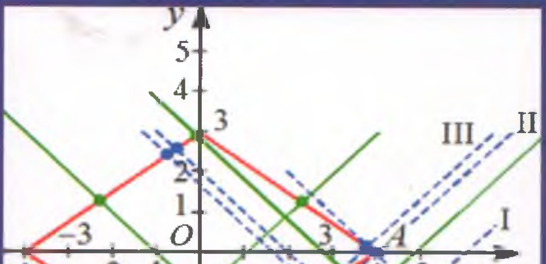
АЙТУВГАНОВ ЎРАЛ ХУДОЙҚУЛОВИЧ

ПАРАМЕТРЛИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ ВА ЕЧИМНИ ТАҲЛИЛ ҚИЛИШГА ЎРГАТИШ-ИНТЕГРАЦИЯ ҒОЯЛАРИ АСОСИДА ТАЛАБАЛАРНИНГ ИЖОДИЙ ФИКРЛАШИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ УСУЛИ СИФАТИДА



Ks-6

Kitob quyida ko`rsatilgan muddatga topshirilishi shart

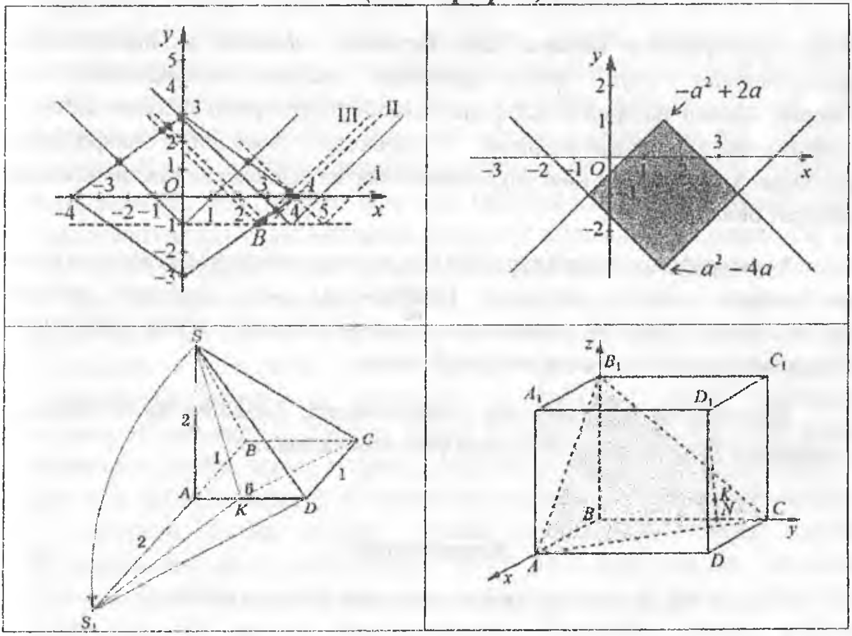
Oldingi foydalanishlar miqdori_____________

ЎРАЛ ХУДОЙҚУЛОВИЧ АЙТУВГАНОВ

УДК:514.372

ПАРАМЕТРЛИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ ВА ЕЧИМНИ ТАҲЛИЛ ҚИЛИШГА ЎРГАТИШ - ИНТЕГРАЦИЯ ҒОЯЛАРИ АСОСИДА ТАЛАБАЛАРНИНГ ИЖОДИЙ ФИКРЛАШИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ УСУЛИ СИФАТИДА

(монография)



Термиз - 2019

УЎК 514.372
КБК 22.1я 73
П 42

ЎРАЛ ХУДОЙҚУЛОВИЧ АЙТУВГАНОВ

Параметрли масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилишга ўргатиш - интеграция ғоялари асосида талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантириш усули сифатида [Матн]: монография- Тошкент,"Turon-iqbol", 2019. 102 б

Ушбу монографияда келажак сари интилиш, тараққиёт ва юксалишнинг таъминланиши учун республикамизда амалга оширилаётган туб ўзгаришларнинг назарий асосларини, амалий услубларини тушуниб олиш ва ўзлаштиришга йўналтирилган, талабалар ижодий фикрлашини ривожлантиришни тушуниш учун педагогика ва психология нуктаи назардан маҳорат билан ёзилган.

Монографияда илгари сурилган ғоя, яъни параметрли масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилишга ўргатиш-интеграция ғоялари асосида талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантириш усули математика методикасининг бош масалаларидан биридир.

Монография кенг маънода тадқиқотчилар, талабалар ва магистрлар, математика ўқитиш мутахассислари учун мўлжалланган.

Тақризчилар:

Аллаев Ғ.М.- физика-математика фанлари номзоди доцент,

Жумаев Э.Э.-педагогика фанлари номзоди доцент.

Мазкур монография Термиз давлат университети Кенгашининг 2019 йил "21" февралдаги № 7-сонли баённомаси қарорига асосан чоп этишга тавсия қилинган.

ISBN 978-9943-14-651-8

КИРИШ

Ватанимиз келажаги, халқимизнинг эртанги куни, мамлакатимизнинг жаҳон ҳамжамиятидаги обрў эътибори аввалам бор фарзандларимизнинг униб - ўсиб улғайиб қандай инсон бўлиб ҳаётга кириб боришига боғлиқдир. Равшанки геометрия фанининг ривожланишида Шарқ олимларининг ўрни беқиёсдир. Тарихий манбаларга кўра Мусо ал-Хоразмий ўзининг “Зиж”асарида бошланғич меридиан сифатида, ҳинд анъанасига кўра, Арин (ҳозирги Ҳиндистондаги Ужайн) шаҳридан ўтган меридианни танлаган. Буюк олим Мусо ал-Хоразмийнинг изидан борган Христофор Колумб ўзига тегишли нусха ҳошиясига ёзган эслатмаларига кўра, арин ғояси ернинг ноксимон эканлиги ва ернинг аринга диаметрал қарама-қарши тарафида аринга ўхшаш жой бўлиши кераклиги ҳақида фазовий тасаввур ҳосил қилади. Мусо ал-Хоразмий ва Абу Наср Фаробийларнинг қарашларидан, мулоҳазали фикрларидан шу нарса маълум бўладики, ижодий фикрлашни ривожлантириш учун чизмани ва унинг кўринишини олдиндан кўз олдимизга келтириб олиш лозим. Келажак сари интилиш, тараққиёт ва юксалишнинг таъминланиши учун республикамизда амалга оширилаётган туб ўзгаришларнинг назарий асосларини, амалий услубларини тушуниб олиш ва ўзлаштириш ғоят муҳимдир. Юртимизда яратилган қадимий иншоотлар, ноёб тасвирий, меъморий асарларга мафтун бўлиб қолар эканмиз, шундай юксак бадиятни бунёд этган меъмор, мусаввир ва ҳайкалтарошларнинг санъати, маҳоратидан қалбимизда ифтихор хиссиётлари уйғонади.

Бугунги кунда таълим тарбия соҳасидаги ислоҳотларнинг йўналишлари ва принциплари, 2017 йил қонунчилик палатаси томонидан 2016 йил 12 августда қабул қилинган, сенат томонидан 2016 йил 24 август маъқулланган “Ёшларга давлат сиёсати тўғрисида” Ўзбекистон Республикасининг қонуни, 1-бобнинг 5-моддасида “Ёшлар учун очиқ ва сифатли таълимни таъминлаш” масаласи қўйилган ва унинг талабларидан бири ёшларни умуминсоний қадриятларга асосланган шахсий ва касбий фазилатларини шакллантириш, фанларга қизиқишни ошириш, айниқса 7 феврал 2017 йилда Шавкат Мирзиёевнинг фармони билан тасдиқланган 2017-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг 5-та устувор йўналиши бўйича ҳаракатлар стратегияси, 2018 йил “Фаол тадбиркорлик, инновацион ғоялар ва технологияларни қўллаб-қувватлаш ” йили, 2019 йил “Фаол инвестициялар ва ижтимоий ривожланиш" йили давлат дастурида монографияда кўзда тутилган масалаларни ривожлантириш, изланиш, тадбиркорлик, ишбилармонлик, кўникмаларини таркиб топтиришга хизма қилувчи масалалар қўйилган. Бу вазифаларни ҳал этишда талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантириш масаласини ҳал этиш муҳим аҳамият касб этади.

Ўзбекистон Республикасининг биринчи президенти И.А. Каримов таълимга баҳо берар эканлар ўзининг "Юксак маънавият – енгилмас куч" асарида "Бу мураккаб дунёнинг азалий ва абадий муаммолари, шу билан бирга, ҳар бир даврнинг долзарб масалаларига ҳар томонлама асосли илмий жавоблар топилган тақдирдагина маънавият олами янги маъно – мазмун билан бойиб боради. Бошқача айтганда, ҳар бир илмий янгилик, яратилган кашфиёт – бу янгича фикр ва дунёқарашга туртки беради, маънавиятнинг шаклланишига ўзига хос таъсир ўтказади" деб таъкидлаб ўтганлар.

Бироқ шу кечаю кундузда рекламанинг 400 минг тури мавжуд бўлган дунёда, геополитика сиёсати ва давлатлар ўртасида мафкуравий курашлар кенг авж олган пайтда, 4,5 миллиард йил олдин пайдо бўлган оламда, 262 та давлатнинг 135 таси мустақил давлат бўлган ер шарининг магнит майдонида содир бўлаётган ўзгаришлар, тирик организмларни умрини қисқариши, инсон ДНКсининг ўзгариши, онкологик касалликларининг кўпайиши, дунё бўйича бир йилда 60 млн дан ортиқ одамларни ҳалок бўлишига олиб келаётган юқумли бўлмаган касалликларнинг кўпайиши, инсон саломатлигига таъсир этиши натижасида ақлан заифлашиш белгилари кузатилмоқда, масалан, ўқувчиларнинг оддий саволларга жавоб бера олмаслиги, одамларни кўчаларда маст холда ухлаб ётиши, операция столи атрофида врачларнинг ўйинга тушиши ва ҳоказоларда намоён бўлмоқда. Дания (юқори синф ўқувчиларининг икки хонали сонни кўпайтиришни билмаслиги), Белгия (тарих ҳақида ҳеч қандай маълумат берилмаслиги, масалан Гитлернинг кимлигини билмаслиги), Англияда тарих дарси "Урушнинг аёлларга таъсири" мавзуси билан бошланиши, Америкаликлар 13 сонини ёқтирмаслиги, яъни рақамлашда 13 сони тушириб қолдирилган мисолларнинг кўплиги, Канадада тарих фани қандайдир воқеаларга асосланган ғоялар тизими ахборот коммуникация кўрсатувлари орқали бериш асосида ўрганилиши, Россияда ўқувчиларнинг қуёшда нечта спутник бор?, бир соатда неча минут бор?, Кензберг қаерда жойлашган саволларига жавоб бера олмаслиги, 2017- 2018 ўқув йилида Украина битирувчи ўқувчиларининг 14% инглиз, 9% украин тилини, 24% математикани билиши, Нъюйоркда таълимни янада соддалаштиришга интилиши, Финландияда ва Америкада табақалаштирилмаган фанларнинг ўқитилиши (математика, кимё, физика, географияни ўз ичига олган), Америка олийгоҳларида Маддона актрисанинг ҳаёт ва фаолиятига бағишланган “Мадонноведение” курсининг ўқитилиши ва унинг салбий оқибатларга олиб келиши тўғрисидаги маълумотлар бу мамлакатлар таълимининг ўз мавқеини пасайганлигидан далолат беради.

Айрим хорижий ва ватанимиз психологлари ва педагоглари қайд этишларича, компьютер технологияларидан нотўғри фойдаланиш натижасида инсон тафаккури ва онгида “заифлашиш”, “узилиш” каби хатарли симптомларни юзага келтирмоқда. Ўрганилаётган жараёнлар, ҳодисалар ва воқеаларнинг ички диалектик ўзаро алоқадорлигини англаниши, ўз навбатида уларни хотирада сақлаб қолиниши барча ёшлар учун борган сари муаммо туғдурмоқда. Бундай оқибатларга дуч келмаслик ва соғлом турмуш тарзини яратиш, оқибатда бу давлатларда 20 йилдан сўнг ким тарбиячи ва ким врач бўлади деган саволга: *аниқ*, *таббий*, *гуманитар*, *ижтимоий* ва *антропологик* фанларни классификациясини берувчи етти тилда олиб борилаётган мамлакатнинг сиёсий, иқтисодий ҳаётини, давлат ва жамият қурилишини янада эркинлаштиришда хизмат қилаётган Ўзбекистон таълим тизими аниқ жавоб беради.

Геометриянинг жаҳон миқёсида архитектурадаги ўрни беқиёс, масалан, бир кунда энг кўп одамлар ташриф буюрадиган 10 га яқин юқори рейтингга эга бўлган шаҳарларнинг кўрки бўлган музейлар (Лондон, Вашингтон, Париж), одамлар, поездлар, автомобиллар ва ҳайвонлар учун парабола шаклида кўприклар қурилган, 341 метр баландликдаги Норвегия пойтахтидаги кўприк, Малайзиядаги 780 матер баландликдан ўтадиган кўприк, дунёда 38 та баландлиги 300 метрдан ортиқ турли типдаги миноралар қурилган: Япониядаги 2011 йилда қуриб битказилган баландлигига кўра биринчи ўринда турадиган “Янги токиё минораси” деб аталувчи миноранинг баландлиги 634 метр, иккинчи ўринда турадиган Хитойнинг Жуанжойдаги миноранинг баландлиги 600 метр, Дубай (554 метр), Канада(550 метр), Астанкина (540 метр), Шанхай (468 метр) гиперболоид структурасида ва Техронда мунтазам саккиз бурчакка асосланган (435 метр) телеминораси қурилган. Таниқли қурувчи Владимир Григорьевич Шухов (1883-1939) минораларни бир паллали айланма гиперболоидларнинг тўғри чизиқли ясовчилари жойлашгандек қуриш кераклигини тавсия этган. В.Г. Шуховнинг бу таклифи, яъни конструкцияси жуда мустаҳкам ва енгил эканлигини ҳаёт тасдиқлади.

Дарҳақиқат, геометрия илми, алгебраик ва геометрик ғоялар бирлигининг инқилоби инсониятнинг моддий ва маънавий ҳаётида туб ўзгаришларни вужудга келтирди. Геометриянинг асосий мақсади – реал олам ҳақида объектив билим олишдан иборатдир. Билимлар турли мазмунда бўлиб, уларнинг кўпчилиги кундалик турмуш тажрибаларига, аждодлар меросига таянади. Геометрия фани ҳаётнинг барча соҳаларига кириб келди, инсон ва жамият бирлигининг муҳим таркибий қисмига, бевосита ишлаб чиқарувчи кучга айланди. Геометрик билим ўзининг тўлалиги, зидсизлиги ва эркинлиги билан ажралиб туради. Геометрик билимларнинг бу устунлик томони у қўллайдиган методлар, аниқроғи алгебраик ва геометрик методлар бирлиги ҳамда унинг ўзига хос ташкил этилганлиги ва тузилганлигидадир. Геометрия ва алгебра методлари ҳақидаги билимлар эса кузатишлар, тажрибалар ва турли хил назариялар, ҳамда гипотезаларга асосланади. Аммо тажрибалар, кузатишлар ва назариялар туфайли олинган натижалар етарлича илмий билимларни ташкил этмайди. Шунинг учун олимлар олган натижалари асосида улар орасидаги ички боғланишларни тушунтирувчи ўз тахминларини – гипотезалар сифатида масалани қўядилар. Геометрия ва алгебра соҳасидаги янгиликларни олимлар сонини ўсишида эмас, балки илмий янгиликлар салмоғи ва сифатининг аста секин ортишида ҳам кўриш мумкин.

Инсон фаолияти ва иш тажрибалари фуқаролик жамитининг барпо қилиниши ва кишиларнинг ҳар томонлама камол топиши учун манба бўлиб хизмат қилади. Демак, ўқувчилар, талабалар, ёш мутахассислар ўзининг математик фаолиятини ривожлантириши учун қуйидаги тушунчалар моҳиятини англаб етиши зарур: *субъект. объект, мақсад ва восита.*

Геометрия ва алгебра ўзиниг илмий тушунча, методлари ва методологияси билан дунёни билиш ва ўзгартиришнинг махсус усули, илмий билимлар тизимидир. Айнан дунёни илмий билиш, дунёга янгича муносабат, янгича қарашни такоза этади. Кишилар дунё ва ўзлари ҳақидаги дастлабки билимларни ўз амалий фаолиятлари давомида, яшаш учун кескин курашлар натижасида ўрганадилар. Дарҳақиқат, миллионлаб йилларни ўз ичига олган бу эволюция жараёнида одамда онг вужудга келади, унинг нутқи ривожланади, дунё ҳақидаги билим ва тассавурлари тўпланиб боради. Шу боис геометрия ва алгебра ижтимоий онг шаклларидан биридир. Демак, бу фалсафанинг геметриядан олдин пайдо бўлган деган хулосани бермайди. Чунки онгни вужудга келишигача бўлган эволюцион жараён, бу ўлчамдир, яъни, **ўлчамсиз онг ва онгсиз ўлчам бўлмайди**, аникроғи **фалсафасиз геметрия ва геометриясиз фалсафа бўлмайди**, яъни, **бир онадан туғилган Ҳасан ва Ҳусан** ёки **Фотима ва Зухро,** ёки **Тохир ва Зухроларга ўхшайди. Фалсафа ва геометриянинг вужудга келиш аксиомаси** деб аталувчи ушбу жараён Евклиднинг бешинчи постулатидан ёки Лобачевский геометрияси ғоясидан кучлироқ маънога эга ва бу жараёнда **эгизаклар кўпроқ ўзларига эътибор берадилар, ўз – ўзини ўрганади ва атроф муҳитдаги воқеа – ҳодисаларни ҳам ўзига қиёслайди, уларни худди ўзи сингари жонли мавжудот сифатида тасаввур қилади.** Шу тариқа атрофдаги ҳодисаларни дастлабки антропоморфик тушунтириш пайдо бўладики, унинг қолдиқлари тилимизда ҳозиргача янграйди. Масалан, етти ўлчаб бир кес, чойни уч марта қайтар, ва ҳ.к.

Фалсафа ва геометриянинг биргаликда вужудга келиш ҳақидаги аксиомадан қуйидаги *натижа* келиб чиқади: *аниқ, табиий, ижтимоий, гуманитар ва антропологик фанлар ўзагида фалсафий ва геометрик элементлар мавжуд*. Бундан йиллар, асрлар ўтиб *аниқ, табиий, ижтимоий, гуманитар ва антропологик фанларнинг маълум даражада геметриялашуви юз беради* деган хулоса келиб чиқади. Шу боис, бизнинг тадқиқотимизда геометрия ўқитиш деганда ***аниқ, табиий, ижтимоий, гуманитар ва антропологик*** фанлар тушунилади.

Геометриянинг мақсади инсон тафаккурининг фаолияти орқали олдиндан режалаштирилган жараён механизмини геометрик образини аниқлащдан иборат. Мақсадга эришиш йўллари: аксиома, теорема, хосса, исбот, таҳлил, текшириш, ясаш, олдиндан кўра билиш, мавжуд билимларни бир тизимга келтириш, ундан янги хулосалар чиқариш ва асосий ғояни ифодалашга эришищдир. Шунинг учун, яратилган геометрик билимлар ўз изчиллиги, тизимлилиги ва ҳақиқийлиги билан ажралиб туради.

Геометриянинг самараси дейилганда, илмий янгилик, объектив ҳақиқат, мантиқий хулосалар, ихтиролар тушунилади. Бу борада олинган натижалар *билим* дейилади. Билимлар турли шаклларда ифодаланади: геометрик фактлар, назария, муаммо, конун, концепциялар. Геометрик билим тош асрида, тахминан икки млн йил илгари пайдо бўлган, деб фараз қилинади. Одамлар қадимда амалий билимларни бир – бирларига ўргатишда оддий усуллардан фойдаланишган: масалан, молбоқар молларини тугал юрганини билиши учун лойдан ҳар бирига алоҳида мос шакллар (геметрик билим) ясаган ва чизиқни бир тарафидан иккинчи тарафига ўтказиш (геметрик метод) йўли билан аниқлаб бемалол уйқуга кетган, уч киши овга чиқиб битта ўлжани тенг уч бўлкка бўлганлар (алгебраик билим), ваҳший ҳайвонлардан ҳимояланган (агар ҳужумга ташланаётган жонивор иккита бўлса улар бир –бирига иккита қулоқ ёки иккита кўзни кўрсатиб имо–ишора қилганлар (алгебраик билим) ва ҳоказо.

Қадимги Шарқ жаҳон маданияти ва цивилизациясини бешиги бўлган, дастлабки геометрик билимлар шарқ мамлакатларида вужудга келгани жаҳон олимлари томонидан эътироф қилинган. Қадимги Шарқ мамлакатларида (Миср, Египет, Александря) геометрияга оид билимларни вужудга келиши кундалик ҳаёт эҳтиёжлари, деҳқончилик ривожи билан бевосита боғлиқ бўлган.

Йирик шаҳарларнинг пайдо бўлиши, ҳашаматли бинолар, саройлар қурилиши, табиий ҳолда иккинчи аниқ фан назарий механика фанининг ривожланишига олиб келди.

Буюк француз олими Рене Декарт геометрик таълим методларини ишлаб чиқди. У геометриянинг мазмунини ўзлаштириш ва жамиятни ривожлантиришдаги аҳамиятига юксак баҳо берди. "Билим – кучдир" шиорини илгари сурди. Геометрия фанининг вужудга келиши ва ривожланишида Шарқ олимлари муносиб ҳисса қўшдилар. Умар Хайём (Умар ибн Иброхим ал – Хайём) 1074 йили Султон Маликшоҳ ва унинг вазири Низом ал – Мулк энг билимдон астрономларни тўплаб қурдирган обсерваторияда 18 йил раҳбарлик қилган.

Кишилик жамиятининг яхлит маданиятида геометриянинг пайдо бўлиши вақтга нисбатан юқорида келтирилган қарашлар бу маданият эволюциясининг геометриягача бўлган дастлабки ҳолатидан то тўлиқ мустақил феномен даражасигача кўтарилган босқичларини кўрсатиб берсада, том маънодаги геометриянинг *Ватани* сифатида *Қадимги Юнонистон* майдонга чиққан.

Табиий фанлар бевосита инсон яшаётган атроф мухитни ўрганувчи фан бўлиб, ҳаётнинг барча кўринишларини, тирик жонзотлар тузилиши ва фаолияти, уларнинг табиатда тарқалиши, пайдо бўлиши, ривожланиши, ўзаро уйғунлиги ва жонсиз табиат билан алоқаларини ҳам физик, ҳам кимёвий,, ҳам биологик хусусиятларини ифодалайди. Буларга – биология, физика, кимё, география, геология, астрономия каби фанлар киради.

Ижтимоий фанлар – инсон жамоаларининг ўзаро фаолиятига бағишланган бўлиб, буларга социология, демография, этнография, тарих каби фанлар киради.

Гуманитар фанлар дейилганда жамиятнинг ғоялари, ўзаро муносабатлари, дунёқарашлари, одоб – ахлоқ нормаларига бағишланган билимлар тушунилади. Мазкур соҳа фалсафа, диншунослик, этика, эстетика ва ҳуқуқий фанларни ўз ичига олади.

Антрапологик фанлар бевосита одамни ўрганишга қаратилган йўналишлар бўлиб, бунга антопология, педагогика, медицина, криминология мисол бўлади мазкур фанлар ўз методи орқали ўзаро амалий ва назарий жиҳатдан бир – бири билан боғланган бўлиб, бу жараён марказида эгизаклар туради.

Шундай қилиб, замонавий фан ривожланишининг объектив йўналишлари ва шаклланаётган ахборотлашган жамият эҳтиёжлари таълим муассасаларида математика ўқитишнинг янги йўналишларини ишлаб чиқишни талаб этади. Олий ўқув юртида ўқитиладиган геометрия дарсларини алгебра, математик анализ элементлари билан тўлдирилган ҳолда дарс жараёнини ташкил этиш ва унинг заминида интеграция ғоялари асосида талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантиришни талаб этмоқда, шунингдек, геометрия ўқитишда интеграция ғоялари асосида талабалар ижодий фикрлашининг ривожлантиришнинг илмий - асосли концепциясига бўлган эҳтиёж ошиб бормоқда.

1. ГЕОМЕТРИЯНИНГ ПАЙДО БЎЛИШИ ВА УНИНГ МАТЕМАТИКАГА ТАЪСИРИ

Аниқ, табиий, гуманитар, ижтимоий ва антропологик фанлар орасидан математикани тушуниш учун ҳеч бўлмаганда аниқ бир қобилият ва ҳатто иқтидор, асосийси буюк кашфиётлар қилишга олиб келадиган оғир меҳнат ётибди. Математика соҳасида бундай меҳнат қилишга мутахассислар тайёрми? Ҳар бир мутахассис ўзини чуқур ҳис қилган ҳолда бу саволга жавоб бериши мумкин. **Геометрияга дифференциал зарур бўлгунга қадар** унинг нима билан шуғулланганига аниқлик киритайлик.

Буюк грек тарихчиси Геродот (эрамизгача 484 - 425 йй.) Египетда яшовчи халқларга таяниб шундай деб ёзган: “Подшоҳ ерни мисирликларнинг ҳар бирига тўғри тўртбурчак шаклида ҳаммасига бир хил бўлиб берган; бундан у фойда олиш учун йилига солиқ солган. Агар бирор ҳодиса масалан, дарёнинг суви тошиб ерга зарар етказса, юз берган ҳодиса тўғрисида подшоҳга хабар етказилган. Подшоҳ одамларини юбора туриб ерни кўздан кечириш ва қайта ўлчашни, тегишли солиқни солиш учун қанчага кам ер қолганини аниқлаш кераклигини буюрганлар. Менимча геометрия шундай кашф этилган, сўнгра Египетдан Элладага етиб келган”.

Геродот асосли, содда қилиб геометриянинг пайдо бўлишини тушунтирган, лекин куйидаги учта ҳолатга эътиборни қаратиш лозим. ***Биринчидан***, Геродотнинг фикридан “геометрия” сўзининг маъноси етарлича тушунарли бўлган (грекчадан γῆ - ер, μετρὲω - ўлчайман), яъни геометрия туғулиши билан одамларнинг амалий фаолиятига боғлиқ бўлган. “Математик энциклопедия”да геометрия шунга ўхшаш аниқланади [251, 940 - 941б.]. ***Иккинчидан***, солиқдаги ўзгаришни ҳисоблаш учун пропорция тузиш ва ечиш зарур бўлган, яъни геометрия математиканинг бошқа бўлимлари, аввалига *арифметика* билан алоқада бўлган. Ниҳоят, ***учинчидан***, биринчи геометрик билимлар буюк Евклиднинг (эрамизгача 300 йиллар атрофида) “Негизлар” асарида ўзининг чиройли ифодасини топди. Расман “Негизлар” асари ва Геродотга ишонадиган бўлсак, геометрия у туғилган Египет яқинидаги Александрияда ёзилган.

Юздан зиёд ўтмишдошлар геометрия билан, шахсан Евклид геометрияси бўйича 2000 йилдан зиёт вақт давомида алгебра, тригонометрия ва лимитлар назариясини қўлламасдан ўргандилар. Бу асар катта ҳажмда бугунги кунда ўрганилаётган умумий ўрта таълим мактаби ва АЛ, КҲК, олий ўқув юрти геометрия курсининг асосини, шунингдек муносабатлар назарияси, сонлар назарияси ва ҳоказоларнинг жуда кўп қизиқ ва муҳим фактларини ташкил этади.

Эрамиздан аввалги 2 - аср оралиғида Александриялик астроном Клавдий Птолемей “Альмагест” номли асарининг 13- китобида астрономиянинг математик тузилишини баён этди. Китобда сферик ва тўғри тригонометриянинг методлари ва асосий фактлари биринчи бор ўрганилган. Улар денгизчилар, сайёҳатчилар, астраномлар, астралоглар ва жамият учун зарур бўлган. Алгебра ва анализ учун давр кейинроқ келди. Жуда секин бир ярим минг йилдан сўнг математик белгилар яратилди. Бу йўналиш бўйича биринчи қадамни Александрялик математик Диофант қўйди. У номаълум ва унинг даражалари, айириш ва тенглик белгилари тўғрисида фикр юритганлар. Бунда Франсуа Виет (1540 - 1603) илғорлик қилди, фақатгина номаълумни эмас, балки улар олдидаги коэффициентни белгилашга муваффақ бўлди. Элементар алгебра белгилари ҳақиқатда кейинроқ 1637 йилда чоп этилган Рене Декартнинг “Геометрия” китобида фойдаланилган.

Ўша даврда фаннинг олдида турган учта масалани муҳим деб ҳисоблаш мумкин.

Биринчи масала тоза алгебраик масала номини олган ва ихтиёрий даражали алгебраик тенгламанинг илдизларини ҳисоблаш учун формула яратиш бўлган.

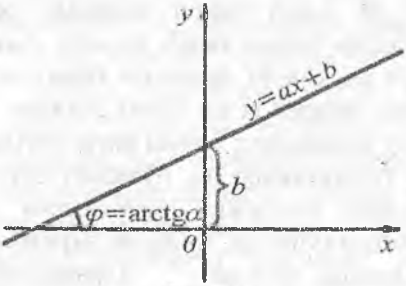
Иккинчи масала эрамизгача қўйилган (албатта, бу шаклда ифодаланмаган): **Ф** шакл бирор чизиқлар билан чегараланган бўлсин; Унинг юзини топиш талаб этилган. Аввалига масала аниқ қўйилган: циркул ва чизғич ёрдамида берилган диаметрли доира юзига тенг юзали квадрат ясаш талаб этилган. Умуман ўша давр математиклари бу масаланинг ечими янги умумий метод яратишни талаб этади деб тушунганлар. Бу йўналиш бўйича биринчи қадам Евклидгача, Евдокс Книдский (эрамизгача 406- 355 йиллар атрофида) томонидан қўйилди. Аниқроқ натижалар бир ярим асрдан сўнг буюк Архимедда бўлган (эрамизгача 287-212 йиллар атрофида), бир қанча шакллар ва параболанинг квадратурасини топишга эришган. Евдокс - Архимед методлари 16-18 асрда европа математикларида мувоффақиятли ривожланди ва натижада аниқ интеграл ғоясини кириб келишига сабабчи бўлди. Математикада бу йўналишнинг ривожланиши физика, механика, техникага зарурлиги билан таъминланди.

Учунчи масала мураккаброқ иш бўлиб, бу эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасига уринма ўтказишнинг умумий усулини топишдан иборат эди. Бу масала XVII асрда қўйилди ва ечилди. XVII асрга келиб фанда жуда кўп ютуқларга эришилди, асосийси тўртта фундаментал илмий назария яратилди: **физик оптика**, **классик механика**, **тортишиш назарияси** ва **чексиз кичик ҳисоблар** (*дифференциал* ва *интеграл ҳисоблар*).

Уринма масаласини ҳал қилишда жуда кўп тортишишлар юзага келди. Бу тортишувлар илмий журналлар ҳали бўлмаганлиги туфайли ошкор қилинмаган. Жуда кўп маълумотлар Парижда яшаган Марен Мерсен (1588- 1648) орқали етказилди.

Уринма ҳақидаги масалага бир вақтда Рене Декарт (1596-1650), Пьер Ферма (1601-1655) ва Робервал номи билан Жиль Персонье (1602-1675) уринганлар. Аниқроқ натижаларга Декарт эришган ва “Рассуждение о методе” асарида баён этган. Робервал ва Ферманинг натижалари ўлимидан сўнг чоп этилган. Уринма ҳақидаги билимларни Блез Паскаль (1623-1662) умумлаштирди ва геометрик тилда механиканинг муҳим масаласи, нуқтанинг ҳаракат тезлиги ҳақидаги масала ва дифференциал ҳисобнинг биринчи масаласи, **функциянинг ўзгариш тезлиги** ҳақидаги масала, аниқроғи ҳосила масаласи эди.

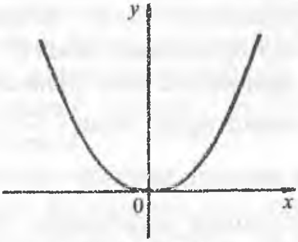
Декартнинг иккинчи бир кашфиёти у координаталарни киритган.



1-расм.

Биз унинг фикрларини таҳлил қилайлик. Текисликда тўғри чизиқ берилган. Унинг тенгламаси $y=ax+b$. Бу тенглама тўғри чизиқнинг барча нуқталарининг (абсцисса ўқи) координаталарини берилган тўғри чизиқ координаталари билан боғлиқлигини кўрсатади (1-расм).

$y=ax^2$ парабола берилган бўлсин. Бу тенглама ҳам абцисса ўқи нуқталари координаталарини парабола координатаси билан қандай боғлиқлигини ифодалайди (2-расм).



2-расм.

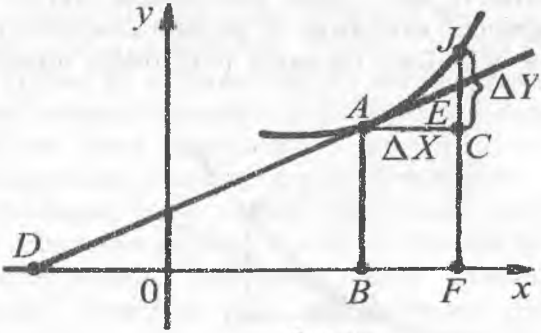
Бошқача сўз билан айтганда эгри чизиқ тенгламасини

$y=f(x)$ деб ёзган. Дифференциал ҳисоб ғоясига суянмасдан Декарт уринма ясашнинг умумий усулини топишга бир неча бор ҳаракат қилди.

У бу ҳақда ўзининг "Геометриясида" ва Мерсенн, Роберваль, Ферма ва бошқаларга ёзган хатида баён этган, уларнинг фикрлари билан бир хил бўлган. Аниқроқ ечим Фермада бўлган. 1638 йилнинг

ёзида Декартга ёзган хатида қуйидагиларни баён қилади: $y = f(x)$ чизиқ ва унда ётган x ва y координатали A нуқта берилган бўлсин (3-расм). $[AD]$ (изланаётган DB кесма уринма ости дейилади) уринма

кесманинг $t=|DB|$ проекциясини топиш зарур бўлган. Уринмада $x + \Delta x = |OF|$ абсциссали ихтиёрий E нуқтани оламиз.



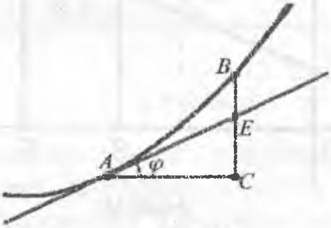
3-расм

DAB ва *DTF* учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{|EF|}{y}=\frac{t+\Delta x}{t}$ га эга бўламиз. Бу тенгламада иккита номаълум, яъни *t* уринма ости ва *E* нуқтанинг *EF* ординатаси. Ферма асосланмаган шундай қадам қўйдики, уни муваффақиятга олиб келди, у *E* нуқтанинг ординатасини *I* нуқтанинг ординатаси, яъни $|IF| = y + \Delta y$ (F нуқтадан ўтказилган *FE* чизиқ ординатага тенг бўлмасада, уларни тенг деб қабул қилган) билан алмаштирди. Энди $\frac{y+\Delta y}{y}=\frac{t+\Delta x}{t}$ га эга бўлдик. Буни қуйидагича ёзиш мумкин: $yt + t\cdot\Delta y = yt + y\cdot\Delta x$, $t = y\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y} = y:\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Сўнгра Ферма Δy орттирмани ҳисоблайди. Масалан, $y = x^2$ чизиқ учун $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$.

Бу тенгликнинг ҳар иккала қисмидан чизиқ тенгламасининг чап ва ўнг томонини айириб $\Delta y = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $t = y : (2x + \Delta x)$. Энди Δx билан боғлиқ ҳадларни ташлаб юборамиз, яъни $t=\frac{y}{2x}$. Демак, эгри чизиқнинг ҳар қандай нуқтаси учун уринма остини ҳисоблаш мумкин, бундан уринма ясаш мумкинлиги келиб чиқади. Масала тўлиқ ечилган ва бу методни ҳар қандай чизиқ учун қўллаш мумкинлигини бир неча бор таъкидлаган.

Аввалига Ферма жамоатчиликка умумийроқ методни топиш мумкин эмас деб фикр билдирган. Буларнинг ҳаммаси жуда маъқул ва тўғри натижага олиб келди. Лекин жуда тушинарли эмас эди. *ACI* (катетлари абсцисса ва ординаталар айирмасидан, гипотенузаси чизиқ ёйидан иборат тўғри бурчакли учбурчакка ўхшайди) шаклни ва *ACE* учбурчакни кўздан кечирайлик. Нега, Ферма асоссиз равишда *EC* катетни *IC* катет билан алмаштирди, сўнгра Δx билан боғлиқ ҳадларни ташлаб юборди ва бу умумий методни берди.

Қирқ йилдан сўнг Блез Паскалда (1623-1662) шунга ўхшаш чизма бўлган.



4-расм

Бу масалага буюк немис математиги нуқта қўйди ва дифференциал тушунчасини киритди.

Энди Ферма ва Паскал учбурчакларини Лейбниц нуқтаи назаридан қараймиз. Бунинг учун ординатасини абсциссасига нисбати бирор тенглама билан ифодаланадиган *AB* чизиқ керак бўлади. Биз соддароқ ҳолни қараймиз: *AB* эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин, бунда *A* нуқта x ва y координаталарга эга (4-расм).

x га $|AC| = \Delta x$ орттирма берамиз. Унда y ордината $|CB| = \Delta y$ орттирма олади. Δx ва Δy катетли, Δs гипотенузали *ACB* эгри чизиқли учбурчак ҳосил бўлди, бу ерда s ёй узунлиги, *AC* катет ва чизиқнинг *A* нуқтасига ўтказилган *AE* уринма орасидаги ўткир бурчак φ.

Бир вақтда *ACB* ва *ACE* учбурчаклар ҳосил бўлди. Унинг *AC* ва *CE* катетларини Лейбниц дифференциаллар (лотинча differentia, айирма маъносини беради) деб атади ва dx ва dy деб белгилади. *ACE* учбурчак *ACB* учбурчак билан умумий φ бурчакка эга ва катетлар $dx = \Delta x$ устма - уст тушади. Энди **муаммо иккинчи катетда** ва Лейбниц ёруғ йўлни кўрсатди.

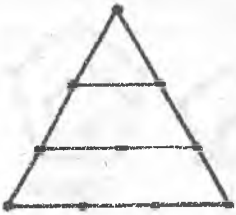
Ординатанинг dy дифференциали абсциссанинг dx дифференцалига пропорционал: $dy=kdx$, бу ерда пропорционаллик коэффициенти $k = \mathrm{tg}\varphi$ га тенг. Бу чизмадан маълум. Δy ордината абсциссанинг dx дифференциали оддий $\Delta y=kdx+|BE|$ тенгликка боғлиқ. Бу тенглик 7 - синф алгебра курсидаги $y =ax+b$ чизиқли функцияни эслатади. Лейбниц Δx нолга интилганда $\frac{|BE|}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини нолга тенг бўлишини пайқади (у фақат гапирмаган ва беш юз йилдан сўнг ошкор бўлган). Лейбниц тилида Фермада $dy=2xdx$ тенглик бўлган. Бу муҳокамалар ҳар қандай функция учун ўринли (“функция” атамаси биринчи бор Лейбниц 1694 йилда фойдаланган). Агар dx ва $k=\mathrm{tg}\varphi$ коэффициент маълум бўлса, функциянинг дифференциалини ҳисоблаш мумкин бўлади, яъни $dy = \mathrm{k}dx$.

Математикада аввал лимит тушунчаси, сўнгра аргумент ва функция орттирмаси ва унинг нисбатига ўтилади, бу нисбатнинг Δx нолга интилгандаги лимитига ҳосила дейилади ва y' деб белгиланади. Геометрия учун дифференциал тушунчаси фазони ўрганишда жуда муҳим ва фойдали ҳисобланади. Бу ҳақида Лейбниц қуйидагича ёзади: янги методнинг геометрияга тадбиғининг кучи ва амалий математикага тадбиқ этиладиган геметриянинг янги бўлимларини очилиши ҳақида, ҳатто геометрия учун ундан ҳам устунроқ дифференциал ҳисблаш ишларини бажариш мумкинлиги эътироф этилган [179, 21 бет.]. Бу ғояар асосида амалий жиҳатидан геометрия ривожланди, сўнгра унга механика ва кейинроқ физика ва техника бирлашди. Доим геометрия геодезия ва картография, ер сиртидаги чизиқларни текисликка тасвирлаш ҳақидаги фан учун таянч манба бўлди. Бу фанга бўлган талаб географик кашфиётлар ва савдо - сотиқнинг ривожланиши ва денгизчилар билан боғлиқ бўлгани учун кучайди.

XVII ва XVIII асрлар математиклар учун Леонарда Эйлер (миллати швецар) (1707-1783) асри номини олди: кўпхилликлар учун Эйлер теоремаси, математик анализда Эйлер шартлари, дифференциал геометрияда Эйлер формуласи, сонлар назариясида Эйлер функцияси, гидромеханикада Эйлер тенгламаси ва ҳоказо. Дифференциал геометрияда Эйлернинг ишини буюк француз олими биринчи дифференциал геометрияга бағишланган китобнинг муаллифи Гаспар Монж (1746-1818) давом эттирди. Дифференциал геометриянинг тамал тошини Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) қўйди, бу ҳақда Лейбниц " Биз яна бир чизиқли ёки геометрик ҳисоблашга муҳтожмиз деб ўйлайман" деб ёзган эди [3..., 23 бет.]. Гаусснинг ғояси ўша давр математикларида ривожланди ва ҳозир ҳам ривожланмоқда. XIX асрнинг ўрталарида Гаусснинг квадратик формалар назариясига таяниб, немис олими Бернхард Риман (1826-1866) 20 аср дифференциал геометрияси асосларини яратди ва бу давр **Евклиддан Лейбницгача** бўлган давр деб ном олди.

Новбатдаги қадам 1826 йилда Н.И.Лобачевский томонидан ноевклид геометриянинг яратилиши билан бошланди. XIX асрнинг ўрталарида кўп ўлчовли фазолар ўрганилди. Бунда Б. Риманнинг хизмати катта. Маханикада нисбийлик назарияси учун муҳим аҳамиятга эга бўлган риман геометрияси номи билан геометрия соҳаси кенгайди ва умумлаштирилди. Шу билан бир вақтда ҳар қандай алмаштиришда фигуранинг хоссалари сақланадиган топология дунёга келди. Геометрия предметининг ўзгариши билан баробар геометрик методларнинг мазмуни ўзгарди, турли йўналишдаги математик назарияларнинг турли фазолари ва бу фазодаги фигураларни ўрганувчи кучга айланди. А.Д. Александров геометрик методнинг хоссалари ҳақида "Геометрия учун объектга нисбатан умумлаштириш ва оддий геометрик тушунчаларни янги объектга кўчириш хосдир" деб ёзган [12, 309 б.].

Пифагорчилар бутун сонлар арифметикасида мунтазам фигуралар номи билан боғлиқ сонларга эга бўлганлар, масалан: “**учбурчак**” сонлар

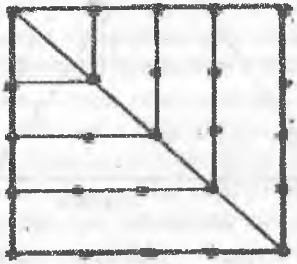


5-расм

1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (бу сонларнинг умумий ифодаси $1 + 2 + 3 + n = \frac{n(n+1)}{2}$) сонлар учбурчакларда ифодаланган.

Тўртбурчак сонлар

1, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$ сонлар (бу сонларнинг умумий ифодаси $1+3+5 = \ldots = (2n - 1) = n^2$; n^2 сон учун “квадрат” сўзи пифагор терминологиясига тегишли).



6-расм

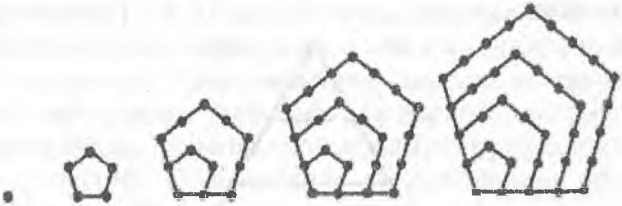
Шунингдек, пифагорчилар “кубик” 1, 8, 27, ... сонларни аниқладилар. n^3 сон учун “куб” сўзи киритилган; “пирамидал” сон деб ҳам юритилади -- учбурчак сонлар йиғиндиси:

$$1,\ 1 + 3 = 4,\ 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}.$$

Бундан ташқари **бешбурчак** сонларни топганлар:

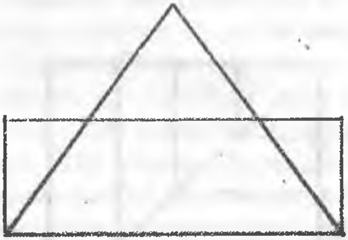
1, $1 + 4 = 5$, $1 + 4 + 7 = 12$

(бу сонларнинг умумий ифодаси 1+4+ 7 + … +(3n – 2) = $\frac{n(3n-1)}{2}$).



7-расм

Кўргазмалилик билан мантиқан боғловчи геометрик методнинг пайдо бўлиши III асрда яшаган буюк грек математиги Евклидга тегишли. Евклиднинг **“Негизлар”**ида теоремалар тоза геометрик усул билан исботланган. Масалан, учбурчак юзини ҳисоблаш қоидасини асослаш учун тўғри тўртбурчакнинг баландлиги учбурчак баландлигининг ярмига тенг бўлган расм чизилган.



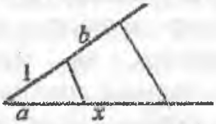
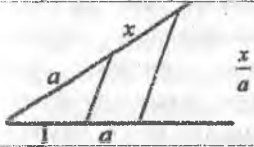
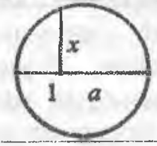
8-расм

Кесмаларнинг турли маънога эга бўлишининг боиси пифагорчиларнинг асосий диққатини геометрия ва арифметика орасидаги муносабатларга қаратилганлигидадир. Арифметика бутун сон тушунчасига асосланди. Рационал сонлар эса бир жуфт бутун сон сифатида қаралган. Шундан сўнг икки кесманинг нисбати ҳар доим иккита бутун сон нисбати ёрдамида ифодаланмаслиги маълум бўлди.

Алгебра ва геометрия орасидаги боғланиш координаталар методи ёрдамида Р. Декарт томонидан ўрнатилди. Бу метод алгебраик масала геометрия ёрдамида ва аксинча ечиш имконини берди.

Декартда сон греклар сингари кесма орқали тасвирланган. Унда *ab* кўпайтма тўғри тўртбурчакнинг юзи сифатида эмас, балки

$\frac{x}{b}=\frac{a}{1}$ тенгликдан келиб чиқадиган кесма деб қаралган. Квадратга кўтариш ва квадрат илдиз чиқариш натижаси ҳам кесма бўлган:

Кесмаларни кўпайтириш	Кесмаларни бўлиш
 $\frac{x}{b}=\frac{a}{1}$, $x=ab$	 $\frac{x}{1}=\frac{a}{b}$, $x=\frac{a}{b}$
Квадратга кўтариш	Квадрат илдиз чиқариш
 $\frac{x}{a}=\frac{a}{1}$, $x=a^2$	 $x^2=a\cdot 1$ $x=\sqrt{a}$

Р. Декарт абцисса ўқини киритиб битта мусбат сон билан ифода этиладиган ҳар қандай кесмани ўзунлигини ўлчаш имкониятига эга бўлди. Энг асосийси кесмалар устида бажарилган операцияларни мусбат сонлар устида бажариладиган операцияларга алмаштирди. Аналитик геометрия ғоялари яна бир француз математиги Пьер Ферма томонидан илгари сурилди. Р. Декартнинг ягона метод ҳақидаги ғоялари алгебра ва геометрия фанларининг методлари бирлашдилар. Бироқ бу Декарт истагандек содир бўлмади. Аналитик геометрия алгебра ва геометрия фани бўлмасада математик билимлар тизимида ўз ўрнини топди.

Юқоридагилардан алгебра ва геометрия орасидаги боғланишлар **Евклиднинг “Негизлар” асарида баён этилган геометрик алгебра** ва **Р. Декартнинг аналитик геометрияси** кўринишида амал қилган деган хулоса келиб чиқади.

Шундай қилиб, бизнинг тадқиқотимизда геометрик метод деганда, геометрик интерпретация ва геометрия қонунлари билан хулоса чиқариладиган метод тушунилади. Адабиётларда график усул, график тасвир тушунчаси учрайди. График тасвирда текисликдаги барча чизмалар тушунилади (“граф” – сўзи грекчадан ўзбек тилидаги таржимаси чизаман деган маънони англатади). Бу ишлар масала ечиш жараёнида ўқувчи фаолиятида бажарилади. Шунинг учун алгебраик ва геометрик методлар тушунчаларининг ҳажми ва мазмунини ўқувчининг ижодий фаолиятининг усули сифатида ўрганиш мақсадга мувофиқдир.

2. ПАРАМЕТРЛИ МАСАЛА - ТАЛАБАНИНГ ИЖОДИЙ ФИКРЛАШИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ УСУЛИ СИФАТИДА

Параметрли масала орқали математиканинг бўлимларига оид билимларни, мантиқий ва математик фикрлаш, ижодий фолиятнинг малакаларини текшириш мумкин. Ўқувчилар параметрли масалани ечиш жараёнида мантиқий боғланишлар ва масаланинг компонентлари орасидаги боғланишларни, ечимлар сонини ўзгариш сабабларини аниқлайдилар, параметрнинг қийматларини топадилар.

Математика таълимида параметрли масалаларни ечишга эътибор кам қаратилади, шунинг учун ўқувчи, талаба ва ўқитувчилар баъзи масалаларни ечишда хатога йўл қўядилар, умуман бундай масалаларни ечиш малакалари етарлича шакллантирилмайди. Шунинг учун ўқувчи тенглама билан танишдими параметрли масалани ечиш учун имконият бўлади. Шундай қилиб, ўқувчилар учун параметрли масала ечиш, ўқитувчи учун мавзуга оид билимларни назорат қилиш биринчи ўринда туриши лозим. Биз талабаларни ижодий фикрлашини ривожлантириш мақсадида *кўргазмалилик принципини* параметрик масалаларни ечишда қўллаймиз. Унда интерпретация, схема, жадваллардан самарали фойдаланиш натижасида ўрганиш жараёни рационал ва натижали бўлади.

Замонавий таълим ўқитувчидан компьютер технологияларидан оқилона фойдаланишни талаб этади. Демак, турли ўрганиш жараёнини ташкил этиш, ишнинг турли шаклларига эга бўлиш, фаолиятнинг янги кўриниши, ўқувчини фанга бўлган қизиқишини уйғотиш интеграция ғоялари асосида амалга оширишни тақазо этади. Бизнинг тадқиқотимизда интеграция ғоялари деганда турли фанга оид билимлар тизими тушунилади. Бу билимлар асосида абстракт-мантиқий фикрлаш, юракдан ҳис қилиш, кўргазмали образлар, абстракт тушунчалар ва мантиқий амаллар ривожланади, ижодий фикрлаш таълим жараёнида узлуксиз ривожланади, доим ҳаракатда бўлади.

Параметрли масалалар тадқиқот характерига эга.

Агар $f(x; a) = 0$ тенгламани x га нисбатан ечиш керак бўлса, a эса ихтиёрий ҳақиқий сонни ифодаласа, у ҳолда $f(x; a) = 0$ га параметрли тенглама деб аталади.

Параметрик тенғламани ечишда қуйидаги қийинчиликларга дуч келинади: параметрнинг бирор қийматида тенглама ечимга эга бўлмайди, иккинчисида чексиз кўп илдизлар, учинчисида улар битта формула ёрдамида ечилади, тўртинчисида яна бир бошқаси. Буни қандай қилиб ҳисобга олиш мумкин?

Ифодаланишидан қатий назар ҳар қандай параметрик масала қуйидаги иккита гуруҳга бўлинади: ***биринчиси,*** ҳар бири учун бирор шарт бажариладиган параметрнинг барча қийматларини топиш; ***иккинчиси,*** ҳар бири учун ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўладиган параметрнинг барча қийматларини топиш ва параметрнинг ҳар бир қиймати учун бу ечимни кўрсатиш.

Параметрли масалаларнинг табиати турлича: шартни ифодаланиши бўйича, ечиш усули бўйича, ечишнинг бош ғояси бўйича ва ҳоказо. Талабаларнинг ижодий фикрлашига хизмат қилувчи алгебраик, геометрик ва алгебраик ва геометрик методларнинг бирлигидан фойдаланамиз.

2.1.Параметрик масалани алгебраик усулда ечиш. Бу усул масала шартидаги маълумотларни таҳлил қилиш ва мантиқий фикрлаш орқали масалани ечишга йўналтиради. Қоидага кўра параметр константа сифатида қаралади, сўнгра бу константанинг олинган натижага таъсири текширилади.

1-мисол. x га нисбатан $mx - x + 1 \geq m^2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизлик чизиқли. Тенгсизликни $(m - 1)x \geq m^2 - 1$ кўринишда ёзамиз. Тенгсизликнинг ўнг томонига квадратлар айирмаси формуласини қўллаймиз.

$(m - 1)x \geq (m - 1)(m + 1)$.

x олдидаги коэффициентдан қутилиш учун, тенгсизликни $(m - 1)$ га бўлиш мумкин. Бироқ $(m - 1)$ манфий бўлган шартда тенгсизликнинг ишораси ўзгариши керак. Шунинг учун учта ҳолни қараймиз.

1-ҳол: $m > 1$. Демак, x олдидаги коэффициент мусбат.
Тенгсизликнинг ҳар иккала томонини $(m - 1)$ га бўлиб, $x \geq m + 1$ни ҳосил қиламиз.

2-ҳол: $m < 1$. Демак, x олдидаги коэффициент манфий.
Тенгсизликнинг ҳар иккала томонини $(m - 1)$ га бўлиб, $x \leq m + 1$ни ҳосил қиламиз.

3-ҳол: $m = 1$. Демак, тенгсизлик $x \geq 0$ кўринишни олади, бу x нинг барча қийматларида бажарилади.

2-мисол. Ўрта арифметиги – 8 га тенг бўлган

$|9x + 7a - 3| = |4x + 3a + 4|$

тенглама иккита турли илдизларга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Е ч и ш. Иккита модулли ифодалар фақат ва фақат модул остидаги ифодалар тенг ёки ишораси билан фарқ қилгандагина тенг бўлиши равшан, унда қарама-қаршиси бор, шунинг учун иккита тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} 9x + 7a - 3 = 4x + 3a + 4, \\ 9x + 7a - 3 = \ -4x - 3a - 4. \end{cases}$$

Системанинг ҳар бир тенгламаси x га нисбатан чизиқли. Энди системадаги ҳар бир тенгламани соддалаштирамиз:

$$\begin{cases} 5x = -4a + 7, \\ 13x = \ -10a - 1; \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \frac{-4a+7}{5}, \\ x = \frac{-10a-1}{13}. \end{matrix}$$

Модулга нисбатан тенгламанинг илдизини топамиз. Шартга кўра, илдизларнинг турли ва ўрта арифметиги – 8 га тенг бўлиши талаб этилган. У ҳолда ўрта арифметик таърифига кўра

$$\frac{-4a+7}{5} + \frac{-10a-1}{13} = -8 \cdot 2$$

ни ёзамиз. Умумий махражга келтирамиз ва суратда умумий кўпайтувчини қовусдан ташқарига чиқарамиз

$\frac{-52a+91-50a-5}{65} = \ -16.$ $\frac{-51a+43}{65} = -8.$ бундан a нинг қийматини топамиз.

$$a = \frac{-8 \cdot 65 - 43}{-51} = \frac{-563}{-51} = \frac{563}{51} = 11\frac{2}{51}$$

Жавоб: $11\frac{2}{51}$.

2.2.Параметрик масалани геометрик усулда ечиш. Ечилиши керак бўлган масалалар соҳалар усули ва бошқа геометрик ғояларни ўз ичига олган функция графикларини ва тенгламаларни алмаштириш билан боғлиқ.

3-Мисол. a нинг қандай қийматларида

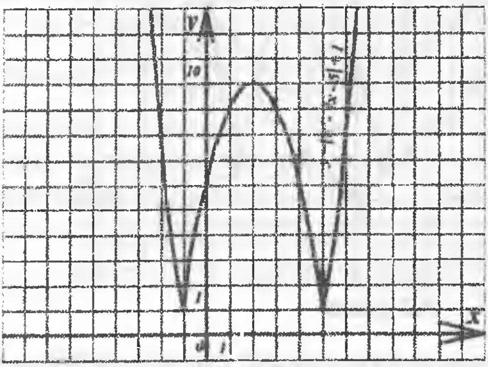
$|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$

тенглама учта илдизга эга бўлади?

Е ч и ш. Тенгламани

$|x^2 - 4x - 5| + 1 = |x - a| + 3$

кўринишда ёзамиз, яъни чап томонда параметр қатнашмайди. Тенгламанинг чап ва ўнг томонини функция сифатида қараб, битта координата системасида графикларни ясаймиз ва графикларнинг кесишиш нуқтасининг абсциссаси тенгламанинг ечими бўлади.



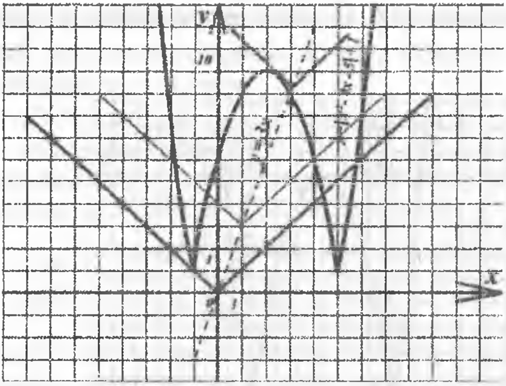
3.1-расм

$y = |x^2 - 4x - 5| + 1$ функцияни қараймиз. Аввал $y = x^2 - 4x - 5$ (1) функциянинг графигини ясаймиз, сўнгра $y = |x^2 - 4x - 5|$ функциянинг графигини ясаш учун (1) нинг бўлагини x ўқига нисбатан пастга симметрик акслантирамиз. Ҳосил бўлган графикни Oy ўқи бўйлаб бир бирлик

юқорига параллел кўчириб $y = |x^2 - 4x - 5| + 1$ нинг графигига эга бўламиз.

Иккинчи $y = |x - a| +3$ функцияни қараймиз. Модулли графикнинг учи (a; $3a$) параметрик координаталарга эга, бу функциянинг графигининг ҳолати a параметрнинг қийматига боғлиқ бўлади,

$y = |x|$ функция графигини $y = 3x$ тўғри чизиқ бўйлаб грфикнинг учига ўтказамиз.



3.2-расм

Агар функция графиги учта умумий нуқтага эга бўлса, тенглама учта турли илдизга эга бўлади, бу фақат иккита ҳолда бўлиши мумкин.

Биринчиси, графикнинг учи (0; 0) нуқтада бўлса, $a = 0$ бўлади.

Иккинчиси, текширилаётган функциянинг графиги

$y = |x^2 - 4x - 5| + 1$

парабола билан

$y = - x^2 + 4x + 6$ параболанинг қисмига аксланган нуқтада уринади. Уриниш $- x^2 + 4x + 6 = - x + 4a$ (уриниш абсциссаси a дан кичик бўлган нуқтада юз беради, бундан $|x - a| + 3a = - x + a + 3a$ келиб чиқади) квадрат тенгламанинг ягона илдизга эга эканлигини кўрсатади, яъни унинг дискриминанти нолга тенг. Квадрат тенгламани $x^2 - 5x - 6 + 4a$ стандарт кўринишда ёзамиз. Дискрименантни нолга тенглаштирамиз. Бундан $a = \frac{49}{16}$ келиб чиқади.

Жавоб: 0; $\frac{49}{16}$.

2.3.Параметрик масалани алгебраик ва геометрик усулларнинг бирлигида ечиш.

Бу метод юқоридаги иккита методнинг синтези бўлади. Унинг ғояси геометрик метод ғояси ва бирор қонун - қоидаларни ўрнатиш ғоясини қўллаш билан хулоса қилинади. Масалан, геометрик ғоя тенгламанинг илдизлари сонини тушуниш, функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш, функциянинг инвариантлиги ва симметриклигидан фойдаланиш ва ҳоказони ўз ичига олади, ечим ва жавоб эса алгебраик қонунларни қўллашдан сўнг ёзилади.

Умуман олганда, бу усулни қўллашда тенгламанинг графигини чизиш ҳар доим ҳам шарт эмас. Геометрик ғоялар ва ечимни аниқлаш учун функциянинг хоссаларининг ўзи етарли.

4- Мисол. $\begin{cases} a(x^4+\ 1) = y - |x|\ + 2, \\ x^2 +\ y^2 = 4. \end{cases}$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг. Равшанки, агар $(x_0;\ y_0)$ - системанинг ечими бўлса, унда $(-\ x_0;\ y_0)$ - ҳам системанинг ечими бўлади. Демак, ечим ягона бўлиши учун $x_0\ = -x_0$ шарт бажарилиши зарур, унда $x_0 = 0$ бўлади. $x = 0$ да система $\begin{cases} a = y\ + 2, \\ y^2 = 4. \end{cases}$ кўринишни олади.

Агар $y = 2$ бўлса, унда $a = 4$ бўлади; агар $y = - 2$ бўлса, унда $a = 0$ бўлади. Демак, параметрнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $a = 4$, $a = 0$ бўлади.

Айтайлик $a = 4$ бўлсин. Унда берилган система.

$$\begin{cases} 4x^4 = y - |x|\ - 2, \\ x^2 +\ y^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 +\ |x| = y - 2, \\ x^2 +\ y^2 = 4. \end{cases}$$

кўринишни олади. Бу ерда масалани стандарт ечиш методи иш бермаяпти. Ҳосил бўлган системанинг иккинчи тенгламасини ҳисобга олиб, биринчи тенгламанинг чап ва ўнг томонини баҳолашга ҳаракат қилайлик.

Равшанки, $x^4 \geq 0$, $|x| \geq 0$ унда, $x^4 + |x| \geq 0$ бўлади, демак $y - 2 \geq 0$, $y \geq 2$.

Ҳосил бўлган системанинг иккинчи тенгламасидан

$|x|\ \leq\ 2$, $|y|\ \leq\ 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \leq 2\ , \\ y \geq -\ 2 \end{cases}$ келиб чиқади. Бироқ биринчи тенгламадан

$y \geq 2$ аниқланган.

Шундай қилиб, икки тўпламнинг кесишмаси $y = 2$ бўлади. Топилган қийматни тенгламалар системасига қўйиб $x = 0$ ни топамиз. Ниҳоят $a = 4$ да система ягона (0; 2) ечимга эга бўлади.

$a = 0$ бўлсин. У ҳолда берилган система .

$\begin{cases} y - |x| + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ $\begin{cases} y + 2 = |x|, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ кўринишни олади.

Қуйидаги системаларни алгебраик (ўрнига қўйиш) ва геометрик (график) метод билан ечиш мумкин:

$$\begin{cases} |x| = y + 2, \\ (y + 2)^2 + y^2 = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| = y + 2, \\ y^2 + 4y + 4 + y^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| = y + 2, \\ 2y^2 + 4y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| = y + 2, \\ y(y + 2) = 0. \end{cases}$$

Берилган система учта (0; -2), (- 2; 0), (2; 0) ечимга эга. Праметрнинг $a = 0$ қиймати бизни қаноатлантирмайди.

Жавоб: 4.

Бу ечимда масаланинг x ни $-x$ га алмаштирганда тенгламани инвариантлиги (яъни ўзгармаслиги) ҳал этувчи ҳолат ҳисобланади. Бу инвариант бўлишнинг содда мисоли – жуфтлик хоссаси.

Талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантириш мақсадида параметрли масалани ечиш қуйидаги принципларга амал қилади:

1) *концервативлик принципи* - ҳар бир параметрли масала ўқув материали билан боғланган бўлиши керак. Масаланинг ечими ўқувчида янги ўзгарувчини киритишни талаб этмаслиги керак;

2) *оддийдан – мураккабга принципи* – методиканинг асосий функцияси ўқитиш мақсадида қўлланиладиган усул ва методларни танлаш орқали хулоса қилинади. Мақсадга эришиш учун ижодий фикрлаш масаласи қўйилади. Назарий ва методик ривожланиш масаласи қўйилади. Бу масалани ҳал қилишнинг бир йўли параметрли масалани ечишни ўрганиш ва бу масалаларни ечиш жараёнида ўқувчининг компетеция даражасини таҳлил қилиш бўлади. Шундай қилиб, параметрли масалани ечиш бир вақтда ўқитиш методи ва усули бўлади;

3) *ўкув фаолиятини активлаштириш принципи* – ўқувчиларнинг активлик даражаси бўйича пассив ва актив фаолиятига ажратиш мумкин. Активлаштириш принципи ўқув жараёнида, хусусан праметрли масалаларни ечиш масаласини тадқиқот характери сифатида олиб киради;

4) *табиийлик принципи* –параметрли масалага нисбатан яхши муносабатни шакллантириш учун ўқув жараёнига бундай масалаларни киритишни талаб этади. Хусусан, ўқувчиларнинг диққатини маълум математик фактларни нозик жойлари билан танишиш содир бўлишига қаратиш фойдали бўлади;

5) долзарблик принципи – параметрли масаланинг ечимини бошқа фанга оид муаммоларни ҳал этишга қўллаш муҳимлигини кўрсатиш;

6) переспективлик принципи – оддий масалаларда параметрни киритиш янги сифатли ўқув масалаларига ўтиш учун йўл очиб беради: янги ёки аналогик масалалар яратиш ёки ишлаб чиқиш;

7)концентриклик принципи – параметрли масалани ечиш аввалги натижа, метод ва усулларга асосланиши зарур. Фақат шундагина ўрганиш жараёнида масалани ечишга тизимли ёндошувни қўллаш ммкин бўлади;

8)актив ўзлаштириш принципи – математик ва педагоглар В.В. Мирошин нинг китобида ва Д. Поянинг "Математическое открытие" асарида "Бирор нарсани яхши ўрганиш – бу унда янгилик яратишдир"([5]) деб эътироф этилганлигини такидлайди. Параметрли масала бу принципни математика ўқитишда, айникса геометрия ўқитишда интеграция ғоялари асосида талабалар ижодий фикрлашини ривожлантиришда кенг кулоч ёйиши учун асосий усул бўлади.

Ўқув жараёнининг принципи ўқитиш мақсади бўлиб, талабаларнинг ижодий фикрлашини интеграция ғоялари асосида ривожлантиришда параметрли масалалардан фойдаланиш қуйидаги дидактик принципларга амал қилдади: 1)*объективлиги, илмийлиги* – таъриф, хулоса, мисоллар ва назарий материаллар математика талабларига мос келади; 2)*кетма-кетлиги, тизимли* эканлиги – параметрли масала дастурдаги материаллар билан параллел равишда ечиш талаб этилади; 3)мураккаблик даражасида *зарурлиги ва ишончлиги* – ўқувчиларнинг параметрик масалани ечиш кўникма ва малакаларига эга эмаслиги масалани ечишда қийинчилик туғдириши билан хулоса қилинади; 4)*турли методга эгалиги ва кўргазмали* *эканлиги* – ўқувчилар параметрли масалани ечиш усулига эга эмас, алгебраик, геометрик, алгебраик ва геометрик методларни қараш мумкин бўлади. Я.А. Коменский геометрик методни (кўргазмалилик принципи сифатида) дидактиканинг "олтин қоидаси" деб атади, унга кўра ўқитишда инсон ҳис этишининг барча органларидан фойдаланиш зарурдир ([12]).

Мураккаб ва ечими ижодий ёндошишни талаб этадиган жуда кўп физик, кимёвий, иқтисодий ва бошқа бир қанча қонун қоидалар амалий аҳамиятга эга ва ҳар қадамда параметрли масалани ечишга келади.

Масала ечишнинг алгебраик методи тартиб билан иш кўришни талаб этади, ечимни йўқотмаслик уқуви, параметрнинг мумкин бўлган барча қийматларини текшириш. Муммо туғилиши табиий: жавобни нисбатан осонроқ олишга имкон берувчи параметрли масалаларни ечишнинг кўргазмали ва оддийроқ методини топиш мумкинми? Схема, расм ва графиклар масала ечимини топишга ёрдам беради.

Бу метод билан ечиладига масалаларнинг ечилиши турли геометрик фикрлашдан фойдаланиш тушунилади. Метод алгабраик ва геометрик масалалар орасидаги, алгебра тили(формула тили) ва геометрик тил(масофа тили) орасида Декарт замонидан маълум бўлган узвий боғланишга асосланган.

Геометрик методлардан фойдаланиб ечиладига параметрик масалаларни иккига ажратиш мумкин:

1)ечишда геометрик ғоялардан фойдаланиладиган параметрли масалалар;

2)ечишда параметр киритиш усули қўлланиладиган геометрик масалалар.

Биринчи ҳолда график интерпретация геометрик тассавурга, ечими эса *масофа формуласини* (икки нуқта орасидаги;нуқтадан текисликдаги тўғри чизиққача ёки фазодаги тўғри чизиққача), *тенглама* (тўғри чизиқ, бир жуфт параллел ёки кесишувчи тўғри чизиқлар; айланалар; кесма ёки параллелограмлар) қўллашга асосланади, унда *координаталар методини* ва геометрик формулаларни қўллашга тўғри келади. Бундай ҳолда исбот ёки масала ечими кўргазмали тасвирга суянади, ғоялар эса қуйидаги масалаларни ечиш учун асос бўлади: тенглама, тенгсизлик, бирор ифоданинг энг катта ёки энг кичик қийматини топиш.

Иккинчи ҳолда масаланинг геометрик ечими тенгламани ёки унинг системасини ечишга келади ва мос алгебраик операцияларни қўллашни талаб этади.

> *"Арифметик белгилар бу ёзилган геометрик фигуралардир,*
> *геометрик фигуралар эса бу чизилган формулалардир"*
> *Давид Гильберт(1862-1943), немис математиги.*

3. ГЕОМЕТРИК МЕТОД ЁРДАМИДА ТАЛАБАЛАР ИЖОДИЙ ФИКРЛАШИНИ РИВОЖЛАНТИРУВЧИ ПАРАМЕТРИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ

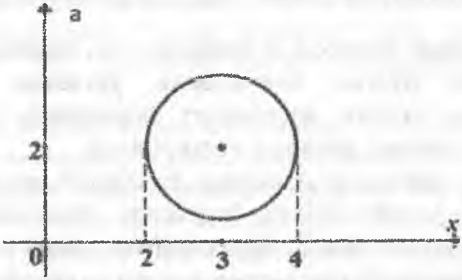
Жуда кўп кимё, иқтисод ва физикага оид жараёнларни, амалий йўналишга эга бўлган қонунларни ўрганиш ҳар қадамда мураккаброқ ва ечишга ностандарт ёндошувни талаб этадиган параметрли масаланинг ечимига келтирилади.

Параметрли масалани ечишнинг алгебраик методи кўп меҳнат талаб қилади, эҳтиёт бўлиб ёндошиш, ечимни йўқотмаслик, параметрнинг мумкин бўлган барча қийматларини текшириш талаб этилади. Жавобни нисбатан параметрли тез ва қулай топишга имкон берувчи масалани ечишнинг соддароқ ва кўргазмали ечиш усулини топиш мумкинми?. Бу саволнинг қўйилиши, албатта табиий. Бунга геометрик метод элементи, яъни кўргазмали-график тасвирлаш шунингдек, схема, расм, график масала ечимини излашга ёрдам беради. Масалан, элементар функцияларнинг хоссаларини, уларнинг графикларини ва алмаштиришларнинг содда ($f(x+a)$; $f(-x)$; $-f(x)$; $rf(x)$; $f(x) + a$) усуллари масаланинг таҳлилини ойдинлаштиради, масала ечимини тез топишга имкон беради.

1-мисол. a параметрнинг қандай қийматларида

$x^2-6x+12+a^2-4a=0$ тенглама илдизлари айиирмасининг модули энг катта қийматни қабул қилади.

Ечиш. Икки сон айирмасининг модули – бу координата тўғри чизиғида икки нуқта орасидаги масофа. Тенгламанинг чап томонида тўла квадрат ажратамиз: $(x^2-6x+9)+(a^2-4a+4)=1$, $(x-3)^2+(a-2)^2=1$. Бу $0xa$ координаталар системасида маркази (3; 2) ва радиуси 1 га тенг бўлган айлана (1-расм). Айлана ва абцисса ўқига параллел тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси абциссаси тенгламанинг илдизига тенг. Нуқталар орасидаги масофа энг катта бўлади, агар улар диаметри 2 га тенг бўлган айлананинг учлари



1-расм

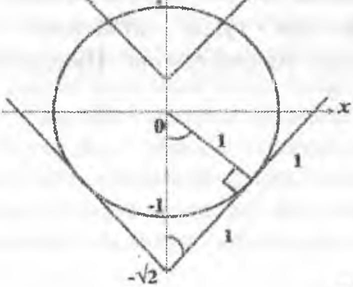
бўлса. $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $|x_2 - x_1|= 2$. Энди a нинг қийматларини топамиз:

1) $x=2$;$(2-3)^2 + (a-2)^2 = -1$; $1 + (a-2)^2 = 1$. $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1$; $(a-2)^2 = 0$ $a = 2$. 2) $x = 4$; $(4-3)^2 + (a-2)^2 = 1$; $a-2 = 0$; $a = 2$.

Жавоб: $a = 2$.

2-мисол. $\begin{cases} y = |x| + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ тенгламалар системаси иккита ечимга эга бўладиган a параметрнинг қийматларини топинг.

Ечиш. $x^2 + y^2 = 1$ - бу маркази координата бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган айлана. $y = |x| + a$ тенглама учи $0y$ ўқда ётган бурчаклар оиласини беради. (2-расм)



2-расм

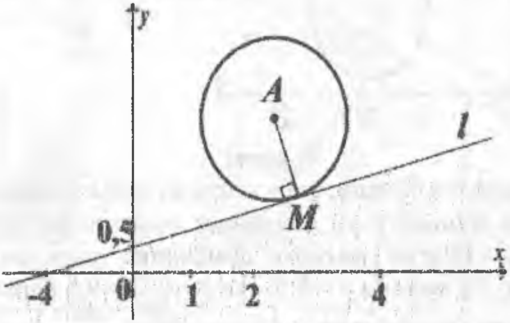
$a = -\sqrt{2}$ да бурчак айланага уринади. Жавоб расмга қараб олинади. $a \in \{-\sqrt{2}\}$ U(-1; 1) да берилган система иккита ечимга эга бўлади.

Жавоб: $a = \{-\sqrt{2}\}$ U(-1; 1).

3-мисол. $\begin{cases} (x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 \leq \frac{(a+1)^2}{80}, \\ x - 2y \geq -1 \end{cases}$

тенгсизликлар системаси ягона ечимга эга бўладиган a параметрнинг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. $(x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 \leq \frac{(a+1)^2}{80}$ тенгсизлик маркази A(- 4 - 2a; -1- a) нуқтада ва радиуси $\frac{|a+1|}{4\sqrt{5}}$ га тенг бўлган доирадани ифодалайди. $x - 2y \geq -1$, $y \leq 0{,}5x + 0{,}5$ тенгсизликлар $y = 0{,}5x + 0{,}5$ чегарали ярим текисликни ифодалайди.



3-расм

l: $y = 0{,}5x + 0{,}5$ тўғри чизиқ тенгламасида $k_l = 0{,}5 \Rightarrow k_{AM} = -2$, l тўғри чизиқ AM га перпендикуляр. Тенгсизликлар системаси ягона ечимга эга бўлади, агар доира ва тўғри чизиқ ягона умумий нуқиага эга бўлса(бизнинг мисолимизда уриниш нуқтаси М). Бу қуйидаги шартларда бажарилади:

$$\begin{cases} y - y_A = k_{AM}(x - x_A) \\ AM = \sqrt{(x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2} = \frac{|a+1|}{4\sqrt{5}} \\ x - 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 4 + 2a = -2(x + 1 + 2) \\ (x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 9 + 5a = 0 \\ x - 2y = -1 \\ (x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2a - 3.8 \\ y = -a - 1.4 \\ (-2a - 3.8 + 4 + 2a)^2 + (-a - 1.4 + 1 + a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \end{cases}$$

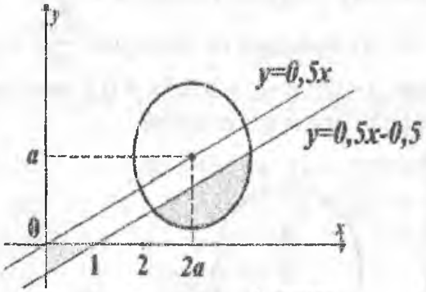
$0{,}2^2 + (-0{,}4)^2 = \frac{(a+1)^2}{80}$; $0{,}2 = \frac{(a+1)^2}{80}$; $(a+1)^2 = 16$; $|a+1| = 4$, $a = 3$; $a = -5$. Энг кичик қиймат $a = -5$.

Жавоб: $a = -5$.

4-мисол. Ҳар бир қийматида $\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x-2y \ge 1 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Е ч и ш. $(x-2a)^2+(y-a)^2 \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}}$ тенгсизлик маркази $(2a;\ a)$ нуқтада ва радиуси $\frac{|a|}{6\sqrt{5}}$ га тенг бўлган доирани ифодалайди.

$y \le 0{,}5x - 0{,}5$ тенгсизлик $y = 0{,}5x - 0{,}5$ чегарали ярим текисликни ифодалайди. (4-расм)



4-расм

Система ечимга эга бўлади, агар доира ва ярим текислик умумий нуқтага эга бўлса. Бунинг учун доиранинг марказидан $y = 0{,}5x - 0{,}5$ тўғри чизиғигача бўлган масофа доиранинг радиусидан катта бўлмаслиги керак. Бу масофа $y = 0{,}5x$ ва $y = 0{,}5x - 0{,}5$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофага тенг бўлади. $\rho = \frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}5^2+1^2}} = \frac{0{,}5}{0{,}5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Шундай қилиб, система $\frac{1}{\sqrt{5}}. \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}}$, $|a| \ge 6$, $\begin{cases} a \ge 6 \\ a \le -6 \end{cases}$ шартда ечимга эга бўлади.

Жавоб: $a \le -6$; $a \ge 6$.

5-мисол.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5} + \sqrt{x^2-4x+y^2-12y+40} = 5 \\ y = x^2 + a \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси, ҳар бир қийматида иккита ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Е ч и ш.

$$\sqrt{(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)} +$$
$$\sqrt{(x^2-4x+4)+(y^2-12y+36)} = 5.$$

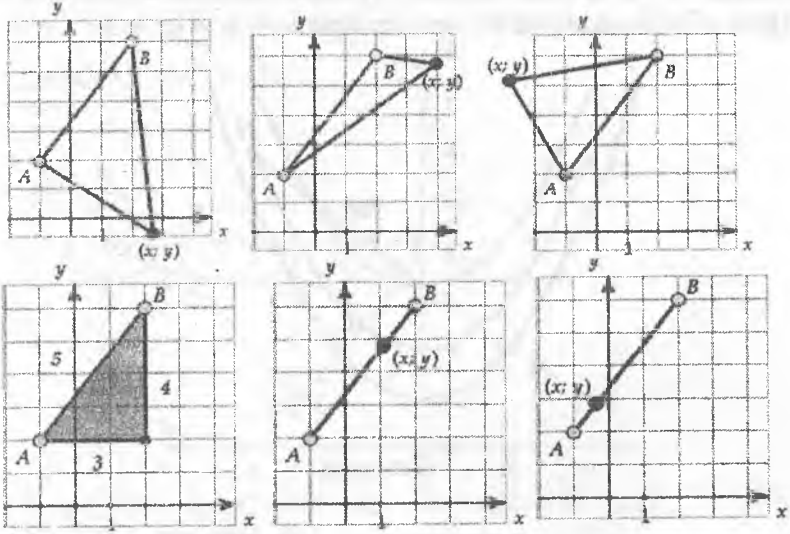
$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}=5.$$

$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$ – бу $M(x; y)$ ва $A(-1; 2)$ нуқталар орасидаги масофа.

$\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$– бу $M(x; y)$ ва $B(2; 6)$ нуқталар орасидаги масофа.

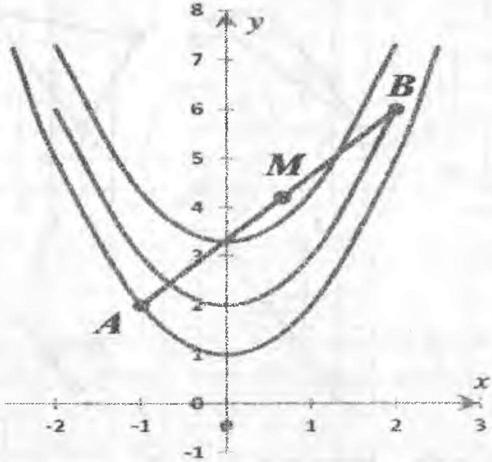
$M(x; y)$ нуқтадан А ва В нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси 5 га тенг бўлиши керак, яъни AM + MB = 5.

Мумкин бўладиган ҳолатлар:



5.1(а,б,в,г,д,е)-расмлар

Учбурчакнинг ҳар бир томони қолган икки томон йиғиндисидан кичик(учбурчак тенгсизлиги), шунинг учун биринчи тўртта вариант қаноатлантирмайди. Бу деган сўз, $M(x;\ y)$ нуқтани AB кесмада ётишини кўрсатади. Системанинг биринчи тенгламаси AB кесмани беради. Системанинг иккинчи тенгламаси параболани ифодалайди. у кесмани иккита нуқтада кесиб ўтиши шарт: 1)биринчи ҳолат парабола $A(-1;\ 2)$ нуқтадан ўтганда содир бўлади. $a = 1$ да кесим битта; 2) агар парабола $B(2;\ 6)$ нуқта орқали ўтса, унда кесим иккита бўлади. $a = 2$ да ҳали парабола уринмаганда кесим иккита бўлади; 3)$y = x^2 + a$ парабола BC кесмага уринади: $y = kx + b$



$A(-1;\ 2)$ ва $B(2;\ 6)$. нуқталарда.

$$\begin{cases}2 = -k + b\\ 6 = 2k + b\end{cases};\ \begin{cases}b = 2 + k\\ b = 6 - 2k\end{cases};\ 2 + k = 6 - 2k;\ \Leftrightarrow k = \frac{4}{3};\ b = \frac{10}{3}.$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}.\ \ y = x^2 + a\ ;y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}.\ \ x^2 - \frac{4}{3}x + a - \frac{10}{3} = 0.$$

$$D = 0;\ \ b^2 - 4ac = 0.\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\cdot\left(a - \frac{10}{3}\right) = 0.$$

$a = \frac{34}{9}$ - парабола AB га уринади. Битта кесим.

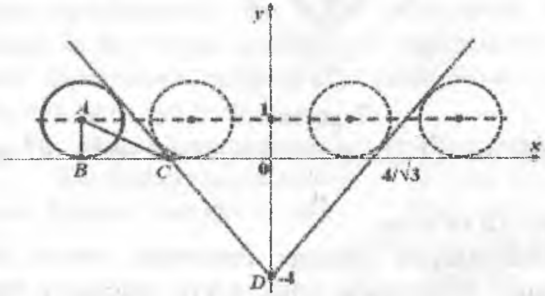
$a > \frac{34}{9}$ – парабола кесмани кесмайди.

Жавоб: a € [2: $\frac{34}{9}$).

6-мисол. $\begin{cases}(x-c\sqrt{3})^2+y^2-2y\ =0\\ \sqrt{3}|x|-y=4\end{cases}$ система битта ечимга эга бўладиган c параметрнинг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш.

Системанинг биринчи тенгламасини $(x-c\sqrt{3})^2+y^2-2y+1=1$ кўринишда ёзамиз. $(x-c\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$ - бу тенглама $(c\sqrt{3};\ 1)$ марказли бирлик айланалар оиласини ифодалайди. Маркази $y=1$ тўғри чизиғида ётади;(6-расм) 2) $y=\sqrt{3}|x|-4$; $x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ да $y=0$ бўлади. tg $\angle COD=k=\sqrt{3}\Rightarrow\angle OCD$ $=60°$. $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle OCD=30°$;



6-расм

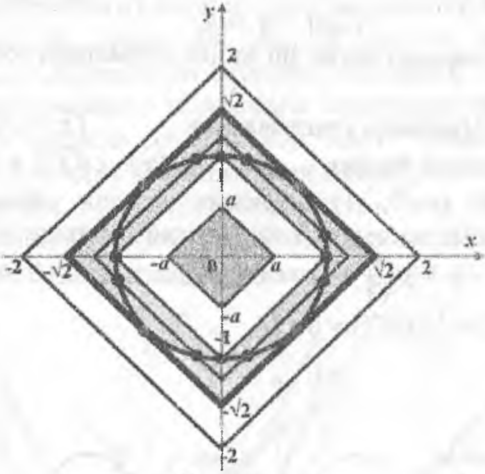
3)ΔBCA дан: $AB=1$, $\angle C=30°$, $AC=2$, у ҳолда $BC=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$; $BO=BC+CD=\frac{4}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{7}{\sqrt{3}}$; $A(-\frac{7}{\sqrt{3}};\ 0)$; $c\sqrt{3}=\frac{7}{\sqrt{3}}$; $c=-\frac{7}{3}$.

Жавоб: $c=-\frac{7}{3}$.

7-мисол. $\begin{cases}|y|\ +\ |x|\ =a\ ,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ система a параметрга боғлиқ нечта ечимга эга бўлади?

Албатта жавоб расмдан олинади.(7-расм) $a<1$ да ечим йўқ. $a=1$ да 4та ечим.

$1 < a < \sqrt{2}$ да ечим 8 та. $a = \sqrt{2}$ да ечим 4 та. $a > \sqrt{2}$ да ечим йўқ.



7-расм

Жавоб: $a < 1$ ва $a > \sqrt{2}$ да ечим йўқ, $a = 1$ ва $a = \sqrt{2}$ да 4 та ечим, агар

$1 < a < \sqrt{2}$ бўлса 8 та ечим.

Параметрли масалаларни ечишда геометрик метод самара беради. У модулнинг, текисликда икки нуқта орасидаги масофа, учбурчак тенгсизлигининг геометрик маънолари билан боғлиқ кўргазмали-геометрик интерпретацияга асосланади.

4. АЛГЕБРА ВА ГЕОМЕТРИЯ ТИЛИ ОРАСИДАГИ МОСЛИКЛАР ЖАДВАЛИ:

Алгебраик тил(формула тили)	Геометрик тил(масофа тили)
Сон ва ҳарф	Координата ўқлпригача бўлган масофа(координаталар)
Икки сон айирмасининг модули	Координата тўғри чизиғида икки нуқта орасидаги масофа
Икки сон квадратларининг йиғиндиси	Координата текислигида икки нуқта орасидаги масофанинг квадрати

5. Икки нуқта орасидаги масофа формуласини координата ўқига қўллаш

Мисол. $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ тенгламанинг илдизлари айирмасининг модули энг катта қиймат қабул қилиши мумкин бўлган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. x_1 ва x_2 лар берилган тенгламанинг илдизлари бўлсин. Масаланинг ечими ҳар доимгидек $f(a) = |x_1 - x_2|$ функциянинг энг катта қийматини ҳисоблашдан иборат, унда $f(a) = 2\sqrt{-3 + 4a - a^2}$ $= 2\sqrt{1 - (a - 2)^2}$ функцияга эга бўламиз, равшанки $a = 2$ да $f(a) = 2$.

Жавоб: 2.

Ўқувчиларнинг аксариат қисми ҳосилани қўллашни талаб этадиган функциянинг энг катта қийматини топишга ҳаракат қиладилар ва бу йўлда иррационал ифодаларни алмаштириш ва мураккаб функцияни дифференциаллаш билан боғлиқ бир қатор қийинчиликларга дуч келади.

6. Масофа тили формула тилида жадвали:

1. Сон ўқида t нуқтадан -22 гача бўлган масофа 5 дан кичик	$\lvert t + 22\rvert < 5$ Изоҳ: сон ўқида (a ва b нуқталар орасидаги масофа a ва b сонлар айирмасининг модулига тенг, унда r(a; b) = $\lvert a - b \rvert$)
2. Сон ўқида x нуқтадан -3 ва 5 нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси 12 га тенг	$\lvert x + 3\rvert + \lvert x - 5\rvert = 12$
3. Сон ўқид $x - 6$ ва $x^2 - 21$ нуқталар орасидаги масофалар тенг	$\lvert x - 6\rvert = \lvert x^2 - 21\rvert$
4. $y = 3x - 2$ тўғри чизиқда ётган нуқтадан абсциссаси 5 марта катта ордината ўқигача бўлган масофа	$\lvert 3x - 2\rvert = 5\lvert x\rvert$ Изоҳ: $y = f(x)$ функуция графигининг (x; y) нуқтасидан абсцисса ўқигача $\lvert f(x)\rvert$ масофада, ордината ўқигача $\lvert x\rvert$ масофада ётган нуқтагача бўлган масофа

5. $M(a; b)$ нуқта маркази координата бошида ва радиуси 3 га тенг бўлган айланада ётади	$a^2 + b^2 = 9$
6. $M(x; y)$ нуқтадан $P(3; 4)$ ва $K(-2; 5)$ нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси 6 дан катта эмас.	$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} +$ $+\sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} \le 6$
7. Бирлик айлананинг $M(m; n)$ нуқтасидан $P(-4; 1)$ нуқтагача бўлган масофа 3 га тенг	$\begin{cases} m^2 + n^2 = 1 \\ \sqrt{(m+4)^2 + (n-1)^2} = 3 \end{cases}$
8. (-2; 4) марказли ва радиуси 2 га тенг бўлган айлананинг $M(p; q)$ нуқтадан шу марказли ва радиуси 6 га тенг бўлган айлананинг $P(a; b)$ нуқтасигача бўлган масофа 8 га тенг	$(p+2)^2 + (q+4)^2 = 4$ $(a+2)^2 + (b+4)^2 = 36$ $\sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} = 8$
9. $y = 2x - 1$ тўғри чизиғида ётган M нуқтадан $P(3; 4)$ ва $K(-1; 1)$ нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси 5 га тенг	$\sqrt{(x-3)^2 + (2x-5)^2} +$ $+\sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2} = 5$ Изоҳ: агар нукта $y = 2x - 1$ тўғри чизиғида ётса, унда унинг координатаси$(x; 2x - 1)$ бўлади
10. $y = x$ тўғри чизиғида ётувчи М нуқтадан, $y = 2x - 3$ тўғри чизиғида ётган нуқтагача бўлган масофа 9 дан кам эмас	$\sqrt{(a-b)^2 + (a-2b+3)^2} \ge 9$ Изоҳ: нуктанинг берилган тўғри чизикда ётишлигидан уларнинг координаталарини қуйидагича ёзиш мумкин: $M(a; a)$, $P(b; 2b - 3)$, бу ерда a ва b ихтиёрий ҳақиқий сонлар

7. Формула тили кесма тилида жадвали:

1. $\lvert x - 5\rvert = 2\lvert x + 3\rvert$ тенгламани ечинг	Ҳар биридан 5 нуқтагача бўлган масофа -3 нуқтагача бўлган масофадан 2 марта катта бўлган сон ўқидаги барча x нуқталарни топинг
$p^2 + q^2 = 16,$ 2. $p^2 + q^2 = 25,$ $(p - r)^2 + (q - t)^2 = 100$ тенгламалар системаси ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўладими?	Маркази координата бошида, радиуслари 4 ва 5 га тенг бўлган концентрик айланаларнинг ҳар бирида орасидаги масофа 10 га тенг бўладиган нуқталарни топиш мумкинми?
3. $y = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x+3)^2 + 16}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг	Абсцисса ўқида шундай нуқта топингки, ундан (1; 3) ва (-3; -4) нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси энг кичик бўлсин. Изоҳ: $\sqrt{(x-1)^2 + 9}$ сон (x; 0) ва (1; 3) нуқталар орасидаги масофага тенг. $\sqrt{(x+3)^2 + 16}$ сон (x; 0) ва (-3; -4) нуқталар орасидаги масофага тенг
4. $y = \sqrt{(x+2)^2 + (2x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (2x-5)^2}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг	$y = 2x$ тўғри чизиқда шундай нуқта топингки, ундан (-2; -1) (3; 5) нуқталаргачабўлган масофалар йиғиндиси минимал бўлсин. Изоҳ: $\sqrt{(x+2)^2 + (2x+1)^2}$ масофа (-2; -1) ва (x; $2x$) нуқталар орасидаги масофага тенг. $\sqrt{(x-3)^2 + (2x-5)^2}$

	масофа (3; 5) ва (x; $2x$) нуқталар орасидаги масофага тенг.
5. $(z-t)^2 + (z-3t+5)^2 \le 18$ тенгсизликни ечинг	Нуқтадан $y = x$ тўғри чизиққача бўлган масофа, $y = 3x - 5$ тўғри чизиқдаги нуқтагача бўлган масофанинг квадрати 18 дан ошмайдиган $y = x$ ва $y = 3x - 5$ тўғри чизиқнинг бача нуқталарини топинг. Изоҳ: $(z-t)^2 + (z-3t+5)^2$ йиғинди (z; z) ва (t: $3t$ - 5) нуқталар орасидаги масофанинг квадратига тенг
6. $\|x\| = 5\| ax - 3\|$ параметрли тенгламани ечинг	Ҳар бир нуқтасидан ордината ўқигача бўлган масофа, абсцисса ўқигача бўлган масофадан 5 марта катта бўлган $y = ax + 3$ функциянинг графигидаги барча нуқталарни топинг
7. $\begin{cases}(m-3)^2 + (n-4)^2 = a^2, \\ m^2 + n^2 = 4\end{cases}$ тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг	Агар бу айлананинг маркази координата бошида ва радиуси 2 га тенг бўлган айланага уриниши маълум бўлса, маркази (3; 4) нуқтада бўлган айлана тенгламасини топинг. Изоҳ: топилган радиус $\|a\|$ га тенг бўлади

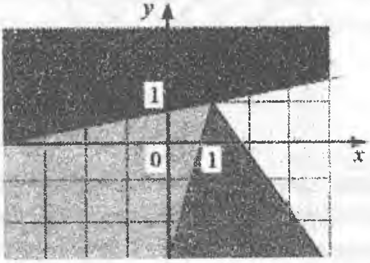
8. Геометрик образлар ва формулаларнинг мослиги

1-Мисол.

$$\begin{array}{l}(2a+1)x+2y \ \geq 4a+1,\\ 4x+(3a-4)y \ \leq 3,\\ (2a-3)x+5y \ \leq 4a\end{array}$$

тнгсизликлар системаси ягона ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. Фиксирланган a да системанинг ҳар бир тенгсизлиги xOy текисликда чегараси билан биргаликда бирор ярим текисликни аниқлайди.(1-расм)



1-расм

Агар текисликларни чегараловчи тўғри чизиқлар битта нуқтада кесишса, у ҳолда ярим текисликлар ягона умумий нуқтага эга бўлади.

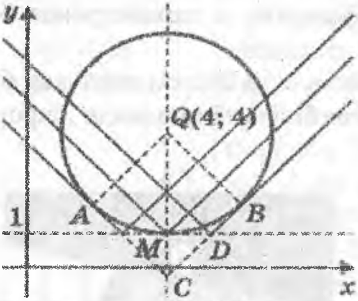
$$\begin{array}{l}(2a+1)x+2y=4a+1,\\ 4x+(3a-4)y \ =3,\\ (2a-3)x+5y=4a\end{array}$$

тенгламалар системасидан x ва y ларни йўқотамиз. $a = 1$ ёки $a=-\frac{25}{42}$ илдизларга эга $42a^2-17a-25=0$ тенгламага эга бўламиз. $a = 1$ да ечим $x = 1$ ва $y = 1$. $a=-\frac{25}{42}$ да ечим чексиз кўп.

Жавоб: $a = 1$;$x = 1$ ва $y = 1$.

2-Мисол. $\left\{\begin{array}{l}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=\mid x-a\mid+1\end{array}\right.$ тенгламалар системаси турли учта ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Е ч и ш.Шаклнинг учта умумий нуқтаси қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин: 1)тўғри бурчакнинг учи айлана ва $y = 1$ тўғри чизиқнинг M уриниш нуқтасида ётади, унинг томонлари эса айланани иккита нуқтада кесади(биринчи ҳол). Бу фақат $a = 4$ да бўлиши мумкин; 2)тўғри бурчакнинг томонларидан бири айланани иккита нуқтада кесади, иккинчиси эса айлана билан A нуқтада(иккинчи ҳол) ёки B нуқтада уринади(учинчи ҳол).

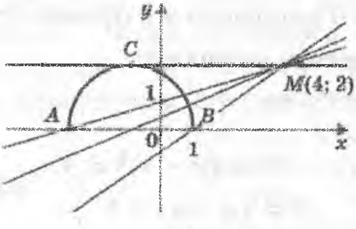


2-расм

Жавоб: $7 - 3\sqrt{2}$; 4; $1 + 3\sqrt{2}$.

3-Мисол. $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ тенглама ягона ечимга эга бўладиган а параметрнинг барча қийматларини топинг.

Е ч и ш. Тенгламани $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$ кўринишда ёзиб, $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ ва $y = -ax + 4a + 2$ функцияларнинг графикларини қараймиз.



3-расм

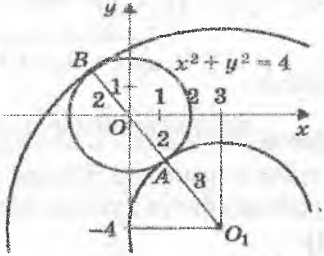
$y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ формуланинг ўнг томони манфий эмас, унда ва унинг чап томони манфий бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун $\begin{cases} y^2 = 3 - 2x - x^2, \\ y \geq 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0 \end{cases}$ га эга бўламиз.

$y = - ax + 4a + 2$ функциянинг графиги тўғри чизиқ бўлади. Равшанки, $y = - a(x - 4) + 2$ ва агар $x = 4$ десак, унда параметрга боғлиқ бўлмаган ҳолда $y = 2$ бўлади. шунинг учун $y = - ax + 4a + 2$ тўғри чизиқ параметрнинг исталган қийматида $M(4;\ 2)$ нуқтадан ўтади. Берилган тенглама фақат шу ҳолда ягона илдизга эга бўладики, агар бу тўғри чизиқ ярим айлана билан ягона умумий нуқтага эга бўлса.

Жавоб: $\{0\} \cup [-\frac{2}{3};\ -\frac{2}{7})$.

4-Мисол. $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. иккита ҳол бўлиши мумкин: ташқи уриниш ҳоли, унда айлана радиусларининг йиғиндиси марказлар чизиғи узунлигига тенг бўлади ва



4-расм

иккинчи ҳол ички уриниш, агар марказлар чизиғининг узунлиги радиуслар узунлиги айирмасининг модулига тенг бўлса. Шунинг учун, параметрнинг изланган қийматлари қуйидаги система билан берилади:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}+2=5 \\ |\sqrt{a}-2|=5 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}=3 \\ \sqrt{a}=7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9 \\ a=49 \end{array} \right.$$

Жавоб: $a = 9$, $a = 49$.

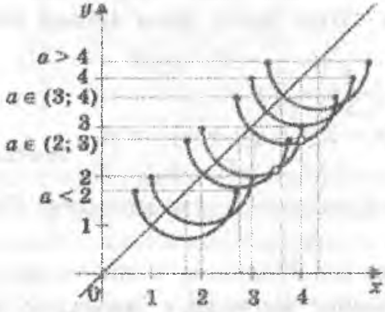
5-Мисол. $a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$ тенглама битта ечимга эга бўладиган а параметрнинг барча ҳақиқий қийматларини топинг.

Е ч и ш. Берилган тенгламани

$3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2} = a - \sqrt{1 - (x - a)^2}$ кўринишда ёзиб оламиз.

Oxy координата текислигида $y = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2}$ ва

$y = a - \sqrt{1 - (x - a)^2}$ функцияларнинг графикларини ясаймиз. (5-расм)



5-расм

$y = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - (x - 3)^2} = 3 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3, \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1 \end{cases}$, $y = a - \sqrt{1 - (x - a)^2} \Leftrightarrow$

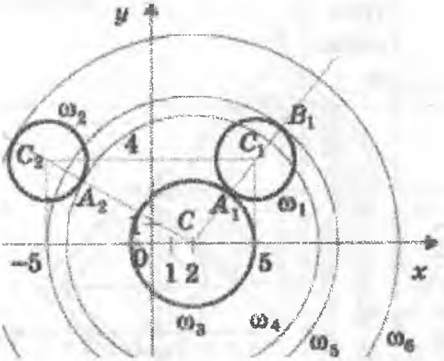
$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq a, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 1 \end{cases}$ алмаштиришларни бажарамиз.

Ҳосил бўлган система ягона ечимга эга бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агарда ярим айланалар битта нуқтада кесишса.

Жавоб: $a \in [2; 3) \cup (3; 4]$.

6-Мисол. $\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўладиган *a* параметрнинг барча мусбат қийматларини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг биринчи тенгламаси Oxy координата текислигида маркази $C_1(5;\ 4)$ ва $C_2(-5;\ 4)$ нуқталарда радиуси 2 га тенг бўлган иккита айланани ифодалайди. a параметрнинг мусбат қийматларида



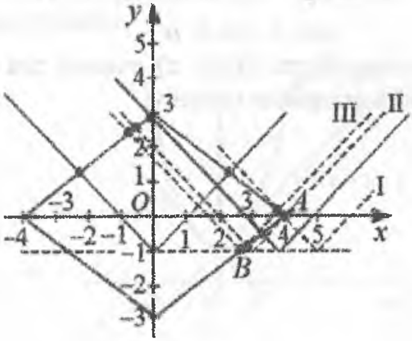
6-расм

тенгламалар системасининг иккинчи тенгламаси маркази $C(2;\ 0)$ нуқтада радиуси a га тенг бўлган айланани ифодалайди. $CC_1 = 5$, $CC_2 = \sqrt{65}$, $3 < \sqrt{65} - 2 < 7 < \sqrt{65} + 2$.

Жавоб: $a = 3$, $a = \sqrt{65} + 2$.

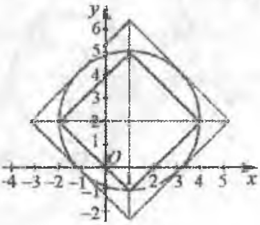
7-Мисол. $\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 4, \\ y = |x - a| - 1 \end{cases}$ тенгламалар системаси иккита ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. I. $a = 5$. II. $a = 3$. III. $a = \frac{8}{3} < 3$.



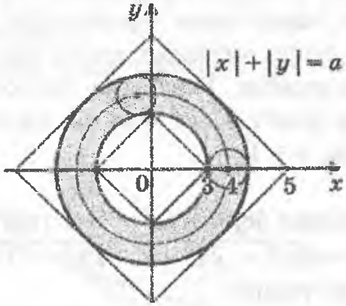
7-расм

Жавоб: (-5; - 3) $\cup\left(-\frac{8}{3};\ \frac{8}{3}\right)\cup$ (3; 5).

.	Масала	Ечими	Геометрик образи	Геометрик интерпретацияси	Жавоб
	$a\lvert x-1\rvert+a\lvert y-2\rvert=1,$ $x^2+y^2=2x+4y+4$ тенгламаларсистемасининг а нинг	$\lvert x-1\rvert+\lvert y-2\rvert=\frac{1}{a},(1)$ $(x-1)^2+(y-2)^2=9\ (2)$	(1) −(1; 2) марказли айлана; (2) −(1; 2) марказли, радиуси 3 га тенг		$a\in\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}};\ \frac{1}{3}\right\}$ да 4 та ечим; $a\in\left(\frac{1}{3\sqrt{2}};\ \frac{1}{3}\right)$ да 8та ечим; $a\in\left(-\infty;\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ да ечмим йўқ

8-Мисол. $\begin{cases}(x-4\sin z)^2+(y+4\cos z)^2=1,\\ \lvert x\rvert+\lvert y\rvert=a\end{cases}$ тенгламалар системаси ҳеч бўлмаганда битта (x; y; z) ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. z нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида системанинг биринчи тенгламаси маркази (x_0; y_0) нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган Оху текисликдаги ω айлана тенгламаси бўлади, бу ерда $x_0 = 4\sin z$, $y_0 = - 4\cos z$. $x_0^2 + y_0^2 = 16$ бўлганлиги учун ω айлананинг маркази ўз новбатида

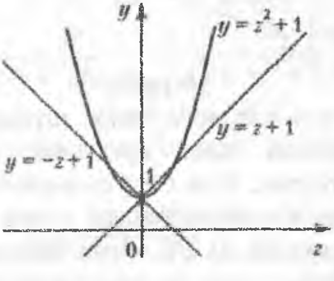


8-расм

маркази координата бошида ва ратиуси 4 га тенг бўлган айлана марказида ётади. Шунинг учун,координаталари берилган системанинг биринчи тенгламасини қаноатлантирувчи *Оху* текисликнинг барча (x; y) нуқталари тўплами маркази координаталар бошида ва радиуслари 3 ва 4 бўлган иккита концентрик айланалар ичидаги айлана бўлади.

Жавоб: [3; $5\sqrt{2}$].

9-Мисол. $|y - x^2 + 4x - 5| + |y^2 - x^2 + 4x - 2ay + a^2 - 4| = 0$ тенглама учта турли ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.



9-расм

Ечиш. Янги $z = x - 2$ ўзгарувчи киритамиз ва алмаштириш бажариб тенгламани $|y - 1 - z^2| + |(y - a)^2 - z^2| = 0$ кўринишга келтириб, тенг кучли $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = \pm z + a \end{cases}$ системани ёзамиз.

Биринчи тенглама zOy координаталар системасида учи (0; 1) нуқтада бўлган параболани ифодалайди, иккинчиси эса, иккита перпендикуляр тўғри чизиқдан ҳосил бўлган қийшиқ (0; a) крест чизиқларни ифодалайди. Равшанки, парабола учта умумий нуқтага эга бўлади, агар фақат крест маркази парабола ечими билан устма уст тушса. Демак, $a = 1$.

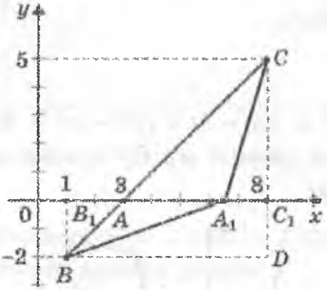
Жавоб: $a = 1$.

9. Радикалларда берилган кесма тенгламасини қўллаш

1-Мисол. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 16x + 89}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. илдиз остидаги ифодалардан тўла квадрат ажратамиз: $y = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(x-8)^2 + 25}$.

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган ҳолда абсцисса ўқининг $A(x;\ 0)$ нуқтадан фиксирланган координатали бирор нуқтасигача бўлган масофани беради. Шундай қилиб,



10-расм

масалани ечиш учун абсцисса ўқида шундай А нуқта топиш керакки, ундан берилган икки нуқтагача бўлган масофалар йиғиндиси минимал бўлсин. B ва C нуқтанинг ишорасини шундай танлаймизки, нуқталар абсцисса ўқидан турли томонда ётадиган бўлсин, яъни $B(1;\ -2)$ ва $C(8;\ 5)$. BC тўғри чизиқнинг тенгламасини топиш қийинт эмас (буни турли усуллар билан бажариш мумкин), яъни $y = x - 3$.

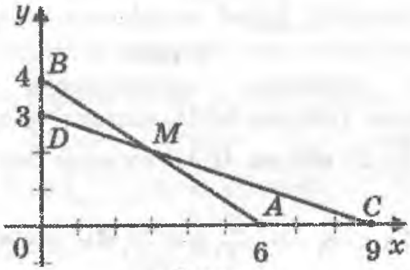
У ҳолда *A* нуқтанинг абсциссаси 3 га тенг, изланган мнимум эса $\sqrt{(3-1)^2+4}+\sqrt{(3–8)^2+25}=7\sqrt{2}$.

Жавоб: $7\sqrt{2}$.

2-Мисол. $$\begin{cases}\sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=2\sqrt{13},\\ \sqrt{(x-9)^2+y^2}-\sqrt{x^2+(y-3)^2}=3\sqrt{10}\end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. *Oxy* координаталар текислигида $A(6;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $C(9;\ 0)$, $D(0;\ 3)$



2-расм

нуқталарни қараймиз. Системани ечиш $MA + MB = 2\sqrt{13}$, $MC + MD = 3\sqrt{10}$ бўладиган барча $M(x;\ y)$ нуқталарни топишни англатади. Бироқ $AB=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$, $CD=\sqrt{9^2+3^2}=2\sqrt{10}$.

Шунинг учун *M* нуқтани *AB* ва *CD* кесмаларнинг кесишиш нуқтаси сифатидан топиш мумкин. $y=-\frac{2}{3}x+4$, бу *AB* тўғри чизиқнинг ва $y=-\frac{1}{3}x+3$, бу *CD* тўғри чизиқнинг тегламаси бўлади. Унда $-\frac{2}{3}x+4=-\frac{1}{3}x+3$ ва $x=3$ни топамиз. $y=-\frac{2}{3}\cdot 3+4=2$.

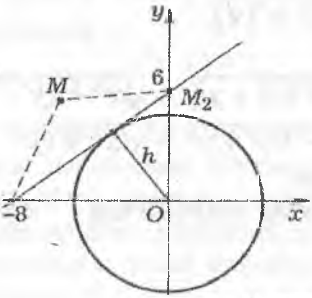
Жавоб: (3; 2).

3-Мисол.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10,\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўладиган *a* нинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. Системанинг биринчи тенгламасини $\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10$ кўринишда ёзамиз.



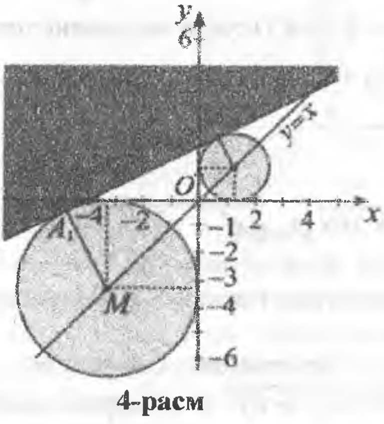
3-расм

Айлананинг қуйидаги вазиятларида масала шарти қаноатлантирилади: 1)айлана M_1M_2 кесмага уринади; бундай ҳолда $|a| = h = \frac{6\cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$; 2) айлана M_1M_2 кесмани битта нуқтада кесади; $6 < |a| \leq 8$.

Жавоб: $-8 \leq a < -6$, $a = -\frac{24}{5}$, $a = \frac{24}{5}$, $6 < a \leq 8$.

4-Мисол. $\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2 + (y-a)^2} \leq \frac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x - 2y \geq 1 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси ечимга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. Масалани ечишнинг асосий ғояси тенгсизликлар системасини геометриялаштиришдир.



4-расм

Системанинг биринчи тенгсизлиги нуқта ёки маркази $M(2a;\ a)$ нуқтада бўлган доирани беради. Бундай ҳолда радиус нолга тенг бўлади ва нуқтанинг координаталари(0; 0). Системанинг иккинчи тенгламаси $x - 2y - 1 = 0$ тўғри чизиқ билан чегарадош бўлган ярим текисликни ифодалайди.

Марказнинг координаталарини қўйиб a параметрнинг ҳар қандай қийматида $2a - 2a - 1 < 0$ бўлади, шунинг учун доиранинг маркази ярим текисликдан ташқарида ётади.

Агар доиранинг радиуси доира марказидан ярим текислик чегарасигача бўлган масофадан кичик бўлмаса, координаталари изланган ечим бўладиган доира ва ярим текислик умумий нуқтага эга бўлади. Демак, параметрнинг изланган қиймати $\frac{|a|}{6\sqrt{5}} \geq \frac{|2a-2a-1|}{\sqrt{5}}$ тенгсизликнинг ечими бўлади. бу тенгсизликни ечиб $\frac{|a|}{6\sqrt{5}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a| \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 6 \\ a \leq -6 \end{array}\right.$ га эга бўламиз.

Жавоб: $(-\infty;\ -6) \cup [6;\ +\infty)$.

5-Мисол. $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2, & (1) \\ 2y - x \geq 4 & (2) \end{cases}$ тенгсизликлар системаси a параметрнинг қандай қийматида ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлади?

Е ч и ш. Системанинг (1) тенгсизлигини қаноатлантирувчи Oxy текисликдаги НГЎ(нуқталарнинг геометрик ўрни) F_1, маркази $M(a;\ a)$ нуқтада ва радиуси $r = |a|$ бўлган доира бўлади.

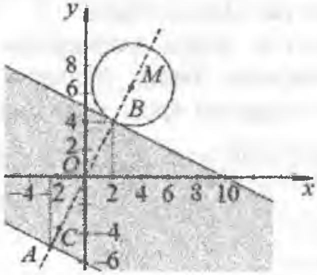
Системанинг (2) тенгсизлигини қаноатлантирувчи Oxy текисликдаги НГЎ(нуқталарнинг геометрик ўрни) F_2, $-x + 2y - 4 = 0$ чегарали юқори ярим текислик бўлади.

Берилган тенгсизликлар системаси ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлади, агар F_1 ва F_2 тўпламлар ҳеч бўлмаганда битта умумий нуқтага эга бўлса. Шундан сўнг $M(a;\ a)$ нуқтадан $-x + 2y - 4 = 0$ тенглама билан берилган ℓ тўғри чизиғигачи бўлган масофани топиш формуласини қўллаб $\rho(M, \ell) = \frac{|-a+2a-|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = |a|$ га эга бўламиз.

Жавоб: $(-\infty;\ -1-\sqrt{5}] \cup [-1+\sqrt{5};\ +\infty)$.

6-Мисол. $\begin{cases} |x+2y+1| \leq 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2 = 2+a \end{cases}$ тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Е ч и ш. Биринчи тенгсизлик Oxy текисликда $x + 2y = 10$ ва $x + 2y = - 12$ тўғри чизиқлар орасидаги йўлакдан иборат.



6-расм

$a < -2$ да тенгламалар системаси аниқланмаган. $a = -2$ да $(x+2)^2+(y+4)^2 = 0$ айлана тенгламаси $|-2 - 8 + 1| \leq 11$ бўлганлиги учун йўлакда ётувчи $C(-2; -4)$ нуқтани беради.

ω айлананинг $M(a;\ 2a)$ марказидан $x + 2y - 10 = 0$ тўғри чизиғигача бўлган масофа $r = \sqrt{2+a}$ радиусга тенг. Бундан $\frac{|a+4a-10|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{2+a}$ ёки $5a^2 - 21a + 18 = 0$. У ҳолда $a = 1{,}2$ ёки $a = 3$. Иккинчи ҳолда $\frac{|a+4a+12|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{2+a}$ тенглама ечимга эга бўлмайди.

$a = 1{,}2$ да M(1,2; 2,4) нуқта йўлак ичида, $a = 3$ да $M(3;\ 6)$ нуқта йўлакдан ташқарида ётади.

Жавоб: -2; 3.

10. Алгебрада векторли интерпретациялар

1-Мисол. $\sqrt{x^2-6x+10} + \sqrt{x^2-4x+8} = a$ тенглама ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўладиган а параметрнинг энг кичик қийматини топинг.

Е ч и ш. Масалани ечиш учун $a = \sqrt{x^2-6x+10} + \sqrt{x^2-4x+8} = \sqrt{(x-3)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2+4}$ функциянинг энг кичик қийматини топамиз.

$\vec{p} = \{3 - x; 1\}$ ва $\vec{q} = \{x - 2; 2\}$ векторларни киритамиз. У ҳолда $|\vec{p}| = \sqrt{(x-3)^2+1}$, $|\vec{q}| = \sqrt{(x-2)^2+4}$, $\vec{p} + \vec{q}$ вектор $\{1; 3\}$ координаталарга эга ва $|\vec{p} + \vec{q}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.

Шунинг учун $|\vec{p}| + |\vec{q}| \geq |\vec{p} + \vec{q}|$ тенгсизлик ва $a = |\vec{p}| + |\vec{q}|$ тенгликдан $a \geq \sqrt{10}$ га эга бўламиз. Охирги тенгсизлик фақат $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ векторлар йўналишдош бўлганда тенгликка айланади.

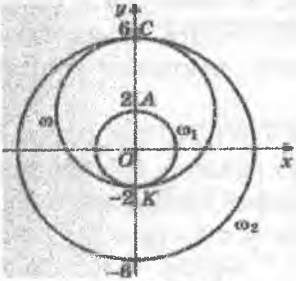
Бироқ $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$ шарт фақат ва фақат $\frac{3-x}{x-2} = \frac{1}{2}$ бўлганда бажарилади. Охирги тенгламанинг илдизи $x = \frac{8}{3}$ бўлади.

Демак, $a = \sqrt{x^2-6x+10} + \sqrt{x^2-4x+8}$ функция энг кичик қийматга эришади ва $\sqrt{10}$ га тенг бўлади.

Жавоб: $\sqrt{10}$.

2-Мисол. $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^2+(y-2)^2=16 \end{cases}$ тенгламалар системаси битта ечимга эга бўладиган a параметрнинг барча қийматлари кўпайтмасини топинг.

Ечиш. Система $a = 4$ ва $a = 36$ битта ечимга эга эканлигини топамиз.



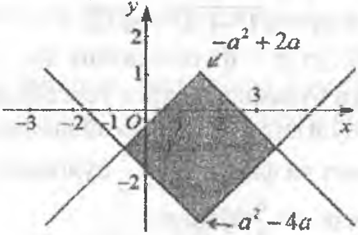
2-расм

Жавоб: 144.

3-Мисол. $\begin{cases} y \geq |x-a| + a^2 - 4a, \\ y \leq -|x-a| - a^2 + 2a \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан берилган шакл a нинг қандай қийматларида энг катта юзага эга бўлади? Шу юзани топинг.

Ечиш. Биринчи тенгсизлик координата текислигида учи $(a;\ a^2 - 4a)$ нуқтада бўлган тўғри бурчакни, иккинчи тенгсизлик $(a; -a^2 + 2a)$ учли тўғри бурчакни ифодалайди (3-расм).

Умумий қисми - $a^2 + 2a \geq a^2 - 4a$) шартда(умумий ҳолда квадрат) бўлади. Бундан $a \in [0; 3]$.



3-расм

Квадратнинг диагонали

$d = |(-a^2 + 2a) - (a^2 - 4a| = |2a^2 - 6a|$ га тенг.

Квадратнинг $S(a) = \frac{1}{2}d^2 = 2(a^2 - 3a)^2$ юзи [0; 3] оралиқда $a = \frac{3}{2}$ да энг катта $\frac{81}{8}$ қийматни қабул қилади.

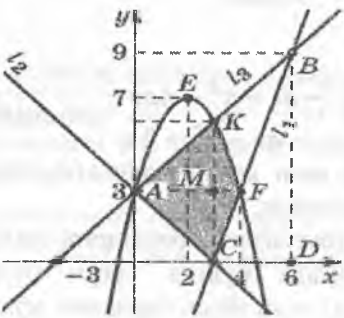
Жавоб: $a = \frac{3}{2}$; $S = \frac{81}{8}$.

4-Мисол. G учбурчак $y - 3x + 9 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $y - x - 3 = 0$ тенгламаларга мос ℓ_1. ℓ_2, ℓ_3 тўғри чизиқларнинг кесишиши натижасида ҳосил қилинган, Ф шакл эса t параметрнинг барча қийматларида $t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$ тенгсизлик бажариладиган G тўпламнинг нуқталари тўплами бўлсин. Ф шаклнинг юзини топинг.

Ечиш. $t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$ тенгсизлик барча $t \in \mathrm{R}$ учун бажарилади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар чап томондаги квадрат учҳаднинг дискриминанти манфий бўлса,яъни

$(x-2)^2 - (7-y) < 0$ ёки $y < 7 - (x-2)^2$.

4-расм



Агар Ф шаклнинг юзини S десак, унда ACF учбурчакнинг юзи S_1, AKM учбурчакнинг юзи S_2, бу ерда $M(3;\ 3)$ нуқта AF ва KC нинг кесишиш нуқтаси, KMF учбурчакниг юзи S_3 бўлади.

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, $S_2 = \frac{9}{2}$,

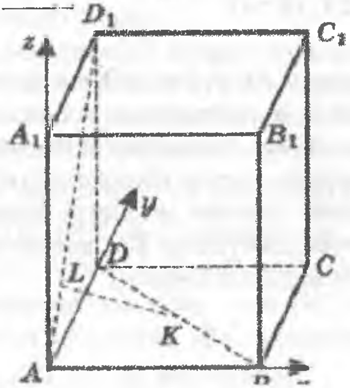
$$S_3 = \int_3^4 (-x^2 + 4x)dx = (2x^2 - \frac{x^2}{3})|_3^4 = \frac{5}{3}, \text{ унда } S = \frac{73}{6}.$$

Жавоб: $\frac{73}{6}$.

5-Масала. $A\ldots D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда $AA_1 = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. $ABCD$ ёқдаги BD диагонал ва AA_1D_1D ёқдаги AD_1 диагонал орасидаги масофани топинг. Бу тўғри чизиқларга ўтказилган умумий перпендикуляр BD ва AD_1 кесмани қандай нисбатда бўлади?

Ечиш. Координаталар системасини киритамиз ва чизмани бажарамиз (5-расм).

AD_1 ва BD кесмада мос равишда L ва K нуқталарни қўямиз. Бу нуқталар бир бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ўз кесмаси бўйича силжиши мумкин. L нуқта $t = 0$ вақтда $A(0;\ 0;\ 0)$ нуқтада, $t = 1$ да эса $D_1(0;\ 4;\ 2)$ нуқтада бўлсин.



5-расм

Ихтиёрий t вақтда AD_1 кесмадаги L нуқта

$((0;\ 0;\ 0)\cdot(1 - t) + (0;\ 4;\ 2)\cdot t)$ ёки $L(0;\ 4t;\ 2t)$ координаталарга эга бўлади. шунга ўхшаш BD кесмадаги K нуқтанинг $K(3q;\ 4(1 - q);\ 0)$ координаталарини топамиз, бу ерда q вақт; $q = 0$ да K нуқта $D(0;\ 4;\ 0)$ нуқтада, $q = 1$ да $B(3;\ 0;\ 0)$ нуқтада бўлади.

Равшанки, иккита айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа, бу бу тўғри чизиқларга ўтказилган умумий перпендикулярнинг узунлигидир. LK векторнинг узунлигини топамиз

$\overline{LK}=\{3q; -4t + 4(1 - q); - 2t)\}$ вектор $\overline{AD_1}=\{0; 4; 2)\}$ ва

$\overline{BD}=\{- 3; 4; 0)\}$ векторларга перпендикуляр.

Векторларнинг перпендикулярлик шарти бу,скаляр кўпайтманинг нолга тенг бўлишидир. Бизнинг векторларимиз учун $\overline{LK}\cdot\overline{BD} = - 9q - 16t + 16(1 - q) = - 25q - 16t +16 = 0$,

$\overline{LK}\cdot\overline{AD_1} = - 16t + 16(1 - q) - 4t = - 20t - 16q + 16 = 0$ ни ҳисоблаб

$\begin{cases} \overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{BD} = -25q - 16t + 16 = 0, \\ \overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{AD_1} = -20t - 16q + 16 = 0 \end{cases}$ системани тузамиз. Бу системани ечиб $t = \frac{36}{61}$, $q = \frac{16}{61}$ га эга бўламиз. Изланган масофа t ва q нинг топилган қийматларида LK векторнинг узунлигига тенг бўлади: $LK^2 = 9\cdot(\frac{16}{61})^2 + 16\cdot(\frac{9}{61})^2 + 4\cdot(\frac{36}{61})^2 = \frac{144}{61}$. $LK = \frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$. Изланган муносабат, бу $AL : LD_1 = t : (1 - t) = 36 : 25$ ва

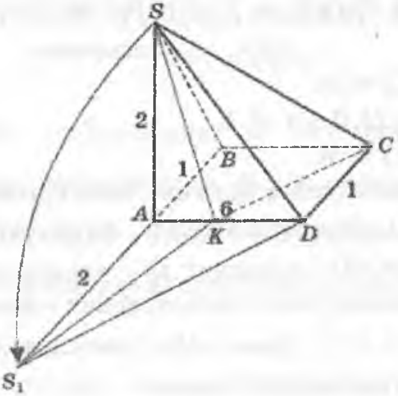
$DK : KB = q : (1 - q) = 16 : 45$.

Жавоб: $\frac{12\sqrt{61}}{61}$, 36 : 25, 16 : 45.

6-Масала. Томонлари $AB = 1$ ва $AD = 6$ га тенг бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак $SABCD$ пирамиданинг асоси, $SA = 2$ қирра эса пирамиданинг баландлиги. Асосининг катта томонида ётган нуқта ва пирамиданинг узун қирраси орқали текислик шундай ўтказилганки, ҳосил бўлган пирамиданинг кесими энг кичик периметрга эга. Кесим AD томонни қандай нисбатда бўлади? Кесимнинг юзини ҳисобланг.

Е ч и ш. Чизмани бажарамиз (6-расм).

K нуқтани *AD* кесмада шундай қўямизки, $t = 0$ бошланғич вазиятда А нуқтада, $t = 1$ да эса *D* нуқтада; t нинг ўн дан 1 гача бўлган қийматларида А дан четлашиш 6t, *D* дан 6(1 - *t*) ни ташкил этади. *KS* ва *KC* йиғинди минимал бўлганда *KSC* кесимнинг периметри минимал бўлади. *ASD* учбурчакни *AD* ўқ атрофида асос текислигига бурсак AS_1D учбурчак ҳосил бўлади.



6-расм

K нуқта ўз ҳаракатида S_1K кесманинг давомидан *KC* билан устма уст тушгандаги нуқтага ўтади. Бундай ҳолатда босиб ўтилган *S* дан бошлаб йўл узунлиги *K* нуқтадан *C* нуқтага ўтганда минимал бўлади. *AK* кесмани S_1AK ва S_1BC учбурчакларнинг ўхшашлигидан топамиз, яъни $AK = 4$. *t* бу қийматида $\frac{2}{3}$ га тенг бўлади.

$AK : KD = t : (1 - t) = 2 : 3$. Томонларнинг

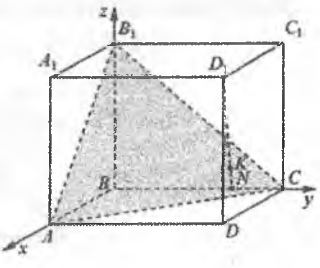
$SC = \sqrt{41}$, $SK = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $KC = \sqrt{5}$ узунлигини ҳисоблаймиз ва косинуслар теоремасига кўра $\cos SKC = - 0{,}8$ га эга бўламиз, демак унинг синуси 0,6 га тенг. *SKC* кесимнинг юзи

$\frac{1}{2}SK\cdot KC\cdot \sin\angle SKC = 3$ га тенг бўлади.

Жавоб: 2:3; 3.

7-Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипеднинг *BC* қиррасида олинган *N* нуқта учун

$BN{:}NC = 2 : 1$тенглик ўринли. Агар $AB = 3$, $BC = 6$, $AA_1 = 5$ бўлса AB_1C текислик ND_1 кесмани қандай нисбатда бўлади?



Е ч и ш. Маркази B нуқтада ва Ox, Oy, Oz ўқлари мос равишда BA, BC, BB_1 қирралар каби йўналган тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз (1-расм). У ҳолда N, D_1, A, B_1, C нуқталар $N(0; 4; 0)$, $D_1(3; 6; 5)$, $A(3; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 5)$, $C(0; 6; 0)$ координаталарга эга бўлади. ND_1 кесманинг тенгламасини

$$x(t) = 3t,$$

ёзамиз: $y(t) = 4 + 2t, 0 \le t \le 1,.$

$$z(t) = 5t$$

AB_1C текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{5} = 1$ кўринишни олади. Бунга $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ нинг қийматларини қўйиб ND_1 кесманинг AB_1C текислик билан кесишган K нуқтаси учун t параметрнинг қийматларини топамиз:

$\frac{3t}{3} + \frac{4+2t}{6} + \frac{5t}{5} = 1$, $t = \frac{1}{7}$. Демак, AB_1C текислик ND_1 кесмани $NK : KD_1 = 1 : 6$ нисбатда бўлади.

Жавоб: N нуқтадан бошлаб 1 : 6 нисбат.

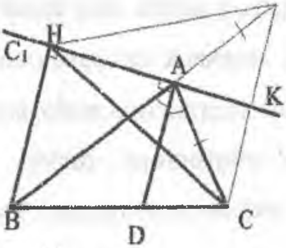
4. МАСАЛА ЕЧИМИНИ ТАҲЛИЛ ҚИЛИШГА ЎРГАТИШ - ТАЛАБАЛАР ИЖОДИЙ ФИКРЛАШИНИ РИВОЖЛАНТИРИШНИНГ АСОСИЙ КОМПОНЕНТИ СИФАТИДА

1-масала. ABC учбурчакнинг A учи орқали A бурчакнинг биссектрисасига перпендикуляр, B учи орқали эса бу чизиққа ВН перпендикуляр туширилган. ВСН учбурчакнинг периметрини АВС учбурчакнинг периметридан ортиқ эканлигини исботланг
[2, № 345].

Исбот. ҳар иккала учбурчакнин периметрлари учун $BH + HC > AC + AB$ ўринли эканлигини исботлаш керак бўлади.

BA нурда A нуқтанинг давомидан AC кесмага тенг AC_1 кесма қўямиз (1-расм). Равшанки, BHC_1 учун $BH + HC_1 > BC_1 = BA + AC$ учбурчак тенгсизлиги ўринли. Энди $HC_1 = HC$ эканлигини исботлаш қолди. Ясашга кўра ΔCAC_1 учбурчак тенг ёнли. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ҳақидаги хоссага кўра $\angle BAC = \angle ACC_1 + \angle AC_1C = 2\angle AC_1C$ ёки $\angle AC_1C = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BAD$, бундан CC_1 ва AD тўғри чизиқларнинг параллелиги келиб чиқади(мос бурчакларига кўра).

Равшанки, HA параллел чизиқларнинг бири AD га перпендикуляр, унда у иккинчи CC_1 га ҳам перпендикуляр бўлади.



1-расм

CAC_1 тенг ёнли учбурчакда AK кесма баландлик, демак у медиана ҳам бўлади. AK кесма HK кесманинг бўлаги, унда CHC_1 учбурчакда HK медиана ва баландлик бўлади, демак ΔCHC_1 тенг ёнли ва $HC_1 = HC$.

Шундайқилиб, $BH + HC_1 > BC_1$, $BH + HC > AC + AB$, $BC + HB + HC > BC + AC + BA$, у ҳолда $P_{\Delta BCH} > P_{\Delta ABC}$ бўлади.

Биз масала ечишда қандай назарий материаллардан фойдаландик?.

1) Масаланинг ечимини излашда иш огирроқ кечган босқич иккинчи қадам бўлди. Қўшимча ясаш ҳақидаги фикр қандай пайдо бўлади?. Кесмалар йиғиндисини битта кесма узинлиги билан таққослашга имкон берувчи учбурчак тенгсизлиги ҳақида теорема бор. Демак, керакли учбурчакни ҳосил қилишга ҳаракат қилинади. Нега BHC синиқ чизиқни тўғриладик, BAC ни эмас?. Чунки BH ва HC кесмалар ёки уларга тенг бўлган кесмалар учбурчакнинг томонлари бўлиши шарт, акс ҳолда бизга керак бўлган тенгсизликка эга бўлмай қоламиз;

2) HC_1 ва HC кесмаларнинг тенг бўлишини бошқа усул билан исботлаш мумкин: масалан, $\angle CAK = \angle C_1AK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ эканлигини кўрсатиш мумкин, у ҳолда тенг ёнли учбурчакда AK – биссектриса бўлади, демак, медиана ва баландлик ҳам бўлади; AHC ва AHC_1 учбурчакларнинг тенглигини исботлаш мумкин.

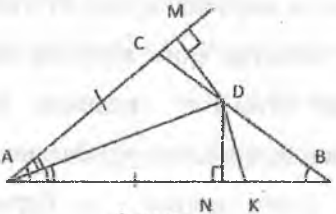
3) Масала ечимининг бирор жойида BH ва AH тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шартидан фойдаланилмади. A

бурчак биссектрисасига перпендикуляр бўлган l тўғри чизиқда H нуқта белгилаймиз, топилган ечим агар BHC мавжуд бўлган ва ABC учбурчак билан тенг бўлмаган тақдирда бизга керак бўлиши мумкин. Шундай қилиб, масалани қуйидагича ифодалаш мумкин: ABC учбурчакнинг A учи орқали A бурчак биссектрисасига перпендикуляр бўлган l тўғри чизиқ ўтказилган. Агар H нуқта l тўғри чизиқда ётиб A ва l тўғри чизиқ ва BC нинг кесишиш нуқтаси билан устма-уст тушмаса, яъни улар параллел бўлмаса, унда BHC учбурчакнинг периметрини BHC учбурчакнинг периметридан катта эканлигини исботланг. Кўриниб турибдики, масала ечиш жараёнида 7-синфда ўрганилган барча материаллардан фойдаланиш мумкин, уни турли усуллар билан ечиш мумкин, унда ечимга мантиқан олиб келувчи қўшимча ясаш талаб этилади. Буларнинг ҳаммаси масала шартини қизиқарли ва фойдали бўлишига йўналтиради.

2 –масала. A ва B бурчаклари 40° га тенг бўлган ABC учбурчак берилган. AD – кесма учбурчакнинг биссектрисаси. $AD+CD=AB$ эканлигини исботланг.

Ечиш.

AB томонга AD га тенг AK кесма қўямиз. Энди $KB=CD$ ни исботлаш керак бўлади(2-расм).



2-расм

Ясашга кўра ADK, учидаги бурчаги 20° га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак, у ҳолда $\angle AKD = \angle ADK = 80^0$. AKD бурчак – BKD учбурчакнинг ташқи бурчаги, ва $\angle DKA = \angle DBK + \angle BDK$, бундан $\angle BDK = \angle DBK = 40^o$ келиб чиқади, яъни ΔBDK - аломатга кўра тенг ёнли ва $KB = KD$. CAB бурчакнинг томонларига DM ва DN перпендикулярларни ясаймиз ва бурчак биссектриссасининг хоссасига кўра $DM = DN$. $\angle MCD = \angle NKD = 80^o$, $\angle MDC = \angle NDK = 10^\circ$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Катети ва унга ёпишган ўткир бурчагига кўра MDC ва NDK тўғри бурчакли учбурчаклар тенг, у ҳолда уларнинг гипотенузалари тенг, яъни $CD = KD$. $KB = KD$ ва $CD = KD$ тенгликлардан $KB = CD$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $AD + CD = AK + KB = AB$.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

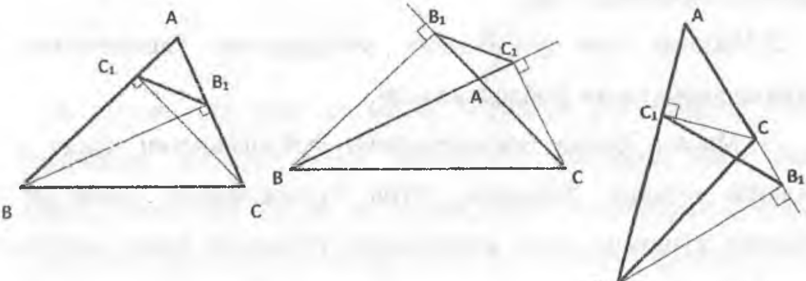
Бу ерда биринчи масала сингари қўшимча ясашлар талаб этилди. Бироқ, шунга қарамасдан, кесмалар йиғиндиси муҳим рол ўйнади, қўшимча ясашлар турлича бажарилди. Қуйидаги эвристик ёндошувни киритамиз: агар иккита кесманинг йиғиндисини учинчисига, шунингдек маълум кесмага тенглигини исботлаш талаб этилган бўлса, унда кесманинг учидан қўшилувчиларнинг бирортасига тенг бўлган кесма қўйиш ва кесманинг қолган қисмини иккинчи қўшилувчига тенг бўлишини исботлаш мумкин.

Равшанки, $a-b=c$ ва $a=c+b$ тенгликлар тенг кучли, агар икки кесманинг айирмасини учинчисига тенглигини исботлаш талаб этилган бўлса унда юқоридагига ўхшаш ёндошув таклиф этилади. Масала ечишда кесмаларнинг (бурчаклар) тенглиги ҳақида хулоса чиқариш аломатларга кўра учбурчакнинг тенг ёнли бўлиши ёки учбурчакларнинг тенглигига асосланади. Масалада ҳар иккаласи қўлланилди. DM ва DN кесмаларнинг тенглиги DAM ва DAN учбурчакларнинг тенглигидан осонгина келиб чиқади.

3 - масала. ABC тўғри бурчакли учбурчакда BB_1 ва CC_1 баландликлар туширилган. AB_1C_1 учбурчакнинг ABC учбурчакка $k=|\cos A|$ коэффициент билан ўхшаш бўлишини исботланг.

Ечиш. ABC учбурчак ўткир бурчакли ва ўтмас бурчакли бўлиши мумкин. Шунинг учун учта ҳол бўлиши мумкин

(3 – расм а, б, в).



а) б) в)

3 – расм

$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$ (иккита бурчагига кўра), у ҳолда $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{CC_1}$ (ўхшаш учбурчакларнинг таърифига кўра). Бу тенгликдан $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ пропорцияни ёза оламиз. AB_1C_1 ва ABC учбурчакларда A бурчак умумий ва бу бурчакнинг томонлари пропорционал. Демак,

$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Агар $k-$ ўхшашлик коэффициенти бўлса, унда $k = \frac{AB_1}{AB}$. Бироқ $\frac{AB_1}{AB} = \cos A$ (*а* ва *в* - ҳоллар) ёки $\frac{AB_1}{AB} = \cos(180^o - A) = -\cos A$ (*б* - ҳол). Шундай қилиб, агар $A < 90°$ бўлса, унда $\cos A < 0$ ва $-\cos A > 0$, ва $|\cos A| = \cos A$; агар $A > 90°$ бўлса, унда $\cos A < 0$ и $-\cos A > 0$, ва $|\cos A| = -\cos A$. Демак, $k = |\cos A|$.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

1) Юқорида келтирилган ечим учбурчакнинг қандай кўринишда берилишига боғлиқ эмас.

2) Исботда кам учрайдиган учбурчаклар ўхшашлигининг иккинчи аломатидан фойдаланилади.

3) Масала бошқа элементлардан фойдаланилган ҳолда ҳам ечилиши мумкин. Масалан, тўғри бурчакларнинг мавжудлиги қуйидаги қўшимча ясаш мумкинлиги тўғрисида фикр юритишга имкон беради: бу ерда B, C, B_1, C_1 нуқталар битта айланада ётади, A, B_1, C_1 нуқталар ва баландликлар кесишган нуқта ҳам битта айланада ётади. Юқорида берилган ечим эса ихчамроқ ҳисобланади.

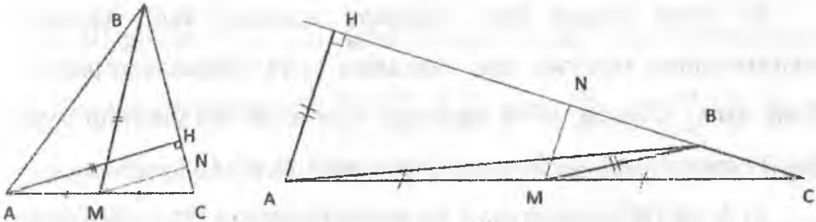
4) AB_1C_1 ва ABC учбурчакларнинг ўхшашлигидан бурчаклар тенг деган хулосага келиш мумкин.

5) Агар учинчи AA_1 баландликни туширсак, унда у биринчи иккитасининг кесишиш нуқтасидан ўтади ва бу нуқта ортоцентрик дейилади ва $A_1B_1C_1$ - учбурчак эса ортоцентрик дейилади.

Учинчи масалада исботланган факт, берилган учбурчак ва ортоцентрик учбурчаклардаги бурчаклар (томонлар) орасида боғланишлар ўрнатишга имкон беради, бу ўз навбатида бир қанча масалаларни пайдо бўлишига олиб келади.

4-масала. ABC учбурчакнинг BM медианаси унинг AH баландлигига тенг. MBC бурчакни топинг.

Ечиш. 1. MBC учбурчак уткир бурчакли ва ўтмас бурчакли бўлиши мумкин. Шунинг учун иккита ҳолни қараймиз (4 а, б-расм).



а) б)

.4-расм

2. BM ва AH тенг кесмалар берилган учбурчаклар билан боғланмаган. Шунинг учун қуйидагича қўшимча ясаш талаб этилади: томонлари BM ва AH га тенг ёки бу кесмаларнинг маълум қисмларига тенг бўлган учбурчак ҳосил қилиш керак бўлади. Бундай ясаш M нуқтанинг AC нинг ўртаси бўлишидан дарак беради: M нуқта орқали AH га параллел бўлган MN кесмани ўтказамиз. У ҳолда $MN \perp BC$ (тўғри чизиқларнинг параллелиги ҳақидаги хоссасига кўра) ва $MN = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}BM$ (нима учун тенг бўлишини тушинтиринг).

3. Тўғри бурчакли BMN учбурчак MN катет BM гипотенузанинг ярмига тенг. У ҳолда тўғри бурчакли учбурчакка оид хоссага кўра, $\angle MBN = 30^o$, бироқ $\angle MBC = 30^o$ (4, а-расм) ёки $\angle MBC = 180^o - 30^o = 150^o$
(4, б-расм).

Жавоб. 30^o ёки 150^o.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

Агар шартда биттаси медиана бўлган учбурчакнинг иккита тенг элементи берилган бўлса, унда медиананинг учи орқали (кесманинг ўртасига) иккинчи элементига параллел бўлган тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

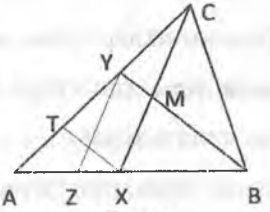
Бу ерда бошқа бир стандарт ясашни, яъни медианани иккилантириш мумкин эди. Масалан, $ABCD$ параллелограмга эга бўлар эдик. Сўнгра AH га параллел бўлган DK ни ўтказиш мумкин эди, бу ерда $K \in BC$. Бу усулда кўпроқ вақт талаб қилинар эди.

1) Агар учбурчакда икки кесманинг нисбати берилиб бурчакни топиш талаб этилган бўлса, унда қуйидаги кўринишдаги учбурчаклардан бирининг элементи бўлишининг эҳтимоли йўқ эмас: катет гипотенузадан икки марта кичик бўлган тенг томонли, тўғри бурчакли тенг ёнли ёки тўғри бурчакли.

5-масала. ABC учбурчакда X нуқта AB томонни A нуқтадан бошлаб $5:6$ нисбатда бўлади. Y нуқта AC томонда ётади ва B нуқтадан бошлаб BY кесма XC кесма билан $3:1$ нисбатда бўлинади. $AY:YC$ ва $CM:MX$ нисбатни топинг, бу ерда M нуқта CX ва BY тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси.

Ечиш. Шартга кўра ABC учбурчакда $X \in AB$, $AX:XB=5:6$, $Y \in AC$, CX ва BY M нуқтада кесишади ва $BM:MY=3:1$ (5-расм). $AY:YC$ ва $CM:MX$ нисбатни топинг.

1. Битта нисбатни иккинчиси билан алмаштириш учун Y нуқта орқали СХ га параллел бўлган YZ тўғри чизиқни ўтказамиз ва қуйидаги пропорцияга эга бўламиз: $\frac{AY}{YC}=\frac{AZ}{ZX}$ (1) ва $\frac{ZX}{BX}=\frac{YM}{BM}=\frac{1}{3}$



5-расм

2. (2). Шартдан, $\frac{BX}{AX}=\frac{6}{5}$ (3) келиб чиқади. (2) ва (3) пропорциялардан, бир бирига кўпайтириб $\frac{ZX}{BX}\cdot\frac{BX}{AX}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}$, ёки $\frac{ZX}{AX}=\frac{2}{5}$, $\frac{AX}{ZX}=\frac{5}{2}$ га эга бўламиз. Охирги тенгликнинг ҳар иккала томонидан (1) ни айирсак, соддалаштириб $\frac{AX-ZX}{ZX}=\frac{5-2}{2}$; $\frac{AZ}{ZX}=\frac{3}{2}$ га эга бўламиз. (1) ни ҳисобга олсак $\frac{AY}{YC}=\frac{3}{2}$ га эга бўламиз.

3. Энди $XT \| BY$ ни ясаймиз (5-расм). $CM:MX$ нисбатни унга тенг бўлган $CY:YT$ нисбат билан алмаштирамиз $CY:YA=2:3$ пропорцияга эга бўламиз (ечимнинг 1-бандига қаранг). $AY:YT=AB:BX=11:6$ (шартдан келиб чиқади). Ниҳоят : $\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AY}{YT}=\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{6}=\frac{11}{9}$, яъни $\frac{CY}{YT}=\frac{11}{9}=\frac{CM}{MX}$

.

Жавоб. $AY:YC=3:2$; $CM:MX=11:9$.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

1) X, Y ва M нуқта тўртта нисбатни беради, яъни X нуқта AB кесмани, Y нуқта AC кесмани, M – нуқта CX ва BY кесмани бўлади. Агар бу нисбатларнинг иккитаси берилса, унда қолган иккитасини топиш мумкин бўлади.

2) Агар кесмаларни нисбатини топиш ёки кесмаларнинг пропорционаллигини исботлаш талаб этилган бўлса, унда томонлари параллел тўғри чизиқлар билан кесишувчи бурчак ҳосил қилиш учун, нуқта орқали берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказишга ҳаракат қилиш керак.

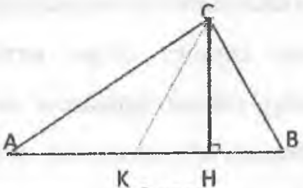
Бу масалада CX ва BY параллел тўғри чизиқларни ўтказамиз. Баъзан битта тўғри чизиқ етарли (1-бандга қаранг), баъзан иккита тўғри чизиқ керак бўлади(2-бандга қаранг).

3) Масала ечишнинг муҳим жиҳати пропорциядан унинг кўпайтмасини топишдан иборат. Масалан, агар $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ тенглик рост бўлса, унда қуйидагилар ҳам рост бўлади: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}, \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \frac{c}{a}=\frac{d}{b}, \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $, \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}, \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}, \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}, \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ва бошқалар.

6-масала. 2 см га тенг бўлган учбурчакнинг баландлиги учбурчакнинг бурчагини $2:1$ нисбатда бўлади ва учбурчак асосининг кичик томони узунлиги 1 см га тенг бўлса, шу учбурчакнинг юзини топинг.

Ечиш.

Айтайли ABC учбурчакда CH баландлик, $CH=2$ см, $\angle ACH=2\angle HCB$, $HB=1$см бўлсин (6-расм).



6-расм

1. ACHучбурчакнинг CH биссектрисасини ўтказамиз, у ҳолда $\angle ACK=\angle KCH=\angle HCB$ га эга бўламиз.

2. KCB учбурчакда CH баландлик биссектриса бўлади, демак, ΔKCB тенг ёнли ва унда CH медиана, яъни $KH=HB=1$ см.

3. CK биссектрисанинг хоссасига кўра $CA:AK=CH:HK$, ёки $CA:AK=2:1$, яъни $CA=2AK$.

4. Ёзувларни ихчамроқ бўлиши учун қуйидагича белгилаш киритамиз: $AK=x$, $CA=2x$.

ACH тўғри бурчакли учбурчакда: $AC=2x$, $AH=x+1$, $CH=2$. Унга Пифагор теоремасини қўллаб $(x+1)^2+2^2=(2x)^2$тенгламанга эга бўламиз ва уни $3x^2-2x-5=0$ кўринишда ёзамиз. Тенглама -1 ва $\frac{5}{3}$ илдизга эга. Шундай қилиб, $AK=\frac{5}{3}$ см, $AB=AK+KB=\frac{5}{3}+2=\frac{11}{3}$(см).

5. $S=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{11}{3}$ см^2.

Жавоб. $\frac{11}{3}$ см^2.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

1) 1-4 масалалар конструктив методи ёрдамида ечилди (ёки уни синтетик ечим деб айтамиз). 5 ва 6 масалалар алгебраик метод ёрдамида ечилди. 5 масалага тўғри ҳисоб қўлланилди, 6 масалада эса квадрат тенгламани ечишга тўғри келди. Бошқа масалаларда чизиқли тенгламалар, юқори даражали тенгламалар, тенгламалар, тенгсизликлар системаси қўлланилиши мумкин.

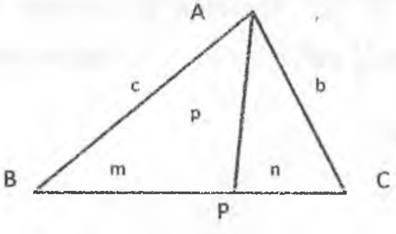
2) Шартдаги бурчакларнинг бири иккинчисидан икки марта катталиги, катта бурчакнинг биссектрисасини ясаш керак деган фикрни илгари суради. Бундай фикр ўзини оқлади: иккала учбурчакда биссектрисалар ҳосил қилинди ва натижага олиб келувчи уларнинг турли хоссаларидан фойдаланилди.

3) Равшанки, Пифагор теоремаси нафақат кесманинг узунлигини топишда, балки тенгламани ҳосил қилиш учун ҳам қўлланилади.

7-масала. ABC учбурчак ва унинг BC томонида P нуқта берилган. $AP = p$ кесманинг узунлигини $AB = c$, $AC = b$, $BP = m$, $PC = n$ кесмалар орқали ифодаланг.

Ечиш.

1. AP кесма ABP ва ACP учбурчаклар учун умумий томон, APB ва APC лар қўшни бурчаклар (7-расм). $\angle APB = \alpha$, $\angle APC = 180^\circ - \alpha$ бўлсин.



7-расм

Бу бмасига кўра қуйидагича ёзамиз:

$c^2 = p^2 + m^2 - 2mp \cdot \cos\alpha$, $b^2 = p^2 + n^2 - 2np \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$, яъни

$b^2 = p^2 + n^2 + 2np \cdot \cos\alpha$.

2. Биринчи тенгликни n га, учунчисини эса m га кўпайтирамиз ва қўшиб юборамиз:

$$b^2 m + c^2 n = p^2(m+n) + mn(m+n).$$

Равшанки, $m + n \neq 0$, унда тенгликнинг ҳар иккала томонини $(m+n)$га бўлиб жавобни топамиз.

Жавоб. $p^2 = b^2 \frac{m}{m+n} + c^2 \frac{n}{m+n} - mn$.

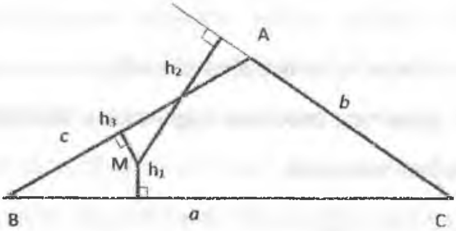
Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

1) Кесмалар орасидаги боғланишларни топиш учун косинуслар теоремасидан фойдаланиш мумкин эди. Бунда изланган кесма учун ёзилмасдан балки маълум кесма учун ёзишга тўғри келар эди (7-масаладагидек).

2) Масалада олинган фактни биринчилардан англялик математик М.Стюарт топган ва ўзининг «Некоторые общие теоремы» номли асарида 1746 йилда чоп этган. Яратилган бу теорема Стюарт номини олди.

3) Агар ABC учбурчакда AP медиана бўлса, унда $n=m=\frac{1}{2}a$ бўлади. Агар AP биссектриса бўлса, унда $c:b=m:n$ и $\frac{m}{m+n} = \frac{c}{b+c}$, $\frac{n}{m+n} = \frac{b}{b+c}$ (7-масаладаги белгилашга кўра). Стюарт теоремасини қўллаб, ёки 7-масалага ўхшаш муҳокама юритсак қуйидагига эга бўламиз: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $l_a = bc - mn$.

8-масала. Турли томонли учбурчак ичида олинган ихтиёрий нуқтадан учбурчакнинг томонлари ётган тўғри чизиқларгача бўлган масофалар йиғиндиси, учбурчакнинг энг катта ва энг кичик баландликлари орасида бўлишини исботланг.



8-расм.

Ечиш. ΔABC учбурчакнинг томонлари a, b, c баландликлари, h_a, h_b, h_c ички нуқтаси M, М нуқтадан учбурчак томонлари ётган тўғри чизиқларгача бўлган масофалар h_1, h_2, h_3 бўлсин (8-расм).

Аниқлик учун $h_a \le h_b < h_c$ деб ҳисоблаймиз.

1. Агар S деб ABC учбурчакнинг юзини белгиласак, унда $S = S_{ABM} + S_{BMC} + S_{CMA}$ (юзалар ҳақидаги хоссага кўра), ёки $ah_1 + bh_2 + ch_3 = 2S$ (1) га эга бўламиз. Учбурчакнинг юзини топиш формуласига кўра $a = \frac{2S}{h_a}, b = \frac{2S}{h_b}, c = \frac{2S}{h_c}$ ни ёзамиз. (1) тенгликдаги a, b, c ларнинг ўрнига юза орқали ифодасини қўйсак

$\frac{h_1}{h_a} + \frac{h_2}{h_b} + \frac{h_3}{h_c} = 1$ (2) га эга бўламиз.

2. (2) нинг ҳар иккала томонини h_a га кўпайтирамиз:

$$h_1 + \frac{h_a}{h_b} h_2 + \frac{h_a}{h_c} h_3 = h_a \qquad (3).$$

Равшанки, h_a баландликларнинг энг кичиги ёки $h_a = h_b$,, унда $\frac{h_a}{h_b} \le 1$, $\frac{h_a}{h_c} < 1$ ва $\frac{h_a}{h_b} h_2 \le h_2$, $\frac{h_a}{h_c} h_3 < h_3$ бўлади.

(3) тенгликдан охирги иккита тенгликни ҳисобга олсак $h_a = h_1 + \frac{h_a}{h_b} h_2 + \frac{h_a}{h_c} h_3 < h_1 + h_2 + h_3$ га эга бўламиз.

3. Шунга ўхшаш, $h_1 + h_2 + h_3 < h_c$ ни ҳам исботлаймиз.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

1) Масала матнида юза ҳақида маълумот берилмаган. Ечиш жараёнида эса юза хоссалари, учбурчакнинг юзини топиш формулаларидан фойдаланилади. Масала юзалар методи билан ечилди деб айтадилар.

Юзалар методи геометрик масалаларни ечишнинг аналитик методига тегишли.

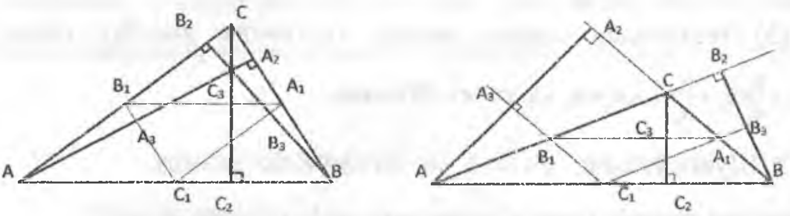
2) Юзалар назариясдан фойдаланиш фикри қаердан пайдо бўлди? Учбурчакнинг баландлиги, нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа учбурчакнинг юзи формуласи билан боғлиқ ва шу нарса мияга келади.

3) Юзалар методи бир нечта усулларни ўз ичига олади. Уларнинг баъзилари ҳар қадамда учрайди, назарий қисмда келтирилди. 8-масалани ечишда 1 ва 2 усулдан фойдаланилди.

9-масала. Учбурчак томонининг ўртаси ва мос баландликлар ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқларнинг битта нуқтада кесишишини исботланг.

Е ч и ш.

ABC учбурчакда A_1, B_1, C_1 нуқталар мос равишда BC, CA ва AB томонларнинг ўртаси, AA_2, BB_2, CC_2 баландликлар ва уларнинг ўртаси мос равишда A_3, B_3, C_3 (9 а, б-расм). A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 тўгри чизиқларнинг битта нуқтадан ўтишини исботлаш талаб этилади.



а) б)

9-расм.

Учбурчак ўрта чизиғининг хоссасига кўра B_1C_1 тўғри чизик BC тўғри чизиғига параллел. Равшанки, B_1 нуқта AC нинг ўртаси ва $B_1C_1 \| BC$, унда B_1C_1 кесма AA_2 кесмани ўртасидан кесади (по теореме Фалес-теоремасига кўра), яъни $A_3 \in B_1C_1$. Шундай қилиб, A_3, B_2, C_3 нуқталар $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг томонларини ўз ичига олган тўғри чизиқларда ётади. $\overrightarrow{A_1C_3} = p\,\overrightarrow{C_3B_1}$, $\overrightarrow{B_1A_3} = q\,\overrightarrow{A_3C_1}$, $\overrightarrow{C_1B_3} = r\,\overrightarrow{B_3A_1}$ деб белгилаймиз. Чеви теоремасига кўра, достаточно доказать, что $pqr=1$эканлигини исботлаш етарли.

1. AB_1A_3ва ACA_2, AC_1A_3 ва ABA_2 учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AA_3}{AA_2} = \frac{B_1A_3}{CA_2} = \frac{A_3C_1}{A_2B}$ кесмаларнинг пропорционаллиги келиб чиқади, ёки ечимнинг 1-бандига кўра $\frac{B_1A_3}{A_3C_1} = \frac{CA_2}{A_2B} = |q|$. Бунда $\overrightarrow{B_1A_3}$ ва $\overrightarrow{CA_2}$ ва $\overrightarrow{A_3C_1}$ ва $\overrightarrow{A_2B}$ векторлар йўналишдош. Шундай қилиб, $\overrightarrow{CA_2} = q\,\overrightarrow{A_2B}$ тенгликка эга бўламиз.

2. Шунга ўхшаш 2-бандда $\overrightarrow{BC_2} = p\overrightarrow{C_2A}$, $\overrightarrow{AB_2} = r\overrightarrow{B_2C}$ эканлигини исботлаймиз.

3. ABC учбурчак баландликларининг асослари A_2, B_2, C_2 нуқталар. Равшанки, учбурчак баландликлари ётган тўғри чизиқлар битта нуқтада кесишади, демак, Чеви теоремасига кўра $pqr = 1$ бўлади.

Биз масала ечишда қандай материаллардан фойдаландик?.

1) Масалага Чеви теоремасини қўллаш учун классик (содда) ҳолат берилган. У 4- бандда аввал учта тўғри чизиқнинг битта нуқтадан ўтишининг зарурий шарти сифатида, сўнгра ечимнинг 1-бандида кўрсатилган етарлилик шарти сифатида берилган.

2) Чеви теоремаси ёрдамида учта нисбати 1 га тенг бўлган тўғри чизиқларнинг битта нуқтадан ўтишини, агар иккита кўпайтувчи маълум бўлса $pqr = 1$ тенгликдан номаълум нисбатларни топиш мумкин.

3) Бундан ташқари Менелай теоремаси мавжудки, у уч нуқтани битта тўғри чизиқда ётишлигининг етарли ва зарурий шартини ифодалайди.

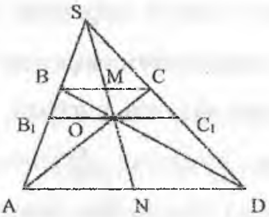
Асосий назарий билимларни қўллаш мумкинлигини тасдиқловчи масалалар

10-масала. Трапециянинг диагоналлар кесишган нуқта, ён томонлар ётган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси ва асосларининг ўртасини битта тўғри чизиқда ётишини исботланг.

Исбот. $ABCD$ трапециянинг($AD \parallel BC$) AC ва BD диагоналларининг кесишиш нуқтаси O, AB ва CDнинг кесишиш нуқтаси S, N ва M

нуқталар мос равишда AD ва BC томонларнинг ўртаси бўлсин (10-расм). $M \in SN$, $O \in SN$ эканлигини исботлаймиз.

1. SBC ва SAD учбурчакларнинг ўхшашлигидан қуйидаги келиб чиқади: $\frac{SB}{SA} = \frac{BC}{AD}$. У ҳолда SBM ва SAN учбурчаклар ўхшаш, бундан $\angle SBM = \angle SAN$, чунки параллел тўғри чизиқлар учун қуйидагилар ўринли: $\frac{SB}{SA} = \frac{BC}{AD} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BM}{AN}$. Демак, $\angle BSM = \angle ASN$, яъни $M \in SN$.



10-расм.

2. $B_1C_1 \| AD$ ($B_1C_1 \| BC$) ларни ўтказамиз, $B_1 \in AB$, $C_1 \in C$. У ҳолда $B_1O = OC_1$ унда SN кесма ΔASB нинг медианаси, равшанки медиана асосига параллел бўлган ҳар қандай кесмани учбурчак томонининг учидан ҳисоблаганда тенг иккига бўлади. Натижада, шунга ўхшаш $\angle B_1SO = \angle ASN$ бўлиши исботланади, яъни $O \in SN$.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Масала трапеция хоссаларини ўрганувчи мумкин бўлган усул сифатида намаён бўлди, уч нуқтанинг битта тўғри чизиқда ётишлигини исботловчи янги усул борлигидан дарак берди. Шунинг учун ён томонларнинг кесишиш нуқтасини топиш орқали трапецияни учбурчакка тўлдириш трапецияда қўшимча ясаш бўлди.

2) Исботда келтирилган бош ғоя – ўхшаш учбурчаклардан ва берилган текисликда берилган нурда берилган бурчакка тенг бўлган фақат битта бурчак қўйиш мумкинлигидан фойдаланишдан иборат. Бироқ бу масалани ечишнинг бошқа усули ҳам мавжуд. Учбурчак медианаси хоссасидан усталик билан фойдаланиш – асосига параллел бўлган учлари учбурчак томонларида бўлган ҳар қандай кесмани тенг иккига бўлиши.

3) Исботлашнинг иккинчи қисмида қўшимча ясашнинг бажарилиши ечимга умумий ёндошиш билан тушунтирилади – учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб бурчакларнинг тенглигини кўрсатишнинг зарурлиги.

11-масала. Трапециянинг a ва b $(a>b)$ асослари берилган. Учлари трапециянинг ён томонида ётган асосига параллел бўлган кесманинг узунлигини топинг ва :

а) трапециянинг диагоналлари кесишган нуқта орқали ўтувчи;

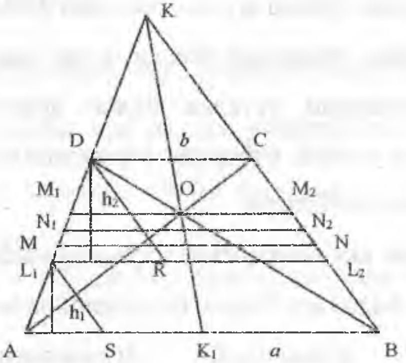
б) трапецияни иккита ўхшаш трапецияга ажратувчи;

в) трапеция томонларининг ўртасини туташтирувчи;

г) трапециянинг юзини тенг иккига бўлувчи.

Қаралаётган кесмаларни таққосланг.

Ечиш.



11-расм

а) $ABCD$ трапециянинг AC ва BD диагоналларини кесишиш нуқтаси O ($AB \parallel DC$), $O \in M_1M_2, M_1M_2 \parallel AB$ бўлсин, у ҳолда $M_1M_2 \parallel CD, M_1 \in AD$, $M_2 \in CB$ бўлади (11-расм). $ABCD$ трапецияни AKB учбурчакка тўлдирамиз, бу ерда AD ва BC нинг кесишиш нуқтаси K. ΔAKB учбурчакнинг K учидан KK_1 медианани ўтказамиз. У ҳолда $O \in KK_1$ (10-масалага қаранг). Равшанки, медиана учлари учбурчакнинг томонларида ётган асосига параллел бўлган ҳар қандай кесмани тенг иккига бўлади, бироқ $M_1M_2 \parallel AB$, $M_1 \in AK$, $M_2 \in BK$, то $OM_1 = OM_2$.

Қуйидагича белгилаш киритамиз: $OM_1 = x$. У ҳолда DOM_1 ва DBA учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{x}{a} = \frac{DM_1}{DA}$(1), AOM_1 ва ACD учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{x}{b} = \frac{AM_1}{DA}$ (2) келиб чиқади. (1) ва (2) ни қўшамиз: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{DM_1}{DA} + \frac{AM_1}{DA} = \frac{DA}{DA} = 1$. У ҳолда $x = \frac{ab}{a+b}$. Демак, $M_1M_2 = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, яъни a ва b миқдорларнинг ўрта геометриги.

б) $N_1N_2 \parallel AB$ ($N_1N_2 \parallel CD$) ва $ABCD$ ни иккита AN_1N_2B ва N_1DCN_2 ўхшаш трапецияларга ажратган бўлсин, бу ерда $N_1 \in AD$, $N_2 \in CB$ (11-расм). У ҳолда $\frac{a}{N_1N_2} = \frac{N_1N_2}{b}$, яъни $N_1N_2 = \sqrt{ab}$, яъни a ва b нинг ўрта геометригидир.

в) Агар MN ни $ABCD$ трапециянинг ўрта чизиғи эканлигини ҳисобга олсак (11-расм), $MN = \frac{a+b}{2}$ га эга бўламиз, бу a ва b нинг ўрта арифметигидир

г) $L_1L_2 \parallel AB$ ($L_1L_2 \parallel CD$) бўлсин, $ABCD$ трапециянинг юзаси тенг иккига бўлинади (11-расм), т.е. $S_{AL_1L_2B} = S_{L_1L_2CD}$. $L_1L_2 = y$ деб олайлик. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз: $\frac{1}{2}(a+y) \cdot h_1 = \frac{1}{2}(y+b) \cdot h_2$, бу ерда h_1 ва h_2 лар AL_1L_2B ва L_1L_2CD трапецияларнинг баландликлари. Демак, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{b+y}{a+y}$ (3).

Қўшимча ясаш бажарамиз: $L_1S \parallel BC$ и $DR \parallel BC$. У ҳолда ΔAL_1S ва $L_1R = y - b$, $AS = a - y$. AL_1S ва L_1DR учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AS}{L_1R} = \frac{a-y}{y-b} = \frac{h_1}{h_2}$ (4) келиб чиқади, чунки h_1 ва h_2 лар мос равишда ΔAL_1S ва ΔL_1DR учбурчакларнинг баландликлари. (3) ва (4) дан $\frac{b+y}{a+y} = \frac{a-y}{y-b}$ келиб чиқади, яъни $a^2 - y^2 = y^2 - b^2$, у ҳолда $y = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, бу ўз новбатида a ва b учун ўрта квадрат бўлади.

Ўрта миқдорлар орасидаги қуйидаги боғланиш мавжуд: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, бу ерда $a > 0, b > 0$, тенглиги $a = b$

бўлгандагина бажарилади. У ҳолда $M_1M_2 < N_1N_2 < MN < L_1L_2$ тасдиқ бажарилади.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Масала трапеция билан боғлиқ фактларни очади ва икки миқдорнинг ўрта қиймати орасидаги боғланишни кўргазмали ифодалайди, бу ерда $M_1M_2 < N_1N_2 < MN < L_1L_2$ ни ҳатто геометрик метод орқали исботлаш мумкин.

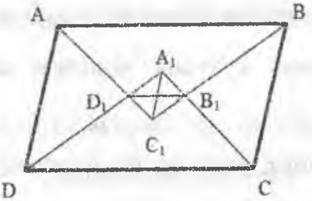
2) а) бандни қараш жараёнида трапецияда битта қўшимча ясаш ва 10-масалада исботланган трапециянинг махсус нуқталарини битта тўғри чизиқда ётишлиги хоссасидан фойдаланилди. Шунингдек, учбурчак медианаси хоссасидан усталик билан фойдаланилди – учлари учбурчак томонларида ётган ва асосига параллел бўлган ҳар қандай кесмани тенг иккига бўлиши. Бу мос учбурчакларнинг ўхшашлигига асосланган биринчи формулани яратишга имкон берди. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиш ғояси б) ва г) бандларни қарашда ҳам қўлланилди.

3) (Проведение дополнительных построений в пункте г) бандда олиб борилган қўшимча ясаш тенг юзали трапецияларнинг мос баландликларини қараш билан тушунтирилади ва бу баландликларни нисбатини аниқловчи биринчи пропорцияни ҳосил қилдик. Шунинг учун ечиш давомида ўхшаш учбурчакларда мос баландликларнинг нисбати ўхшашлик коэффициентига тенг бўлишидан фойдаланилди.

12-масала. Параллелограмнинг барча бурчаклари биссектрисаларининг кесишиши натижасида тўртбурчак ҳосил бўлди. Бу тўртбурчакнинг тўғри бурчакли тўртбурчак эканлигини исботланг. Бу тўртбурчакнинг кўриниши қандай бўлади, агар берилган фигура тўғритўртбурчак, ромб, квадрат бўлса?

Ечиш.

1. Параллелограмнинг битта томонига ёпишган бурчакларнинг биссектрисалари хоссасига кўра улар перпендикуляр. Демак, агар AC_1, BC_1, CA_1, DA_1 лар мос равишда $ABCD$ параллелограмнинг $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ бурчакларини биссектрисалари бўлса, унда $\angle AC_1B = \angle A_1B_1C_1 = \angle CA_1D = \angle C_1D_1A_1 = 90^0$, у ҳолда $A_1B_1C_1D_1$ тўғритўртбурчак (12-расм).



2. Агар $ABCD$ тўғритўртбурчак бўлса, у ҳолда $AD \perp DC$. Маълумки CA_1, DA_1 кесамалар $\angle C$, $\angle D$ бурчакларнинг биссектрисалари, унда A_1 нуқта AD ва BC тўғри чизиқлардан тенг узоқликда ётади. Худди шундай C_1 нуқта AD ва BC дан тенг узоқликда ётади. Демак, $AD \parallel BC$ бўлади, унда $A_1C_1 \parallel AD$. Шунга ўхшаш $B_1D_1 \parallel DC$. У ҳолда $B_1C_1 \perp B_1D_1$, яъни $ABCD$ – квадрат.

3. Агар $ABCD$ ромб ёки квадрат бўлса, унда унинг диагоналлари бурчакларни тенг иккига бўлади ва ўзаро перпендикуляр, яъни $A_1B_1C_1D_1$ симметрия марказга эга бўлади.

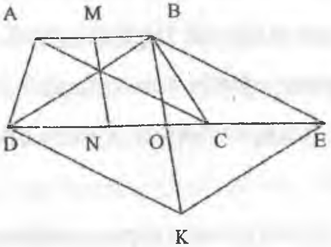
Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Масалада жуда кўп қизиқарли назарий материаллардан фойдаланилди: параллелограмнинг бир томонига ёпишган бурчаклар биссектрисаларининг хоссаси; бурчак биссектрисаси нуқталарининг бурчак томонларидан тенг узоқликда ётиши; берилган параллел тўғри чизиқнинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқни, иккита параллел тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталар тўплами сифатида қараш; бир жуфт параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчак ҳақидаги хоссанинг ўзгармаслиги. Ўз новбатида параллелограм ва унинг хусусий ҳоллари орасидаги қизиқарли фактлар очилади.

2) Исбот тўғритўртбурчак, ромб ва квадратнинг таърифи, хоссалари ва аломатларидан фойдаланишга асосланди. Бунда масалада фойдаланилган тўғритўртбурчакнинг аломатлари табиатан унинг таърифидан келиб чиқади, масалан, квадрат (ромб) нинг аломати ромб диагоналининг хоссасига тескари теорема бўлади.

13-масала. Трапециянинг диагоналлари 3 ва 5, асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесма эса 2 га тенг. Трапециянинг юзини топинг.

Е ч и ш. Асослари AB ва CD бўлган $ABCD$ трапеция берилган ва $BD=3$, $AC=5$, $MN=2$, бу ерда M ва N лар мос равишда AB ва CD нинг ўртаси(13-расм).



13-расм.

1. $BE \parallel AC$ ни ясаймиз, $E \in DC$. У ҳолда $BE = AC = 5$, $DE = DC + AB$ ва $S_{ABCD} = S_{DBE}$.

2. $BO \parallel MN$ ни ясаймиз $O \in DC$. У ҳолда $BO = MN = 2$, $NO = \frac{1}{2}AB$, $DO = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DE$, яъни BO кесма DBE учбурчакнинг медианаси.

3. BO медианани иккилантириб BK, $BK = 2BO = 4$ га эга бўламиз. У ҳолда $DBEK$ параллелограм ва $DK = BE = 5$. Бундан $S_{DBE} = \frac{1}{2}S_{DBEK} = S_{DBK} = S_{ABCD}$ ни ҳосил қиламиз.

4. $DK^2 = 25 = 16 + 9 = BK^2 + DB^2$ бўлгани учун DBK учбурчак тўғри бурчакли, у ҳолда $S_{DBK} = \frac{1}{2}DB \cdot BK = \frac{1}{2}3 \cdot 4 = 6 = S_{ABCD}$. ***Жавоб*** 6.

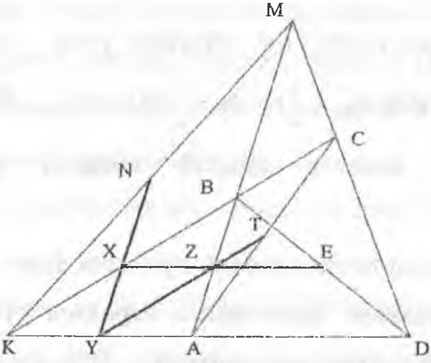
Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

Масаланинг ечиш иккита асосий қўшимча ясаш билан амалга оширилади: трапециянинг диагоналига параллел тўғри чизиқ ва учбурчакнинг медианасини иккилантириш. Шунингдек, трапеция асосларининг ўртасини туташтирувчи кесмага параллел бўлган тўғри чизиқни ясашнинг зарурлиги ёрдамчи ясаш бўлади. Бу ясашлар нега керак бўлди?. Чунки томонлари берилган кесмаларнинг узунликларига тенг ёки уларга каррали бўлган учбурчак топиш зарур бўлди. Шунинг учун, аввал томонлари 3 ва 5 бўлган DBE учбурчак, сўнгра томонлари 3,5 ва $2 \cdot 2 = 4$ бўлган DBK учбурчак ясалди. Охиргисининг юзаси трапециянинг юзига тенг бўлиб қолди.

14-масала. Тўртбурчак қарама-қарши томонлар давомининг кесишиш нуқталарини туташтирувчи кесманинг ўртасини диагоналлар ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқда ётишини исботланг (Гаусс теоремаси).

Е ч и ш. $ABCD$ тўртбурчакнинг AB ва CD томонлари ётган тўғри чизиқлар M нуқтада, AD ва BC томонлар эса K нуқтада кесишсин; N нуқта MK нинг, T ва E мос равишда AC ва BD диагоналлар ўртаси бўлсин (14-расм).

1. Равшанки ABK учбурчак томонлари ётган тўғри чизиқлардаги M, C ва D нуқталар битта тўғри чизиқда ётади, унда



14-расм

$\overrightarrow{BM} = p\overrightarrow{MA}$ (1), $\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{DK}$ (2) ва $\overrightarrow{KC} = q\overrightarrow{CB}$ (3) тенгликка асосан Менелай теоремасига кўра $pqr = -1$ (4) бўлади.

2. Мос равишда X, Y ва Z нуқталар орқали BK, AK ва AB кесмаларнинг ўртасини белгилаймиз. У ҳолда XY, ZY, ZX лар AKB учбурчакнинг ўрта чизиқлари бўлади. Учбурчакнинг ўрта чизиғи ётган тўғри чизиқнинг, асос ётган тўғри чизиқ ва учбурчакнинг учини бирлаштирувчи кесмалар ўртасининг тўплами бўлиши фактидан фойдаланамиз. Демак, $N \in XY$, $T \in ZY$, $E \in ZX$, яъни N,T,E нуқталар XYZ учбурчак томонлари ётган тўғри чизиқда ётади.

3. Учбурчак ўрта чизиғининг хоссасига кўра $\frac{XN}{BM} = \frac{1}{2} = \frac{YN}{AM}$,

у ҳолда $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MA}} = \frac{\overrightarrow{XN}}{\overrightarrow{NY}} = p$, яъни $\overrightarrow{XN} = p\overrightarrow{NY}$ (5).

4. 3-бандга ўхшаш қуйидагига эга бўламиз: $\overrightarrow{ZE} = r\overrightarrow{EX}$ (6), $\overrightarrow{YT} = q\overrightarrow{TZ}$ (7). У ҳолда (4) - (7) тенгликларни ҳисобга олиб, Менелай теоремасидан фойдаланиб N, T ва Eнуқталарнинг битта тўғри чизиқда ётади деган хулосага келамиз.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Масалада Менелай теоремаси қўлланадиган ҳолат қаралди. 1 аввалига Она используется сначала в п. 1-бандда уч нуқтанинг битта тўғри чизиқда ётишлигининг зарурий шарти сифатида, сўнгра эса 4-бандда етарли шарти сифатида қаралди.

2) Қаралган 2-банднинг кириш қисмида мос кесмаларнинг ўрталари Менелай теоремасидан фойдаланишни талаб қилувчи берилган нуқталарни бирор учбурчакнинг томонларида (ёки уларнинг давомида) ётишининг зарурлиги билан тушинтирилади. Натижада учбурчакнинг ўрта чизиқларини ўз ичига олувчи чизиқлар

учбурчакнинг асоси ётган тўғри чизиқлар билан уни туташтирувчи кесмаларнинг ўртаси сифатида қаралади. Шунингдек, учбурчакнинг ўрта чизиғини асосининг ярмига тенглигидан фойдаланилади.

15-масала. AB ва DC лар айлананинг кесишмайдиган ватарлари бўлсин. M нуқта AB ёйнинг ўртаси, K ва F лар эса CM ва DM ватарнинг AB ватар билан кесишиш нуқталари бўлсин(15-расм). C, D, K, F нуқталарнинг битта айланада ётишини исботланг.

Е ч и ш.

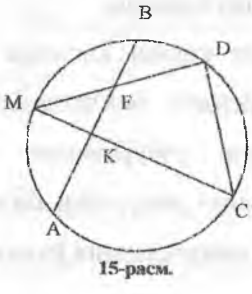
1. $\angle KFD = \angle AFD = \frac{1}{2}(\cup ACD + \cup MB) = \frac{1}{2}(\cup DCA + \cup AM) = \ = \frac{1}{2} \cup DCM$ (учи айлана ичида ётган бурчакнинг хоссасига кўра).

2. Равшанки, $\angle KCD = \angle MCD = \frac{1}{2} \cup MBD$,

унда $\angle KFD + \angle KCD = \frac{1}{2}(\cup DCM + \cup MBD) = 180°$, яъни C, D, F, K нуқталар битта айланада ётади.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) C, D, F, K нуқталар битта айланада ётиши керак, демак, $CDFK$ тўртбурчак шу айланага ички чизилган. Айланага ички чизилган тўртбурчак ҳақидаги аломатга кўра қарама-қарши



15-расм.

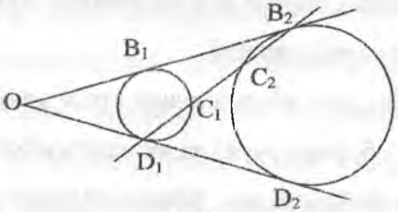
бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг. Шунинг учун $CDFK$ тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчакларнинг миқдорлари орасида боғланиш ўрнатиш талаб этилади.

2) Шундан сўнг, учи айлана ичида ётган ички чизилган бурчак хоссасидан ($\angle KFD$ - бурчак учун) ва айланага ички чизилган ($\angle KCD$) бурчак хоссасидан фойдаландик. Айлана ёйининг йиғиндиси KFD ва KCDбурчаклар орқали ифодаланди ва 180°га тенг. Бу $CDFK$ тўртбурчакнинг айланага ички чизилганлигидан далолат беради, яъни C, D, F, K нуқталар битта айланада ётади.

16-масала. Иккита кесишмайдиган айлана бурчакка ички чизилган. Турли айланада ва бурчакнинг турли томонида ётувчи айланаларнинг бурчак томонларига уриниш нуқталари орқали тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг айланаларда бир хил узунликдаги ёй ажратишини исботланг.

Исбот.

1. $\angle O$ бурчак ва унга кесишмайдиган иккита айлана ички чизилган бўлсин. B_1 ва B_2 айланаларнинг бурчакнинг битта томонидаги, D_1, D_2 лар эса иккинчи томонидаги уриниш нуқталари бўлсин. B_2D_1 тўғри чизиқни ўтказамиз, у айланаларни C_2 ва C_1 нуқталарда кесиб ўтсин (16-расм). B_2C_2 ва D_1C_1 ватарларни тенглигини кўрсатамиз.



16-расм

2. B_2 нуқтадан айланага радиусдан кичик B_2B_1 уринма ва B_2D_1кесувчи ўтказилган, бу ерда C_1 нуқта B_2D_1 ва айлананинг кесишган нуқтаси. Битта нуқтадан ўтказилган уринма ва кесувчининг хоссасига кўра $B_2C_1 \cdot B_2D_1 = B_2B_1^2$ га эга бўламиз. Шунга ўхшаш, иккинчи айлана учун $D_1C_2 \cdot D_1B_2 = D_1D_2^2$ га эга бўламиз.

3. Равшанки, $B_1B_2 = D_1D_2$ $(OB_2 = OD_2$ ва $OB_1 = OD_1$, демак $B_1B_2 = D_1D_2)$ унда $B_2C_1 \cdot B_2D_1 = D_1C_2 \cdot D_1B_2$, бундан $B_2C_1 = D_1C_2$ бўлиши келиб чиқади.

4. $B_2C_1 = B_2C_2 + C_2C_1$, ва $D_1C_2 = D_1C_1 + C_2C_1$ ва $B_2C_1 = D_1C_2$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $B_2C_2 = D_1C_1$ бўлади.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) B_2D_1 тўғри чизиқ ҳар иккала айлана учун кесувчи, шунинг учун, айланага ўтказилган уринмалар орасидаги боғланишларни топиш зарурлигидан фойдаландик.

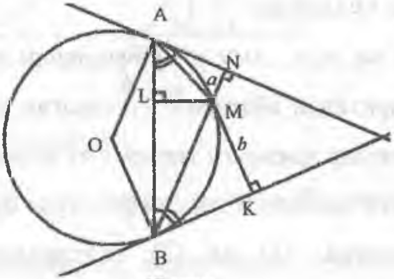
2) Бу боғланишни топиш учун битта нуқтадан айланага ўтказилган кесувчи ва уринманинг хоссаси ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Аникроғи биринчи айланага B_1B_2 уринма, B_2D_1кесувчи; иккинчисига D_1D_2 уринма, B_2D_1 кесувчи.

3) B_2C_1 ва D_1C_2 кесмаларнинг тенглиги айланага ўтказилган уринманинг хоссасини боғлайди. Масалани ечишнинг 4-банди талаб этилган натижани топишга олиб келади.

17-масала. Айланага иккита уринма ўтказилган. Айлананинг ихтиёрий нуқтасидан бу уринмаларга ўтказилган перпендикулярларнинг узинликлари a ва b га тенг. Шу нуқтадан ватарга туширилган перпендикулярнинг узинлигини $\sqrt{ab}$ га тенг бўлишини исботланг.

Исбот.

1. O нуқтада бўлган айлана берилган ва унга ўтказилган иккита уринманинг уриниш нуқталари A ва B бўлсин. Айланада ихтиёрий M нуқта оламиз ва ундан уринмаларга MK ва MN перпендикулярларни туширамиз. $MN=a$, $MK=b$, ML эса AB ватарга перпендикуляр бўлсин (17-расм).



17-расм

2. Ясашга кўра $\angle NAM$ бурчакни AN уринма ва AM ватар ҳосил қилади. $\angle ABM$ айланага ички чизилган бурчак. $\angle NAM$ ва $\angle ABM$ бурчаклар битта ёйга тиралади, шунинг учун $\angle NAM=\angle ABM$. Шунга ўхшаш, $\angle KBM=\angle BAM$.

3. $\Delta ALM \sim \Delta BKM$ (иккита бурчагига кўра) демак, $\frac{ML}{MK}=\frac{AM}{BM}$ (1).

$\Delta BLM \sim \Delta ANM$ (иккита бурчагига кўра) демак, $\frac{ML}{MN}=\frac{BM}{AM}$ (2).

4. (1) ва (2) ни кўпайтирамиз: $\frac{ML^2}{MK \cdot MN} = 1$ ёки $ML^2 = MK \cdot MN = ab$ яъни, $ML = \sqrt{ab}$.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

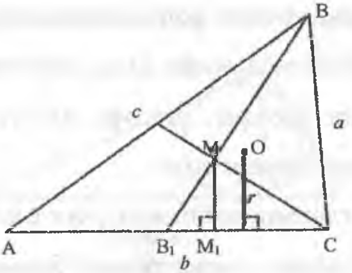
1) ML перпендикуляр AML ва BML учбурчакларнинг томони. Шунинг учун уни томонини ифодалаш учун учбурчакларнинг тенглиги ёки ўхшашлигидан фойдаланишга ҳаракат қилиш керак. Айлана ва уринма, унинг ватари билан боғлиқ ясашлар бурчакларни тенглигини кўрсатишга имкон беради. Демак, ML нинг узинлигини топиш учун учбурчаклар ўхшашлигининг икки бурчаги бўйича мавжуд аломатини қўллаймиз.

2) AML, BKM ва BLM, AMN учбурчакларни жуфт-жуфти билан қараймиз, битта нуқтадан айланага ўтказилган уринма ва кесувчи ҳосил қилган бурчаклар ҳақидаги теорема ва айланага ички чизилган бурчакнинг миқдори ҳақидаги хоссаларга кўра бурчакларнинг тенг бўлишини кўрсатамиз. (1) ва (2) тengликларни алмаштириб, перпендикулярнинг узинлигини топамиз.

18-масала. Агар учбурчакнинг томонлари узунликлари арифметик прогрессия ташкил этса, унда бу учбурчакка ички чизилган айлана маркази ва медианалар кесишган нуқтанинг ўрта чизиғига параллел бўлган тўғри чизиқда ётишини исботланг.

Исбот.

1. ΔABC ни қараймиз, унинг томонларини a, b, c билан белгилаймиз. O нуқта ички чизилган айлананинг маркази, M эса ΔABC нинг медианалари кесишган нуқтаси бўлсин. O нуқтадан AC гача бўлган масофани r билан белгилаймиз (ΔABC учбурчакка ички чизилган айлана радиуси), M нуқтадан AC гача бўлган масофани MM_1 билан белгилаймиз (18-расм). MM_1ва r перпендикулярларнинг



18-расм

узунликларини таққослаймиз.

2. $S_{AMC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ (1) (M нуқта ΔABC учбурчакнинг меианалари кесишган нуқтаси демак, M нуқта билан учбурчакнинг учларини бирлаштирувчи кесмалар, уни учта тенг юзали учбурчакларга ажратади).

3. Иккинчи томондан, $S_{AMC}=\frac{1}{2}AC\cdot MM_1=\frac{1}{2}b\cdot MM_1$ (2),

а $S_{ABC}=p\cdot r=\frac{a+b+c}{2}\cdot r$ (3). Масала шартига кўра, учбурчакнинг томонларини арифметик прогрессия ташкил этишини ҳисобга олсак $b=\frac{a+c}{2}$ га эга бўламиз ва (3) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$S_{ABC}=\frac{a+c}{2}+\frac{b}{2}=b+\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}$ (4). (2) ва (4) ни (1) тенгликка қўйсак, у ҳолда $\frac{1}{2}b\cdot MM_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{3b}{2}\cdot r$, ва $MM_1=r$ га эга бўламиз.

4. MM_1 ва r кесмаларнинг тенглигидан $MO\parallel AC$ га эга бўламиз.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

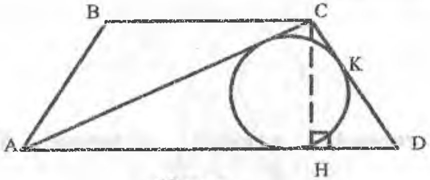
1) Тўғри чизиқларнинг параллелигини исботлаш учун масофанинг сақланиш аломатидан фойдаланиш мумкин. Равшанки, M нуқтадан AC гача бўлган масофа (MM_1 перпендикуляр) ва O нуқтадан AC гача бўлган масофа(r масофа ABC га ички чизилган айлананинг радиуси) тенг бўлиши шарт.

2) Кесмаларни тенглигини исботлаш учун алгебраик методни қўллаш мумкин, бундай ҳолда, юзалар орқали бориш анча қулайлик туғдиради. Бу метод қўлланилганда қуйидагилар аниқланади: MM_1 перпендикуляр (уни бирор учбурчакнинг баландлиги сифатида қараш мумкин) ва учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси топилади. Медианалар кесишиш нуқтасининг асосий хоссаларидан бири, бу медианаларнинг кесишиш нуқтаси билан учбурчакнинг учларини туташтирувчи кесмалар уни тенг юзали учта учбучакка ажратишидан иборат. Шунинг учун, бир томондан, $S_{AMC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$. Иккинчи томондан, ABC учбурчакнинг юзини унга ички чизилган айлана радиуси орқали ифодалаймиз. Тенгламадан MM_1 ва r нинг тенглигига эга бўламиз.

19-масала. $ABCD$ трапециянинг асослари $BC=44$, $AD=100$га тенг ва $AB=CD=35$. AD ва AC тўғри чизиқларига уринувчи айлана CD томонда K нуқтада уринади. CK кесманинг узунлигини топинг.

Ечиш.

1. Равшанки айлана AD ва AC тўғри чизиқларига уринади, унда иккита ҳол бўлиши мумкин: айлана AD ва AC кесмага уринади (19-расм); айлана AD, AC тўғри чиқларга ва CD кесмага уринади, яъни у ACD учбурчак учун ташқи чизилган (20-расм).



19-расм

2. Учбурчакка ички чизилган айлананинг хоссасига кўра $CK=p-AD$ ни ёза оламиз. Демак, AC ни топиш керак.

3. ΔCHD дан ($CH\perp AD$) CH ни топамиз: $HD=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{100-44}{2}=28$ (чунки, трапеция тенг ёнли).

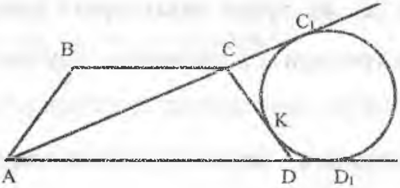
$CH=\sqrt{CD^2-HD^2}$,$CH=\sqrt{35^2-28^2}=21$.

4. ΔACH дан Пифагор теоремасига кўра ACни топамиз.

$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}$, бу ерда $AH=100-28=72$. $AC=\sqrt{72^2+21^2}=75$.

5. Демак, $p=105$ га эга бўламиз, у ҳолда $CK=5$.

6. ΔACD учбурчакка айлана ташқи чизилган ҳолни қараймиз. У ҳолда,



20-расм

20-расмдан $AC_1 = p = \frac{1}{2}(AC + CD + AD)$, $AC_1 = 105$ ни ёза оламиз. Демак, $CK = CC_1 = AC_1 - AC = 105 - 75 = 30$.

Жавоб. 5; 30.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Масалани ечишда иккита холни қараш зарур. Биринчиси, айлана ACD учбурчакка ички чизилган ҳол ва иккинчиси – айлана ACD учбурчакка ташқи (20-расмдагидек) чизилган ҳол.

2) Учбурчакка а ички айлана чизиш учун учбурчакнинг ярим периметри орқали топилувчи уринма кесмани топишга имкон берувчи хоссадан фойдаланамиз, яъни $CK = p - AD$. Иккинчи ҳол учун эса уринма кесмани учбурчакнинг ярим периметрига тенглик хоссасидан фойдаланамиз, яъни $AC_1 = p$ ва маълум бўлган кесмаларнинг айирмаси сифатида узунлиги CC_1 кесмага тенг бўлган CK кесмани топамиз.

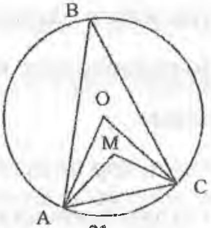
20-масала. ABC учбурчакка O марказли ташқи айлана чизилган, AOC бурчак 60° га тенг. ABC учбурчакка M марказли айлана ички чизилган. AMC бурчакни топинг.

Ечиш.

1. ΔAOC тенг ёнли учбурчакда $(OA = OC = R)$ $\angle AOC = 60^\circ$, демак ΔAOC - тенг томонли ва $AC = R$.

2. Синуслар теоремасига кўра ΔABC учбурчакдан қуйидагини топамиз: $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$, $\frac{R}{\sin\angle ABC} = 2R$, $\sin\angle ABC = \frac{1}{2}$, унда $\angle ABC = 30^\circ$ ёки $\angle ABC = 150^\circ$.

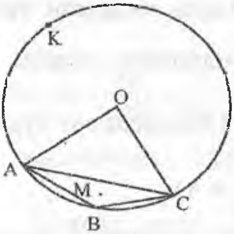
3. $\angle ABC = 30^\circ$ бўлсин (21-расм), унда $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$,



21-расм

$\angle MAC + \angle MCA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 75^\circ$ (AM ва CM - ΔABC нинг биссектрисаси), $\angle AMC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

4. $\angle ABC = 150^\circ$ бўлсин (22-расм), M ва O нуқталар AC тўғри



22-расм

чизиқнинг турли томонида ётади. Шу тариқа муҳокамани давом эттирамиз ва 3-бандга кўра қуйидагини топамиз: $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, $\angle MAC + \angle MCA = 15^\circ$, $\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

Жавоб. 105°, 165°.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Учбурчакка ташқи айлана чизиш ABC учбурчакнинг иккита номаълум бурчакларнинг йиғиндисини ифодалашга ёрдам берди (бу $\angle ACB$ ва $\angle BAC$). Бу ерда марказий бурчак ва битта ёйга тиралган айланага ички чизилган бурчаклар ҳақидаги теорема ёрдамга келди.

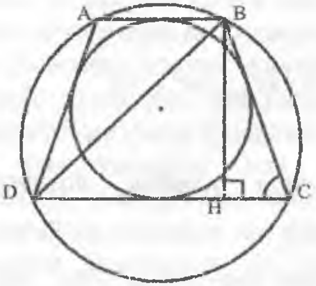
2) Ички чизилган айлананинг маркази учбурчак биссектрисалари кесишган нуқтада ётади. Учбурчак бурчакларининг йиғиндисй тўғрисидаги теоремани қўллаб (ΔAMC учун) ва BAC ва ACB бурчаклар йиғиндисининг ярмини билган ҳолда AMC бурчакнинг қийматини топамиз.

3) AMC бурчакнинг қийматини ҳар иккала ҳолда ҳам (O ва M нуқта AC нинг бир томонида ва турли томонида ётганда ҳам) бошқа бир усул билан топиш мумкин эди. ABC бурчакнинг қийматини топгандан сўнг, ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг қуйидаги хоссасини қўллаш мумкин эди: $\angle AMC = 90^o + \frac{1}{2}\angle ABC$.

21-масала. Ички ва ташқи айлана чизилган тенг ёнли трапеция берилган. Трапециянинг баландлигини ташқи чизилган айлана радиусига нисбати $\sqrt{\frac{2}{3}}$ га тенг. Трапециянинг бурчакларини топинг.

Е ч и ш.

1. $BH = h$ баландлик, R $ABCD$ трапецияга ташқи чизилган айлана радиуси, $\angle BCD = \alpha$ изланган бурчак бўлсин(23-расм).



23-расм

2. ΔDBC ни қараймиз, у радиуси R га тенг бўлган айланага ички чизилган. Унда синуслар теоремасига кўра $\frac{DB}{\sin\alpha}=2R$, бундан $DB=2R\sin\alpha$.

3. $ABCD$ траеция ташқи чизилган, шунинг учун $AB+DC=AD+BC$, бироқ $AD=BC$ (шартга кўра), демак $2BC=AB+DC$, $BC=\frac{AB+DC}{2}$ (1).

4. $DH=DC-HC$, бу ерда $HC=\frac{DC-AB}{2}$. $DH=DC-\frac{DC-AB}{2}=$ $=\frac{DC+AB}{2}$ (2) га эга бўламиз. (1) ва (2) ни тенглаштирамиз ва $DH=BC$ га эга бўламиз.

5. ΔBHC дан BC, $BC=\frac{BH}{\sin\alpha}=\frac{h}{\sin\alpha}$ ни топамиз.

6. Пифагор теоремасига кўра ΔDBH дан: $DB^2=BH^2+DH^2$, $4R^2\sin^2\alpha=h^2+\frac{h^2}{\sin^2\alpha}$. Шартга кўра $\frac{h}{R}=\sqrt{\frac{2}{3}}$, яъни $R^2=\frac{3h^2}{2}$. Охирги тенгликдаги R^2 ни ўрнига қийматини қўйиб тенгламани h^2,га бўлсак: $6\sin^2\alpha=1+\frac{1}{\sin^2\alpha}$, содда алмаштиришлар бажариб $6\sin^4\alpha-\sin^2\alpha-1=0$ га эга бўламиз. Тенгламани ечиб $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$ га эга бўламиз, у ҳолда α

нинг ўткир бурчак эканлигини ҳисобга олсак $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 45^\circ$ га эга бўламиз.

Шундай қилиб, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle ABC = 135^\circ$.

Жавоб. 45°, 135°.

Биз масала ечишда қандай назарий билимлардан фойдаландик?.

1) Масалани ечишнинг бош ғояси – бу, DBH тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларини h орқали ифодалашдан иборат (ёки R радиус) ва изланган бурчак α ва α га нисбатан тенглама ҳосил қилиш учун унга Пифагор теоремасини қўллаймиз.

2) Агар айлана трапецияга ташқи чизилса, унда у учлари трапециянинг учлари билан устма-уст тушувчи исталган учбурчакка ташқи чизилган бўлади. Бу факт ҳар қадамда масала ечишда қўлланилади ва керакли натижалар олинади. Бундай ҳолда у BC диагонални R раиус ва изланган α бурчак орқали ифодалаш имконини беради.

3) Тенг ёнли трапеция учун $DH = \frac{AB + DC}{2}$ тенглик (23-рамдагидек), ва агар унга ички чизилса, унда $AD = BC = \frac{AB + DC}{2}$, бу ахир эвристика, ечимни топишга ёрдам беради.

Хулоса

Бугунги кунда ғоялари амалиётга кенг кўламда муваффақиятли тадбиқ этилаётган монография мазмунида жамият талабига мос, ҳар томонлама етук, баркамол шахсни шакллантириш ҳамда малакали мутахассис, илмий изланувчи математикларни тарбиялаб вояга етказиш жараёнининг моҳияти тўлақонли очиб берилган. Мазкур вазифаларнинг муваффақиятли ҳал этилишида параметрли масалаларни ечишда алгебра ва геометрияга оид интегрция ғояларига оид илмий билимларга эга бўлишлари ҳамда эгаллаган билимларни таълим жараёнида ўз фаолиятларига мақсадли, самарали қўллай олишлари, уларда таълим жараёнини илмий ташкил этишга нисбатан талабалар ижодий фикрлашишининг ривожланиши, ўқувчи илмий дунёқарашининг шаклланишини таъминловчи педагогик шарт – шароитлар ва объектив ҳамда субъектив омилларни аниқлашга йўналтирилган хулосаларни чиқаришга имкон беради:

1. Талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантириш математика ўқитувчисини тайёрлашнинг етакчи ғоялардан бири ҳисобланади.

2. Талабаларнинг фанлар орасидаги боғланишларни ўрганиш қобилияти, қизиқиши ва имконияти аниқ ҳисобга олинса ҳамда бу фаолиятни ривожлантириш шакллари тўғри танланса, ўқувчиларнинг интеллектуал илмий салоҳияти ошади.

3. Талабаларни интеграция ғоялари асосида ижодий фикрлашини ривожлантириш ҳам ижтимоий, ҳам педагогик аҳамиятга эга, чунки бу ишларнинг натижаси жамиятнинг ижтимоий жиҳатдан тараққий этишига хизмат қилади.

4. Талабадан фақат ўқув – тарбия жараёнининг фаол иштирокчисигина бўлиб қолмай, шу билан бирга, интеграция ғоялари асосида ижодий фикрлашини ривожлантиришга тайёргарлик кўрувчи субъект сифатида ўзида муайян илмий дунёқараш ва илм олишга интилишга оид кўникмаларни шакллантира олиш ҳам талаб этилади. Талабаларнинг турли шароитларда юзага келувчи вазиятларни тўғри баҳолай олиши тадқиқот ишларининг самарадорлигини таъминлашга хизмат қилади.

5. Жамият тараққиёти учун зарур бўлган, инсоният фаравон турмуш тарзини яхшилашга қаратилган янгиликни кашф қилиш, бу борада талабаларнинг ижод қилиши, илмий дунёқарашини

шакллантириш олий таълим олдидаги долзарб масалалардан бири ҳисобланади.

6. Геометрик метод кўргазмали, вақтни тежашга, ечимнинг барча вариантларини кўра билиш ва қарашга имкон беради, нафақат кўникмаларни қайта ишлаш ва малакаларни мустаҳкамлаш, балки предметга меҳр қўйишга, қизиқишни шакллантиради.

Олиб борилган тадқиқот натижалари қуйидагиларни таъминлайди:

1)математика фани ўқитувчисининг биринчи галда энг юксак фазилатли, ахлоқий пок, иймон ва эътиқодли, ҳалол ва софдил, талабаларга, ўсмир ва ёшларга нисбатан ўта талабчан, зийрак ва изланувчан бўлишини;

2)талаба энг аввало ўз касбининг жонкуяри, ишига ижодий ва илмий ёндошадиган шахс бўлмоғи бу, билимлар ва илғор тажрибаларига чанқоқлик, муҳими унда ташкилотчилик, кузатувчанлик, қатъийлик ва инсонийлик хусуситатларига эга бўлиши;

3)талаба кўргазмали, изохли – иллюстратив, репродуктив муоммоли, қисман изланувчанлик ва тадқиқот методларини билиши;

4)қисман изланувчанлик ва тадқиқот методига моделлаштириш лойихалаш бўйича масалалар киритишни билиш;

5)дарснинг оқилона ташкил қилиниши: турли кўргазмали воситаларнинг қўлланилиши; муаммоли, дастурлаштирилган, турли хил топшириқлар, қизиқарли ва тарихий элементлар, синифдан ташқари ишларни қўллаш; график фаолият воситалари ёрдамида ўқувчиларнинг билим олишга қизиқишларини ривожлантириш ва бошқалар; айни янгиланиш, ривожланиш даврида ёш авлодни билимдон, яратувчан, юксак маданиятли ва мустақил мамлакат тақдири учун маъсул шахслар қилиб тарбиялаш; улуғвор бунёдкорлик ишида малакали, ғайратли ўқитувчилар ёшлар пешқадам бўлиши учун замон талабларига жавоб берадиган юқори малакали, онгли мутахассис кадрлар тайёрлаши; ўқувчи ва ёшларга математика сирларини ўргатиш борасида ўз устида доимо изланиш, талабалар фаолиятини ривожлантириб, тўғри ва асосли шакллантириш учун педагогик қоидалар асосида тажрибалар олиб бориши;

6)математика инсонни шакллантиришдаги муҳим ва ишончли воситалардандир, бундай имкониятни хар бир машғулотда қўллаш учун яангича услуб ва мумкин бўлган усулларини ишга солиш ҳамда амалда қўллай олиш маҳоратини ўргатиши;

7)замон талаби билан дарс ва машғулотларни ноанъанавий дарс режалари билан ўтказиши;

8)жаҳон андозаларига хос янги технологияларни ўрганиб, дарсда қўллай олиш маҳоратини эгаллаши;

9)ижодкор ўқитувчилар қаерда, қандай ўқув масканида таълим жараёнини олиб боришидан қатъий назар педагогик фаолиятини ижодий изланишлар билан бойитиб боради, шундагина яхши шогирдлар, ҳақиқий мутахассис шакллантириш имкониятига эга бўладилар;

10)талаба ижодий фикрлай олганда ўқувчилар билан ёнма-ён ўтириб ўзлари амалий намуна кўрсата оладилар. Ўшандагина ўқувчилар ўз кўзлари билан мураббий устознинг эгаллаган маҳорат сирларини амалий ишларида кўриб руҳан ҳис қилади ҳамда математиканинг нозик сирларини тушуниб етишишига имкониятлари кенгатади;

11)ижодий фикрлайдиган талаба ҳар томонлама ривожланган инсоннинг тарбиялаши учун бой имконитатларга эга бўлади. Улар болаларни ақлий ва эстетик жиҳатдан ривожлантиради, атроф дунёни тушунишига кўмаклашади, буюмларни эътибор билан кузатишга, уларнинг шаклини таҳлил қилишга ўргатади. Болалар тарбиясида замондошларимиз меҳнатини гўзаллигини кўрсатишга, мустақил давлат тараққиёти ютуқларини ўрганиш алоҳида ўрин эгаллайди. Бу ўқувчиларнинг ижодий активлигини оширишга уларнинг кучини, маънавий қувватини янги ҳаёт қуриш учун курашга сафарбар этишга кўмаклашади..

Адабиётлар рўйхати

1. Айтувганов Ў.Х. Педагогика олий ўқув юртлари талабаларининг ижодий фикрлашини ривожлантиришда геометрик тушунчаларнинг роли. // Педагогик маҳорат. - №3. Бухоро давлат университети. 2010йил
2. Айтувганов Ў.Х. Интеллектуал фаолиятнинг ривожланишида фазовий тафаккур масалалари. // Фалсафа ва ҳуқуқ. - № 4. Тошкент. 2011йил.
3. Айтувганов Ў.Х. Вопросы обучения решению задач, развивающих творческое мышление на уроках геометрии. // Муғаллим ҳэм узликсиз билимлендириў. - №5-6. Нукус қаласи. 2014 йил.
4. Айтувганов Ў.Х. Основные задачи системы непрерывного образования в XXI веке. // Проблемы современного образования. №5. Московский педагогический государственный университет. 2016 йил.
5. Айтувганов Ў.Х. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. // Вестник современной науки. Научно-теоретический журнал. - №3 (15). Волгоград. 2016 йил.
6. Айтувганов Ў.Х. Развитие учебно –интеллектуальных умений у младших школьников в процессе обучения. // Вестник современной науки. Научно-теоретический журнал. - №2 (14). Волгоград. 2016 йил.ё
7. Айтувганов Ў.Х. Творческое мышление и уровни его развития. Актуальные вызовы современной науки. / Сборник научных трудов., выпуск 1 часть 6, Переяслав-Хмельницкий. 2016 йил.
8. Айтувганов Ў.Х. Развития пространственного представления учащихся в психолого-педагогической литературе. / Международной научно-практической конференции, посвященной 15-летнему юбилею университета Актюбе Актюбе. 2007 йил.
9. Айтувганов Ў.Х. Талабалар ижодий фикрлашининг ривожида ахборотларнинг ўрни. / Электрон таълим миллий тизимини шакллантириш: муаммо ва ечимлар (Ўзбекистон республикаси мустақиллигининг 20 йиллигига бағишланган). Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон миллий университети, олий педагогика институти . Тошкент. -2011йил.

10. Айтувганов Ў.Х. Использования феномена “зоны ближайшего развития” в обучении геометрии сцелью развития творческого мышления учащихся”. / Математика, математик моделлаштириш ва ахборот технологияларининг долзарб масалалари. ТерДУ. 21-22 ноябр. 2012 йил.

11. Айтувганов Ў.Х. Геометриянинг арифметика ва физикага таъсири ҳақида. / Замонавий физиканинг долзарб муаммолари.ТерДУ. Термиз. 2013йил.

12. Айтувганов Ў.Х. Психологик-педагогик адабиётларда ижодий фикрлаш ва унинг ривожланиш босқичлари. / Таълимни модернизациялашда педагогик технологияларни қўллашнинг педагогик –психологик асослари: муоммалар, омиллар, ечимлар” республика илмий-амалий анжумани материаллари. Термиз давлат университети. 30-31 май. 2016 йил.

13. Айтувганов Ў.Х. Творческий подход как необходимое условие подготовки современного учителя. / Республика олий таълим тизимида амалга оширилаётган ислоҳатларнинг истиқболлари. Ўзбекистон республикаси Мудофаа вазирлиги. Тошкент олий умумқўшин қўмондонлик билим юрти. 2017йил

14. Айтувганов Ў.Х. Творческого мышления как категории науки и познавательного процесса личности. / Евразийкий союз ученых (ЕСУ) Ежемесячный научный журнал №5 (62)/2019 6 часть

МУНДАРИЖА

	Кириш..	3
1	Геометриянинг пайдо бўлиши ва унинг математикага таьсири..	10
2	Параметрли масала - талабанинг ижодий фикрлашини ривожлантириш усули сифатида....................................	20
3	Геометрик метод ёрдамида талабалар ижодий фикрлашини ривожлантирувчи параметрик масалаларни ечиш..	29
4	Масала ечимини таҳлил қилишга ўргатиш - талабалар ижодий фикрлашини ривожлантиришнинг асосий компоненти сифатида..	59
	Хулоса..	99
	Адабиётлар..	102

ЎРАЛ ХУДОЙҚУЛОВИЧ АЙТУВГАНОВ

Параметрли масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилишга ўргатиш - интеграция ғоялари асосида талабаларнинг ижодий фикрлашини ривожлантириш усули сифатида

(монография)

ТОШКЕНТ-”TURON-IQBOL”- 2019
100011, Тошкент ш., Навоий кўчаси, 30-Ангор уй
Телефов/ факс: (71)244-25-58

Муҳаррир Ҳ.Зокирова
Техник муҳаррир А. Юлдашева
Мусаҳҳиҳ С.Алимбоева
Компьютерда тайёрловчи К.Голдобина

Нашриёт лицензияси: AI № 223, 16.11.2012.

Босишга 07.10.2019 йилда рухсат этилди. Бичими $60x84^{1}/_{32}$.

«Times Nev Roman» гарнитураси. Офсет босма усулда босилди.

Шартли босма тоғи 5,84. Нашр табоғи 5,8.

Адади 200 нусха. 64-сонли буюрма.
350

«TURON-MATBAA» МЧЖ босмахонасида чоп этилди.

Тошкент ш., Олмазор тумани, Талабалар кўчаси, 2-уй.

Қайдлар учун

Қайдлар учун

5/12

ISBN 978-99-43-14-651-8

9 789943 146518