(\dfrac{f_{1k} - f_{2k}}{\lambda_k^2} + C_{1k} \right) \cos \lambda_k t - \lambda_k C_{1k} \sin \lambda_k t + \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & t < 0. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Из условий (4.3.5) – (4.3.7), пользуясь формулой (4.3.8), будем иметь

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,-\alpha)\sin\mu_k x\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx = \psi_k, \tag{4.3.15}$$

$$u'_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u_t(x,-\alpha)\sin\mu_k x\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g(x)\sin\mu_k x\,dx = g_k, \tag{4.3.16}$$

$$u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,\beta)\sin\mu_k x\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx = \varphi_k. \tag{4.3.17}$$

Удовлетворяя функции (4.3.14) условиям (4.3.15) – (4.3.17), получим относительно неизвестных C_{1k}, f_{1k} и f_{2k} систему

$$\left\{\begin{array}{l} f_{1k} + C_{1k}\lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2\beta} = \lambda_k^2\varphi_k, \\ f_{1k}\cos\lambda_k\alpha + f_{2k}(1-\cos\lambda_k\alpha) + C_{1k}\lambda_k^2(\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha) = \lambda_k^2\psi_k, \\ f_{1k}\sin\lambda_k\alpha - f_{2k}\sin\lambda_k\alpha + C_{1k}\lambda_k^2(\sin\lambda_k\alpha - \lambda_k\cos\lambda_k\alpha) = \lambda_k g_k. \end{array}\right. \tag{4.3.18}$$

Определитель системы (4.3.18) равен $\lambda_k^2\Delta(k)$ и при условии

$$\Delta(k) = \lambda_k(1-\cos\lambda_k\alpha) + (1-e^{-\lambda_k^2\beta})\sin\lambda_k\alpha \neq 0, \quad k\in\mathbb{N} \tag{4.3.19}$$

данная система имеет единственное решение:

$$C_{1k} = \frac{1}{\lambda_k\Delta(k)}\Big[\lambda_k(\psi_k-\varphi_k)\sin\lambda_k\alpha + g_k(1-\cos\lambda_k\alpha)\Big], \tag{4.3.20}$$

$$\frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} = \varphi_k + \frac{1}{\lambda_k\Delta(k)}\Big[\lambda_k(\varphi_k-\psi_k)\sin\lambda_k\alpha - g_k(1-\cos\lambda_k\alpha)\Big]e^{-\lambda_k^2\beta}, \tag{4.3.21}$$

$$\frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} = \psi_k + \frac{1}{\lambda_k\Delta(k)}\Big[\lambda_k^2(\varphi_k-\psi_k) - g_k[(1-e^{-\lambda_k^2\beta})\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha]\Big]. \tag{4.3.22}$$

Теперь, подставляя (4.3.20) – (4.3.22) в (4.3.14), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_k \Delta(k)} \Big[\lambda_k \varphi_k \Delta(k) + \lambda_k \psi_k \sin \lambda_k \alpha \left(e^{-\lambda_k^2 t} - e^{-\lambda_k^2 \beta} \right) + \\ \qquad + g_k \left(1 - \cos \lambda_k \alpha\right) \left(e^{-\lambda_k^2 t} - e^{-\lambda_k^2 \beta} \right) \Big], \qquad t > 0, \\ \dfrac{1}{\lambda_k \Delta(k)} \Big\{ \lambda_k^2 \varphi_k \left(1 - \cos \lambda_k (t + \alpha)\right) + \\ \quad + \lambda_k \psi_k \left[\lambda_k (\cos \lambda_k (t + \alpha) - 1) + \Delta(k) \right] + \\ \qquad + g_k \Big[(\cos \lambda_k t - \cos \lambda_k \alpha) \left(1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right) + \\ \qquad\quad + \lambda_k \left[\sin \lambda_k (t + \alpha) - \sin \lambda_k t - \sin \lambda_k \alpha \right] \Big] \Big\}, \qquad t < 0. \end{cases} \tag{4.3.23}$$

Докажем единственность решения задачи (4.3.1) – (4.3.7). Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ и выполнены условия (4.3.19) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi_k = \varphi_k = g_k \equiv 0$ и из (4.3.21) – (4.3.23) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на $[-\alpha, \beta]$ и $f_{ik} = 0, \;\; i = 1, 2$, при всех $k \in \mathbb{N}$. Из (4.3.8) и (4.3.12) имеем:

$$\int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad \int\limits_0^l f_i(x) \sin \mu_k x \, dx = 0, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2/l} \sin \mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ и $f_i(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (4.3.1), (4.3.2) функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$ непрерывны соответственно на $\overline{D}$ и $(0, l)$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f_i(x) \equiv 0$ на $(0, l)$.

Пусть условия (4.3.19) нарушены при $k = p \in \mathbb{N}$ и некоторых l, α, β и b, т.е.

$$\Delta(p) = \lambda_p (1 - \cos \lambda_p \alpha) + (1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}) \sin \lambda_p \alpha = 0. \tag{4.3.24}$$

Последнее равенство в силу представления $\Delta(k)$ в виде:

$$\Delta(k) = 2 \sqrt{\lambda_k^2 + \left(1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right)^2} \sin\left(\frac{\lambda_k \alpha}{2} + \gamma_k \right) \sin \frac{\lambda_k \alpha}{2}, \tag{4.3.25}$$

где

$$\gamma_k = \arcsin \frac{1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}}{\sqrt{\lambda_k^2 + \left(1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}\right)^2}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{2 \pi n}{\lambda_p}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.3.26}$$

или
$$\alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_p} - \frac{2\gamma_p}{\lambda_p}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.3.27}$$

Тогда задача 4.3 при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$ и $\sin \lambda_p \alpha \neq 0$ имеет ненулевое решение:

$$u_p(x,t) = \begin{cases} \left(e^{-\lambda_p^2 t} - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right) \sin \mu_p x, & t > 0, \\ \dfrac{\sin \mu_p x}{\sin \lambda_p \alpha} \Big\{ \left[\lambda_p + \left(1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right) \sin \lambda_p \alpha\right] \cos \lambda_p t - & \\ \qquad\qquad - \lambda_p - \lambda_p \sin \lambda_p t \sin \lambda_p \alpha \Big\}, & t < 0, \end{cases} \tag{4.3.28}$$

$$f_{1p}(x) = -\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2 \beta} \sin \mu_p x, \quad f_{2p}(x) = -\frac{\lambda_p^3}{\sin \lambda_p \alpha} \sin \mu_p x. \tag{4.3.29}$$

Легко установить, что построенные функции (4.3.28) и (4.3.29) удовлетворяют условиям (4.3.1) – (4.3.4) и

$$u_p(x,-\alpha) = 0, \;\; u_{pt}(x,-\alpha) = 0, \;\; u_p(x,\beta) = 0, \;\; 0 \le x \le l. \tag{4.3.30}$$

Здесь покажем выполнение условий (4.3.30). Действительно, в силу условия (4.3.24) имеем

$$u_p(x,-\alpha) = \frac{\sin \mu_p x}{\sin \lambda_p \alpha} \Big\{ \left[\left(1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right) \sin \lambda_p \alpha + \lambda_p\right] \times$$

$$\times \cos \lambda_p \alpha - \lambda_p + \lambda_p \sin^2 \lambda_p \alpha \Big\} =$$

$$= \frac{\sin \mu_p x}{\sin \lambda_p \alpha} \Big\{ \left[\left(1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right) \sin \lambda_p \alpha + \lambda_p\right] \cos \lambda_p \alpha - \lambda_p \cos^2 \lambda_p \alpha \Big\} =$$

$$= \frac{\sin \mu_p x}{\sin \lambda_p \alpha} \left[\lambda_p \left(1 - \cos \lambda_p \alpha\right) + \left(1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right) \sin \lambda_p \alpha\right] \cos \lambda_p \alpha = 0,$$

$$u_{pt}(x,-\alpha) = \left[\lambda_p \left(1 - \cos \lambda_p \alpha\right) + \left(1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right) \sin \lambda_p \alpha\right] \lambda_p \sin \pi p x = 0,$$

$$u_p(x,\beta) = \left[-e^{-\lambda_p^2 \beta} + e^{-\lambda_p^2 \beta}\right] \sin \pi p x = 0.$$

Если $\sin \lambda_p \alpha = 0$, то

$$u_p(x,t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ \dfrac{f_{2p}}{\lambda_p^2} \left(1 - \cos \lambda_p t\right) \sin \mu_p x, & t < 0, \end{cases} \tag{4.3.31}$$

$$f_{1p}(x) = 0, \quad f_{2p}(x) = f_{2p}\sin\mu_p x, \tag{4.3.32}$$

где $f_{2p} \neq 0$ – произвольная постоянная.

Отметим, что функции (4.3.31) и (4.3.32) являются решением задачи 4.3 при однородных граничных условиях, когда $\sin\lambda_p\alpha = 0$.

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.3.1. *Если существует решение задачи* 4.3, *т.е. задачи* (4.3.1) – (4.3.7), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (4.3.19) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

4.3.2. Существование решения задачи

Теперь построим решения задачи 4.3. Поскольку выражение $\Delta(k)$ может обратиться в нуль при указанных выше значениях (4.3.26) и (4.3.27) параметра α, то вначале ответим на вопрос: при каких α, β, l и b выражение $\Delta(k)$ отделено от нуля? Надо отметить, что при $b = 0$ выражение (4.3.26) принимает вид $\widetilde{\alpha} = \alpha/l = 2n/k$. Поэтому, когда $\widetilde{\alpha}$ принимает рациональные значения $\Delta(k) = 0$. Следовательно, для таких $\widetilde{\alpha}$ решение задачи 4.3 вообще в виде ряда может не существовать.

Лемма 4.3.1. *Если* $\alpha_1 = \alpha\big/2l$ *является произвольным рациональным числом и* $b > 0$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $k_0 \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$\big|\Delta(k)\big| > \frac{C_0}{k}. \tag{4.3.33}$$

Доказательство. По условию $b > 0$, тогда с учетом равенства

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}\sqrt{1 + \Big(b\,l\big/\pi k\Big)^2} = \frac{\pi k}{l}\widetilde{\lambda}_k, \quad \widetilde{\lambda}_k = 1 + \theta_k,$$

где для θ_k при всех $k > k_1 = b\,l/\pi$ справедлива оценка (3.5.22), представление (4.3.25) примет вид

$$\Delta(k) = A_k \sin(\pi k\alpha_1 + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k)\sin(\pi k\alpha_1 + \alpha_1\widetilde{\theta}_k), \tag{4.3.34}$$

здесь

$$A_k = 2\sqrt{\lambda_k^2 + \left(1 - e^{-\lambda_k^2\beta}\right)^2}, \quad \widetilde{\theta}_k = \pi k\theta_k, \quad \alpha_1 = \frac{\widetilde{\alpha}}{2} = \frac{\alpha}{2l}.$$

Пусть $\alpha_1 = p/q$, p, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$. Разделим kp на q с остатком $kp = sq + r$, s, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \le r < q$. Тогда имеем

$$\Delta(k) = A_k \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \alpha_1 \widetilde{\theta}_k\right). \qquad (4.3.35)$$

Если в (4.3.35) число $r = 0$, то

$$\Delta(k) = A_k \sin(\alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k) \sin \alpha_1 \widetilde{\theta}_k. \qquad (4.3.36)$$

Поскольку последовательности $\widetilde{\theta}_k$ и γ_k являются бесконечно малыми, то существует число $k_2 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда на основании неравенства

$$|\sin x| > \frac{2}{\pi}|x|, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

из равенства (4.3.36), получим

$$|\Delta(k)| > \frac{4}{\pi^2} A_k (\alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k) \alpha_1 \widetilde{\theta}_k \ge$$

$$\ge \frac{4}{\pi^2} A_k \left(\frac{3\alpha_1}{8} \frac{(b\,l)^2}{\pi k} + \frac{1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}}{A_k}\right) \frac{3\alpha_1 (b\,l)^2}{8\pi k} \ge \frac{\widetilde{C}_1}{k}, \qquad (4.3.37)$$

здесь $\widetilde{C}_i$ и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от l, α, β и b.

Если $r > 0$, то $1 \le r \le q - 1$, $q \ge 2$ и из существования конечных пределов выражений $\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \alpha_1 \widetilde{\theta}_k\right)$ при $k \to +\infty$ следует, что существует $k_3 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_3$ из (4.3.34) имеем

$$|\Delta(k)| \ge A_k \sin^2 \frac{\pi r}{q} \ge k \widetilde{C}_2. \qquad (4.3.38)$$

Тогда из установленных неравенств (4.3.37) и (4.3.38) при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ следует справедливость оценки (4.3.33). ■

Отметим, что каждое иррациональное число α единственным образом разлагается в бесконечную цепную дробь $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, при этом целое число a_0 и натуральные числа

$a_1, a_2, \ldots$ называются элементами числа α. Как известно [140, с. 62], элементы всякой квадратической иррациональности ограничены.

Лемма 4.3.2. *Пусть α_1 – положительное иррациональное число с неограниченными элементами, $b = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество натуральных чисел k, таких, что*

$$|\Delta(k)| < \frac{\varepsilon C_1}{k}, \tag{4.3.39}$$

где C_1 – положительное число, зависящее от α_1.

Доказательство. В силу теоремы 23 [140, с. 49] для всякого иррационального числа α_1 с неограниченными элементами при любом $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество пар целых чисел (k, m), $k > 0$, таких, что

$$\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{k^2}. \tag{4.3.40}$$

Тогда из равенства (4.3.25) на основании оценки (4.3.40) имеем

$$\big|\Delta(k)\big| < 2\left(1 + \frac{\pi k}{l}\right)\left|\sin\left(\pi k\alpha_1 + \gamma_k\right)\right|\big|\sin\pi k\alpha_1\big| \le$$

$$\le \widetilde{C}_3 k\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right) + \gamma_k\right]\right|\left|\sin\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\right| \le$$

$$\le \widetilde{C}_3 \pi^2 k^3\left|\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| + \left|\frac{\gamma_k}{\pi k}\right|\right| \cdot \left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| < \frac{\varepsilon C_1}{k}. \quad \blacksquare$$

Из доказанной оценки (4.3.39) следует, что для таких $\alpha_1 > 0$ выражение $\Delta(k)$, которое является знаменателем отношений (4.3.20) – (4.3.22), может быть сделано сколь угодно малым за счет малости ε. Поэтому в этом случае решение задачи 4.3 в виде суммы рядов не существует.

По аналогии с § 2.1 рассмотрим случай, когда $\alpha_1 = \alpha/2l$ является иррациональным алгебраическим числом степени два, т.е. является корнем многочлена (2.1.52):

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - \alpha_1)(a_2x + a_2\alpha_1 + a_1),$$

при этом $a_1 + 2\alpha_1 a_2 > 0$. Далее на основании теоремы Лиувилля существует число $\delta > 0$, такое, что при любых целых n и k $(k > 0)$ выполняется неравенство (2.1.46):

$$\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| \ge \frac{\delta}{k^2}.$$

Из доказательства леммы 2.1.3 число δ определяется по формуле (2.1.57) при условии (2.1.58). Теперь потребуем, чтобы постоянные α_1, l, b и δ удовлетворяли неравенствам

$$\delta - \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi}\right)^2 - \frac{l}{2\pi} > 0, \tag{4.3.41}$$

$$\frac{\alpha_1}{2\pi}(b\,l)^2 + \frac{l}{2} < \frac{\pi}{2}. \tag{4.3.42}$$

Лемма 4.3.3. *Пусть α_1 – иррациональное алгебраическое число степени два, $b\,l < \pi$ и выполнены условия* (4.3.41) *и* (4.3.42)*, где δ определяется по формуле* (2.1.57) *при условии* (2.1.58)*. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$, зависящая от α_1, l и b, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\left|\Delta(k)\right| > \frac{C_0}{k}. \tag{4.3.43}$$

Доказательство. В этом случае представление (4.3.34) перепишем в виде

$$\Delta(k) = A_k \Delta_1(k)\Delta_2(k), \tag{4.3.44}$$

$$\Delta_1(k) = \sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right],$$

$$\Delta_2(k) = \sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right],$$

где n – любое натуральное число. Затем аналогично доказательству леммы 2.1.3 установим оценки

$$\begin{aligned} \left|\Delta_1(k)\right| &\geq \frac{2}{k}\left[\delta - \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi}\right)^2 - \frac{l}{2\pi}\right], \\ \left|\Delta_2(k)\right| &\geq \frac{2}{k}\left[\delta - \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{4.3.45}$$

Из (4.3.44) на основании оценок (4.3.45) нетрудно получить требуемое неравенство (4.3.43). ■

При выполнении оценки (4.3.43) или оценки (4.3.33) при всех $k > k_0$ и неравенства (4.3.19) при $k = 1, 2, \ldots, k_0$ решение задачи (4.3.1) – (4.3.7) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\mu_k x, \tag{4.3.46}$$

$$f_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \sin \mu_k x, \quad i = 1, 2, \tag{4.3.47}$$

где $u_k(t)$ и f_{ik} определяются соответственно формулами (4.3.23) и (4.3.21), (4.3.22).

Для обоснования сходимости рядов (4.3.46) и (4.3.47) в классах (4.3.1) и (4.3.2) докажем следующие леммы.

Лемма 4.3.4. *Пусть выполнены условия леммы* 4.3.1 *или леммы* 4.3.3*. Тогда при $k > k_0$ справедливы оценки:*

$$|f_{1k}| \leq M_1 \left[k^2|\varphi_k| + |\psi_k| + |g_k|\right], \tag{4.3.48}$$

$$|f_{2k}| \leq M_2 k^3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right], \tag{4.3.49}$$

$$|u_k(t)| \leq \begin{cases} M_3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right], & t \geq 0, \\ M_5 k \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right], & t \leq 0, \end{cases} \tag{4.3.50}$$

$$|u_k'(t)| \leq \begin{cases} M_4 k^2 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + \dfrac{1}{k}|g_k|\right], & t \geq 0, \\ M_5 k^2 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right], & t \leq 0, \end{cases}$$

$$|u_k''(t)| \leq M_5 k^3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right], \quad t < 0,$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Учитывая, например, оценку (4.3.33) для C_{1k} из (4.3.20) будем иметь

$$|C_{1k}| = \left| \frac{\lambda_k(\psi_k - \varphi_k) \sin \lambda_k \alpha + g_k(1 - \cos \lambda_k \alpha)}{\lambda_k \Delta(k)} \right| \leq$$

$$\leq M_0 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right]. \tag{4.3.51}$$

Исходя из оценки (4.3.33) и равенств (4.3.21), (4.3.22) получим

$$|f_{1k}| = \lambda_k^2 \left| \varphi_k + \frac{\lambda_k(\varphi_k - \psi_k) \sin \lambda_k \alpha - g_k(1 - \cos \lambda_k \alpha)}{\lambda_k \Delta(k)} e^{-\lambda_k^2 \beta} \right| \leq$$

$$\leq M_1 \left[k^2|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k}|g_k|\right], \tag{4.3.52}$$

$$|f_{2k}| = \lambda_k^2 \left| \psi_k + \frac{\lambda_k^2(\varphi_k - \psi_k) - g_k[(1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}) \cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha]}{\lambda_k \Delta(k)} \right| \leq$$

$$\leq M_2 k^3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right]. \tag{4.3.53}$$

На основании формулы (4.3.14) и оценок (4.3.51), (4.3.52) при $t \in [0, \beta]$ имеем

$$|u_k(t)| = \left| \frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k^2} M_1 \left[k^2 |\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k} |g_k| \right] + M_0 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k| \right] e^{-\lambda_k^2 t} \leq$$

$$\leq M_3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k| \right],$$

$$|u_k'(t)| = \left| \lambda_k^2 C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t} \right| \leq M_4 k^2 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k| \right].$$

Аналогично при $t \in [-\alpha, 0]$, учитывая оценки (4.3.51) – (4.3.53), получим

$$|u_k(t)| = \left| \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + \left(\frac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k} \right) \cos \lambda_k t - \lambda_k C_{1k} \sin \lambda_k t \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} \right| + \left| \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} \right| + |C_{1k}| + |\lambda_k C_{1k}| \leq M_5 k \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k| \right],$$

$$|u_k'(t)| = \left| \lambda_k \left(\frac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k} \right) \sin \lambda_k t + \lambda_k^2 C_{1k} \cos \lambda_k t \right| \leq$$

$$\leq M_5 k^2 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k| \right],$$

$$|u_k''(t)| = \left| \lambda_k^2 \left(\frac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k} \right) \cos \lambda_k t - \lambda_k^3 C_{1k} \sin \lambda_k t \right| \leq$$

$$\leq M_5 k^3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k| \right]. \quad \blacksquare$$

Лемма 4.3.5. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^5[0, l]$, $g(x) \in C^4[0, l]$ $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(l) = 0,\ g^{(j)}(0) = g^{(j)}(l) = 0,\ i = 0, 2, 4,\ j = 0, 2.$ *Тогда справедливы следующие представления:*

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(5)}}{\mu_k^5}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(5)}}{\mu_k^5}, \quad g_k = \frac{g_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.3.54}$$

где

$$\varphi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi^{(5)}(x) \cos \mu_k x \, dx, \quad \psi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi^{(5)}(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$g_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k^{(5)}\right|^2 \le \int\limits_0^l \left[\varphi^{(5)}(x)\right]^2 dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_k^{(5)}\right|^2 \le \int\limits_0^l \left[\psi^{(5)}(x)\right]^2 dx,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|g_k^{(4)}\right|^2 \le \int\limits_0^l \left[g^{(4)}(x)\right]^2 dx. \tag{4.3.55}$$

Доказательство. Интегрируя по частям пять и четыре раза соответсвенно в интегралах формул (4.3.15) – (4.3.17) с учетом условий леммы, получим представления (4.3.54). Справедливость оценок (4.3.55) следует из неравенства Бесселя по тригонометрической системе. ■

Формально из (4.3.46) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\sin\mu_k x, \tag{4.3.56}$$

$$u_x(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k(t)\cos\mu_k x, \tag{4.3.57}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)\sin\mu_k x, \quad t<0, \tag{4.3.58}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 u_k(t)\sin\mu_k x. \tag{4.3.59}$$

Ряды (4.3.46), (4.3.56) – (4.3.59) при любом $(x,t)\in\overline{D}$ на основании лемм 4.3.4, 4.3.5 мажорируются рядом

$$M_6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(5)}| + |\psi_k^{(5)}| + |g_k^{(4)}|\right). \tag{4.3.60}$$

Сходимость ряда (4.3.60) следует из сходимости рядов (4.3.55) и оценки

$$\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(5)}| + |\psi_k^{(5)}| + |g_k^{(4)}|\right) \le \frac{1}{2}\left[\frac{3}{k^2} + \left|\varphi_k^{(5)}\right|^2 + \left|\psi_k^{(5)}\right|^2 + \left|g_k^{(4)}\right|^2\right].$$

Тогда на основании признака Вейрштрасса сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}$ ряды (4.3.46), (4.3.56), (4.3.57), а ряды (4.3.58) и

(4.3.59) на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Аналогично функции $f_i(x)$, определенные рядами (4.3.47), непрерывны на сегменте $[0,l]$. Непосредственной подстановкой (4.3.46) и (4.3.47) убеждаемся в том, что функции $u(x,t)$ и $f(x)$, определенные рядами (4.3.46) и (4.3.47), удовлетворяют условию (4.3.3).

Если при выполнении условий леммы 4.3.1 выражение $\Delta(k) = 0$ при некоторых $k = l_1, ..., l_m$, где $1 \le l_1 < ... < l_m \le k_0$; l_n, $n = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи 4.3 достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int_0^l g(x)\sin\mu_k x\,dx = 0 \tag{4.3.61}$$

при $k = l_1, ..., l_m$. В этом случае решения задачи (4.3.1) – (4.3.7) определяются в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) u_k(t)\sin\mu_k x + \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{4.3.62}$$

$$f_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) f_{ik}\sin\mu_k x + \sum_p A_p f_{ip}(x), \tag{4.3.63}$$

где $i = 1,2$; в суммах $\sum\limits_p$ индекс p принимает значения $l_1, ..., l_m$, $A_p \neq 0$ – произвольные постоянные, а функции $u_p(x,t)$ и $f_{ip}(x)$ определяются соответственно по формулам (4.3.28), (4.3.29) и (4.3.31), (4.3.32); конечные суммы выражений (4.3.62) и (4.3.63) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, нами установлены следующие теоремы о разрешимости задачи 4.3.

Теорема 4.3.2. *Пусть функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4.3.5 *и выполнены условия* (4.3.33) *при всех* $k > k_0$. *Тогда, если* $\Delta(k) \neq 0$ *при* $k = 1, 2, \ldots, k_0$, *то задача* (4.3.1) – (4.3.7) *однозначно разрешима и это решение определяется рядами* (4.3.46) *и* (4.3.47); *если* $\Delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = l_1, ..., l_m \le k_0$, *то задача* (4.3.1) – (4.3.7) *разрешима тогда, когда выполнены условия ортогональности* (4.3.61), *и решение определяется рядами* (4.3.62), (4.3.63), *при этом* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$, $f_i(x) \in C[0,l]$.

Теорема 4.3.3. *Если выполнены условия лемм* 4.3.3 *и* 4.3.5, *то существует единственное решение задачи* 4.3, *которое определят-*

ся рядами (4.3.46) *и* (4.3.47), *при этом* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C^2_x(\overline{D}_+)$, $f_i(x) \in C[0,l]$.

4.3.3. Устойчивость решения

Теперь установим устойчивость решений задачи (4.3.1) – (4.3.7) по граничным функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4.3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.3.2 *и* $\Delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$. *Тогда для решения* (4.3.46), (4.3.47) *задачи* 4.3 *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq M_7 \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}\right), \ t \geq 0, \tag{4.3.64}$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq M_8 \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}\right), \ t \leq 0, \tag{4.3.65}$$

$$\|f_1(x)\|_{L_2} \leq M_9(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|g\|_{W_2^0}), \tag{4.3.66}$$

$$\|f_2(x)\|_{L_2} \leq M_{10}(\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3}), \tag{4.3.67}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)} \leq M_{11}(\|\varphi''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{C[0,l]} + \|g(x)\|_{C[0,l]}), \tag{4.3.68}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)} \leq M_{12}(\|\varphi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|g''(x)\|_{C[0,l]}), \tag{4.3.69}$$

$$\|f_1(x)\|_{C[0,1]} \leq M_{13}(\|\varphi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]} + \|g(x)\|_{C[0,l]}), \tag{4.3.70}$$

$$\|f_2(x)\|_{C[0,1]} \leq M_{14}(\|\varphi^V(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi^V(x)\|_{C[0,l]} + \|g^{IV}(x)\|_{C[0,l]}), \tag{4.3.71}$$

где постоянные $M_i, \ i = \overline{7, 14}$, не зависят от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Доказательство. Поскольку тригонометрическая система $\{\sqrt{2/l} \sin \mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы решения (4.3.46), представлений

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \ \ \varphi_k^{(1)} = \sqrt{2} \int\limits_0^l \varphi'(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \ \ \psi_k^{(1)} = \sqrt{2} \int\limits_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x \, dx \tag{4.3.72}$$

и на основании оценки (4.3.50) при $t \geq 0$ имеем

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leq$$

$$\leq M_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right]^2 \leq 3M_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k\varphi_k)^2 + (k\psi_k)^2 + |g_k|^2\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k^{(1)}|^2 + |\psi_k^{(1)}|^2 + |g_k|^2\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_1 \left(\|\varphi'\|_{L_2}^2 + \|\psi'\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2\right) \leq$$

$$\leq M_7^2 \left(\|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|g\|_{W_2^0}^2\right), \tag{4.3.73}$$

здесь и далее $\widetilde{M}_i$ – положительные постоянные. Аналогично, исходя из соотношений (4.3.46), (4.3.50) и равенств

$$g_k = \frac{g_k^{(1)}}{\mu_k}, \;\; g_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g^{'}(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(2)}}{(\mu_k)^2}, \;\; \varphi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{''}(x) \sin \mu_k x \, dx, \tag{4.3.74}$$

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \;\; \psi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{''}(x) \sin \mu_k x \, dx \tag{4.3.75}$$

при $t \leq 0$, будем иметь

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leq M_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|) + k|g_k|\right]^2 \leq$$

$$\leq 3M_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k^2\varphi_k)^2 + (k^2\psi_k)^2 + (kg_k)^2\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k^{(2)}|^2 + |\psi_k^{(2)}|^2 + |g_k^{(1)}|^2\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_2 \left(\|\varphi''\|_{L_2}^2 + \|\psi''\|_{L_2}^2 + \|g'\|_{L_2}^2\right) \leq$$

$$\leq M_8^2 \left(\|\varphi\|_{W_2^2}^2 + \|\psi\|_{W_2^2}^2 + \|g\|_{W_2^1}^2\right). \tag{4.3.76}$$

Из установленных неравенств (4.3.73) и (4.3.76) следуют требуемые оценки (4.3.64) и (4.3.65).

На основании формулы (4.3.47) в силу оценок (4.3.48), (4.3.49) и равенств (4.3.74)

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad \varphi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi^{IV}(x) \sin \mu_k x \, dx,$$

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi^{IV}(x) \sin \mu_k x \, dx,$$

$$g_k = -\frac{g_k^{(3)}}{(\mu_k)^3}, \quad g_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g^{'''}(x) \cos \mu_k x \, dx$$

получим неравенства

$$\|f_1(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k}^2 \leq M_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2 |\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k} |g_k| \right]^2 \leq$$

$$\leq 3M_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k^2 \varphi_k)^2 + |\psi_k|^2 + |g_k|^2 \right] \leq \widetilde{M}_3 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k^{(2)}|^2 + |\psi_k|^2 + |g_k|^2 \right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_3 (\|\varphi^{''}\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2) \leq M_9^2 (\|\varphi\|_{W_2^2}^2 + \|\psi\|_{W_2^0}^2 + \|g\|_{W_2^0}^2),$$

$$\|f_2(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}^2 \leq M_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^4 (|\varphi_k| + |\psi_k|) + k^3 |g_k| \right]^2 \leq$$

$$\leq 3M_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k^4 \varphi_k)^2 + (k^4 \psi_k)^2 + (k^3 g_k)^2 \right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_k^{(4)}|^2 + |\psi_k^{(4)}|^2 + |g_k^{(3)}|^2 \right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_4 (\|\varphi^{(IV)}\|_{L_2}^2 + \|\psi^{(IV)}\|_{L_2}^2 + \|g'''\|_{L_2}^2) \leq$$

$$\leq M_{10}^2 (\|\varphi(x)\|_{W_2^4}^2 + \|\psi(x)\|_{W_2^4}^2 + \|g(x)\|_{W_2^3}^2),$$

из которых непосредственно вытекает справедливость оценок (4.3.66), (4.3.67).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}_+$. Тогда из соотношений (4.3.46), (4.3.50), (4.3.74) и (4.3.75), используя неравенство Коши–Буняковского и $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, получим

$$|u(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} M_3 \sum_{k=1}^{\infty} [k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + \frac{1}{k}|g_k|] \le$$

$$\le \widetilde{M}_5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [|\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}| + |g_k|] \le$$

$$\le \widetilde{M}_5 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{2)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \right] +$$

$$+ \widetilde{M}_5 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\pi \widetilde{M}_5}{\sqrt{6}} (\|\varphi''\|_{L_2} + \|\psi''\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}) \le$$

$$\le M_{11} (\|\varphi''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{C[0,l]} + \|g(x)\|_{C[0,l]}). \tag{4.3.77}$$

Аналогично из (4.3.46), (4.3.50) и равенств

$$g_k = -\frac{g_k^{(2)}}{(\mu_k)^2}, \quad g_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g''(x) \sin \mu_k x \, dx,$$

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(3)}}{(\mu_k)^3}, \quad \varphi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{'''}(x) \cos \mu_k x \, dx, \tag{4.3.78}$$

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(3)}}{(\mu_k)^3}, \quad \psi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{'''}(x) \cos \mu_k x \, dx$$

при $(x,t) \in \overline{D}_-$ имеем

$$|u(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} M_5 \sum_{k=1}^{\infty} k\, [k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|] \le$$

$$\le \widetilde{M}_6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}| + |g_k^{(2)}|] \le$$

$$\leq \widetilde{M}_6 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\widetilde{M}_6 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(2)}|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{\pi \widetilde{M}_6}{\sqrt{6}} (\|\varphi'''\|_{L_2} + \|\psi'''\|_{L_2} + \|g''\|_{L_2}) \leq$$

$$\leq M_{12}(\|\varphi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|g''(x)\|_{C[0,l]}). \tag{4.3.79}$$

Из оценок (4.3.68) и (4.3.69) вытекают (4.3.77) и (4.3.79).

Пользуясь формулой (4.3.47), равенствами (4.3.72), (4.3.78) и оценкой (4.3.48), будем иметь

$$|f_1(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{1k}| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k}|g_k|\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_7 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(1)}| + |g_k|) \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_7 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\widetilde{M}_7 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2\right)^{1/2} \leq \frac{\pi \widetilde{M}_7}{\sqrt{6}} (\|\varphi^{'''}\|_{L_2} + \|\psi^{'}\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}) \leq$$

$$\leq M_{13}(\|\varphi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]} + \|g(x)\|_{C[0,l]}). \tag{4.3.80}$$

Аналогично из равенства (4.3.47), оценки (4.3.49) и представления (4.3.54) получим

$$|f_2(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2k}| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 \sum_{k=1}^{\infty} M_2 k^3 \left[k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|\right] \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(5)}| + |\psi_k^{(5)}| + |g_k^{(4)}|) \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_8 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(5)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(5)}|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\widetilde{M}_8\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|g_k^{(4)}\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{\pi\widetilde{M}_8}{\sqrt{6}}(\|\varphi^V\|_{L_2}+\|\psi^V\|_{L_2}+\|g^{IV}\|_{L_2})\le$$

$$\le M_{14}(\|\varphi^V(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi^V(x)\|_{C[0,l]}+\|g^{IV}(x)\|_{C[0,l]}). \qquad (4.3.81)$$

Из (4.3.80) и (4.3.81) следует справедливость оценок (4.3.70), (4.3.71).

§ 4.4. Обратные задачи по отысканию сомножителей правых частей, зависящих от пространственной переменной

4.4.1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu(x,t)=F(x,t)=\begin{cases}f_1(x)g_1(t), & t>0,\\ f_2(x)g_2(t), & t<0,\end{cases} \qquad (4.4.1)$$

здесь

$$Lu=\begin{cases}u_t-u_{xx}+b^2u, & t>0,\\ u_{tt}-u_{xx}+b^2u, & t<0,\end{cases}$$

в прямоугольной области $D=\{(x,t)|\,0<x<l,\ -\alpha<t<\beta\}$, где $\alpha>0$, $\beta>0$, $l>0$, $b\ge0$ – заданные действительные числа; $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – заданные, по крайней мере, непрерывные функции и существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to0+0}g_1(t)=g_1(0+0)=g_1(0),\quad \lim_{t\to0-0}g_2(t)=g_2(0-0)=g_2(0).$$

В случае, когда $f_1(x)\equiv f_2(x)=f(x)$ ставится

Задача 4.4. *Найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C_x^1(\overline{D})\cap C^2(D_-)\cap C_x^2(D_+); \qquad (4.4.2)$$

$$f(x)\in C(0,l)\cap L_2(0,l); \qquad (4.4.3)$$

$$Lu(x,t)\equiv F(x,t),\ \ (x,t)\in D_-\cup D_+; \qquad (4.4.4)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ -\alpha\le t\le\beta; \qquad (4.4.5)$$

$$u(x,-\alpha)=\psi(x),\ \ 0\le x\le l; \qquad (4.4.6)$$

$$u_t(x,-\alpha)=g(x),\ \ 0\le x\le l, \qquad (4.4.7)$$

где $\psi(x)$ *и* $g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции, причем* $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

При разных $f_1(x)$ и $f_2(x)$ предполагается

Задача 4.5. *Найти функции* $u(x,t)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, *удовлетворяющие условиям* (4.4.2), (4.4.4) – (4.4.7) *и, кроме того,*

$$f_i(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l], \quad i = 1,2; \tag{4.4.8}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4.4.9}$$

где также $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $g(x)$ *– известные функции.*

Отметим, что обратные задачи 4.4 и 4.5 были изучены нами в §§ 4.2 и 4.3 при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 1$.

В данном параграфе рассматриваются задачи 4.4 и 4.5 при $g_1(t) \not\equiv 1$ и $g_2(t) \not\equiv 1$. Присутствие этих функций создает дополнительные трудности и вносит существенный вклад при обосновании корректности поставленной задачи.

Здесь установлены критерии единственности решений задач 4.4 и 4.5. Искомые функции $u(x,t)$, $f(x)$ и $u(x,t)$, $f_i(x)$ построены в виде суммы ортогональных рядов. При обосновании равномерной сходимости рядов также возникает проблема малых знаменателей. Установлены аналогичные оценки малого знаменателя. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенных рядов в классах (4.4.2), (4.4.3) и (4.4.8). А также доказана устойчивость решения задач 4.4 и 4.5 от заданных граничных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

4.4.2. Единственность решения задачи 4.4

Пусть существует решение задачи (4.4.2) – (4.4.7). Введем функции

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.4.10}$$

Аналогично § 2.1 относительно $u_k(t)$ получим дифференциальные уравнения

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = g_1(t) f_k, \; t > 0, \tag{4.4.11}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = g_2(t) f_k, \; t < 0, \tag{4.4.12}$$

где $\lambda_k^2 = \mu_k^2 + b^2 = (\pi k/l)^2 + b^2$,

$$f_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l f(x) \sin \mu_k x \, dx. \tag{4.4.13}$$

Дифференциальные уравнения (4.4.11) и (4.4.12) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + f_k \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)} \, ds, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t - \dfrac{f_k}{\lambda_k} \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_k (t-s)\right] \, ds, & t < 0, \end{cases} \tag{4.4.14}$$

где a_k, b_k и c_k произвольные постоянные. В силу определения класса (4.4.2) для функций (4.4.10) выполнены условия сопряжения:

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \;\; u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \tag{4.4.15}$$

Функции (4.4.14) удовлетворяют условиям (4.4.15) только тогда, когда

$$a_k = c_k, \;\; b_k = -\lambda_k c_k + \frac{f_k}{\lambda_k} g_1(0). \tag{4.4.16}$$

Подставляя (4.4.16) в (4.4.14), получим

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + f_k \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)} \, ds, & t > 0, \\ c_k \left(\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t\right) + \dfrac{f_k g_1(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - & \\ \qquad - \dfrac{f_k}{\lambda_k} \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_k (t-s)\right] \, ds, & t < 0. \end{cases} \tag{4.4.17}$$

Теперь для нахождения коэффициентов c_k и f_k воспользуемся граничными условиями (4.4.5), (4.4.6) и формулой (4.4.10):

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x, -\alpha) \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx = \psi_k, \tag{4.4.18}$$

$$u_k'(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u_t(x, -\alpha) \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g(x) \sin \mu_k x \, dx = g_k. \tag{4.4.19}$$

Удовлетворяя функции (4.4.17) условиям (4.4.18) и (4.4.19), получим систему

$$\begin{cases} c_k\left(\cos\lambda_k\alpha+\lambda_k\sin\lambda_k\alpha\right)-\dfrac{f_k g_1(0)}{\lambda_k}\sin\lambda_k\alpha+\dfrac{f_k}{\lambda_k}g_{2k}^{(1)}=\psi_k, \\ c_k\left(\sin\lambda_k\alpha-\lambda_k\cos\lambda_k t\right)+\dfrac{f_k g_1(0)}{\lambda_k}\cos\lambda_k\alpha-\dfrac{f_k}{\lambda_k}g_{2k}^{(2)}=\dfrac{g_k}{\lambda_k}, \end{cases} \tag{4.4.20}$$

где

$$g_{2k}^{(1)}=\int\limits_{-\alpha}^{0}g_2(s)\sin\left[\lambda_k(s+\alpha)\right]\,ds,\quad g_{2k}^{(2)}=\int\limits_{-\alpha}^{0}g_2(s)\cos\left[\lambda_k(s+\alpha)\right]\,ds.$$

Первое уравнение системы (4.4.20) умножим на $\cos\lambda_k\alpha$, а второе уравнение – на $\sin\lambda_k\alpha$, затем их сложим. В результате будем иметь

$$c_k+\frac{f_k}{\lambda_k}\left(g_{2k}^{(1)}\cos\lambda_k\alpha-g_{2k}^{(2)}\sin\lambda_k\alpha\right)=\psi_k\cos\lambda_k\alpha+\frac{g_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k\alpha. \tag{4.4.21}$$

Первое уравнение системы (4.4.20) умножим на $\sin\lambda_k\alpha$, а второе уравнение – на $-\cos\lambda_k\alpha$, затем их снова сложим. После чего получим

$$c_k\lambda_k-\frac{f_k g_1(0)}{\lambda_k}+\frac{f_k}{\lambda_k}\left(g_{2k}^{(1)}\sin\lambda_k\alpha+g_{2k}^{(2)}\cos\lambda_k\alpha\right)=$$

$$=\psi_k\sin\lambda_k\alpha-\frac{g_k}{\lambda_k}\cos\lambda_k\alpha. \tag{4.4.22}$$

Предварительно вычислив

$$g_{2k}^{(1)}\cos\lambda_k\alpha-g_{2k}^{(2)}\sin\lambda_k\alpha=\int\limits_{-\alpha}^{0}g_2(s)\sin\lambda_k s\,ds=g_{2k}^{(s)},$$

$$g_{2k}^{(1)}\sin\lambda_k\alpha+g_{2k}^{(2)}\cos\lambda_k\alpha=\int\limits_{-\alpha}^{0}g_2(s)\cos\lambda_k s\,ds=g_{2k}^{(c)}$$

и подставив их соответственно в (4.4.21) и (4.4.22), получим

$$\begin{cases} c_k+\dfrac{f_k}{\lambda_k}g_{2k}^{(s)}=\psi_k\cos\lambda_k\alpha+\dfrac{g_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k\alpha, \\ \lambda_k c_k-\dfrac{f_k}{\lambda_k}\left(g_{2k}^{(c)}-g_1(0)\right)=\psi_k\sin\lambda_k\alpha-\dfrac{g_k}{\lambda_k}\cos\lambda_k\alpha. \end{cases} \tag{4.4.23}$$

Если определитель системы (4.4.23) при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta(k) = \frac{1}{\lambda_k}\left[g_{2k}^{(c)} - \lambda_k g_{2k}^{(s)} - g_1(0)\right] \neq 0, \tag{4.4.24}$$

то она имеет единственное решение:

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k \Delta(k)}\left[\psi_k\left(g_{2k}^{(2)} - g_1(0)\cos\lambda_k\alpha\right) + \frac{g_k}{\lambda_k}\left(g_{2k}^{(1)} - g_1(0)\sin\lambda_k\alpha\right)\right], \tag{4.4.25}$$

$$f_k = \frac{1}{\Delta(k)}\left[\psi_k\left(\sin\lambda_k\alpha - \lambda_k\cos\lambda_k\alpha\right) - \frac{g_k}{\lambda_k}\left(\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha\right)\right]. \tag{4.4.26}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (4.4.2) – (4.4.7). Пусть $\psi(x) = g(x) \equiv 0$ и выполнены условия (4.4.24) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда все $\psi_k = g_k \equiv 0$ и из равенств (4.4.25) и (4.4.26) следует, что $c_k = f_k \equiv 0$. Отсюда в силу формул (4.4.17), (4.4.10), (4.4.13) при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int_0^l f(x)\sin\mu_k x\,dx = 0. \tag{4.4.27}$$

Равенства (4.4.27) в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2/l}\sin\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ возможны только в том случае, когда $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha,\beta]$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $(0,l)$. В силу (4.4.2) и (4.4.3) функция $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $[0,l]$.

Предположим, что при некоторых α, l, b, $g_1(t)$, $g_2(t)$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (4.4.24), т.е. $\Delta(p) = 0$. В этом случае однородная задача (4.4.2) – (4.4.7) (где $\psi(x) = g(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = u_p(t)\sin\mu_p x, \tag{4.4.28}$$

где

$$u_p(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t} - \lambda_p \displaystyle\int_0^t g_1(s)e^{-\lambda_p^2(t-s)}\,ds, & t > 0, \\ \cos\lambda_p t - \lambda_p\sin\lambda_p t - g_1(0)\sin\lambda_p t + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_p(t-s)\right]\,ds, & t < 0, \end{cases} \tag{4.4.29}$$

$$f_p(x) = -\lambda_p \sin \mu_p x. \tag{4.4.30}$$

Естественно, возникает вопрос о нулях выражения $\Delta(k)$. Для этого его представим в виде

$$\widetilde{\Delta}(k) = \lambda_k \Delta(k) = \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \left[\cos \lambda_k s - \lambda_k \sin \lambda_k s\right] ds - g_1(0) =$$

$$= \sqrt{1+\lambda_k^2} \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \cos(\lambda_k s + \theta_k)\, ds - g_1(0), \tag{4.4.31}$$

где $\theta_k = \arcsin \dfrac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \to \dfrac{\pi}{2}$ при $k \to \infty$. Применяя здесь к интегралу теорему о среднем при условии, что функция $g_2(t)$ монотонно возрастает и неотрицательна на $[-\alpha, 0]$, имеем

$$\widetilde{\Delta}(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2} g_2(0) \int\limits_{\xi}^{0} \cos(\lambda_k s + \theta_k)\, ds - g_1(0) =$$

$$= g_2(0) \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}} \sin(\lambda_k \xi + \theta_k)\right] - g_1(0) =$$

$$= g_2(0) - g_1(0) + g_2(0) \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}} \sin(\lambda_k \alpha\theta - \theta_k), \tag{4.4.32}$$

где $\xi = -\alpha\theta$, $0 < \theta < 1$ – некоторая точка из интервала $(-\alpha, 0)$.

Если $g_2(0) = g_1(0)$, то $\widetilde{\Delta}(k) = 0$ при $\widetilde{\alpha} = (\pi m + \theta_k)/\widetilde{\lambda}_k$, $m \in \mathbb{N}$, здесь $\widetilde{\alpha} = \alpha\theta/l$, $\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + (b\,l/(\pi k))^2}$.

Если $g_2(0) \neq g_1(0)$, то уравнение $\widetilde{\Delta}(k) = 0$ равносильно уравнению

$$\sin(\lambda_k \alpha\theta - \theta_k) = \frac{g_1(0) - g_2(0)}{g_2(0)\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}}},$$

которое при условии

$$\frac{|g_1(0) - g_2(0)|}{|g_2(0)|\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}}} \leq 1 \tag{4.4.33}$$

имеет также счетное множество нулей относительно $\widetilde{\alpha}$. Отметим, что $g_2(0) \neq 0$, в противном случае $g_2(t) \equiv 0$ в силу условий на функцию $g_2(t)$.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 4.4.1. *Если существует решение задачи* (4.4.2) – (4.4.7)*, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (4.4.24) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

4.4.3. Существование решения задачи 4.4

По условию $\widetilde{\alpha}$ – любое положительное число, и как было показано выше, при выполнении условия (4.4.33) выражение $\Delta(k)$, находящееся в знаменателе равенств (4.4.25) и (4.4.26), определяющих коэффициентов c_k и f_k формулы (4.4.17), может иметь счетное множество нулей. Следовательно, при больших k выражение $\widetilde{\Delta}(k)$ может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей». Поэтому для обоснования существования решения задачи (4.4.2) – (4.4.7) надо показать существование чисел $\widetilde{\alpha}$, при которых $\widetilde{\Delta}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 4.4.1. *Пусть* $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$*,* $l > 0$ *и* $b \geq 0$*. Тогда, если*

$$|g_2(0) - g_1(0)| - |g_2(0)|\sqrt{1 + \frac{1}{(\pi/l)^2 + b^2}} = \widetilde{C}_0 > 0, \tag{4.4.34}$$

то существует постоянная $C_0 > 0$*, такая, что при любом* $k \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| \geq \frac{C_0}{k}. \tag{4.4.35}$$

Доказательство. Из представления (4.4.32) имеем

$$|\widetilde{\Delta}(k)| \geq |g_2(0) - g_1(0)| - |g_2(0)|\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}} \geq$$

$$\geq |g_2(0) - g_1(0)| - |g_2(0)|\sqrt{1 + \frac{1}{(\pi/l)^2 + b^2}}.$$

Отсюда с учетом (4.4.34) непосредственно следует оценка (4.4.35).

Пусть теперь нарушено условие (4.4.34), тогда может выполняться условие (4.4.33), следовательно, $\widetilde{\Delta}(k)$ может иметь счетное множество нулей относительно $\widetilde{\alpha}$.

Вначале рассмотрим случай, когда $g_2(0) = g_1(0)$. В этом случае $\widetilde{\Delta}(k)$ принимает вид

$$\widetilde{\Delta}(k) = g_2(0)\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}}\sin(\lambda_k \alpha\theta - \theta_k). \tag{4.4.36}$$

Лемма 4.4.2. *Если* $g_2(0) = g_1(0)$ *и выполнено одно из следующих условий:* 1) $\alpha\theta/l = \widetilde{\alpha} = p$ *— натуральное число;* 2) $\widetilde{\alpha} = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p/q \notin \mathbb{N}$, $(q, 2) = 1$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0 $(k_0 \in \mathbb{N})$, *такие, что при всех* $k > k_0$ *и любых фиксированных* $b \geq 0$ *и* $\beta > 0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| \geq \frac{C_0}{k}. \tag{4.4.37}$$

Доказательство. Выражение для $\lambda_k = \sqrt{(\pi k/l)^2 + b^2}$ при $k > bl/\pi$ можно представить в виде

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l} + r_k, \tag{4.4.38}$$

где для остатка r_k справедлива оценка

$$\frac{lb^2}{4\pi k} < r_k < \frac{lb^2}{2\pi k}. \tag{4.4.39}$$

С учетом (4.4.38) соотношение $\delta(k) = \sin(\lambda_k \alpha\theta - \theta_k)$ примет вид

$$\delta(k) = \sin(\pi k\widetilde{\alpha} + \widetilde{r}_k - \theta_k), \ \ \widetilde{r}_k = \alpha\theta r_k. \tag{4.4.40}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$. Тогда соотношение (4.4.40) представляется в следующем виде:

$$|\delta(k)| = |\sin(\widetilde{r}_k - \theta_k)|. \tag{4.4.41}$$

Поскольку $\theta_k \to \pi/2$ и в силу оценки (4.4.39) $\widetilde{r}_k \to 0$ при $k \to +\infty$, то выражение (4.4.41) имеет конечный предел, не равный нулю, при $k \to +\infty$. Тогда существует номер $k_1 \in \mathbb{N}$, такой, что при всех $k > k_1$

$$|\delta(k)| > \frac{1}{2}|\delta(+\infty)| = \frac{1}{2}. \tag{4.4.42}$$

Пусть теперь $\widetilde{\alpha} = p/q$, $(p, q) = 1$, $(q, 2) = 1$. В этом случае разделим kp на q с остатком: $kp = st + r$, $s\, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \le r < q$. После чего равенство (4.4.40) по модулю принимает вид

$$|\delta(k)| = \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{r}_k - \theta_k\right)\right|. \tag{4.4.43}$$

Если $r = 0$, то данный случай сводится к уже рассмотренному выше. Тогда $1 \le r \le q-1$, $q \ge 2$. Поскольку

$$\frac{\pi}{q} - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q}$$

и $(q, 2) = 1$, то существует натуральное число k_2, такое, что при всех $k > k_2$ из равенства (4.4.43) следует справедливость оценки

$$|\delta(k)| > \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi r}{q} > 0. \tag{4.4.44}$$

Таким образом, из установленных оценок (4.4.42) и (4.4.44) вытекает справедливость оценки (4.4.37) при $k > k_0 = \max\{b\, l/\pi, k_1, k_2\}$.

Пусть теперь $g_2(0) \ne g_1(0)$. В этом случае потребуем, чтобы

$$|d_k| = \frac{|g_2(0) - g_1(0)|}{|g_2(0)|\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_k^2}}} < |d_\infty| = \left|\frac{g_2(0) - g_1(0)}{g_2(0)}\right| < 1. \tag{4.4.45}$$

В силу условия (4.4.45) можно определить $\sin\Phi_k = d_k$, $\Phi_k = \arcsin d_k$, $0 < |\Phi_k| < \pi/2$, так как $0 < |d_k| < 1$. При этом $\Phi_k \to \Phi_\infty$, $|\Phi_\infty| < \pi/2$.

С учетом условия (4.4.45) из представления (4.4.32) имеем

$$|\widetilde{\Delta}(k)| > |g_2(0)|\, |d_k + \sin(\lambda_k \alpha\theta - \theta_k)| =$$

$$= |g_2(0)|\, |\sin\Phi_k + \sin(\lambda_k \alpha\theta - \theta_k)| =$$

$$= 2|g_2(0)| \left|\sin\frac{\Phi_k - \theta_k + \lambda_k\alpha\theta}{2} \cos\frac{\Phi_k + \theta_k - \lambda_k\alpha\theta}{2}\right| =$$

$$= 2|g_2(0)||\delta_1(k)||\delta_2(k)|. \tag{4.4.46}$$

С учетом (4.4.38) выражения $\delta_1(k)$ и $\delta_2(k)$ принимают вид

$$\delta_1(k) = \sin\left(\frac{\Phi_k - \theta_k}{2} + \frac{\pi k\widetilde{\alpha}}{2} + \frac{\widetilde{r}_k}{2}\right), \tag{4.4.47}$$

$$\delta_2(k) = \cos\left(\frac{\Phi_k+\theta_k}{2} - \frac{\pi k\widetilde{\alpha}}{2} - \frac{\widetilde{r}_k}{2}\right). \qquad (4.4.48)$$

Пусть $\widetilde{\alpha}/2 = p \in \mathbb{N}$. Тогда соотношения (4.4.47) и (4.4.48) по модулю принимают вид

$$|\delta_1(k)| = \left|\sin\left(\frac{\Phi_k-\theta_k}{2} + \frac{\widetilde{r}_k}{2}\right)\right|,$$

$$|\delta_2(k)| = \left|\cos\left(\frac{\Phi_k+\theta_k}{2} - \frac{\widetilde{r}_k}{2}\right)\right|.$$

Отсюда получим, что

$$\lim_{k\to+\infty}|\delta_1(k)||\delta_2(k)| = \left|\sin\frac{\Phi_\infty-\pi/2}{2}\right|\left|\cos\frac{\Phi_\infty+\pi/2}{2}\right| =$$

$$= \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi_\infty}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi_\infty}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\Phi_\infty}{2} - \cos\frac{\Phi_\infty}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1-d_\infty) > 0,$$

так как $|d_\infty| < 1$. В силу этого существует натуральное число k_1, такое, что при всех $k > k_1$ из неравенства (4.4.46) получим

$$|\widetilde{\Delta}(k)| > C_1 = \mathrm{const} > 0, \qquad (4.4.49)$$

где C_1 зависит от $g_1(0)$ и $g_2(0)$.

Если $\widetilde{\alpha}/2 = p/q$, $(p,q)=1$, $(q,2)=1$, $\frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$, то разделив kp на q: $kp = st + r$, $s\, r \in \mathbb{N}$, $0 \le r < q$, имеем

$$|\delta_1(k)| = \left|\sin\left(\frac{\Phi_k-\theta_k}{2} + \frac{\pi r}{q} + \frac{\widetilde{r}_k}{2}\right)\right|, \qquad (4.4.50)$$

$$|\delta_2(k)| = \left|\cos\left(\frac{\Phi_k+\theta_k}{2} - \frac{\pi r}{q} - \frac{\widetilde{r}_k}{2}\right)\right|. \qquad (4.4.51)$$

Отсюда

$$\lim_{k\to+\infty}|\delta_1(k)||\delta_2(k)| = \left|\sin\left(\frac{\Phi_\infty-\pi/2}{2} + \frac{\pi r}{q}\right)\right| \times$$

$$\times \left|\cos\left(\frac{\Phi_\infty+\pi/2}{2} + \frac{\pi r}{q}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|d_\infty - \cos\frac{2\pi r}{q}\right| > 0,$$

если $\cos\dfrac{2\pi r}{q} \neq d_\infty$. Таким образом, нами установлено следующее утверждение.

Лемма 4.4.3. *Если $g_2(0) \neq g_1(0)$, $|d_\infty| < 1$ и выполнено одно из следующих условий: 1) $\widetilde{\alpha}/2 = p$ — натуральное число; 2) $\widetilde{\alpha}/2 = p/q \notin \mathbb{N}$, $p\,q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $\cos\frac{2\pi r}{q} \neq d_\infty$, где $r \in \mathbb{N}_0 \cap [0, q-1]$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $k > k_0$ и любых фиксированных $b \geq 0$ и $\beta > 0$ справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| \geq \frac{C_0}{k}. \tag{4.4.52}$$

При выполнении условий лемм 4.4.1 – 4.4.3 решение задачи (4.4.2)–(4.4.7) можно определить в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \mu_k x, \tag{4.4.53}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \mu_k x, \tag{4.4.54}$$

здесь $u_k(t)$ и f_k определяются формулами (4.4.17), (4.4.25), (4.4.26).

Лемма 4.4.4. *Пусть выполнено условие* (4.4.34). *Тогда при любом $t \in [-\alpha, \beta]$ и всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leq C_1 \left(k|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \tag{4.4.55}$$

$$|u_k'(t)| \leq C_2 k \left(k|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \tag{4.4.56}$$

$$|u_k''(t)| \leq C_3 k^2 \left(k|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \;\; t \leq 0, \tag{4.4.57}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные, которые определяются через данные задачи.

Доказательство. Предварительно оценим коэффициенты c_k и f_k, определяемые по формулам (4.4.25) и (4.4.26):

$$|c_k| \leq \frac{1}{\lambda_k |\Delta(k)|} \left[|\varphi_k| \left| g_{2k}^{(2)} - g_1(0)\cos\lambda_k\alpha \right| + \frac{|\psi_k|}{\lambda_k} \left| g_{2k}^{(1)} - g_1(0)\sin\lambda_k\alpha \right| \right],$$

$$|f_k| = \frac{1}{|\Delta(k)|} \left[|\varphi_k| \sqrt{1+\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k} |\psi_k| \sqrt{1+\lambda_k^2} \right].$$

Отсюда с учетом оценки (4.4.34) и представлений

$$g_{2k}^{(2)} = g_2(0) \int\limits_{-\xi}^{0} \cos[\lambda_k(s+\alpha)]\, ds = g_2(0) \frac{\sin\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k(\alpha-\xi)}{\lambda_k}, \tag{4.4.58}$$

$$g_{2k}^{(1)}=g_2(0)\frac{\cos\lambda_k(\alpha-\xi)-\cos\lambda_k\alpha}{\lambda_k} \tag{4.4.59}$$

получим

$$|c_k|\leq\frac{l}{\pi C_0}\left(2\frac{|g_2(0)|}{\lambda_1}+|g_1(0)|\right)\left(|\varphi_k|+\frac{|\psi_k|}{\lambda_k}\right)\leq A_1\left(|\varphi_k|+\frac{|\psi_k|}{\lambda_k}\right), \tag{4.4.60}$$

$$|f_k|\leq A_2k\left(k|\varphi_k|+|\psi_k|\right), \tag{4.4.61}$$

где A_i – здесь и далее положительные постоянные. Теперь на основании формулы (4.4.17) и оценок (4.4.60) и (4.4.61) будем иметь

$$|u_k(t)|\leq|c_k|+|f_k|\frac{||g_1||}{\lambda_k^2}\leq A_1\left(|\varphi_k|+\frac{|\psi_k|}{\lambda_k}\right)+\frac{||g_1||A_2}{\lambda_k^2}k\left(k|\varphi_k|+|\psi_k|\right)\leq$$

$$\leq A_3\left(|\varphi_k|+\frac{|\psi_k|}{k}\right),\ \ t\geq 0; \tag{4.4.62}$$

$$|u_k(t)|\leq|c_k|\sqrt{1+\lambda_k^2}+\frac{|f_k|}{\lambda_k}|g_1(0)|+\frac{|f_k|}{\lambda_k}||g_2||\alpha\leq A_4\left(k|\varphi_k|+|\psi_k|\right),\ t\leq 0, \tag{4.4.63}$$

здесь $||g_1||=\max\limits_{0\leq t\leq\beta}|g_1(t)|$, $||g_2||=\max\limits_{-\alpha\leq t\leq 0}|g_2(t)|$. Тогда из оценок (4.4.62) и (4.4.63) следует справедливость оценки (4.4.55) при всех $t\in[-\alpha,\beta]$ и $k\in\mathbb{N}$, здесь $C_1=\max\{A_3,A_4\}$.

Далее вычислим

$$u_k'(t)=\begin{cases}-\lambda_k^2c_ke^{-\lambda_k^2t}+f_kg_1(t)-f_k\lambda_k^2\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda_k^2(t-s)}\,ds, & t>0,\\ -\lambda_kc_k\left(\sin\lambda_kt+\lambda_k\cos\lambda_kt\right)+f_kg_1(0)\cos\lambda_kt- & \\ \qquad\qquad -f_k\int\limits_t^0 g_2(s)\cos\left[\lambda_k(t-s)\right]\,ds, & t<0.\end{cases}$$

Отсюда в силу оценок (4.4.60) и (4.4.61) получим оценку (4.4.56).

На основании тождества

$$u_k''(t)=g_2(t)f_k-\lambda_k^2u_k(t),\ \ t\leq 0$$

и оценок (4.4.61) и (4.4.55) убеждаемся в справедливости оценки (4.4.57).

Лемма 4.4.5. *Пусть выполнены условия леммы* 4.4.2 *или леммы* 4.4.3. *Тогда существует номер* k_0, *такой, что при всех* $k>k_0$ *справедливы оценки* (4.4.55) – (4.4.57).

Доказательство непосредственно следует из леммы 4.4.4 с учетом оценок (4.4.37) и (4.4.52) из лемм 4.4.2 и 4.4.3.

Ряд (4.4.53) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и производные второго порядка в замкнутых подобластях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ в силу лемм 4.4.1 и 4.4.4 мажорируются числовым рядом

$$C_4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(k|\psi_k| + |g_k| \right). \tag{4.4.64}$$

Лемма 4.4.6. *Если* $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $g(x) \in C^3[0,l]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2$, *то справедливы следующие представления:*

$$\psi_k = \frac{\psi_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad g_k = -\frac{g_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \tag{4.4.65}$$

где

$$\psi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad g_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g^{(3)}(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

и при этом следующие ряды сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(3)}|^2 < +\infty. \tag{4.4.66}$$

Тогда на основании представлений (4.4.65) и оценок (4.4.66) нетрудно показать сходимость ряда (4.4.64). Следовательно, при выполнении условий лемм 4.4.1 и 4.4.6 приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.4.2. *Пусть выполнены условия лемм* 4.4.1 *и* 4.4.6 *и* $g_1(t) \in C[0,\beta]$, $g_2(t)$ *непрерывна, монотонно возрастает и неотрицательна на* $[-\alpha, 0]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (4.4.2) – (4.4.7), *которое определяется рядами* (4.4.53) *и* (4.4.54), *при этом* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$, $f(x) \in C[0,l]$.

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$, указанных в леммах 4.4.2 и 4.4.3, при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_n$, где $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_n \le k_0$, здесь k_i, $i = \overline{1,n}$, и n – заданные натуральные числа, выполняется равенство $\Delta(k) = 0$, то для разрешимости задачи (4.4.2)–(4.4.7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_k \lambda_k \left(\sin \lambda_k \alpha - \lambda_k \cos \lambda_k \alpha \right) -$$
$$- g_k \left(\cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha \right) = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_n. \tag{4.4.67}$$

В этом случае решение задачи (4.4.2) – (4.4.7) определяется в виде сумм рядов

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\dots+\sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n-1}+\sum_{k=k_n+1}^{+\infty}\right)u_k(t)\sin\mu_k x+$$

$$+\sum_p A_p u_p(x,t), \tag{4.4.68}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\dots+\sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n-1}+\sum_{k=k_n+1}^{+\infty}\right)f_k\sin\mu_k x+\sum_p A_p f_p(x), \tag{4.4.69}$$

где в последних суммах p принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_n$, A_p – произвольные постоянные, $u_p(x,t)$ и $f_p(x)$ определяются соответственно по формулам (4.4.28), (4.4.29) и (4.4.30), если в конечных суммах в правых частях (4.4.68) и (4.4.69) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.4.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.4.2 *или леммы* 4.4.3 *и леммы* 4.4.6, *и функции* $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4.4.2. *Тогда, если* $\Delta(k)\neq 0$ *при всех* $k=\overline{1,k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (4.4.2) – (4.4.7), *которое определяется рядами* (4.4.53) *и* (4.4.54); *если* $\Delta(k)=0$ *при некоторых* $k=k_1,k_2,\dots,k_n\leq k_0$, *то задача* (4.4.2) – (4.4.7) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (4.4.67), *и решение в этом случае определяется рядами* (4.4.68) *и* (4.4.69), *при этом* $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(\overline{D}_-)\cap C_x^2(\overline{D}_+)$, $f(x)\in C[0,l]$.

Далее установим устойчивость решения задачи (4.4.2) – (4.4.7) по граничным функциям $\psi(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4.4.4. *Пусть для примера выполнены условия теоремы* 4.4.2. *Тогда для решения* (4.4.53) *и* (4.4.54) *задачи* (4.4.2) – (4.4.7) *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leq C_4\left(\|\psi'(x)\|_{L_2[0,l]}+\|g(x)\|_{L_2[0,l]}\right),$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,l]}\leq C_5\left(\|\psi''(x)\|_{L_2[0,l]}+\|g'(x)\|_{L_2[0,l]}\right),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leq C_6\left(\|\psi''(x)\|_{C[0,l]}+\|g'(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|f(x)\|_{C(\overline{D})}\leq C_7\left(\|\psi'''(x)\|_{C[0,l]}+\|g''(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

где положительные постоянные C_i, $i = \overline{4,7}$, не зависят от функций $\psi(x)$ и $g(x)$.

Доказательство этой теоремы проводится на основании оценок (4.4.55) и (4.4.61), исходя из ортогональных рядов (4.4.53) и (4.4.54) аналогично §§ 4.1 – 4.3.

4.4.4. Единственность решения задачи 4.5

Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (4.4.70)$$

где $u(x,t)$ – решение задачи 4.5.

Аналогично § 2.1 относительно $u_k(t)$ получим дифференциальные уравнения

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = g_1(t) f_{1k}, \ t > 0, \qquad (4.4.71)$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = g_2(t) f_{2k}, \ t < 0, \qquad (4.4.72)$$

здесь $\lambda_k^2 = (\pi k/l)^2 + b^2 = \mu_k^2 + b^2$,

$$f_{ik} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l f_i(x) \sin \mu_k x \, dx, \ \ i = 1, 2. \qquad (4.4.73)$$

Дифференциальные уравнения (4.4.71) и (4.4.72) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + f_{1k} g_{1k}(t), & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t + \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k} g_{2k}^{(1)}(t), & t < 0, \end{cases} \qquad (4.4.74)$$

где a_k, b_k и c_k произвольные постоянные,

$$g_{1k}(t) = \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)} \, ds, \ \ 0 \le t \le \beta;$$

$$g_{2k}^{(1)}(t) = \int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_k (t-s)\right] \, ds, \ \ -\alpha \le t \le 0.$$

По условию (4.4.2) решение $u(x,t) \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$, тогда для функций (4.4.74) выполнены условия сопряжения:

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \;\; u'_k(0+0) = u'_k(0-0).$$

Функции (4.4.74) удовлетворяют условиям сопряжения только тогда, когда

$$a_k = c_k, \;\; b_k = -\lambda_k c_k + \frac{f_k}{\lambda_k} g_1(0).$$

Подставляя найденные значения a_k и b_k в (4.4.74), получим

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t} + f_k g_{1k}(t), & t > 0, \\ c_k\left(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t\right) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{f_{1k} g_1(0)}{\lambda_k} \sin\lambda_k t + \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k} g_{2k}^{(1)}(t), & t < 0. \end{cases} \tag{4.4.75}$$

Теперь для нахождения коэффициентов c_k, f_{1k} и f_{2k} воспользуемся граничными условиями (4.4.6), (4.4.7), (4.4.9) и формулой (4.4.70):

$$u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,\beta) \sin\mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\mu_k x \, dx = \varphi_k, \tag{4.4.76}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,-\alpha) \sin\mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \sin\mu_k x \, dx = \psi_k, \tag{4.4.77}$$

$$u'_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u_t(x,-\alpha) \sin\mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l g(x) \sin\mu_k x \, dx = g_k. \tag{4.4.78}$$

Удовлетворяя функции (4.4.75) условиям (4.4.76) – (4.4.78), получим систему

$$\begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 \beta} + f_{1k} g_{1k}(\beta) = \varphi_k, \\ c_k \lambda_k \left(\cos\lambda_k \alpha + \lambda_k \sin\lambda_k \alpha\right) - f_{1k} g_1(0) \sin\lambda_k \alpha + f_{2k} g_{2k}^{(1)}(-\alpha) = \lambda_k \psi_k, \\ c_k \lambda_k \left(\sin\lambda_k \alpha - \lambda_k \cos\lambda_k t\right) + f_{1k} g_1(0) \cos\lambda_k \alpha - f_{2k} g_{2k}^{(2)}(-\alpha) = g_k, \end{cases} \tag{4.4.79}$$

где

$$g_{2k}^{(2)}(t) = \int\limits_t^0 g_2(s) \cos\left[\lambda_k (s-t)\right] \, ds.$$

Решим систему (4.4.79) методом определителей. Для этого предварительно преобразуем ее к более простому виду. Второе уравнение системы (4.4.79) умножим на $\cos\lambda_k\alpha$, а второе уравнение – на $\sin\lambda_k\alpha$, затем полученные уравнения сложим. В результате имеем

$$c_k\lambda_k + f_{2k}\left(g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\cos\lambda_k\alpha - g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\sin\lambda_k\alpha\right) =$$
$$= \lambda_k\psi_k\cos\lambda_k\alpha + g_k\sin\lambda_k\alpha = \widetilde{\psi}_k. \tag{4.4.80}$$

Аналогично первое уравнение системы (4.4.79) умножим на $\sin\lambda_k\alpha$, а второе уравнение на $-\cos\lambda_k\alpha$, затем их снова сложим. После чего получим

$$c_k\lambda_k^2 - f_{1k}g_1(0) + f_{2k}\left(g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\sin\lambda_k\alpha + g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\cos\lambda_k\alpha\right) =$$
$$= \lambda_k\psi_k\sin\lambda_k\alpha - g_k\cos\lambda_k\alpha = \widetilde{g}_k. \tag{4.4.81}$$

Поскольку

$$g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\cos\lambda_k\alpha - g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\sin\lambda_k\alpha = \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s)\sin\lambda_k s\,ds = g_{2k}^{(s)}(-\alpha),$$

$$g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\sin\lambda_k\alpha + g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\cos\lambda_k\alpha = \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s)\cos\lambda_k s\,ds = g_{2k}^{(c)}(-\alpha),$$

то подставив их соответственно в (4.4.80) и (4.4.81), будем иметь

$$\begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2\beta} + f_{1k}g_{1k}(\beta) = \varphi_k, \\ c_k\lambda_k + f_{2k}g_{2k}^{(s)}(-\alpha) = \widetilde{\psi}_k, \\ c_k\lambda_k^2 - f_{1k}g_1(0) + f_{2k}g_{2k}^{(c)}(-\alpha) = \widetilde{g}_k. \end{cases} \tag{4.4.82}$$

При условии, когда определитель системы (4.4.82) при всех $k \in \mathbb{N}$

$$E(k) = g_1(0)g_{2k}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_k^2\beta} + \lambda_k g_{1k}(\beta)\left(\lambda_k g_{2k}^{(s)}(-\alpha) - g_{2k}^{(c)}(-\alpha)\right) \neq 0, \tag{4.4.83}$$

она имеет единственное решение

$$c_k = \frac{1}{E(k)}\left[\varphi_k g_1(0)g_{2k}^{(s)}(-\alpha) - \psi_k\lambda_k g_{1k}(\beta)g_{2k}^{(2)}(-\alpha) - g_k g_{1k}(\beta)g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\right], \tag{4.4.84}$$

$$f_{1k}=\frac{1}{E(k)}\Big[\varphi_k\lambda_k\left(\lambda_k g_{2k}^{(s)}(-\alpha)-g_{2k}^{(c)}(-\alpha)\right)+$$

$$+\psi_k\lambda_k e^{-\lambda_k^2\beta}g_{2k}^{(2)}(-\alpha)+g_k e^{-\lambda_k^2\beta}g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\Big], \tag{4.4.85}$$

$$f_{2k}=\frac{1}{E(k)}\Big\{-\varphi_k\lambda_k g_1(0)+\lambda_k\psi_k\Big[\lambda_k g_{1k}\left(\lambda_k\cos\lambda_k\alpha-\sin\lambda_k\alpha\right)+$$

$$+g_1(0)\cos\lambda_k\alpha e^{-\lambda_k^2\beta}\Big]+$$

$$+g_k\left[\lambda_k g_{1k}\left(\lambda_k\sin\lambda_k\alpha+\cos\lambda_k\alpha\right)+g_1(0)\sin\lambda_k\alpha e^{-\lambda_k^2\beta}\right]\Big\}. \tag{4.4.86}$$

Найденные значения постоянных (4.4.84) – (4.4.86) подставим в формулу (4.4.75). Тогда получим

$$u_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{E(k)}\Big[\varphi_k A_k(t)+\psi_k B_k(t)+g_k C_k(t)\Big], & t>0,\\ \dfrac{1}{E(k)}\Big[\varphi_k \widetilde{A}_k(t)+\psi_k \widetilde{B}_k(t)+g_k \widetilde{C}_k(t)\Big], & t<0,\end{cases} \tag{4.4.87}$$

где

$$A_k(t)=g_1(0)g_{2k}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_k^2 t}+g_{1k}(t)\lambda_k\left(\lambda_k g_{2k}^{(s)}(-\alpha)-g_{2k}^{(c)}(-\alpha)\right), \tag{4.4.88}$$

$$B_k(t)=\lambda_k g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\left[e^{-\lambda_k^2\beta}g_{1k}(t)-g_{1k}(\beta)e^{-\lambda_k^2 t}\right], \tag{4.4.89}$$

$$C_k(t)=g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\left[e^{-\lambda_k^2\beta}g_{1k}(t)-g_{1k}(\beta)e^{-\lambda_k^2 t}\right], \tag{4.4.90}$$

$$\widetilde{A}_k(t)=g_1(0)\left[g_{2k}^{(s)}(-\alpha)\cos\lambda_k t-g_{2k}^{(c)}(-\alpha)\sin\lambda_k t-g_{2k}^{(1)}(t)\right], \tag{4.4.91}$$

$$\widetilde{B}_k(t)=\lambda_k^2 g_{1k}(\beta)\left(g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\sin\lambda_k t+g_{2k}^{(1)}(t)\cos\lambda_k\alpha\right)-$$

$$-\lambda_k g_{1k}(\beta)\left(g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\cos\lambda_k t+g_{2k}^{(1)}(t)\sin\lambda_k\alpha\right)+$$

$$+g_{1k}(0)e^{-\lambda_k^2\beta}\left(g_{2k}^{(2)}(-\alpha)\sin\lambda_k t+g_{2k}^{(1)}(t)\cos\lambda_k\alpha\right), \tag{4.4.92}$$

$$\widetilde{C}_k(t)=g_{1k}(\beta)\lambda_k\left(g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\sin\lambda_k t+g_{2k}^{(1)}(t)\sin\lambda_k\alpha\right)-$$

$$-g_{1k}(\beta)\left(g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\cos\lambda_k t-g_{2k}^{(1)}(t)\cos\lambda_k\alpha\right)+$$

$$+\frac{g_{1k}(0)e^{-\lambda_k^2\beta}}{\lambda_k}\left(g_{2k}^{(1)}(-\alpha)\sin\lambda_k t+g_{2k}^{(1)}(t)\sin\lambda_k\alpha\right). \tag{4.4.93}$$

Теперь докажем единственность решения задачи 4.5. Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ и выполнены условия (4.4.83). Тогда все $\varphi_k = \psi_k = g_k \equiv 0$ и из равенств (4.4.84) – (4.4.86) следует, что $c_k = f_{1k} = f_{2k} \equiv 0$. Отсюда в силу формул (4.4.87), (4.4.70) и (4.4.73) имеем

$$\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int\limits_0^l f_i(x)\sin\mu_k x\,dx = 0 \;\; i = 1,2. \qquad (4.4.94)$$

Равенства (4.4.94) в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ возможны только в том случае, когда $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [-\alpha,\beta]$ и $f_i(x) = 0$ почти всюду на $(0,l)$. В силу (4.4.2) и (4.4.8) получаем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$ на $(0,l)$.

Предположим, что при некоторых α, β,b, l, $g_1(t)$, $g_2(t)$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (4.4.83), т.е.

$$E(k) = g_{1p}(\beta)\lambda_p\left(\lambda_p g_{2p}^{(s)}(-\alpha) - g_{2p}^{(c)}(-\alpha)\right) + g_1(0)g_{2p}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_p^2\beta} = 0. \qquad (4.4.95)$$

Тогда однородная система (4.4.82) (где $\varphi_k = \psi_k = g_k \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$c_p = -\widetilde{f}_{2p}g_{2p}^{(s)}(-\alpha), \quad f_{1p} = \frac{\widetilde{f}_{2p}g_{2p}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_p^2\beta}}{g_{1p}(\beta)},$$

где $\widetilde{f}_{2p} = \dfrac{f_{2p}}{\lambda_p} \neq 0$ – произвольная постоянная и $g_{1p}(\beta) \neq 0$. В силу этого однородная задача 4.5 (где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = u_p(t)\sin\mu_p x, \qquad (4.4.96)$$

где

$$u_p(t) = \begin{cases} \widetilde{f}_{2p}\left(-g_{2p}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_p^2 t} + \frac{g_{2p}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_p^2\beta}g_{1p}(t)}{g_{1p}(\beta)}\right), & t > 0, \\ \widetilde{f}_{2p}\Big[g_{2p}^{(s)}(-\alpha)\left(\lambda_p\sin\lambda_p t - \cos\lambda_p t\right) + \\ \qquad + \dfrac{g_1(0)\sin\lambda_p t\, g_{2p}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_p^2\beta}}{\lambda_p g_{1p}(\beta)} + g_{2p}^{(1)}(t)\Big], & t < 0, \end{cases} \qquad (4.4.97)$$

$$f_{1p}(x) = \frac{1}{g_{1p}(\beta)}g_{2p}^{(s)}(-\alpha)e^{-\lambda_p^2\beta}\sin\mu_p x, \qquad (4.4.98)$$

$$f_{2p}(x) = \lambda_p \sin \mu_p x. \tag{4.4.99}$$

Теперь естественно возникает вопрос о существовании нулей выражения $E(k)$ при некоторых значениях данных задачи. Для этого его представим в следующем виде:

$$E(k) = \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s)\left[g_{1k}(\beta)\lambda_k\left(\lambda_k \sin \lambda_k s - \cos \lambda_k s\right) + g_1(0)e^{-\lambda_k^2\beta} \sin \lambda_k s\right] ds.$$

Применяя здесь вторую теорему о среднем при условии, что функция $g_2(s)$ монотонно возрастает и неотрицательна на $[-\alpha, 0]$, получим

$$E(k) = g_2(0)\int\limits_{-\xi}^{0}\left[g_{1k}(\beta)\lambda_k\left(\lambda_k \sin \lambda_k s - \cos \lambda_k s\right) + g_1(0)e^{-\lambda_k^2\beta} \sin \lambda_k s\right] ds =$$

$$= -g_2(0)\Bigg[g_{1k}(\beta)\lambda_k\left(1 - \cos \lambda_k \xi\right) + g_{1k}(\beta) \sin \lambda_k \xi +$$

$$+ g_1(0)\frac{e^{-\lambda_k^2\beta}}{\lambda_k}\left(1 - \cos \lambda_k \xi\right)\Bigg] =$$

$$= -2g_2(0) \sin \frac{\lambda_k \xi}{2}\left[\left(g_{1k}(\beta)\lambda_k + \frac{g_1(0)e^{-\lambda_k^2\beta}}{\lambda_k}\right) \sin \frac{\lambda_k \xi}{2} + g_{1k}(\beta) \cos \frac{\lambda_k \xi}{2}\right] =$$

$$= -2g_2(0)B_k \sin \frac{\lambda_k \xi}{2} \sin\left(\frac{\lambda_k \xi}{2} + \gamma_k\right), \tag{4.4.100}$$

где $g_2(0) > 0$ (при $g_2(0) = 0$ функция $g_2(s) \equiv 0$, чего быть не может по условию),

$$B_k = \sqrt{g_{1k}^2(\beta) + \left(g_{1k}(\beta)\lambda_k + \frac{g_1(0)e^{-\lambda_k^2\beta}}{\lambda_k}\right)^2}, \tag{4.4.101}$$

$$\gamma_k = \arcsin \frac{g_{1k}(\beta)}{B_k}, \ \ 0 < \xi = \theta\alpha < \alpha, \ \ 0 < \theta < 1.$$

Из представления (4.4.100) получаем два семейства счетных множеств нулей

$$\alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_k \theta}; \ \ \alpha = \frac{2\pi n}{\lambda_k \theta} - \frac{2\gamma_k}{\lambda_k \theta}, \ \ m, n \in \mathbb{N}. \tag{4.4.102}$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи 4.5:

Теорема 4.4.5. *Если существует решение задачи* 4.5 *и* $g_{1k}(\beta) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (4.4.83) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

4.4.5. Обоснование существования решения задачи 4.5

Далее построим решение задачи 4.5. Поскольку выражение $E(k)$ при указанных выше значениях (4.4.102) параметра α может обратиться в нуль, то надо установить оценки об отделенности от нуля $E(k)$ с соответствующей асимптотикой.

Замечание 4.4.1. Отметим, что если $b = 0$, то $\lambda_k = \mu_k = \pi k/l$ и из (4.4.102) имеем, что при рациональных значениях отношения $\alpha\theta/l = 2m/k$ выражение $E(k) = 0$. Поэтому при $b = 0$ для таких отношений решение задачи 4.5 в виде ряда может не существовать.

Лемма 4.4.7. *Если* $\alpha_1 = 2\alpha\theta\big/l$ *является произвольным рациональным числом и* $b > 0$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $k_0 \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$\big|\Delta(k)\big| > \frac{C_0}{k^3}. \tag{4.4.103}$$

Доказательство. Предварительно последовательность λ_k представим в виде

$$\lambda_k = \mu_k \sqrt{1 + \Big(b\,l\big/\pi k\Big)^2} = \mu_k \widetilde{\lambda}_k, \quad \widetilde{\lambda}_k = 1 + \theta_k, \tag{4.4.104}$$

где для θ_k при всех $k > k_1 = b\,l/\pi$ справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2 \leq \theta_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2. \tag{4.4.105}$$

С учетом (4.4.104) соотношение (4.4.100) примет вид

$$E(k) = -2g_2(0)B_k \sin\Big(\pi k\alpha_1 + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\Big)\sin(\pi k\alpha_1 + \alpha_1\widetilde{\theta}_k), \tag{4.4.106}$$

здесь

$$\widetilde{\theta}_k = \pi k\theta_k, \quad \alpha_1 = \frac{2\alpha\theta}{l}.$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p/q$, p, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$. Разделим kp на q с остатком: $kp = sq + r$, s, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \le r < q$. Тогда из равенства (4.4.106) имеем

$$E(k) = -2g_2(0)B_k \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right). \quad (4.4.107)$$

На основании известных неравенств

$$|x| \le |\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}|x|, \ \ 0 \le |x| \le 1,$$

найдем оценку для γ_k:

$$\frac{|g_{1k}(\beta)|}{B_k} \le \gamma_k \le \frac{\pi}{2}\frac{|g_{1k}(\beta)|}{B_k}. \quad (4.4.108)$$

Предварительно на основании теоремы о среднем имеем

$$g_{1k}(\beta) = \int\limits_0^l g_1(s)e^{-\lambda_k^2(\beta - s)}\,ds = g_1(\eta)\frac{1 - e^{-\lambda_k^2\beta}}{\lambda_k^2}, \quad (4.4.109)$$

где η – фиксированная точка интервала $(0, \beta)$. Из равенства (4.4.109) следует

$$\frac{1}{\lambda_k^2}\left(1 - e^{-\lambda_k^2\beta}\right)\min_{0 \le t \le \beta}|g_1(t)| \le |g_{1k}(\beta)| \le \frac{1}{\lambda_k^2}\max_{0 \le t \le \beta}|g_1(t)|. \quad (4.4.110)$$

Теперь оценим выражение B_k, заданное формулой (4.4.101). Для этого его представим в виде

$$B_k = |g_{1k}(\beta)|\lambda_k\widetilde{B}_k, \quad (4.4.111)$$

$$\widetilde{B}_k = \sqrt{\frac{1}{\lambda_k^2} + \left(1 + \frac{g_1(0)e^{-\lambda_k^2\beta}}{g_{1k}(\beta)\lambda_k^2}\right)^2}.$$

Поскольку $\widetilde{B}_k \to 1$ при $k \to +\infty$, то существуют положительные $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$, такие, что

$$\widetilde{C}_1 \le \widetilde{B}_k \le \widetilde{C}_2. \quad (4.4.112)$$

Тогда с учетом оценок (4.4.110) – (4.4.112) и из представления (4.4.111) имеем

$$\frac{\widetilde{C}_3}{\lambda_k} \le B_k \le \frac{\widetilde{C}_4}{\lambda_k}, \quad (4.4.113)$$

$\widetilde{C}_i$ – здесь и далее положительные постоянные, которые, вообще говоря, зависят от данных задачи. Теперь в силу соотношений (4.4.111) – (4.4.113) из соотношения (4.4.108), получим

$$\frac{\widetilde{C}_5}{\lambda_k} \le \gamma_k \le \frac{\widetilde{C}_6}{\lambda_k}, \tag{4.4.114}$$

Пусть $r = 0$. Тогда

$$E(k) = -2g_2(0)B_k \sin(\alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k)\sin\alpha_1\widetilde{\theta}_k. \tag{4.4.115}$$

Поскольку последовательности γ_k и $\widetilde{\theta}_k$ в силу оценок (4.4.114) и (4.4.105) являются бесконечно малыми, то существует число $k_2 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда на основании неравенства

$$|\sin x| > \frac{2}{\pi}|x|, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \tag{4.4.116}$$

из равенства (4.4.115), получим

$$|E(k)| > \frac{8g_2(0)|B_k|}{\pi^2} A_k(\alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k)(\alpha_1\widetilde{\theta}_k).$$

Отсюда на основании оценок (4.4.105), (4.4.113) и (4.4.114), будем иметь

$$|E(k)| > \frac{\widetilde{C}_7}{k^3}. \tag{4.4.117}$$

Пусть $r > 0$. Тогда $1 \le r \le q - 1$, $q \ge 2$ и из существования конечных пределов выражений $\sin\left(\dfrac{\pi r}{q} + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right)$ и $\sin\left(\dfrac{\pi r}{q} + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right)$ при $k \to +\infty$ следует, что существует $k_3 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_3$

$$|E(k)| > g_2(0)B_k \sin^2\frac{\pi r}{q} \ge \frac{\widetilde{C}_8}{k}. \tag{4.4.118}$$

Таким образом, из установленных оценок (4.4.117) и (4.4.118) при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ следует справедливость оценки (4.4.103), где $C_0 = \min\{\widetilde{C}_7, \widetilde{C}_8\}$. ■

Отметим, что каждое иррациональное число α_1 единственным образом разлагается в бесконечную цепную дробь $\alpha_1 = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, при этом целое число a_0 и натуральные числа $a_1, a_2, ...$ называются элементами числа α_1. Как известно [140, с. 62], элементы всякой квадратической иррациональности ограничены.

Лемма 4.4.8. *Пусть $\alpha_1 = 2\alpha\theta\big/l$ является положительным числом с неограниченными элементами и $b = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество натуральных чисел k, таких, что*

$$|E(k)| < \frac{\widetilde{C}_9\varepsilon}{k^2}. \tag{4.4.119}$$

Доказательство. На основании теоремы 23 [140, с. 49] для любого иррационального числа α_1 с неограниченными элементами при любом $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество пар целых чисел (k, m), $k > 0$, таких, что

$$\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{k^2}. \tag{4.4.120}$$

Далее из равенства (4.4.106) имеем

$$\big|E(k)\big| = 2g_2(0)B_k\left|\sin\left(\pi k\alpha_1 + \gamma_k\right)\right|\big|\sin\pi k\alpha_1\big| =$$

$$= 2g_2(0)B_k\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right) + \gamma_k\right]\right|\left|\sin\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\right| \leq$$

$$\leq 2g_2(0)B_k\left(\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\right| + \gamma_k\right)\pi k\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| =$$

$$= 2g_2(0)B_k(\pi k)^2\left(\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\right| + \frac{\gamma_k}{\pi k}\right)\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right|.$$

Отсюда на основании неравенств (4.4.113), (4.4.114) и (4.4.120) получим требуемую оценку (4.4.119). ■

Замечание 4.4.2. Из доказанной оценки (4.4.119) следует, что для таких $\alpha_1 > 0$ выражение $E(k)$, которое является знаменателем функций (4.4.88), может быть сделано сколь угодно малым за счет малости ε. Поэтому в этом случае решение задачи 4.5 в виде суммы рядов не существует.

Пусть число α_1 является иррациональным числом. В этом случае соотношение (4.4.106) можно представить в виде

$$E(k) = -2g_2(0)B_k\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \gamma_k + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right] \times$$

$$\times \sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1 \widetilde{\theta}_k\right], \tag{4.4.121}$$

где n – произвольное натуральное число. Отметим, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}. \tag{4.4.122}$$

Число n возьмем таким, что в силу (4.4.122) выполнялось неравенство

$$\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right)\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{4.4.123}$$

Если α_1 является иррациональным алгебраическим числом степени два, т.е. является квадратическим иррациональным числом, то в силу теоремы Лиувилля [140, с. 49] существует положительное число $\delta > 0$, зависящее от α_1, такое, что при любых целых n и k, $k > 0$, выполняется неравенство

$$\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| \geq \frac{\delta}{k^2}. \tag{4.4.124}$$

На основании оценок (4.4.105) и (4.4.114) имеем

$$0 < \alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\alpha_1}{2}\frac{(b\,l)^2}{\pi k} + \frac{\widetilde{C}_6}{\lambda_k}. \tag{4.4.125}$$

Пусть $b\,l/\pi < 1$. Тогда с учетом оценки

$$\frac{\pi k}{l} < \lambda_k = \frac{\pi k}{l}\sqrt{1 + \left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2} < \sqrt{2}\frac{\pi k}{l}$$

из неравенства (4.4.125), получим

$$0 < \alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\alpha_1}{2}\frac{(b\,l)^2}{\pi k} + \frac{l\,\widetilde{C}_6}{\pi k} = \frac{\widetilde{C}_{10}}{k}. \tag{4.4.126}$$

где от постоянной $\widetilde{C}_{10}$ потребуем, чтобы

$$\widetilde{C}_{10} = \frac{\alpha_1 (b\,l)^2}{2\pi} + \frac{l\,\widetilde{C}_6}{\pi} < \frac{\pi}{2}. \tag{4.4.127}$$

Тогда в силу (4.4.123) и (4.4.127) возможны два случая:

$$\text{a)}\quad \frac{\pi}{2} \leq \pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1 \widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\pi}{2} + \widetilde{C}_{10} < \pi,$$

$$\text{б)}\quad -\frac{\pi}{2} \le \pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k < \frac{\pi}{2}.$$

В случае а) имеем

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right]\right| \ge \sin\left(\frac{\pi}{2} + \widetilde{C}_{10}\right) = \cos\widetilde{C}_{10} = \widetilde{C}_{11} > 0,$$

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right]\right| \ge \sin\left(\frac{\pi}{2} + \widetilde{C}_{10}\right) = \cos\widetilde{C}_{10} = \widetilde{C}_{11} > 0.$$

В случае б) с учетом неравенств (4.4.124) и (4.4.126) находим

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right]\right| > \frac{2}{\pi}\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right| \ge$$

$$\ge 2k\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| - \frac{2}{\pi}\left(\alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) > \frac{2\delta}{k} - \frac{2\widetilde{C}_{10}}{\pi k} = \frac{2}{k}\left(\delta - \frac{\widetilde{C}_{10}}{\pi}\right), \quad (4.4.128)$$

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right]\right| > \frac{2}{\pi}\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \alpha_1\widetilde{\theta}_k\right| \ge$$

$$\ge 2k\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| - \frac{2}{\pi}\left(\alpha_1\widetilde{\theta}_k + \gamma_k\right) > \frac{2\delta}{k} - \frac{2\widetilde{C}_{10}}{\pi k} = \frac{2}{k}\left(\delta - \frac{\widetilde{C}_{10}}{\pi}\right). \quad (4.4.129)$$

Теперь потребуем, чтобы постоянные α, l, b, $\max\limits_{0\le t\le\beta}|g_1(t)|$ и δ удовлетворяли условию

$$\delta - \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi}\right)^2 - \frac{l\,\widetilde{C}_6}{\pi^2} > 0, \qquad (4.4.130)$$

которое, например, при малых l всегда имеет место. Далее, рассуждая аналогично доказательству леммы 2.1.3 из § 2.1, на основании оценок (4.4.128) и (4.4.129) приходим к следующему утверждению.

Лемма 4.4.9. *Пусть α_1 – иррациональное число степени два, $b\,l < \pi$ и выполнены условия* (4.4.127) *и* (4.4.130), *где δ определяется по формуле* (2.1.57) *при условии* (2.1.58). *Тогда существует положительная постоянная C_0, зависящая от данных задачи, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$|E(k)| > \frac{C_0}{k^3}. \qquad (4.4.131)$$

При выполнении оценки (4.4.131) или (4.4.103) при всех $k > k_0$ и неравенства (4.4.83) при $k = \overline{1, k_0}$ решение задачи 4.5 будем искать в виде в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\mu_k x, \qquad (4.4.132)$$

$$f_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \sin \mu_k x, \ \ i = 1, 2, \tag{4.4.133}$$

здесь $u_k(t)$ и f_{ik} определяются по формулам (4.4.87) и (4.4.85), (4.4.86) соответственно.

Далее покажем, что функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$ удовлетворяют условиям (4.4.2), (4.4.8), (4.4.4).

Лемма 4.4.10. *Пусть выполнены условия леммы* 4.4.7 *или леммы* 4.4.9. *Тогда при $k > k_0$ справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \le \begin{cases} M_1 \left(k^2|\varphi_k| + k|\psi_k| + |g_k|\right), & t \ge 0, \\ M_2 \left(k^2|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k|g_k|\right), & t \le 0, \end{cases} \tag{4.4.134}$$

$$|f_{1k}| \le M_3 \left(k^4|\varphi_k| + |\psi_k| + |g_k|\right), \tag{4.4.135}$$

$$|f_{2k}| \le M_4 \left(k^4|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^3|g_k|\right), \tag{4.4.136}$$

$$|u'_k(t)| \le \begin{cases} M_5 \left(k^4|\varphi_k| + k^3|\psi_k| + k^2|g_k|\right), & t \ge 0, \\ M_6 \left(k^3|\varphi_k| + k^3|\psi_k| + k^2|g_k|\right), & t \le 0, \end{cases} \tag{4.4.137}$$

$$|u''_k(t)| \le M_7 k^3 \left(k^4|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^3|g_k|\right), \ \ t \le 0, \tag{4.4.138}$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные, которые зависят от α, β, l, b, $g_2(0)$ и $\|g_1\|_C$.

Доказательство. Предварительно оценим:

$$\left|g_{2k}^{(s)}(-\alpha)\right| \le \frac{2g_2(0)}{\lambda_k}, \ \ \left|g_{2k}^{(c)}(-\alpha)\right| \le \frac{2g_2(0)}{\lambda_k},$$

$$|g_{1k}(t)| \le \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k^2}, \ \ 0 < t \le \beta,$$

$$\left|g_{2k}^{(1)}(t)\right| \le \frac{2g_2(0)}{\lambda_k}, \ \ \left|g_{2k}^{(2)}(t)\right| \le \frac{2g_2(0)}{\lambda_k}, \ \ -\alpha \le t < 0,$$

$$\left|g_{2k}^{(1)\prime}(t)\right| \le 2g_2(0), \ \ \left|g_{2k}^{(1)\prime\prime}(t)\right| \le \frac{3\|g_2\|_C}{\lambda_k}, \ \ -\alpha \le t < 0,$$

где

$$\|g_2\|_C = \max_{-\alpha \le t \le 0} |g_2(t)|, \quad \|g_1\|_C = \max_{0 \le t \le \beta} |g_1(t)|.$$

Тогда на основании этих оценок и (4.4.103) или (4.4.131) оценок исходя из формул (4.4.85) – (4.4.93) нетрудно показать справедливость оценок

(4.4.134) – (4.4.138). Для примера здесь покажем (4.4.134). Из формул (4.4.88) – (4.4.93) имеем

$$|A_k(t)| \le \frac{2g_2(0)|g_1(0)|}{\lambda_k} + \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k}\left(2g_2(0) + \frac{2g_2(0)}{\lambda_k}\right) \le \frac{\widetilde{M}_1}{\lambda_k}, \quad (4.4.139)$$

$$|B_k(t)| \le 2g_2(0)\left[\frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k^2 e^{\lambda_k^2\beta}} + \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k^2}\right] \le \frac{\widetilde{M}_2}{\lambda_k^2}, \quad (4.4.140)$$

$$|C_k(t)| \le \frac{2g_2(0)}{\lambda_k}\left[\frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k^2 e^{\lambda_k^2\beta}} + \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k^2}\right] \le \frac{\widetilde{M}_3}{\lambda_k^2}, \quad (4.4.141)$$

$$|\widetilde{A}_k(t)| \le |g_1(0)|\left[\frac{2g_2(0)}{\lambda_k} + \frac{2g_2(0)}{\lambda_k} + \frac{2g_2(0)}{\lambda_k}\right] \le \frac{\widetilde{M}_4}{\lambda_k}, \quad (4.4.142)$$

$$|\widetilde{B}_k(t)| \le \|g_1\|_C\frac{4g_2(0)}{\lambda_k} + \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k}\frac{4g_2(0)}{\lambda_k} + |g_1(0)|\frac{4g_2(0)}{\lambda_k^2 e^{\lambda_k^2\beta}} \le \frac{\widetilde{M}_5}{\lambda_k}, \quad (4.4.143)$$

$$|\widetilde{C}_k(t)| \le \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k}\frac{4g_2(0)}{\lambda_k} + \frac{\|g_1\|_C}{\lambda_k^2}\frac{2g_2(0)}{\lambda_k} + \frac{g_1(0)e^{-\lambda_k^2\beta}}{\lambda_k}\frac{4g_2(0)}{\lambda_k} \le \frac{\widetilde{M}_6}{\lambda_k^2}, \quad (4.4.144)$$

здесь $\widetilde{M}_i$ – положительные постоянные, которые зависят от $g_2(0)$, $|g_1(0)|$, $\|g_1\|_C$.

Из установленных оценок (4.4.139) – (4.4.144) на основании формулы (4.4.87) с учетом оценки (4.4.103) или (4.4.131) для $E(k)$ получим оценку (4.4.134). Аналогично доказываются другие оценки. ■

Формально из ряда (4.4.132) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\sin\mu_k x, \quad (4.4.145)$$

$$u_x(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k(t)\cos\mu_k x, \quad (4.4.146)$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} {\mu_k}^2 u_k(t)\sin\mu_k x, \quad (4.4.147)$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)\sin\mu_k x, \quad t<0. \quad (4.4.148)$$

Ряды (4.4.132), (4.4.145) и (4.4.148) при любом $(x,t) \in \overline{D}$ на основании леммы 4 мажорируются числовым рядом

$$M_8 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^4|\varphi_k| + k^3|\psi_k| + k^2|g_k|, \tag{4.4.149}$$

а ряды (4.4.146) и (4.4.147) на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ рядом

$$M_9 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^4\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right) + k^3|g_k|. \tag{4.4.150}$$

На основании леммы 4.4.11 ряды (4.4.149) и (4.4.150) оцениваются рядами

$$M_{10} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(5)}| + \frac{1}{k}|\psi_k^{(5)}| + \frac{1}{k}|g_k^{(4)}|\right), \tag{4.4.151}$$

$$M_{11} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(5)}| + |\psi_k^{(5)}| + |g_k^{(4)}|\right). \tag{4.4.152}$$

В силу сходимости рядов (4.4.151) и (4.4.152) ряды (4.4.132), (4.4.145) и (4.4.146) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (4.4.147) и (4.4.148) – на замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ соответственно. Аналогично ряды (4.4.133) мажорируются сходящимся рядом (4.4.149), поэтому функции $f_i(x)$ непрерывны на $[0,l]$. Непосредственной подстановкой (4.4.132) и (4.4.133) убеждаемся в том, что функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$, определенные рядами (4.4.132) и (4.4.133), удовлетворяют условию (4.4.4), т.е. уравнению (4.4.1).

Если при выполнении условий леммы 4.4.7 выражение $E(k) = 0$ при некоторых $k = l_1, ..., l_m$, где $1 \le l_1 < ... < l_m \le k_0$; l_n, $n = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи 4.5 достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int_0^l \psi(x)\sin\mu_k x\,dx = 0, \quad \int_0^l g(x)\sin\mu_k x\,dx = 0 \tag{4.4.153}$$

при $k = l_1, ..., l_m$. В этом случае решения задачи 4.5 определяются в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) u_k(t)\sin\mu_k x + \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{4.4.154}$$

$$f_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) f_{ik}\sin\mu_k x + \sum_p A_p f_{ip}(x), \tag{4.4.155}$$

где $i = 1, 2$; в суммах $\sum\limits_p$ индекс p принимает значения $l_1, ..., l_m$, $A_p \neq 0$ – произвольные постоянные, а функции $u_p(x,t)$ и $f_{ip}(x)$ определяются по формулам (4.4.96) – (4.4.99); конечные суммы выражений (4.4.154) и (4.4.155) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, нами установлены следующие теоремы о разрешимости задачи 4.5.

Теорема 4.4.6. *Пусть функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4.3.5, $g_1(t) \in C[0,\beta]$, $g_{1k}(\beta) \neq 0$ *при любом* $k \in \mathbb{N}$; $g_2(t)$ *непрерывна, монотонно возрастает и неотрицательная на* $[-\alpha, 0]$ *и выполнена оценка* (4.4.103) *при всех* $k > k_0$. *Тогда, если* $E(k) \neq 0$ *при* $k = 1, 2, \ldots, k_0$, *то задача* 4.5 *однозначно разрешима и это решение* $u(x,t)$ *и* $f_i(x)$ *определяется рядами* (4.4.132) *и* (4.4.133); *если* $E(k) = 0$ *при некоторых* $k = l_1, ..., l_m \leq k_0$, *то задача* 4.5 *разрешима тогда, когда выполнены условия ортогональности* (4.4.153), *и решение определяется рядами* (4.4.154), (4.4.155), *при этом* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C^2_x(\overline{D}_+)$, $f_i(x) \in C[0,l]$.

Теорема 4.4.7. *Если выполнены условия лемм* 4.4.9, 4.3.5 *и функции* $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4.4.6, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *и* $f_i(x)$ *задачи* 4.5, *которое определятся рядами* (4.4.132) *и* (4.4.133) *и* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C^2_x(\overline{D}_+)$, $f_i(x) \in C[0,l]$.

4.4.6. Устойчивость решения задачи 4.5

Теперь установим устойчивость решения задачи 4.5 по граничным функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4.4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.4.6 *и* $E(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$. *Тогда для решения* (4.4.132), (4.4.133) *задачи* 4.5 *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leq M_{12}\left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}\right), \ \ t \geq 0,$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \le M_{13}\left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}\right), \;\; t \le 0,$$

$$\|f_1(x)\|_{L_2[0,l]} \le M_{14}\left(\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|g\|_{W_2^0}\right),$$

$$\|f_2(x)\|_{L_2[0,l]} \le M_{15}\left(\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3}\right),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)} \le M_{16}\left(\|\varphi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{C[0,l]} + \|g'(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)} \le M_{17}\left(\|\varphi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,l]} + \|g''(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|f_1(x)\|_{C[0,l]} \le M_{18}\left(\|\varphi^V(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]} + \|g'(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|f_2(x)\|_{C[0,l]} \le M_{19}\left(\|\varphi^V(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi^V(x)\|_{C[0,l]} + \|g^{IV}(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

где постоянные M_i, $i = \overline{12, 19}$, не зависят от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Доказательство проводится аналогично соответствующим теоремам из §§ 4.1 − 4.3.

§ 4.5. Обратные задачи по отысканию сомножителей правых частей, зависящих от времени

4.5.1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lv = G(x,t), \tag{4.5.1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} v_t - v_{xx} + b^2 v, & t > 0, \\ v_{tt} - v_{xx} + b^2 v, & t < 0, \end{cases}$$

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) = f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ G_2(x,t) = f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases} \tag{4.5.2}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\, -\alpha < t < \beta\},$$

где $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, $f_1(x)$, $f_2(x)$ – заданные функции.

Задача 4.6. *Найти функции $v(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$v(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{4.5.3}$$

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{4.5.4}$$

$$Lv(x,t) \equiv G(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4.5.5}$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad - \leq t \leq \beta; \tag{4.5.6}$$

$$v(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4.5.7}$$

$$v(x_0,t) = h_1(y), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leq t \leq \beta, \tag{4.5.8}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ – заданные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 4.7. *Найти функции $v(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (4.5.3) (4.5.5) – (4.5.7) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0], \tag{4.5.9}$$

$$v(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \tag{4.5.10}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ – известные функции.

Задача 4.8. *Найти функции $v(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (4.5.3) – (4.5.10), *здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$ – заданные функции.*

Отметим, что исследование задач 4.6 – 4.8 базируется на прямой начально-граничной задаче (4.5.3), (4.5.5) – (4.5.7), изученной в § 2.2. С учетом вида правой части (4.5.2) уравнения (4.5.1) решение прямой задачи (4.5.3), (4.5.5) – (4.5.7) определяется рядом

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \tag{4.5.11}$$

где

$$T_k(t) = \begin{cases} \dfrac{w_k}{\delta(k)} e^{-\lambda_k^2 t} + f_{1k} \displaystyle\int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_k^2 (t-s)}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{w_k}{\delta(k)} \left(\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t\right) + \dfrac{f_{1k} g_{1k}(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - & \\ \qquad\qquad - \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k} \displaystyle\int_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_k (t-s)\right]\, ds, & t < 0, \end{cases} \tag{4.5.12}$$

$$w_k = \frac{f_{1k} g_1(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k \alpha - \frac{f_{2k}}{\lambda_k} \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \sin [\lambda_k (s + \alpha)] \, ds, \tag{4.5.13}$$

$$f_{ik} = \int\limits_0^l f_i(x) X_k(x) \, dx, \ \ i = 1, 2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \ \ \mu_k = \frac{\pi k}{l},$$

где функции $f_i(x)$ и $g_i(t)$, $i = 1, 2$, в силу теоремы 2.2.2 или 2.2.3 должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{gathered} f_i(x) \in C^3[0, l], \ \ f_i(0) = f_i(l) = f_i''(0) = f_i''(l) = 0; \\ g_1(t) \in C[0, \beta], g_2(t) \in C[-\alpha, 0]. \end{gathered} \tag{4.5.14}$$

4.5.2. Исследование задачи 4.6

При условии существовании функции $g_1(t)$ из класса $C[0, \beta]$ решение прямой задачи (4.5.3), (4.5.5) – (4.5.7) определяется по формуле (4.5.11). Полагая здесь $x = x_0$, т.е. удовлетворяя функцию (4.5.11) условию (4.5.8), поменяв местами операции интегрирования и суммирования, получим для искомой функции $g_1(t)$ нагруженное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^t g_1(s) K_1(s, t) \, ds = \widetilde{h}_1(t), \quad 0 \le t \le \beta, \tag{4.5.15}$$

с ядром

$$K_1(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} e^{-\lambda_k^2 (t - s)} X_k(x_0), \tag{4.5.16}$$

с правой частью

$$\widetilde{h}_1(t) = h_1(t) - g_1(0) H_1(t) + H_2(t), \tag{4.5.17}$$

здесь

$$H_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{1k} e^{-\lambda_k^2 t}}{\lambda_k \delta(k)} \sin \lambda_k \alpha X_k(x_0), \tag{4.5.18}$$

$$H_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k} e^{-\lambda_k^2 t}}{\lambda_k \delta(k)} g_{2k}^{(s)}(\alpha) X_k(x_0), \tag{4.5.19}$$

$$g_{2k}^{(s)}(\alpha) = \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) \sin\left[\lambda_k(t+\alpha)\right] ds. \qquad (4.5.20)$$

В силу наложенных условий на функцию $f_1(x)$ (см. (4.5.14)) ряд (4.5.16) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по t при $0 \le t \le \beta$. Поэтому функция $K'_{1t}(s,t)$ непрерывна на замкнутом множестве $0 \le s \le t \le \beta$. Аналогичными свойствами обладают также ряды (4.5.18) и (4.5.19) на отрезке $[0,\beta]$. Дифференцируя уравнение (4.5.15) по t, имеем

$$K'_1(t,t)g_1(t) + \int\limits_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\, ds = \widetilde{h}'_1(t). \qquad (4.5.21)$$

Положив в (4.5.16) $s = t$, будем иметь

$$K'_1(t,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k} X_k(x_0) = f_1(x_0). \qquad (4.5.22)$$

Как видим, что правая часть равенства (4.5.22) представляет собой разложение в ряд функции $f_1(x)$ по системе $\{X_k(x)\} = \left\{\sqrt{2/l}\sin\mu_k x\right\}_{k\ge1}$ в точке $x = x_0$. Если $f_1(x_0) \ne 0$, то уравнение (4.5.21) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Как известно, такое уравнение имеет единственное решение в классе функций $C[0,\beta]$, если предварительно найдем значение $g_1(0)$, которое входит в правую часть уравнения (4.5.21). Из уравнения (4.5.21) имеем

$$f_1(x_0)g_1(0) = h'_1(0) - g_1(0)H'_1(0) + H'_2(0).$$

Отсюда найдем

$$g_1(0) = \frac{h'_1(0) + H'_2(0)}{f_1(x_0) + H'_1(0)} \qquad (4.5.23)$$

при условии

$$f_1(x_0) + H'_1(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k}X_k(x_0) - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_{1k}\lambda_k \sin\lambda_k\alpha}{\delta(k)}X_k(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k}\left[1 - \frac{\lambda_k\sin\lambda_k\alpha}{\delta(k)}\right]X_k(x_0) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_{1k}\cos\lambda_k\alpha}{\delta(k)}X_k(x_0) \ne 0. \qquad (4.5.24)$$

Отметим, что условие (4.5.24) выполнено, например, при $b = 0$ и $\widetilde{\alpha} = \alpha/l = p \in \mathbb{N}$.

После нахождения значения $g_1(0)$ по формуле (4.5.23) уравнение (4.5.21) является классическим уравнением Вольтерра второго рода, решение которого легко строится методом последовательных приближений.

Теперь покажем, что условие

$$\sin \mu_n x = \sin \pi n \widetilde{x}_0 \neq 0, \tag{4.5.25}$$

где $\widetilde{x}_0 = x/l$, является существенным для однозначной разрешимости задачи 4.6. Допустим, при некоторых $\widetilde{x}_0 \in (0,1)$ и $n = m$ нарушено условие (4.5.25), т.е. выражение $\sin \mu_m x_0 = 0$. Тогда существует функция $f_1(x) = \sin \mu_m x_0$, такая что для любой функции $g_1(t) \in C[0,\beta]$ существует ненулевое решение задачи 4.6 при $h_1(t) \equiv 0$

$$v_{1m}(x,t) = T_{1m}(t) \sin \mu_m x, \tag{4.5.26}$$

где

$$T_{1m}(t) = \begin{cases} \dfrac{w_{1m}}{\delta(m)} e^{-\lambda_m^2 t} + \displaystyle\int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2 (t-s)}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{w_{1m}}{\delta(m)} (\cos \lambda_m t - \lambda_m \sin \lambda_m t) + \dfrac{g_1(0) \sin \lambda_m t}{\lambda_m} - \\ \qquad\qquad - \dfrac{f_{2m}}{\lambda_m} \displaystyle\int\limits_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_m (t-s)\right]\, ds, & t < 0, \end{cases} \tag{4.5.27}$$

$$w_{1m} = \frac{g_1(0) \sin \lambda_m \alpha}{\lambda_m} - \frac{f_{2m}}{\lambda_m} \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_m (s+\alpha)\right]\, ds. \tag{4.5.28}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 4.5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1.1 *или* 2.1.3 *и* (4.5.25)*; функции* $f_i(x)$, $g_2(t)$ *удовлетворяют условиям* (4.5.14), $h_1(t) \in C^1[0,\beta]$. *Тогда, если* $f_1(x_0) \neq 0$ *и выполнено условие* (4.5.24), *то интегральное уравнение* (4.5.21) *имеет единственное решение* $g_1(t)$ *из* $C[0,\beta]$, *следовательно, задача* 4.6 *имеет единственное решение.*

Теперь выясним для каких точек $\widetilde{x}_0$ из $(0,1)$ нарушается условие (4.5.25), т.е. имеет место равенство

$$\sin \pi n \widetilde{x}_0 = 0, \iff \widetilde{x}_0 = \frac{k}{n}, \tag{4.5.29}$$

где k, $n \in \mathbb{N}$ и $k < n$. Следовательно, когда $\widetilde{x}_0$ принимает иррациональные значения условие (4.5.25) будет выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$.

4.5.3. Исследование задачи 4.7

Аналогично п. 4.5.2 полагая в формуле (4.5.11) $x = x_0$ с учетом условия (4.5.10), получим интегральное уравнение типа первого рода

$$-\int_t^0 g_2(s)K_2(s,t)\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)K_3(s,t)\,ds = \widetilde{h}_2(t), \quad -\alpha \le t \le 0, \tag{4.5.30}$$

здесь

$$K_2(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{\lambda_k} \sin\left[\lambda_k(t-s)\right] X_k(x_0), \quad -\alpha \le t \le s \le 0, \tag{4.5.31}$$

$$K_3(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{\lambda_k \delta(k)} \left(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t\right) \sin\lambda_k(s+\alpha)\, X_k(x_0), \tag{4.5.32}$$

$$\widetilde{h}_2(t) = h_2(t) - g_1(0)H_3(t), \quad -\alpha \le t \le 0, \tag{4.5.33}$$

$$H_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{1k}}{\lambda_k} \left[\frac{(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t)\sin\lambda_k\alpha}{\delta(k)} + \sin\lambda_k t\right] X_k(x_0). \tag{4.5.34}$$

Прежде всего отметим, что ряды (4.5.31), (4.5.32) и (4.5.34) на указанных областях задания сходятся равномерно и допускают почленное дифференцирование по переменной t два раза в силу наложенных условий (4.5.14) на функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Обе части уравнения (4.5.30) продифференцируем по t. Тогда получим

$$g_2(t)K_2(t,t) - \int_t^0 g_2(s)\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial K_3(s,t)}{\partial t}\,ds = \widetilde{h}_2'(t). \tag{4.5.35}$$

Из равенства (4.5.31) видно, что

$$K_2(s,t)\Big|_{s=t} = 0.$$

Тогда, еще раз дифференцируя уравнение (4.5.35), будем иметь

$$g_2(t)\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\bigg|_{s=t} - \int\limits_t^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds - \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\,ds = \widetilde{h}_2''(t). \tag{4.5.36}$$

На основании (4.5.31) вычислим

$$\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\bigg|_{s=t} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{2k}X_k(x_0) = f_2(x_0). \tag{4.5.37}$$

Если теперь потребуем, что $f_2(x_0) \neq 0$, то из (4.5.36) и (4.5.37) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g_2(t) - \lambda \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s)H(s,t)\,dt = \mu(t), \tag{4.5.38}$$

где

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}, & -\alpha \le s \le t, \\ \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}, & t \le s \le 0, \end{cases} \tag{4.5.39}$$

$$\lambda = \frac{1}{f_2(x_0)}, \quad \mu(t) = \frac{\widetilde{h}_2''(t)}{f_2(x_0)}.$$

Ядро $H(s,t)$ интегрального уравнения (4.5.38), определенное формулой (4.5.39), непрерывно на замкнутом квадрате $-\alpha \le s, t \le 0$. Если $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, то правая часть $\mu(t)$ также непрерывна на $[-\alpha, 0]$. Следовательно, уравнение (4.5.38) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, к которому применима известная теория Фредгольма [95, с. 460]. Это означает фредгольмость задачи 4.7. Выделим случаи, когда уравнение (4.5.38) имеет единственное решение. Методом последовательных приближений можно доказать однозначную разрешимость данного уравнения в классе непрерывных на $[-\alpha, 0]$ функций при

$$|\lambda| < \frac{1}{M\alpha}, \quad M = \max_{-\alpha \le s,\, t \le 0} |H(s,t)|.$$

Из теории Фредгольма также следует, что, если λ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$, то интегральное уравнение (4.5.38) имеет единственное непрерывное на $[-\alpha,0]$ решение.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 4.5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1.1 *или* 2.1.3 *и* (4.5.25)*; функции $f_i(x)$, $g_1(t)$ удовлетворяют условиям* (4.5.14)*, $h_2(t) \in C^2[-\alpha,0]$, $f_2(x_0) \neq 0$. Тогда при выполнении одного из следующих условий: а) $|f_2(x_0)| > M\alpha$; б) число $f_2^{-1}(x_0)$ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$ существует единственное решение задачи* 4.7*. При этом функция $g_2(t)$ определяется как решение интегрального уравнения* (4.5.38)*, после чего функция $v(x,t)$ определяется по формуле* (4.5.11)*.*

Отметим также, что в теореме 4.5.2 условие (4.5.25) существенно. Пусть при некоторых $\widetilde{x}_0 \in (0,1)$ и $n = m \in \mathbb{N}$ нарушено условие (4.5.25), т.е. $\sin\mu_m x_0 = 0$. Тогда для функций $f_2(x) = \sin\mu_m x$ и $g_2(t) \in C[-\alpha,0]$ аналогично (4.5.26) строится ненулевое решение задачи 4.7 при $h_2(t) \equiv 0$

$$v_{2m}(x,t) = T_{2m}(t)\sin\mu_m x, \tag{4.5.40}$$

здесь

$$T_{2m}(t) = \begin{cases} \dfrac{w_{2m}}{\delta(m)} e^{-\lambda_m^2 t} + f_{1m}\displaystyle\int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2(t-s)}\,ds, & t > 0, \\ \dfrac{w_{2m}}{\delta(m)}\left(\cos\lambda_m t - \lambda_k \sin\lambda_m t\right) + \dfrac{f_{1m} g_1(0)}{\lambda_m}\sin\lambda_m t - & \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\lambda_m}\displaystyle\int_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_m(t-s)\right]\,ds, & t < 0, \end{cases} \tag{4.5.41}$$

$$w_{2m} = \frac{f_{1m} g_1(0)}{\lambda_m}\sin\lambda_m\alpha - \frac{1}{\lambda_m}\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_m(s+\alpha)\right]\,ds. \tag{4.5.42}$$

4.5.4. Исследование задачи 4.8

Удовлетворив функцию (4.5.11) условиям (4.5.8) и (4.5.10), получим систему интегральных уравнений с нагруженными слагаемыми

$$\int_0^t g_1(s) K_1(s,t)\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\widetilde{K}_1(s,t)\,ds =$$

$$= h_1(t) - g_1(0)H_1(t) = \widetilde{\widetilde{h}}_1(t), \tag{4.5.43}$$

$$-\int_t^0 g_2(s)K_2(s,t)\,dt - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)K_3(s,t)\,ds =$$

$$= h_2(t) - g_1(0)H_3(t) = \widetilde{h}_2(t), \tag{4.5.44}$$

где $K_1(s,t)$, $H_1(t)$, $K_2(s,t)$, $K_3(s,t)$ и $H_3(t)$ определяются соответственно формулами (4.5.16), (4.5.18), (4.5.31), (4.5.32) и (4.5.34),

$$\widetilde{K}_1(s,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t}}{\lambda_k \delta(k)} \sin\left[\lambda_k(s+\alpha)\right] X_k(x_0). \tag{4.5.45}$$

Следуя пп. 4.5.2 и 4.5.3 продифференцируем уравнение (4.5.43) один раз, а уравнение (4.5.44) – два раза. В результате имеем

$$g_1(t)f_1(x_0) - \int_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\,ds -$$

$$\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\,ds = \widetilde{\widetilde{h}}{}_1'(t), \tag{4.5.46}$$

$$g_2(t)f_2(x_0) - \int_t^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds -$$

$$-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial^2 t^2}\,ds = \widetilde{h}_2''(t). \tag{4.5.47}$$

Полагая в равенствах (4.5.46) и (4.5.47) $t = 0$, получим

$$g_1(0)f_1(x_0) - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}\,ds =$$

$$= h_1'(0) - g_1(0)H_1'(0), \tag{4.5.48}$$

$$g_2(0)f_2(x_0) - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}\,ds =$$

$$= h_2''(0) - g_1(0)H_3''(0). \tag{4.5.49}$$

На основании формул (4.5.45) и (4.5.32) вычислим

$$\left.\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_{2k}\lambda_k}{\delta(k)} \sin\left[\lambda_k(s+\alpha)\right] X_k(x_0),$$

$$\left.\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_{2k}\lambda_k}{\delta(k)} \sin\left[\lambda_k(s+\alpha)\right] X_k(x_0).$$

Поскольку они равны, то из равенств (4.5.48) и (4.5.49), имеем

$$g_1(0)f_1(x_0) + h_2''(0) - g_1(0)H_3''(0) - g_2(0)f_2(x_0) =$$

$$= h_1'(0) - g_1(0)H'(0).$$

Отсюда

$$g_1(0)\Big[f_1(x_0) + H_1'(0) - H_3''(0)\Big] = h_1'(0) - h_2''(0) + g_2(0)f_2(x_0). \tag{4.5.50}$$

Теперь на основании формул (4.5.18) и (4.5.34) найдем

$$H_1'(0) - H_3''(0) = 0.$$

Тогда из (4.5.50) найдем равенство

$$g_1(0)f_1(x_0) = h_1'(0) - h_2''(0) + g_2(0)f_2(x_0), \tag{4.5.51}$$

связывающее значения $g_1(0)$ и $g_2(0)$ между собой. Из равенства (4.5.51) найдем значение $g_1(0)$ и подставим в правую часть уравнения (4.5.47). Тогда получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, которая содержит значение $g_2(0)$. При выполнении условий теоремы 4.5.2 уравнение (4.5.47) имеет единственное решение $g_2(t)$, которое можно определить через резольвенту ядра $H(s,t)$ (см. (4.5.39)) и правую часть $\mu(t)$. Отсюда получаем линейное уравнение относительно $g_2(0)$, которое при определенных условиях на функции $f_i(x)$ и $h_i(t)$, $i = 1, 2$, в нуле однозначно разрешимо. После чего найденную таким образом функцию $g_2(t)$ подставляем в уравнение (4.5.46) и в силу теоремы 4 полученное интегральное уравнение относительно $g_1(t)$ однозначно разрешимо в классе $C[0,\beta]$. Затем по аналогичной схеме можно найти значение $g_1(0)$ из представления решения через резольвенту ядра $\partial\widetilde{K}_1(s,t)/\partial t$ и правую часть полученного уравнения.

Если $g_1(0) = 0$, то из уравнения (4.5.38) на основании теоремы 4.5.2 найдем неизвестную функцию $g_2(t)$ и подставим в интегральное уравнение (4.5.46), которое в силу теоремы 4.5.1 однозначно разрешимо в классе функций $C[0, \beta]$. Если $g_1(0) \neq 0$, то предположим, что $g_2(0) = 0$. Тогда из равенства (4.5.51) найдем $g_1(0)$ и подставим в уравнения (4.5.46) и (4.5.47), которые разрешаются по указанной выше схеме. Числа $g_1(0)$ и $g_2(0)$ одновременно не могут обратиться в нуль.

Таким образом, в силу приведенных выше рассуждений приходим к следующему утверждению по задаче 4.8.

Теорема 4.5.3. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1.1 *или* 2.1.3 *и* (4.5.25)*; функции* $f_i(x)$ *удовлетворяют условиям* (4.5.14), $h_1(t) \in C^1[0, \beta]$, $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, $f_1(x_0) \neq 0$, $f_2(x_0) \neq 0$ *и выполнении одного из условий а) или б) теоремы* 4.5.2. *Тогда, если* $g_1(0) = 0$ *или* $g_2(0) = 0$, *то система интегральных уравнений* (4.5.46) *и* (4.5.47) *имеет единственное решение* $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ *и* $g_1(t) \in C[0, \beta]$, *после этого функция* $v(x, t)$ *находится по формуле* (4.5.11).

Отметим, что в теореме 4.5.3 условие (4.5.25) существенно, так как в противном случае, когда $\sin \mu_m x_0 = 0$, для функций $f_1(x) = f_2(x) = \sin \mu_m x$, $g_1(t) \in C[0, \beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ строится ненулевое решение задачи 4.7 при $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$

$$\widetilde{v}_m(x, t) = \widetilde{T}_m(t) \sin \mu_m x, \tag{4.5.52}$$

где

$$\widetilde{T}_m(t) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{w}_m}{\delta(m)} e^{-\lambda_m^2 t} + \displaystyle\int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2 (t-s)}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{\widetilde{w}_m}{\delta(m)} (\cos \lambda_m t - \lambda_k \sin \lambda_m t) + \dfrac{g_1(0)}{\lambda_m} \sin \lambda_m t - & \\ \qquad - \dfrac{1}{\lambda_m} \displaystyle\int_t^0 g_2(s) \sin [\lambda_m (t - s)]\, ds, & t < 0, \end{cases} \tag{4.5.53}$$

$$\widetilde{w}_m = \frac{g_1(0)}{\lambda_m} \sin \lambda_m \alpha - \frac{1}{\lambda_m} \int_{-\alpha}^0 g_2(s) \sin [\lambda_m (s + \alpha)]\, ds, \tag{4.5.54}$$

здесь соотношения (4.5.52) – (4.5.54) определяются на основании ранее полученных формул (4.5.26) – (4.5.28) и (4.5.40) – (4.5.42).

Г л а в а 5

Обратные коэффициентные задачи

§ 5.1. Прямая начально-граничная задача

5.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + q(x)u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, & t < 0 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < \pi,\, -\alpha < t < \beta\}$, где α и β – заданные положительные числа. Потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ определенная на $[0,\pi]$ – достаточно гладкая функция, причем $q(x) \geq 0$.

В начале рассмотрим случай, когда потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ известен, т.е. изучим следующую прямую начально-граничную задачу.

Начально-граничная задача. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(D) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{5.1.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{5.1.3}$$

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) + Hu(\pi,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{5.1.4}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{5.1.5}$$

где h и H – заданные положительные постоянные, $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования с граничными условиями (5.1.4):

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) = 0. \tag{5.1.6}$$

Отметим, что предложенная начально-граничная задача (5.1.2) – (5.1.5) изучена в § 2.3 при $q(x) = \text{const} = b^2$, где установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

В этом параграфе единственность решения задачи (5.1.2) – (5.1.5) доказана на основании свойства полноты соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Ранее такой подход применялся в работах Х.Л. Смолицкого [122], В.А. Ильина [31, 32] при доказательстве единственности решения начально-граничных (смешанных) задач для уравнений гиперболического и параболического типов. Существование решения задачи (5.1.2) – (5.1.5) построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При обосновании сходимости возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость ряда. При условии, когда число α/π является рациональным, получена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя. Эта оценка при определенных условиях на функции $q(x)$ и $\varphi(x)$ позволяет доказать сходимость построенного ряда в пространстве функций (5.1.2).

5.1.2. Единственность решения задачи

В уравнении (5.1.1), разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \ \ 0 < x < \pi, \tag{5.1.7}$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \ \ X'(\pi) + HX(\pi) = 0. \tag{5.1.8}$$

Как известно [66, § 2], при $q(x) \in C^1[0,\pi]$ задача (5.1.7) и (5.1.8) имеет счетное множество положительных собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, все они являются простыми, а соответствующая система собственных функций $\{X_n(x)\} = \{X(x,\lambda_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,\pi]$ и поэтому в нем образует ортогональный базис. При этом справедливы следующие асимптотические формулы при больших n:

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{5.1.9}$$

$$X_n(x) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{5.1.10}$$

$$\alpha_n = \int\limits_0^{\pi} X_n^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx, \ \ \xi_n(x) = \sin nx\left(-\frac{\omega x}{\pi} + h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(\tau)\,d\tau\right),$$

числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ называются спектральными данными задачи (5.1.7) и (5.1.8) .

Справедлива также теорема В.А. Стеклова о разложении [130, с. 173]: если функция $f(x) \in C^1[0,\pi]$ и удовлетворяет граничным условиям (5.1.6), то справедливо разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n X_n(x), \ \ f_n = \frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^\pi f(x)X_n(x)\,dx,$$

причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, и справедливо равенство замкнутости системы $X_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f_n^2 = \int\limits_0^\pi f^2(x)\,dx.$$

Пусть существует решение $u(x,t)$ задачи (5.1.2) – (5.1.5). Рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int\limits_0^\pi X_n(x)u(x,t)\,dx, \ \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.1.11}$$

Дифференцируя равенство (5.1.11) по t при $t > 0$ один раз, при $t < 0$ два раза, затем учитывая уравнение (5.1.1) и интегрируя по частям два раза интеграл, содержащий производную u_{xx}, с учетом граничных условий (5.1.4) и (5.1.8) получим

$$u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, \ \ t > 0, \tag{5.1.12}$$

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, \ \ t < 0. \tag{5.1.13}$$

Дифференциальные уравнения (5.1.12) и (5.1.13) имеют соответственно общие решения

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\lambda_n t}, & t > 0, \\ a_n \cos\rho_n t + b_n \sin\rho_n t, & t < 0, \end{cases} \tag{5.1.14}$$

где a_n, b_n и c_n – произвольные постоянные. В силу (5.1.2) для функций (5.1.14) справедливы условия сопряжения

$$u_n(0+0) = u_n(0-0), \;\; u_n'(0+0) = u_n'(0-0). \tag{5.1.15}$$

Удовлетворяя функции (5.1.14) условиям (5.1.15), получим $a_n = c_n$, $b_n = -c_n\rho_n$. Тогда функции (14) примут вид

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\rho_n^2 t}, & t > 0, \\ c_n(\cos\rho_n t - \rho_n \sin\rho_n t), & t < 0. \end{cases} \tag{5.1.16}$$

Теперь для нахождения постоянных c_n воспользуемся граничным условием (5.1.5) и формулой (5.1.11):

$$u_n(-\alpha) = \int\limits_0^\pi \varphi(x) X_n(x)\, dx = \varphi_n. \tag{5.1.17}$$

Тогда, удовлетворяя (5.1.16) граничному условию (5.1.17), найдем

$$c_n = \frac{\varphi_n}{\delta_\alpha(n)} \tag{5.1.18}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\delta_\alpha(n) = \cos\rho_n\alpha + \rho_n \sin\rho_n\alpha \neq 0. \tag{5.1.19}$$

Подставляя (5.1.18) в (5.1.16), найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n}{\delta_\alpha(n)} e^{-\rho_n^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\varphi_n}{\delta_\alpha(n)}[\cos\rho_n t - \rho_n \sin\rho_n t], & t < 0. \end{cases} \tag{5.1.20}$$

Теперь докажем теорему единственности решения задачи (5.1.2) – (5.1.5). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ и выполнены условия (5.1.19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\varphi_n \equiv 0$ и из формул (5.1.20) и (5.1.11) следует, что

$$\int\limits_0^\pi u(x,t) X_n(x)\, dx = 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Отсюда в силу полноты системы $\{X_n(x)\}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$ следует, что $u(x,t)=0$ почти всюду на $[0,\pi]$ при любом $t\in[\alpha,\beta]$. Поскольку $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α и $n=p\in\mathbb{N}_0$ нарушено условие (5.1.19), т.е. $\delta_\alpha(p)=0$. Тогда однородная задача (5.1.2) – (5.1.5) (где $\varphi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t)=\begin{cases} e^{-\rho_p^2 t}X_p(x), & t>0,\\ (\cos\rho_p t-\mu_p\sin\rho_p t)X_p(x), & t<0. \end{cases} \tag{5.1.21}$$

Возникает вопрос о существовании нулей уравнения $\delta_\alpha(p)=0$. Для этого его представим в виде

$$\delta_\alpha(p)=\sqrt{1+\rho_p^2}\,\sin(\rho_p\alpha+\gamma_p)=0, \tag{5.1.22}$$

где $\gamma_p=\arcsin 1/\sqrt{1+\rho_p^2}$. Отсюда видно, что уравнение (5.1.22) имеет счетное множество нулей относительно α:

$$\alpha=\frac{\pi k}{\rho_p}-\frac{\gamma_p}{\rho_p},\ \ p\in\mathbb{N}_0,\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{5.1.23}$$

Таким образом, нами установлен критерий единственности.

Теорема 5.1.1. *Если существует решение задачи* (5.1.2) – (5.1.5)*, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (5.1.19) *при всех* $n\in\mathbb{N}_0$.

5.1.3. Существование решения задачи

Поскольку α – любое положительное число, то выражение $\delta_\alpha(n)$ при больших n может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей». Поэтому для обоснования существования решения задачи (5.1.2) – (5.1.5) надо показать существование чисел α, при которых выражение $\delta_\alpha(n)$ при больших n отделено от нуля.

Лемма 5.1.1. *Если* $\widetilde{\alpha}=\alpha/\pi$ *является рациональным числом, то существуют положительные постоянные* C_0 *и* n_0 ($n_0\in\mathbb{N}_0$)*, такие, что при* $n>n_0$ *справедлива оценка*

$$|\delta_\alpha(n)|\geq C_0>0. \tag{5.1.24}$$

Доказательство. На основании представлений (5.1.9) и (5.1.22) при больших n имеем

$$|\delta_\alpha(n)|\geq n\,|\sin(\widetilde{\alpha}\pi\mu_n+\gamma_n)|=n\left|\sin\left(\pi n\widetilde{\alpha}+\frac{\widetilde{\alpha}\,\omega}{n}+\gamma_n\right)\right|. \tag{5.1.25}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$. Тогда выражение (5.1.25) примет вид

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n \left|\sin\left(\frac{p\,\omega}{n} + \gamma_n\right)\right|.$$

Отсюда на основании неравенства $\sin x > 2x/\pi$, $0 < x < \pi/2$, при больших n получим

$$|\delta_\alpha(n)| > \frac{2n}{\pi}\left(\frac{p\,\omega}{n} + \gamma_n\right) > \frac{2p(h+H)}{\pi}, \tag{5.1.26}$$

так как $n\gamma_n \to 1$ при $n \to +\infty$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{N}$. Разделим np на q с остатком: $np = sq + r$, где $s, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < q$. Если $r = 0$, то этот случай сводится к предыдущему, когда $\widetilde{\alpha}$ – натуральное число. Пусть $r > 0$. Тогда $1 \leq n \leq q-1$, $q \geq 2$, и из (5.1.25) будем иметь

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p\,\omega}{n} + \gamma_n\right)\right|.$$

Поскольку последовательность γ_n бесконечно малая, то существует конечный предел

$$\lim_n \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p\,\omega}{qn} + \gamma_n\right)\right| = \left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| =$$

$$= \sin\frac{\pi r}{q} \geq \sin\frac{\pi}{q} > 0. \tag{5.1.27}$$

Тогда из соотношений (5.1.26) и (5.1.27) следует, что

$$|\delta_\alpha(n)| > n\sin\frac{\pi}{q} \geq \sin\frac{\pi}{q} > 0.$$

Тем самым справедливость оценки (5.1.24) установлена.

Отметим, что если $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным числом, то на основании множества (5.1.23) можно подобрать такие числа, которые являются нулями $\delta_\alpha(n) = 0$.

Если теперь для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 5.1.1 выполнены условия (5.1.19) при $n \in [0, n_0]$ и оценка (5.1.24) при $n > n_0$, то решение задачи (5.1.2) – (5.1.5) можно определить как сумму ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{5.1.28}$$

где $u_n(t)$ определяются по формулам (5.1.20), а $X_n(x)$ – система собственных функций задачи (5.1.7), (5.1.8).

Лемма 5.1.2. *Пусть выполнена оценка* (5.1.24) *при* $n > n_0$*. Тогда для таких* n *справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \le C_1 n|\varphi_n|, \ \ |u_n'(t)| \le C_2 n^2|\varphi_n|, \ \ -\alpha \le t \le \beta,$$

$$|u_n''(t)| \le C_3 n^3|\varphi_n|, \ \ -\alpha \le t \le 0,$$

где C_i *– здесь и далее положительные постоянные, не зависящие от* x*,* t*,* $\varphi(x)$ *и* n*.*

Доказательство этих оценок в силу леммы 5.1.1 непосредственно следует из формулы (5.1.20).

Ряд (5.1.28) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ мажорируются числовым рядом

$$C_4 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2|\varphi_n|. \tag{5.1.29}$$

В силу теоремы Стеклова ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n X_n(x) \tag{5.1.30}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, когда $\varphi(x) \in C^3[0,\pi]$, $q(x) \in C^1[0,\pi]$ и

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \ \ \varphi'''(0) - h\varphi''(0) = 0, \ \ \varphi'''(\pi) + H\varphi''(\pi) = 0. \tag{5.1.31}$$

Действительно, в силу условий (5.1.6) – (5.1.8) имеем

$$\lambda_n \varphi_n = \int\limits_0^\pi \varphi(x) \lambda_n X_n(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \varphi(x)[q(x)X_n(x) - X_n''(x)]\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \varphi(x)q(x)X_n(x)\,dx - \int\limits_0^\pi \varphi(x)X_n''(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi [\varphi(x)q(x) - \varphi''(x)]X_n(x)\,dx = \int_0^\pi \psi(x)X_n(x)\,dx = \psi_n.$$

Поскольку функция $\psi(x) \in C^1[0,\pi]$ и в силу (5.1.31) удовлетворяет условиям (5.1.6), то на основании теоремы Стеклова ряд (5.1.30) сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Отсюда следует сходимость ряда (5.1.29), так как из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\psi_n^2$ (см. [130, с. 184]) получим, что

$$|\psi_n| = \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{\lambda_n}}, \ \ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty. \tag{5.1.32}$$

Тогда из (5.1.31) и (5.1.32) найдем оценку:

$$n^2|\varphi_n| \le \lambda_n|\varphi_n| = |\psi_n| = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\lambda_n}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_n} + \varepsilon_n^2\right),$$

из которой вытекает уже сходимость ряда (5.1.29).

Ряды из производных второго порядка по x и t соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ мажорируются рядом

$$C_5 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^3|\varphi_n|. \tag{5.1.33}$$

Для обоснования сходимости ряда (5.1.33) рассмотрим равенство

$$\lambda_n\varphi_n^{(2)} = \int_0^\pi \varphi''(x)\lambda_n X_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \varphi''(x)[q(x)X_n(x) - X_n''(x)]\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \varphi''(x)q(x)X_n(x)\,dx - \int_0^\pi \varphi''(x)X_n''(x)\,dx. \tag{5.1.34}$$

Последний интеграл, интегрируя два раза по частям, с учетом условий (5.1.8) и (5.1.31) будем иметь

$$\int_0^\pi \varphi''(x)X_n''(x)\,dx = \int_0^\pi \varphi^{IV}(x)X_n(x)\,dx. \tag{5.1.35}$$

Тогда из равенств (5.1.34) и (5.1.35) получим

$$\lambda_n\varphi_n^{(2)} = \int\limits_0^\pi [q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x)]X_n(x)\,dx = \int\limits_0^\pi g(x)X_n(x)\,dx.$$

Если функция $g(x) = q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x) \in C^1[0,\pi]$ и удовлетворяет условиям (5.1.6), т.е. когда $\varphi(x) \in C^5[0,\pi]$ и $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$, $\varphi^{(5)}(0) - h\varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi^{(5)}(\pi) + H\varphi^{(4)}(\pi) = 0$, то по теореме Стеклова ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n^{(2)}X_n(x) \tag{5.1.36}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Из равенства (5.1.31) следует, что

$$\lambda_n\varphi_n = f_n - \varphi_n^{(2)}, \tag{5.1.37}$$

где $f_n = \int\limits_0^\pi q(x)\varphi(x)X_n(x)dx$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_nX_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$ к функции $f(x) = q(x)\varphi(x)$, так как $f(x) \in C^1[0,\pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$.

Подставляя (5.1.37) в ряд (5.1.36), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_nf_n - \lambda_n^2\varphi_n)X_n(x). \tag{5.1.38}$$

Если функция $f(x) \in C^3[0,\pi]$ и удовлетворяет условиям (5.1.6), т.е. когда $q(x) \in C^3[0,\pi]$, $q'(0) = q'(\pi) = 0$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (5.1.6), то аналогично обоснованию сходимости ряда (5.1.30) получим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_nf_nX_n(x) \tag{5.1.39}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Тогда из рядов (5.1.38) и (5.1.39) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2\varphi_nX_n(x),$$

из которого вытекает сходимость ряда (5.1.33).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$, указанных в лемме 5.1.1, при некоторых $n = n_1, n_2, ..., n_m$, где $0 \le n_1 < n_2 < ... < n_m \le n_0$, n_i, $i = \overline{1, m}$, и m – заданные неотрицательные целые числа, выполняется равенство $\Delta_\alpha(n) = 0$, то для разрешимости задачи (5.1.2) – (5.1.5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_n = \int_0^\pi \varphi(x) X_n(x) dx = 0, \, n = n_1, n_2, ..., n_m. \tag{5.1.40}$$

В этом случае решение задачи (5.1.2) – (5.1.5) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \left(\sum_{n=0}^{n_1-1} + ... + \sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m-1} + \sum_{n=n_m+1}^{+\infty} \right) u_n(t) X_n(x) +$$

$$+ \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{5.1.41}$$

где в последней сумме p принимает значения $n_1, n_2, ..., n_m$, A_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (5.1.21), если в конечных суммах в правой части (5.1.41) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 5.1.2. *Пусть* $q(x) \in C^3[0,\pi]$,$\varphi(x) \in C^5[0,\pi]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(\pi) = 0$, $j = 1,2,3$; $\varphi^{(5)}(0) - h\varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi^{(5)}(\pi) + H\varphi^{(4)}(\pi) = 0$ *и выполнена оценка* (5.1.24) *при* $n > n_0$. *Тогда, если* $\delta_\alpha(n) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{0, n_0}$, *то существует единственное решение задачи* (5.1.2) – (5.1.5), *и оно определяется рядом* (5.1.28); *если* $\delta_\alpha(n) = 0$ *при некоторых* $n = n_1, n_2, ..., n_m \le n_0$, *то задача* (5.1.2) – (5.1.5) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (5.1.40) *и решение определяется рядом* (5.1.41), *при этом решение* $u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D}_-) \cap C_x^2(\overline{D}_+)$.

§ 5.2. Обратные коэффициентные задачи

Отметим, что различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных, т.е. для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучены достаточно полно; усилиями многих математиков создана теория обратных задач (см. монографии [91, 61, 30, 62, 17, 155, 40] и приведенную там обширную библиографию). А также отметим работы [55, 56], посвященные вопросам разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнений параболического типа.

Пусть теперь в постановке задачи (5.1.2) – (5.1.5) неизвестны функции $u(x,t)$, $q(x)$ и постоянные h и H. В связи с этим надо ввести дополнительные условия. Эти условия могут быть заданы по-разному. На основании теории обратной задачи Штурма-Лиувилля [64, 66, 141] будем предполагать выполнение одного из следующих условий (A_i), $i=\overline{1,4}$:

- известны спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ задачи (5.1.7), (5.1.8) с неизвестным потенциалом из класса $C^3[0,\pi]$ и неизвестными коэффициентами h и H (условие (A_1));

- известны собственные значения λ_n и μ_n соответственно спектральных задач (5.1.7), (5.1.8) и

$$X'(0)-h_1X(0)=0, \;\; X'(\pi)-HX(\pi)=0, \tag{5.2.1}$$

здесь h_1 и H – действительные числа, $h_1\neq h$ (условие (A_2));

- известна дополнительная информация о решении задачи (5.1.2) – (5.1.5) на стороне $x=\pi$:

$$u(\pi,t)=\psi(t), \;\; -\alpha\leq t\leq \beta, \tag{A_3}$$

или на стороне $x=0$:

$$u(0,t)=\psi_0(t), \;\; -\alpha\leq t\leq \beta, \tag{A_4}$$

где $\psi(t)$ и $\psi_0(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

На основании условий (A_1) – (A_4) можно поставить следующие обратные задачи для уравнения (5.1.1) в области D.

Первая обратная задача. *Найти функцию $u(x,t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H, удовлетворяющие условиям* (5.1.2) – (5.1.5) *и* (A_1).

Вторая обратная задача. *Найти функцию $u(x,t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H, удовлетворяющие условиям* (5.1.2) – (5.1.5) *и* (A_2).

Третья обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и число h, удовлетворяющие условиям* (5.1.2), (5.1.3), (5.1.5), (A_3) *и*

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0, \;\; u_x(\pi,t)=\mu(t), \;\; -\alpha\leq t\leq \beta, \tag{5.2.2}$$

где $\mu(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Четвертая обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, удовлетворяющие условиям* (5.1.2), (5.1.3), (5.1.5), (5.2.2) *и* (A_4), *здесь h – известная постоянная.*

Отметим, что постановка задач 3 и 4 исходит из работы [17, с. 159–163], где для уравнения теплопроводности рассмотрены аналоги этих задач при $h = H = 0$ и доказаны соответствующие теоремы единственности.

Приведем для удобства дальнейшего изложения точные формулировки теорем единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля [64] – [66].

Теорема 5.2.1. *Пусть $q(x)$ и $\widetilde{q}(x)$ – непрерывные на $[0,\pi]$ функции, а наборы чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\alpha}_n\}_{n\geq 0}$ – спектральные данные задачи* (5.1.7), (5.1.8) *с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h, H и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$. Тогда, если $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ и $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$ и $H = \widetilde{H}$.*

Отметим, что в случае симметричности функции $q(x)$ относительно точки $x = \pi/2$, т.е. когда $q(\pi - x) = q(x)$, и $H = h$ для определения потенциала $q(x)$ и коэффициента h достаточно задать только спектр $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$.

Теорема 5.2.2. *Если $q(x) = q(\pi - x)$, $\widetilde{q}(x) = \widetilde{q}(\pi - x)$, $H = h$, $\widetilde{H} = \widetilde{h}$ и $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $n \geq 0$, то $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$ и $h = \widetilde{h}$.*

Теорема 5.2.3. *Пусть $q(x)$ и $\widetilde{q}(x)$ – непрерывные на $[0,\pi]$ функции, а $\{\lambda_n\}$ и $\{\widetilde{\lambda}_n\}$ – собственные значения задачи* (5.1.7) *и* (5.1.8) *с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h, H и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$; $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\widetilde{\mu}_n\}_{n\geq 0}$ – собственные значения задачи* (5.1.7), (5.2.1) *с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h_1, H и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}_1$, $\widetilde{H}$. Тогда, если $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ и $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$.*

На основании этих теорем установим следующие утверждения.

Теорема 5.2.4. *Пусть $u(x,t)$, $q(x)$, h, H и $\widetilde{u}(x,t)$, $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$ – решения первой обратной задачи и выполнены условия* (5.1.19) *при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ и $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ на $\overline{D}$.*

Доказательство. В силу теоремы 5.2.1 по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяются коэффициенты задачи (5.1.7) и (5.1.8), т.е. $q(x) \equiv \widetilde{q}(x)$, $h = \widetilde{h}$ и $H = \widetilde{H}$. Тогда из теоремы 1 при условии (5.1.19) следует, что $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ в $\overline{D}$.

Теорема 5.2.5. *Пусть $u(x,t)$, $q(x)$, h, H и $\widetilde{u}(x,t)$, $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$ – решения второй обратной задачи и выполнены условия* (5.1.19) *при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ и $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$*

в $\overline{D}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5.2.4 с применением теорем 5.2.3 и 5.1.1.

Теорема 5.2.6. *Пусть* $u_1(x,t)$, $q_1(x)$, h_1 *и* $u_2(x,t)$, $q_2(x)$, h_2 – *решения третьей обратной задачи и выполнены условия* (5.1.19) *при всех* $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда* $q_1(x) = q_2(x)$ *на* $[0, \pi]$ *и* $h_1 = h_2$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ *в* $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$, $q(x)$ и h – решение третьей обратной задачи. Следуя [17, с. 160], введем функцию

$$v_n(x,p) = \int_{-\alpha}^{\beta} e^{-pt}\xi_n(t)u(x,t)\,dt, \tag{5.2.3}$$

где p – комплексный параметр, $\xi_n(t) \in C^\infty(-\alpha,\beta)$, $0 \le \xi_n(t) \le 1$, $\xi_n(t) = 0$ при $t \in [-\alpha, 1/(2n)] \cup [\beta - 1/(2n), \beta]$ и $\xi_n(t) = 1$ при $t \in [1/n, \beta - 1/n]$. В силу определения функции $\xi_n(t)$ интеграл (5.2.3) примет вид

$$v_n(x,p) = \int_{0}^{\beta} e^{-pt}\xi_n(t)u(x,t)\,dt,$$

который является решением уравнения

$$v_n''(x,p) = (q(x)+p)\,v_n(x,p) - \int_{0}^{\beta} e^{-pt}u(x,t)\xi_n'(t)\,dt.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$v''(x,p) - (q(x)+p)v(x,p) = 0, \;\; 0 < x < \pi, \tag{5.2.4}$$

$$v'(0,p) - hv(0,p) = 0, \tag{5.2.5}$$

$$v'(\pi,p) = \int_{0}^{\beta} e^{-pt}\mu(t)\,dt = \nu(p). \tag{5.2.6}$$

Рассмотрим функцию $w(x,p)$, которая является решением задачи Коши для уравнения (5.2.4) с начальными условиями

$$w(0,p) = 1, \;\; w'(0,p) = h. \tag{5.2.7}$$

Функции $v(x,p)$ и $w(x,p)$ являются решениями уравнения (5.2.4) и определитель Вронского в точке $x=0$:

$$W[w,v]=\begin{vmatrix} w & v \\ w' & v' \end{vmatrix}=w(0,p)v'(0,p)-v(0,p)w'(0,p)=v'(0,p)-hv(0,p)=0$$

в силу граничного условия (5.2.5). Тогда они линейно зависимы на $[0,\pi]$, поэтому $v(x,p)=c(p)w(x,p)$. Используя граничное условие (5.2.6), найдем

$$c(p)=\frac{\nu(p)}{w'(\pi,p)}$$

и

$$v(x,p)=\frac{\nu(p)w(x,p)}{w'(\pi,p)}. \tag{5.2.8}$$

Пусть $q_i(x)$, $u_i(x,t)$ и h_i, $i=1,2$, – решения обратной задачи (5.1.2), (5.1.3), (5.1.5), (5.2.2), (A_3); $v_i(x,p)=\int\limits_0^\beta e^{-pt}u_i(x,t)\,dt$, $w_i(x,t)$ – решения задачи Коши для уравнения (5.2.4) с $q(x)=q_i(x)$ и начальными условиями (5.2.7) с $h=h_i$. Из дополнительного условия (A_3) следует, что $v_1(\pi,p)=v_2(\pi,p)$. Тогда в силу формулы (5.2.8) имеем

$$\frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)}=\frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}. \tag{5.2.9}$$

Поскольку функции $w_i(x,p)$ являются решениями уравнения (5.2.4) с $q(x)=q_i(x)$ и начальными условиями (5.2.7) с $h=h_i$, то $w_i(x,p)$ и $w_i'(x,p)$ при фиксированном x как функции комплексной переменной p являются аналитическими во всей комплексной плоскости. Тогда отношения

$$\frac{w_i(x,p)}{w_i'(x,p)}$$

также являются аналитическими на комплексной плоскости, за исключением нулей $w_i'(x,p)$, являющихся особыми точками. Из равенства (5.2.9) следует, что нули и особые точки функций

$$\frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} \text{ и } \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$$

совпадают. Покажем, что нули функций $w_1(\pi,p)$ и $w_1'(\pi,p)$ не совпадают. Допустим, что при $p=p_0$

$$w_1(\pi,p_0)=w_1'(\pi,p_0)=0. \tag{5.2.10}$$

По построению функция $w_1(x, p_0)$ является решением уравнения (5.2.4) с $q(x) = q_1(x)$ и удовлетворяет нулевым начальным условиям (5.2.10). Тогда $w_1(x, p_0) = 0$ на $[0, \pi]$, что противоречит тому, что $w_1(0, p_0) = 1$. Таким образом, нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_1'(\pi, p)$ не совпадают. Аналогично не совпадают нули функций $w_2(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$. Тогда из (5.2.9) следует, что все нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ совпадают, также совпадают все нули функций $w_1'(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$.

Пусть $p = p_0^i$ является нулем функции $w_i(\pi, p)$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\lambda_0^i = -p_0^i$ являются собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q_i(x)y = \lambda_i y, \tag{5.2.11}$$

$$y'(0) - h_i y(0) = 0, \;\; y(\pi) = 0. \tag{5.2.12}$$

В самом деле, поскольку функция $w_i(x, p)$ является решением уравнения (5.2.4) с $q(x) = q_i(x)$ и $p = p_0^i$, то функция $y_i(x) = w_i(x, p_0^i)$ является решением уравнения (5.2.11) с $\lambda = \lambda_0^i = -p_0^i$. Первое граничное условие из (5.2.12) следует из (5.2.7), а второе из того, что p_0^i нуль функции $w_i(\pi, p)$. Это решение ненулевое, так как в силу (5.2.7) $y_i(0) = w_i(0, p_0^i) = 1$. Следовательно, λ_0^i является собственным значением задачи (5.2.11), (5.2.12), т.е. любой нуль функции $w_i(\pi, p)$, взятый со знаком минус, является собственным значением этой задачи. Справедливо и обратное утверждение. Если λ_0^i является собственным значением, а $y_i(x)$ – соответствующей собственной функцией задачи (5.2.11), (5.2.12), то $p_0^i = -\lambda_0^i$ является нулем функции $w_i(\pi, p)$. Таким образом, существует биекция между нулями функции $w_i(\pi, p)$ собственными значениями задачи (5.2.11), (5.2.12) с $q(x) = q_i(x)$ и $h = h_i$. Аналогично можно показать, что существует биекция между нулями функции $w_i'(\pi, p)$ и собственными значениями спектральной задачи для уравнения (5.2.11) с граничными условиями

$$y'(0) - h_i y(0) = 0, y'(\pi) = 0. \tag{5.2.13}$$

Пусть λ_n^i, $n = 0, 1, 2, ...$ – собственные значения задачи (5.2.11), (5.2.12), а μ_n^i – собственные значения задачи (5.2.11), (5.2.13). Из совпадения нулей функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ следует равенство $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, а из совпадения нулей функций $w_1'(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$ следует, что $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, спектральные задачи (5.2.11), (5.2.12) и (5.2.11), (5.2.13) с $q_1(x)$, h_1 и $q_2(x)$, h_2 имеют одинаковые собственные значения. Тогда в силу теоремы 5 получим, что $q_1(x) \equiv q_2(x)$ при $x \in [0, \pi]$ и $h_1 = h_2$. При $q_1(x) = q_2(x) = q(x)$, $h_1 = h_2 = h$ и функции $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, являются решениями задачи (5.1.2), (5.1.3), (5.1.5) и (5.2.2). Их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

является решением однородной задачи (5.1.2), (5.1.3), (5.1.5), (5.2.1) с $\mu(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Теперь, применяя теорему 1 при условии (19), получим, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\overline{D}$. ■

Теорема 5.2.7. *Пусть $u_i(x,t)$ и $q_i(x)$, $i = 1,2$ – решения четвертой обратной задачи с $q_i(x) = q_i(\pi - x)$ и $h = H = 0$, и выполнены условия* (5.1.19) *при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0,\pi]$ и $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство аналогично обоснованию теоремы 5.2.6. Аналогично вводится функция (5.2.3) и для предельной функции $v(x,p)$ получаем задачу (5.2.4) – (5.2.6). Точно так же определяется функция $w(x,p)$ и устанавливается справедливость равенства (49). Из условия переопределения (A_4) имеем, что $v_1(0,p) = v_2(0,p)$. Тогда из представления (49) с учетом условия $w_1(0,p) = w_2(0,p) = 1$ получим

$$\frac{1}{w_1'(\pi,p)} = \frac{1}{w_2'(\pi,p)}, \tag{5.2.14}$$

где $w_i(x,p)$ – решения задачи Коши для уравнения (5.2.4) с $q(x) = q_i(x)$, $i = 1,2$, и начальными условиями (5.2.7). Из равенства (5.2.14) аналогично доказательству теоремы 5.2.6 получим совпадение собственных значений: $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, задачи (5.2.11), (5.2.13) с $q(x) = q_i(x)$, $i = 1,2$. Тогда на основании теоремы 5.2.2 о единственности решения обратной задачи с потенциалом, симметричным относительно точки $\pi/2$, получим, что $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0,\pi]$. После чего аналогично теореме 5.2.6 имеем, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\overline{D}$.

Отметим, что установленные выше теоремы 5.2.4 – 5.2.7 являются утверждениями о единственности решения рассматриваемых нами обратных задач. Теперь остановимся на вопросах существования решения поставленных обратных задач 1 и 2. Для этого снова обратимся к теории обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Приведем следующую теорему [64, с. 45], которая позволяет строить алгоритм решения обратной задачи (5.1.7) и (5.1.8) с неизвестными коэффициентами $q(x)$, h и H, и в ней приведены необходимые и достаточные условия ее разрешимости по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$.

Теорема 5.2.8. *Для того чтобы вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ были спектральными данными обратной задачи* (5.1.7) *и* (5.1.8) *с $q(x) \in L_2[0,\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \ \ \lambda_n \neq \lambda_m \ \ \textit{при} \ \ n \neq m,$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + + \frac{\varkappa_{1n}}{n}, \ \ \alpha_n > 0,$$

где

$$\varkappa_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(t)\cos 2nt\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\varkappa_{1n} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - t)q(t)\sin 2nt\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, $q(x) \in C^3[0,\pi]$ *тогда и только тогда, когда для* $\sqrt{\lambda_n}$ *и* α_n *справедливы представления*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{i=1}^4 \frac{\omega_i}{n^i} + \frac{\omega_n}{n^4},\ \ \omega_1 = \frac{\omega}{\pi},\ \ \omega_{2p} = 0,\ \ p \ge 1,\ \ \lambda_n \ne \lambda_m \ \text{при}\ n \ne m; \tag{5.2.15}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^4 \frac{\omega_i^+}{n^i} + \frac{\omega_{1n}}{n^4},\ \ \omega_{2p+1}^+ = 0,\ \ p \ge 0,\ \ \alpha_n > 0, \tag{5.2.16}$$

где $\omega_n, \omega_{1n} \in l_2$*, при этом функция* $h(x)$ *и числа* h, H *строятся по следующему алгоритму:*

1) *по заданным числам* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\ge 0}$ *строится функция*

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}\right),$$

здесь $\alpha_n^0 = \pi/2$ *при* $n > 0$ *и* $\alpha_n^0 = \pi$ *при* $n = 0$*;*

2) *находим функцию* $G(x,t)$ *из интегрального уравнения Гельфанда–Левитана*

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds = 0,\ \ 0 < t < x,$$

которое имеет единственное решение в $L_2[0,x]$ *при любом фиксированном* $x \in (0,\pi]$*;*

3) *вычисляем* $q(x)$, h *и* H *по формулам*

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}G(x,x),\ \ h = G(0,0),\ \ H = \omega - h - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt.$$

Таким образом, если для чисел $\sqrt{\lambda_n}$ и α_n выполнены условия (5.2.15) и (5.2.16), то по указанному алгоритму восстанавливаются коэффициенты $q(x)$, h и H, при этом $q(x) \in C^3[0,\pi]$. Тогда на основании теоремы 2 находим функцию $u(x,t)$.

Теперь приведем условия разрешимости второй обратной задачи по двум известным спектрам λ_n и μ_n соответственно задач (5.1.7), (5.1.8) и (5.1.7), (5.2.1) [66, гл. VI, § 11], [64].

Теорема 5.2.9. *Для того чтобы вещественные числа λ_n и μ_n, $n \geq 0$, были соответственно спектрами задач* (5.1.7), (5.1.8) *и* (5.1.7), (5.2.1) *с $q(x) \in C^3[0,\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства* (5.2.15) *и*

$$\sqrt{\mu_n} = n + \sum_{i=1}^{4} \frac{\omega_i'}{n^i} + \frac{\omega_n'}{n^4}, \;\; \omega_1' = \frac{\omega'}{\pi}, \;\; \omega_{2p}' = 0, \;\; p \geq 1, \tag{5.2.17}$$

где $\omega' = h_1 + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx$,

$$\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \;\; n \geq 0. \tag{5.2.18}$$

При этом функция $q(x)$ и числа h и H строятся по следующему алгоритму:

1) *по заданным числам λ_n и μ_n находятся числа*

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{+\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \mu_n}; \tag{5.2.19}$$

2) *по числам λ_n и μ_n по указанному в теореме* 5.2.8 *алгоритму строятся $q(x)$, h и H.*

Отметим, что в теореме 5.2.9 самым сложным является вычисление α_n по формуле (5.2.19). В работах [66, гл. V, § 11], [65] получены асимптотические формулы для чисел α_n в виде формул (5.2.16).

В заключение отметим, что вопросы о разрешимости обратных задач 3 и 4 остаются открытыми.

Заключение

Таким образом, в данной монографии изучены качественные и спектральные свойства решений уравнений смешанного параболо-гиперболического типа и на их основе изучены аналог задачи Трикоми, начально-граничные задачи и обратные задачи.

Здесь хотелось бы обратить внимание исследователей на дальнейшее развитие предложенных задач в следующих направлениях:

– исследовать указанные задачи в многомерном случае, т.е. для уравнения

$$Lu = \begin{cases} u_t - \Delta u + b^2 u = F_1(x,t), & t > 0, \\ u_{tt} - \Delta u + b^2 u = F_2(x,t), & t < 0, \end{cases}$$

где Δu – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n > 1$;

– исследовать предложенные задачи для модельных уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с произвольным степенным вырождением

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u = F_1(x,t), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = F_2(x,t), & t < 0 \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 0$, $m \geq 0$ и $b \geq 0$ – заданные действительные числа;

– исследовать задачи для общих уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в плоском и многомерных случаях.

Список литературы

1. *Абдрахманов М.А.* Об одной задаче сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов // Изв. АН КазССР. 1967. № 5. С. 87 – 93.

2. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. Вып. 6 (114). С. 91 – 192.

3. *Бабенко К.И.* К теории уравнений смешанного типа. Дисс. ... д-ра физ.-матем. наук. М., 1952.

4. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче для смешанных параболо-гиперболических уравнений с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 10 – 16.

5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. I, II. М.: Наука, 1965. 294 с.; 1966. 296 с.

6. *Бицадзе А.В.* О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 561 – 564.

7. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 164 с.

8. *Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С.* К теории уравнений смешанно-составного типа // Сиб. матем. журн. 1961. Т. 11. № 1. С. 7 – 19.

9. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739 – 740.

10. *Де Брёйн Н.Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Издательство ИЛ, 1961. 248 с.

11. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с.

12. *Выборны Р.О.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 4. С. 563 – 565.

13. *Врагов В.Н.* О задаче Коши для некоторых параболо-гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 3. С. 536 – 539.

14. *Врагов В.Н.* Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 24 – 31.

15. *Гайдук С.И., Иванов А.В.* Об одной задаче на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов // ДАН БССР. 1964. Т. 8. № 9. С. 560 – 563.

16. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. XIV. Вып. 3 (87). С. 3 – 19.

17. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

18. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 240 с.

19. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* Об одной пространственной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 1. С. 50 – 57.

20. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* О краевых задачах для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 4. С. 22 – 26.

21. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

22. *Елеев В.А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56 – 63.

23. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22 – 29.

24. *Жегалов В.И.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 1960. № 4. С. 73 – 78.

25. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. № 2. С. 274 – 276.

26. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Уч. зап. Каз. гос. ун-та. 1962. Т. 122. № 3. С. 3 – 16.

27. *Жегалов В.И.* Задача Франкля со смещением // Изв. вузов. Математика. 1979. № 9. С. 11 – 20.

28. *Зарубин А.Н., Бурцев М.В.* Обратная начально-краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 373 – 383.

29. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболического типа // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 6. С. 991 – 1001.

30. *Иванов В.К., Васин В.В., Танан В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

31. *Ильин В.А.* Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 91 – 101.

32. *Ильин В.А.* Теорема о единственности и принадлежности классу W_2^1 классического решения смешанной задачи для несамосопряженного гиперболического уравнения в произвольном цилиндре // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 60 – 65.

33. *Ильин В.А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 148 – 155.

34. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Априорная оценка решений задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 795 – 804.

35. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и в разностной трактовках // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 8 С. 139 – 156.

36. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656 – 661.

37. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 276 – 304.

38. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279 – 1283.

39. *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1284 – 1295.

40. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. 2-е изд. Новосибирск: Сиб. науч. изд., 2009. 457 с.

41. *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 8. С. 1718 – 1725.

42. *Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А.* О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 60 – 65.

43. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. ВМ и МФ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006 – 1024.

44. *Камынин Л.И.* // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 4. С. 761 – 764.

45. *Камынин Л.И.* О гладкости тепловых потенциалов. IV // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 6. С. 948 – 964.

46. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27. № 4. С. 52 – 66.

47. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Теорема о пространственной производной для одномерного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 10. С. 1754 – 1764.

48. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 4. С. 522 – 534.

49. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О спектральной задаче из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 4. С. 451 – 454.

50. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* Уточнение априорной оценки решения одной известной задачи для параболо-гиперболического уравнения // ДАН. 2009. Т. 427. № 5. С. 591 – 592.

51. *Капустин Н.Ю.* Задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках: дис. ...д-ра физ.-мат.наук. М.: Изд-во МГУ, 2012.

52. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 5. С. 11 – 14.

53. *Кожанов А.И.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. 150 с.

54. *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 763 – 774.

55. *Кожанов А.И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // ДАН. 2006. Т. 409. № 6. С. 740 – 743.

56. *Кожанов А.И.* О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 46. № 5. С. 1053 – 1071.

57. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166 – 1179.

58. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // ДАН. 2005. Т. 404. № 5. С. 589 – 592.

59. *Костин А.Б.* Разрешимость одной проблемы моментов и ее связь с параболической обратной задачей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. 1995. № 1. С. 28 – 33.

60. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 396 с.

61. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

62. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука. СО, 1982. 88 с.

63. *Ладыженская О.А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вест. ЛГУ. Сер. мат., мех. и астр. 1965. Т. 19. № 4. С. 38 – 46.

64. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.

65. *Левитан Б.М., Гасымов М.Г.* Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19. № 2 (116). С. 3 – 63.

66. *Левитан Б.М., Саргсян Н.С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.:Наука, 1988. 432 с.

67. *Лернер М.Е., Репин О.А.* Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // ДАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 593 – 595.

68. *Лернер М.Е., Репин О.А.* Существенно нелокальная краевая задача для уравнения с частными производными // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 478 – 480.

69. *Лозановская И.Т., Уфлянд Я.С.* Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 5. С. 1005 – 1007.

70. *Ломов С.А., Ломов С.А.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011. 456 с.

71. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1978. Bd. 81. P. 25 – 82.

72. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О принципе максимума для бигармонического уравнения в области с коническими точками // Изв. вузов. Математика. 1981. № 2 (225). С. 52 – 59.

73. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд. МГУ, 1988. 150 с.

74. *Моисеев Е.И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094 – 1100.

75. *Моисеев Е.И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1565 – 1567.

76. *Надирашвили Н.С.* // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 4. С. 804 – 808.

77. *Нахушев А.М., Бжихаталов Х.Г.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261 – 264.

78. *Нахушев А.М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44 – 69.

79. *Нахушев А.М.* К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 66 – 73.

80. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

81. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.

82. *Нахушева З.А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: НИИ Прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2011. 196 с.

83. *Орловский Д.Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614 – 1621.

84. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 303 с.

85. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат.наук. М.: МГУ, 1981.

86. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 10. С. 1791 – 1799.

87. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49 – 68.

88. *Пулькин С.П.* Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118. № 1. С. 38 – 41.

89. *Пулькина Л.С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений: монография. Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2012. 194 с.

90. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М: Мир, 1985. 590 с.

91. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

92. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117 – 126.

93. *Сабитов К.Б.* Экстремальные свойства решений одного класса параболических систем и их применения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 287 – 297.

94. *Сабитов К.Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023 – 1032.

95. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высшая школа, 2005. 671 с.

96. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23 – 26.

97. *Сабитов К.Б.* Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273 – 279.

98. *Сабитов К.Б.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // ДАН. 2009. Т. 427. № 5. С. 593 – 596.

99. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для неоднородного уравнения смешанного типа // Труды СФ АН РБ. Сер. "Физ.-мат. и техн. науки". Уфа: Гилем. 2009. Вып. 6. С. 85 – 93.

100. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 451 – 454.

101. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. Т. 56. № 4. С. 55 – 62.

102. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 6. С. 907 – 918.

103. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468 – 1478.

104. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2011. Т. 89. Вып. 4. С. 596 – 602.

105. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 186 – 196.

106. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Матем. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262 – 276.

107. *Сабитов К.Б.* Обратные коэффициентные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2015. № 11 (208). Вып. 39. С. 40 – 59.

108. *Сабитов К.Б.* Обратная задача для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в определении правой части // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. 2015. Т. 17. № 4. С. 98 – 110.

109. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с.

110. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.

111. *Сабитова Ю.К.* Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 49 – 58.

112. *Сабитова Ю.К.* Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1205 – 1208.

113. *Сабитова Ю.К.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т. 98. Вып. 3. С. 393 – 406.

114. *Сабитова Ю.К., Сабитов К.Б.* Спектральная задача Франкля для оператора смешанного типа с произвольным степенным вырождением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 9. С. 1154 – 1165.

115. *Салахитдинов М.С., Бердышев А.С.* О некоторых нелокальных краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 4. С. 25 – 31.

116. *Салахитдинов М.С., Бердышев А.С.* Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 4. С. 20 – 25.

117. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.

118. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 224 с.

119. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М: Наука, 2007. 167 с.

120. *Скобелкин В.И., Болдин А.А.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1396 – 1399.

121. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I, II // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 26. С. 3 – 132; Т. 33. С. 3 – 179.

122. *Смолицкий Х.Л.* Предельная задача для волнового уравнения. Дис. …д-ра физ.-мат. наук. Л.: Ленингр. Краснознам. воен.-воздуш. инж. акад, 1950. 138 с.

123. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических

уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 547 – 548.

124. *Солдатов А.П.* Задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения Лапласа // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. 2005. Т. 7. № 2. С. 50 – 55.

125. *Солдатов А.П., Малахова Н.А.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1077 – 1083.

126. *Солдатов А.П., Ковалева Л.А.* Об одной нелокальной задаче теории функций // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 3. С. 396 – 409.

127. *Солдатов А.П., Жура Н.А.* К решению обратной задачи Штурма-Лиувилля на всей оси // ДАН. 2013. Т. 453. № 4. С. 368 – 370.

128. *Соловьев В.В.* Существование решения в целом обратной задачи определения источника в квазилинейном уравнении параболического типа // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 536 – 544.

129. *Соловьев В.В.* Обратные задачи для уравнений эллиптического и параболического типов в пространствах Гельдера: автореф. ... д-ра физ.-мат.наук. М.: Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 2014.

130. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. 2-е изд. М.: Наука, 1983. 432 с.

131. *Стручина Г.М.* Задача о сопряжении двух уравнений // Инж.-физ. журн. 1961. Т. 4. № 11. С. 99 – 104.

132. *Ступялис Л.* Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1975. Т. XXVII. С. 115 – 145.

133. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

134. *Тихонов А.Н., Ареснин В.Я.* Методы решения некорректных задач. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 288 с.

135. *Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 2. С. 273 – 290.

136. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 443 с.

137. *Уфлянд Я.С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инж.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89 – 92.

138. *Франкль Ф.И.* Обтекание профилей дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. матем. и мех. 1956. Т. 20. № 2. С. 196 – 202.

139. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1966. 427 с.

140. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с.

141. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

142. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Comm.Appl.Math. 1953. V. 6. № 4. P. 455 – 470.

143. *Agmon S.* Maximum Theorems for Solutions of Higher Order Elliptic Equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. № 2. P. 77 – 80.

144. *Cannon I.R.* The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. T. 21. № 2. C. 155 – 160.

145. *Danilaev P.G.* Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their application // VSP. The Netherlands. 2001.

146. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations // New-York: Springer. 2006. 358 p.

147. *Kapustin N.Yu.* On spectral problems arising in the theory of the parabolic-hyperbolic heat equation // Doklady Mathematics. 1996. T. 54. № 1. C. 607 – 610.

148. *Kapustin N.Yu., Moiseev E.I.* An estimate of the solution of a problem for a parabolic-hyperbolic equation with the use of fourier series // Differential Equations. 2003. T. 39. № 5. C. 694 – 700.

149. *Lupo D., Payne K., Popivanov N.* On the degenerate hyperbolic Goursat problem for linear and nonlinear equations of Tricomi type // Nonlinear Analysis. 2014. V. 108. P. 22 – 56.

150. *Morawetz C.S.* Mixed equations and transonic flow // Hyperbolic Differ. Equ. 2004. № 1. P. 1 – 26.

151. *Nirenberg L.* Astrong maximun principle for parabolic equations // Comm.Pure and Appl.Math. 1953. V. 6. № 2. P. 167 – 177.

152. *Pipher J., Verchota G.C.* A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains // Comment. Math. Helv. 1993. Bd. 68. P. 385 – 414.

153. *Pipher J., Verchota G.C.* Maximum Principle for the Polyharmonic Equation on Lipschitz Domains // Potential Anal. 1995. V. 4. № 6. P. 615 – 636.

154. *Popivanov N., Schneider M.* The Darboux problem in R^3 for a class of degenerating hyperbolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 175. P. 537 – 579.

155. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc. 2000.

156. *Rassias J.M.* A uniquences theorem for the haplygin Frankl problem // Bull. de la Societe Royale Sciences de Liege. 1982. V. 51. P. 159 – 160.

157. *Rassias J.M.* Mixed type partial differential equations with initial and boundary values in fluid mechanics // International Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2008. V. 13. № 8. P. 77 – 107.

Научное издание

Сабитов Камиль Басирович

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Оригинал-макет выполнен
в Институте прикладных исследований
Республики Башкортостан

Редактор *Р.С. Головина*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*
Компьютерная верстка *С.Н. Сидоров*

Подписано к печати 30.08.2016. Формат $60\times84^1/_{16}$
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.-печ. л. 15,8. Уч.-изд. л. 14,0
Тип. зак.

ФГУП Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.com
www.naukaran.com

ФГУП Издательство «Наука»
(Типография «Наука»)
121099, Москва, Шубинский пер., 6