

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

R.N. SHAMSIYEV, D.N. SHAMSIYEV, SH.T. PIRMATOV

OLİY MATEMATIKA

II QISM

Oliy texnika o‘quv yurtlari talabalari uchun darslik

Toshkent 2019

UO‘K: 517(075.8)

KBK 22.1ya7

Sh.N.Shamsiyev, D.N. Shamsiyev, Sh.T.Pirmatov Oliy matematika. 2 qism darslik. T.:2019.-304 b.

Ushbu darslik oily ta'lim muassasalarining texnika yo'nalishlari talabalari uchun "Oliy matematika" fani dasturi asosida yozilgan bo'lib fanning oddiy differensial tenglamalar, qatorlar nazariyasi elementlari, ikki va uch ulchovli integrallar, egri chiziqli va sirt integrallar mavzulari bayon qilingan. Darslikning har bir mavzusi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan. Paragraflarning har birida mavzuga oid asosiy tushunchalar keltirilgan, tegishli teoremlar isboti bilan va unga doir namunaviy misollar yechimlari bilan keltirilgan. Mavzuga oid nazariy savollar va mustaqil yechish uchun misollar ham berilgan.

Darslik oily ta'lim muassasalarining talabalari va o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar:

Sh. Qosimov	O'zMU, Differensial tenglamalar va matematik fizika kafedrası professori, fizika-matematika fanlari doktori;
B. Xudoyorov	TIQXMI, Oliy matematika kafedrası mudiri, texnika fanlari doktori;
G. Shodmonov	ToshDTU, Oliy matematika kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi;
A. Abdukarimov	ToshDTU, Oliy matematika kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Mazkur darslik Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti kengashi tomonidan nashrga tavsiy etilgan.

KIRISH

Ma'lumki, mamlakatimizda ta'limni jumladan oliy ta'limni yanada rivojlantirish, ta'lim sifatini oshirish, yuqori malakali kadrlar tayyorlash bo'yicha tegishli qarorlar qabul qilinmoqda, topshiriq va ko'rsatmalar berilmoqda.

Hozirgi kunda ta'lim sifati va samaradorligini oshirishda xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalar taxlili asosida tayyorlangan zamonaviy adabiyotlarni yaratish o'z navbatida samarali o'qitishning muhim omillaridan biri bo'lib kelmoqda.

Ushbu havola etilayotgan darslik oliy texnika o'quv yurtlari talabalari uchun mo'ljallangan. Unda keltirilgan mavzular oliy texnika o'quv yurtlarining barcha texnik yo'nalishlari uchun oliy texnika o'quv yurtlari uchun tasdiqlangan namunaviy o'quv dasturiga to'la mos keladi.

Darslikning ikkinchi jildi beshta bobdan iborat bo'lib, boblarning raqamlanish tartibi birinchi jildni davom etadi, yani 10 bobdan boshlanadi. Darslik oily matematika fanining oddiy differensial tenglamalar, sonli va funksional qatorlar, darajali qatorlar, karrali integrallar va ularning tadbiqlari, egri chiziqli, sirt integrallar va ularning tadbiqlariga bag'ishlangan. Bu boblarda zamonaviy xorijiy adabiyotlar tahlili asosida yaratilgan bo'lib, har bir mavzuni yozishda bir qancha xorijiy adabiyotlardan foydalanilgan, mavzular to'liq yoritilgan, tegishli boblar talabalar tomonidan mustaqil o'zlashtirishiga, ularda ko'nikma va malakalarning shakllantirilishiga hamda ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishga yo'naltirilgan.

Darslik oliy texnika o'quv yurtlari talabalari uchun yozilayotganligi e'tiborga olinib ayrim teoremlar isbotsiz keltirildi. Bunday teoremlar isboti bilan qiziqqan kitobxon uni adabiyotlar ro'yxatidagi asosiy adabiyotlardan topishi mumkin.

Darslikning qo'l yozma matnini sinchkovlik bilan o'qib chiqib o'zlarining qimmat baho maslahatlarini ayamagan O'zbekiston Milliy universitetining professori Sh.G. Qosimovga, Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligi mexanizatsiyalash muhandislari instituti professori B. Xudoyorovga, Toshkent davlat texnika universiteti dotsentlari G'. Shodmonov va A. Abdikarimovlarga mualliflar o'zlarining alohida minnatdorchiliklarini bildiradi.

Darslik haqidagi fikr va mulohazalarini bildirgan barcha kitobxonlarga mualliflar oldindan o'z tashakkurlarini bildiradilar.

Darslikda quyidagi belgilashlardan foydalanilgan:

◀, ▶ - teorema isbotining boshlanishi va oxiri;

▶, ◀ - misol yoki masala yechimining boshlanishi va oxiri.

10-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

10.1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. Asosiy tushunchalar

Turli geometrik, fizik va muhandislik masalalarini yechish ko‘pincha muayyan jarayonni tavsiflovchi erkli o‘zgaruvchilarni bu o‘zgaruvchilarning qandaydir funksiyasi va uning hosilalari bilan bog‘lovchi tenglamalarga olib keladi, ya’ni tenglamada noma’lum funksiya o‘zining hosilalari bilan birgalikda qatnashadi. Bir nechta misollar qaraylik.

10.1-Misol. $M(1, 3)$ nuqtadan o‘tuvchi shunday egri chiziqni topingki, uning ixtiyoriy nuqtasidagi urinmasining burchak koeffitsienti mos nuqtaning abssissasi ikkilanganiga teng bo‘lsin.

► Topilishi lozim bo‘lgan egri chiziq $y = f(x)$ bo‘lsin. Ma’lumki, egri chiziq urinmasining burchak koeffitsienti mos nuqtadagi funksiya hosilasiga teng. Demak, masala shartiga ko‘ra qidirilayotgan egri chiziq $y' = 2x$ tenglamani qanoatlantirishi kerak. Bu tenglikni integrallasak $y = x^2 + C$ ni hosil qilamiz. Noma’lum koeffitsient C ni topish uchun tenglikka masala shartidagi nuqta koordinatalarini olib kelib qo‘yamiz va $C = 2$ ni hosil qilamiz. SHunday qilib qidirilayotgan egri chiziq $y = x^2 + 2$ ekan. ◀

10.2-Misol. Harorati θ_0 bo‘lgan jism $t = 0$ vaqtda a ($a > \theta_0$) haroratli muhitga joylashtirildi. Vaqt davomida bu jism harorati o‘zgarishi qonunini toping.

► Haroratning o‘zgarishi qonuni vaqtning funksiyasi bo‘lib uni $\theta(t)$ deb olaylik. Fizikadan ma’lumki, jism sovushining tezligi jism va uni o‘rab turgan muhit haroratlari ayirmasiga proporsional. $\theta(t)$ funksiya kamayuvchiligini e’tiborga olgan holda hosilaning mexanik ma’nosidan

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - a)$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda k - proporsionallik koeffitsienti. ◀

10.1-Ta’rif. Erkli o‘zgaruvchilar, ularning biror funksiyasi va bu funksiyaning hosilalarini (yoki differensiallarini) bog‘lovchi tenglikka differensial

tenglama deb ataladi.

10.2-Ta'rif. Agar differensial tenglamaning erkli o'zgaruvchisi bitta bo'lsa, unga oddiy differensial tenglama deb ataladi.

Demak, oddiy differensial tenglamani yuqoridagilarni e'tiborga olgan holda

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (10.1)$$

kabi yozish mumkin. Bu yerda $y = f(x)$ noma'lum funksiya.

10.3-Ta'rif. Tenglamada qatnashayotgan hosilaning eng yuqori tartibiga differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

Masalan, $y'' + e^x y' = \sin x$ va $xy''' - (y')^2 = 1$ oddiy differensial tenglamalarga misol bo'lib, ulardan birinchisining tartibi ikkiga, ikkinchisining esa uchga teng.

10.4-Ta'rif. Tenglamaga qo'yilganida uni ayniyatga aylantiruvchi ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deyiladi.

$y'' = x$ tenglama uchun $y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ funksiya yechim bo'lib, bu yerda C_1, C_2, C_3 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Yuqoridagi funksiyaning yechim ekanligini tekshirish uchun uni berilgan tenglamaga qo'yish kifoya. SHu bilan birga, masalan $y = \frac{1}{6}x^3 - 6$ funksiya ham berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

10.2. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

$$F(x, y, y') = 0 \quad (10.2)$$

ga birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi deyiladi.

$$y' = f(x, y) \quad (10.3)$$

hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama deb ataladi.

Differensial tenglamaning yechimi integrallash natijasida topilganligi uchun umumiy yechimda C o'zgarmas qatnashadi. Demak, differensial

tenglamaning yechimlari soni cheksiz ko‘p ekan. SHuning uchun yechim $y = \varphi(x, C)$ ko‘rinishdagi funksiyadan iborat bo‘lib, unga **umumiy yechim** deb ataladi.

Erkli o‘zgaruvchining $x = x_0$ qiymatida $y = y_0$ bo‘lsin. Bu shartga boshlang‘ich shart deyilib odatda

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0 \quad (10.4)$$

kabi yoziladi.

10.5-Ta’rif. (10.2) differensial tenglamaning (10.4) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimiga xususiy yechim deyiladi.

Umumiy yechimning (10.4) shartni qanoatlantirishi yechimi o‘zgarmas C ni topishga olib keladi. SHunday qilib differensial tenglamaning xususiy yechimi $y = \varphi(x, C_0)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar umumiy yechimda o‘zgarmas C ga turli qiymatlar bersak, turli xususiy yechimlar hosil bo‘ladi. Geometrik jihatdan qarasak bu yechimlar tekislikda chiziqlar oilasini tashkil etadi. Ana shu chiziqlar oilasini **integral chiziqlar** ham deb ataymiz. Boshlang‘ich (10.4) shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topish geometrik jihatdan yuqoridagi integral chiziqlar orasidan berilgan (x_0, y_0) nuqtadan o‘tuvchisini ajratib olishni anglatadi. Masalan, $y' = 2x$ tenglamaning umumiy integrali $y = x^2 + C$ dan iborat. Integral chiziqlar esa $y = x^2$ parabolani vertikal ravishda parallel ko‘chirishdan hosil qilingan parabolalar oilasidan iborat. Agar yuqoridagi tenglamaga $y(1) = 2$ boshlang‘ich shart qo‘ysak, xususiy yechim (integral chiziq) $y = x^2 + 1$ paraboladan iborat bo‘ladi.

Umuman olganda differensial tenglamalarni yechish jarayonida ko‘ramizki, har doim ham noma’lum funksiyani erkli o‘zgaruvchi orqali ifodalab bo‘lavermaydi. Ba’zi hollarda noma’lum funksiya, erkli o‘zgaruvchi va ixtiyoriy o‘zgarmas orasidagi funksional bog‘lanishni topish imkoni bo‘ladi. Bu fikrlardan kelib chiqqan holda yuqorida aytilgan funksional bog‘lanishga, ya’ni

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

tenglikka (10.2) tenglamaning umumiy yechimi deb qabul qilamiz.

Bizga hosilaga nisbatan yechilgan (10.3) tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama uchun mavjudlik va yagonalik teoremasini keltiramiz.

10.1-Teorema (Koshi). Agar (10.3) tenglamada $f(x, y)$ funksiya va uning $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilasi Oxy tekislikning (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi D sohasida y o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz bo'lsa, (10.3) tenglama $y|_{x=x_0} = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

Differensial tenglamalarning amaliyot masalalari uchun qulay bo'lgan quyidagi ko'rinishini qaraymiz

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0 \quad (10.5)$$

Unga hosilaga nisbatan yechilgan (10.3) tenglamaning differensial ko'rinishi deb ataladi. Agar hosilani differensial ko'rinishda $y' = \frac{dy}{dx}$ kabi yozish mumkin ekanligini e'tiborga olsak (10.3) tenglamani

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

yoki

$$dy = f(x, y)dx$$

kabi shakl almashtirib (10.5) ko'rinishga olib kelish mumkin va aksincha differensial ko'rinishdagi tenglamani hosilaga nisbatan yechilgan tenglamaga olib kelish mumkin. Demak (10.3) va (10.5) tenglamalar o'zaro teng kuchli ekan.

10.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning maxsus yechimlari

Bizga (10.2) differensial tenglama berilgan bo'lib uning umumiy yechimi $y = \varphi(x, C)$ bo'lsin. Faraz qilaylik, (10.2) tenglamaning yana boshqa $y = \psi(x)$ yechimi ham mavjud bo'lib, bu funksiya $y = \varphi(x, C)$ yechimlar oilasiga kirmasin. Bunday funksiya (10.2) tenglamaning maxsus yechimi deb ataladi. Maxsus yechimga mos integral chiziqning har bir nuqtasidan hech bo'lmaganda ikkita

integral chiziq o'tadi. Analitik jihatdan maxsus yechim deb hech bir nuqtasida Koshi masalasi yechimining yagonaligi bajarilmaydigan yechimga aytiladi.

Maxsus yechimlar ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lmaydi. Ularni umumiy yechimdan C ning hech bir qiymatida ajratib olib bo'lmaydi. Agar integral chiziqlar oilasini qursak, maxsus yechim har bir nuqtada birorta integral chiziqqa urinuvchi egri chiziqdan iborat bo'ladi. SHuni ta'kidlash lozimki, har qanday differensial tenglama ham maxsus yechimga ega bo'lavermaydi.

10.3-Misol. $y' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping. Agar mavjud bo'lsa maxsus yechimini toping.



$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^C$$

$$y = C_1 e^{-x}$$

Bu tenglama $y = 0$ maxsus yechimga ham egadir. Bu yechimni umumiy yechimdan hosil qilib bo'lmaydi. $y = 0$ ni umumiy yechimdan $C_1 = 0$ deb hosil qilish mumkin degan fikr noto'g'ridir, chunki $C_1 = e^C \neq 0$. ◀

10.4. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar

Hosilaga nisbatan tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya x va y larning alohida funksiyalari ko'paytmasidan iborat bo'lsin, ya'ni (10.3) tenglamaning ko'rinishi

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{10.6}$$

bo'lsin. Bu tenglamani differensial ko'rinishga o'tkazsak

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \quad (10.7)$$

ni hosil qilamiz. Demak (10.6) va (10.7) ko'rinishdagi tenglamalar o'zaro ekvivalent.

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (108)$$

tenglamaga **o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama** deb ataladi. Bu tenglamani yechish uchun uni o'zgaruvchilari bo'yicha integrallash kifoya bo'lib,

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = S \quad (10.9)$$

Ravshanki, (10.7) tenglamani ham bevosita integrallash yordamida yechish mumkin. Demak, (10.6) ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani (10.7) ko'rinishga olib kelib integrallanadi.

10.4-Misol. O'zgaruvchilari ajralgan

$$(2x - 1)dx + ydy = 0$$

tenglamani yeching.

► Tenglikni bevosita integrallaymiz, u holda

$$\int (2x - 1)dx + \int ydy = 0$$

yoki tenglamaning umumiy yechimi

$$x^2 - x + \frac{1}{2}y^2 = C_1$$

dan iborat. Bu tenglikni shakl almashtirib

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 = C_1 + \frac{1}{4}$$

kabi yozishimiz mumkin. Agar bu yerda $C^2 = C_1 + \frac{1}{4}$ deb olsak

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{C^2} + \frac{y^2}{2C^2} = 1$$

ni hosil qilamiz. Bu chiziqlar esa ellipslar oilasidir. SHunday qilib yuqorida berilgan tenglamaning yechimlari markazi $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ nuqtada bo‘lgan ellipslar oilasidan iborat ekan. ◀

Quyidagi

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (10.10)$$

tenglamaga **o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama** deb ataladi. Bu tenglamaning ikkala tomonini $N_1(y)M_2(x)$ ga bo‘lib yuborsak

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

ko‘rinishdagi o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamani hosil qilamiz.

10.5-Misol. $(x + 1)(y - 1)dx + x(2y - 3)dy = 0$ tenglamani yeching.

► Uni o‘zgaruvchilari ajralgan (10.8) ko‘rinishga olib kelamiz.

$$\frac{x+1}{x}dx + \frac{2y-3}{y-1}dy = 0.$$

Bu tenglamani integrallaymiz

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int \left(2 - \frac{1}{y-1}\right)dy = 0$$

$$(x + \ln x) + (2y - \ln(y - 1)) = C$$

yoki

$$x + 2y + \ln \frac{x}{y-1} = C. \quad \blacktriangleleft$$

10.6-Misol. $(1 + e^{2x})y^2y' = e^x$ tenglamaning $y(0) = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

► Berilgan tenglamani differensial ko‘rinishda yozib olamiz

$$(1 + e^{2x})y^2dy - e^x dx = 0$$

Endi o'zgaruvchilari ajratamiz.

$$y^2 dy - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = 0$$

Oxirgi tenglamani integrallaymiz va dastlabki tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

$$\int y^2 dy - \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \frac{C}{3},$$

$$\frac{y^3}{3} - \operatorname{arctg} e^x = \frac{C}{3},$$

Boshlang'ich shartlardan foydalanib ixtiyoriy o'zgarmasning qiymatini aniqlaymiz.

$$1 = \sqrt[3]{C + \frac{3}{4}\pi}, \quad C = 1 - \frac{3}{4}\pi$$

SHunday qilib dastlabki tenglamaning xususiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}\pi + 3\operatorname{arctg} e^x}. \blacktriangleleft$$

10.5. Bir jinsli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalarning shunday bir sinfi borki, ularni o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalarga keltirish mumkin. Bunday tenglamalarni aniqlash uchun avvalo ba'zi tushunchalarni kiritamiz.

10.6-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ son uchun $z = f(x, y)$ funksiyaga nisbatan

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \tag{10.11}$$

kabi tenglik bajariladigan bo'lsa u holda $z = f(x, y)$ funksiya o'zining argumentlariga nisbatan **n -o'lchovli bir jinsli funksiya** deb yuritiladi.

Agar

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad (10.12)$$

kabi tenglik bajarilsa, qaralayotgan $z = f(x, y)$ funksiya o'zining argumentlariga nisbatan 0 o'lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi.

Bir jinsli funksiyalarga doir misollar qaraylik.

10.7-Misol. ► $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ argumentlariga nisbatan 0 o'lchovli bir jinsli funksiya. Haqiqatdan ham,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2+y^2)} = \frac{xy}{x^2+y^2} = f(x, y). \blacktriangleleft$$

10.8-Misol. ► $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ funksiya o'zining argumentlariga nisbatan 3 o'lchovli bir (argumentli) jinsli funksiyadir. Chunki,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x (\lambda y)^2 + (\lambda x)^2 \lambda y = \lambda^3 (xy^2 + x^2y) = \lambda^3 f(x, y). \blacktriangleleft$$

Aytaylik, xosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglama qaralayotgan bo'lsin:

$$y' = f(x, y) \quad (10.13)$$

10.7-Ta'rif. (10.13) tenglamadagi $f(x, y)$ funksiya o'zining argumentlariga nisbatan 0 o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa u holda bu tenglamani **bir jinsli differensial tenglama** deb ataladi.

Masalan,

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

tenglama bir jinsli tenglamadir. Chunki $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ funksiya yuqoridagi misolga asosan o'zining argumentlariga nisbatan 0 o'lchovli bir jinsli funksiyadir.

Faraz qilaylik, (10.13) tenglama bir jinsli tenglama bo'lsin.

(10.13) tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya (10.12) tenglikni qanoatlantirgani va λ ixtiyoriy bo'lganligi uchun $\lambda = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) deb olsak:

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (10.14)$$

ni hosil qilamiz.

Agar (10.14) tenglamada

$$y = ux \quad (10.15)$$

almashtirish bajarsak $y' = u'x + u$ bo'lib, ularni (10.14) tenglamaga qo'yib,

$$u'x + u = f(1, u)$$

ni hosil qilamiz.

Ushbu tenglamani hosilaga nisbatan echsak

$$u' = \frac{f(1, u) - u}{x} \quad (10.16)$$

ga ega bo'lamiz.

Bu esa noma'lum funksiyaga nisbatan o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib, uning yechimi

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

formula orqali topiladi.

Ushbu tenglikdan yangi noma'lum $u = u(x)$ funksiyani topib va uni (10.15) tenglikka olib borib qo'yamiz. Natijada qaralayotgan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi aniqlangan bo'ladi.

10.9-Misol. $2x^2y' = x^2 + y^2$ differensial tenglamani integrallab, uning $y(1) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

► Ko'rinib turibdiki, tenglama bir jinsli. SHuning uchun $y = ux, y' = u'x + u$ almashtirish bajaramiz.

U holda, $2x^2(u'x + u) = x^2 + (ux)^2$. Bu tenglikni x^2 ga bo'lamiz va quyidagiga ega bo'lamiz.

$$2u + 2x \frac{du}{dx} = 1 + u^2,$$

$$2xdu = (1 + u^2 - 2u)dx$$

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x}$$

Oxirgi tenglikni integrallaymiz:

$$\int \frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{2x} ,$$

$$\int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2} \ln|x| ,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln C ,$$

$$1 = (1-u) \ln (C\sqrt{|x|}).$$

Oxirgi ifodada u ning o'rniga $\frac{y}{x}$ qiymatni qo'yamiz va quyidagi umumiy integralni hosil qilamiz.

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \ln (C\sqrt{|x|}) ,$$

$$x = (x-y) \ln \sqrt{|x|}$$

Buni y ga nisbatan yechib dastlabki differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz

$$y = x - \frac{x}{\ln (C\sqrt{|x|})},$$

$y(1) = 0$ boshlang'ich shartdan foydalanib C ning qiymatini topamiz.

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C} , \quad \ln C = 1 , \quad C = e.$$

SHunday qilib dastlabki tenglamaning xususiy yechimi quyidagicha bo'ladi

$$y = x - \frac{x}{1 - \ln \sqrt{|x|}} . \blacktriangleleft$$

10.6. Bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamalar

YUqorida keltirilgan tenglamalardan tashqari shunday sinf tenglamalar borki, ularni bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin. Bular

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (10.17)$$

ko'rinishdagi tenglamalardir.

Ravshanki, agar $c = c_1 = 0$ bo'lsa tenglama bir jinsli bo'ladi. Ozod hadlarning birortasi noldan farqli bo'lsin. Agar determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa

$$x = u + \alpha; y = v + \beta \quad (10.18)$$

almashtirish bajaramiz. Bu yerda α va β sonlari

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \quad (10.19)$$

tenglamalar sistemasining yechimi.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \quad (10.20)$$

ekanligidan foydalansak (10.17) tenglama (10.18) almashtirishdan so'ng

$$v' = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right) \quad (10.21)$$

ko'rinishga keladi. Oxirgi tenglama esa bir jinslidir. Uni yechib dastlabki o'zgaruvchi x va y larga qaytsak (10.17) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo'lganida $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$ bajariladi va $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ deb olishimiz mumkin. U holda (10.17) tenglama

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right)$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglamada $z = ax + by$ almashtirish bajarsak o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil bo‘ladi.

10.10-Misol. $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$ tenglamani yeching.

► Bu tenglamani $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x-2y+3}$ kabi yozishimiz mumkin. Tenglamaning determinantini hisoblaymiz

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 5 \neq 0$$

Endi

$$\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini topamiz

$$\begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases}$$

Berilgan tenglamada $x = u - 1/5$; $y = v + 7/5$ almashtirishni bajarsak

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1}.$$

Bu tenglamada

$$\frac{v}{u} = t; v = ut; v' = t'u + t$$

almashtirishni bajarsak tenglama

$$t'u + t = \frac{2 + t}{2t - 1}$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uni yechamiz

$$\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \frac{1-2t}{1+t-t^2} dt$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{1-2t}{1+t-t^2} dt$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1+t-t^2| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln|1+t-t^2| = -2\ln|C_1 u|$$

$$\ln|1+t-t^2| = \ln \left| \frac{C_2}{u^2} \right|$$

$$1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2}$$

Endi dastlabki o'zgaruvchilar x va y larga qaytamiz.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1} \right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2}$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 55$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C$$

SHunday qilib

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$$

berilgan differensial tenglamaning umumiy integrali bo'ladi. ◀

10.7. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

10.8-Ta'rif. Agar differensial tenglamaning tarkibidagi noma'lum funksiya hamda uning hosilasi faqat birinchi darajadagina qatnashsalar uni birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb yuritiladi.

Quyidagi

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (10.22)$$

kabi tenglamani birinchi tartibli chiziqli tenglamaning normal shakli deb yuritiladi. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ lar o'zlarining argumentlariga nisbatan uzluksiz funksiyalar. Agar $Q(x) = 0$ bo'lsa tenglama bir jinsli, $Q(x) \neq 0$ bo'lsa bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli chiziqli tenglama deb ataladi.

Masalan, $xy' - 2y = x^2$ tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglamadir, chunki bu tenglamani $y' - \frac{2}{x}y = x$ shaklda yozish mumkin.

Birinchi tartibli bir jinsli tenglamani qaraylik.

$$y' + P(x)y = 0$$

Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan bo'lganligi uchun uni integrallash qiyinchilik tug'dirmaydi.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln y = - \int P(x)dx + \ln C$$

Umumiy yechim

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Bir jinsli bo'lmagan tenglamalarni integrallash uchun Bernulli (o'rniga qo'yish) va Lagranj (o'zgarmasni variatsiyalash) usullarini qo'llash mumkin. Quyida shu usullarni bayon qilamiz.

Bernulli usuli

Bu usulning ma'nosi shundan iboratki, qidirilayotgan funksiya ikkita funksiyaning ko'paytmasi shaklida ifodalanadi, ya'ne

$$y = uv.$$

Bu tenglikni differensiallaymiz

$$y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Hosil bo'lgan ifodani berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

yoki

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$$

Noma'lum funksiya ko'paytma ko'rinishida qidirilayotganligi uchun ko'paytuvchilarini ixtiyoriy ravishda tanlashimiz mumkin.

SHuning uchun, $u(x)$ funksiyaning shunday tanlaymizki

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$$

bo'lsin. YUqorida keltirilganiga ko'ra bu tenglamaning yechimi

$$u = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Ikkinchi noma'lum funksiyaning topish uchun bu funksiyaning dastlabki tenglama (10.22) ga qo'yamiz

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x).$$

U holda

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x),$$

$$Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Bu tenglikni integrallab v ni topamiz:

$$v = \frac{1}{C}Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Topilgan u va v funksiyalarni qo'yib noma'lum funksiya y ni hisoblaymiz.

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \left(\frac{1}{C}Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1 \right)$$

yoki

$$y = e^{-\int P(x)dx} (Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2).$$

Bu esa berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Lagranj usuli.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechishning bu usulini yana **o'zgarmasni variatsiyalash usuli** ham deb atashadi.

Mazkur usulga ko'ra, avvalo bir jinsli tenglamani yechib olamiz, uning yechimi, ma'lumki

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (10.23)$$

Endi bevosita o'zgarmasni variatsiyalash usulini bayon etamiz. Bu usulga binoan (10.23) tenglikdagi uzgarmas C ni vaqtinchalik o'zgaruvchi, ya'ni $C = C(x)$ deb qaraymiz:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (10.24)$$

Bundan hosila olamiz:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))$$

Topilgan y' hamda y ni keltirib (10.22) tenglamaga qo'ysak,

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglama $C = C(x)$ ga nisbatan birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalardir. Uni yechib

$$C(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1 \quad (10.25)$$

ni hosil qilamiz.

(10.25) ni keltirib (10.24) ga qo'ysak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$y = e^{-\int P(x)dx} (Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1).$$

Ushbu tenglik (10.22) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

Demak, (10.22) tenglamani ikkala usulda yechishda ham bir xil natija oldik. CHiziqli differensial tenglamalarni yechish usulini tanlashni kitobxonning ixtiyoriga qoldiramiz.

10.11-Misol. Quyidagi tenglamani

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

integrallang va $y(\pi) = 1$ boshlang'ich shartda Koshi masalasini yeching.

► Bernulli usulidan foydalanamiz.

$$y = uv, y' = u'v + uv'.$$

Quyidagiga ega bo'lamiz

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}.$$

$v' + v \operatorname{tg} x = 0$ tenglamaning xususiy yechimini topamiz.

$$dv + v \operatorname{tg} x dx = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \operatorname{tg} x dx$$

$$\ln|v| = \ln|C_1 \cos x|.$$

$C_1 = 1$ deb olib $v = \cos x$ xususiy yechimni tanlaymiz.

Demak,

$$u'v = \frac{1}{\cos x}$$

yoki

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Bu yerdan

$$u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi esa

$$y = uv = \cos x (tg x + C)$$

Boshlang'ich shartdan foydalanib C ni topamiz

$$1 = (0 + C)(-1),$$

$$C = -1$$

Buni umumiy yechimga olib borib qo'ysak

$$y = \cos x (tg x - 1) = \sin x - \cos x. \blacktriangleleft$$

10.8. Bernulli tenglamasi

Quyidagi tenglamani qaraymiz.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (10.26)$$

Ushbu tenglama $\alpha \neq 0$ va $\alpha \neq 1$ bo'lgan hollarda Bernulli tenglamasi deb yuritiladi.

Agar bu tenglamada $\alpha = 0$ bo'lsa, u chiziqli tenglamaga aylanib qoladi.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa u holda

$$y' = [Q(x) - P(x)]y$$

bo‘lib, bu esa o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Demak (10.26) tenglama Bernulli tenglamasi bo‘lishi uchun α soni 0 va 1 dan tashqari ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lishi lozim ekan. Endi (10.26) tenglikning har ikkala tomonini $y^{-\alpha}$ ga ko‘paytiramiz,

$$y'y^{-\alpha} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x) \quad (10.27)$$

va (10.27) tenglamada

$$z = y^{1-\alpha} \quad (10.28)$$

kabi almashtirish bajaramiz. Bu tenglikning har ikkala tomonini differensiallaymiz. Natijada ushbu

$$\frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y' \quad (10.29)$$

munosabatni hosil qilamiz. (10.28) bilan (10.29) ni keltirib (10.27) tenglamaga qo‘yib

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$$

yoki

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x) \quad (10.30)$$

ni hosil qilamiz.

Ushbu hosil qilingan (10.30) tenglama esa yangi noma'lum $z = z(x)$ ga nisbatan chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamadir. Uni yuqorida qaralagan usullardan biri yordamida yechib, yechimning qiymatini keltirib (10.28) ga qo‘yib Bernulli tenglamasining umumiy yechimini hosil qilamiz.

10.12-Misol. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ tenglamani yeching.

► Tenglamaning ikkala tomonini $x\sqrt{y}$ ga bo‘lamiz, natijada

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda $z = \sqrt{y}$, $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$, $y' = 2\sqrt{y}z'$ deb olamiz.

U holda

$$\frac{1}{\sqrt{y}} 2\sqrt{y} z' - \frac{4}{x} z = x$$

yoki

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}.$$

Bu esa bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamadir. Unga mos bir jinsli tenglamaning olib yechimini topamiz.

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\ln z = 2 \ln x + \ln C$$

$$z = Cx^2$$

$C = C(x)$ deb olib $z = C(x)x^2$ funksiyaning har ikkala tomonini differensiallaymiz:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx},$$

bu ifodani bir jinsli bo'lmagan tenglamaga qo'yamiz:

$$2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx} - \frac{2}{x} C(x)x^2 = \frac{x}{2},$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x},$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \ln x + C_1.$$

Demak,

$$z = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln x + C_1 \right).$$

Teskari almashtirishni qo‘llab oxirgi natijani hosil qilamiz

$$y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln x + C_1 \right)^2. \blacktriangleleft$$

10.9. To‘la differensial tenglama

Agar quyidagi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (10.31)$$

ko‘rinishdagi differensial shaklda berilgan birinchi tartibli differensial tenglamaning chap tarafidagi ifoda biror $U = U(x, y)$ funksiyaning to‘la differensialini ifodalasa, ya’ni

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (10.32)$$

bo‘lsa, u holda qaralayotgan (10.31) tenglamani to‘la differensial tenglama deb ataladi.

Agar (10.31) tenglama to‘la differensial tenglama bo‘lsa, u holda (10.32) tenglikka binoan $dU = 0$ bo‘lib, undan esa

$$U(x, y) = C \quad (10.33)$$

ni hosil qilamiz. Aynan shu (10.33) ifoda to‘la differensial tenglamaning umumiy integrali bo‘ladi. Demak (10.31) ko‘rinishdani tenglamani yechish $U(x, y)$ funksiyaning topishga keltiriladi.

SHunday qilib (10.31) tenglamani yechish uchun quyidagilarni aniqlash lozim:

- 1) qanday holda tenglamaning chap tomoni biror $U(x, y)$ funksiyaning to‘la differensial bo‘ladi;
- 2) bu funksiyaning qanday topish kerak.

Agar $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ differensial forma $U(x, y)$ funksiyaning to‘la differensial bo‘lsa

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

deb yozish mumkin. YA'ni

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$$

Birinchi tenglamani y bo'yicha, ikkinchisini x bo'yicha differensiallab ikkinchi tartibli aralash hosilalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Bu tengliklarning chap tomonlari bir xil bo'lganligi uchun (10.31) tenglama to'la differensialli bo'lishi shartini ifodalovchi teoremaga kelimiz.

10.2-Teorema. Agar differensial tenglama (10.31) ko'rinishda bo'lib, undagi $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar o'zlarining birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan birgalikda biror D -cohaning barcha nuqtalarida uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda uning to'la differensial tenglama bo'lishi uchun quyidagi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (10.34)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

To'la differensialli (10.31) tenglamani yechish uchun (10.32) shartlarni tekshiramiz va $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$ shartlarning birini, masalan birinchisini x bo'yicha integrallaymiz, u holda

$$U = \int M(x, y) dx + \varphi(y) \quad (10.35)$$

ni hosil qilamiz. Integrallash natijasida o'zgarmas son emas, balki y ning funksiyasi $\varphi(y)$ hosil bo'lishiga sabab, integrallash jarayonida y o'zgarmas parametr deb qaralmoqda. Endi $\varphi(y)$ ni topish uchun (10.35) tenglikni y bo'yicha

differentensiallab, $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$ ga qo'yamiz. Natijada

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \varphi'(y)$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx.$$

Hosil bo'lgan tenglikni y bo'yicha integrallab, noma'lum funksiya $\varphi(y)$ ni topamiz. Integrallashdan oldin, $\varphi(y)$ funksiyaning x ga bog'liq emasligini isbotlashimiz lozim. Buning uchun $\varphi(y)$ funksiyadan x bo'yicha hosila olib tekshiramiz:

$$\begin{aligned} [\varphi'(y)]'_x &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Endi $\varphi(y)$ funksiyaning aniqlaymiz

$$\varphi(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C$$

Bu natijani (10.35) ga qo'ysak

$$U = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C$$

U holda berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$\int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy = C$$

ko'rinishda bo'ladi.

SHuni ta'kidlash lozimki, to'la differensial tenglamani yechish uchun hosil qilingan bu formulani qo'llash shart emas. Agar bu formulani hosil qilish uchun qo'llanilgan usuldan foydalansak, yechim nisbatan sodda ko'rinishda bo'ladi.

10.13-Misol. $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$ tenglamani yeching.

► $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiramiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x$$

Demak, tenglama to'la differensialli. U funksiyani aniqlaymiz.

$$U = \int M(x, y) dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 10xy)dx + \varphi(y) = x^3 + 5x^2y + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 5x^2 + \varphi'(y) = N(x, y) = 5x^2 - 1$$

$$\varphi'(y) = -1$$

$$\varphi(y) = \int (-1)dy = -y + C_1$$

Natijada

$$U = x^3 + 5x^2y - y + C_1$$

Berilgan differensial tenglamaning umumiy integrali esa

$$x^3 + 5x^2y - y = C$$

dan iborat. ◀

10.10. YUqori tartibli differensial tenglamalar

Ma'lumki, differensial tenglamaning tartibi uning tarkibidagi noma'lum funksiyaning hosilasi tartibi bilan aniqlanadi. Agar biror tenglamaning tarkibida noma'lum funksiyaning n -chi tartibli hosilasi ishtirok etsa uni biz n -chi tartibli tenglama deb ataymiz. Umuman n -chi tartibli tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (10.36)$$

bu yerda F o'zining argumentlariga nisbatan uzluksiz funksiyadir.

Ushbu tenglamani n -tartibli hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni yechib quyidagini hosil qilamiz.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (10.37)$$

Birinchi tartibli tenglamalarda bo'lgani kabi n -chi tartibli tenglamalarning ham umumiy va xususiy yechimlari tushunchalari mavjud. n -chi tartibli differensial tenglama umumiy yechimini topish uchun, uni n - marta integrallanganligi sababli uning tarkibida n ta $S_1, S_2, \dots, S_n$ kabi o'zgarmaslar ishtirok etadi. Ana shu o'zgarmaslarga muayyan qiymatlar berilganida differensial tenglamaning mos xususiy yechimlari hosil bo'ladi. Odatda n -chi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi topilgandan keyin berilgan biron bir qo'shimcha shartlar orqali o'zgarmaslarning muayyan qiymatlari aniqlanadi. Demak n ta o'zgarmasni topish uchun n ta shart qo'yilishi lozim. O'sha berilgan qo'shimcha shartlar n -chi tartibli tenglamaning boshlang'ich shartlari deb yuritiladi. SHunday qilib

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (10.38)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga **xususiy yechim**, (10.36) tenglamaning (10.38) shartlardagi yechimini topishga esa **Koshi masalasini** yechish deyiladi.

Biz quyida n -tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

10.3-Teorema (Koshi). $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya va uning $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalari $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ nuqtani o'z ichiga oluvchi biror D sohada uzluksiz bo'lsalar

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

tenglamaning

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechimi mavjud va yagonadir.

Yechimini analitik topish mumkin bo'lgan yuqori tartibli differensial tenglamalarni bir necha turga bo'lish mumkin. Bunday tenglamalarning yechimlarini topish usullarini batafsil o'rganamiz.

Tartiblari pasaytiriladigan tenglamalar.

YUqori tartibli differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish- bunday tenglamalarni yechishning asosiy usulidir. Bu usul tenglamaning umumiy yechimini oson topishning imkonini beradi, lekin uni juda tor sinfdagi tenglamalargagina qo'llash mumkin. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan hollarni qarab chiqamiz:

a) Quyidagi ko'rinishdagi n - tartibli tenglamani qaraymiz.

$$y^{(n)} = f(x) \quad (10.39)$$

Ushbu tenglamaning umumiy yechimi uni ketma-ket n marta integrallash orqali topiladi:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}(y^{(n-1)})$$

ekanligidan

$$\frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = f(x)$$

$$d(y^{(n-1)}) = f(x)dx$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

YUqoridagiga o'xshash jarayonni bajarib,

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx \right] + C_1x + C_2$$

... ..

$$y = \int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

larni hosil qilamiz.

Oxirgi tenglik esa (10.39) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

10.14-Misol. $y''' = \sin 2x$ tenglamaning $x = \frac{\pi}{2}$ da $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi aniqlansin.

► Berilgan tenglamani ketma-ket 3 marta integrallaymiz:

$$y'' = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$$

$$y' = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8} \cos 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Endi boshlang'ich shartlarni hisobga olsak,

$$1 = -\frac{1}{8} + C_1 \frac{\pi^2}{8} + C_2 \frac{\pi}{2} + C_3$$

$$0 = C_1 \frac{\pi}{2} + C_2$$

$$-1 = \frac{1}{2} + C_1$$

bo'lib, undan

$$C_1 = -\frac{3}{2}, C_2 = \frac{3\pi}{4}, C_3 = -\frac{3\pi^2}{16} + \frac{9}{8}$$

larni hosil qilamiz. Topilgan bu qiymatlarni umumiy yechimga qo'yib, tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz.

$$y = \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3\pi}{4} x - \frac{3\pi^2}{16} + \frac{9}{8}. \blacktriangleleft$$

b) Tarkibida noma'lum funksiya va uning $(k - 1)$ tartibgacha bo'lgan hosilalari ishtirok etmagan quyidagi n -tartibli tenglamani qaraylik:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (10.40)$$

Bu tenglamada $y^{(k)} = z$ almashtirish bajarsak va

$$y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

larni hisobga olsak, $z(x)$ funksiyaga nisbatan quyidagi

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

$(n - k)$ tartibli tenglamani hosil qilamiz.

Aytaylik, bu tenglamada $z = z(x)$ no'malum funksiyani topish mumkin bo'lsin. Ma'lumki, u holda yechim $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ ko'rinishda bo'lib, natijada noma'lum funksiya nisbatan (10.39) ko'rinishdagi

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi uni k marta integrallash orqali topiladi.

10.15-Misol. $xy'' - y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

► Yechish. Tenglamaning tartibini pasaytirish uchun $y' = z$ deb belgilash kiritsak, qaralayotgan tenglama

$$xz' - z = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadan iborat va uning yechimi $z = C_1 x$ bo'ladi. U holda

$$y' = C_1 x$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab berilgan tenglamaning umumiy yechimi ega bo'lamiz

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2. \blacktriangleleft$$

v) Tarkibida x erkli o'zgaruvchi oshkor ravishda ishtirok etmagan quyidagi n - tartibli tenglamani qaraylik:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (10.41)$$

Bunday holda $y' = p(y)$ almashtirishdan foydalanib tenglamaning tartibini bittaga pasaytirish mumkin.

Haqiqatdan ham, murakkab funktsiyani differensiallash formulasiga asosan,

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}, \dots$$

larni hosil qilamiz.

Natijada, yangi noma'lum funktsiya $p = p(y)$ ga nisbatan quyidagi

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0 \quad (10.42)$$

$(n - 1)$ tartibli tenglamani hosil qilamiz. Aytaylik, (10.42) tenglama

$$p = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

ko'rinishdagi yechimga ega bo'lsin. U holda (10.41) tenglamaning yechimi $y' = p(y)$ ga asosan o'zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = dx$$

tenglamani yechish orqali topiladi.

10.16-Misol. $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

► $p = y', \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0$$

yoki

$$p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$1) \ y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0$$

yoki shakl almashtirishdan so'ng

$$\frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y}$$

Hosil bo'lgan tenglamani yechish uchun $u = \frac{p}{y}$ almashtirish bajaramiz. Natijada

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u,$$

$$du = 4 \frac{dy}{y},$$

$$\int du = 4 \int \frac{dy}{y},$$

$$u = 4\ln|y| + 4\ln|C_1|,$$

$$u = 4\ln|C_1y|,$$

$$p = 4y\ln|C_1y|,$$

$p = \frac{dy}{dx}$ ekanligini hisobga olsak

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1y|,$$

$$\int \frac{dy}{4y\ln|C_1y|} = \int dx,$$

$$x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1y|)}{\ln|C_1y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1y|| + C_2.$$

Demak umumiy integral quyidagiga teng

$$4x + C = \ln|\ln|C_1y||.$$

$$2) \ p = 0, \quad y' = 0, \quad y = S$$

SHunday qilib tenglamaning ikkita umumiy yechimini topdik. ◀

10.11. YUqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

10.9-Ta'rif. Noma'lum funksiya y va uning $y', y'', \dots, y^{(n)}$ hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

tenglamaga n tartibli chiziqli differensial tenglama deb ataladi. Bu yerda $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ o'z argumentiga nisbatan uzluksiz funksiyalar yoki o'zgarmas sonlardan iborat. SHuningdek $a_0(x) \neq 0$, aks holda tenglamaning tartibi pasayib qoladi. Demak yuqoridagi tenglamani $a_0(x)$ ga bo'lib yuborib n tartibli chiziqli differensial tenglamaning ko'rinishi

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (10.43)$$

kabi deb qabul qilishimiz mumkin.

Agar $f(x) = 0$ bo'lsa

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (10.44)$$

tenglama n tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglama, (10.43) ga esa bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi.

YUqori tartibli chiziqli differensial tenglamalarning chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalardan farqli muhim xususiyatini ta'kidlab o'tmoqchimiz. CHiziqsiz bo'lgan differensial tenglamalar uchun xususiy yechim umumiy yechimdan olinadi, chiziqli differensial tenglamalarda esa, aksincha umumiy yechim xususiy yechimlardan tuziladi. Chiziqli differensial tenglamalarning yechimi nisbatan osonroq topilgani uchun, ular differensial tenglamlarning ko'proq o'rganilgan sinfini tashkil etadi. Agar biror amaliy masalani hal etish jarayonida chiziqsiz differensial tenglamani yechishga to'g'ri kelsa, ko'pincha taqribiy usul qo'llanilib unga yaqinroq bo'lgan chiziqli differensial tenglama bilan almashtiriladi.

Biz soddalik uchun ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarni integrallash usullarini qaraymiz. Bu tenglamalar uchun qo'llanilgan barcha usullarni ixtiyoriy tartibli tenglamalar uchun ham bevosita qo'llash mumkin.

10.12. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (10.45)$$

differensial tenglamani qaraylik.

10.4-Teorema. Agar y_1 va y_2 (10.45) tenglamaning yechimlari, C ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa, u holda Cy_1 hamda $y_1 + y_2$ lar ham shu tenglamaning yechimlari bo'ladi.

◀ Cy_1 ifodani (10.45) tenglamaga qo'yamiz:

$$(Cy_1)'' + a_1(x)(Cy_1)' + a_2(x)(Cy_1) = C(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) = 0.$$

Demak, Cy_1 tenglamaning yechimi.

y_1 va y_2 funksiyalar (10.45) tenglamaning yechimlari bo'lganligi uchun

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$$

Bu tengliklarni qo'shib yuborsak

$$(y_1'' + y_2'') + a_1(x)(y_1' + y_2') + a_2(x)(y_1 + y_2) = 0$$

SHunday qilib teorema isbot bo'ldi. ►

Bu teoremadan y_1 va y_2 funksiyalar bilan birgalikda $C_1y_1 + C_2y_2$ ham tenglamaning yechimi bo'lishi kelib chiqadi.

10.10-Ta'rif. y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli bog'liqmas yoki chiziqli erkli deyiladi, agar

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$$

bo'lsa. Agar biror λ soni mavjud bo'lib, barcha x lar uchun $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ shart bajarilsa,

bu funksiyalar chiziqli bog'liq deyiladi.

Masalan, $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar chiziqli erkli, chunki $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq \text{const}; e^{2x}$

va $3e^{2x}$ funksiyalar esa $\frac{e^{2x}}{3e^{2x}} = \frac{1}{3}$ bo'lganligi uchun chiziqli bog'liq.

10.11-Ta'rif. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning (a, b) intervalda chiziqli erkli bo'lgan ixtiyoriy ikkita yechimi shu tenglamaning **fundamental yechimlari sistemasi** deb ataladi.

10.12-Ta'rif. y_1 va y_2 funksiyalardan tuzilgan

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

determinantga **Vronskiy determinanti** deyiladi.

10.5-Teorema. Agar y_1 va y_2 funksiyalar (a, b) intervalda o'zaro chiziqli bog'liq bo'lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti bu intervalda nolga teng.

◀ y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lganligi uchun $y_1 = \lambda y_2$. Bu funksiyalarning Vronskiy determinantini tuzsak

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \blacktriangleright$$

10.6-Teorema. Agar y_1 va y_2 funksiyalar (a, b) intervalda o'zaro erkli va (10.45) tenglamaning yechimi bo'lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti bu intervalning barcha nuqtalarida noldan farqli.

◀ $y \equiv 0$ funksiya (10.45) tenglamaning yechimi va bu funksiya

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \quad (10.46)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi.

Teskarisini faraz qilamiz. x_0 nuqtada Vronskiy determinanti nolga teng bo'lsin.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Asosiy determinanti $W(x_0)$ bo'lgan bir jinsli sistema tuzaylik.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (10.47)$$

Bu sistemaning asosiy determinanti nolga teng bo'lganligi uchun, uning noldan farqli yechimi bor. Quyidagi funktsiyani tuzamiz

$$\tilde{y}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

Bu yerda α_1 va α_2 sonlari (10.47) sistemaning noldan farqli yechimi. 1- teorema asosan hosil qilingan funktsiya ham (10.45) tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan tashqari funktsiya (10.47) sistemani qanoatlantirgani uchun (10.46) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishi kerak

$$\tilde{y}(x_0) = 0, \quad \tilde{y}'(x_0) = 0.$$

Koshi masalasining yechimi yagonaligi haqidagi teorema asosan,

$$\tilde{y}(x) \equiv 0,$$

ya'ni

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0.$$

Bu esa $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funktsiyalarning chiziqli erkli ekanligiga zid. Teorema isbot bo'ldi. ►

Fundamental yechimlar sistemasi tushunchasidan foydalanib quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

10.7-Teorema. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning yechimlari sistemasi fundamental bo'lishi uchun ularning Vronskiy determinanti nolga teng bo'lmasligi zarur va yetarli.

10.8-Teorema. Agar y_1 va y_2 funktsiyalar ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning (a, b) intervaldagi fundamental yechimlari sistemasi bo'lsa, bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{10.48}$$

ko'rinishda bo'ladi.

◄ $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsin. C_1 va C_2 o'zgarmlarni shunday tanlaylikki, (10.48) funktsiya bu boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin. Boshlang'ich shartlarni (10.48) funktsiyaga qo'yak

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz.

Bu sistemaning determinanti y_1 va y_2 funksiyalar Vronskiy determinantining x_0 nuqtadagi qiymatidan iborat bo'lganligi uchun 3- teorema asosan noldan farqli. Demak sistemaning noldan farqli yechimi bor, ya'ni hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli shunday S_1 va S_2 o'zgarmaslar mavjudki (10.48) funksiya yuqoridagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi. Teorema isbot bo'ldi. ►

Yuqoridagi fikr mulohazalarga asosan, bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi topish, uning fundamental yechilari sistemasini topishga keltirilar ekan. Biroq, tenglama koefitsientlari funksiyalardan iborat bo'lganida, bu masalani umumiy holda hal qilib bo'lmaydi. SHunday bo'lishiga qaramasdan, agar bitta noldan farqli yechim ma'lum bo'lsa masalani yechish mumkin.

10.9-Teorema. Agar $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ tenglamaning birorta noldan farqli yechimi $y = y_1$ berilgan bo'lsa, uning umumiy yechimini

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x) dx} dx + C_1 y_1.$$

SHunday qilib umumiy yechimni topish uchun birorta xususiy yechimni topish etarli ekan. Lekin ana shu xususiy yechimni topish ham ko'pincha qiyin bo'ladi.

10.17-Misol. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ tenglamani yeching.

► Bu ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o'zgaruvchi koefitsientli differensial tenglama. Umumiy yechimni topish uchun biror xususiy yechimni topish zarur.

$y_1 = x$ funksiya bunday xususiy yechim bo'la oladi, bu funksiyaning berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$y'_1 = 1, \quad y''_1 = 0, \quad 0 - 2x + 2x = 0$$

Berilgan tenglamaga shakl almashtiramiz:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0$$

10.9- teorema asosan umumiy yechim

$$y = C_2 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx + C_1 x$$

Bu tenglikdagi integralni hisoblasak

$$y = C_2 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_1 x,$$

$$y = C_2 x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_1 x,$$

$$y = C_1 x + C_2 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx,$$

$$y = C_1 x + C_2 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right].$$

SHunday qilib tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 x + C_2 + C_3 x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|. \blacktriangleleft$$

10.13. Ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (10.49)$$

differensial tenglamani qaraylik.

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

ni (10.49) ga mos keluvchi bir jinsli tenglama deb ataymiz va uning umumiy yechimi 10.8- teorema asosan

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

kabi yozilishi ma'lum.

10.10-Teorema. Agar $\tilde{y}$ (10.49) tenglamaning biror xususiy yechimi, $\bar{y}$ unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan (10.49) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \bar{y} + \tilde{y} \quad (10.50)$$

kabi ifodalanadi.

◀ Dastlab (10.50) funksiya bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi bo'lishini ko'rsataylik. $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning, $\tilde{y}$ bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimlari bo'lganligi uchun

$$\bar{y}'' + a_1(x)\bar{y}' + a_2(x)\bar{y} = 0,$$

$$\tilde{y}'' + a_1(x)\tilde{y}' + a_2(x)\tilde{y} = f(x).$$

Bu ikkala tenglikdan

$$(\bar{y}'' + \tilde{y}'') + a_1(x)(\bar{y}' + \tilde{y}') + a_2(x)(\bar{y} + \tilde{y}) = f(x).$$

Demak, $\bar{y} + \tilde{y}$ funksiya (10.49) tenglamaning yechimi. Uning umumiy yechim bo'lishini isbotlash uchun, bu yechim tarkibidagi ixtiyoriy o'zgarmaslarni shunday tanlaymizki,

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

boshlang'ich shartlar har qanday bo'lganida ham $\bar{y} + \tilde{y}$ funksiya ana shu shartlarni qanoatlantiradi. Avvalo yechimni

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y} \quad (10.51)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

$y = \varphi(x)$ funksiya (10.49) tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi biror yechimi bo'lsin. Uni (10.51) yechimdan C_1 va C_2 larni mos ravishda tanlab olish hisobiga hosil qilish mumkinligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham (10.51) funksiyani boshlang'ich shartlarga qo'ysak

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \tilde{y}'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - \tilde{y}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - \tilde{y}'(x_0). \end{cases}$$

Bu sistemaning determinanti o'zaro chiziqli erkli bo'lgan y_1 va y_2 xususiy yechimlar x_0 nuqtadagi qiymatining Vronskiy determinantidan iborat. 10.6-teoremaga asosan u noldan farqli, demak sistema noldan farqli yechimga ega. SHunday qilib C_1 va C_2 larning shunday qiymatlari mavjudki, (10.51) funksiya (10.49) tenglamaning yechimi bo'ladi. Yechim yagonaligi haqidagi teoremaga asosan $y = \varphi(x)$ funksiya bilan bir xil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi. ►

10.14. Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}$ ma'lum bo'lsa bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topish masalasini hal qilamiz. Buning uchun (10.49) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini olamiz va bu yechimdagi ixtiyoriy o'zgarmaslarni x ning funksiyalari bilan almashtiramiz

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \quad (10.52)$$

$C_1(x)$ va $C_2(x)$ larni shunday tanlaymizki, (10.52) funksiya bir jinsli bo'lmagan (10.49) tenglamaning xususiy yechimi bo'lsin. Demak ikkita noma'lumni topish uchun ikkita tenglama hosil qilishimiz kerak. Buning uchun (10.52) tenglikni differensiallaymiz (bundan keyin yozish qulayligi uchun x larni tushirib qoldiramiz):

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Oxirgi tenglikda

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$

deb olamiz. Qo'yilgan bu shartda birinchi tartibli hosila

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

ko‘rinishga keladi. Uni yana bir marta differensiallaymiz

$$y'' = S_1' y_1' + S_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

Endi y, y' va y'' larni (10.49) tenglamaga qo‘yamiz, natijada

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

yoki

$$C_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

y_1 va y_2 bir jinsli tenglamaning ildizlari bo‘lganligi uchun birinchi ikkita qavs ichidagi ifodalar nolga teng. U holda

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

SHunday qilib $C_1'(x)$ va $C_2'(x)$ noma'lum funksiyalar

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

sistemaning yechimi bo‘lsa, (10.52) funksiya bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechimi bo‘ladi. Bu sistemaning determinanti chiziqli erkli y_1 va y_2 funksiyalarning Vronskiy determinanti bo‘lganligi uchun noldan farqli. Demak, C_1' va C_2' funksiyalarni aniqlash mumkin. Ularni ma'lum

$$C_1'(x) = \alpha(x) \text{ va } C_2'(x) = \beta(x)$$

funksiyalar deb olib integralaymiz

$$C_1(x) = \int \alpha(x) dx + C_{10},$$

$$C_2(x) = \int \beta(x) dx + C_{20}.$$

Hosil qilingan funksiyalarni (10.52) ga qo‘yib bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

10.15. Ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

Koeffitsientlari o'zgaras sonlardan iborat bo'lgan ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani qaraylik

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (10.53)$$

YUqorida, agar bu tenglamaning ikkita o'zaro chiziqli erkli yechimini topsak berilgan tenglamaning umumiy yechimi shu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lishini isbotlagan edik. SHuning uchun tenglamaning ikkita o'zaro chiziqli erkli xususiy yechimini qidiramiz. Ana shu maqsadda xususiy yechimlarni

$$y = e^{kx} \text{ (} k \text{ o'zgaras son)} \quad (10.54)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu funksiya uchun

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Funksiya va uning hosilalarini (10.53) tenglamaga qo'ysak

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

yoki

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$e^{kx} \neq 0$ bo'lganligi uchun oxirgi tenglikni e^{kx} ga bo'lamiz, natijada

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (10.55)$$

Tenglamani hosil qilamiz.

Demak, shunday xulosaga keldikki k soni (10.55) kvadrat tenglamaning ildizi bo'lsa, e^{kx} funksiya (10.53) tenglamaning yechimi bo'lar ekan. (10.55) tenglama bir jinsli (10.53) tenglamaning **xarakteristik tenglamasi** deb ataladi.

Ma'lumki kvadrat tenglama har doim ikkita k_1 va k_2 ildizlarga ega bo'lib, ularni

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad k_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

formulalar bilan hisoblanadi. Bu ildizlar diskriminantning qiymatiga bog'liq bo'lib, quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

- a) k_1 va k_2 haqiqiy sonlar va ular o'zaro teng emas ($D > 0$), ya'ni $k_1 \neq k_2$;
- b) k_1 va k_2 haqiqiy va o'zaro teng sonlar ($D = 0$);
- v) k_1 va k_2 kompleks va o'zaro qo'shma ($D < 0$).

Bu hollarning har birini alohida tahlil qilamiz.

- a) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va turli sonlar ($k_1 \neq k_2$).

Bu holda (10.53) tenglamaning xususiy yechimlari (10.54) formulaga asosan

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

funksiyalardan iborat. Endi hosil qilingan bu ikki yechimni chiziqli erklilikka tekshirish qoladi. Haqiqatan ham, chiziqli erklilik ta'rifiga ko'ra

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$$

chunki shartga ko'ra k_1 va k_2 turli sonlar. Demak, y_1 va y_2 fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi. 10.8- teorema ga asosan (10.53) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

kabi bo'ladi.

10.18-Misol. Ushbu $y'' - 4y' - 5y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

► Berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2 - 4k - 5 = 0.$$

Uning ildizlari $k_1 = -1$ va $k_2 = 5$. Bu ildizlarga mos xususiy yechimlar $y_1 = e^{-x}$ va $y_2 = e^{5x}$, umumiy yechim esa

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$$

bo'ladi. ◀

b) Xarakteristik tenglamaning diskriminanti nolga teng bo‘lib, ildizlar o‘zaro teng, ya’ni $k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$.

Bu holda $y_1 = e^{kx}$ va $y_2 = e^{kx}$ xususiy yechimlar chiziqli bog‘liq, chunki

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{kx}}{e^{kx}} = 1.$$

Demak, yana bitta xususiy yechim topishimiz kerak bo‘ladi. Bunday funksiya sifatida $y = xe^{kx}$ ni olish mumkinligini ko‘rsatamiz. Bu funksiya (10.53) tenglamani qanoatlantiradi, chunki

$$y' = e^{kx} + kxe^{kx},$$

$$y'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx}$$

va (10.53) tenglamaga quyib

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + pe^{kx} + pkxe^{kx} + qxe^{kx} = 0,$$

tenglama ikkala tomonini e^{kx} bo‘lib

$$2k + k^2x + p + pkx + qx = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Oxirgi tenglikdan

$$2k + p = 0, \quad k^2 + pk + q = 0.$$

Yoki ikkala tenglikdan ham $k = -\frac{p}{2}$. Demak, $y_2 = xe^{kx}$ funksiya (10.53) tenglamaning yechimi.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \frac{1}{x} \neq \text{const.}$$

Bu tenglikdan y_1 va y_2 chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi. SHunday qilib xarakteristik tenglamaning ildizlari teng bo‘lgan holda umumiy yechim

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

dan iborat.

10.19-Misol. Ushbu $y'' - 6y' + 9y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

► Xarakteristik tenglama

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

bo'lib uning ildizi $k = 3$. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}. \blacktriangleleft$$

v) Faraz qilaylik xarakteristik tenglamaning diskriminanti $D < 0$ bo'lsin. Bu holda xarakteristik tenglamaning ildizlari o'zaro bir-biriga nisbatan qo'shma bo'lgan kompleks sonlardan iborat, ya'ni $k_1 = \alpha + i\beta$ $k_2 = \alpha - i\beta$ bo'lib, xususiy yechimlar

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

yoki

$$y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x}, \quad y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Eyler formulalari deb ataluvchi

$$e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x$$

formulalardan foydalansak, u holda xususiy yechimlarni

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned} \quad (10.56)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ushbu yechimlardan foydalangan holda (10.53) tenglamaning umumiy yechimini yozishda quyidagi lemmadan foydalanamiz.

Lemma. Agar biror $y = u(x) + iv(x)$ haqiqiy o'zgaruvchili kompleks funksiya (10.53) tenglamaning yechimi bo'lsa u holda uning haqiqiy va mavhum

qismlari bo'lgan $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri ham shu tenglamaning yechimi bo'la oladi.

◀ $y = u(x) + iv(x)$ ifodani (10.53) tenglamaga qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] = 0$$

yoki

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Ma'lumki kompleks o'zgaruvchili funksiya, haqiqiy qismi va mavhum qismi nolga teng bo'lganda va faqat shundagina, nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$u'' + pu' + qu = 0, v'' + pv' + qv = 0.$$

Biz $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri (10.53) tenglamaning ildizi ekanligini isbot qildik. ►

Ushbu lemmaga binoan, (10.56) tengliklardagi $e^{\alpha x} \cos \beta x$ bilan $e^{\alpha x} \sin \beta x$ larning har biri alohida-alohida (10.53) tenglamaning yechimi bo'ladi. Bu yechimlarni

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \tilde{y}_2 &= e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

ko'rinishda belgilab olaylik. Ularning o'zaro chiziqli bog'lanmagan funksiyalar ekanligini ko'rish qiyin emas, chunki

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} x \neq \operatorname{const}$$

SHu boisdan (10.53) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi.

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

10.20-Misol. $y'' - 6y' + 25y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topaylik:

►

$$k^2 - 6k + 25 = 0$$

$$D = -64 < 0$$

Demak $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$. U holda $\alpha = 3$ va $\beta = 4$ ekanligiga asosan umumiy yechim

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ◀

10.16. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

Quyidagi

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (10.57)$$

tenglamani qaraylik. Bu yerda p va q haqiqiy sonlar, $f(x)$ biror uzluksiz funksiya. YUqorida bunday ko‘rinishdagi tenglamalarning umumiy yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning biror xususiy yechimlari yig‘indisidan iborat ekanligi ko‘rsatilgan edi. Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini umumiy holda o‘zgarmasni variatsiyalash usuli bilan topish mumkin.

Bizga oldingi mavzudan o‘zgarmas koeffitsientli tenglama uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish usuli ma’lum. Bir jinsli bo‘lmagan (10.57) tenglama o‘ng tomonning ba’zi maxsus ko‘rinishlarida xususiy yechimni integrallashni qo‘llamasdan topish mumkin bo‘ladi. Biz uni xususiy yechim shaklini tanlash usuli deb ataymiz. O‘ng tomondagi funksiyaning quyidagi xususiy ko‘rinishlarini qarab chiqamiz.

I. Tenglamaning o‘ng tomoni n darajali ko‘phaddan iborat

$$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (10.58)$$

O‘ng tomonning ushbu ko‘rinishi uchun xususiy yechim

$$k^2 + pk + q = 0$$

xarakteristik tenglama ildizlariga bog‘liq bo‘lib, quyidagi hollarni ajratamiz:

a) nol soni xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Bu holda xususiy yechimni

$$\tilde{y} = Q_n(x)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerda $Q_n(x)$ koeffitsientlari aniqlanishi lozim bo‘lgan n darajali ko‘phad. $\tilde{y}$ funksiyani (10.57) tenglamaga qo‘ysak ikkala tomonida ham n darajali ko‘phadlar bo‘lgan

$$(Q_n(x))'' + p(Q_n(x))' + qQ_n(x) = P_n(x) \quad (10.59)$$

tenglikni hosil qilamiz. Mos koeffitsientlarni tenglashtirib $n + 1$ noma'lumli $n + 1$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uni yechib noma'lum ko‘phad $Q_n(x)$, ya'ni xususiy yechimni aniqlaymiz.

b) nol soni xarakteristik tenglamaning ildizi, ya'ni $q = 0$. Bu holda $\tilde{y} = Q_n(x)$ deb olsak (10.59) tenglikning chap tomonida $n - 1$ darajali ko‘phad hosil bo‘ladi, chunki $(Q_n(x))''$ va $(Q_n(x))'$ larning darajalari n dan past. Demak (10.59) tenglik o‘rinli bo‘lmay qoladi. SHuning uchun o‘ng tomonni

$$\tilde{y} = xQ_n(x)$$

kabi, ya'ni ozod hadi nolga teng bo‘lgan $n + 1$ darajali ko‘phad ko‘rinishda qidiramiz. Topilishi lozim bo‘lgan funksiyani (10.57) ga qo‘ysak

$$(xQ_n(x))'' + p(xQ_n(x))' = P_n(x)$$

ni hosil qilamiz. Mos koeffitsientlarni tenglashtirib yuqoridagi kabi $n + 1$ noma'lumli $n + 1$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

v) nol soni xarakteristik tenglamaning karrali ildizi, ya'ni $p = 0$ va $q = 0$. YUqoridagi holdagi kabi (10.59) tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

10.21-Misol. $y'' + 5y' + 4y = 4x - 3$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

► Xarakteristik tenglama ildizlari $k_1 = -4$, $k_2 = -1$ bo'lganligi uchun bir jinsli tenglama umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}$ bo'ladi. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini

$$\tilde{y} = Ax + B$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu funktsiyani berilgan tenglamaga qo'ysak

$$5A + 4Ax + 4B = 4x - 3$$

hosil bo'ladi. Bu yerdan $5A + 4B = -3$ va $4A = 4$ yoki $A = 1$, $B = -2$. SHunday qilib

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x} + x - 2. \blacktriangleleft$$

II. (10.57) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \quad (10.60)$$

maxsus ko'rinishda bo'lgan hol. Ko'rinish turibdiki, $\alpha = 0$ da xususiy hol sifatida (I) ni hosil qilamiz. Bu holda α sonining xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lish-bo'lmazligiga qarab oldingi (I) ko'rinishdagi kabi xususiy yechimni

$$a) \tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x};$$

$$b) \tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x};$$

$$v) \tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

kabi funktsiyalar ko'rinishida qidiramiz. YUqoridagi kabi $Q_n(x)$ noma'lum ko'phad bo'lib, uning koeffitsientlarini tenglamalar sistemasidan topamiz.

10.22-Misol. Koshi masalasini yeching

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

► Xarakteristik tenglama uchun $k_1 = 1$, $k_2 = 6$ ekanligidan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Tenglamani o'ng tomoni (10.60) kabi maxsus ko'rinishga ega bo'lib $\alpha = 1$, $P_n(x) = x - 2$. $\alpha = 1$ soni xarakteristik tenglamani bir karrali ildizi bo'lganligi uchun xususiy yechim b) ko'rinishda qidiriladi

$$\tilde{y} = xe^x(Ax + B).$$

Bu funksiyani berilgan tenglamaga qo'yib tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{array}{l|l} 6 & e^x(Ax^2 + Bx) \\ -7 & e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) \\ 1 & e^x(Ax^2 + Bx) + 2e^x(2Ax + B) + 2Ae^x \end{array}$$

$$\tilde{y}'' - 7\tilde{y}' + 6\tilde{y} = e^x((6A - 7A + A)x^2 - (6B - 7B - 14A + B + 4A)x - 7B + 2B + 2A) = x - 2ex.$$

Oxirgi ayniyatning ikkala tomonini $e^x \neq 0$ ga bo'lib, tenglikning ikki tomonidagi x ning mos darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-10A = 1, \quad 2A - 5B = -2.$$

Bu yerdan $A = -\frac{1}{10}, B = \frac{9}{25}$ va $\tilde{y} = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)$. Demak tenglamani umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)$$

Koshi masalasini yechish uchun y' ni topamiz

$$y' = C_1e^x + 6C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right) + e^x\left(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}\right)$$

Boshlang'ich shartlardan foydalanib C_1 va C_2 ga nisbatan quyidagi sistemani hosil qilamiz

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad y'(0) = C_1 + 6C_2 + \frac{9}{25} = 3$$

Bu yerdan $C_1 = \frac{84}{125}$, $C_2 = \frac{41}{125}$ larni topamiz. SHunday qilib Koshi masalasining yechimi quyidagiga teng

$$y = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x \right). \blacktriangleleft$$

III. (10.57) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x \quad (10.61)$$

maxsus ko'rinishda bo'lgan hol. Bu holda ham xususiy yechimning ko'rinishi xarakteristik tenglamaning ildizlariga bog'liqdir:

a) agar $i\beta$ soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa xususiy yechimni

$$\tilde{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x;$$

b) agar $i\beta$ soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsa

$$\tilde{y} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

ko'rinishda qidiramiz.

10.22-Misol. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$

► Xarakteristik tenglamaning ildizlari $k = \pm 2i$, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi esa $\bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. $\beta = 2i$ soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu funksiyani berilgan tenglamaga qo'yib mos koeffitsientlarni tenglashtirsak

$$\begin{aligned} 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ = 4(\sin 2x + \cos 2x) \end{aligned}$$

$-4A = 4$, $4B = 4$ yoki $A = -1$, $B = 1$. Demak, $\tilde{y} = x(-\cos 2x + \sin 2x)$.

Umumiy yechim esa

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(-\cos 2x + \sin 2x). \blacktriangleleft$$

Noma'lum koeffitsientlar usulini qo'llash mumkin bo'lgan eng umumiy holni qarashga o'tamiz. O'ng tomonning bu maxsus ko'rinishi oldingi qaralgan barcha hollarni o'z ichiga oladi.

IV. O'ng tomondagi funksiya

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x) \quad (10.62)$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ mos ravishda n va m darajali ko'phadlar. Xususiy yechimning ko'rinishi $\alpha + i\beta$ sonining xarakteristik tenglama ildizlari bilan ustma-ust tushishiga bog'liq bo'lib

a) $\alpha + i\beta$ xarakteristik tenglama ildizlari bilan ustma-ust tushmasa

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(C_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x);$$

b) $\alpha + i\beta$ xarakteristik tenglama ildizlari bilan ustma-ust tushsa

$$\tilde{y} = xe^{\alpha x}(C_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x).$$

Bu yerda $l = \max(n, m)$ bo'lib, $C_l(x)$ va $T_l(x)$ aniqlanishi lozim bo'lgan ko'phadlar.

Eslatma. So'nggi ikki hol uchun shuni izohlashimiz lozimki, agar $a = 0$ yoki $b = 0$, $P_n(x) = 0$ yoki $Q_m(x) = 0$ bo'lsa ham xususiy yechimning ko'rinishi o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, o'ng tomonda $\cos$ yoki $\sin$ qatnashmasa ham qidirilayotgan xususiy yechimning ko'rinishi saqlanadi.

(10.62) formulada $\alpha = 0$ va $\beta = 0$ da I- hol; $\beta = 0$ da II – hol; $\alpha = 0$ va $n = 0, m = 0$ da III- hol kelib chiqadi.

10.17. Differensial tenglamalar sistemalari

Umumiy tushunchalar. Ba'zan jarayonni tavsiflashni bitta funksiya orqali ifodalab bo'lmaydi. Bu funksiyalarni aniqlash uchun mos ravishda bir necha differensial tenglamalar, ya'ni differensial tenglamalar sistemalari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, maydonning vektor chiziqlarini aniqlash differensial tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi. SHuningdek, moddiy

nuqtaning biror kuch ta'siridagi egri chiziqli harakati, radius vektor va kuch orqali yoziladi. Ularning koordinata o'qlariga proeksiyalari esa uchta differensial tenglamalar sistemasiga olib keladi.

Asosiy tushunchalarni kiritishdan boshlaymiz. Erkli oʻzgaruvchi sifatida har doimgidek, x ni olamiz. Aniqlanishi lozim boʻlgan funksiyalarni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yoki $y(x), z(x), w(x)$ kabi belgilaymiz.

10.13-Ta’rif. Differensial tenglamalar sistemasi deb har bir tenglamasida erkli o‘zgaruvchi, qidirilayotgan funksiyalar va ularning hosilalari qatnashayotgan tenglamalar majmuasiga aytiladi.

Differensial tenglamalar sistemasiga

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 - x \\ y_2' = 5y_1 - 7y_2 + y_3 \\ y_3' = -2y_1 + 5y_2 + 3x \end{cases}$$

misol bo‘ladi.

Differensial tenglamalar sistemasining yechimi deb, bu tengliklarning har birini ayniyatga aylantiruvchi

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

funksiyalar majmuasiga aytiladi.

10.18. Differensial tenglamalarning normal sistemasi

Biz differensial tenglamalar sistemalarining ba'zi maxsus ko'rinishlarini, ya'ni hosilalarga nisbatan yechilgan sistemalarni o'rganamiz.

10.14-Ta'rif. Differensial tenglamalarning normal sistemasi deb

[illegible]

ko‘rinishdagi sistemaga aytiladi.

Bu ko‘rinishdagi sistemalar uchun quyidagi teorema o‘rinli.

10.11-Teorema. Agar (10.62) normal sistemaning o‘ng tomonidagi funksiyalar o‘zlarining xususiy hosilalari bilan birgalikda biror sohada uzluksiz bo‘lsalar, bu sistemaning

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (10.63)$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimi mavjud.

YUqorida keltirilgan misol normal sistema bo‘ladi. Normal sistemalar qulayligining sababi, agar differensial tenglamalar sistemasi noma’lum funksiyalarga nisbatan chiziqli bo‘lsa uni normal ko‘rinishga keltirish mumkin.

YUqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan n tartibli differensial tenglamani, yangi yordamchi funksiyalarni kiritish yordamida differensial tenglamalarning normal sistemasiga olib kelish mumkin. Soddalik uchun, uchinchi tartibli tenglamani olaylik:

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

Ikkita yangi o‘zgaruvchi kiritamiz

$$y_1 = y', y_2 = y_1' = y''.$$

U holda berilgan tenglama uchta

$$y' = y_1, \quad y_1' = y_2, \quad y_2' = f(x, y, y_1, y_2)$$

tenglamalar bilan almashinadi va bu sistema normal ko‘rinishdadir. Ravshanki, umumiy n tartibli holda ham yangi $n - 1$ o‘zgaruvchi kiritib normal sistema hosil qilish mumkin. Bundan tashqari teskari tasdiq ham o‘rinli, ya’ni:

Normal tenglamalar sistemasini, tartibi sistemadagi tenglamalar soniga teng bo‘lgan bitta differensial tenglama bilan almashtirish mumkin. Bu almashtirish normal sistemalarni yechishning usuli hisoblanadi. Aytilganlarni uchta tenglamadan iborat sistema uchun qaraymiz:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (10.64)$$

Birinchi tenglamani x bo'yicha differensiallaymiz, u holda

$$y_1'' = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1} \cdot y_1' + \frac{df_1}{dy_2} \cdot y_2' + \frac{df_1}{dy_3} \cdot y_3'$$

Bu tenglikda y_1', y_2', y_3' hosilalarni (10.64) tenglikdan foydalanib almashtirsak

$$y_1'' = F_1(x, y_1, y_2, y_3)$$

kabi tenglamani hosil qilamiz. Hosil qilingan bu tenglamani yana bir marta differensiallab, yuqoridagidek

$$y_1''' = F_2(x, y_1, y_2, y_3)$$

ni hosil qilamiz. SHunday qilib

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (10.65)$$

sistemani tuzdik. Bu sistemaning birinchi va ikkinchi tengliklaridan y_2 va y_3 larni x, y_1, y_1', y_1'' orqali ifodalab olamiz:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'') \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'') \end{cases} \quad (10.66)$$

Topilgan y_2 va y_3 funksiyalarni (10.65) sistemaning uchinchi tenglamasiga qo'yib uchinchi tartibli

$$y_1''' = F(x, y_1, y_1', y_1'')$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, C_3)$$

y_1 ni aniqlaymiz. y_1 ni (10.66) sistemaga qo'yib y_2 va y_3 larni aniqlaymiz

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, C_3) \\ y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, C_3) \end{cases}$$

Aniqlangan y_1, y_2 va y_3 funksiyalar (10.64) sistemaning umumiy yechimi deb ataladi. Agar boshlang'ich shartlar qo'yilgan bo'lsa, ular yordamida o'zgarmas C_1, C_2, C_3 lar aniqlanadi.

10.22-Misol. $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$ tenglamalar sistemasining yechimini toping.

► Bu differensial tenglamalarning normal sistemasidir. Uni yechish uchun birinchi tenglamani differensiallaymiz:

$$y'' = y' + z'$$

z' ni ikkinchi tenglamadagi qiymati bilan almashtirsak

$$y'' = y' + y + z + x$$

Birinchi tenglamadan z ni topib qo'yamiz va

$$y'' - 2y' = x$$

ni hosil qilamiz. Uning bir jinsli

$$y'' - 2y' = 0$$

tenglamasining yechimi

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

bo'ladi. Uning bir jinsli bo'lmagan tenglamasining yechimi

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx$$

ko'rinishda. Bu funktsiyani tenglamaga qo'yib koeffitsientlarni topamiz

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}$$

Demak bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

Aniqlangan bu funktsiyani sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib z ni topamiz

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1). \blacktriangleleft$$

10.19. Chiziqli differensial tenglamalar sistemalari

Amaliy masalalarni yechish jarayonida tenglamalarning chiziqli sistemalari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Sodda uchun uchta tenglama bo'lgan holni qaraymiz. Ushbu sistema

$$\begin{cases} y_1' = a_1(x)y_1 + b_1(x)y_2 + c_1(x)y_3 \\ y_2' = a_2(x)y_1 + b_2(x)y_2 + c_2(x)y_3 \\ y_3' = a_3(x)y_1 + b_3(x)y_2 + c_3(x)y_3 \end{cases} \quad (10.67)$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb ataladi. Bu yerda $a_j(x), b_j(x), c_j(x)$ ($j = \overline{1,3}$) uzluksiz funktsiyalar. (10.67) ko'rinishdagi sistemaning yechimlari haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.

10.12-Teorema. Agar $y_{11}(x), y_{21}(x), y_{31}(x)$ va $y_{12}(x), y_{22}(x), y_{32}(x)$ funktsiyalar (10.67) sistemaning qandaydir ikkita yechimi bo'lsa, u holda $C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x), C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x), C_1 y_{31}(x) + C_2 y_{32}(x)$ ham shu sistemaning yechimi bo'ladi.

Biz bu teoremaning isbotiga to'xtalib o'tirmaymiz. Chunki mazkur teoremaning isboti xuddi differensial tenglamalardagi kabi funktsiyalarni (10.67) sistemaga bevosita qo'yish bilan amalga oshiriladi.

Demak, $y_{11}, y_{21}, y_{31}; y_{12}, y_{22}, y_{32}$ va y_{13}, y_{23}, y_{33} lar (10.67) sistemaning xususiy yechimlari bo'lsalar

$$\begin{cases} u = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + C_3 y_{31} \\ v = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + C_3 y_{32} \\ w = C_1 y_{13} + C_2 y_{23} + C_3 y_{33} \end{cases} \quad (10.68)$$

funksiyalar ham C_1, C_2, C_3 larning ixtiyoriy qiymatlarida yechim bo‘ladi. Qaysi holda bu yechimdan

$$u(x_0) = u_0, v(x_0) = v_0, w(x_0) = w_0$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni hosil qilish mumkinligini aniqlashtiramiz. Berilgan boshlang‘ich shartlarda (10.68) yechimning ko‘rinishi

$$\begin{cases} u_0 = C_1 y_{11}^0 + C_2 y_{21}^0 + C_3 y_{31}^0 \\ v_0 = C_1 y_{12}^0 + C_2 y_{22}^0 + C_3 y_{32}^0 \\ w_0 = C_1 y_{13}^0 + C_2 y_{23}^0 + C_3 y_{33}^0 \end{cases}$$

kabi bo‘ladi. Bu sistema ixtiyoriy boshlang‘ich shartlarda yagona yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix} \quad (10.69)$$

determinant hech bir $x = x_0$ nuqtada nolga teng bo‘lmasligi zarur va etarli. Ana shu shartni qanoatlantiruvchi uchta xususiy yechimlarga **fundamental yechimlar sistemasi** deb ataymiz. Differensial tenglamalardagi kabi (10.68) funksiyalar (10.67) tenglamalar sistemasining umumiy yechimi bo‘ladi. SHunday qilib quyidagi teoremani isbotladik:

10.13-Teorema. Agar $y_{11}, y_{21}, y_{31}; y_{12}, y_{22}, y_{32}$ va y_{13}, y_{23}, y_{33} lar (10.67) ning fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, bu sistemaning umumiy yechimi (10.68) ko‘rinishda bo‘ladi.

Bir jinsli bo‘lmagan

$$\begin{cases} y_1' = a_1(x)y_1 + b_1(x)y_2 + c_1(x)y_3 + q_1(x) \\ y_2' = a_2(x)y_1 + b_2(x)y_2 + c_2(x)y_3 + q_2(x) \\ y_3' = a_3(x)y_1 + b_3(x)y_2 + c_3(x)y_3 + q_3(x) \end{cases} \quad (10.70)$$

sistemaning umumiy yechimi unga mos bir jinsli (10.67) sistemaning umumiy yechimiga (10.70) sistemaning qandaydir xususiy yechimini qo‘shishdan hosil qilinadi.

10.20. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} y_1' = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 \\ y_2' = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 \\ y_3' = a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 \end{cases} \quad (10.71)$$

ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lib, a_j, b_j, c_j ($j = \overline{1,3}$) o'zgarmas sonlar bo'lsin. Bu tenglamalar sistemasining xususiy yechimlarini differensial tenglamalardagi qonuniyatni saqlagan holda

$$y_1 = k_1 e^{rx}, y_2 = k_2 e^{rx}, y_3 = k_3 e^{rx} \quad (10.72)$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda k_1, k_2, k_3, r aniqlanishi lozim bo'lgan koeffitsientlar.

(10.72) funksiyalarni (10.71) sistemaga qo'yamiz.

$$\begin{cases} k_1 r e^{rx} = a_1 k_1 e^{rx} + b_1 k_2 e^{rx} + c_1 k_3 e^{rx} \\ k_2 r e^{rx} = a_2 k_1 e^{rx} + b_2 k_2 e^{rx} + c_2 k_3 e^{rx} \\ k_3 r e^{rx} = a_3 k_1 e^{rx} + b_3 k_2 e^{rx} + c_3 k_3 e^{rx} \end{cases}$$

Barcha tengliklarni e^{rx} ga qisqartirib va sistemaga sodda shakl almashtirib bir jinsli bo'lgan

$$\begin{cases} (a_1 - r)k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 = 0 \\ a_2 k_1 + (b_2 - r)k_2 + c_2 k_3 = 0 \\ a_3 k_1 + b_3 k_2 + (c_3 - r)k_3 = 0 \end{cases} \quad (10.73)$$

algebraik sistemani hosil qilamiz. Bu sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - r & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - r \end{vmatrix} = 0$$

bo'lishi zarur va etarli. Ushbu determinantni hisoblab r ga nisbatan uchinchi darajali bo'lgan tenglama hosil qilamiz. Unga xarakteristik tenglama deb ataladi. Demak, (10.72) funksiyalar (10.71) sistemaning yechimi bo'lishi uchun r soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lishi kerak. Ildizlarning ko'rinishiga ko'ra quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

I) Barcha ildizlar haqiqiy va turli.

Xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri r_1 bo'lsin. Bu ildizni (10.73) sistemaga qo'yamiz. Hosil bo'lgan sistema bir jinsli va noldan farqli yechim bitta ixtiyoriy o'zgarma orqali yoziladi.

$$\begin{cases} (a_1 - r_1)k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 = 0 \\ a_2k_1 + (b_2 - r_1)k_2 + c_2k_3 = 0 \\ a_3k_1 + b_3k_2 + (c_3 - r_1)k_3 = 0 \end{cases} \quad (10.74)$$

SHuning uchun tenglamalardan biri qolgan ikkitasining chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi. Agar birinchi ikki tenglamani olsak yechim sifatida

$$k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 - r_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 - r_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad k_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_1 - r_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 - r_1 \end{vmatrix}$$

ni olishimiz mumkin.

Xarakteristik tenglamaning qolgan ikki ildizi uchun ham (10.73) sistemaning yechimlarini topamiz. Natijada uchta funksiyalar sistemasini hosil qilamizki, ularning har biri (10.71) sistemaning yechimi bo'ladi:

$$\begin{matrix} k_1^{(1)}e^{r_1x} & k_2^{(1)}e^{r_1x} & k_3^{(1)}e^{r_1x} \\ k_1^{(2)}e^{r_2x} & k_2^{(2)}e^{r_2x} & k_3^{(2)}e^{r_2x} \\ k_1^{(3)}e^{r_3x} & k_2^{(3)}e^{r_3x} & k_3^{(3)}e^{r_3x} \end{matrix}$$

Bu funksiyalar sistemalari fundamental yechimlar sistemasi bo'ladi. Umumiy yechim esa

$$\begin{cases} y_1 = C_1k_1^{(1)}e^{r_1x} + C_2k_1^{(2)}e^{r_2x} + C_3k_1^{(3)}e^{r_3x} \\ y_2 = C_1k_2^{(1)}e^{r_1x} + C_2k_2^{(2)}e^{r_2x} + C_3k_2^{(3)}e^{r_3x} \\ y_3 = C_1k_3^{(1)}e^{r_1x} + C_2k_3^{(2)}e^{r_2x} + C_3k_3^{(3)}e^{r_3x} \end{cases} \quad (10.75)$$

ko'rinishda yoziladi.

10.23-Misol. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimini toping.

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

► Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0$$

$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$ bo'lgan turli haqiqiy ildizlarga ega.

Ularning har biri uchun (10.74) ko'rinishdagi sistemani tuzamiz

$$\begin{cases} k_1^{(1)} - k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0 \\ -k_1^{(1)} + 3k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0 \\ k_1^{(1)} - k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0 \end{cases} \begin{cases} -k_2^{(2)} + k_3^{(2)} = 0 \\ -k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} - k_3^{(2)} = 0 \\ k_1^{(2)} - k_2^{(2)} = 0 \end{cases} \begin{cases} -3k_1^{(3)} - k_2^{(3)} + k_3^{(3)} = 0 \\ -k_1^{(3)} - k_2^{(3)} - k_3^{(3)} = 0 \\ k_1^{(3)} - k_2^{(3)} - 3k_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemalarning har biri cheksiz ko'p yechimga ega bo'lganligi uchun, masalan $k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = k_1^{(3)} = 1$ deb olsak bo'ladi. U holda $r_1 = 2$ ildizga mos ravishda $k_1^{(1)} = 1, k_2^{(1)} = 0, k_3^{(1)} = 1$, ga mos bo'lgan $k_1^{(2)} = 1, k_2^{(2)} = 1, k_3^{(2)} = 1, r_3 = 6$ ga mos $k_1^{(3)} = 1, k_2^{(3)} = -2, k_3^{(3)} = 1$ larni hosil qilamiz.

Ularga mos fundamental yechimlar sistemasi esa quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & -e^{2x} \\ e^{3x} & e^{3x} & e^{3x} \\ e^{6x} & -2e^{6x} & e^{6x} \end{pmatrix}$$

(10.75) formulaga ko'ra sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x} \\ y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x} \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x} \end{cases}$$

kabi bo'ladi. ◀

II) Xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida komplekslari bor.

Bunday holda ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun isbot qilingan lemmadan foydalanamiz. Bu lemmaga ko'ra xarakteristik tenglamaning $\alpha + i\beta$ kompleks ildiziga mos bo'lgan kompleks qiymatli funksiyaning haqiqiy va

mavhum qismlari ham xususiy yechim bo‘ladi. Aytilganlarni quyidagi misolda qarab chiqamiz.

10.24-Misol. Sistemaning umumiy yechimini toping.

$$\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

► Sistemaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 1 & 2-r \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Uning ildizlari kompleks sonlar bo‘lib $r_1 = 2 + i$, $r_2 = 2 - i$. r_1 ga mos keluvchi yechimni topamiz. Bu yechim $y = k_1 e^{(2+i)x}$, $z = k_2 e^{(2+i)x}$ ko‘rinishga ega. k_1 va k_2 sonlarini

$$\begin{cases} -ik_1 - k_2 = 0 \\ k_1 - ik_2 = 0 \end{cases}$$

sistemadan topamiz. $k_1 = 1$ deb olsak $k_2 = -i$ bo‘ladi, demak qidirilayotgan yechim

$$y = e^{(2+i)x}, \quad z = -ie^{(2+i)x}$$

kompleks funksiyalardan iborat. Ularning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib ikkita haqiqiy yechimlarni hosil qilamiz

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \cos x & z_1 &= e^{2x} \sin x \\ y_2 &= e^{2x} \sin x & z_2 &= -e^{2x} \cos x \end{aligned}$$

Bu yechimlar sistemasi fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi. SHuning uchun umumiy yechim

$$\begin{cases} y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x) \end{cases}$$

kabi bo‘ladi. ◀

10.21. Differensial tenglamalarning tadbiqlari

Differensial tenglamalar matematikaning juda katta amaliy ahamiyatga ega bo'lgan bo'limlaridan biridir. Umummatematik va nazariy ahamiyatdan tashqari differensial tenglamalar keng amaliy tadbiqlarga ega. Masalan, mexanik tebranishlar, elektrodinamika, issiqlik tarqalishi, radioaktiv emirilish, optimal boshqaruv, iqtisodiyot va boshqalar bilan bog'liq ko'pgina masalalar differensial tenglamalarga olib keladi. Quyida differensial tenglamaga olib keladigan bir necha masalalarni qaraymiz.

10.25-Misol. Bakteriyalar populyasiyasi o'sishi haqidagi masala.

$N(t)$ bakteriyalar populyasiyasi ko'payishining t vaqtdagi soni bo'lsin. Ideal sharoitda bakteriyalar sonining Δt vaqtdagi $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ orttirmasini t vaqtdagi bakteriyalar soniga proporsional deb olishimiz mumkin. Bundan tashqari kichik Δt larda $\Delta N(t)$ orttirma unga deyarli proporsional bo'ladi. SHunday qilib qabul qilingan cheklanishlarda

$$\Delta N(t) \approx kN(t) \Delta t$$

deb yozishimiz mumkin bo'lib, bu yerda k - bakteriyalar turiga bog'liq bo'lgan koeffitsient. Bu tenglikda shakl almashtirsak

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx kN(t)$$

Agar bakteriyalar soni butun ekanligidan chetlanib $N(t)$ ni uzluksiz funksiya deb olsak va oxirgi tenglikda $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tsak

$$N'(t) = kN(t)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Ushbu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan bo'lib uning umumiy yechimi

$$N(t) = Ce^{kt}$$

kabi bo'ladi. Demak ideal sharoitda bakteriyalar populyasiyasi eksponensial qonun bilan ko'payar ekan.

Quyidagi aniq masalani qaraylik: Agar 3 soat davomida bakteriyalar soni 100 dan 200 ga o'zgargan bo'lsa 9 soat davomida ularning soni necha marta oshadi?

► YUqorida keltirilganiga asosan bakteriyalar soni o'zgarish qonuni

$$N(t) = Ce^{kt}$$

kabi bo'ladi. $N(0) = 100$ ekanligidan $100 = C$. Demak $N(t) = 100e^{kt}$.
 $N(3) = 200$ bo'lganligidan

$$200 = 100e^{3k}$$

$e^{3k} = 2$ yoki $e^k = \sqrt[3]{2}$. Natijada qidirilayotgan funksiya

$$N(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$$

bo'ladi. $t = 9$ da $N(9) = 80$. Javob bakteriyalar soni 9 soatda 8 marta oshadi. ◀

10.26-Misol. Idishdan suvning chiqib ketishi haqidagi masala.

Ichida suyuqlik bo'lgan quyidagi idishni qaraylik. Bu idishning gorizontal kesimi yuzi idish tubigacha bo'lgan masofaning ixtiyoriy funksiyasi bo'lsin. Boshlang'ich $t = 0$ vaqtda idishdagi suyuqlik sathi balandligi h metr, x balandlikdagi yuza $S(x)$, idish tubidagi tirqish yuzi esa s bo'lsin. Suyuqlikning sathi balandligi x bo'lganda uning idishdan chiqib ketish tezligi v quyidagicha aniqlanishi ma'lum

$$v = k\sqrt{2gx}$$

bu yerda $g = 9,8m/s^2$, k suyuqlikning idishdan chiqib ketish tezligi koeffitsienti. CHeksiz kichik dt vaqt oralig'ida suyuqlikning chiqib ketish tezligi tekis deb hisoblash mumkin. SHuning uchun dt vaqtda vdt balandlikdagi suyuqlik chiqib ketadi. Suyuqlik sathi $-dx$ ga kamayadi.

YUqoridagi mulohazalar natijasida

$$dt = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2gx}} dx$$

differensial tenglamaga kelimiz. Uni shakl almashtirsak

$$dt = -\frac{S(x) dx}{ks\sqrt{2gx}}$$

ni hosil qilamiz.

Quyidagi masalani yechamiz. Balandligi 6 m, diametri 4 m bo'lgan silindrik rezervuarning tubida radiusi 1/12 m bo'lgan tirqish bor. Rezervuardagi suv

sathining t vaqt bilan bog‘liqligi o‘rnating va rezervuardagi barcha suvning chiqib ketish vaqtini aniqlang.

► Masala shartiga ko‘ra $S(x) = 4\pi$, $s = 1/144$. Suv uchun $k = 0,6$ bo‘lganligi uchun yuqoridagi tenglama

$$dt = -\frac{217,152 dx}{\sqrt{x}}$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglamani integrallasak

$$t = 434,304\sqrt{x}$$

Oxirgi tenglikda $x = 6$ deb olsak, $t \approx 18$ minutda barcha suv rezervuardan chiqib ketishi kelib chiqadi. ◀

10.27-Misol. Ikkinchi kosmik tezlik haqidagi masala.

Jismni vertikal ravishda yuqoriga uloqtirganda Erga qaytib tushmaydigan minimal tezlikni aniqlang. Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

► Erning massasi va uloqtirilgan jismning massalarini mos ravishda M va m bilan belgilaymiz. N’yutonning butun olam tortishish qonuniga asosan jismga ta’sir etuvchi kuch

$$f = k \frac{Mm}{r^2}$$

bo‘ladi, bu yerda r - Erning markazi va uloqtirilgan jismning massa markazi orasidagi masofa, k - gravitatsion doimiy.

Ushbu jismning harakat differensial tenglamasi

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{Mm}{r^2}$$

yoki

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2} \quad (10.76)$$

kabi bo‘ladi. Tezlanish manfiy bo‘lganligi uchun bu tenglikda minus ishorasi olingan. Masalani quyidagi boshlang‘ich shartlarda yechamiz:

$$r = R, \quad \frac{dr}{dt} = v_0, \quad t = 0 \text{ da.}$$

(10.76) tenglamada erkli o'zgaruvchi t qatnashmaydi. SHuning uchun tenglamada $\frac{dr}{dt} = v$, $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}$ belgilash kiritamiz, bu yerda v -tezlik. Bularni (10.76) tenglamaga qo'ysak

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}$$

O'zgaruvchilarni ajratsak

$$v dv = -kM \frac{dr}{r^2}$$

va uni integrallasak

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + C_1 \quad (10.77)$$

Er sathida ($r = R$) $v = v_0$ ekanligidan

$$\frac{v_0^2}{2} = kM \frac{1}{R} + C_1$$

yoki

$$C_1 = -kM \frac{1}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

C_1 ni (10.77) ga olib borib qo'ysak

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} - kM \frac{1}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

yoki

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - kM \frac{1}{R} \right)$$

Masala shartiga ko'ra jismning tezligi har doim musbat bo'lishi kerak, demak $\frac{v^2}{2} > 0$. r ning etarlicha katta qiymatlarida $kM \frac{1}{r}$ ifodaning qiymati istalgancha kichik bo'la olganligi uchun $\frac{v^2}{2} > 0$ shartdan

$$\frac{v_0^2}{2} - kM \frac{1}{R} \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Demak eng kichik tezlik

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

tenglilik bilan aniqlanar ekan. Er sathida ($r = R$) og'irlik kuchi tezlanishi g ga teng. (10.76) tenglamaga asosan $g = k \frac{M}{R^2}$ yoki $M = \frac{gR^2}{k}$ ni hosil qilamiz. Endi $k = 6,66 \cdot 10^{-8} \frac{sm^3}{g \cdot s^2}$, $R = 63 \cdot 10^7 sm$ ekanligini hisobga olib topsak

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^5 sm/s = 11,2 km/s. \blacktriangleleft$$

10.28-Misol. Mexanik tebranishlar haqidagi masala.

Tebranishlar haqidagi masalalar zamonaviy texnika va fizikaning muhim masalalari qatoriga kiradi. Aksariyat hollarda tebranish hodisalari ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar bilan ifodalanib, eng sodda hollarda koeffitsientlar o'zgarmas bo'ladi. Mexanik tebranishlarning quyidagi masalasini qaraymiz.

► Prujina uchiga osilgan birlik massali jismning muvozanat holati atrofidagi vertikal tebranishlarini qaraymiz. Muvozanat holatda jismning og'irligi prujinaning elastiklik kuchi bilan muvozanatlashadi deb faraz qilamiz.

Vertikal harakatlanayotgan bu jismga uni muvozanat holatga qaytarishga harakat qiluvchi kuch ta'sir etib, bu kuch jismning muvozanat holatidan chetlanishiga proporsional bo'lsin. Agar y bilan jismdan uning muvozanat holatigacha bo'lgan masofani, ω^2 bilan proporsionallik koeffitsientini belgilasak, kuchning kattaligi $\omega^2 y$ ga teng bo'ladi. Bu kuchga *tiklash kuchi*, ω ga tiklash koeffitsienti deb ataladi.

Bundan tashqari harakat muhitning qarshiligi ostida bo'lsin. Muhitning bu qarshilik kuchi jism harakati tezligiga proporsional bo'lib, harakat yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi. Proporsionallik koeffitsientini 2λ deb olsak, bu kuch kattaligi $2\lambda \frac{dy}{dt}$ bo'ladi. Bu kuchga qarshilik kuchi, λ ga esa qarshilik koeffitsienti deb ataladi.

Endi harakat tenglamasini yozamiz. Barcha kuchlarning teng ta'sir etuvchisini hosil qilish uchun tiklash kuchi va qarshilik kuchlarni manfiy ishora bilan olamiz, chunki tiklash kuchi harakatga qarshi, qarshilik kuchi esa tezlikka qarshi yo'nalgan. N'yutonning ikkinchi qonuniga asosan

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 y$$

yoki

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad (10.78)$$

SHunday qilib mexanik tebranishlar ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar bilan ifodalanar ekan va ular *erkin tebranishlar* deb ataladi. Agar jismga qo'shimcha ravishda *qo'zg'atuvchi kuch* deb ataluvchi tashqi $f(t)$ kuch ta'sir etsa, (10.78) harakat tenglamasi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t) \quad (10.79)$$

ko'rinishga keladi. Bunday tebranishlar *majburiy tebranishlar* deb ataladi. Erkin va majburiy tebranishlarni alohida o'rganamiz.

I. Erkin tebranishlar.

(10.78) tenglamani o'rganish uchun uning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2 + 2\lambda k + \omega^2 = 0$$

Uning ildizlari $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ bo'ladi. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) qarshilik koeffitsienti tiklash koeffitsientidan katta $\lambda > \omega$. Bu holda yechim

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

kabi bo'lib, bu yerda $k_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} < 0$, $k_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} < 0$.

Ko'rib turibmizki, bu holda $t \rightarrow \infty$ da y kamayib borib nolga yaqinlashadi, jism esa muvozanatiga qaytadi, ya'ni hech qanday tebranish ruy bermaydi.

b) qarshilik koeffitsienti tiklash koeffitsientiga teng $\lambda = \omega$.

Bu holda umumiy yechim

$$y = e^{kt}(C_1 + C_2 t)$$

bo‘lib, yuqoridagi kabi tebranish ruy bermaydi.

v) qarshilik koeffitsienti tiklash koeffitsientidan kichik $\lambda < \omega$. Bu holda umumiy yechim

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 \sin k_0 t + C_2 \cos k_0 t)$$

bo‘lib, bu yerda $k_0 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$.

Agar $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ deb belgilash kiritsak yechimni

$$y = Ae^{-\lambda t} \sin(k_0 t + \varphi_0)$$

kabi yozishimiz mumkin bo‘lib, bu yerda A va φ_0 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Ularni aniqlash uchun boshlang‘ich shartlarni berish zarur.

Oxirgi holda jism garmonik tebranma harakat qilib vaqt o‘tishi bilan tebranish so‘nib boradi. Agar $\lambda = 0$, ya’ni qarshilik koeffitsienti nolga teng bo‘lsa oddiy garmonik tebranish hosil bo‘ladi:

$$y = A \sin(k_0 t + \varphi_0)$$

$\lambda \neq 0$ da tebranishlar amplitudasi vaqtga bog‘liq bo‘lib, $t \rightarrow \infty$ da kamayib borib nolga yaqinlashadi. O‘z navbatida jism muvozanat holatiga tebranib yaqinlashib boradi. Unga so‘nuvchi tebranishlar deyiladi. $k_0 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ tebranishlar chastotasi, $T = \frac{2\pi}{k_0}$ davri, φ_0 - boshlang‘ich faza, $Ae^{-\lambda t}$ ga esa tebranishlar amplitudasi deb ataladi.

II. Majburiy tebranishlar.

Ma’lumki, majburiy tebranishlar bir jinsli bo‘lmagan

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Amaliy jihatdan muhim bo‘lgan holni qaraymiz: qarshilik koeffitsienti tiklash koeffitsientidan kichik $\lambda < \omega$, tashqi kuch davriy-
 $f(t) = a \sin(\omega_1 t)$.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli tenglama umumiy yechimi va bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning biror xususiy

yechimlari yig'indisidan iborat edi. Demak, majburiy tebranishlar erkin tebranishlar va oldin ma'lum bo'lgan biror majburiy tebranish birlashmasidan iborat bo'ladi.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = a \sin \omega_1 t$$

tenglamaning xususiy yechimini topamiz.

$\lambda \neq 0$ bo'lsin, u holda $\omega_1 i$ xarakteristik tenglamaning ildizi emas. SHuning uchun xususiy yechimni $P \cos \omega_1 t + Q \sin \omega_1 t$ ko'rinishda qidirish mumkin. Barcha hisoblashlarni bajarsak quyidagi yechimni hosil qilamiz

$$y = R \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$\text{bu yerda } R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{a}{\sqrt{4\lambda^2 \omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2}} \text{ va } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{P}{Q} = \frac{-2\lambda \omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

SHunday qilib majburiy tebranishlardan biri amplitudasi R , chastotasi ω_1 va boshlang'ich fazasi φ_1 bo'lgan oddiy garmonik tebranishdan iborat ekan. Qolgan barcha tebranishlar uning erkin tebranishlar bilan birlashmasidan iborat:

$$y = A e^{-\lambda t} \sin(k_0 t + \varphi_0) + R \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Bu yechimdagi birinchi had t ning o'sishi bilan birga ancha tez nolga intiladi va harakat asosan ikkinchi had bilan xarakterlanadi.

λ va ω ni o'zgarlas deb olamiz va majburiy tebranishlarning amplitudasi R ni qaraymiz. R ning shaklini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$R = \frac{a}{\omega^2 \sqrt{\frac{4\lambda^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)^2}} = \frac{a}{\omega^2 \sqrt{\alpha^2 q^2 + (1 - q^2)^2}}$$

bu yerda $\alpha = \frac{2\lambda}{\omega}$, $q = \frac{\omega_1}{\omega}$. Demak, R amplituda

$$\delta = \delta(q) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 q^2 + (1 - q^2)^2}}$$

ga proporsional bo'ldi.

q ning oshishi bilan, ya'ni majburiy tebranishlar chastotasi ω_1 ning oshishi bilan $\delta(q)$ o'z navbatida amplituda ham ma'lum bir maksimum qiymatgacha oshib boradi, keyin esa $q \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Bu maksimumga $q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$ da, ya'ni $\omega_{1max} = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$ da erishilib, amplitudaning maksimumi $R_{max} = \frac{a}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$ ga teng bo'ladi.

Tashqi kuch chastotasining ω_{1max} ga yaqin va λ ning kichik qiymatlarida (bu holda $\omega_{1max} \approx \omega$) jism juda katta amplitudali garmonik tebranadi. Bu tebranishlar tizimning sinusoidal tebranishlari amplitudalari bilan solishtirib bo'lmaydigan darajada bo'ladi. Tebranishlar amplitudasining hattoki juda kam tashqi kuch ta'sirda ham tezlik bilan oshib ketishi holatiga *rezonans* deb ataladi.

Rezonans fizika va texnikada muhim rol o'ynaydi. Har bir elastik qurilma o'zining tebranishlari chastotasiga ega bo'lib, u jismning xossalariga bog'liq. Tasavvur qilaylik jismga tashqi kuch ta'sir etib uni muvozanat holatidan qo'zg'atsin. Agar tashqi kuch chastotasi jismning ichki chastotasiga yaqin bo'lsa, tashqi kuch kichik bo'lishiga qaramasdan uning jismga ta'siri **fojeali** bo'lishi mumkin.

$\lambda = 0$ da majburiy tebranish amplitudasi $\frac{a}{|\omega^2 - \omega_1^2|}$ ga teng bo'lib majburiy va erkin tebranishlar chastotalari teng bo'lganida cheksizlikka aylanadi. ◀

Nazorat savollari

1. Differensial tenglamalarga ta'rif bering.
2. Differensial tenglamaning xususiy va umumiy yechimlariga ta'rif bering.
3. Differensial tenglama uchun Koshi masalasini yozib bering.
4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yozing.
5. Bernulli va to'la differensial tenglamalar kurinishini yozing.
6. Yuqori tartibli differensial tenglamaga misol keltiring.
7. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar yechimini yozing.

8. Differensial tenglamalar sistemalariga ta'rif bering.
9. Normal va chiziqli differensial tenglamalar sistemalariga ta'rif bering.
10. Differensial tenglamalar sistemasining yechimiga ta'rif bering.

Mashqlar.

1. $y = Cx + 1/C$ funksiya $xy' - y + 1/y = 0$ differensial tenglamaning yechimi bo'la oladimi?
2. Quyidagi differensial tenglamaning yechimini toping.
 - a) $y' = (2y + 1)tgx$;
 - b) $y' \sin x = y \ln y$;
 - c) $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2$
3. Quyidagi differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching.

$$xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, \quad y(2) = \pi.$$
4. Koshi masalasini yeching.
 - a) $y' + 3y = e^{2x}y^2, y(0) = 1$;
 - b) $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}, y(\pi) = 5$.
5. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.
 - a) $y' + \frac{y}{x} = 1 + 2 \ln x$;
 - b) $(x + 1)y' + y = x^3 - x^2$
 - c) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$
 - d) $y' + 2y = y^2 e^x$
6. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$$
7. Koshi masalasini yeching.

$$(2x + y + 3x^2 \sin y)dx + (x + x^3 \cos y + 2y)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$
8. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.
 - a) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
 - b) $y'' = x + \sin x$
9. Differensial tenglamaning xususiy yechimini toping.

$$a) y'' = \frac{x}{e^{2x}}, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y'(0) = -\frac{1}{4};$$

$$b) y'' = 2\sin^2 x \cos x, \quad y(\pi) = \frac{1}{9}, \quad y'(\pi) = 1.$$

10. Tartibi pasaytiriladigan differensial tenglamani yeching.

$$a) (1 - x^2)y'' - xy' = 2;$$

$$b) y''x \ln x = 2y';$$

$$c) y'^2 + 2yy'' = 0;$$

$$d) y'' = -\frac{1}{2y^3}.$$

11. Tartibi pasaytiriladigan differensial tenglamaning xususiy yechimini toping.

$$a) yy'' - 2yy' \ln y = y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$b) y''(1 + y) = y'^2 + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

12. Agar chiziqning ixtiyoriy nuqtasidagi burchak koeffitsienti, shu nuqtaning 3 marta kattalashtirilgan ordinatasiga teng ekanligi ma'lum bo'lib, bu chiziq A(0,2) nuqtadan o'tsa uning tenglamasini tuzing.

13. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$a) y'' - 4y' = 0; \quad b) y'' - 4y' + 13y = 0;$$

$$s) y'' - 3y' + 3y = 0; \quad d) y'' - 5y' + 6y = 0;$$

$$e) y'' + 3y' = 0; \quad f) y'' + 2y' + 5y = 0; \quad ;$$

$$g) y'' - 2y' + 10y = 0; \quad h) y'' + y' - 2y = 0.$$

14. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$a) y'' + y' = 2x - 1;$$

$$b) y'' - y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x};$$

$$s) y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos x;$$

$$d) y'' + 5y' = 72e^{2x};$$

$$e) y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x;$$

$$f) y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27.$$

15. Differensial tenglamaning xususiy yechimini toping.

$$a) y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$b) y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4;$$

$$s)y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x - 36x \cos 3x, \quad y(0) = 4, y'(0) = 0;$$

$$d)y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

16. Differensial tenglamalar sistemasini ikki usulda yeching:

I) yuqori tartibli differensial tenglamaga keltirish yo'li bilan;

II) xarakteristik tenglama yordamida.

$$a) \begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 3y + 4z \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} y' = 6y - z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}.$$

17. Differensial tenglamani ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan yeching.

$$a) y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1};$$

$$b) y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

18. Egri chiziqqa ixtiyoriy urinmaning absissa o'qi bilan kesishish nuqtasi va urinish nuqtasi koordinata boshidan bir xil uzoqlikda ekanligi ma'lum bo'lsa, egri chiziq tenglamasini yozing.

19. Urinmasining Oy o'qidan ajratgan kesmasining uzunligi urinish nuqtasi absissasining kvadratiga teng bo'lgan egri chiziq tenglamasini yozing.

20. Raketaning massasi to'liq yonilg'i zaxirasi bilan M ga, yonilg'isiz esa m ga teng, yonilg'i mahsulotining tugash tezligi $-c$, raketaning boshlang'ich tezligi 0 ga teng. Raketaning og'irlik kuchini va havoning qarshiligini e'tiborga olmagan holda, uning yonilg'i yonib bo'lgandan keyingi tezligini toping.

21. Jism er sathidan 18 m balandlikdan 30 m/s tezlik bilan yuqoriga vertikal tezlik bilan otilgan. Balandlikni vaqtning funksiyasi deb qarab, jismning t vaqtdagi balandligini toping. Jism ko'tarilishining eng katta balandligini aniqlang.

11-BOB. QATORLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

11.1. Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar

Matematik analizning muhim bo'limlaridan biri qatorlar nazariyasidir. Sonli qatorlar matematik analizning nazariy tadqiqotlarida keng qo'llanilib, turli amaliy tadbirlarga ega. Matematik analiz va unga tayanuvchi amaliy fanlarda cheksiz qatorlar keng tadbir etiladi.

Sonli qator tushunchasi. Aytaylik, $a_1, a_2, \dots, a_n$ kabi sonli ketma-ketlik qaralayotgan bo'lsin. Hadlari ana shu ketma-ketlikning hadlaridan tashkil topgan

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (11.1)$$

ifoda sonli qator deb ataladi. Bu yerda a_n qatorning umumiy hadi yoki n -hadi deb yuritiladi. Qatorning barcha hadlari haqiqiy sonlardir.

Qator berilgan deb hisoblanadi, agar uning umumiy hadi a_n ni n orqali ifodalovchi qonuniyat ma'lum bo'lsa.

Qatorning hadlaridan quyidagicha yig'indilarni tuzamiz:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (11.2)$$

Ana shu tuzilgan yig'indilar odatda xususiy yig'indilar deb atalib, S_n esa n – xususiy yig'indi deyiladi.

11.1-Ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da, (11.2) xususiy yig'indilar ketma-ketligi biror S chekli limitga ega bo'lsa, u holda (11.1) sonli qator yaqinlashuvchi deb ataladi va S chekli limitni uning yig'indisi deyiladi. Aksincha, xususiy yig'indilar ketma-ketligining hech qanday limiti mavjud bo'lmasa, u holda sonli qator uzoqlashuvchi deb atalib, bunday qator yig'indiga ega emas

YUqoridagi ta'rifni quyidagicha ifodalaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ (chekli)} \quad (11.3)$$

bo'lsa, (11.1) –qator yaqinlashuvchi.

11.1-Misol. Quyidagi qatomi yaqinlashishga tekshiring.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

► Ushbu qator yig'indisini hisoblash uchun xususiy yig'indini quyidagi usulda shakl almashtiramiz

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Bu yerdan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Demak, qaralayotgan qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi 1 ga teng ekan.



11.2-Misol. Quyidagi qatomi yaqinlashishga tekshiring.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

► Bu qator uzoqlashuvchi, chunki uning xususiy yig'indilaridan tuzilgan

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \dots$$

ketma- ketlikning limiti mavjud emas. ◀

Quyida yaqinlashuvchi qatorlarning eng sodda xossalarini keltiramiz.

11.1-Teorema. YAqinlashuvchi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

qatorning har bir hadini noldan farqli bo'lgan λ songa ko'paytirish bilan qatorning yaqinlashuvchiligi buzilmaydi, hamda hosil bo'lgan

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n + \dots$$

qatorning yig'indisi avvalgi qator yig'indisini λ o'zgarimas songa ko'paytirilganiga teng bo'ladi.

◀ Berilgan qator uchun n – xususiy yig'indini S_n , ikkinchi qator uchun Ω_n bilan belgilaymiz. U holda

$$\Omega_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda S_n.$$

Demak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lambda S. \blacktriangleright$$

11.2-Teorema. YAqinlashuvchi qatorning tarkibidagi chekli sondagi hadlarini olib tashlash yoki tarkibiga chekli sondagi hadlarni qo'shish bilan qatorning yaqinlashuvchiligi o'zgarmaydi.

◀ Berilgan qatorning n – xususiy yig'indisi S_n bo'lsin. Bu qatordan olib tashlangan k ta hadlar yig'indisini S_k , n – xususiy yig'indidan k ta had olib tashlanishidan keyin qolgan yig'indini Ω_n deb olsak

$$S_n = \Omega_n + S_k$$

Bu tenglikdan limit mavjud bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n$ limit ham mavjud bo'lishi kelib chiqadi. ▶

11.3-Teorema. Ikkita alohida-alohida yaqinlashuvchi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (11.4)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (11.5)$$

bo'lgan qatorlarni hadlab qo'shish yoki hadlab ayirishdan hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi va ularning yig'indisi berilgan qatorlar yig'indilarini qo'shish yoki ayirish natijasiga teng bo'ladi.

◀ (11.4) va (11.5) qatorlar yig'indisi mos ravishda S va Ω , xususiy yig'indilari esa S_n hamda Ω_n bo'lsin. Hadlab qo'shishdan hosil bo'lgan qator xususiy yig'indisi uchun

$$\begin{aligned} Q_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = S_n + \Omega_n. \end{aligned}$$

Bu tenglikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = S + \Omega.$$

SHunday qilib berilgan qatorlarni hadlab qo'shishdan hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S + \Omega$ ga teng.

Qatorlarni hadlab ayirishdan hosil bo'lgan qator yaqinlashishi ham shu kabi isbotlanadi. ►

11.2. Qator yaqinlashuvchiligining zaruriy sharti. Garmonik qator

Qatorlarni tadqiq etishda eng asosiy masalalardan biri uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligini tekshirishdir. Uni ta'rif bo'yicha tekshirish, ya'ni qator xususiy yig'indisi va uning limitini topish har doim ham mumkin bo'lavermaydi. SHuning uchun qatorlarni tadqiq etish uchun maxsus yaqinlashish belgilarni aniqlaymiz. Biz avvalo qator yaqinlashishining zaruriy shartini qarab chiqamiz.

11.4-Teorema. Agar (11.1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning n - hadi $n \rightarrow \infty$ da albatta nolga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (11.6)$$

◄Haqiqatdan ham $a_n = S_n - S_{n-1}$ hamda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

bo'lganligi uchun (11.6) tenglik kelib chiqadi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0. \quad \blacktriangleright$$

Natija. Agar (11.1) qatorda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s \neq 0 \quad (11.7)$$

bo'lsa, u uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

YUqorida isbot qilingan teorema qator yaqinlashishining zaruriy sharti bo'lsada, lekin u etarli shart bo'la olmaydi. YA'ni (11.6) tenglik bajarilsa ham (11.1) qatorning o'zi har doim ham yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin.

Masalan, quyidagi *garmonik qator* deb ataluvchi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ko‘rinishdagi qatorni qaraylik. Garchand $n \rightarrow \infty$ da uning n -chi hadi 0 ga intilsada, ya’ni $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo‘lsada, bu qator uzoqlashuvchidir. Biz bu tasdiqni isbotlaymiz.

Ma’lumki $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ edi. Bu tenglikdan barcha n lar uchun

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

ni hosil qilamiz. Agar bu tengsizlikni logarifmlasak,

$$n \ln \frac{n+1}{n} < 1$$

yoki

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \quad (11.8)$$

(11.8) tengsizlikdan $n = 1, 2, \dots, n-1, n$ larda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\ln 2 < 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$

.....

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Bu tengsizliklarni hadlab qo‘shib

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

ga ega bo‘lamiz.

Oxirgi tengsizlikning o‘ng tomonidagi ifoda garmonik qatorning dastlabki n ta hadining yig‘indisidir. Biz uni S_n bilan belgilasak

$$S_n > \ln(n+1).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ bo‘lganligi uchun, yuqoridagi tengsizlikdan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

kelib chiqadi. Demak garmonik qator uzoqlashuvchi bo‘lar ekan..

11.3. Musbat hadli qatorlar hamda ular yaqinlashuvchiligining yetarli alomatlari

Yuqorida ko'rdikki qator umumiy hadining nolga intilishi qator yaqinlashishi uchun zaruriy shart bo'la olar ekan. Qatorlar yaqinlashishini etarli shartlar deb ataluvchi alomatlar yordamida tekshirish mumkin bo'lib, biz ularning ba'zilarini ishorasi saqlanuvchi qatorlar uchun qaraymiz. Barcha hadlari musbat sonlardan iborat bo'lgan qator musbat hadli qator deb yuritiladi.

Taqqoslash alomatlari. Quyidagi ikki xil musbat hadli qatorlarni qaraymiz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (11.9)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (11.10)$$

11.5-Teorema. Agar (11.9) qatorning har bir hadi biror hadidan boshlab, ikkinchisining mos har bir hadidan kichik yoki teng bo'lib, (11.10) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (11.9) qator ham albatta yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Teoremaning shartiga ko'ra, $a_n \leq b_n$ bo'lganligi uchun (11.9) qatorning dastlabki n ta hadining yig'indisi S_n , (11.10) qatorning dastlabki n ta hadining yig'indisi Q_n dan kichik yoki teng bo'ladi

$$S_n \leq Q_n \quad (11.11)$$

Teoremaning ikkinchi shartiga binoan $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = q$ (chekli) bo'lib, ikkala qator ham musbat hadli bo'lganligi uchun $Q_n < q$ va $S_n < q$ bo'ladi. U holda S_n ketma-ketlik chegaralangan va o'suvchi ekanligidan, limiti mavjud ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ deb yoza olamiz. ▶

11.6-Teorema. Agar (11.9) qatorning har bir hadi biror hadidan boshlab, ikkinchisining mos har bir hadidan katta yoki teng bo'lib, (11.10) musbat hadli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (11.9) musbat hadli qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham agar $a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2, \dots, a_n \geq b_n, \dots$ bo'lsa, u holda bu qatorlarning chekli yig'indilari uchun har doim

$$S_n \geq Q_n \quad (11.12)$$

tengsizlik bajariladi.

Teoremaning shartiga ko'ra (11.10) qator uzoqlashuvchi bo'lganligi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty$ deb yozish mumkin. U holda (11.12) tengsizlik va limitning xossalriga asosan (11.9) qatorning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi. ►

Eslatma. 11.5 va 11.6 teoremlardagi umumiy hadlar uchun qo'yilgan shartlar biror chekli haddan boshlab bajarilsa ham o'rinli bo'laveradi.

11.3- Misol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 3^n}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

► Ma'lumki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi bo'lib, u yaqinlashuvchidir.

$$\frac{1}{n + 3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

ekanligi uchun 11.5 teorema ko'ra berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ◀

11.4- Misol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

► Bu qatorning barcha hadlari uchun $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \frac{1}{n}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ garmonik qator uzoqlashuvchiligi sababli 11.6 teorema ko'ra berilgan qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi. ◀

11.7-Teorema. (Taqqoslashning limit alomati) Musbat hadli (11.9) va (11.10) qatorlar berilgan hamda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \quad (0 < q < \infty)$$

shart o'rinli bo'lsin, u holda (11.9) va (11.10) qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchidir.

◀ Ketma- ketlik limitining ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son n ning biror qiymatidan boshlab qolgan barcha hadlar uchun

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - q \right| < \varepsilon$$

yoki

$$(q - \varepsilon)b_n < a_n < (q + \varepsilon)b_n \quad (11.13)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

Agar (11.9) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (11.13) tengsizlikning chap qismi va 11.1, 11.5 teoremlarga ko‘ra (11.10) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar (11.9) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (11.13) tengsizlikning o‘ng qismi va 11.1, 11.6 teoremlarga ko‘ra (11.10) qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi. ►

11.5- Misol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

► Birinchi ajoyib limitga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1 \neq 0$$

CHeksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yaqinlashuvchi qator bo‘lganligi uchun taqqoslashning limit belgisiga ko‘ra $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$ qator ham yaqinlashuvchi. ◀

Dalamber alomati. Taqqoslash alomatlariga ko‘ra qator yaqinlashishini tekshirish boshqa qatorlarga bog‘liq edi. Biz quyida faqat qatorning o‘zi bilangina ish ko‘rib uning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini aniqlaymiz.

Aytaylik quyidagi musbat hadli qator qaralayotgan bo‘lsin.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (11.14)$$

11.8-Teorema. Agar ushbu qator $(n + 1)$ –hadining n hadiga bo‘lgan nisbati n cheksizlikka intilganda chekli limitga ega bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (\text{chekli}) \quad (11.15)$$

u holda:

- a) $l < 1$ da qator yaqinlashuvchi;
 b) $l > 1$ da qator uzoqlashuvchi;
 v) $l = 1$ da qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligi ochiq qoladi.

◀ $l < 1$ bo'lsin. $l < q < 1$ shartni qanoatlantiruvchi q sonini qaraylik.

Limitning xossalriga ko'ra n ning biror N qiymatidan boshlab qatorning barcha hadlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad (11.16)$$

tengsizlik bajariladi. (11.16) tengsizlikda barcha $n > N$ lar uchun shakl almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< qa_N \\ a_{N+2} &< qa_{N+1} < q^2 a_N \\ a_{N+3} &< qa_{N+2} < q^3 a_N \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

SHunday qilib $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots$ qatorning barcha hadlari yaqinlashuvchi bo'lgan $qa_N + q^2 a_N + q^3 a_N + \dots$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi hadlaridan kichik. SHuning uchun 11.5- teorema ko'ra tengsizlikning chap tomonidagi qator ham yaqinlashuvchi. Bu qator (11.14) qatordan chekli sondagi hadlarga farq qilgani uchun 11.2- teorema ko'ra (11.14) qator ham yaqinlashuvchi.

$l > 1$ bo'lsin. U holda biror N nomyerdan boshlab, barcha n lar uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ yoki $a_{n+1} > a_n$. Bundan esa, qatorning hadlari biror N hadidan boshlab o'suvchi bo'ladi va umumiy had nolga intilmaydi. O'z navbatida 11.4- teoremaning natijasiga ko'ra qator uzoqlashuvchi bo'ladi. ►

Eslatma. $l = 1$ bo'lganida qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. Bu tasdiqning to'g'ri ekanligini misollarda ko'rishimiz mumkin.

11.6- Misol. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$ qatomi yaqinlashishga tekshiring.

► Bu yerda $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ va $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

demak qator yaqinlashuvchi. ◀

Koshining radikal belgisi.

11.9-Teorema. Agar (11.14) qatorning n hadining n - darajali ildizi hisoblanib, uning limiti $n \rightarrow \infty$ da chekli biror l songa teng bo'ladigan bo'lsa, ya'ni,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad (11.17)$$

bo'lsa, u holda:

- a) $l < 1$ da qator yaqinlashuvchi;
- b) $l > 1$ da qator uzoqlashuvchi;
- v) $l = 1$ da qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligi ochiq qoladi.

◀ $l < 1$ bo'lsin. $l < q < 1$ shartni qanoatlantiruvchi q sonini qaraylik. Limitning xossalriga ko'ra yaqinlashuvchi qatorda n ning biror N qiymatidan boshlab qatorning barcha hadlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

yoki

$$a_n < q^n \quad (11.18)$$

tengsizlik bajariladi. U holda $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots$ qatorning barcha hadlari yaqinlashuvchi bo'lgan $q + q^2 + q^3 + \dots$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi hadlaridan kichik. Demak taqqoslash alomatiga ko'ra tengsizlikning chap tomonidagi qator ham yaqinlashuvchi. Bu qator (11.14) qatordan chekli sondagi hadlarga farq qilgani uchun 11.2-teoremaga ko'ra (11.14) qator ham yaqinlashuvchi.

$l > 1$ bo'lsin. U holda biror N nomyerdan boshlab barcha n lar uchun $\sqrt[n]{a_n} > 1$ yoki $a_n > 1$. Bundan esa qatorning umumiy hadi nolga intilmaydi va o'z navbatida qator uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

11.7- Misol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

yaqinlashishga tekshiring.

► Koshining radikal belgisiga ko'ra

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Demak qator yaqinlashuvchi. ◀

Koshining integral belgisi.

11.10-Teorema. Agar (11.14) qatorning barcha hadlari uchun

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \dots \quad (11.19)$$

shart o'rinli bo'lib, uzluksiz kamayuvchi $f(x)$ funksiya uchun,

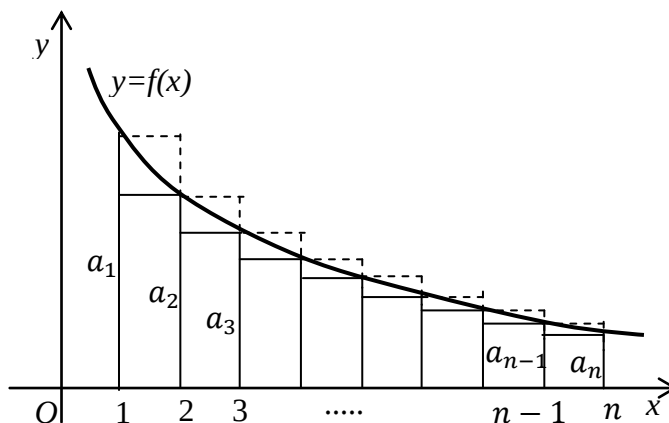
$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda

1) agar $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, (11.14) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

2) agar $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsa, (11.14) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ YUqoridan kamayuvchi $y = f(x)$ funksiya bilan, quyidan esa Ox o'qining $[1, n]$ kesmasi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani qaraymiz (11.1- rasm).



11.1-rasm

Rasmda ko'rsatilgan to'g'ri to'rtburchaklarning yuzalarini va egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini (aniq integralning qiymati) solishtirsak

$$a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1 < \int_1^n f(x)dx < a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_{n-1} \cdot 1$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Bu yerda chap tomondagi tengsizlikdan

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx$$

yoki

$$S_n < \int_1^n f(x)dx + a_1$$

ni hosil qilamiz. Agar $\int_1^\infty f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa

$$S_n < \int_1^n f(x)dx + a_1 < \int_1^\infty f(x)dx + a_1$$

S_n musbat o'suvchi ketma-ketlik bo'lganligi uchun oxirgi tengsizlikka ko'ra uning limiti chekli bo'ladi, ya'ni berilgan qator yaqinlashuvchi.

Endi faraz qilaylik $\int_1^\infty f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi. O'ng tomondagi tengsizlikka ko'ra

$$\int_1^n f(x)dx + a_n < S_n$$

Agar bu tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ limitga o'tsak $S_n \rightarrow \infty$ ni hosil qilamiz. ►

Eslatma. Bu teoremaning tasdig'i (11.19) shartlar biror haddan boshlab o'rinli bo'lsa ham o'z kuchida qoladi.

11.8- Misol.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

► $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ funksiya yuqoridagi 11.10 teorema shartlarini

qanoatlantirganligi uchun Koshining integral belgisidan foydalanamiz.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_2^\infty \frac{1}{\ln^2 x} d(\ln x) = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

Xosmas integral yaqinlashuvchi, demak berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ◀

Quyidagi qatorni qaraymiz

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p > 0)$$

Unga *umumlashgan garmonik qator* deb atalib, uni Koshining integral alomati yordamida yaqinlashishga tekshiramiz.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uzluksiz va monoton kamayuvchi hamda $f(n) = \frac{1}{n^p}$.

$p \neq 1$ bo'lganida

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-p+1} - 1)$$

Agar bu yerda $p > 1$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-p+1} = 0$ va $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ ga ega

bo'lamiz. Demak qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $p < 1$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-p+1} = \infty$ va integral uzoqlashuvchi, demak qaralayotgan qator ham uzoqlashuvchi. $p = 1$ bo'lganda,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$$

ya'ni qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

SHunday qilib umumlashgan garmonik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

qator $p > 1$ da yaqinlashuvchi va $p \leq 1$ da uzoqlashuvchidir.

11.4. Ishoralari o'zgaruvchi qatorlar. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. Ishoralari almashinuvchi qatorlar

Biz shu paytgacha qaragan barcha qatorlarning ishorali o'zgarmas edi. Umumiy holda qator hadlari ixtiyoriy sonlar bo'lishi mumkin. Hadlari turli ishorali

sonlardan iborat bo‘lgan qatorga ishoralari o‘zgaruvchi qator deb ataladi. Ishoralari o‘zgaruvchi bo‘lgan qatorlarning muhim xususiy holi ishorasi almashinuvchi qatordir.

Quyidagi ishoralari almashinuvchi bo‘lgan qatorni qaraymiz

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1}a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n \quad (11.20)$$

bu yerda barcha $n \in N$ larda $a_n > 0$. (11.20) qatorlarning yaqinlashuvchiligini ta’minlovchi yetarli shartlar Leybnits tomonidan keltirilgan bo‘lib, u quyidagi teoremadan iborat.

11.11-Teorema. (Leybnits alomati) Agar

- 1) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n > \dots$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda (11.20) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi har doim quyidagi shartni qanoatlantiradi: $0 < S < a_1$.

◀ Aytaylik, $n = 2m$ juft son bo‘lsin. Qatorning dastlabki $2m$ ta hadining yig‘indisini qaraymiz.

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Bu yerda har bir qavs ichidagi ifoda teoremaning birinchi shartiga ko‘ra musbat son bo‘lganligi uchun

$$S_{2m} > 0 \quad (11.21)$$

Endi yuqoridagi ifodani quyidagicha o‘zgartiramiz

$$S_{2m} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m}].$$

S_{2m} , a_1 va kvadrat qavs ichidagi ifoda musbat bo‘lganligi uchun

$$S_{2m} < a_1 \quad (11.22)$$

deb yoza olamiz.

(11.21) va (11.22) tengsizliklardan kelib chiqadiki, S_{2m} o‘svuvchi ketma – ketlik bo‘lib, yuqoridan chekli son bilan chegaralangan ekan. SHuning uchun bu ketma- ketlik

chekli limitga ega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \quad (11.23)$$

hamda, $0 < S_{2m} < a_1$ bo'ladi.

Endi faraz qilaylik, $n = 2m + 1$ –toq son bo'lsin va qatorning dastlabki $2m + 1$ ta hadining yig'indisini qaraymiz. Ravshanki,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Ushbu tenglikda limitga o'tsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S.$$

Demak, isbot qilinganiga ko'ra, ham toq indeksli, ham juft indeksli xususiy yig'indilar ketma-ketligi faqatgina (11.23) chekli limitga intilishi kelib chiqdi. Bundan esa (11.20) qatorning yaqinlashuvchiligi hamda, $0 < S < a_1$ natija hosil bo'ldi. ►

11.9- Misol.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

► Qator hadlari uchun

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. SHuning uchun Leybnits alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi. ◀

Ishoralari o'zgaruvchi qator yaqinlashishining yetarli alomati

Agar sonli qator hadlarining tarkibida ham musbat hadlar, ham manfiy hadlar ishtirok etsa uni biz ishoralari o'zgaruvchi qator deb atagan edik. Quyidagicha ishoralari o'zgaruvchi qator

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (11.24)$$

va unga mos bo'lgan musbat hadli

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (11.25)$$

qatorlarni qaraymiz. Bu yerda shu paytgacha qaralgan qatorlardan farqli ravishda $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - ixtiyoriy ishorali sonlar.

11.12-Teorema. Agar ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan (11.24) qatorga mos (11.25) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, ishoralari o'zgaruvchi qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ (11.24) va (11.25) qatorlarning xususiy yig'indilarini mos ravishda S_n va σ_n bilan belgilaymiz. SHuningdek (11.24) - qatoming dastlabki n ta hadlari ichida barcha musbat hadlari yig'indisini S'_n bilan, barcha manfiy hadlari absolyut qiymatlari yig'indisini esa S''_n bilan belgilaymiz. U holda

$$S_n = S'_n - S''_n \quad \text{va} \quad \sigma_n = S'_n + S''_n$$

Teoremaning shartiga ko'ra (11.25) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ chekli limit mavjud va $\sigma_n < \sigma$ yoki

$$S'_n + S''_n < \sigma \quad (11.26)$$

bo'ladi. (11.26) tengsizlikdan $S'_n < \sigma$ va $S''_n < \sigma$ deb yoza olamiz. Bundan esa limitlar haqidagi teorema ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S', \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$$

chekli limitlar mavjudligi kelib chiqadi. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n - S''_n) = S' - S'' = S.$$

Demak, (11.24) qator yaqinlashuvchi bo'lar ekan. ►

YUqorida isbot qilingan teorema ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan ba'zi qatorlar yaqinlashuvchiligi haqida fikr yuritish imkonini beradi. Bu shartlar ishorali o'zgaruvchi bo'lgan qatorlar uchun yetarli shart hisoblanadi, ammo zaruriy shart emas. Masalan, yuqoridagi 11.9- misolga ko'ra ishorasi o'zgaruvchi bo'lgan

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ qator yaqinlashuvchi bo'lsada, lekin unga mos bo'lgan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ musbat hadli garmonik qator uzoqlashuvchidir.

11.2-Ta'rif. Agar ham ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan qator ham unga mos bo'lgan musbat hadli qator ham bir paytda yaqinlashuvchi bo'lsalar, u holda ishoralari o'zgaruvchi qatorni absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi. Aksincha, ishoralari o'zgaruvchi qator yaqinlashuvchi bo'lib, unga mos bo'lgan musbat hadli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, bunday ishoralari o'zgaruvchi qatorni shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi. Demak, yuqoridagi 11.9-misolda keltirilgan ishoralari o'zgaruvchi qator shartli yaqinlashuvchi bo'lar ekan.

11.10-Misol.

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

► Berilgan qator bilan birgalikda uning absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qatorni qaraymiz. U umumlashgan garmonik qator bo'lib Koshining integral belgisiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'ladi. SHuning uchun berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. ◀

Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar o'zlarining ba'zi bir muhim xossalari bilan ajralib turadi. Bu xossalar bizning fikrimizcha kitobxon uchun qiziqarli bo'ladi. SHuning uchun ularni isbotsiz bo'lsada keltirib o'tamiz.

11.13-Teorema. Absolut yaqinlashuvchi qatorning hadlari joylarini ixtiyoriy tartibda almashtirilganda ham, uning absolyut yaqinlashuvchiligi saqlanib qoladi. Bundan tashqari qator yig'indisi hadlar joylashuvi tartibiga bog'liq emas.

11.14-Teorema. SHartli yaqinlashuvchi qatorda hadlar tartibining almashtirilishi qator yig'inidisini o'zgartirishi mumkin. Bundan tashqari qator hadlarini shunday almashtirish mumkinki, natijada qator uzoqlashuvchi bo'lib qoladi.

YUqoridagi 11.14 teoremaning to'g'ri ekanligini quyidagi misolda qaraymiz. 11.9-misolga ko'ra

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots = S$$

qator shartli yaqinlashadi. 1 teoremaga asosan bu qatorni hadlab ikkiga bo'lamiz

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{S}{2}$$

yoki

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} - \dots = \frac{S}{2}.$$

Agar berilgan qator bilan bu qatorni hadlab qo'shsak, natijada

$$1 - 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \dots = \frac{3S}{2}$$

yoki

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{3S}{2}.$$

Agar e'tibor qilsak bu qator berilgan qatordan hadlarining joylashuvi bilan farq qiladi. Ularning yig'indilari esa turli sonlar.

11.5. Funksional qatorlar. Funksional qatorlarning yaqinlashish sohasi

Har bir hadi funksiya dan iborat bo'lgan quyidagi ko'rinishdagi qator

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (11.27)$$

funksional qator deb ataladi. Barcha $u_n(x)$ funksiyalar biror chekli yoki cheksiz oraliqda aniqlangan va uzluksiz deb faraz qilinadi. Agar (11.27) qatorda x ning o'rniga x_0 sonni qo'ysak

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

sonli qatorni hosil qilamiz. Agar bu sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, x_0 nuqta funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deyiladi. Agar qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda x_0 nuqta funksional qatorning uzoqlashish nuqtasi deyiladi.

11.3-Ta'rif. Funksional qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha x lar to'plami shu qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

(11.27) qatorning dastlabki n hadining yig'indisi qatorning n -xususiy yig'indisi deyiladi

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x). \quad (11.28)$$

Yaqinlashish sohasida qator yig'indisi biror $S(x)$ funksiyadan iborat bo'lib, bu funksiya $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ kabi aniqlanadi. Demak yaqinlashish sohasida

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = S(x).$$

Qator yig'indisi bilan xususiy yig'indi orasidagi farq

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

qatorning n -qoldiq hadi deb ataladi

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Funksional qatorning yaqinlashish sohasida $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ o'rinli bo'ladi, chunki

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S(x) - S_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \\ &= S(x) - S(x) = 0. \end{aligned}$$

11.11-Misol.

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

► Qator absolut qiymatlaridan tuzilgan qatorni qaraymiz.

$$\left| \frac{x}{2} \right| + \left| \frac{x^2}{2^2} \right| + \dots + \left| \frac{x^n}{2^n} \right| + \dots$$

Dalamber alomatiga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{x^n}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$$

$\left| \frac{x}{2} \right| < 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, bundan $|x| < 2$ yoki $-2 < x < 2$. Oraliq chetlarida, ya'ni $x = 2$ da berilgan qator $1 + 1 + 1 + \dots$ ko'rinishga ega bo'lib, u uzoqlashuvchi bo'ladi. $x = -2$ da $-1 + 1 - 1 + 1 + \dots$ ko'rinishga ega bo'lib, bu ham uzoqlashuvchi qatordir. Demak, qatorning yaqinlashish sohasi $x \in (-2; 2)$.



11.12-Misol.

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \dots + \frac{1}{n^2+x^2} + \dots$$

qatorning yaqinlashish sohasini toping.

► Barcha x lar uchun $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$ o'rinlidir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun qatorlarni taqqoslashning birinchi alomatiga asosan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ funksional qator barcha x lar uchun yaqinlashuvchidir. Qatorning yaqinlashish sohasi $x \in (-\infty; \infty)$. ◀

Kuchaytirilgan qatorlar.

11.4-Ta'rif. Agar biror $[a, b]$ oraliqda

$$|u_1(x)| \leq \alpha_1, \quad |u_2(x)| \leq \alpha_2, \quad \dots \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n \quad \dots \quad (11.29)$$

shartlarni qanotlantiruvchi musbat hadli, yaqinlashuvchi bo'lgan

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$ sonli qator mavjud bo'lsa, u holda

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ oraliqda kuchaytirilgan qator deyiladi.

Masalan :

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

qator kuchaytirilgan qatordir, chunki,

$$|\sin x| \leq 1, \quad \left| \frac{\sin 2x}{2^2} \right| \leq \frac{1}{2^2}, \quad \dots, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

shartlar o‘rinli bo‘lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sonli qator yaqinlashuvchidir .

11.5-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N(\varepsilon)$ nomer mavjud bo‘lib, barcha $n > N(\varepsilon)$ nomerlar uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

($x \in [a, b]$) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa,

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Kuchaytirilgan funksional qatorlar bilan tekis yaqinlashuvchi qatorlar orasida quyidagicha bog‘lanish mavjud.

11.15-Teorema. Agar

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ kesmada kuchaytirilgan qator bo‘lsa, u shu kesmada tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

◀ (11.29) shartlarni qanoatlantiruvchi, yaqinlashuvchi bo‘lgan $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$ sonli qator mavjud bo‘lib, uning yig‘indisi σ ga teng bo‘lsin.

U holda $\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$, bo‘lib σ_n qatorning xususiy yig‘indisi, ε_n esa qator qoldig‘i. Ta’rifga ko‘ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Endi berilgan funksional qatorning qoldig‘ini qaraymiz

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x).$$

Qator kuchaytirilgan bo‘lganligi uchun

$$|u_{n+1}(x)| \leq \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leq \alpha_{n+2}, \dots$$

SHu sababli $[a, b]$ kesmadagi barcha x lar uchun

$$|R_n(x)| \leq \varepsilon_n$$

SHunday qilib $[a, b]$ kesmaga tegishli bo‘lgan barcha x lar uchun

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon_n$$

ya'ni, berilgan qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

Eslatma. Bu teorema funksional qator tekis yaqinlashishi uchun zaruriy shartni ifodalamaydi, ya'ni shunday funksional qatorlar borki u kuchaytirilgan bo'lmasada tekis yaqinlashadi.

11.6. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Tekis yaqinlashuvchi qatorlar chekli yig'indilar uchun o'rinli bo'lgan xossalarga ega, ya'ni qator yig'indisining uzluksizligi, hadlab integrallash va differensiallash formulalari bajariladi. Biz bu xossalarni isbotsiz keltiramiz.

11.16-Teorema. Agar (11.27) funksional qatorning barcha hadlari uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lib, bu qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi ham uzluksiz funksiya bo'ladi.

11.17-Teorema. Agar (11.27) funksional qatorning hadlari uzluksiz va funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, $[a, b]$ kesmaga tegishli ixtiyoriy x_1, x_2 qiymatlar uchun quyidagi tenglik o'rinlidir.

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots] dx = \\ = \int_{x_1}^{x_2} u_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x) dx + \dots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x) dx + \dots \end{aligned}$$

11.18-Teorema. Agar (11.27) funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi, qatorning hadlari $[a, b]$ kesmada birinchi tartibli $u'_1(x), u'_2(x), \dots, u'_n(x)$ uzluksiz hosilalarga ega va

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

qator tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda, qatorni hadlab differensiallash mumkin, ya'ni:

$$(u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots)' = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

11.7. Darajali qatorlar. Darajali qatorning yaqinlashish oralig'i va yaqinlashish radiusi

Funksional qatorlarning muhim xususiy hollaridan biri darajali qatorlardir. Bu qatorlar amaliyotda muhim ahamiyatga egaligi tufayli biz ularni to'laroq o'rganamiz.

Darajali qator tushunchasi. Hadlari x ning darajalariga nisbatan o'sib borish tartibida joylashadigan quyidagi funksional qator

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (11.30)$$

darajali qator deyiladi. Bu yerdagi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar haqiqiy sonlar bo'lib, ularga qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Darajali qatorlarning yaqinlashish sohasi biror intervaldan iborat bo'lib, ba'zan u nuqtadan yoki bo'sh to'plam ham bo'lishi mumkin. Bu intervalni aniqlash uchun quyidagi teoremani isbotlaymiz.

11.19-Teorema. (Abel teoremasi) a) agar (11.30) darajali qator x ning biror $x = x_0$ qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda,

$$|x| < |x_0| \quad (11.31)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi argument x ning barcha qiymatlari uchun (11.30) qator absolut yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) agar (11.30) darajali qator x ning biror $x = x_0$ qiymatida uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (11.30)

$$|x| > |x_0| \quad (11.32)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi argument x ning barcha qiymatlari uchun (30) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ a) Teoremaning shartiga ko'ra

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $n \rightarrow \infty$ da $a_nx_0^n$ nolga ga intiladi, demak $\{a_nx_0^n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan. U holda shunday $M > 0$ son

mavjudki, barcha n lar uchun

$$a_n x_0^n < M \quad (11.33)$$

deb yozish mumkin bo‘ladi. (11.30) qatorni quyidagicha

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots \quad (11.34)$$

o‘zgartirib yozamiz va (11.34) qatorga mos bo‘lgan musbat hadli qatorni qaraymiz:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (11.35)$$

SHuningdek, quyidagicha musbat hadli qatorni qaraymiz:

$$M + M \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (11.36)$$

(11.36) qator cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya (ya’ni yaqinlashuvchi qator) bo‘lishi uchun mahraji

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \quad (11.37)$$

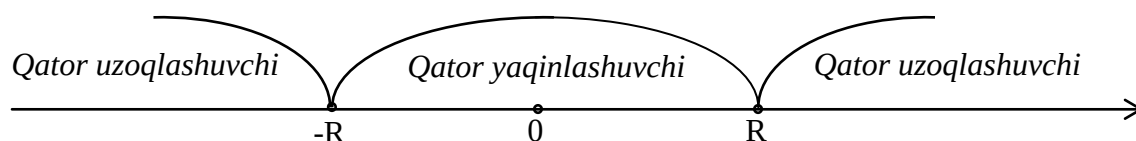
shartga bo‘ysunishi kerak. (11.33) tengsizlikka ko‘ra (11.35) qatorning har bir hadi (11.36) qatorning har bir hadidan kichik bo‘lganligi uchun u ham (11.37) shart bajarilganda yaqinlashuvchi bo‘ladi. SHuningdek, (11.35) qator (11.34) qatorga mos bo‘lgan musbat hadli qator bo‘lganligi uchun u ham (11.37) shart bajarilganda nafaqat yaqinlashuvchi, balki absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi. Undan esa (11.30) qatorning $|x| < |x_0|$ shart bajarilganda absolut yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Abel teoremasidan kelib chiqdiki (11.30) darajali qator $|x| < |x_0|$ yoki $-|x_0| < x < |x_0|$ oraliqda absolut yaqinlashuvchi qator bo‘lar ekan.

b) Faraz qilaylik (11.30) qator biror x_0 da uzoqlashuvchi. U holda qator barcha $|x| > |x_0|$ lar uchun uzoqlashuvchi. Aks holda, ya’ni biror $|x'| > |x_0|$ da qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, teoremaning isbot qilingan birinchi qismiga ko‘ra barcha $|x| < |x'|$ lar uchun, jumladan x_0 nuqtada ham qator yaqinlashuvchi bo‘lib qolar edi. ►

Haqiqiy sonlar to'plamini, ya'ni sonlar o'qini ikkiga shunday ajratish mumkinki, uning bir qismida (11.30) qator yaqinlashuvchi, ikkinchi qismida esa uzoqlashuvchi bo'ladi. Abel teoremasidan darajali qatorning yaqinlashishi sohasi biror $(-|x_0|, |x_0|)$ intervaldan iborat ekanligi kelib chiqadi.

11.4-Ta'rif. Darajali qatorning yaqinlashish oralig'i deb shunday $(-R, R)$ ochiq oraliqqa aytiladiki, bu oraliqning ichidagi barcha qiymatlarda darajali qator yaqinlashuvchi bo'lib, undan tashqaridagi qiymatlarda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.



11.2-rasm

Bu yerda R darajali qatorning *yaqinlashish radiusi* deb ataladi.

SHuningdek, yaqinlashish oralig'ining $x = \pm R$ chegaraviy nuqtalarida darajali qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi qo'shimcha tekshiriladi.

Agar $R = 0$ bo'lsa, ravshanki yaqinlashish sohasi 0 nuqta yoki bo'sh to'plamdan iborat, $R = \infty$ bo'lsa qator sonlar o'qining barcha nuqtalarida yaqinlashadi. Darajali qatorlarning yaqinlashish oralig'ini hisoblashda ko'pincha Dalamber yoki Koshining radikal alomatlaridan foydalaniladi. Dalamber alomatiga ko'ra qaralayotgan darajali qatorga mos bo'lgan musbat hadli darajali qator tuzib olganimizdan keyin quyidagini yozishimiz mumkin bo'ladi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Faraz qilaylik, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ mavjud bo'lib, u birorta L chekli songa teng bo'lsin. U holda Dalamber alomatining

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad (11.38)$$

shartiga ko'ra

$$|x|L < 1$$

da qaralayotgan darajali qator yaqinlashuvchi bo'lar edi. Bundan esa $|x| < \frac{1}{L}$ yoki $-\frac{1}{L} < |x| < \frac{1}{L}$ deb yoza olamiz. Demak, qaralayotgan darajali qatorning yaqinlashish oralig'i $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ ochiq oraliqdan iborat ekan. Darajali qatorning yaqinlashish radiusini (38) tenglikka ko'ra quyidagicha yozish mumkin bo'ladi

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (11.39)$$

Aynan shu yo'sinda darajali qatorning yaqinlashish radiusini Koshining radikal alomatiga binoan quyidagicha hisoblash mumkin:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (11.40)$$

11.13-Misol.

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} + \dots$$

darajali qatorning yaqinlashish oralig'i topilsin.

► (11.39) formulaga ko'ra

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} \frac{2^n}{n}}{(-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

Demak, $|x| < \frac{1}{2}$ da qator yaqinlashadi. $x = -\frac{1}{2}$ da garmonik qator hosil bo'lib u uzoqlashuvchi, $x = \frac{1}{2}$ da esa 11.9-misolda isbotlanganiga ko'ra qator yaqinlashuvchi bo'ladi. SHuning uchun yaqinlashish oralig'i $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ oraliqdan iborat. ◀

11.14-Misol.

$$\frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 3^4} + \frac{x^3}{3^2 \cdot 3^6} + \dots + \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^{2n}} + \dots$$

darajali qatorning yaqinlashish oralig'i topilsin.

► YAqinlashish radiusini topamiz

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2 \cdot 3^{2n}}}{\frac{1}{(n+1)^2 \cdot 3^{2n+2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^2}{n^2} = 9.$$

$R = 9$ da umumlashgan garmonik qatorning $p = 2$ dagi xususiy holi hosil bo'lib, u yaqinlashuvchi bo'ladi. SHuning uchun $R = -9$ da absolut yaqinlashuvchi bo'lgan ishorasi almashinuvchi qatorga ega bo'lamiz. Demak qatorning yaqinlashish sohasi $[-9, 9]$ kesmadan iborat. ◀

Eslatma. Darajali qator yaqinlashish oralig'ining ta'rifidan ko'rinadiki, u chekli oraliq, cheksiz oraliq yoki bittagina nuqtadan iborat bo'lishi mumkin ekan.

11.8. Darajali qatorlarning xossalari

Ushbu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (11.41)$$

darajali qator berilgan bo'lib uning yaqinlashish radiusi R bo'lsin.

11.20-Teorema. Ixtiyoriy $r < R$ uchun (11.41) darajali qator $[-r, r]$ kesmada kuchaytirilgan qator bo'ladi.

◀ SHartga ko'ra $r < R$, shuning uchun Abel teoremasiga ko'ra

$$|a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \dots + |a_n|r^n + \dots \quad (11.42)$$

qator yaqinlashuvchi. Barcha $|x| < r$ larda (41) qatorning hadlari yaqinlashuvchi bo'lgan (11.42) sonli qator hadlaridan oshmaydi, ya'ni (11.41) qator kuchaytirilgan bo'ladi. ▶

YUqorida isbot qilingan teoremaga ko'ra darajali qatorlarni hadlab integrallash va differentsiallashtirish mumkin, ya'ni darajali qatorlar quyidagi xossalarga ega.

1) Aytaylik, biror darajali qatorning yaqinlashish oralig'i $(-R, R)$ dan iborat bo'lib, uning yig'indisi o'sha oraliqda $S(x)$ funksiyadan iborat bo'lsin, ya'ni:

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (11.43)$$

u holda ushbu qatorni hadlab differentsiallashtirish mumkin. Hadlab differentsiallashtirishdan hosil bo'lgan darajali qatorning yig'indisini $\varphi(x)$ deb belgilasak:

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (11.44)$$

u holda $(-R, R)$ oraliqda har doim

$$S'(x) = \varphi(x) \quad (11.45)$$

bo'lib, (11.44) qatorning yaqinlashish oralig'i $(-R, R)$ dan iborat bo'ladi.

2) Agar darajali qatorning yaqinlashish oralig'i $(-R, R)$ bo'lib, α va β lar shu oraliqda yotuvchi qiymatlar bo'lsa, u holda qaralayotgan darajali qatorni α dan β gacha bo'lgan chegaralarda integrallash mumkin bo'ladi va integrallashdan hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish oralig'i o'zgarishsiz qoladi.

3) YUqorida qaralayotgan darajali qator bilan birgalikda $(x - a)$ ning darajalari bo'yicha darajali qatorni ham qarash mumkin. Uni biz umumlashgan darajali qator deb ataymiz:

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots \quad (11.46)$$

Ravshanki $a = 0$ da yuqorida o'rganilgan darajali qator hosil bo'ladi, demak u (11.46) qatorning xususiy holi bo'lar ekan.

(11.46) qatorning yaqinlashish oralig'ini aniqlash maqsadida

$$x - a = z \quad (11.47)$$

almashtirishdan foydalanamiz. Natijada (11.46) qator z ning darajalariga nisbatan darajali qatorga aylanadi

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$$

Aytaylik, uning yaqinlashish oralig'i $-R < z < R$ dan iborat bo'lsin. U holda (11.47) ga ko'ra (11.46) darajali qatorning yig'indisi $-R - a < z < R + a$ oraliqdan iborat bo'ladi.

11.15-Misol.

$$\frac{(x+1)}{1} + \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(x+1)^3}{3^2} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n^2} + \dots$$

darajali qatorning yaqinlashish oralig'i topilsin.

► $x + 1 = z$ kabi belgilash kiritsak

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$$

qator hosil bo'lib, bu qatorning yaqinlashish radiusi $R = 1$ ga teng. Oraliq chetlari $z = -1$ da

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \dots$$

va $z = 1$ da

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

kabi sonli qatorlar hosil bo'lib, ularning ikkalasi ham yaqinlashuvchi. SHuning uchun berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi

$$-1 \leq x + 1 \leq 1$$

yoki

$$-2 \leq x \leq 0$$

dan iborat bo'ladi. ◀

11.9. Funktsiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Teylor va Makloren qatorlari

Amaliy masalalar uchun funktsiyani soddaroq ko'rinishda ifodalash muhimdir. Bunday ifodalashlardan biri funktsiyani darajali qatorga yoyish hisoblanadi.

Darslikning birinchi jildi 6 bobida $x = a$ nuqtaning atrofida $n + 1$ tartibgacha hosilaga ega bo'lgan funktsiya uchun Teylor formulasi o'rinli

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x) \quad (11.48)$$

bu yerda $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had ekanligi ko'rsatilgan edi.

Agar $f(x)$ funktsiya barcha tartibli hosilalarga ega bo'lsa (11.48) formulada n ni ixtiyoriy darajada katta qilib olish mumkin. Aytaylik, qarayotgan oraliqda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

bo'lsin.

U holda (11.48) tenglikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $f(x)$ funksiyaning $x - a$ ning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyilmasini hosil qilamiz

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots \quad (11.49)$$

Bu cheksiz qatorga $f(x)$ funksiyaning *Taylor qatori* deb ataladi. SHuni ta'kidlashimiz lozimki, Taylor qatori $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ shart bajarilgandagina $f(x)$ funksiyaning tasvirlaydi. Bu shart bajarilmasa, qator yaqinlashuvchi bo'lganida ham boshqa funksiya yaqinlashishi mumkin.

Berilgan funksiyaning Taylor qatoriga yoyish ikki bosqichdan iborat:

- 1) Funksiya va uning barcha hosilalarining a nuqtadagi qiymatlarini hisoblab formal ravishda Taylor qatorini quramiz. Bu holda funksiyaning cheksiz marta differensiallanuvchi ekanligi talab etiladi;
- 2) Tuzilgan qator qaysi oraliqda $f(x)$ funksiya yaqinlashishini aniqlaymiz, ya'ni qanday x lar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ shart o'rinli bo'ladi.

Oxirgi shartning bajarilishini tekshirish uchun quyidagi teoremdan foydalanish qulay.

11.21-Teorema. $x = a$ nuqtaning biror atrofida funksiya va uning barcha tartibli hosilalari absolyut qiymati bo'yicha aniq biror son bilan chegaralangan bo'lsa, shu oraliqda funksiyaning Taylor qatoriga yoyish mumkin.

◀ Biz oraliqning barcha qiymatlari uchun $R_n(x)$ qoldiq had $n \rightarrow \infty$ da nolga intilishini ko'rsatishimiz etarli. Teorema shartiga ko'ra, n ga bog'liq bo'lmagan shunday M o'zgarmas son mavjudki, oraliqning barcha nuqtalarida

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

U holda

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \right| \leq M \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

bo'lganligi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. ▶

$a = 0$ bo'lganida Teylor qatorining xususiy holi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (11.50)$$

ni hosil qilamiz. Unga Makloren qatori deb ataladi. Makloren qatori elementar funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmalarini hosil qilish uchun juda qulay.

11.10. Ayrim elementar funksiyalarning darajali qatorlar ko'rinishidagi yoyilmalari

YUqorida isbotlangan 11.21 teoremadan foydalanib ba'zi elementar funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish masalasi bilan shug'ullanamiz.

1. Ko'rsatgichli funksiya e^x .

Bu funksiya uchun Makloren qatorini tuzib olamiz. $f^{(n)}(x) = e^x$ bo'lganligi sababli

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (11.51)$$

Agar N ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa, $[-N, N]$ oraliqda $e^x < e^N = M$ shart o'rinli bo'ladi. O'z navbatida funksiyaning barcha tartibli hosilalari $e^N = M$ soni bilan chegaralangan bo'ladi. N ixtiyoriy son bo'lganligi uchun (11.51) qatorning yaqinlashish sohasi barcha sonlar o'qidan iborat.

2. Trigonometrik funksiyalar: $\sin x$ va $\cos x$.

$\sin x$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyamiz. Buning uchun ketma-ket ravishda hosilalarning qiymatlarini hisoblaymiz

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1, \quad f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f'''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f^{IV}(0) = \sin 0 = 0 \text{ va hokazo.}$$

SHunday qilib funksiya hosilalarini $x = 0$ nuqtadagi qiymatlari uchun davriy bo'lgan

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

ketma-ketlikni hosil qildik. Ularning barchasi 1 soni bilan chegaralangan. O'z

navbatida 11.21 teoremaga ko‘ra $\sin x$ funksiyaning Makloren qatori

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (11.52)$$

ko‘rinishda bo‘lib yaqinlashish sohasi $(-\infty, \infty)$ dan iborat.

Xuddi shu kabi $\cos x$ funksiya ham

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (11.53)$$

kabi ko‘rinishda Makloren qatoriga yoyilib, uning ham yaqinlashish sohasi $(-\infty, \infty)$ dan iborat.

SHuni ta’kidlashimiz lozimki, $\sin x$ toq funksiya bo‘lganligi uchun, uning yoyilmasi x ning faqat toq darajalari bo‘yicha, $\cos x$ juft funksiya bo‘lganligi uchun uning yoyilmasi x ning faqat juft darajalari bo‘yicha bo‘ladi.

Agar (11.51) yoyilmada x ni $-x$ ga almashtirsak,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (11.54)$$

ni hosil qilamiz. (11.51) va (11.54) tengliklarni qo‘shib va ayirib

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (11.55)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (11.56)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

Binomial qator. Faraz qilaylik, $f(x) = (1+x)^m$ funksiyaning (m –ixtiyoriy haqiqiy son) darajali qatorga bo‘lgan yoyilmasini aniqlash lozim bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, bu funksiya quyidagi

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \quad (11.57)$$

birinchi tartibli differensial tenglamaning

$$f(0) = 1 \quad (11.58)$$

boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi echimidir. Qaralayotgan funksiyani darajali qatorga yoyish maqsadida uni ifodalovchi darajali qatorni quyidagicha tanlaymiz:

$$S(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (11.59)$$

(11.59) ifodaning har ikkala tomonidan hosila olib, uni va hosilaning qiymatini

(11.57) tenglikka qo'yamiz:

$$(1+x)(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) = \\ = m(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)$$

Ushbu tenglikning chap va o'ng tomonlarida qavslarni ochgandan keyin x ning darajalariga ko'ra ular oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz. U holda

$$a_1 = m, \quad a_2 = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}, \\ a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

Ushbu topilgan koeffitsientlarni keltirib (11.59)– qatorga qo'yamiz:

$$S(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (11.60)$$

Agar bu yerda m soni chekli natural son bo'ladigan bo'lsa, u qator – qator bo'lmasdan ko'phadga aylanib qoladi. SHuning uchun (11.60) ifoda qator bo'lishi uchun m soni chekli natural sondan tashqari ixtiyoriy haqiqiy son bo'lishi lozim ekan. Berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi birinchi tartibli differensial tenglama echimining yagonaligi haqidagi teorema ko'ra (11.60) qatorning yig'indisi $S(x)$ bilan $(1+x)^m$ funksiya aynan bir – biriga teng bo'lar ekan. SHu boisdan

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (11.61)$$

Ushbu (11.61) qator odatda *binomial qator* deb yuritiladi. Binomial qatorning yaqinlashish oralig'ini tekshiramiz. Dalamber belgisiga ko'ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \frac{n!}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| = \\ = |x|.$$

Demak, (11.61) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $|x| < 1$ bo'lishi kerak ekan. Bundan esa uning yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ ekanligi kelib chiqadi. YA'ni binomial qator $(-1; 1)$ oraliqda absolut yaqinlashuvchi qator bo'lib, uning

yig'indisi o'sha oraliqda $f(x) = (1+x)^m$ dan iborat ekan.

Binomial qatorning xususiy hollari. Quyida biz binomial qatorning yoyilmasidan foydalanib, ayrim elementar funksiyalarning darajali qatorlarga bo'lgan yoyilmalarini o'rganamiz.

1) Aytaylik, binomial qatorda $m = -1$ bo'lsin. U holda

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (11.62)$$

Ushbu (11.62) qator binomial qatorning xususiy holi bo'lgani uchun uning ham yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ dan iborat bo'ladi. Har qanday darajali qatorni o'zining yaqinlashish oralig'i ichida hadlab integrallash mumkin bo'lganligi uchun (11.62) qatorni 0 dan x gacha bo'lgan chegaralarda hadlab integrallaymiz

$$\ln(1+x) = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots) dx$$

Bundan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (11.63)$$

Hosil bo'lgan qatorda x ni $-x$ bilan almashtirsak, u holda

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad (11.64)$$

Agar (11.63) va (11.64) qatorlarni hadlab ayirsak, quyidagi qatorni hosil qilamiz

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \quad (11.65)$$

Takidlash lozimki, yuqoridagi qatorlarning yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ dan iborat bo'ladi.

2) (11.62) qatorda x ni x^2 bilan almashtiramiz, u holda

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad (11.66)$$

(11.66) qatorning ham yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ dan iborat ekanligini nazarda

tutib, uni ham o'sha oraliqdan chiqmaydigan shartlarda 0 dan x gacha bo'lgan chegaralar bo'yicha hadlab integrallaymiz.

$$\arctg x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (11.67)$$

3) Aytaylik $m = -\frac{1}{2}$ bo'lsin. U holda binomial qatordan foydalanib, quyidagini yoza olamiz

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots \quad (11.68)$$

(11.68) qatorda x ni $-x^2$ bilan almashtiramiz

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots \quad (11.69)$$

(11.68) qatorda bo'lgani kabi (11.69) qatorning ham yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ dan iborat bo'ladi. SHuning uchun (11.69) qatorni ham $(-1; 1)$ oraliqda hadlab integrallaymiz, natijada

$$\arcsin x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

11.11. Darajali qatorlarning tadbiqlari

1) Elementar funksiyalarning darajali qatorlarga bo'lgan yoyilmalari orqali ularni $(-1; 1)$ oraliqqa mos keluvchi qiymatlari jadvalini tuzishda foydalaniladi. Masalan $\sin 9^\circ$ ni hisoblamoqchi bo'lsak, $\sin x$ funksiyaning yoyilmasidan foydalaniladi. Haqiqatdan ham $9^\circ = \frac{\pi}{20}$ ekanligini e'tiborga olib, uni $\sin x$ ning yoyilmasidagi x ning o'rniga qo'yib chiqamiz, yani

$$\sin 9^\circ = \sin \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi^3}{20^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{20^5 \cdot 5!} - \dots$$

Agar hisoblashni 0,001 aniqlikda bajarish lozim bo'lsa, ko'rinib turibdiki, yuqoridagi yoyilmada 3-haddan boshlab qolgan barcha hadlarini tashlab yuborish mumkin bo'ladi

$$\sin 9^\circ \approx \frac{3,14}{20} - \frac{3,14^3}{20^3 \cdot 3!} \approx \frac{3,14}{20} \left(1 - \frac{3,14^2}{20^2 \cdot 3!} \right) = 0,1563$$

2) Endi $\ln \frac{3}{2}$ ni taqribiy hisoblashni ko'ramiz. Bu hisoblashni bajarish uchun

$\ln(1+x)$ ning yoyilmasidagi x ning o'rniga $\frac{1}{2}$ ni olamiz

$$\ln \frac{3}{2} = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \dots$$

Bu yerda ham hisoblashni 0,001 aniqlik bilan bajarish lozim bo'lsa, ko'rinib turibdiki, yuqoridagi yoyilmadagi 7-haddan boshlab qolgan barcha hadlarni tashlab yuborish kifoyadir.

$$\ln \frac{3}{2} = 0,5 - 0,125 + 0,041 - 0,015 + 0,006 - 0,003 = 0,404$$

Bundan tashqari darajali qatorlar yordamida ko'pgina aniq integrallarni oldindan berilgan istalgancha aniqlikka nisbatan taqriban hisoblash mumkin. Uning uchun integral ishorasi ostidagi funksiyaning darajali qatorlarga bo'lgan yoyilmasidan foydalanib, u yoyilmani hadlab integrallanadi va Nyuton-Leybnits formulasini qo'llagandan so'ng, sonli qator hosil bo'ladiki, uning ko'rsatilgan aniqlikka nisbatan bir qancha hadlarini olib hisoblanadi.

3) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{3}} dx$ ni taqriban hisoblash talab etilgan bo'lsin. Uning uchun integral ishorasi ostidagi funksiyaning yoyilmasini e^x ning yoyilmasiga asosan yozib olamiz

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{3}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9 \cdot 2!} - \frac{x^6}{27 \cdot 3!} + \dots\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{9 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{27 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \approx 0,5 \end{aligned}$$

Yuqorida bayon etilgan usulda ayrim integrallanmaydigan funksiyalarning aniq integrallarini berilgan aniqlikda taqriban integrallash mumkin bo'ladi.

Agar differensial tenglama integrallanmaydigan bo'lsa, uning echimini taqribiy topishga darajali qatorlar qo'llaniladi. Bunday usullardan biri echimni Teylor qatori sifatida qarashdir. Qatorning chekli hadi yig'indisi tenglama echimiga taqriban teng bo'ladi.

$$y'' = F(x, y, y')$$

tenglamani

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y'_0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi echimini topish talab etilsin. Faraz qilaylik, tenglamani echimi $y = f(x)$ funksiya bo'lib, uning Teylor qatori

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

bo'lsin. Biz $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0) \dots$ larni topishimiz kerak.

Boshlang'ich shartlardan $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y'_0$ ni hosil qilamiz.

Berilgan tenglamadan

$$f''(x_0) = y'' \Big|_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0)$$

Agar tenglamani bir marta differensiallasak,

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y''$$

Yuqoridan ma'lum qiymatlarni qo'yib topamiz

$$f'''(x_0) = y''' \Big|_{x=x_0}.$$

SHu usulda qolgan hosilalarni ham topishimiz mumkin. Ularni funksiyaning Teylor qatoriga qo'yib differensial tenglamani echimini kerakli aniqlikda topishimiz mumkin.

11.16-Misol. $y'' = xy^2$ differensial tenglamani $y(1) = -1, y'(1) = 2$ boshlang'ich shartlardagi echimi darajali qatorga yoyilmasining dastlabki to'rtta hadini toping.

► Yechimni

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x - 1)^n + \dots$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda $f(1), f'(1), f''(1), \dots$ aniqlanishi lozim bo'lgan koeffitsientlar. Berilganlarga ko'ra

$$f(1) = -1, f'(1) = 2$$

Berilgan tenglamaga boshlang'ich shartlarni qo'ysak

$$f''(1) = y''(1) = 1 \cdot (f(1))^2 = 1.$$

$f'''(1)$ ni topish uchun berilgan tenglamani differensiallaymiz

$$y''' = y^2 + 2xyy'$$

Oxirgi tenglikdan

$$f'''(1) = y'''(1) = (y(1))^2 + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y'(1) = -3.$$

Xuddi yuqoridagi kabi

$$y^{IV} = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$$

$$f^{IV}(1) = y^{IV}(1) = -2$$

Demak,

$$f(x) = -1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots \blacktriangleleft$$

11.12. Fure qatorlari. 2π davrli davriy funksiyalarni Fure qatoriga yoyish

Turli davriy jarayonlarni o'rganishda davriy bo'lgan funksiyalarning qatorlaridan foydalanishga to'g'ri keladi. Biz quyida trigonometrik qatorlar deb ataluvchi maxsus qatorlarni o'rganamiz.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (11.70)$$

ko'rinishdagi funksional qatorga trigonometrik qator, $a_0, a_n, b_n, n = \overline{1, \infty}$ sonlariga esa trigonometrik qatorning koeffitsientlari deyiladi. $\cos nx$, $\sin nx$ funksiyalar 2π davrli bo'lganligi uchun (11.70) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi $f(x)$ ham 2π davrli funksiyadan iborat bo'ladi. SHunday qilib,

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Aytaylik, 2π davrli $y = f(x)$ funksiya $(-\pi, \pi)$ oraliqda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (11.71)$$

ko‘rinishda qatorga yoyilgan bo‘lib, bu qator shu oraliqda absolut yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda (11.71) tenglikni $(-\pi, \pi)$ oraliqda hadlab integrallash mumkin

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

ekanligidan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

yoki

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (11.72)$$

(11.71) qatorning qolgan koeffitsientlarini topish uchun bizga ba’zi aniq integrallarni hisoblash zarur bo‘ladi.

Agar n va k butun sonlar bo‘lsa, u holda $n \neq k$ bo‘lganida

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx &= 0 \end{aligned} \quad (11.73)$$

$n = k$ bo‘lganida

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx &= 0, \end{aligned} \quad (11.74)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi. Bu integrallarni hisoblaylik. Uning uchun quyidagi formulalardan foydalanamiz:

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x),$$

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2} (\sin(k+n)x + \sin(k-n)x),$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2} (\cos(n-k)x - \cos(n+k)x).$$

Bu formulalarga ko‘ra

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-n)x dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx = 0.$$

Trigonometrik funksiyalar darajalarini tushirish formulalariga ko‘ra

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Endi bevosita a_n , b_n koeffitsientlarni topishga o‘tishimiz mumkin. a_n ni topish uchun (11.71) qatorni $\cos kx$ ga ko‘paytiramiz

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

Bu qator ham (11.71) kabi absolut yaqinlashuvchi bo‘ladi, shuning uchun uni hadlab integrallash mumkin

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx \, dx + \right. \\ \left. + -\pi b_n \sin nx \cos kx \, dx \right)$$

(11.73) va (11.74) tengliklarni e'tiborga olgan holda

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx \, dx = a_k \pi$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (11.75)$$

Xuddi shu usulda b_k koefitsientni topamiz

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (11.76)$$

(11.72), (11.75) va (11.76) formulalar bilan aniqlangan sonlarga *Fure koefitsientlari*, koefitsientlari yuqoridagi formulalar bilan aniqlanuvchi (11.70) trigonometrik qatorga esa *Fure qatori* deb ataladi.

Biz hosil qilgan qatorimizda funksiyani formal ravishda qatorga yoygan edik. Endi qanday funksiyani ushbu qatorga yoyish mumkinligi masalasini qaraylik.

11.5-Ta'rif. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada bo'lakli monoton deyiladi, agar bu kesmani $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ nuqtalar yordamida $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$ intervallarga ajratish mumkin bo'lib, bu intervallarning har birida funksiya monoton bo'lsa.

Bo'lakli monoton funksiyalar faqat 1– tur uzilishlarga ega bo'lishi mumkin, ya'ni uzilish nuqtalarida chap va o'ng limitlar mavjud.

Endi funksiyalarni Fure qatoriga yoyish mumkinligi haqidagi Dirixle teoremasini isbotsiz keltiramiz.

11.22-Teorema. Agar 2π davrli $f(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada bo'lakli monoton va chegaralangan bo'lsa, bu funksiya uchun yozilgan Fure qatori barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi. Qator yig'indisi $s(x)$ uzluksizlik nuqtalarida funksiya qiymati $f(x)$ ga teng, uzilish nuqtalarida esa

$$s(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

ga teng.

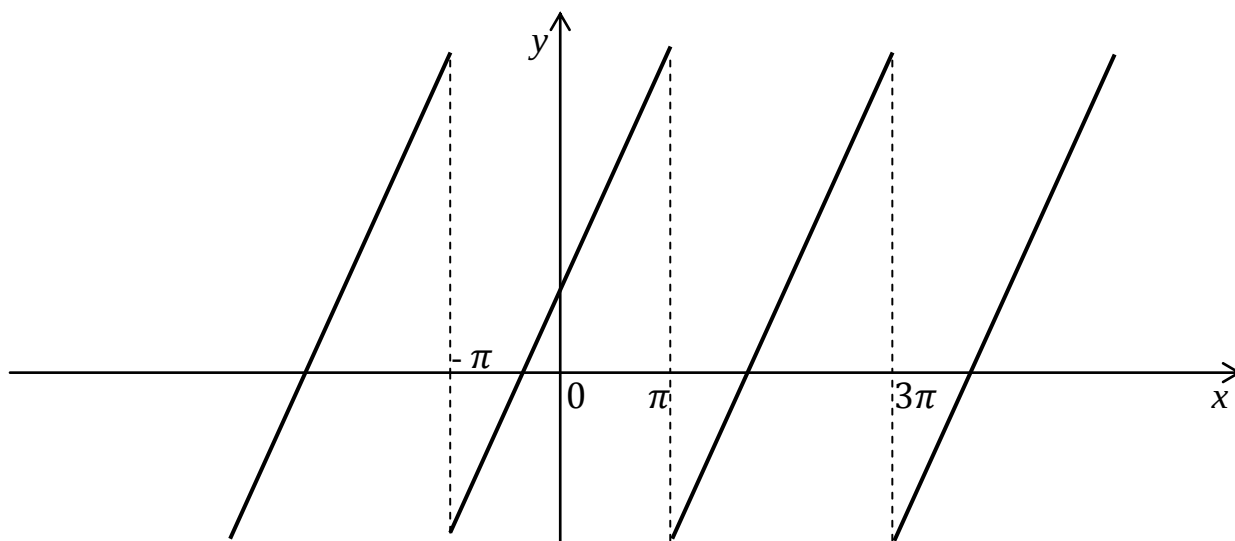
Dirixle teoremasi shartlaridan ko‘rinadiki, Fure qatoriga yoyiluvchi funksiyalar sinfi ancha keng bo‘lib, bu qatorlar matematikaning ko‘p jabhalarida qo‘llaniladi.

11.17-Misol. $(-\pi, \pi)$ intervalda $f(x) = 2x + 3$ kabi aniqlangan 2π davrli funksiyani Fure qatoriga yoying (11.3- rasm).

► (11.72) formulaga ko‘ra

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x + 3) dx = \frac{1}{\pi} (x^2 + 3x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 6\pi = 6$$

(11.75) formulaga ko‘ra va bo‘laklab integrallash formulasini asosan,



11.3- rasm

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x + 3) \cos kx dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 3, \quad du = 2dx \\ dv = \cos kx dx, \quad v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi k} (2x + 3) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\cos \pi k - \cos(-\pi k)) = 0. \end{aligned}$$

Xuddi shu kabi (11.76) formulaga ko‘ra,

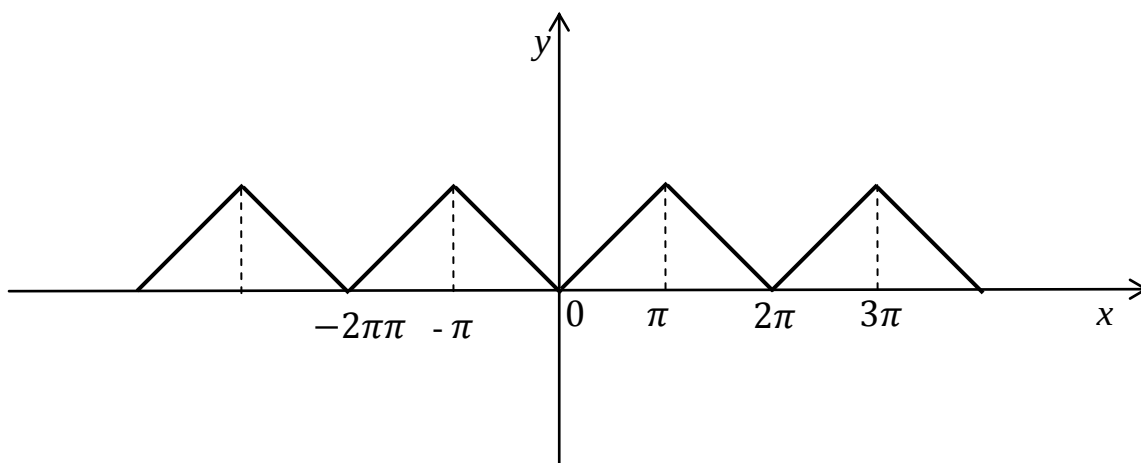
$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x+3) \sin kx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+3, \quad du = 2dx \\ dv = \sin kx \, dx, \quad v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| = \\
 &= -\frac{1}{\pi k} (2x+3) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \\
 &= -\frac{1}{\pi k} [(2\pi+3) \cos \pi x - (-2\pi+3) \cos(-\pi x)] = -\frac{4\pi}{\pi k} (-1)^k = \\
 &= \frac{4}{k} (-1)^{k+1}.
 \end{aligned}$$

SHunday qilib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$f(x) = 2x + 3 = 3 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}.$$



11.18-Misol. $(-\pi, \pi)$ intervalda $f(x) = |x|$ kabi aniqlangan 2π davrli funktsiyani Fure qatoriga yoying (11.4- rasm).



11.4-rasm

► Fure koeffitsientlarini topamiz

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos kx \, dx \quad v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx + \frac{x}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx + \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= 0, \quad a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin kx dx \quad v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \cos kx dx - \frac{x}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx + \right) = \\
&= \frac{1}{\pi k} \left(\pi \cos k\pi - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^0 - \pi \cos k\pi + \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Demak

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \blacktriangleleft$$

Eslatma. 2π davrli funksiyalar

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx$$

xossaga ega bo'lganliklari uchun, Fure koefitsientlarini aniqlashda integrallash oralig'i sifatida uzunligi 2π ga teng bo'lgan ixtiyoriy intervalni olishimiz mumkin. Xususan, ko'pchilik hollarda $(0, 2\pi)$ oraliqda integrallarni hisoblash qulay bo'ladi.

Juft va toq funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ juft funksiya bo'lsin. U holda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \varphi(x) dx.$$

Bu tenglikni isbotlash uchun avvalo integralni ikkiga ajrataylik

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx$$

Birinchi integralda o'zgaruvchi x ni $-x$ ga almashtirsak va $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \varphi(x) dx$$

Xuddi shu usulda toq funksiyalar uchun $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ tenglik o'rinli bo'lganligi sababli

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = - \int_0^{\pi} \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = 0$$

ekanligini isbot qilishimiz mumkin.

Agar Fure qatoriga toq $f(x)$ funksiya yoyilayotgan bo'lsa, u holda $f(x)\cos kx$ toq, $f(x)\sin kx$ esa juft funksiya bo'ladi. SHuning uchun yuqorida isbot qilinganiga ko'ra

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx \end{aligned} \quad (11.77)$$

Demak, toq funksiya faqat "sinus"lar bo'yicha qatorga yoyilar ekan:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Agar Fure qatoriga juft $f(x)$ funksiya yoyilayotgan bo'lsa, u holda $f(x)\cos kx$ juft, $f(x)\sin kx$ esa toq funksiya bo'ladi. O'z navbatida yuqoridagilarga o'xshash

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0 \end{aligned} \quad (11.78)$$

formulalarni hosil qilamiz. Demak, juft funksiya faqat “kosinus”lar bo‘yicha qatorga yoyilar ekan:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

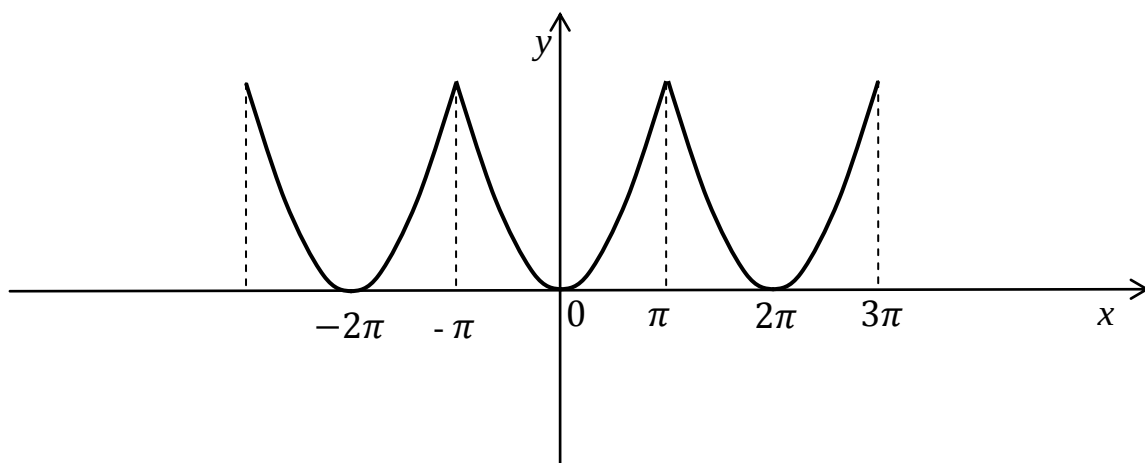
Hosil qilingan bu formulalar funksiya toq yoki juft bo‘lgan hollarda qulay bo‘lib, hisoblashlarni ancha kamaytiradi. Ravshanki, har qanday funksiya ham juft yoki toq bo‘lavermaydi.

11.19-Misol. $(-\pi, \pi)$ intervalda $f(x) = x^2$ kabi aniqlagan davriy funksiyaning Fure qatoriga yoying (11.5-rasm).

► Bu funksiya juft bo‘lganligi uchun $b_k = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3\pi} \pi^3 = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos kx dx, \quad v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right| =$$



11.5- rasm

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k} x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin kx dx, \quad v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{k^2} x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{2\pi}{k^2} \cos k\pi - \frac{2}{k^3} \sin kx \Big|_0^{\pi} = (-1)^n \frac{2\pi}{k^2} \end{aligned}$$

Demak

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos kx}{k^2} \blacktriangleleft$$

Ixtiyoriy davrli funksiyalarning Fure qatorlari. $f(x)$ davri $2l$ (umuman olganda $l \neq \pi$) bo'lgan davriy funksiya bo'lsin. Bu funksiyani Fure qatoriga yoyish masalasini qo'yaylik.

$$x = \frac{lt}{\pi}$$

formula yordamida almashtirish bajaraylik. Bunday holda $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ funksiya t ning 2π davrli funksiyasi bo'ladi. Haqiqatan ham

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t).$$

Uni $(-\pi; \pi)$ oraliqda Fure qatoriga yoyish mumkin

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (11.79)$$

bu yerda

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos kt dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin kt dt$$

Endi eski o'zgaruvchi x ga qaytamiz

$$x = \frac{lt}{\pi}, \quad t = \frac{\pi x}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l} dx$$

U holda

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (11.80)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

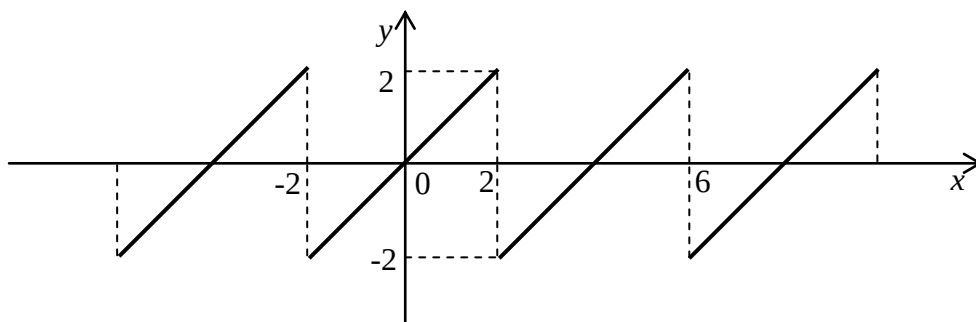
larni hosil qilamiz. (11.79) tenglik esa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (11.81)$$

ko‘rinishga keladi. Bu esa davri $2l$ bo‘lgan $f(x)$ funksiyaning Fure qatori bo‘lib, uning koeffitsientlari (11.80) formulalar bilan hisoblanadi.

SHuni e‘tiborga olish lozimki, 2π davrli funksiyalar Fure qatorlari uchun qanday xossalr o‘rinli bo‘lsa, bu qatorlar ham shu xossalarga ega.

11.20-Misol. Davri 4 ga teng bo‘lgan va $(-2;2)$ oraliqda $f(x) = x$ tenglik bilan aniqlanadigan funksiyani Fure qatoriga yoying (11.6-rasm).



11.6-rasm

Bu funksiya toq bo‘lganligi uchun uning yoyilmasida faqat “sinus”larga qatnashadi, ya’ni $a_0 = 0$ va $a_k = 0$. Bizda $l=2$ ekanligidan (11.80) formulalarning uchinchisiga ko‘ra

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \int_0^2 x \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{k\pi x}{2} dx, \quad v = -\frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right| = -\frac{2}{k\pi} x \cos \frac{k\pi x}{2} + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{4}{k\pi} \cos k\pi + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 = -\frac{4}{k\pi} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{4}{k\pi}. \end{aligned}$$

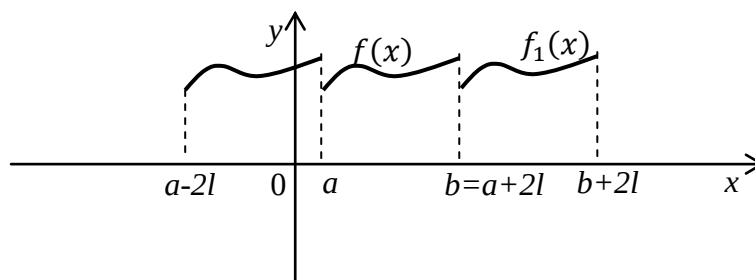
Demak,

$$f(x) = x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{2} x.$$

11.13. Davriy bo‘lmagan funksiyalarni Fure qatoriga yoyish

Biror $[a, b]$ kesmada davriy bo‘lmagan bo‘lakli uzluksiz $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Fure qatori yig‘indisi davriy funksiya iborat bo‘lgani uchun bu funksiyani Fure qatoriga yoyib bo‘lmaydi.

Bu funksiyani Fure qatori ko‘rinishida ifodalash uchun quyidagicha ish bajaramiz. Davri $2l = |b - a|$ bo‘lgan shunday $f_1(x)$ davriy funksiya ni olamizki, $[a, b]$ kesmada u berilgan $f(x)$ bilan ustma-ust tushsin (11.7- rasm).



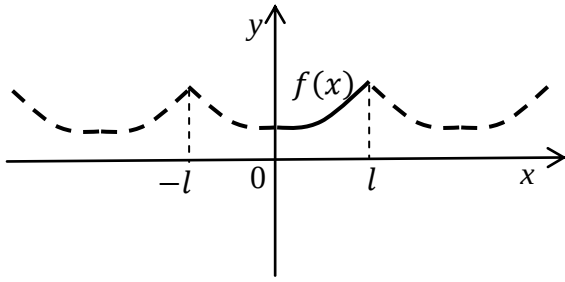
11.7- rasm

$f_1(x)$ funksiya davriy va bo‘lakli uzluksiz bo‘lganligi uchun Dirixle teoremasiga ko‘ra uni Fure qatoriga yoyish mumkin. Bu qatorning yig‘indisi $[a, b]$ kesmaning barcha nuqtalarida $y = f(x)$ funksiya qiymatlari bilan ustma-ust tushadi. Bu kesmadan tashqarida esa qator yig‘indisi va berilgan funksiya mutlaqo boshqa funksiyalardan iborat.

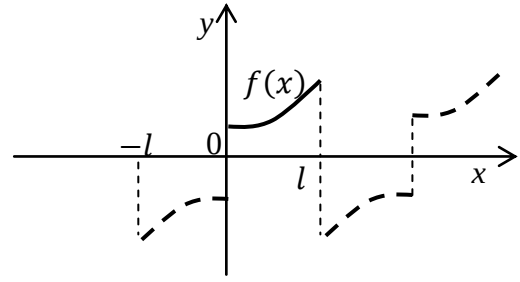
$[0, l]$ kesmada berilgan $f(x)$ funksiya ni qaraylik. Bu funksiya ni $[-l, 0]$ kesmada ixtiyoriy ravishda aniqlab olib, so‘ngra uni $[-l, l]$ kesmada davriy funksiya sifatida aniqlab Fure qatoriga yoyamiz. Hosil bo‘lgan qator $x \in [0, l]$ da $f(x)$ funksiyaning Fure qatori bo‘ladi. Quyidagi xususiy hollarni qaraymiz.

1) $f(x)$ ni $[-l, 0]$ kesmada juft funksiya kabi aniqlaylik, ya’ni $x \in [-l, 0]$ da $f(x) = f(-x)$ deb olaylik. U holda $[-l, l]$ kesmada juft funksiya ni hosil qilamiz. Bunday funksiya faqat “kosinuslar” bo‘yicha Fure qatoriga yoyiladi (11.8- rasm).

2) $f(x)$ ni $[-l, 0]$ kesmada toq funksiya kabi davom ettiraylik, ya’ni $x \in [-l, 0]$ da $f(x) = -f(-x)$ deb olaylik. U holda $[-l, l]$ kesmada juft funksiya ni hosil bo‘lib, bu funksiya faqat “sinuslar” bo‘yicha Fure qatoriga yoyiladi (11.9- rasm).



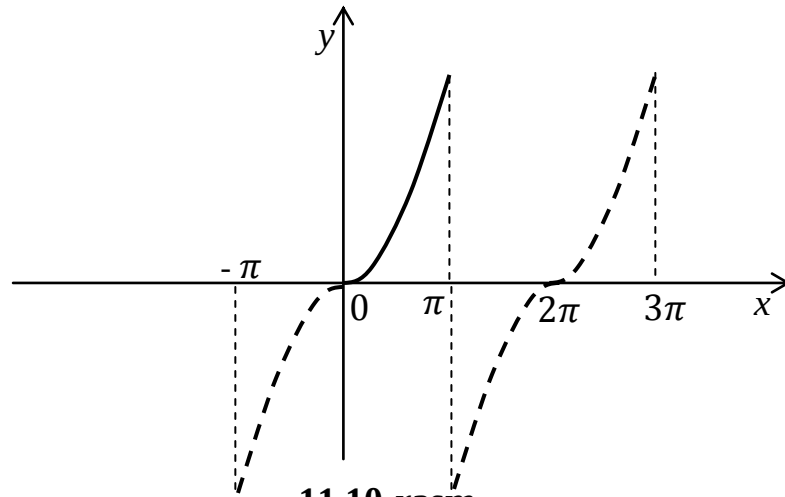
11.8-rasm



11.9-rasm

SHunday qilib kesmada berilgan bo‘lakli uzluksiz funksiyani kosinuslar bo‘yicha ham sinuslar bo‘yicha ham qatorga yoyish mumkin ekan.

11.21-Misol. $(0; \pi)$ oraliqda $f(x) = x^2$ funksiyani sinuslar bo‘yicha Fure qatoriga yoying (11.10-rasm)



11.10-rasm

► Funksiyani $[-\pi, 0]$ oraliqqa toq funksiya sifatida davom ettiramiz:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \pi \\ -x^2 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Funksiya toq bo‘lganligi uchun $a_0 = 0$ va $a_k = 0$.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin kx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \, du = 2x \, dx \\ dv = \sin kx \, dx, \, v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^2}{k} \cos kx \Big|_0^\pi + \frac{2}{k} \int_0^\pi x \cos kx \, dx \right) = \\ &= -\frac{2\pi}{k} (-1)^k + \frac{4}{k^2 \pi} \left(x \sin kx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin kx \, dx \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\pi}{k}(-1)^k \cos kx \Big|_0^\pi = \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{k^3\pi}((-1)^k - 1)$$

Demak,

$$x^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^2}{k}(-1)^{k+1} + \frac{2}{k^3}((-1)^k - 1) \right] \sin kx$$

ni hosil qilamiz. ◀

11.14. Fure integrali

Ma'lumki, $[-l, l]$ kesmada Dirixle teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f(x)$ funksiyani Fure qatoriga yoyish mumkin

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (11.82)$$

bu erda

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.83)$$

$f(x)$ funksiyani ixtiyoriy $[-l, l]$ kesmada Dirixle teoremasi shartlarini qanoatlantiradi va *absolyut integrallanuvchi*, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

integral yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz.

(11.83) koeffitsientlarni (11.82) qatorga qo'ysak

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \cos \frac{k\pi}{l} x + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \sin \frac{k\pi}{l} x \right) = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{k\pi t}{l} \cos \frac{k\pi}{l} x + \sin \frac{k\pi t}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x \right] dt \end{aligned}$$

yoki

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} dt \quad (11.84)$$

(11.84) tenglikda $\frac{k\pi}{l} = \omega_k$ kabi belgilash kiritamiz. U holda ixtiyoriy k uchun $\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{l}$. Bu belgilashlarni (11.84) ga qo'yib shakl almashtiramiz

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_k(t-x) dt \Delta\omega_k \quad (11.85)$$

Oxirgi tenglikda ixtiyoriy l uchun uni cheksiz oshirib boramiz. $l \rightarrow \infty$ da (11.85) ning birinchi hadi nolga intiladi, chunki

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt = \frac{M}{2l} \rightarrow 0$$

(11.85) tenglikning ikkinchi hadi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega(t-x) dt$$

funksiyaning ω argumenti bo'yicha $(0, \infty)$ oraliqdagi integral yig'indisini beradi. SHuning uchun (11.85) tenglikda $l \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak ikki karrali integralni hosil qilamiz

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \quad (11.86)$$

(11.86) tenglikka *Fure formulasi*, tenglikning o'ng tomonidagi ifodaga esa *Fure integrali* deb ataladi.

Bu tenglik $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgan barcha nuqtalarda o'rinli, uzilish nuqtalarida esa chap va o'ng limitlar o'rta arifmetigiga teng:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Ayirmaning kosinusi formulasidan foydalanib (11.86) formulani shakl almashtiramiz

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t \cos \omega x + \sin \omega t \sin \omega x) dt = \\
&= \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \cdot + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \sin \omega x \right)
\end{aligned}$$

Oxirgi ifodada

$$\begin{aligned}
a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \\
b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt
\end{aligned}$$

belgilashlar kiritsak, (11.86) formula bir karrali integralga keladi

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega \quad (11.87)$$

Bu tenglikdan Fure qatori va integrali orasida o'xshashliklar borligi ko'rinib turibdi. Farq shundaki, Fure qatori diskret indekslar bilan yig'iladi, Fure integrali esa uzluksiz o'zgaruvchi bilan integralanadi.

$f(x)$ funksiyaning juft va toq bo'lgan hollarida Fure formulasining xususiy hollarini qaraymiz:

a) $f(x)$ juft funksiya bo'lsa, $b(\omega) = 0$ va

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (11.88)$$

b) $f(x)$ toq funksiya bo'lsa, $a(\omega) = 0$ va

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (11.89)$$

Fure qatoridagi kabi funksiya $(0, \infty)$ da berilgan bo'lsa uni $(-\infty, 0)$ oraliqqa juft yoki toq qilib davom ettirishimiz mumkin. Bu hollarda $f(x)$ mos ravishda (11.89) va (11.88) kabi tasvirlanadi.

Agar (11.88) va (11.89) formulalarda mos ravishda

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{a}(\omega), \quad b(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{b}(\omega)$$

kabi belgilashlar kiritsak, bu formulalar quyidagicha ko‘rinish oladi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{a}(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad \tilde{a}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{b}(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad \tilde{b}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$\tilde{a}(\omega)$ ga $f(x)$ funksiyaning kosinus almashtirishi, $\tilde{b}(\omega)$ ga esa sinus almashtirishi deb ataladi.

11.15. Fure integralining kompleks shakli. Fure almashtirishi

Fure integralida ((11.87) formula) integral ostidagi funksiya ω ga nisbatan juft funksiya, shuning uchun

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt$$

Demak, Fure formulasini

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \quad (11.90)$$

kabi yozishimiz mumkin.

$$|f(t) \sin \omega(t-x)| \leq |f(t)|$$

bo‘lganligi uchun $f(t) \sin \omega(t-x)$ funksiya ham $f(t)$ kabi absolyut integrallanuvchi va funksiya ω ga nisbatan toq funksiya bo‘ladi. U holda

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt = 0. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikni $-\frac{i}{2\pi}$ ga ko‘pytirib (11.90) ga qo‘shsak

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos\omega(t-x) - i\sin\omega(t-x)] dt.$$

Bu tenglikni Eyler formulasi ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) dan foydalanib shakl almashtiramiz

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x} d\omega \end{aligned} \quad (11.91)$$

(11.91) ga Fure integralining kompleks shakli deb ataladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha ikkiga ajratamiz

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11.92)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (11.93)$$

(11.92) formula bilan aniqlanuvchi $F(\omega)$ funksiyaga $f(x)$ ning Fure almashtirishi deb ataladi. (11.93) formula bilan aniqlanuvchi $f(x)$ funksiyaga $F(\omega)$ ning Furening teskari almashtirishi deb ataladi.

11.22-Misol. $f(t) = \begin{cases} e^{-iat} & \text{agar } t > 0 \\ 0 & \text{agar } t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$

funksiyaning Fure almashtirishni toping

► Ta'rifga ko'ra

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iat} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. ◀

Nazorat savollari

1. Sonli qatorga ta'rif bering.
2. Qator xususiy yig'indisi nima.
3. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari bayon qiling.
4. Qator yaqinlashishining zaruriy shartini yozib bering.
5. Musbat hadli qator nima.
6. Dalamber alomatini yozib bering.
7. Koshi alomatini yozib bering.
8. Koshi integral alomatini yozib bering.
9. Absolut va shartli yaqinlashish ta'riflarini bayon qiling.
10. Leybnits teoremasini bayon qiling.
11. Funksional qatorga ta'rif bering.
12. Veyershtas teoremasini bayon qiling.
13. Darajali qatorga ta'rif bering.
14. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi va radiusini bayon qiling.
15. Abel teoremasini bayon qiling.
16. Fure qatoriga ta'rif bering.
17. Dirixle shartini bayon qiling.
18. Toq va juft funksyalarning Fure qatorini yozib bering.
19. Fure integraliga ta'rif bering.
20. Fure integralining kompleks shaklini yozib bering.
21. Fure almashtirishi kurinishini yozib bering.

Mashqlar

1. Qatorlarning umumiy hadlarining formulalari berilgan. Qatorlarning yoyilmasi yozilsin.

$$a) a_n = \frac{1}{n^2 + 3n};$$

$$b) a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n!};$$

$$c) a_n = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!};$$

$$d) a_n = \cos n\pi \sin \frac{\pi}{2^n}$$

2. Quyidagi qatorlar uchun umumiy hadlarning formulasini yozing.

a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$; b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$;

c) $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$; d) $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{15} + \frac{4}{31} + \dots$.

3. Quyidagi qatorlarning yig'indisini toping.

a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$; b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

4. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

5. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasi topilsin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{x}{3^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$

6. Quyidagi funksiyalar x ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyilsin, hosil bo'lgan qatorlarning yaqinlashish sohasi ko'rsatilsin.

a) $f(x) = \ln|\cos \frac{x}{2}|$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

c) $f(x) = 2^x$ d) $f(x) = \sin 5x$

e) $f(x) = e^{3x}$ e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

7. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ funksiya qatorga yoyilsin.

8. $f(x) = \arcsin 3x$ funksiya qatorga yoyilsin.

9. $\ln 2$ ni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

10. $\cos 5^\circ$ ni 0,001 aniqlikda hisoblang.

11. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ integral 0,001 aniqlikda hisoblansin.

12. Quyidagi 2π davrli funksiyalarni $(-\pi; \pi)$ oraliqda Fure qatoriga yoying.

a) $f(x) = x$;

$$b) f(x) = \begin{cases} -1 & \text{agar } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{agar } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{agar } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

13. Quyidagi 2π davrli funksiyalarni $(-\pi; \pi)$ oraliqda Fure qatoriga yoying:

$$a) f(x) = x^2 + 2 \qquad b) f(x) = 3x^3 + x$$

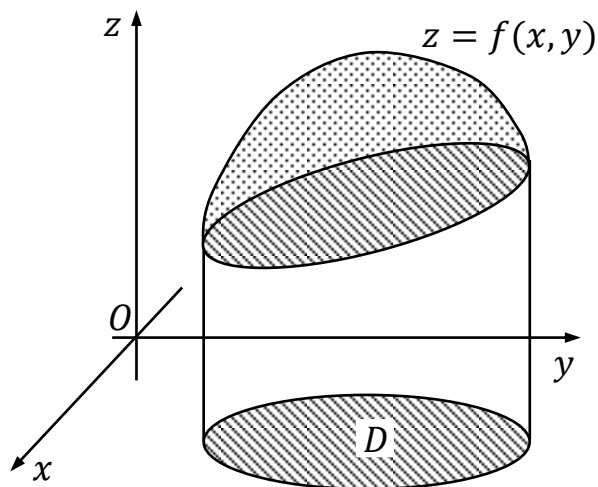
14. Davri 6 ga teng bo'lgan $f(x) = 4x - 3$ funksiyani $(-3; 3)$ oraliqda Fure qatoriga yoying.

12-BOB. IKKI VA UCH O‘LCHOVLI INTEGRALLAR

12.1. Ikki o‘lchovli integral tushunchasiga keltiriladigan masalalar

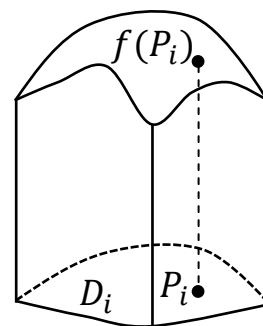
Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash masalasi aniq integral tushunchasiga olib kelgan edi. Ikki o‘lchovli integral tushunchasiga silindrik jismning hajmini hisoblash masalasini yechish orqali kelimiz.

$Oxyz$ to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida quyidan Oxy tekislikning D yopiq sohasi bilan, yon tomonlardan Oz o‘qiga parallel silindrik sirt bilan va yuqoridan $z = f(x, y)$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt bilan chegaralangan Q jismni qaraymiz (12.1-rasm). Bu yerda $(x; y) \in D$ nuqtalarda $f(x, y)$ funksiya nomanfiy qiymatlarni qabul qiladi deb



12.1-rasm

faraz qilamiz. Bunday tasvirlangan V jismni *silindrik jism*, x va y o‘zgaruvchilarning D o‘zgarish sohasi esa silindrik jismning *asosi* deb ataladi.



12.2-rasm

Qaralayotgan Q jismning V hajmini topish uchun uning D asosini ixtiyoriy chiziqlar bilan o‘zaro kesishmaydigan n ta D_i qismaniy sohalarga ajratamiz. U holda Q jismni asoslari D_i sohalardan iborat bo‘lgan n ta $Q_i, i = \overline{1, n}$ silindrik ustunning yig‘indisi deb qarash mumkin. Har bir qismaniy sohada birorta $P_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ nuqtani tanlaymiz (12.2-rasm). Agar har bir silindrik ustunni balandligi $f(\xi_i, \eta_i)$ bo‘lgan to‘g‘ri silindr bilan almashtirsak, Q_i ustunning ΔV_i hajmi taqriban $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ ko‘paytmaga teng bo‘ladi, bu yerda ΔS_i qismaniy D_i sohaning yuzi. U holda Q jismning yuzi taqriban

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (12.1)$$

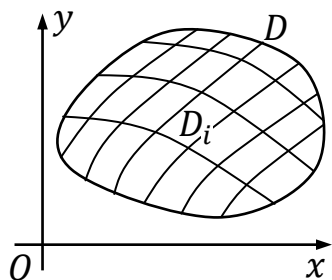
yig'indiga teng bo'ladi.

Bu munosabatning aniqligini oshirish uchun D_i qisman sohalarining sonini oshirish hisobiga ularning o'lchamlarini kamaytirish kerakligi ravshan. Hajmning V aniq qiymati sifatida (12.1) yig'indining $D_i, i = \overline{1, n}$ to'plamlar eng katta d diametrining nolga intilgandagi limitini olish kerak:

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (12.2)$$

12.2. Ikki o'lchovli integral

Asosiy tushuncha va ta'riflar. Agar chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtasi ustma-ust tushsa, biz uni yopiq chiziq deb ataymiz. Yopiq chiziq bilan chegarаланagan to'plamga chegaralovchi chiziq ham to'plamga tegishli bo'lsa, bunday to'plamlar yopiq to'plam deb ataladi.



12.3-rasm

Oxy tekislikning D sohasida uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. D sohani biror usul bilan n ta $D_i, i = \overline{1, n}$ qisman sohalariga ajratamiz va ularning yuzlarini mos ravishda ΔS_i , diametrlarini esa d_i va bu diametrlarning eng kattasini d orqali belgilaymiz (12.3-rasm).

Har bir D_i sohada yxtiyoriy ravishda $M_i(\xi_i; \eta_i)$ nuqtani tanlaymiz va

$$f(\xi_1, \eta_1) \Delta S_1 + f(\xi_1, \eta_1) \Delta S_1 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (12.3)$$

yig'indini tuzamiz. Bu yig'indi $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha *integral yig'indisi* deb ataladi.

12.1-Ta'rif. Agar (12.3) integral yig'indi $d = 0$ nuqtada chekli I limitga ega bo'lib, u D sohani bo'lish usuliga va undagi nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, bu limitni biz $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integrali deb ataymiz va uni

$$I = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy$$

orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, ikki o'lchovli integral

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (12.4)$$

tenglik bilan aniqlanar ekan. Bunday holda $f(x, y)$ funksiya D sohada *integrallanuvchi* va D – *integrallash sohasi* deb ataladi.

(12.2) va (12.4) tengliklarni taqqoslab, 12.1. da qaralgan hajm

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (12.5)$$

formula bilan hisoblanadi deb xulosa chiqarish mumkin.

$f(x, y)$ funksiya D sohada chegaralangan bo'lsin. U holda u har bir D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sohada ham chegaralangan bo'ladi. $m_i = \inf_{(x, y) \in \Delta D_i} f(x, y)$, $M_i = \sup_{(x, y) \in \Delta D_i} f(x, y)$ deb belgilash kiritamiz va $f(x, y)$ funksiyaning D sohadagi yuqori va quyi Darbu yig'indilari deb ataluvchi

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i, \quad \underline{S} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i$$

yig'indilarni tuzamiz. Bu yig'indilar ham bir o'zgaruvchili funksiyaning Darbu yig'indilari ega bo'lgan barcha xossalarga ega.

Har qanday $f(x; y)$ funksiya uchun ham ikki o'lchovli integral mavjudmi degan savolning tug'ilishi tabiiy. Ikki o'lchovli integral mavjudligining yetarli shartini topish uchun, bir o'zgaruvchili funksiylardagi singari yuqorida kiritilgan Darbu yig'indilaridan foydalanish juda qulay va ular ikki o'lchovli integrallar uchun to'liq o'tadi. Quyidagi teorema ham aniq integraldagi mos teorema singari isbotlanadi.

12.1-Teorema. Yopiq chegaralanagan D sohada uzluksiz $f(x, y)$ funksiya, bu sohada integrallanuvchi hamdir.

Biz quyida faqat integrallash sohasida uzluksiz bo'lgan funksiyalarnigina qaraymiz.

12.3. Ikki olchovli integralning asosiy xossalari

Ikki o'lchovli integralning xossalari aniq integralning mos xossalari bilan bir xil va isbotlari ham shu tartibda takrorlanadi. Shuning uchun ayrim xossalarninggina isbotida to'xtalamiz.

1) Agar D soha S yuzaga ega bo'lsa, u holda

$$\iint_D dx dy = S.$$

◀ Bu holda integral osti funksiya D sohada o'zgarmas: $f(x, y) \equiv 1$. Shuning uchun D sohani yuzalari ΔS_i bo'lgan $D_i, i = \overline{1, n}$ sohalarga ixtiyoriy bo'lishlarda va $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ nuqtalarni ixtiyoriy tanlashda ikki o'lchovli integralning ta'rifiga ko'ra

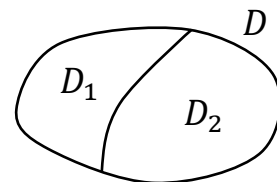
$$\iint_D dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta S_i = S. \blacktriangleright$$

2) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar D sohada integrallanuvchi bo'lsa, ularning $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ kombinatsiyasi ham D sohada integrallanuvchi va

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy, \quad (12.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi bu yerda $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

3) Agar D sohani $D_1 \cup D_2 = D$ bo'ladigan qilib faqat bo'linish chizig'idagina kesishadigan ikkita D_1 va D_2 sohalarga ajratilsa (12.4-rasm),



12.4-rasm

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad (12.7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4) Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada nomanfiy va integrallanuvchi bo'lsa,

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0 \quad (12.8)$$

bo'ladi.

5) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar D sohada integrallanuvchi va barcha $(x, y) \in D$ nuqtalarda $f(x, y) \geq g(x, y)$ bo'lsa

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy \quad (12.9)$$

bo'ladi.

6) Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo'lsa, $|f(x, y)|$ funksiya ham D sohada integrallanuvchi bo'ladi va

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy \quad (12.10)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

7) Agar yuzasi S ga teng bo'lgan $f(x, y)$ funksiya D sohada uzluksiz va uning bu sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari mos ravishda M va m bo'lsa,

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS \quad (12.11)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

8) (O'rta qiymat haqidagi teorema) Agar yuzasi S ga teng bo'lgan $f(x, y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsa, bu sohada

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $P_0(x_0, y_0)$ nuqta mavjud.

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy \quad (12.12)$$

miqdor $f(x, y)$ funksiyaning D sohadagi *o'rta qiymati* deb ataladi.

12.4. Ikki o'lchovli integralni hisoblash

Ikki o'lchovli integralni to'g'ri tortburchakli soha bo'yicha hisoblash. Dastlab D integrallash sohasi tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdan iborat, sodda holni qarab chiqamiz.

12.2-Teorema. $f(x, y)$ funksiya $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan D to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan va

1) $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ ikki o'lchovli integral mavjud;

2) $x \in [a, b]$ bo'lib, x ning ixtiyoriy alohida olingan qiymatida $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ aniq integral mavjud bo'lsin. U holda

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

integral ham mavjud va uning qiymati I ga teng bo'ladi.

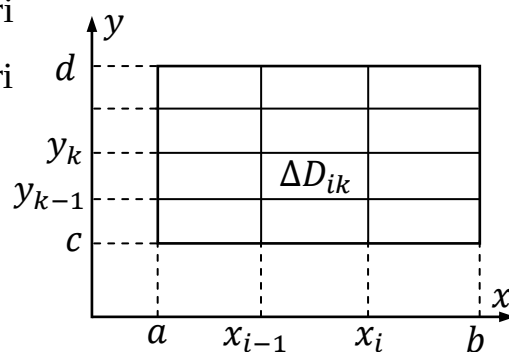
◀ $[a, b]$ kesmani $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ nuqtalar yordamida n qismga, $[c, d]$ kesmani esa $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ nuqtalar yordamida m qismga ajratamiz va $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_m = d$ deb olamiz (12.5-rasm). Bundan tashqari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ deb olamiz. $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) va $y = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) to'g'ri chiziqlarni o'tkazib D sohani mn ta kichik to'g'ri to'rtburchaklarga ajratamiz. ΔD_{ik} — ulardan biri bo'lsin.

$$m_{ik} = \inf_{(x,y) \in \Delta D_{ik}} f(x, y),$$

$$M_{ik} = \sup_{(x,y) \in \Delta D_{ik}} f(x, y)$$

deb belgilash kiritamiz. U holda ixtiyoriy

$(x, y) \in \Delta D_{ik}$ nuqtalarda $m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xususiylashtirish holda ixtiyoriy $x = \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ va ixtiyoriy $y \in [y_{k-1}, y_k]$ uchun



12.5-rasm

$$m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}$$

bo'ladi. Bu tengsizlikni y bo'yicha $[y_{i-1}, y_i]$ kesmada integrallab

$$m_{ik} \cdot \Delta y_k \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \cdot \Delta y_k \quad (12.13)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdagi integral teoremaning 2) shartiga ko'ra mavjud. (12.13) tengsizlikni k bo'yicha 1 dan m gacha hadma-had qo'shib chiqsak

$$\sum_{k=1}^m m_{ik} \cdot \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=1}^m M_{ik} \cdot \Delta y_k$$

tengsizlik hosil bo'ladi va unga teorema shartidagi belgilashni qo'llab

$$\sum_{k=1}^m m_{ik} \cdot \Delta y_k \leq \varphi(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{ik} \cdot \Delta y_k$$

tengsizlikni yozamiz. Bu tengsizlikni Δx_i kesma uzunligiga ko'paytiramiz va so'ngra i bo'yicha 1 dan n gacha hadma-had qo'shamiz:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m m_{ik} \cdot \Delta y_k \right) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m M_{ik} \cdot \Delta y_k \right) \cdot \Delta x_i.$$

$\Delta x_i \cdot \Delta y_k$ ko'paytma D_{ik} sohaning yuziga teng bo'lganligi uchun, bu tengsizlikning chetki hadlari $f(x, y)$ funksiyaning D sohadagi quyi va yuqori Darbu yig'indisini beradi, ya'ni bu tengsizlikni

$$\underline{S} \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \overline{S}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Δx_i va Δy_k bir vaqtda nolga intilsin. U holda teoremaning 1) shartidan $\underline{S} \rightarrow I$ va $\overline{S} \rightarrow I$ ekanligi va demak $\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i \rightarrow I$ ekanligi kelib chiqadi. Biroq so'ngi

yig'indining limiti $\int_a^b \varphi(x) dx$ integralni aniqlaydi.

Shunday qilib $\int_a^b \varphi(x)dx = I$ ekanligini, ya'ni

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx = \iint_D f(x, y)dx dy$$

tenglikni isbotladik.

Chap tomondagi integralda dastlab y bo'yicha integrallanadi, so'ngra esa x bo'yicha integrallanadi. Shu sababli ular *takroriy integral* deb ataladi. Bu tenglikni

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$$

ko'rinishda yozsak, ikki o'lchovli integralni hisoblash takroriy integralni hisoblashga keltirilganligini ko'ramiz. So'ngi munosabat ko'pincha

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \quad (12.14)$$

kabi ko'rinishda yoziladi. ►

Izoh. Agar 1) va 2) shartlarga qo'shimcha ravishda quyidagi shart bajarilsa:

3) Ixtiyoriy fiksirlangan $y \in [c, d]$ qiymatda $\psi(y) = \int_c^d f(x, y)dx$ aniq integral mavjud bo'lsin, u holda

$$\int_c^d \psi(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy$$

takroriy integral ham mavjud bo'ladi va uning ham qiymati I ga teng bo'ladi. Demak (12.14) formulaga teng kuchli bo'lgan

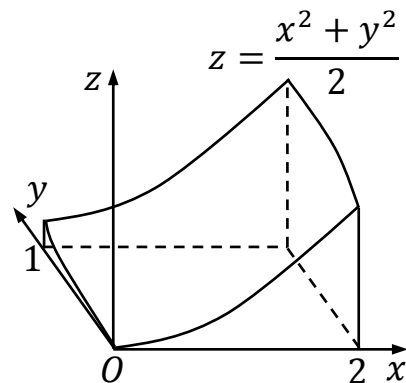
$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \quad (12.15)$$

formula o'rinli bo'lar ekan.

12.1-Misol. $z = (x^2 + y^2)/2$ sirt va $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1, z = 0$ tekisliklar bilan chegaralangan jismning hajmini toping (12.6-rasm).

► (12.5) va (12.14) formulalarga ko‘ra

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \frac{(x^2 + y^2)}{2} dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 \frac{(x^2 + y^2)}{2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$



12.6-rasm

Ikki o‘lchovli integralni ixtiyoriy soha bo‘yicha hisoblash. Endi integrallash sohasining chegarasi to‘liq yoki qisman egri chiziq bo‘lgan murakkab holni qaraymiz.

12.2-Ta’rif. D integrallash sohasini

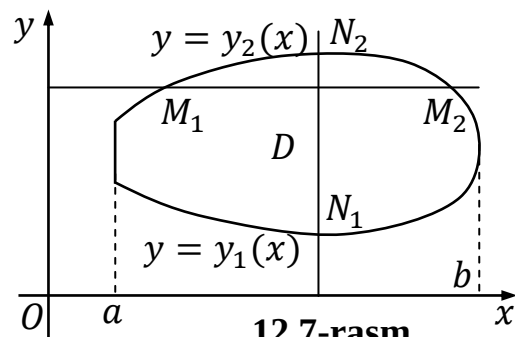
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} \quad (12.16)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, uni Oy o‘q yo‘nalishi bo‘yicha to‘g‘ri soha deb ataladi, bu yerda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $y_1(x) \leq y_2(x)$ tengsizlikni qanoatlantiradi (12.7-rasm).

Bunday sohalarning ichki nuqtasi (ya’ni chegara nuqtasi bo‘lmagan) orqali Oy o‘qqa parallel qilib o‘tkazilgan har qanday to‘g‘ri chiziq sohaning chegarasini

faqat ikki nuqtada kesib o‘tadi. 12.7-rasmda M_1 va M_2 nuqtalar. Ox o‘q yo‘nalishi bo‘yicha to‘g‘ri soha ham xuddi shu singari aniqlanadi.

Bir vaqtning o‘zida ham Ox va ham Oy o‘qlar yo‘nalishi bo‘yicha to‘g‘ri sohani oddiy qilib to‘g‘ri soha deb ataymiz. 12.3-rasmda to‘g‘ri soha tasvirlangan.



12.7-rasm

12.3-Teorema. Agar $f(x, y)$ funksiyaning (12.16) ko‘rinishdagi D soha bo‘yicha ikki o‘lchovli integrali mavjud va har bir fiksirlangan $x \in [a, b]$ qiymatda $\varphi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ aniq integral mavjud bo‘lsin. U holda

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

integral ham mavjud va uning qiymati I ga teng bo‘ladi:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (12.17)$$

◀ D integrallash sohasini

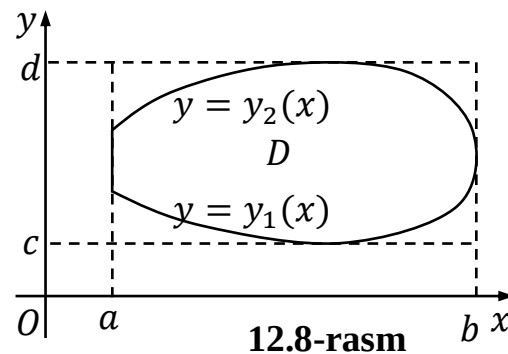
$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

To‘g‘ri to‘rtburchak ichiga joylashtiramiz, bu yerda $[c, d]$ kesmaning c chetki nuqtasi $y_1(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik qiymati, d chetki nuqta esa $y_2(x)$ funksiyaning bu kesmadagi eng katta qiymatidan iborat (12.8-rasm).

T to‘g‘ri to‘rtburchakda

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x \in D; \\ 0, & x \in T \setminus D \end{cases}$$

funksiyani aniqlaymiz. $f(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo‘lganligi sababli $F(x, y)$ funksiya ham D sohada integrallanuvchi



va bundan tashqari

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

$T \setminus D$ to‘plamda $F(x, y) = 0$ bo‘lganligi uchun $\iint_{T \setminus D} F(x, y) dx dy = 0$ bo‘ladi. U holda

ikki o'lchovli integralning 3) xossasiga ko'ra $F(x, y)$ funksiya T to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi va

$$\begin{aligned}\iint_T F(x, y) dx dy &= \iint_D F(x, y) dx dy + \iint_{T \setminus D} F(x, y) dx dy = \\ &= \iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy\end{aligned}\quad (12.18)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Har bir fiksirlangan $x \in [a, b]$ qiymatda $F(x, y)$ funksiyaning $[c, d]$ kesma bo'yicha aniq integrali mavjud va

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^{y_1(x)} F(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x, y) dy.$$

Haqiqatdan ham, $[c, y_1(x)]$ va $[y_2(x), d]$ kesmalarda $F(x, y)$ funksiya aynan nol va demak integrallanuvchi.

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

integral esa teorema shartiga ko'ra mavjud. Aniq integralning 5) xossasiga (additivlik) binoan $F(x, y)$ funksiya $[c, d]$ kesmada integrallanuvchi va

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy\quad (12.19)$$

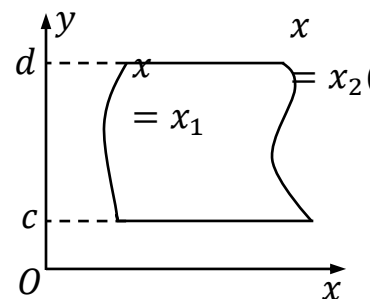
degan xulosaga kelamiz. Bu xulosadan $F(x, y)$ funksiyaning T to'g'ri to'rtburchakda 12.2-Teoremaning shartlarini qanoatlantirishi kelib chiqadi. Shuning uchun bu funksiyaning T to'g'ri to'rtburchak bo'yicha ikki o'lchovli integrali mavjud va u quyidagi takroriy integralga teng:

$$\iint_T F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Bu yerda (12.18) va (12.19) tengliklarni qo'llab, (12.17) tenglikni hosil qilamiz. ►

Izoh. D integrallash sohasi chap va o'ngdan $x = x_1(y)$ va $x = x_2(y)$ chiziqlar bilan, quyi va yuqoridan esa $y = c$ va $y = d$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin (12.9-rasm) va $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha ikki o'lchovli integrali mavjud, hamda har bir fiksirlangan

$y \in [c, d]$ qiymatda $\psi(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ aniq integral mavjud bo'lsin. U holda



12.9-rasm

$$\int_c^d \psi(y) dy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

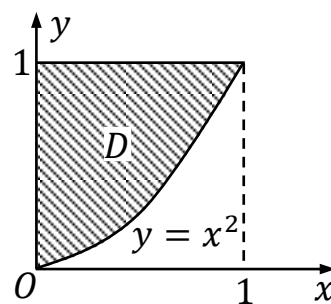
integral ham mavjud va uning qiymati I ga teng bo'ladi:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (12.20)$$

Bu tasdiq ham 12.3-Teorema singari isbotlanadi.

12.2-Misol. $f(x, y) = x^2 y^3$ funksiyaning $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq 1\}$ soha bo'yicha ikki olchovli integralini hisoblaymiz.

► Integrallash sohasi Oy o'q yo'nalishi bo'yicha to'g'ri soha va $y_1(x) = x^2$ va $y_2(x) \equiv 1$ (12.10-rasm). (12.17) formulaga ko'ra ikki o'lchovli integralni hisoblaymiz:



12.10-rasm

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y^3 dy = \int_0^1 \frac{1}{4} x^2 y^4 \Big|_{x^2}^1 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x^2 - x^{10}) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{11}}{11} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) = \frac{2}{33}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Mulohaza. 12.2-Misolda integrallash sohasi ikkala koordinatalar o'qiga nisbatan ham to'g'ri, shuning uchun ikki o'lchovli integralni hisoblashda (12.20) formuladan ham foydalanish mumkin. Bunda integrallash sohasini

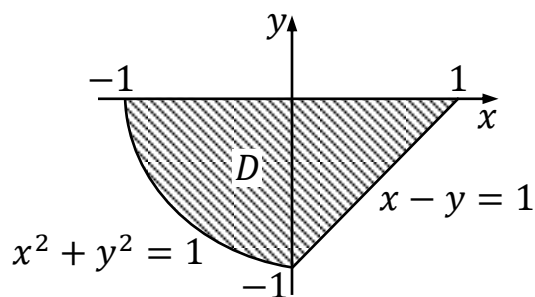
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: y \in [0, 1], 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

ko‘rinishda yozib olamiz va (12.20) formuladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^2 y^3 dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 y^3 \Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{9/2} dy = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} y^{11/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{33}. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Mulohaza. Agar ikki ikki o‘lchovli integralni hisoblash (12.17) formula bilan ham, (12.20) formula bilan ham takroriy integralga keltirilishi mumkin bo‘lsa, misolga qarab formulani tanlash kerak bo‘ladi.

12.3-Misol. $f(x, y) = 2x + 3y$ funksiyaning Ox o‘q, $x^2 + y^2 = 1$ aylananing bir qismi va $x - y = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan D soha (12.11-rasm) bo‘icha ikki o‘lchovli integralni hisoblashga (12.17) va (12.20)



12.11-rasm

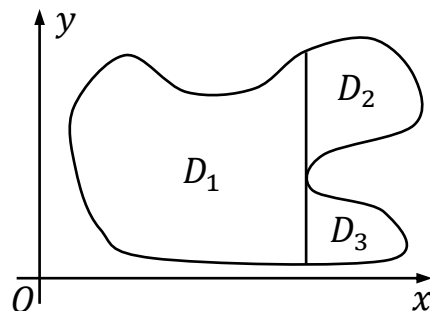
formulalarning ikkalasini ham qo‘llash mumkin, chunki D soha ikkala koordinata o‘qlariga nisbatan ham to‘g‘ri. Shuning uchun (12.17) formula qo‘llanilsa, ikkita takroriy integralni hisoblashga to‘g‘ri keladi:

$$\iint_D (2x + 3y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^1 (2x + 3y) dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2x + 3y) dy.$$

Agar (12.20) formulani qo‘llasak bitta takroriy integralni hisoblash bilan chegaralanish mumkin:

$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 3y) dx dy &= \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+y} (2x + 3y) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 3yx) \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+y} dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(1 + 2y + y^2 + 3y + 3y^2 - 1 + y^2 + 3y\sqrt{1-y^2} \right) dy = \\ &= \left(\frac{5}{3} y^3 + \frac{5}{2} y^2 - (1-y^2)^{3/2} \right) \Big|_{-1}^0 = -1 + \frac{5}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{11}{6}. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Mulohaza. Agar D integrallash sohasi Ox o'qi yo'nalishi boyicha ham, Oy o'qi yo'nalishi boyicha ham to'g'ri bo'lmasa (12.8-rasm), ikki o'lchovli integralni takroriy integralga keltirish uchun D integrallash sohasini har biri hech bo'lmaganda bitta o'q yo'nalishi bo'yicha to'g'ri bo'ladigan qismlarga ajratish kerak. U holda ikki o'lchovli integralning 3) xossasiga ko'ra ikki o'lchovli integral bu qismlar bo'yicha olingan ikki o'lchovli integrallar yig'indisiga teng. 12.12-rasmda D integrallash sohasi Oy o'q yo'nalishi bo'yicha to'g'ri bo'lgan uchta sohaga ajratilgan. Ikki o'lchovli integralni hisoblash, takroriy integralni hisoblashga



12.12-rasm

keltirilganda, o'zgaruvchilarning tartibini tanlash usuli hisoblash murakkabligiga katta ta'sir qilishini ta'kidlab o'tish kerak.

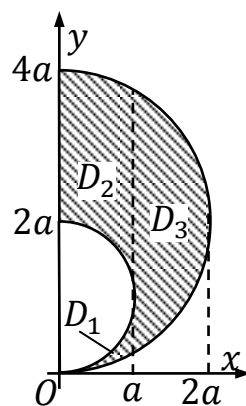
12.4-Misol. D soha 12.13 va 12.14-rasmlarda tasvirlangan bo'lib, u $x = \sqrt{2ay - y^2}$ va $x = \sqrt{4ay - y^2}$ tenglamalar bilan berilgan aylanalar bilan chegaralangan. D sohada integrallanuvchi $f(x, y)$ funksiyaning ikki o'lchovli integralini takroriy integrallar orqali ifodalang.

► Ikki o'lchovli integralni (12.17) formula bilan hisoblash uchun D sohani $x = a$ to'g'ri chiziq yordamida uchta qismga ajratamiz:

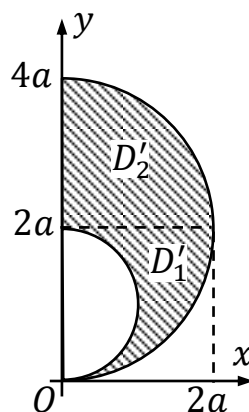
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \in [0, a], 2a - \sqrt{4a^2 - x^2} \leq y \leq a - a^2 - x^2\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \in [0, a], a + \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq 2a + 4a^2 - x^2\};$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \in [a, 2a], 2a - \sqrt{4a^2 - x^2} \leq y \leq 2a + 4a^2 - x^2\}.$$



12.13-rasm



12.14-rasm

U holda $f(x, y)$ funksiyaning D soha bo'yicha ikki o'lchovli integrali uchta takroriy integrallar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^a dx \int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2}}^{a-\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^a dx \int_{a+\sqrt{a^2-x^2}}^{2a+\sqrt{4a^2-x^2}} f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2}}^{2a+\sqrt{4a^2-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

(12.20) formulani qo'llash uchun D sohani $y = 2a$ to'g'ri chiziq bilan ikkita sohaga ajratish yetarli (12.14-rasm).

$$D'_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \in [0, 2a], \sqrt{2ay - y^2} \leq x \leq \sqrt{4ay - y^2}\};$$

$$D'_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \in [2a, 4a], 0 \leq x \leq \sqrt{4ay - y^2}\}.$$

Bu holda

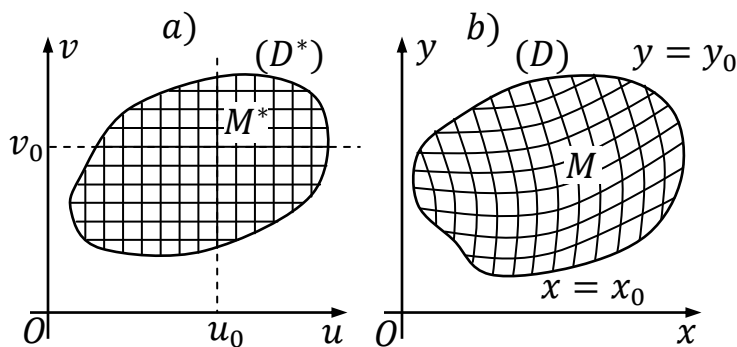
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2a} dy \int_{\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{4ay-y^2}} f(x, y) dx + \int_{2a}^{4a} dy \int_0^{\sqrt{4ay-y^2}} f(x, y) dx. \blacktriangleleft$$

12.5. Ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish

Nuqtaning egri chiziqli koordinatalari. *Ouv* tekislikning D^* sohasida uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (12.21)$$

funksiyalar juftligi aniqlangan bo'lsin. (12.21) tenglamalar orqali D^* sohaning har bir



12.15-rasm

$M^*(u, v)$ nuqtasiga Oxy tekislikning aniq bir $M(x, y)$ nuqtasi mos keladi va demak D^* sohaga Oxy tekislikning biror D sohasi mos kelar ekan (12.15-rasm). Bu holda (12.21) funksiyalar

D^* sohani D sohaga akslantiradi va D soha D^* sohaning (12.21) akslantirishdagi obrazi deyiladi.

Har xil (u, v) nuqtalarga har xil (x, y) nuqtalar mos keladi deb faraz qilamiz. Bu esa (12.21) tenglamalar u va v o'zgaruvchilarga nisbatan:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (12.22)$$

bir qiymatli yechilishiga teng kuchli. Bu holda akslantirish D^* sohani D sohaga o'zaro bir qiymatli akslantiradi deb ataladi. Bunday akslantirishda D^* sohada yotuvchi ixtiyoriy L^* uzluksiz egri chiziq D sohada yotuvchi L uzluksiz egri chiziqqa o'tadi. Agar $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiyalar ham uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $L \in D$ uzluksiz egri chiziq (12.22) akslantirish yordamida uzluksiz $L^* \in D^*$ egri chiziqqa o'tadi.

u, v o'zgaruvchilarning D^* sohadan olingan u_0, v_0 juftligi nafaqat $M^*(u_0, v_0) \in D^*$ nuqtaning o'rnini, balki unga mos $M(x_0, y_0) \in D$, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ nuqtaning ham o'rnini aniqlaydi. Bu esa u, v sonlarni Oxy tekislik D sohasi M nuqtasining yangi koordinatalari deb qarashga asos bo'ladi. Ular M nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb ataladi.

D sohaning bitta koordinatasi o'garmas, ikkinchisi esa o'zgaruvchan bo'ladigan nuqtalari to'plamiga *koordinata chizig'i* deb ataladi. (12.21) tengliklarda $u = u_0$ deb olib, koordinata chizig'ining

$$x = x(u, v_0), y = y(u, v_0) \quad (12.23)$$

parametrik tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerda parametr rolini u o'zgaruvchi bajaradi. v koordinataga mumkin bo'lgan turli qiymatlarni berib, koordinata ciziqslarning Oxy tekislikdagi ($v = \text{const}$) *oilasini* hosil qilamiz. Xuddi shu singari boshqa ($u = \text{const}$) koordinata chiziqlari oilasini hosil qilish mumkin.

Egri chiziqli koordinatalarga misol sifatida qutb koordinatalarini olish mumkin. Bu holda (12.21) formulalar

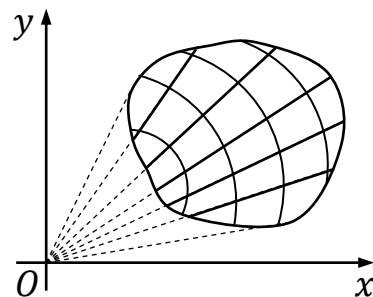
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (12.24)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar koordinatalar boshi D sohada yotmasa va $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ bo'lsa, (12.24) formulalar r va φ o'zgaruvchilarga nisbatan quyidagicha bir qiymatli yechiladi:

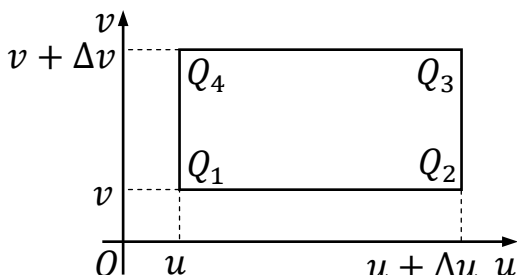
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Shunday qilib, ko'rsatilgan shartlarda (x, y) va (r, φ) juftliklar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'ladi. r va φ koordinatalarning koordinata chiziqlari $x^2 + y^2 = \text{const}$ aylanalar va koordinatalar boshidan chiquvchi nurlardan iborat bo'ladi (12.16-rasm).

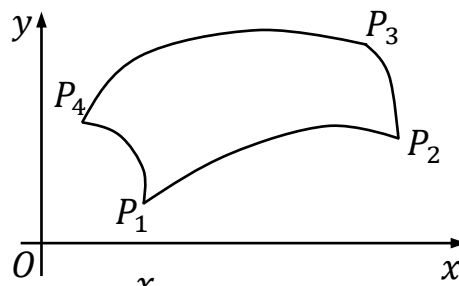


12.16-rasm

Egri chiziqli koordinatalarda yuza. Ouv tekislikda uchlari $Q_1(u, v)$, $Q_2(u + \Delta u, v)$,



12.17-rasm



12.18-rasm

$Q_3(u + \Delta u, v + \Delta v)$, $Q_3(u, v + \Delta v)$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rburchakni olamiz (12.17-rasm). Uning Oxy tekislikdagi tasviri ikki juft koordinata chiziqlaridan hosil bo'lgan egri chiziqli to'rtburchak bo'ladi (12.18-rasm). Uning uchlari

$$P_1(x(u, v), y(u, v)), P_2(x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)),$$

$$P_3(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)) \text{ va } P_4(x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v))$$

nuqtalarda bo'ladi.

$\delta = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ deb qisqa belgilash kiritamiz. U holda $x(u, v)$ va $y(u, v)$ funksiyalar D^* sohada $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}$ va $\frac{\partial y}{\partial v}$ uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb faraz qilsak, P_1, P_2, P_3 va P_4 nuqtalarni $o(\delta)$ aniqlikda $P'_1(x(u, v), y(u, v))$,

$$\begin{aligned} P'_2 & \left(x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right), \\ P'_3 & \left(x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right), \\ P'_4 & \left(x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right) \end{aligned}$$

nuqtalar bilan almashtirish mumkin. U holda $\overrightarrow{P'_1 P'_2} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\}$ va $\overrightarrow{P'_4 P'_3} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\}$ bo'lganligi uchun, $\overrightarrow{P'_1 P'_2} = \overrightarrow{P'_4 P'_3}$ bo'ladi, bundan esa $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ figuraning parallelogramm ekanligi kelib chiqadi. Uning yuzi esa, $\overrightarrow{P'_1 P'_2}$ va $\overrightarrow{P'_2 P'_3}$ vektorlar vektor ko'paytmasining absolyut qiymatiga teng: $S_{P'_1 P'_2 P'_3 P'_4} = \left| \overrightarrow{P'_1 P'_2} \times \overrightarrow{P'_2 P'_3} \right|$.

Bundan tashqari $\overrightarrow{P'_2 P'_3} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right\}$, demak:

$$\overrightarrow{P'_1 P'_2} \times \overrightarrow{P'_2 P'_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \vec{k}.$$

Tenglikning o'ng tomonidagi

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (12.25)$$

determinant $x(u, v)$ va $y(u, v)$ funksiyalarning *Yakobi determinant* yoki *yakobiani* deb ataladi.

Shunday qilib,

$$\overrightarrow{P_1'P_2'} \times \overrightarrow{P_2'P_3'} = J(u, v) \Delta u \Delta v \vec{k}$$

tenglikka ega bo'ldik, bundan esa parallelogrammning yuzi uchun

$$S_{P_1'P_2'P_3'} = |J(u, v)| \Delta u \Delta v$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bundan esa $P_1P_2P_3P_4$ egri chiziqli to'rtburchakning yuzi ham $o(\delta^2)$ aniqlikda $|J(u, v)| \Delta u \Delta v$ ifodaga teng ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun egri chiziqli koordinatalarda yuz elementi sifatida $|J(u, v)| du dv$ miqdor olinadi.

Xususiyl holda, qutb koordinatalarida

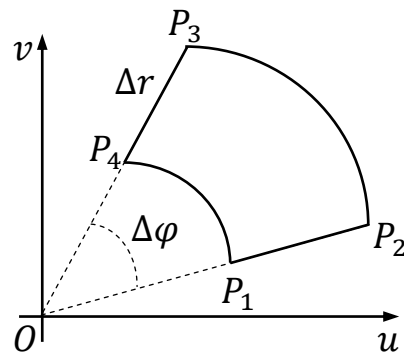
$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi, y(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

bo'ladi va demak

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

har doim $r \geq 0$, u holda qutb koordinatalarida yuz elementi $ds = r dr d\varphi$ tenglikni qanoatlantiradi.

Shuning uchun $P_1P_2P_3P_4$ figurani yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlar aniqligida tomonlari $P_1P_2 = \Delta r$ va $P_1P_4 = r \Delta \varphi$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak deb qarash mumkin (12.19-rasm).



12.19-rasm

Egri chiziqli koordinatalarda yuzalarni hisoblash. Ouv tekislikning D^* sohasi Oxy tekislik D sohasining (12.22) akslantirishdagi obrazi bo'lsin. D^* sohani $u = \text{const}$ va $v = \text{const}$ to'g'ri chiziqlar bilan elementar to'g'ri to'rtburchaklarga ajratamiz. U holda D soha koordinata chiziqlari bilan elementar to'rtburchaklarga bo'linadi.

ik – to‘rtburchakning yuzi $|J(u_i, v_k)|\Delta u_i \Delta v_k + o(\delta_{ik}^2)$ ga teng bo‘ladi. Bu to‘rtburchaklarni yig‘ib, D sohaning yuzi taqriban

$$S_D \approx \sum_{i,k} |J(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k$$

qiymatga teng ekanligini hosil qilamiz. D^* soha to‘g‘ri to‘rtburchaklari diametrlarining eng kattasini d orqali belgilab, uni nolga intiltiramiz. U holda $x(u, v)$ va $y(u, v)$ funksiyalarning uzluksizligi tufayli Oxy tekislikdagi elementar to‘rtburchaklarning diametrlari ham nolga intiladi. $J(u, v)$ yakobianning ham D^* sohadagi uzluksizligini inobatga olsak, yuqorida aytilgan limitga o‘tsak D sohaning yuzi uchun

$$S_D = \iint_{D^*} |J(u, v)| du dv \quad (12.26)$$

aniq tenglikni hosil qilamiz.

Bu formula xususan, yakobianning geometrik ma’nosini ochishga imkon beradi. Buning uchun (12.26) formulaga o‘rta qiymat haqidagi teoremaning (12.12) formulasini qo‘llaymiz:

$$S_D = |J(\xi, \eta)| S_{D^*}, \quad (12.27)$$

bundan esa,

$$\frac{S_D}{S_{D^*}} = |J(\xi, \eta)|, \quad (12.28)$$

bu yerda (ξ, η) – nuqta D^* sohaning biror ichki nuqtasi.

Faraz qilaylik, D^* soha kichik va (u, v) – uning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U holda (12.28) formulaga ko‘ra

$$\frac{S_D}{S_{D^*}} \approx |J(u, v)|,$$

yoki

$$S_D \approx |J(u, v)| S_{D^*}.$$

Bu so‘ngi tenglikdan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: Ouv tekislikni Oxy

tekislikka (12.21) akslantirishda $|J(u, v)|$ miqdor Ouv tekislikni (u, v) nuqtadagi choʻzilish koeffitsiyentini berar ekan.

Ikki oʻlchovli integralda oʻzgaruvchilarni almashtirish. $f(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi va $\iint_D f(x, y) dx dy = I$ boʻlsin, hamda D soha (12.22) akslantirish yordamida Ouv tekislikning D^* sohasiga akslantirilsin. Bu akslantirishni oʻzaro bir qiymatli deb faraz qilamiz. D^* sohani yuzlari $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ boʻlgan $\Delta D_1^*, \Delta D_2^*, \dots, \Delta D_n^*$ sohalarga boʻlamiz. U holda D soha ham yuzlari $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ boʻlgan $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ sohalarga boʻlinadi. Har bir ΔD_i sohada ixtiyoriy ravishda bittadan nuqta tanlaymiz va

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

yigʻindini tuzamiz. (12.27) formulaga asosan,

$$\Delta S_i = |J(\xi_i, \eta_i)| \Delta\sigma_i,$$

bu yerda (ξ_i, η_i) nuqta ΔD_i^* sohaning biror nuqtasi. (x_i, y_i) nuqta sifatida aynan (ξ_i, η_i) nuqtaga akslanadigan ΔD_i sohaning nuqtasini olamiz (I integral mavjud, shu tufayli integral yigʻindida (x_i, y_i) nuqtani ixtiyoriy ravishda tanlash mumkin). Boshqacha qilib aytganda

$$x_i = x(\xi_i, \eta_i), \quad y_i = y(\xi_i, \eta_i)$$

deb olamiz. U holda integral yigʻindi

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i)) |J(\xi_i, \eta_i)| \Delta\sigma_i$$

koʻrinishni oladi. $f(x, y)$ funksiyaning uzluksiz deb faraz qilib va ΔD_k^* sohalar diametrlarining eng kattasini nolga intiltirsak,

$$I = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| d\sigma,$$

yaʼni

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (12.29)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Bu formula *ikki o‘lchovli integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish* formulasi deb ataladi. (12.26) formula (12.29) formulaning $f(x, y) = 1$ bo‘lganda xususiy holi ekanligi ravshan.

Xususiy holda, qutb koordinatalarida (12.29) formula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \quad (12.30)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Qutb koordinatalarida ikki o‘lchovli integralni hisoblash ham uni takroriy integralga keltirish orqali amalga oshiriladi. Masalan, agar D^* soha 12.16-rasmda tasvirlangan ko‘rinishda bo‘lsa ($\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta$ nurlar $r = r_1(\varphi)$ va $r = r_2(\varphi)$ chiziqlar bilan chegaralangan, ya’ni D^* soha to‘g‘ri soha: qutbdan chiqqan l nur uning chegaralarini faqat ikki nuqtada kesib o‘tmoqda), u holda (12.30) formulaning o‘ng tomonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \cdot f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr. \quad (12.31)$$

Eslatma. Faraz qilaylik ayrim nuqtalarda yoki hattoki ayrim chiziqlar bo‘ylab (12.29) formula o‘rinli bo‘ladigan shartlar, ya’ni yoki D va D^* sohalar o‘rtasidagi akslantirishning bir qiymatliligi, yoki $x(u, v)$ va $y(u, v)$ funksiyalarning, yoki ularning $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ va $\frac{\partial y}{\partial v}$ xususiy hosilalarining uzluksizligi bajarilmasin. Oxy tekislikning bu nuqtalarini va chiziqlarini o‘zida saqllovchi biror kichik D_ε sohani olamiz va D_ε^* soha D_ε sohaning Ouv tekislikdagi obrazi bo‘lsin. S_ε va σ_ε orqali mos ravishda D_ε va D_ε^* sohalarning yuzlarini belgilaymiz. U holda (12.29) formulaga ko‘ra

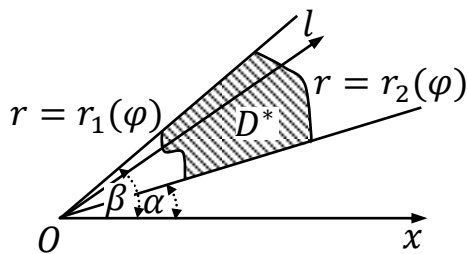
$$\iint_{D \setminus D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = \iint_{D^* \setminus D_\varepsilon^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (12.32)$$

tenglikni yozish mumkin.

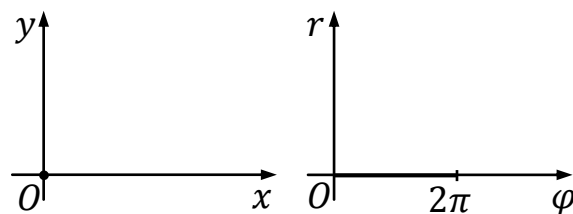
(12.32) tenglikning o'ng tomonidagi integral umuman olganda

$$\iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad \text{integraldan} \quad \iint_{D_\varepsilon^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

miqdorga farq qiladi.



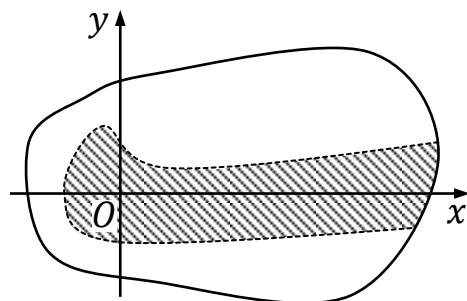
12.20-rasm



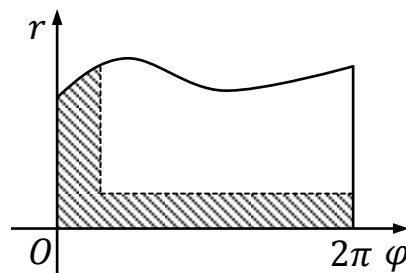
12.21-rasm

Xususiyl holda, Oxy tekislikning $O(0,0)$ nuqtasiga qutb koordinatalar tekisligining $[0, 2\pi]$ kesmada yotuvchi barcha (r, φ) nuqtalari mos keladi (12.21-rasm), ya'ni Oxy tekislikning $O(0,0)$ nuqtasiga akslantirishning o'zaro bir qiymatlilik sharti bajarilmaydi. Shuning uchun agar koordinatalar boshi D sohada yotsa, (12.30) formula o'rinli bo'lmasligi ham mumkin. Biroq u 12.22 va 12.23-rasmlarda tasvirlangan bo'yalmagan $D \setminus D_\varepsilon$ va $D^* \setminus D_\varepsilon^*$ sohalarida o'rinli.

Agar $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r$ miqdor D^* sohada chegaralangan bo'lsa, u holda D_ε va D_ε^* sohalarining yuzini nolga intiltirib, bu hol uchun ham (12.30) formulani hosil qilamiz.



12.22 -rasm



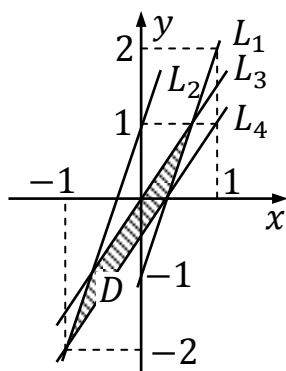
12.23-rasm

Mulohaza. Ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish (aniq integraldagi singari), uni hisoblash uchun qulay bo'ladigan ko'rinishga keltirish maqsadida

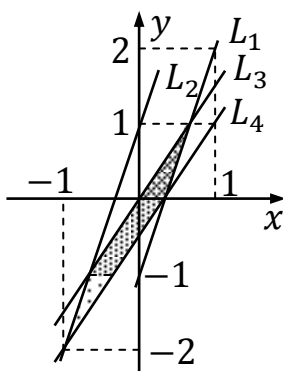
qo'llaniladi. Biroq ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish nafaqat integral osti funksiyani, balki integrallash sohasini ham soddaroq ko'rinishga keltiradi. Integrallash sohasini soddaroq ko'rinishga keltirish integral osti funksiyani soddalashtirishga nisbatan muhimroq ham. Buning natijasida ikki o'lchovli integralda integrallash chegaralarini qo'yish va takroriy integralda hisoblash yengillashadi.

12.5-misol. $\iint_D (2x - y) dx dy$ integralni hisoblang, bu yerda D – tomonlari $L_1: 3x - y - 1 = 0$, $L_2: 3x - y + 1 = 0$, $L_3: 3x - 2y = 0$, $L_4: 3x - 2y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqlarda yotuvchi parallelogrammning ichki qismi (12.24-rasm).

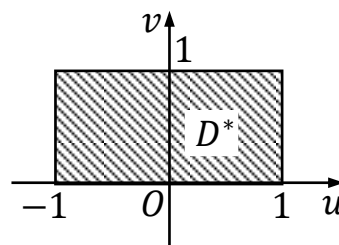
► Dekart koordinatalar sistemasida bu integralni (12.17) fo'rula bo'yicha ham, (12.20) formula bo'yicha ham takroriy integralga keltirib hisoblash uchun, integrallash sohasini uchga bo'lish kerak bo'ladi (12.25-rasm). Agar $u = 3x - y$, $v = 3x - 2y$ formulalar orqali yangi o'zgaruvchi kiritsak, mazkur integralni osongina hisoblash mumkin. Bunda $x(u, v) = (2u - v)/3$, $y(u, v) = u - v$ bo'ladi va (x, y) nuqta parallelogramm bo'ylab harakatlenganda, yangi u va v o'zgaruvchilar $-1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ kesmalarda o'zgaradi, ya'ni D^* – integrallash sohasi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'ladi (12.26-rasm). Integral ostidagi funksiya $2x - y = (4u - 2v)/3 - (u - v) = (u + v)/3$ ko'rinishni oladi.



12.24-rasm



12.25-rasm



12.26-rasm

Endi $x(u, v)$ va $y(u, v)$ funksiyalarning yakobianini topamiz. Buning uchun $x'_u = 2/3$, $x'_v = -1/3$, $y'_u = 1$, $y'_v = -1$ xususiy hosilalrni (12.25) formulaga qo'yamiz:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

U holda (12.29) formulaga ko'ra qidirilayotgan integralni hisoblaymiz:

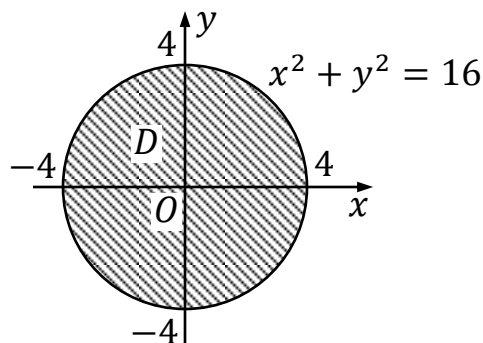
$$\begin{aligned} \iint_D (2x - y) dx dy &= \iint_{D^*} \frac{u+v}{3} \left| -\frac{1}{3} \right| du dv = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 du \int_0^1 \frac{u+v}{3} dv = \\ &= \frac{1}{9} \int_{-1}^1 \left[uv + \frac{1}{2} v^2 \right]_{-1}^1 du = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left(u + \frac{1}{2} \right) du = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} u \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Yangi o'zgaruvchilarga o'tgandan so'ng integrallash sohasi oddiy to'g'ri yuqorida ta'kidlaganimizga ko'ra to'g'ri to'rtburchakka aylandi. ◀

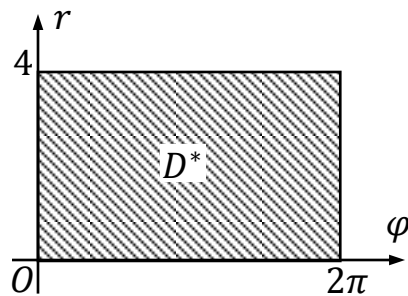
Mulohaza. Ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni shunday almashtirish kerakki, natijada ham integral osti funksiya, ham integrallash sohasi soddaroq ko'rinishni olsin. Quyida qutb koordiantaliga o'tishning o'ziga xos xususiyatlarini keltiramiz:

- 1) Integral osti funksiya $f(x^2 + y^2)$ ko'rinishda; D integrallash sohasi doira, xalqa yoki ularning qismi bo'lganda qutb koordinatalariga o'tish qulay.
- 2) Amalda qutb koordinatalariga $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$ ko'rinishdagi almashtirish orqali o'tiladi; D sohani chegaralovchi chiziq ham qutb koordinatalari orqali ifodalanadi. (x, y) nuqtaning D sohada o'zgarish qonuniyatiga qarab yangi r, φ o'zgaruvchilar uchun o'zgarish chegaralari aniqlanadi.

12.6-Misol. $\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$ integralni hisoblang, bu yerda D – integrallash sohasi $x^2 + y^2 \leq 16$ doiradan iborat (12.27-rasm).



12.27-rasm



12.28-rasm

► (12.30) formulani qoʻllab, qutb koordinatalariga oʻtamiz:

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_{D^*} \sqrt{16 - (r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} \cdot r dr d\varphi = \\ &= \iint_{D^*} r \sqrt{16 - r^2} dr d\varphi.\end{aligned}$$

Qutb koordinatalar sistemasidagi D^* integrallash sohasi $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4$ tengsizliklar bilan aniqlanadi (12.28-rasm). Demak, D doira qutb koordinatalariga oʻtganda D^* toʻgʻri toʻrtburchakka oʻtar ekan. (12.31) formulaga koʻra,

$$\begin{aligned}\iint_{D^*} r \sqrt{16 - r^2} dr d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r \sqrt{16 - r^2} dr = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (16 - r^2)^{1/2} d(16 - r^2) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(16 - r^2)^{3/2} \cdot 2}{3} \right]_0^3 d\varphi = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(0 - \frac{128}{3} \right) d\varphi = \frac{256\pi}{9},\end{aligned}$$

qidirilgan ikki oʻlchovli integralning qiymatini hosil qildik. ◀

12.7-Misol. $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$ integralni hisoblang, bu yerda D integrallash sohasi $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ –birlik doiraning birinchi chorakda yotgan qismi.

► $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ qutb koordinatalariga oʻtamiz. U holda integrallash sohasi

$$D^* = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$

toʻgʻri toʻrtburchakdan iborat boʻladi. Oʻzgaruvchilari almashtirilgandan soʻng integral osongina hisoblanadi:

$$I = \iint_{D^*} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 + r^2}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 + r^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + r^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

Mulohaza. Agar D sohada yakobian noldan farqli bo'lsa, bu sohaning har bir nuqtasining biror atrofida akslanish o'zaro bir qiymatli bo'ladi. Biroq shuning bilan birga, butun sohaning akslanishi bir qiymatli bo'lmasligi ham mumkin.

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, -\infty < u, v < +\infty$$

funksiyalar bilan aniqlanadigan akslanishni qaraymiz. Ularning yakobiani,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & e^u \sin v \\ -e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix} = e^u$$

butun tekislikda noldan farqli. Shunga qaramasdan $u = 0, v = 0$ va $x = 0, v = 2\pi$ uchun $x = 1, y = 0$ bo'ladi, ya'ni bu akslantirish o'zaro bir qiymatli emas.

Boshqa tomondan, agar akslantirishning yakobiani biror nuqtada nolga aylangani bilan, bu nuqtaning atrofida akslanish o'zaro bir qiymatli bo'lishi mumkin. Masalan,

$$x = u^3, y = v^3, -\infty < u, v < +\infty$$

funksiyalar bilan aniqlanadigan akslanishning yakobiani $J = 9u^2v^2$ bo'ladi va $u = 0$ va $v = 0$ bo'lsa nolga aylanadi, ammo bu akslanish o'zaro bir qiymatli.

12.6. Ikki o'lchovli integralning tadbirlari

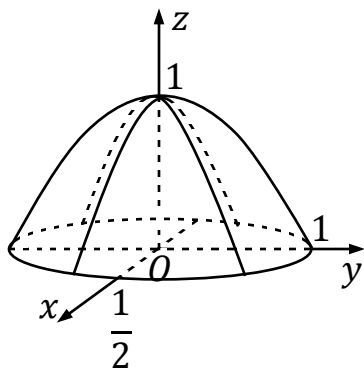
Silindrik jismning hajmi. Ikki o'lchovli integral tushunchasiga keltiriladigan masala sifatida yuqoridan $z = f(x, y) \geq 0$ sirt bilan, quyidan Oxy tekislikning D sohasi bilan, yon tomonlardan esa yo'naltiruvchisi D sohaning chegarasi bo'lgan silindrik sirt bilan chegaralangan jism hajmini hisoblash qaralgan edi va bu hajm

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (12.33)$$

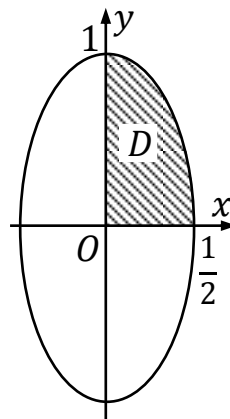
ikki o'lchovli integral bilan hisoblanishini ko'rgan edik.

Shunday qilib, *nomanfiy funksiya ikki o'lchovli integralining qiymati silindrik jismning hajmiga teng* bo'lar ekan.

12.8-Misol. $z = 1 - 4x^2 - y^2$ sirt va Oxy tekislik bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang (12.29-rasm).



12.29-rasm



12.30-rasm

► $z = 1 - 4x^2 - y^2$ elliptik paraboloid Oxy tekislik bilan $L: \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1, z = 0$

chiziq bo'ylab kesishadi. Bu chiziq yarim o'qlari $a = 1/2$ va $b = 1$ bo'lgan ellipsdan iborat (12.30-rasm) va demak integrallash sohasi ana shu ellipsning ichki qismi bo'ladi.

Qaralayotgan jismning Oxz va Oyz tekisliklarga nisbatan simmetrikligi tufayli, integrallash sohasini ellipsning 1/4 qismini olib, natijani to'rtga ko'paytirish kerak:

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D (1 - 4x^2 - y^2) dx dy = 4 \int_a^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2) dy = \\
 &= 4 \int_a^{1/2} \left[(1 - 4x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{8}{3} \int_a^{1/2} (1 - 4x^2)^{3/2} dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} 2x = \sin t, \quad 2dx = \cos t dt \\ 1 - 4x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \\ x_1 = 0, t_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^{3/2} \cos t dt = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt =
 \end{aligned}$$

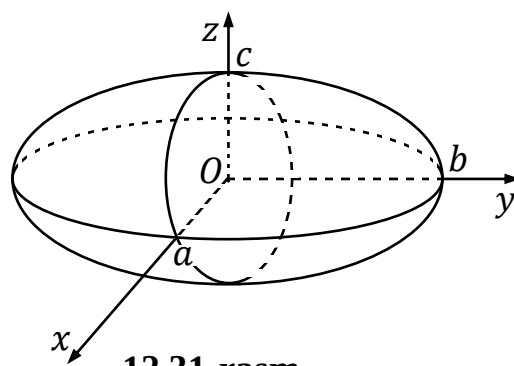
$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t}{4} dt = \frac{1}{3} (t + \sin 2t) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

12.9-Misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang (12.31-rasm).

► Qaralayotgan jismning Oxy tekislikka nisbatan simmetriyaligi tufayli uning hajmi

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

funksiyaning Oxy tekislikdagi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



12.31-rasm

ellips bilan chegaralangan D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralning ikkilanganligiga teng:

$$V = 2 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Bu integralni hisoblash uchun $x = ar \cos \varphi$, $y = ar \sin \varphi$ deb o'zgaruvchilarni almashtiramiz. U holda integral ostidagi funksiya $z = c\sqrt{1 - r^2}$ ko'rinishga o'tadi, D integrallash sohasiga $D^* = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ to'g'ri to'rtburchak mos keladi. $x'_r = a \cos \varphi$, $x'_\varphi = -ar \sin \varphi$, $y'_r = b \sin \varphi$, $y'_\varphi = br \cos \varphi$ xususiylar hosilalarni (12.25) formulaga qo'yib, bu almashtirishning yakobianini hisoblaymiz:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & b \sin \varphi \\ -ar \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Shuning uchun (12.29) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 2 \iint_D c \sqrt{1 - r^2} a b r dr d\varphi = \\
 &= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \\
 &= -\frac{4\pi}{3} abc (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi abc. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

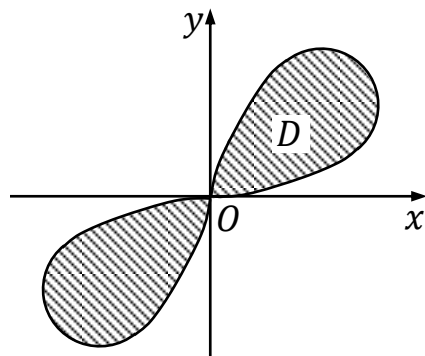
Yassi figuraning yuzi. Ikki o'lchovli integralning xossasiga ko'ra Oxy tekislik D sohasining S yuzi $f(x, y) \equiv 1$ funksiyaning bu soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralga teng:

$$S = \iint_D dx dy. \quad (12.34)$$

12.10-Misol. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang (12.32-rasm).

► Bu yerda $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ tengliklar bilan qutb koordinatalarini kiritamiz. Egri chiziq tenglamasi $r^4 = 8r^2 \cos \varphi \sin \varphi$ ko'rinishni oladi, bundan esa $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ tenglikka ega bo'lamiz. Egri chiziq va demak u chegaralangan soha koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik. Shuning uchun

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(r^2 \Big|_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^{\pi/2} 4 \sin 2\varphi d\varphi = -2 \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = 4. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$



12.32-rasm

Sirt yuzi. G sirt $z = f(x, y)$ sirtning Oxy tekislikdagi $\bar{D}$ yopiq sohaga proyeksiyalanuvchi qismi bo'lsin. Sirtning mazkur qismini silliq deb faraz qilamiz, ya'ni $f(x, y)$ funksiya $\bar{D}$ sohada uzluksiz va uzluksiz $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ xususiy hosilalarga ega. $\bar{D}$ sohani yuzalari $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ bo'lgan n ta $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ qismlarga ajratamiz. Har bir ΔD_k sohada ixtiyoriy ravishda bittadan $M_k(x_k, y_k)$ nuqta tanlaymiz (12.33-rasm). Bu nuqtaga sirtning $P_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ nuqtasi mos keladi. P_k nuqtada G sirtga urinma tekislik o'tkazamiz. ΔG_k bu tekislikning ΔD_k sohaga

proyeksiyalanuvchi qismi va $\Delta\sigma_k$ bu maydonchanning yuzi bo'lsin. Bu yuzalardan

$$\tilde{\sigma} = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k$$

yig'indini tuzamiz.

Har doimgidek λ orqali ΔD_k sohalar diametrlarining eng kattasini belgilaymiz. Agar bo'linishlar soni cheksiz oshganda va λ nolga intilganda chekli

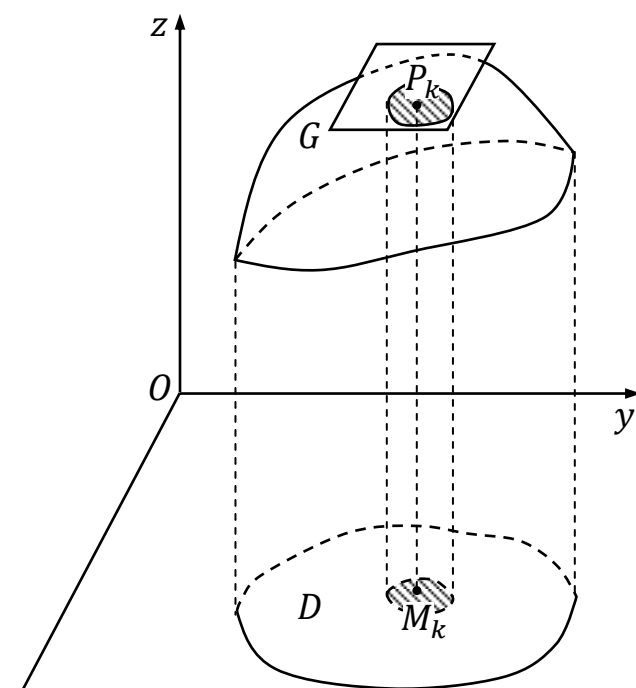
$$\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k \quad (12.35)$$

limit mavjud bo'lsa va bu limit $\bar{D}$ sohani bo'lish usuliga, hamda M_k nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, u G sirtning yuzi deb ataladi.

G sirtga yuqorida qo'yilgan shartlar bajarilganda, bu limitning mavjudligini isbotlaymiz.

G sirtning P_k nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi (7.14) formulaga ko'ra

$$z - z_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} (x - x_k) + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} (y - y_k)$$



12.33-rasm

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $z_k = f(x_k, y_k)$. U holda bu tekislikning Oxy tekislikka nisbatan γ_k og‘ma burchagi

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(x_k, y_k))^2 + (f'_y(x_k, y_k))^2}} \quad (12.36)$$

tenglik bilan aniqlanadi. ΔS_k va $\Delta \sigma_k$ yuzalar o‘zaro $\Delta S_k = (\cos \gamma_k) \Delta \sigma_k$ tenglik bilan bog‘langan. (12.36) tenglikni inobatga olgan holda so‘ngi tenglikni (12.35) tenglikka qo‘ysak

$$\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(x_k, y_k))^2 + (f'_y(x_k, y_k))^2} \Delta S_k \quad (12.37)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Limit ostidagi yig‘indi $\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$ funksiyaning $\bar{D}$ soha bo‘yicha integral yig‘indisini aniqlaydi. Qo‘yilgan shartlarda bu funksiya $\bar{D}$ sohada uzluksiz bo‘ladi va demak 12.1-Teoremaga ko‘ra (12.37) limit mavjud bo‘ladi. U holda ikki o‘lchovli integralning ta‘rifiga ko‘ra

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy \quad (12.38)$$

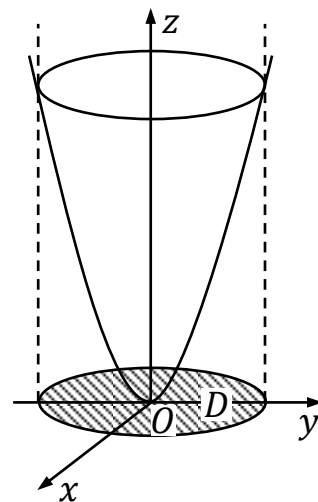
tenglikni hosil qilamiz. Bu formula *sirt yuzini hisoblash formulasi* deb ataladi.

12.11-Misol. $z = x^2 + y^2$ paraboloidning $x^2 + y^2 = 2$ silindr ichida joylashgan qismining yuzini toping (12.34-rasm).

► $z = x^2 + y^2$ funksiyaning $z'_x = 2x$ va $z'_y = 2y$ xususiy hosilalari $D: x^2 + y^2 \leq 2$ doirada uzluksiz, shuning uchun (12.38) formulaga ko‘ra qaralayotgan sirtning σ yuzi

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

ikki o‘lchovli integral bilan hisoblanadi. Integrallash sohasining shaklidan va integral osti funksiyaning ko‘rinishidan kelib chiqib $x = 2r \cos \varphi$ va $y = 2r \sin \varphi$



12.34-rasm

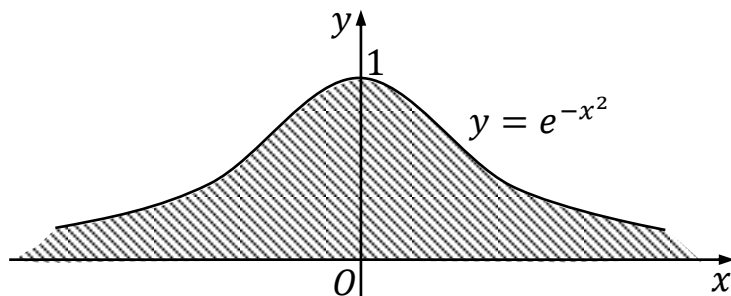
deb qutb koordinatalariga o'tamiz:

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_{D^*} \sqrt{1+4r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1+4r^2} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1+4r^2} dr = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6} (27-1) = \frac{13\pi}{3}. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Puasson integralini hisoblash. Aniqmas integrallarni o'rganishda shunday elementar funksiyalar mavjud bo'lib, ularning aniqmas integralini elementar funksiyalarning chekli sondagi arifmetik amallari va superpozitsiyalari orqali ifodalab bo'lmashligini ko'rgan edik. Bulardan biri-Puasson integrali deb ataluvchi $\int e^{-x^2} dx$ integral bo'lib, uning $(-\infty, +\infty)$ cheksiz oraliqdagi aniq integrali ehtimollar nazariyasida juda ko'p qo'llaniladi. Shunday qilib, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integralni hisoblaymiz. Bu aniq integralni

ham Puasson integrali deb ataymiz va uni geometrik jihatdan $y = e^{-x^2}$ egri chiziq va Ox o'q orasida joylashgan cheksiz $(-\infty < x < +\infty)$ figuranig yuzi sifatida talqin qilish mumkin (12.35-rasm).

Yuqorida ta'kidlab o'tganimizga ko'ra $\int e^{-x^2} dx$ aniqmas integralni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi, shuning uchun



12.35-rasm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

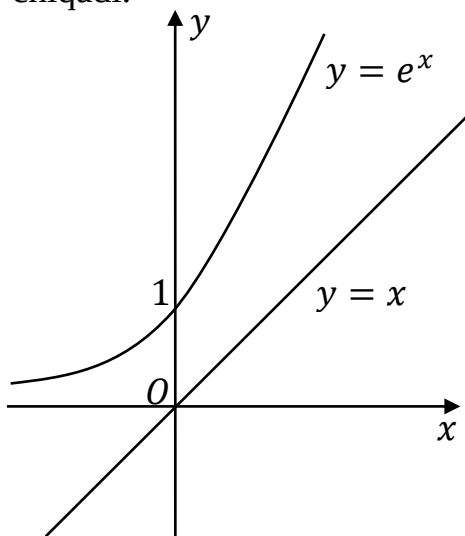
aniq integralni hisoblashga Nyuton-Leybnis formulasini qo'llab bo'lmaydi, demak uni hisoblashda maxsus usuldan foydalanishga to'g'ri keladi.

Dastlab, Puasson integrali yaqinlashuvchi birinchi tur xosmas integral ekanligini ta'kidlab o'tish kerak. Haqiqatdan ham, barcha $x > 0$ uchun $e^x > x$ tengsizlik (12.36-rasm) o'rinli bo'ladi, bundan esa barcha x uchun $e^{x^2} > x^2$

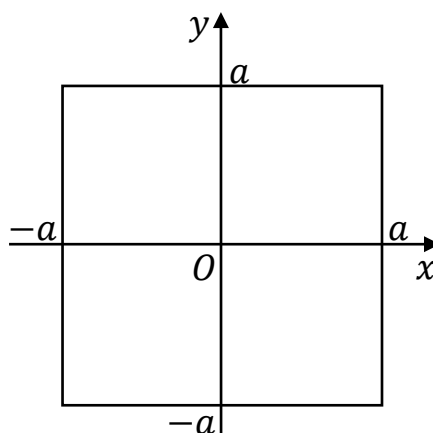
tengsizlikni yozish mumkin bo‘ladi. U holda barcha x uchun $e^{-x^2} < 1/x^2$ bo‘ladi. $1/x^2$ funksiyaning $[1, +\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integrali yaqinlashuvchi bo‘ladi, bundan esa I-tur xosmas integrallarining xossasiga ko‘ra $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ va $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx$ xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Bundan tashqari $[-1, 1]$ kesmada e^{-x^2} funksiya uzluksiz va shu sababli u bu kesmada integrallanuvchi. Shuning uchun $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ xosmas integral ham yaqinlashdi va u bu xosmas integrallar va $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ aniq yig‘indisiga teng. e^{-x^2} funksiyaning juftligidan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

tenglik kelib chiqadi.



12.36-rasm



12.37-rasm

Puasson integralini hisoblash uchun

$$D_a = \{(x, y): -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\}$$

kvadratni qaraymiz (12.37-rasm). Bu kvadarat bo‘yicha ikki o‘lchovli integralni hisoblaymiz:

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \left[e^{-x^2} \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right] dx =$$

$$= \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \cdot \int_{-a}^a e^{-x^2} dx, \text{ ya'ni}$$

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \quad (12.39)$$

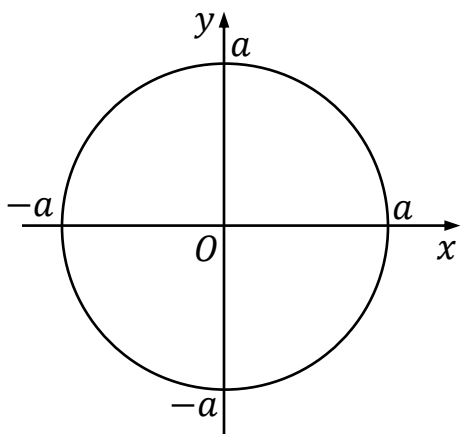
Endi $a \rightarrow \infty$ bo'lsin. U holda D_a integrallash sohasi bu limitda butun Oxy tekislikka aylanadi va uni biz D_∞ orqali belgilaymiz. Shuning uchun

$$\iint_{D_\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2, \quad (12.40)$$

bundan esa Puasson integrali uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\iint_{D_\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy} \quad (12.41)$$

tenglikni hosil qilamiz.



12.38-rasm

Shunday qilib, Puasson integralini hisoblash uchun, (12.41) tenglikning o'ng tomonidagi “xosmas” ikki o'lchovli integralni hisoblash yetarli ekan. Integral ostidagi funksiyaning ko'rinishidan qutb koordinatalariga o'tish maqsadga muvofiq deb xulosaga kelish mumkin. Buning uchun 12.38-rasmدا tasvirlangan $B_a = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$ doirani kiritamiz. U

holda

$$\begin{aligned} \iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^a e^{-r^2} r dr = \\ &= 2\pi \int_0^a r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^a e^{-r^2} d(r^2) = \pi e^{-r^2} \Big|_a^0, \end{aligned}$$

ya'ni,

$$\iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-a^2}). \quad (12.42)$$

Bu yerda $a \rightarrow \infty$ deb limitga o'tsak,

$$\iint_{B_\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi \quad (12.43)$$

tenglikni hosil qilamiz. Biroq, (12.42) tenglikdan (12.43) tenglikka o'tishda B_a integrallash sohasi cheksiz radiusli B_∞ doiraga, ya'ni butun Oxy tekislikka o'tiladi. Shuning uchun B_∞ belgilashdan D_∞ belgilashga o'tsak, (12.43) tenglikni

$$\iint_{D_\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi \quad (12.45)$$

ko'rinishda yozish mumkin. U holda (12.41) tenglikka ko'ra,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Puasson integralini hisoblash formulasini hosil qildik.

Yassi figura massasi. Chegaralangan yassi D figurada $\mu(P) = \mu(x, y) \geq 0$ sirt zichligiga ega bo'lgan massa uzluksiz taqsimlangan bo'lsin, bu yerda $\mu(x, y)$ funksiya D sohada uzluksiz. D sohani umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan n ta

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

qismlarga ajratamiz. Ularning yuzalarini mos ravishda

$$\Delta S, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

orqali belgilaymiz. Har bir D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qismda ixtiyoriy ravishda $P_i(x_i, y_i)$ nuqtani tanlaymiz, bu nuqtadagi zichlik $\mu(x_i, y_i)$ ga teng bo'ladi. $\mu(x, y)$ funksiyaning uzluksizligi tufayli D figura D_i qismining m_i massasi taqriban $\mu(x_i, y_i)\Delta S_i$ ko'paytmaga teng bo'ladi, D figuraning m massasi mos ravishda

$$m \approx \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i)\Delta S_i$$

yig'indiga taqriban teng bo'ladi. So'ngi yig'indi D sohada uzluksiz bo'lgan $\mu(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'ladi. Har doimgidek d orqali D_i qisman sohalar diametrlarining eng kattasini belgilaymiz. So'ngi taqribiy tenglikda d diametrni nolga intiltirsak,

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D \mu(x, y) dx dy \quad (12.46)$$

aniq tenglikni hosil qilamiz. Xususiyl holda agar massa butun figura bo'ylab tekis taqsimlangan, ya'ni $\mu = \text{const}$ bo'lsa, (12.46) formula

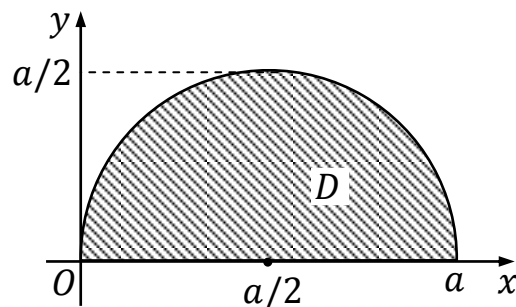
$$m = \mu \iint_D dx dy = \mu \cdot S$$

kabi ko'rinishni oladi, bu yerda S berilgan D sohaning yuzi.

12.12-Misol. Diametri a va markazi $C(a/2, 0)$ nuqtada bo'lgan yarim doiraviy figuraning m massasini hisoblang, massaning har bir nuqtadagi sirt zichligi bu nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofaga proporsional (12.39-rasm).

► Demak, m massali D figura quyidan Ox bilan, yuqoridan esa $x^2 + y^2 = ax$ aylana bilan chegaralangan bo'lib, uning sirt zichligi $\mu(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya bilan aniqlanar ekan, bu yerda k – proporsionallik koeffitsiyenti.

Figuraning m massasini (12.46) formulaga ko'ra hisoblaymiz:



12.39-rasm

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Integrallash sohasining shakli va integral ostidagi funksiyaning ko'rinishidan kelib chiqib $x = ar \cos \varphi$, $y = ar \sin \varphi$ deb, qutb koordinatalar sistemasiga o'tamiz. Aylana tenglamasining ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

yoki

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

qutb koordinatalariga o'tsak

$$\left(ar \cos \varphi - \frac{a}{2}\right)^2 + (ar \sin \varphi)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

So'ngi tenglamani ixchamlasak

$$r = \cos \varphi \quad (12.47)$$

tenglamani hosil qilamiz. D soha yarim aylana bilan chegaralanganligi uchun φ qutb burchagi $[0, \pi/2]$ kesmada o'zgaradi va o'zgarmas $\varphi \in [0, \pi/2]$ burchakda (12.47) tenglikka ko'ra r qutb radiusi $[0, \cos \varphi]$ kesmada o'zgaradi. Shuning uchun figura massasi uchun

$$\begin{aligned} m &= k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} ara^2 r dr = ka^3 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 dr = \\ &= ka^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{\cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{ka^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{ka^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d\sin \varphi = \\ &= \frac{ka^3}{3} \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{9} ka^3 \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀

Yassi figuraning koordinata o'qlariga nisbatan statik va inersiya momentlari.

Massasi m bo'lgan moddiy nuqtaning Ox o'qqa nisbatan S_x statik momenti deb my ko'paytmaga aytiladi, bu yerda y — moddiy nuqtaning ordinatasi, ya'ni

$$S_x = my. \quad (12.48)$$

y ordinataning qiymati musbat bo'lishi ham, manfiy bo'lishi ham mumkin.

Bu nuqtaning Ox o'qqa nisbatan I_x inersiya momenti deb my^2 ko'paytmaga aytiladi:

$$I_x = my^2 \quad (12.49)$$

Massalari $m_1, m_2, \dots, m_k$ bo'lgan $M_1, M_2, \dots, M_k$ nuqtalar sistemasining Ox o'qqa nisbatan S_x statik va I_x inersiya momentlari deb, bu nuqtalarning mos ravishda statik va inersiya momentlari yig'indisiga aytiladi:

$$S_x = \sum_{i=1}^k m_i y_i, \quad I_x = \sum_{i=1}^k m_i y_i^2 \quad (12.50)$$

Oxy tekislikda sirt zichligi uzluksiz $\mu(x, y)$ funksiya bilan aniqlangan yassi D figuraning Ox o'qqa nisbatan statik va inersiya momentlarini hisoblaymiz.

D sohani n ta $D_1, D_2, \dots, D_n$ qismlarga ajratib, har bir D_i qismda ixtiyoriy $P_i(x_i, y_i)$ nuqtani tanlaymiz va i – qismning massasi taqriban $\mu(x_i, y_i)\Delta S_i$ ga teng va bu massa $P_i(x_i, y_i)$ nuqtada jamlangan deb hisoblaymiz, bu yerda ΔS_i qismaniy D_i sohaning yuzi. U holda D yassi figuraning Ox o'qqa nisbatan S_x statik va I_x inersiya momentlari taqriban

$$S_x \approx \sum_{i=1}^k y_i \mu(x_i, y_i) \Delta S_i, \quad I_x \approx \sum_{i=1}^k y_i^2 \mu(x_i, y_i) \Delta S_i$$

yig'indilarga teng bo'ladi. Bu taqribiy tengliklarda D_i qismaniy sohalar diametrlaring d eng kattasini nolga intiltirib va bu yig'indilar mos ravishda $y\mu(x, y)$ va $y^2\mu(x, y)$ funksiyalarning integral yig'indilari ekanligini inobatga olib

$$S_x = \iint_D y\mu(x, y) dx dy \quad (12.51)$$

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x, y) dx dy \quad (12.52)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Xuddi shu singari sirt zichligi $\mu(x, y)$ funksiya bilan aniqlanadigan yassi figuraning Oy o'qqa nisbatan statik va inersiya momentlari mos ravishda

$$S_y = \iint_D x\mu(x, y) dx dy \quad (12.53)$$

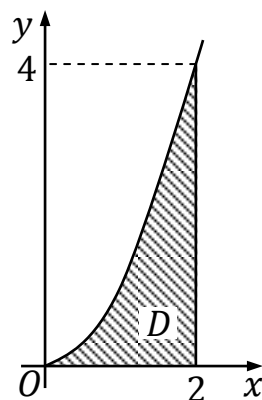
$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy \quad (12.54)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

12.13-Misol. Yuqoridan $y = x^2$ parabola bilan, quyidan Ox o'q bilan va yon tomondan $x = 2$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yassi figuraning koordinata o'qlariga nisbatan statik va inersiya momentlarini toping (12.40-rasm). Sirt zichligi har bir nuqtada nuqta koordinatalarining ko'paytmasiga proporsional.

► Shartga ko'ra $\mu(x, y) = k \cdot xy$, bu yerda k – proporsionallik koeffitsiyenti. Koordinata o'qlariga nisbatan statik va inersiya momentlarini (12.51)-(12.54) formulalar bo'yicha topamiz:

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \iint_D y \cdot k \cdot xy dx dy = k \iint_D xy^2 dx dy = \\ &= k \int_0^2 dx \int_0^{x^2} xy^2 dy = k \int_0^2 \left(\frac{xy^3}{3} \Big|_0^{x^2} \right) dx = k \int_0^2 \frac{x^7}{3} dx = \\ &= k \frac{x^8}{24} \Big|_0^2 = k \frac{32}{3}, \end{aligned}$$



12.40-rasm

$$\begin{aligned} S_y &= \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \iint_D x \cdot k \cdot xy dx dy = k \iint_D x^2 y dx dy = k \int_0^2 dx \int_0^{x^2} x^2 y dy = \\ &= k \int_0^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx = k \int_0^2 \frac{x^6}{2} dx = k \frac{x^7}{14} \Big|_0^2 = k \frac{64}{7}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy = \iint_D y^2 k \cdot xy dx dy = k \iint_D xy^3 dx dy = \\ &= k \int_0^2 dx \int_0^{x^2} xy^3 dy = k \int_0^2 \left(\frac{xy^4}{4} \Big|_0^{x^2} \right) dx = k \int_0^2 \frac{x^9}{4} dx = k \frac{x^{10}}{40} \Big|_0^2 = k \frac{128}{5}, \end{aligned}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy = \iint_D x^2 k \cdot xy dx dy = k \iint_D x^3 y dx dy =$$

$$= k \int_0^2 dx \int_0^{x^2} x^3 y dy = k \int_0^2 \left(\frac{x^3 y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx = k \int_0^2 \frac{x^7}{2} dx = k \frac{x^8}{16} \Big|_0^2 = 16k. \quad \blacktriangleleft$$

Yassi figura og'irlik markazining koordinatalari. Agar yassi figuraning koordinata o'qlariga nisbatan S_x va S_y statik momentlari va m massasi ma'lum bo'lsa, bu figura *og'irlik markazining* koordinatalari

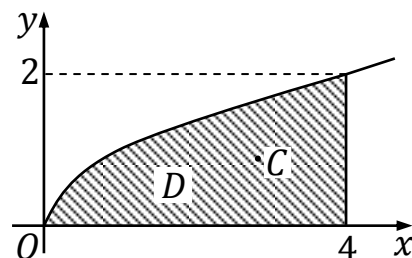
$$x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m} \quad (12.55)$$

formulalarga ko'ra topiladi. Bu formulalarga (12.46), (12.51) va (12.53) formulalarni qo'llab

$$x_c = \frac{\iint_D x \mu(x, y) dx dy}{\iint_D \mu(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \mu(x, y) dx dy}{\iint_D \mu(x, y) dx dy} \quad (12.56)$$

o'g'irlik markazining koordinatalarini topish formulasini hosil qildik.

12.14-Misol. Yuqoridan $y = \sqrt{x}$ egri chiziq bilan, quyidan Ox koordinata o'qi bilan va yon tomondan $x = 4$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan D yassi figuraning og'irlik markazi koordinatalarini toping. Sirt zichligi har bir nuqtada nuqta koordinatalarining yig'indisiga proporsional (12.41-rasm).



12.41-rasm

► Shartga ko'ra, $\mu(x, y) = k \cdot (x + y)$, bu yerda

k –proporsionallik koeffitsiyenti. D yassi figuraning massasini va koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlarini (12.46),(12.51),(12.53) formulalar bo'yicha topamiz:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_D k \cdot (x + y) dx dy = k \iint_D (x + y) dx dy = \\ &= k \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x + y) dy = k \int_0^4 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right] \Big|_0^{\sqrt{x}} dx = k \int_0^4 \left(x^{3/2} + \frac{1}{2} x \right) dx = \end{aligned}$$

$$= k \left(\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{1}{4} x^2 \right) \Big|_0^4 = k \left(\frac{2}{5} \cdot 32 + 4 \right) = \frac{84}{5} k,$$

$$S_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \iint_D y \cdot k \cdot (x + y) dx dy = k \iint_D (xy + y^2) dx dy =$$

$$= k \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} (xy + y^2) dy = k \int_0^4 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= k \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} y^{3/2} \right) dx = k \left(\frac{x^3}{6} + \frac{2}{15} x^{5/2} \right) \Big|_0^4 = k \left(\frac{64}{6} + \frac{2}{15} \cdot 32 \right) = \frac{224}{15} k,$$

$$S_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \iint_D x \cdot k \cdot (x + y) dx dy = k \iint_D (x^2 + xy) dx dy =$$

$$= k \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x^2 + xy) dy = k \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 \right] \Big|_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= k \int_0^4 \left(x^{5/2} + \frac{1}{2} x^2 \right) dx = k \left(\frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^4 = k \left(\frac{2}{7} \cdot 128 + \frac{64}{6} \right) = \frac{992}{21} k.$$

(12.55) formulalarga ko'ra D yassi figura $C(x_c, y_c)$ og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{992k}{21} : \frac{84k}{5} = \frac{1240}{441} \approx 2,81, \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{224k}{15} : \frac{84k}{5} = \frac{56}{63} \approx 0,89.$$

Shunday qilib qaralayotgan D figuraning og'irlik markazi $C\left(\frac{1240}{441}, \frac{56}{63}\right)$ nuqtada bo'lar ekan. ◀

12.7. Uch o'lchovli integral

Ikki o'lchovli integralni umumlashtirish orqali hosil qilinadigan uch o'zgaruvchili funksiyaning *uch o'lchovli integralini* qarab chiqamiz. Bunday integrallar ikki o'lchovli integrallar singari turli geometrik, fizik va texnik masalarni

yechilda tadbiq qilinadi. Ikki va uch o'lchovli integrallar orasida to'liq o'xshashlik mavjudligi tufayli biz faqat tasdiqlarni bayon qilish bilan chegaralanamiz. Ularning isbotini ikki o'lchovli integrallardagi isbotlarni uch o'zgaruvchili funksiyalarga osongina moslashtirish orqali hosil qilish mumkin.

Jismning massasini hisoblash haqida masala. Fazoviy Ω sohani massa bilan to'ldirilgan jism berilgan bo'lsin. Agar har bir $P \in \Omega$ nuqtada

$$\mu = \mu(P) = \mu(x, y, z), \quad P(x, y, z) \in \Omega$$

massa taqsimlanishining zichligi berilgan bo'lsa, bu jismning m massasini topish talab qilingan bo'lsin.

Ω sohani qandaydir sirtlar bilan hajmlari $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ bo'lgan n ta $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ qismlarga ajratamiz. Har bir $\Delta\Omega_i$ sohada ixtiyoriy ravishda bittadan $P_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz. $\Delta\Omega_i$ sohada zichlik taqriban o'zgarmas va u $\mu(P_i)$ ga teng deb faraz qilamiz. U holda bu bo'lakning massasini

$$\Delta m_i \approx \mu(P_i) \Delta V_i$$

taqribiy tenglik bilan aniqlash mumkin, butun jismning massasi esa taqriban

$$m \approx \sum_{i=1}^k \mu(P_i) \Delta V_i \quad (12.57)$$

yig'indiga teng bo'ladi.

$\Delta\Omega_i$ bo'laklarning o'lchamlari qanchalik kichik bo'lsa, (12.57) taqribiy tenglik shunchalik aniqroq bo'ladi. Qaralayotgan jismning massasi sifatida (12.57) tenglik o'ng tomonidagi yig'indining $\Delta\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bo'laklar diametrlarining eng kattasi d nolga intilgandagi limitini olish mumkin:

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(P_k) \Delta V_k. \quad (12.58)$$

Uch o'lchovli integral. Fazoda S sirt bilan chegaralangan Ω soha berilgan va bu soha va uning S chegarasida uzluksiz $f(x, y, z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

Ω sohani qandaydir sirtlar bilan hajmlari $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ bo'lgan n ta $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ qismlarga ajratamiz. Bu bo'laklar diametrlarini d_i orqali va ularning eng kattasini d orqali belgilaymiz. Har bir $\Delta\Omega_i$ sohada ixtiyoriy ravishda bittadan $P_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz va $f(x, y, z)$ funksiyaning bu nuqtalardagi $f(x_i, y_i, z_i)$ qiymatlarini hisoblab:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (12.59)$$

yig'indini tuzamiz. Bu yig'indi $f(x, y, z)$ funksiyaning Ω soha bo'yicha *integral yig'indisi* deb ataladi.

12.3-Ta'rif. Agar (12.59) integral yig'indi $d \rightarrow 0$ da chekli I limitga ega bo'lib, u Ω sohani $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ qismlarga bo'lish usuliga va ulardagi P_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, bu limitni biz $f(x, y, z)$ funksiyaning Ω soha bo'yicha olingan uch o'lchovli integrali deb ataymiz va uni

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, uch o'lchovli integral

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (12.60)$$

tenglik bilan aniqlanar ekan. Bunday holda $f(x, y, z)$ funksiya Ω sohada *integrallanuvchi* va Ω – *integrallash sohasi* deb ataladi.

(12.58) va (12.60) tengliklarni taqqoslab, nuqtalaridagi zichligi $\mu(x, y, z)$ funksiya bilan aniqlanuvchi Ω jismning m massasi uchun

$$m = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad (12.61)$$

formulani hosil qilamiz.

Har qanday $f(x, y, z)$ funksiya uchun ham uch o'lchovli integral mavjudmi

degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

12.4-Teorema. Yopiq chegarаланagan Ω sohada uzluksiz $f(x, y, z)$ funksiya, bu sohada integrallanuvchi hamdir.

Biz quyida integrallash sohasida faqat uzluksiz bo'lgan funksiyalarnigina qaraymiz.

Uch o'lchovli integralning xossalari. Uch o'lchovli integralning xossalri ikki o'lchovli integralning xossalariga o'xshashligi tufayli, biz ularni bayon qilish bilangina chegaralanamiz.

1) Agar Ω soha V hajmga ega bo'lsa, u holda

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = V. \quad (12.62)$$

2) Agar $f(x, y, z)$ va $g(x, y, z)$ funksiyalar Ω sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning ixtiyoriy α va β o'zgarmaslar bilan chiziqli $\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$ kombinatsiyasi ham Ω sohada integrallanuvchi bo'ladi va

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz &= \\ &= \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (12.63)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu xossa uch o'lchovli integralning *chiziqlilik xossasi* deb ataladi.

3) Agar Ω soha $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ bo'ladigan qilib faqat bo'linish sirtlaridagina kesishadigan ikkita Ω_1 va Ω_2 sohalarga ajratilsa,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz \quad (12.64)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4) Agar $f(x, y, z)$ funksiya Ω sohada nomanfiy va integrallanuvchi bo'lsa,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \geq 0 \quad (12.65)$$

bo‘ladi.

5) Agar $f(x, y, z)$ va $g(x, y, z)$ funksiyalar Ω sohada integrallanuvchi va barcha $(x, y, z) \in \Omega$ nuqtalarda $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ bo‘lsa,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz \quad (12.66)$$

bo‘ladi.

6) Agar $f(x, y, z)$ funksiya Ω sohada integrallanuvchi bo‘lsa, $|f(x, y, z)|$ funksiya ham Ω sohada integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \right| \geq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dx dy dz \quad (12.67)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

7) Agar hajmi V ga teng bo‘lgan Ω sohada $f(x, y, z)$ funksiya uzluksiz va uning bu sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari mos ravishda M va m bo‘lsa,

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq MV \quad (12.68)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

8) (O‘rta qiymat haqidagi teorema) Agar hajmi V ga teng bo‘lgan Ω sohada $f(x, y, z)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, bu sohada

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mavjud.

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad (12.69)$$

miqdor $f(x, y, z)$ funksiyaning Ω sohadagi o‘rta qiymati deb ataladi.

Uch o‘lchovli integralni hisoblash. Ikki o‘lchovli integrallardagi singari uch o‘lchovli integralni hisoblash takroriy integralni hisoblashga keltiriladi.

Fazodagi Ω soha quyidan $S_1: z = \varphi(x, y)$ sirt bilan, yuqoridan $S_2: z = \psi(x, y)$ sirt bilan, Oz o‘qqa parallel yon silindrik S_3 sirt bilan chegaralangan bo‘lsin, bu yerda

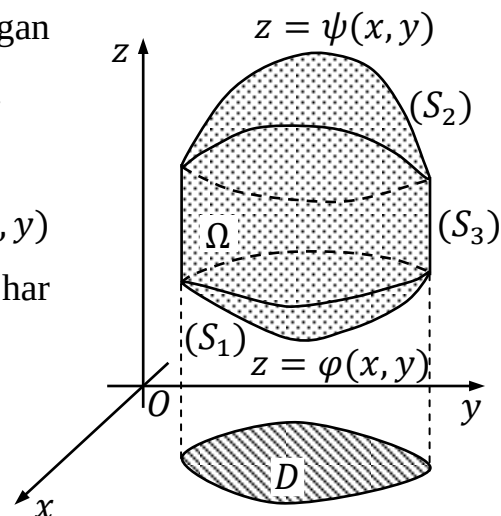
$(x, y) \in D$ nuqtalarda $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ tengsizlik o‘rinli va D – soha berilgan fazoviy Ω sohaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi (12.42-rasm). Agar Ω sohaning ixtiyoriy ichki nuqtasidan Oz o‘qqa parallel bo‘lib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq, bu sohaning chegarasini faqat ikki nuqtada kesib o‘tsa, bunday soha z – *silindrik soha* yoki *Oz o‘qi yo‘nalishi bo‘yicha to‘g‘ri soha* deb ataladi.

Ikki o‘lchovli integrallar uchun keltirilgan 12.3-Teorema o‘xshash quyidagi teorema o‘rinli.

12.4-Teorema. Agar $f(x, y, z)$ funksiyaning $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ soha bo‘yicha uch o‘lchovli integrali mavjud va har bir $(x, y) \in D$ nuqta uchun

$$I = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz$$

aniq integral mavjud bo‘lsa, u holda



12.42-rasm

$$\iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (12.70)$$

takroriy integral ham mavjud va

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (12.71)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Mulohaza. Agar 12.4-Teoremadagi I integral uchun 12.3-Teoremaning shartlari o‘rinli bo‘lsa, uni dastlab y bo‘yicha, so‘ngra x bo‘yicha olinadigan takroriy integral ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘ladi. Bu holda (12.71) tenglik

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (12.72)$$

ko‘rinishni oladi.

Agar Ω fazoviy soha Oy o'qi yoki Ox o'qi yo'nalishi bo'yicha to'g'ri soha bo'lsa, (12.71) formulada x, y, z o'zgaruvchilarning o'rnini almashtirilib, uch o'lchovli integralni boshqa tartibdagi takroriy integralga keltirish mumkin.

Mulohaza. Agar Ω fazoviy soha hech bir koordinata o'qi yo'nalishi bo'yicha to'g'ri bo'lmasa, bu sohani har biri hech bo'lmaganda bitta o'q yo'nalishi bo'yicha to'g'ri bo'ladigan qismlarga ajratish kerak. So'ngra har bir bo'lakka 12.4-Teoremani qo'llab integral hisoblanadi va uch o'lchovli integrallarning 3-xossasi qo'llanilsa, hisoblangan integrallarning yig'indisi berilgan uch o'lchovli integralning qiymatini beradi.

12.15-Misol. $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [0, h]\}$ soha bo'yicha integrallash chegaralarini aniqlaymiz.

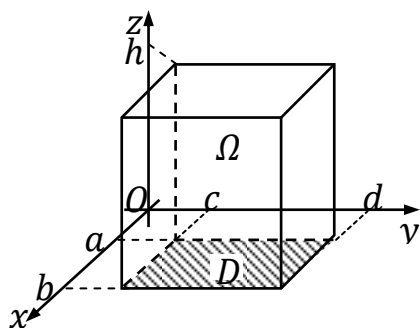
► Mazkur holda Ω – qirralari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipeddan iborat (12.43-rasm). Bu parallelepiped barcha koordinata o'qlari yo'nalishi bo'yicha to'g'ri yopiq soha. Vertikal to'g'ri chiziqlar uning quyi va yuqori yoqlarini $z_1 = 0$ va $z_2 = h$ qiymatlarda kesib o'tadi. Shuning uchun (12.71) formulaga ko'ra

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^h f(x, y, z) dz$$

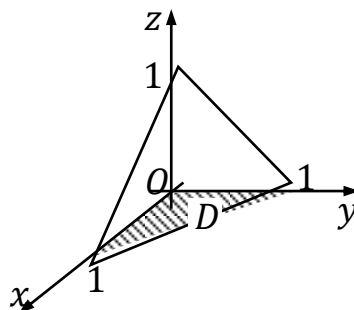
tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ integrallash sohasi Oxy tekislikdagi to'g'ri to'rtburchak. 12.2-Teoremani qo'llab

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_0^h f(x, y, z) dz$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀



12.43-rasm



12.44-rasm

12.16-Misol. $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ tetraedr bo'yicha integrallash chegaralarini aniqlaymiz (12.44-rasm).

► Ω integrallash sohasi barcha koordinata o'qlari yo'nalishi bo'yicha to'g'ri soha. Oxy tekislikning (x, y) nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqli Ω yopiq sohani quyidan $(x, y, 0)$ nuqtada va yuqorida $x + y + z = 1$ tekislikning $(x, y, 1 - x - y)$ nuqtasida kesib o'tadi. Ω sohaning Oxy tekislikka proyeksiyasi

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \in [0, 1], x + y \leq 1\}$$

uchburchak bo'ladi. Bu D sohada Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar uning chegarasini $y = 0$ va $y = 1 - x$ to'g'ri chiziqlarda kesib o'tadi. Shuning uchun (12.72) formulani va 12.3-Teoremani qo'llasak, uch o'lchovli integralni

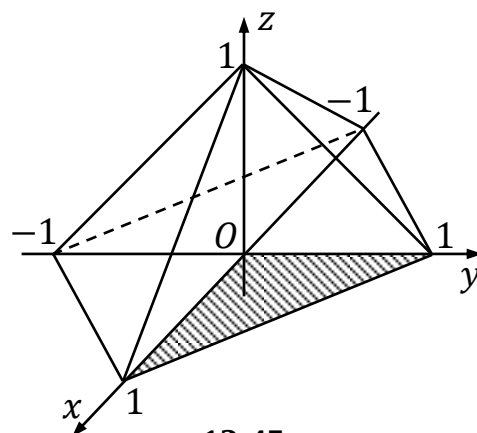
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin. ◀

12.17-Misol. Uchlari Ox va Oy o'qlarning ham manfiy ham musbat tomonlarida, Oz o'qda esa faqat musbat tomonida koordinata boshidan bir birlik uzoqlikda yotuvchi nuqtalarda bo'lgan Ω –piramidaning hajmini toping (12.45-rasm).

► Mazkur piramidaning Oxz va Oyz tekisliklarga nisbatan simmetrikligi tufayli, piramidaning birinchi oktantdagi qismining hajmini hisoblaymiz va natijani to'rtga ko'paytirib qidirilayotgan hajmni topamiz. Birinchi oktantdagi qism uchun uch o'lchovli integral 12.16-Misolda qaraldi. Shunday qilib,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} dy = \end{aligned}$$



12.45-rasm

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = 4 \int_0^1 \left((1-x)y - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\
&= 4 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 dx = -\frac{2}{3} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

12.8. Uch o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish

Fazoda egri chiziqli koordinatalar. $Oxyz$ fazoning Ω sohasi $Ouvw$ sohaning G sohasiga

$$\begin{cases} u = p(x, y, z), \\ v = q(x, y, z), \\ w = r(x, y, z) \end{cases} \quad (12.73)$$

formulalar yordamida akslantirilsin. Bunda Ω sohaning $\partial\Omega$ chegara sirti G sohaning ∂G chegara sirtiga akslantiriladi.

(12.73) akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lganligi tufayli ixtiyoriy $(u, v, w) \in G$ nuqta uchun

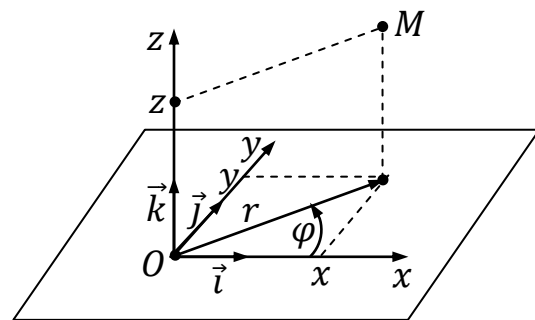
$$\begin{cases} x = g(u, v, w), \\ y = h(u, v, w), \\ z = l(u, v, w) \end{cases} \quad (12.74)$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi g, h, l funksiyalarni topish mumkin.

Demak, (u, v, w) sonlar uchligining berilishi (x, y, z) sonlar uchligining berilishi bilan teng kuchli ekan, shu sababli u, v va w qiymatlarni (x, y, z) nuqtaning fazodagi egri chiziqli koordinatalari deb ataladi.

Egri chiziqli koordinatalardan bittasi o'zgarmas bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rniga bu koordinataning koordinata sirti deb ataladi. u, v va w koordinatalarning har biri uchun koordinata sirtlarining butun bir oilalari mavjud bo'lishi ravshan. Bunda Ω sohaning har bir nuqtasi orqali har bir oilaning bitta koordinata sirti o'tadi.

Fazodagi egri chiziqli koordinatalarga misol sifatida 2.5 b o'limda qaralgan silindrik koordinatalarni ko'rsatish mumkin. Ular *qutb radius* ($r \geq 0$), *qutb burchak* ($-\pi < \varphi \leq \pi$) va *applikata* ($-\infty < z < +\infty$) deb nomlanadi va fazodagi M nuqtaning holatini to'liq tavsiflaydi (12-46-rasm).



12.46-rasm

(12.74) formulalar silindrik koordinatalar uchun

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad (12.75)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Silindrik koordinatalar uchun koordinata sirtlari:

i) r qutb radiusi uchun applikata o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri doiraviy silindrlardan iborat bo'ladi;

ii) φ qutb burchagi uchun applikata o'qi bilan chegaralangan yarim tekisliklardan iborat bo'ladi;

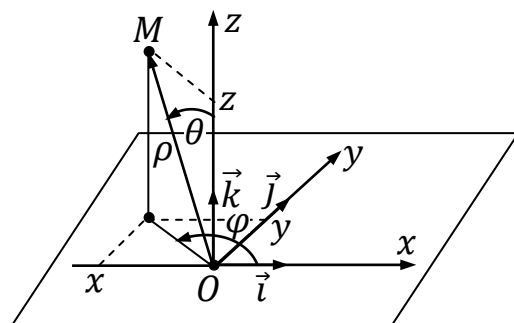
iii) z applikata uchun applikata o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekisliklardan iborat bo'ladi.

Fazodagi egri chiziqli koordinatalarga yana bir misol sifatida sferik koordinatar deb ataluvchi ρ, θ, φ uchlikni ko'rsatish mumkin, bunda ular *radius* ($\rho \geq 0$), *kenglik* ($0 \leq \theta \leq \pi$) va *uzoqlik* ($-\pi < \varphi \leq \pi$) deb nomlanadi (12-47-rasm).

(12.74) formulalar sferik koordinatalar uchun

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (12.76)$$

ko'rinishda bo'ladi.



12.47-rasm

Sferik koordinatalar uchun koordinata sirtlari:

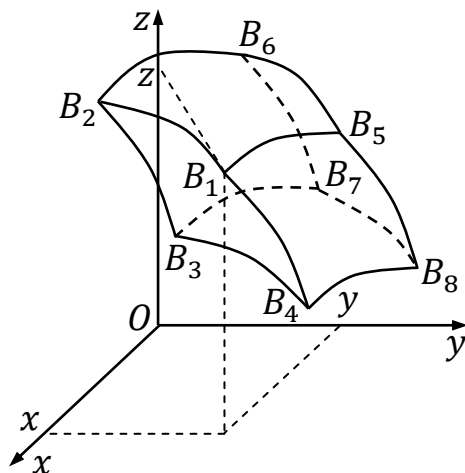
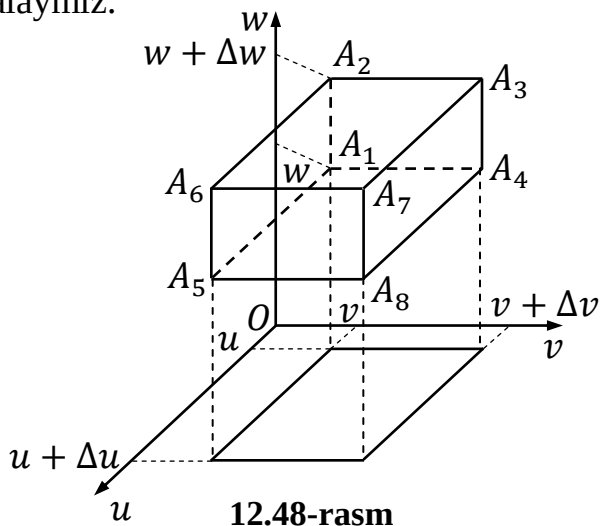
i) ρ radius uchun markazi koordinatalar boshida bo'lgan sferalardan iborat bo'ladi;

ii) θ kenglik uchun uchi koordinatalar boshida va o'qi applikatalar o'qi bilan ustma-ust tushadigan konuslardan iborat bo'ladi;

iii) φ uzoqlik uchun applikatalar o'qi bilan chegaralangan yarim tekisliklardan iborat bo'ladi.

Egri chiziqli koordinatalarda hajm elementi. G sohada Ouv , Ouw , Ovw koordinata tekisliklariga parallel bo'lgan uch juft tekisliklardan hosil qilingan va qirralari Δu , Δv , Δw bo'lgan elementar to'g'ri to'rt burchakli parallelepipedni olamiz (12.48-rasm). Bu parallelepipedning hajmi $\Delta\omega = \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta w$ tenglik bilan hisoblanadi.

(12.74) akslantirishda bu parallelepiped umumiy holda egri chiziqli olti yoqqa o'tadi (12.49-rasm). Bunda parallelepipedning $u = \text{const}$ tekislikda yotuvchi $A_1A_2A_3A_4$ yoqiga Ω sohadagi $B_1B_2B_3B_4$ sirt mos keladi, $u + \Delta u$ – tekislikda yotuvchi $A_5A_6A_7A_8$ to'g'ri to'rt burchakka $B_5B_6B_7B_8$ sirt mos keladi va hokazo. G sohadagi parallelepipedning o'lchovlari yetarlicha kichik bo'lganda unga mos keluvchi oltiyoqni ham taqriban $\overrightarrow{B_1B_5}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ va $\overrightarrow{B_1B_4}$ vektorlardan yasalgan parallelepiped deb qarash mumkin. Endi bu vektorlarni (12.74) akslantirishlar orqali ifodalaymiz.



$\overrightarrow{B_1B_5}$ vektor Δu orttirmaga mos keladi va shu sababli uning koordinatalari uchun

$$\overrightarrow{B_1B_5} \approx \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial l}{\partial u} \Delta u \right\}$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Xuddi shu singari $\overrightarrow{B_1B_2}$ va $\overrightarrow{B_1B_4}$ vektorlar uchun

$$\overrightarrow{B_1B_2} \approx \left\{ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial l}{\partial v} \Delta v \right\},$$

$$\overrightarrow{B_1B_4} \approx \left\{ \frac{\partial g}{\partial w} \Delta w, \frac{\partial h}{\partial w} \Delta w, \frac{\partial l}{\partial w} \Delta w \right\}$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. $\overrightarrow{B_1B_5}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ va $\overrightarrow{B_1B_4}$ vektorlardan tuzilgan parallelepipedning ΔV hajmi vektorlar aralash ko'paytmasining xossasiga ko'ra bu vektorlar aralash ko'paytmasining absolyut qiymatiga teng:

$$\begin{aligned} \Delta V = |\overrightarrow{B_1B_5} \overrightarrow{B_1B_2} \overrightarrow{B_1B_4}| &\approx \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial l}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial l}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial g}{\partial w} \Delta w & \frac{\partial h}{\partial w} \Delta w & \frac{\partial l}{\partial w} \Delta w \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial l}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} & \frac{\partial l}{\partial w} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \Delta w. \end{aligned}$$

So'ngi tenglikdagi

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial l}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} & \frac{\partial l}{\partial w} \end{vmatrix}$$

determinant $g(u, v, w)$, $h(u, v, w)$ va $l(u, v, w)$ funksiyalarning yakobiyanini deb ataladi. Shunday qilib yuqorida aytib o'tilgan og'ma parallelepiped hajmi

$$\Delta V = |J(u, v, w)| \Delta u \Delta v \Delta w \quad (12.77)$$

formula bilan hisoblanadi. Shuning uchun egri chiziqli koordinatalarda hajm elementi deb

$$dV = |J(u, v, w)| du dv dw$$

miqdorga aytiladi.

Bu natijani silindrik va sferik koordinatalarga tadbiq qilamiz.

1) (12.75) tengliklar bilan aniqlanuvchi silindrik koordinatalar uchun

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial r} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial l}{\partial r} & \frac{\partial l}{\partial \varphi} & \frac{\partial l}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

har doim $r \geq 0$ bo'lganligi uchun silindrik koordinatalarda hajm elementi

$$dV = r dr d\varphi dz$$

tenglik bilan hisoblanadi.

2) (12.76) tengliklar bilan aniqlanuvchi sferik koordinatalar uchun

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \rho} & \frac{\partial h}{\partial \theta} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial l}{\partial \rho} & \frac{\partial l}{\partial \theta} & \frac{\partial l}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

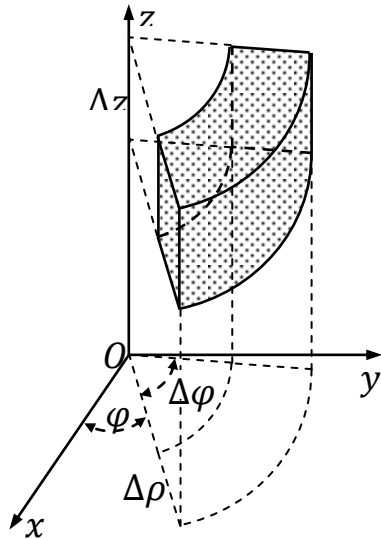
$$= \rho^2 \sin \theta.$$

Bu miqdor har doim nomanfiy bo'lganligi uchun sferik koordinatalarning hajm element

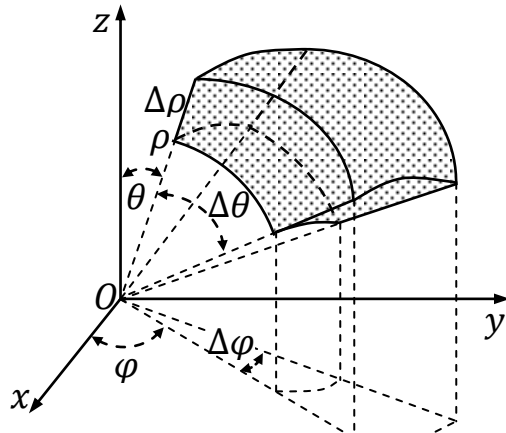
$$dV = \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho$$

bo'lad.

Olingan natijalarning geometrik tasviri 12.50 va 12.51-rasmlarda tasvirlangan.



12.50-rasm



12.51-rasm

Uch o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish. (12.77) formuladan Ω sohaning hajmi uchun

$$V_{\Omega} = \iiint_G |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (12.78)$$

Endi ikki o'chovli integraldagi singari mulohaza yuritib, uch o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirishning

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_G f(g(u, v, w), h(u, v, w), l(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw \end{aligned} \quad (12.79)$$

kabi umumiy formulasini hosil qilamiz.

Silindrik va sferik formulalar uchun (12.79) formula

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Uch o‘lchovli integrallarni hisoblashda ba‘zan *umumlashgan sferik koordinatalardan* foydalanish qulay. Ular dekart koordinatalari bilan

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, z = c\rho \cos \theta \quad (12.80)$$

formulalar orqali bog‘langan. Yarim o‘qlari a, b, c bo‘lgan ellipsoidning $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ tenglamasi bu koordinatalarda $\rho = 1$ ko‘rinishda bo‘lishini osongina tekshirish mumkin. Hajm elementi esa

$$dV = abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

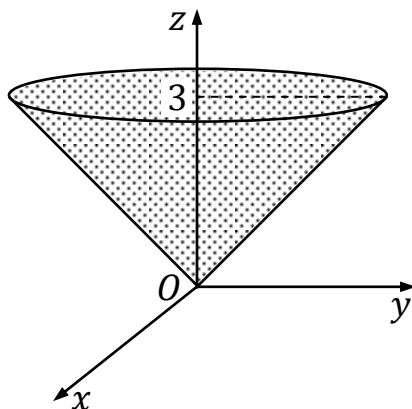
tenglik bilan hisoblanadi.

12.18-Misol. $\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$ integralni hisoblang, bu yerda $\Omega = \{(x, y, z): z \leq 3, z \geq x^2 + y^2\}$.

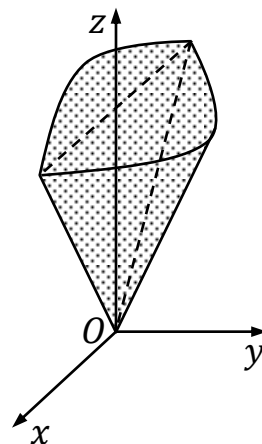
► D integrallash sohasi $z^2 = x^2 + y^2$ doiraviy konusning $z \geq 0$ yarim fazoda yotuvchi va $z = 3$ tekislik bilan chegaralangan ichki qismi (12.52-rasm). Bu holda silindrik koordinatalarga o‘tish qulay. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tenglamada $z = 3$ bo‘lganda $x^2 + y^2 = 9$ tenglamani hosil qilamiz. Shuning uchun integrallash sohasining Oxy tekislikdagi proyeksiyasi markazi koordinatalar boshida va radiusi 3 bo‘lgan doiradan iborat. Demak, qutb radiusi va burchagi $0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ kesmalarda o‘garar ekan. Konusning qaralayotgan qismining $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tenglamasi silindrik koordinatalarda $z = r$ ko‘rinishda bo‘ladi. Shning uchun z applikata $r \leq z \leq 3$ kesmada o‘zgaradi. Integral ostidagi funksiya silindrik koordinatalarda $y^2 = r^2 \sin^2 \varphi$ ko‘rinishda bo‘ladi. Shunday qilib, topilganlarni (12.79) formulaga qo‘yib,

$$\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr \int_r^3 r^2 \sin^2 \varphi r dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr \int_r^3 r^3 \sin^2 \varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r^3 \sin^2 \varphi \cdot z|_r^3) dr = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r^3 \sin^2 \varphi (3 - r)) dr = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \left(\frac{3r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^3 d\varphi = \\
&= \frac{243}{20} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{243}{20} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{243}{20} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{243}{20} 2\pi = 12,15\pi
\end{aligned}$$



12.52-rasm



12.53 -rasm

12.19 Misol. $\iiint_{\Omega} yz dx dy dz$ integralni hisoblang, bu yerda $\Omega = \{(x, y, z): y \geq 0, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

► Integrallash sohasi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ sharning $z^2 = x^2 + y^2$ konus bilan kesib olingan qismining $y \geq 0$ va $z \geq 0$ yarim fazolarning umumiy qismida yotuvchi bo'lagi (12.53-rasm). Soha sharning qismi bo'lganligi uchun sferik koordinatalarga o'tgan qulay. Bunda θ – kenglik nuqta $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konusda yotganda eng katta $\theta_1 = \arctg 1 = \pi/4$ qiymatiga erishadi. Shuning uchun θ – kenglik $0 \leq \theta \leq \pi/4$ kesmada o'zgaradi. Integrallash sohasining Oxy tekislikdagi proyeksiyasi markazi koordinatalar boshida va $y \geq 0$ yarim tekislikda yotuvchi yarim doira, shuning uchun φ – uzoqlik $0 \leq \varphi \leq \pi$ kesmada o'zgaradi. Sferaning radiusi 2 bo'lganligi uchun ρ – radius $0 \leq \rho \leq 2$ kesmada o'zgaradi. Integral ostidagi funksiya sferik

koordinatalarda $yz = \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$ ko‘rinishda bo‘ladi. Shunday qilib, topilganlarni (12.79) formulaga qo‘yib, qidirilayotgan integralning qiymatini hosil qilamiz

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \rho^2 \sin \theta d\rho = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 \rho^4 \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta d\rho = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (\sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta) \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 d\theta = \frac{32}{5} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{32}{5} \int_0^{\pi} \sin \varphi \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{15} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -\frac{8\sqrt{2}}{15} \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{16\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

12.20-Misol. $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ integralni hisoblang, bu yerda integrallash sohasi

$$\Omega = \left\{ (x, y, z): 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 4, y \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}x, y \geq \frac{3}{2}x, z \geq 0 \right\}$$

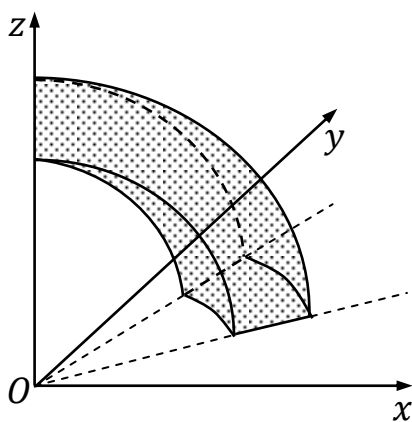
to‘plamdan iborat (12.54-rasm).

► Integrallash sohasi ellipsoidaning qismi, shuning uchun umumlashgan sferik koordinatalarga o‘tamiz: $x = 2\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = 3\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = 4\rho \cos \theta$.

Integrallash sohasini chegaralovchi ellipsoidlarning

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 4$$

tenglamalaridan ρ –radius uchun $1 \leq \rho^2 \leq 4$ yoki $1 \leq \rho \leq 2$ o‘zgarish kesmasini hosil qilamiz. Sohaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $x^2/4 + y^2/9 \leq 4$ ellipsning $y = 3x/2$ va $y = 3\sqrt{3}x/2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi qismidan iborat. Birinchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini yangi koordinatalarda yozamiz:



12.54-rasm

$3\rho \sin \theta \sin \varphi = 3 \cdot 2\rho \sin \theta \cos \varphi / 2$, uni soddalashtirib $\operatorname{tg} \varphi = 1$ tenglikka ega bo‘lamiz. Ikkinchi to‘g‘ri chiziq uchun $3\rho \sin \theta \sin \varphi = 3\sqrt{3} \cdot 2\rho \sin \theta \cos \varphi / 2$ va bu yerda ham soddalashtirib $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ tenglikni hosil qilamiz. Demak $\arctg 1 = \pi/4 \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{3} = \pi/3$, y’ni φ –uzoqlik $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/3$ kesmada o‘zgaradi. $z \geq 0$ bo‘lganligi uchun

θ –kenglik $0 \leq \theta \leq \pi/2$ kesmada o‘zgaradi. Integral ostidagi funksiya umumlashgan sferik koordinatalarda $z = 4\rho \cos \theta$ ko‘rinishda bo‘ladi. Almashtirish yakobiyaning moduli esa $|J(\rho, \theta, \varphi)| = 2 \cdot 3 \cdot 4\rho^2 \sin \theta = 24\rho^2 \sin \theta$ ga teng. Topilganlarni berilgan integralga qo‘yib integralning qiymatini topamiz

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 4\rho \cos \theta \cdot 24\rho^2 \sin \theta d\rho = \\ &= 96 \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho = 96 \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_1^2 d\theta = \\ &= 24 \cdot 15 \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = 24 \cdot 15 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} d\varphi = \\ &= \frac{24 \cdot 15}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = 12 \cdot 15 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = 15\pi. \end{aligned}$$

12.9. Uch o‘lchovli integralning tadbirlari

Jismning massasini hisoblash. Uch o‘lchovli integralga keltiriladigan masala sifatida biror Ω soha nuqtalarida massa taqsimlanishining $\mu(x, y, z)$ zichlik funksiyasi berilgan bo‘lsa, bu jismning massasi

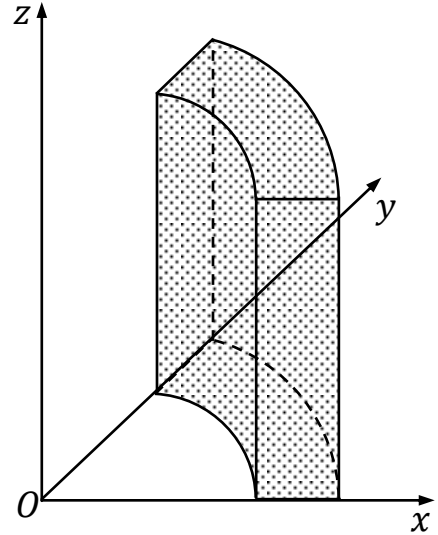
$$m = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (12.81)$$

formula bilan hisoblanishini ko'rgan edik. Biz bu yerda $\mu(x, y, z)$ funksiyani Ω sohada uzluksiz deb faraz qilamiz.

12.21-Misol. $\Omega = \left\{ (x, y, z): 4 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2 \right\}$ soha

nuqtalarida massa $\mu(x, y, z) = (x + y)z$ zichlik funksiyaga ko'ra taqsimlangan bo'lsa, uning m massasini toping (12.55-rasm).

► Soha elliptik silindrlarning qismi, shuning uchun $x = 3r \cos \varphi$, $y = 2r \sin \varphi$, $z = z$ deb o'zgaruvchilarni almashtirish qulay. Jism $x^2/9 + y^2/4 = 4$ va $x^2/9 + y^2/4 = 9$ elliptik silindrlar oralig'ida joylashganligi tufayli, bu tenglamalarni yangi koordinatalarga o'tkazsak $4 \leq r^2 \leq 9$ bo'ladi, ya'ni r – radius $2 \leq r \leq 3$ kesmada o'zgaradi. Ω sohaning Oxy tekislikdagi



12.55-rasm

proyeksiyasi $x^2/9 + y^2/4 = 4$ va $x^2/9 + y^2/4 = 9$ ellipslar oralig'idagi sohaning birinchi chorakda yotgan bo'lagidan iborat. Shu sababli φ – qutb burchagi uchun o'zgarish kesmasi $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ bo'ladi. Zichlik funksiyasi yangi koordinatalarda $\mu(x, y, z) = (x + y)z = (3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi)rz$, yakobiyan moduli esa $|J(r, \varphi, z)| = 2 \cdot 3r = 6r$ ko'rinishda bo'ladi. Topilganlarni (12.81) formulaga qo'yib,

$$m = \iiint_{\Omega} (x + y)z dx dy dz = 6 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_2^3 dr \int_0^2 (3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi) r^2 z dz =$$

$$= 6 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_2^3 (3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi) r^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^2 dr =$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_2^3 (3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi) r^2 dr = 12 \int_0^{\pi/2} (3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi) \frac{r^3}{3} \Big|_2^3 d\varphi =$$

$$= 12 \cdot \frac{19}{3} \int_0^{\pi/2} (3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi) d\varphi = 12 \cdot \frac{19}{3} (3 \sin \varphi - 2 \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 380,$$

ya'ni jismning massasini topdik.

Jismning koordinata tekisliklariga nisbatan statik va inersiya momentlari. Yassi figuraning statik va inersiya momentlarini hisoblash va og'irlik markazining koordinatalarini topish ikki o'lchovli integral yordamida amalga oshirilgan edi. Ω jismning koordinata tekisliklariga nisbatan statik va inersiya momentlarini hisoblash uch o'lchovli integral yordamida bajariladi.

Ω jism nuqtalaridagi zichlik $\mu(x, y, z)$ funksiya bilan berilgan bo'lsa, bu jismning Oxy tekislikka nisbatan statik va inersiya momentlari mos ravishda

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega} z\mu(x, y, z) dx dy dz \quad (12.82)$$

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (12.83)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Xuddi shu singari Oyz va Oxz tekisliklarga nisbatan bu momentlar

$$S_{yz} = \iiint_{\Omega} x\mu(x, y, z) dx dy dz, S_{xz} = \iiint_{\Omega} y\mu(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, I_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Jism og'irlik markazining koordinatalarini topish. Jism og'irlik markazining koordinatalari

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m} \quad (12.84)$$

formulalarga ko'ra topiladi. (12.81) va (12.82) formulalarni inobatga olsak bu formulalar

$$x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x\mu(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y\mu(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz},$$

$$z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z\mu(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz}$$

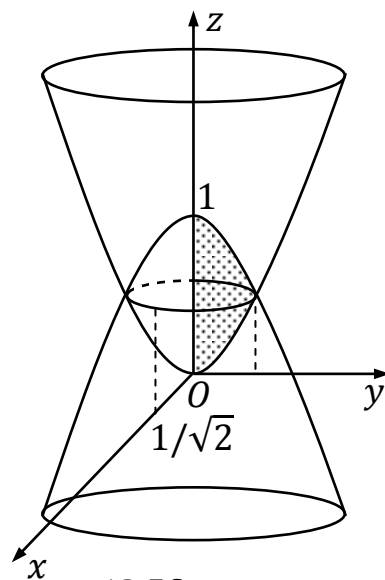
kabi ko‘rinishni oladi.

12.22-Misol. $z = x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidlar bilan chegaralangan, birinchi oktantda yotuvchi Ω jism nuqtalaridagi zichlik nuqta koordinatalri ko‘paytmasiga propordional bo‘lsa, bu jismning koordinata tekisliklariga nisbatan statik momentlarini hisoblang va og‘irlik markazining koordinatalrini toping (12.56-rasm).

► Sohani chegaralovchi sirtlar tenglamasida x va y ozgaruvchilar kvadratlarining yig‘indisi qatnashgan, shu sababli oz‘garuvchilarni silindrik koordinatalar bilan almashtirish qulay: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

Soha yuqoridan $z = 1 - x^2 - y^2$ sirt bilan, quyidan esa $z = x^2 + y^2$ sirt bilan chegaralangan, ya‘ni $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$. Bu yerga yangi o‘zgaruvchilarni kiritsak $r^2 \leq z \leq 1 - r^2$ bo‘ladi.

Sohaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi markzi koordinatalar boshida va radiusi $1/\sqrt{2}$ bo‘lgan doiraning birinchi chorakda yotgan qismidan iborat, shuning uchun $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ va $0 \leq r \leq 1/\sqrt{2}$ bo‘ladi. Shartga ko‘ra zichlik funksiyasi $\mu(x, y, z) =$



12.56-rasm

$kxyz$ va uning yangi koordinatalrda $kxyz = kr \cos \varphi r \sin \varphi z = kr^2 \cos \varphi \sin \varphi z$ ko‘rinishda bo‘ladi. Topilganlarni (12.81) formulaga qo‘yib, jismning massasini topamiz:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz = k \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi z r dz = \\
&= k \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^3 z dz = \\
&= k \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3 \frac{1}{2} z^2 \Big|_{r^2}^{1-r^2} dr = k \frac{1}{4} \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3 ((1-r^2)^2 - r^4) dr = \\
&= k \frac{1}{4} \int_0^{1/\sqrt{2}} (r^3 - 2r^5) dr = k \frac{1}{4} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{3} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = k \frac{1}{192};
\end{aligned}$$

Xuddi shu singari statik va inersiya momentlarini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \iiint_{\Omega} z \mu(x, y, z) dx dy dz = k \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi z^2 r dz = \\
&= k \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^3 z^2 dz = \\
&= k \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3 \frac{1}{3} z^3 \Big|_{r^2}^{1-r^2} dr = k \frac{1}{6} \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3 ((1-r^2)^3 - r^6) dr = \\
&= k \frac{1}{6} \int_0^{1/\sqrt{2}} (r^3 - 3r^5 + 3r^7 - 2r^9) dr = k \frac{1}{6} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{2} + \frac{3r^8}{8} - \frac{r^{10}}{5} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \\
&= k \frac{11}{3840};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{yz} &= \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi r \cos \varphi z r dz = \\
&= k \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^4 z dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -k \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} r^4 \frac{1}{2} z^2 \Big|_{r^2}^{1-r^2} dr = k \frac{1}{6} \int_0^{1/\sqrt{2}} r^4 ((1-r^2)^2 - r^4) dr = \\
&= k \frac{1}{6} \int_0^{1/\sqrt{2}} (r^4 - 2r^6) dr = k \frac{1}{6} \left(\frac{r^5}{5} - \frac{2r^7}{7} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = k \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{70\sqrt{2}} = k \frac{1}{420\sqrt{2}}; \\
S_{xz} &= \iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi r \sin \varphi z r dz = \\
&= k \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{1-r^2} r^4 z dz = \\
&= k \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} r^4 \frac{1}{2} z^2 \Big|_{r^2}^{1-r^2} dr = k \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{70\sqrt{2}} = k \frac{1}{420\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Topilganlarni (12.84) formulalarga qo'yib, jism og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{S_{yz}}{m} = \frac{k \frac{1}{420\sqrt{2}}}{k \frac{1}{192}} = \frac{16}{35\sqrt{2}}; \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{k \frac{1}{420\sqrt{2}}}{k \frac{1}{192}} = \frac{16}{35\sqrt{2}}; \\
z_c &= \frac{S_{xy}}{m} = \frac{k \frac{11}{3840}}{k \frac{1}{192}} = \frac{33}{60}.
\end{aligned}$$

Jismning shakli va zichlik funksiyasi x va y o'zgaruvchilarga nisbatan simmetrikligi tufayli og'irlik markazining absissasi va ordinatasi teng. ◀

Nazorat savollari

1. Ikki o'lchovli integral tushunchasiga keltriladigan masala: silindrik jism hajmini hisoblash haqida masala.
2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning biror soha bo'yicha integral yig'indisi qanday tuziladi.

3. Ikki o'lchovli integralning ta'rifini bayon qiling.
4. Ikki o'lchovli funksiyaning quyi va yuqori Darbu yig'indilari qanday tuziladi.
5. Ikki o'lchovli integralning xossalari bayon qiling.
6. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning biror sohadagi o'rta qimatiga ta'rif bering.
7. Ikki o'lchovli integralning to'g'ri tortburchak soha bo'yicha hisoblash formulasini yozing.
8. Ox yoki Oy o'q yonalishi bo'yicha to'g'ri soha ta'rifini keltiring.
9. Ikki o'lchovli integralning ixtiyoriy soha bo'yicha hisoblash formulasini yozing.
10. Tekislikdagi nuqtaning egri chiziqli koordinatalariga ta'rif bering.
11. $x(u, v)$ va $y(u, v)$ funksiylarning yakobianiga ta'rif bering.
12. Ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish formulasini yozing.
13. Qutb koordinatalarida ikki o'lchovli integralni hisoblash formulasini yozing.
14. Yassi figuraning yuzini ikki o'lchovli integral yordamida hisoblash formulasini yozing.
15. Fazoviy sirt yuzini ikki o'lchovli integral yordamida hisoblash formulasini yozing.
16. Puasson integrali qanday hisoblanadi?
17. Yassi figuraning hajmini hisoblash formulasini yozing.
18. Yassi figuraning koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlari qanday topiladi?
19. Yassi figuraning koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari qanday topiladi?
20. Yassi figura og'irlik markazining koordinatalari qanday topiladi?

Mashqlar

Quyida berilgan D soha bo'yicha olingan $\iint_D f(x, y) dx dy$ ikki o'lchovli integralni takroriy integral ko'rinishida yozing:

1. $D = \{(x, y): x \leq -|y|, x^2 + y^2 \leq -2x\}$.
2. $D = \{(x, y): y \leq -|x|, x^2 + y^2 \leq -2y\}$.

3. $D = \{(x, y): y \leq 0, y \geq x^2 - 9\}$. 4. $D = \{(x, y): y \geq x^2, y \leq 16 - x^2\}$.

5. D soha, uchlari $A(2,0), B(5,0), C(5,-6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning ichki qismi.

6. D soha, uchlari $A(0,0), B(3,2), C(4,1), D(3,-2)$ nuqtalarda bo'lgan to'rt burchakning ichki qismi.

Takroriy integrallarda integrallash tartibini o'zgartiring:

$$7. \int_0^4 dx \int_0^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^6 dx \int_0^{(x-6)^2} f(x, y) dy$$

$$8. \int_0^2 dx \int_0^{2x^2} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^{-(x-4)^3} f(x, y) dy$$

Takroriy integrallarni hisoblang:

$$9. \int_2^3 dy \int_0^{\ln y} e^x dx \quad 10. \int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin y^2 dy \quad 11. \int_0^1 dx \int_0^1 ye^{xy} dy.$$

Ikki o'lchovli integrallarni hisoblang:

12. $\iint_D \sqrt{xy - y^2} dx dy$, bu yerda D integrallash sohasi, uchlari $A(1,1), B(5,1), C(10,2), D(2,2)$ nuqtalarda bo'lgan trapetsiyadan iborat.

13. $\iint_D y dx dy$, bu yerda D integrallash sohasi, uchlari $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakdan iborat.

14. $\iint_D e^{x^2+y} dx dy$, bu yerda $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, y \leq \ln 2x, y \geq \ln x\}$.

15. $\iint_D (x + y^2) dx dy$, bu yerda $D = \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\}$.

16. $\iint_D xy^2 dx dy$, bu yerda $D = \{(x, y): x \leq 3, y \leq x, xy \geq 1\}$.

17. $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, bu yerda D , markazi koordinatalar boshida va radiusi 2 bo'lgan doiraning birinchi chorakdagi bo'lagi.

18. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, bu yerda D , ushbu $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = 0$,

($y > 0$) chiziqlar bilanchegaralangan soha.

19. $y^2 = 4x + 4$ va $x + y = 2$ egri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

20. $x^2 + y^2 = 4$ silindr sirtidan $y^2 = 2(2 - x)$ silindr bilan kesib olingan qismimning yuzini toping.

21. $x^2 + z^2 = y^2$ konus sirtidan $y^2 = 2x$ silindr bilan kesib olingan qismimning yuzini toping.

22. Katetlari $OB = 3$ va $OA = 4$ bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak shakldagi yassi plastinkaning nuqtadagi zichligi bu nuqtadan OA katetgacha bo'lgan masofaga teng bo'lsa, bu plastinkaning massasini toping.

Quyida berilgan D soha bo'yicha olingan $\iiint_D f(x, y, z) dx dy$ uch o'lchovli integralni

takroriy integral ko'rinishida yozing:

23. $D = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y \leq 2, z \leq x^2 + y^2 + 3\}$.

24. $D = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y \leq 6, x + y + z - 5 \leq 0\}$

Takroriy integrallarni hisoblang:

25. $\int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} (x + y + z) dz$. 26. $\int_{-1}^1 dy \int_0^{y^2} dx \int_0^{x^2+y^2} (1 + z) dz$.

Uch o'lchovli integrallarni hisoblang:

27. $\iiint_D \sqrt{x} dx dy dz$, bu yerda $D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 2\}$.

28. $\iiint_D z \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz$, bu yerda $D = \{(x, y, z): x^2 + z^2 \leq y^2, 0 \leq y \leq 2\}$.

Quyidagi uch o'lchovli integrallarni silindrik yoki sferik almashtirishlar yordamida hisoblang:

29. $\iiint_D x^2 dx dy dz$, bu yerda $D = \{(x, y, z): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, -z \leq y \leq z\}$.

30. $\iiint_D y dx dy dz$, bu yerda $D = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z\}$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$ yarim sharning nuqtadagi zichligi bu nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'lsa, yarim shar og'irlik markazi koordinatalarini toping.

13-BOB. EGRI CHIZIQLI INTEGRAL VA SIRT INTEGRALLARI

Integrallash sohasi biror egri chiziq bo'lgan aniq integralning umumlashtirilishi egri chiziqli integral deb ataladi.

13.1. Birinchi tur egri chiziqli integral

Egri chiziq yoyi uzunligi tushunchasi va tenglamalari turli xil ko'rinishda berilgan egri chiziqlar uchun bu uzunliklarni hisoblash formulalaridan foydalanib, to'g'ri chiziq kesmasi bo'ylab kiritilgan aniq integral singari egri chiziq bo'ylab integral tushunchasini kiritish mumkin.

AB (yoki L) egri chiziq

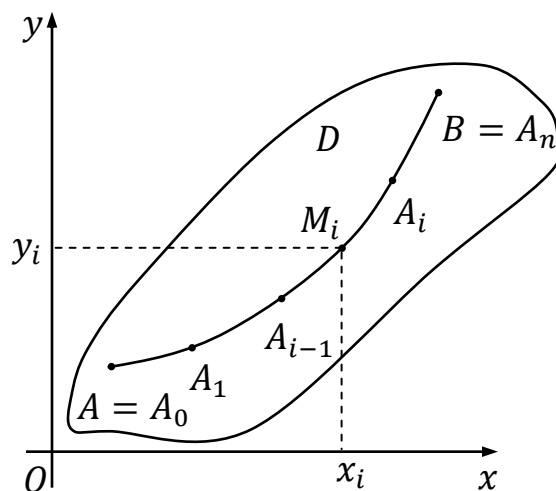
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

kabi parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz $x'(t), y'(t)$ hosilalarga ega va bu hosilalar ana shu kesma nuqtalarida

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, AB egri chiziq silliq egri chiziq deb ataladi. Agar $[\alpha, \beta]$ kesmaning chekli sondagi nuqtalarida bu hosilalar mavjud bo'lmasa yoki ikkala hosila bir vaqtda nolga aylansa, egri chiziq bo'lakli silliq deb ataladi.

$f(x, y)$ funksiya AB egri chiziq yotgan biror D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. AB egri chiziqni $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ nuqtalar yordamida n ta elementar yoylarga ajratamiz. Bu bo'linishni $T = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ orqali, $A_{i-1}A_i$ yoy uzunligini Δs_i orqali va bu uzunliklarning eng kattasini $\lambda = \lambda(T)$ orqali belgilaymiz.



13.1-rasm

Har bir yoyda ixtiyoriy ravishda $M_i(x_i, y_i)$ nuqtani tanlaymiz (13.1-rasm).

Quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \quad (13.1)$$

va uni $f(x, y)$ funksiyaning AB egri chiziq bo'ylab integral yig'indisi deb ataymiz.

13.1-Ta'rif. Agar eng katta λ yoy uzunligi nolga intilganda: $\lambda \rightarrow 0$ (u holda $n \rightarrow \infty$ bo'ladi), (13.1) integral yig'indilar chekli limitga intilsa va bu limit AB egri chiziqni T bo'lishlariga va $M_i(x_i, y_i)$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, uni biz $f(x, y)$ funksiyaning AB egri chiziq uzunligi bo'ylab integrali yoki I -tur egri chiziqli integral deb ataymiz va uni $\int_{AB} f(x, y) ds$ (yoki $\int_L f(x, y) ds$) orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i. \quad (13.2)$$

Bu holda $f(x, y)$ funksiya AB egri chiziq bo'ylab integrallanuvchi, AB egri chiziq integrallash konturi, A —integrallashning boshlang'ich, B —esa oxirgi nuqtasi deb ataladi.

(13.1) integral yig'indi AB egri chiziqdagi yo'nalishga bog'liq bo'lmaganligi tufayli I tur egri chiziqli integral ham egri chiziqdagi yo'nalishga bog'liq bo'lmaydi. AB egri chiziq yopiq bo'lmasin, BA egri chiziq ham xuddi shu egri chiziq deb tushuniladi, faqat yo'nalish B nuqtadan A nuqtaga qarab yo'nalgan deb hisoblanadi. U holda

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds \quad (13.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Fazoviy egri chiziq bo'ylab integral ham xuddi shu singari kiritiladi. AB fazoviy egri chiziq yotgan Ω sohada $f(x, y, z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. AB egri chiziqni $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ nuqtalar yordamida $A_{i-1}A_i$ elementar yoylarga

ajratuvchi $T = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ bo'linishni bajaramiz. Har bir $A_{i-1}A_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) yoyda $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlab,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

integral yig'indini tuzamiz va $\lambda(T) \rightarrow 0$ bo'lganda limitga o'tamiz, natijada fazoviy AB egri chiziq bo'ylab integral qiymatini hosil qilamiz:

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i, \quad (13.4)$$

bu yerda ham $A_{i-1}A_i$ yoy uzunligini Δs_i orqali va bu uzunliklarning eng kattasini $\lambda = \lambda(T)$ orqali belgilangan.

13.1-Misol. Biror L silliq chiziq bo'ylab $f(M)$ o'zgaruvchan chiziqli zichlikka ega bo'lgan massa taqsimlangan bo'lsin. L chiziqning m massasini topilsin.

► L chiziqni n ta $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) qismlarga ajratamiz va har bir qismda zichlik o'zgarmas va biror nuqtadagi, masalan M_i nuqtadagi $f(M_i)$ zichlikka teng deb faraz qilib, har bir qismning massasini hisoblaymiz. U holda

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i$$

yig'indi m massaning qiymatiga taqriban teng bo'ladi, bu yerda Δs_i ko'paytuvchi i — qismning uzunligi. L egri chiziqni bo'lishlar qanchalik mayda bo'lsa, xatolik ham shunchalik kichik bo'lishi ravshan. $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda = \max_i \Delta s_i$) bo'lganda limitga o'tsak, L chiziqning aniq m massasini hosil qilamiz, ya'ni:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i.$$

Tenglikning o'ng tomondagi limit esa I-tur egri chiziqli integraldan iborat. Demak,

$$m = \int_L f(x, y) ds. \blacktriangleleft$$

13.2. Birinchi tur egri chiziqli integralning mavjudligi va xossalari

AB egri chiziqda parametr sifatida A nuqtadan hisoblanadigan s yoy uzunligini olamiz (13.2-rasm), ya'ni egri chiziqdagi M nuqtaning holati A nuqtadan M nuqtagacha bo'lgan $s = \widetilde{AM}$ yoy uzunligi bilan aniqlanadi. U holda AB egri chiziqli

$$x = x(s), y = y(s) \quad (0 \leq s \leq s_{AB})$$

parametrik tenglama bilan ifodalanadi, egri chiziqli nuqtalarida aniqlangan $f(x, y)$ funksiya esa s argumentning murakkab $f(x(s), y(s))$ funksiyasiga o'tadi.

s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) orqali s parametrning egri chiziqdagi A_i bo'linish nuqtasiga mos keluvchi qiymatini belgilaymiz. U holda $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ ekanligi ravshan. $\bar{s}_i$ orqali esa, s parametrning M_i nuqtani aniqlovchi qiymatini belgilaymiz.



13.2-rasm

Bu belgilash uchun $s_{i-1} \leq \bar{s}_i \leq s_i$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Kiritilgan belgilashlardan foydalanib, (13.1) integral yig'indi

$$\sum_{i=1}^n f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)) \Delta s_i \quad (13.5)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Bu yig'indi bir vaqtning o'zida $f(x(s), y(s))$ funksiya aniq integralining integral yig'indisidan iborat va

$$\int_0^{s_{AB}} f(x(s), y(s)) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)) \Delta s_i \quad (13.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda har doimgidek $\lambda = \max_i \Delta s_i$. (13.2) va (13.6) tengliklar o'ng tomonlaridagi limitlar ostidagi yig'indilar teng, shuning uchun bu limitlar ham va demak chap tomonlari ham teng bo'ladi. Shunday qilib,

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_0^{s_{AB}} f(x(s), y(s)) ds \quad (13.7)$$

hamda ulardan birining mavjudligi ikkinchisining ham mavjudligini keltirib chiqaradi. Shuning uchun o'ng tomondagi aniq integralning mavjudlik sharti chap tomondagi I-tur egri chiziqli integral uchun ham mavjudlik shartini beradi.

13.1-Teorema. Agar AB egri chiziq bo'lakli silliq va $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziqda uzluksiz bo'lsa,

$$\int_{AB} f(x,y)ds$$

I tur egri chiziqli integral mavjud.

◀ AB egri chiziqni aniqlovchi $x(s)$ va $y(s)$ parametrik funksiyalar $[0, s_{AB}]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun, $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziqda uzluksiz bo'lsa, murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema ko'ra $f(x(s), y(s))$ funksiya ham $[0, s_{AB}]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. U holda uzluksiz funksiyaning integrallanuvchiligi haqidagi teorema ko'ra (13.7) tenglikning o'ng tomonidagi aniq integral mavjud, bu esa $\int_{AB} f(x,y)ds$ egri chiziqli integralni mavjudligini ta'minlaydi. ►

Birinchi tur egri chiziqli integralning xossalari. Quyida I-tur egri chiziqli integralning asosiy xossalarini keltiramiz. Ularning isbotini aniq integrallardagi singari (13.1) integral yig'indining xususiyatlaridan osongina keltirib chiqarish mumkin. Ularni tekshirib ko'rishni kitobxonga havola qilamiz.

1. I-tur egri chiziqli integral integrallash yo'lining yo'nalishiga bog'liq emas, ya'ni:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds.$$

2. Agar $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziq bo'ylab integrallanuvchi bo'lsa, $c \cdot f(x,y)$ funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_{AB} c \cdot f(x,y)ds = c \cdot \int_{AB} f(x,y)ds, (c = \text{const})$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3. Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar AB egri chiziq bo'ylab integrallanuvchi bo'lsa, $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiyalar ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_{AB} (f(x, y) \pm g(x, y)) ds = \int_{AB} f(x, y) ds \pm \int_{AB} g(x, y) ds$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

4. Agar AB egri chiziqni $C \in AB$ nuqta yordamida $AB = AC \cup CB$, AC va CB faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'ladigan qilib ikki qismga ajratilsa, AB egri chiziq bo'ylab integrallanuvchi $f(x, y)$ funksiya uchun

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{AC} f(x, y) ds + \int_{CB} f(x, y) ds$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

5. Agar AB egri chiziq bo'ylab integrallanuvchi $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar AB chiziqning ixtiyoriy nuqtasida $f(x, y) \leq g(x, y)$ tengsizlikni qanotlantirsa,

$$\int_{AB} f(x, y) ds \leq \int_{AB} g(x, y) ds$$

kabi bo'ladi.

6. $\int_{AB} ds = s_{AB}$.

7. (O'rta qiymat haqidagi teorema) Agar $f(x, y)$ funksiya AB egri chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu chiziqda shunday $C(x_C, y_C)$ nuqta topiladiki, bu nuqta uchun $\int_{AB} f(x, y) ds = f(x_C, y_C) s_{AB}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

13.3. Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash

YUqorida I-tur egri chiziqli integralni hisoblashni (13.7) formula yordamida aniq integralni hisoblashga keltirilgan edi. Biroq bu formula amaliy jihatdan unchalik qulay emas, chunki kamdan-kam hollardagina egri chiziqning paramateri sifatida yoy uzunligi olinadi.

Bo'lakli silliq AB egri chiziq

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (13.8)$$

parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsin. U holda s yoy uzunligini egri chiziqning ixtiyoriy uchidan boshlab aniqlash mumkin, biz bu holda parametrning $t = \alpha$ qiymatiga mos keluvchi uchini boshlang'ich nuqta sifatida qabul qilamiz. U holda t parametrning o'sib borishiga s parametrning o'sishi mos keladi va egri chiziq uzunligining differensial uchun

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

formula o'rinli bo'ladi ((9.52) formulaga qarang). Bunda $t = \alpha$ qiymat A nuqtaga va $s = 0$ qiymatga, $t = \beta$ qiymat esa B nuqtaga va $s = s_{AB}$ qiymatga mos keladi. (13.7) tenglikdagi aniq integralda s yoy uzunligi parametridan t parametrغا o'tib, o'zgaruvchilarni almashtirish mumkin. U holda bu tenglik

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (13.9)$$

ko‘rinishni oladi.

Agar yassi chiziq $y = y(x), x \in [a, b]$ funksiyaning grafigidan iborat bo'lsa, (13.9) formula

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (13.10)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar egri chiziq $x = x(y)$, $y \in [c, d]$ funksiya bilan berilgan bo‘lsa,

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy \quad (13.11)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

AB egri chiziqli qutb koordinatalar sistemasida $r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. U holda Dekart va qutb koordinatalarini bog'lovchi $x =$

$r \cos \varphi$ va $y = r \sin \varphi$ formulalarni hamda qutb koordinatalaridagi yoy uzunligi differensial

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

ifodasini inobatga olsak

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi \quad (13.12)$$

formulani hosil qilamiz.

Fazoviy silliq AB egri chiziq

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsa, bu egri chiziqda aniqlangan va uzluksiz $f(x, y, z)$ funksiyaning (13.4) I tur egri chiziqli integrali

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (13.13)$$

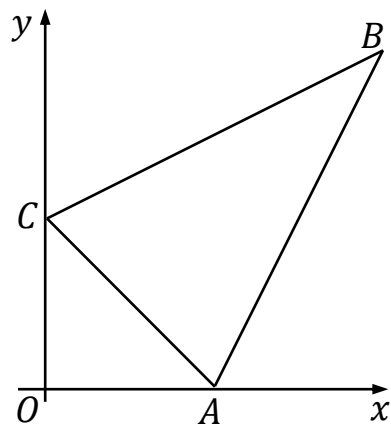
formulaga ko'ra hisoblanadi.

13.2-Misol. $\int_L (x + y) ds$ egri chiziqli integralni

hisoblang, bu yerda L – uchlari $A(1,0)$, $B(2,2)$ va $C(0,1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak konturi (13.3-rasm).

► I-tur egri chiziqli integralning 4-xossasiga ko'ra

$$\int_L (x + y) ds = \int_{AB} (x + y) ds + \int_{BC} (x + y) ds + \int_{CA} (x + y) ds$$



13.3-rasm

bo'ladi. Har bir integralni alohida hisoblaymiz. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga ko'ra, kesmalar $AB: y = 2x - 2$ ($1 \leq x \leq 2$), $BC: y = x/2 + 1$

($0 \leq x \leq 2$) va $CA: y = 1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$) tenglamalarga ega bo'ladi. Ularning hosilalari esa mos ravishda $AB: y' = 2$, $BC: y' = 1/2$ va $CA: y' = -1$ ga teng. Topilganlarni (13.10) formulaga qo'yib integrallarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x+y) ds &= \int_1^2 (x+2x-2) \sqrt{1+2^2} dx = \sqrt{5} \int_1^2 (3x-2) dx = \\ &= \sqrt{5} \left(\frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{BC} (x+y) ds &= \int_0^2 (x+x/2+1) \sqrt{1+1/2^2} dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^2 (3x/2+1) dx = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{3x^2}{4} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{5\sqrt{5}}{2}; \end{aligned}$$

$$\int_{CA} (x+y) ds = \int_0^1 (x+1-x) \sqrt{1+(-1)^2} dx = \sqrt{2} \int_0^1 dx = \sqrt{2}.$$

Demak,

$$\int_L (x+y) ds = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{5} + \sqrt{2}. \quad \blacktriangleleft$$

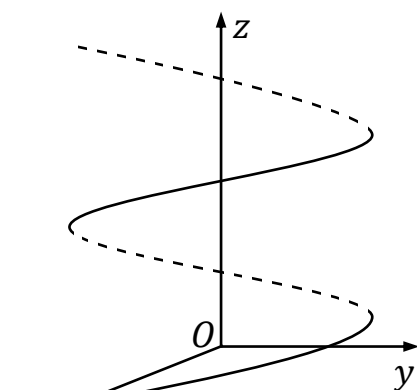
13.3-Misol. $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2} ds$ egri chiziqli integralni

hisoblang, bu yerda L – vint chizig'i deb ataluvchi burama chiziqning birinchi buramasi (13.4-rasm):

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z = ht, \end{cases}$$

► Hosilalarni topamiz: $x'(t) = -a \sin t$, $y'(t) = a \cos t$, $z'(t) = h$. U holda (13.13) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_L \frac{z^2}{x^2+y^2} ds &= \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{h^2 t^2}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + h^2} dt = \end{aligned}$$



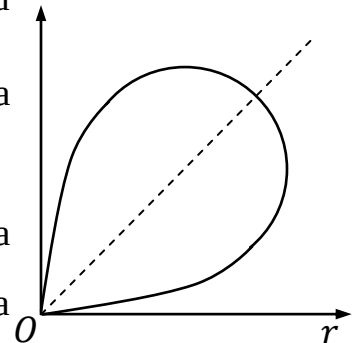
13.4-rasm

$$= \frac{h^2 \sqrt{a^2 + h^2}}{a^2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{h^2 \sqrt{a^2 + h^2}}{a^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3 h^2 \sqrt{a^2 + h^2}}{3a^2}. \blacktriangleleft$$

13.4-Misol. $\int_L (x + y) ds$ egri chiziqli integralni hisoblang, bu

yerda L – integrallash chizig‘i $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$ lemniskata bargining birinchi chorakdagi bo‘lagi (13.5-rasm).

► Hosilani topamiz: $r'(\varphi) = \cos 2\varphi / \sqrt{\sin 2\varphi}$, hamda $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ekanligini inobatga olib, (13.12) formulaga ko‘ra,



13.5-rasm

$$\begin{aligned} \int_L (x + y) ds &= \int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} r(\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\pi/2} r(\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{1}{r} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 2. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

13.4. Birinchi tur egri chiziqli integralning tadbirlari

Moddiy chiziqning massasi. AB egri chiziqda aniqlangan $\mu(M)$ funksiya egri chiziq bo‘ylab taqsimlangan massaning zichligini bersin. AB egri chiziqni katta $n \in \mathbb{N}$ sondagi $A_{i-1}A_i, i = 1, 2, \dots, n$ elementar yoylarga bo‘lganda, har bir $A_{i-1}A_i$ yoyning barcha nuqtalarida zichlik o‘zgarmas va bu yoyning ixtiyoriy $M_i(x_i, y_i)$ nuqtasidagi $\mu(M_i)$ zichlikka taqriban teng deb olish mumkin. Δs_i orqali $A_{i-1}A_i$ elementar yoyning uzunligini belgilab, bu yoy massasi uchun

$$m_i \approx \mu(M_i) \Delta s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kabi taqribiy tenglikni yozish mumkin. U holda AB egri chiziqning m massasi uchun

$$m = \sum_{i=1}^n \mu(M_i) \Delta s_i$$

taqribiy tenglik o‘rinli bo‘ladi. Elementar yoylarning Δs_i uzunligi qanchalik kichik bo‘lsa bu taqribiy tenglikdagi xatolik shunchalik kichik bo‘ladi. Shuning uchun AB egri chiziqlarning m massasi sifatida

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(M_i) \Delta s_i$$

limitning qiymatini olish mumkin.

Egri chiziq massasining mazkur ta’rifini I-tur egri chiziqli integral ta’rifi bilan taqqoslab,

$$m = \int_{AB} \mu(M) ds = \int_{AB} \mu(x, y) ds \quad (13.14)$$

formulani hosil qilamiz. Fazoviy AB egri chiziq bo‘lganda uning massasi uchun shunga o‘shash

$$m = \int_{AB} \mu(M) ds = \int_{AB} \mu(x, y, z) ds \quad (13.15)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

13.5-Misol. Vint chizig‘ining P nuqtadagi $\mu(P)$ zichligi bu nuqtaning radius-vektoriga proporsional bo‘lsa, chiziq bitta buramasining m massasini toping.

► Biz yuqorida bu chiziqni qaradik (13.4-rasm). Uning bitta buramasi $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$ tengliklar va $0 \leq t \leq 2\pi$ shart bilan $P(x, y, z)$ nuqtadagi zichlik esa, shartga ko‘ra $\mu(P) = kr = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda k –proporsionallik koeffisiyenti. U holda (13.13) va (13.15) formulalarga ko‘ra,

$$\begin{aligned} m &= \int_L \mu(x, y, z) ds = k \int_L \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds = \int_0^{2\pi} k \sqrt{a^2 + h^2} \sqrt{a^2 + h^2 t^2} dt = \\ &= k \sqrt{a^2 + h^2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{a^2 + h^2 t^2} + \frac{a^2}{2h} \ln \left(ht + \sqrt{a^2 + h^2 t^2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \end{aligned}$$

$$= k\sqrt{a^2 + h^2} \left(\pi\sqrt{a^2 + 4\pi^2 h^2} + \frac{a^2}{2h} \ln \frac{2\pi h + \sqrt{a^2 + 4\pi^2 h^2}}{a} \right). \quad \blacktriangleleft$$

Moddiy chiziqning statik va inersiya momentlari va og'irlik markazining koordinatalari. Fazoviy AB egri chiziqning zichligi $\mu(x, y, z)$ funksiya bilan berilgan bo'lsin. AB chiziqni $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ nuqtalar yordamida uzunliklari Δs_i bo'lgan n ta $A_{i-1}A_i$ elementar yoylarga bo'lamiz. Bo'linishlar shunchalik kichikki, bunda bitta elementar yoydagi zichlik o'zgarmas va u bu elementar yoyning $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtasidagi $\mu(x_i, y_i, z_i)$ zichlikka teng deb faraz qilamiz. Bu holda $A_{i-1}A_i$ elementar yoyini uning $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtasi bilan almashtirish mumkin va bu nuqtada butun $\mu(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$ massa jamlangan bo'ladi. Shuning uchun AB egri chiziqning Oxy, Oyz, Oxz tekislikliklarga nisbatan statik momentlarini quyidagi

$$S_{Oxy} \approx \sum_{i=1}^n z_i \mu(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i, S_{Oyz} \approx \sum_{i=1}^n x_i \mu(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i, S_{Oxz} \approx \sum_{i=1}^n y_i \mu(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

taqribiy tengliklar bilan aniqlash mumkin. Bu yerda ham, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$ eng katta yoy uzunligini nolga intiltirib statik va inersiya momentlarini I-tur egri chiziqli integral yordamida hisoblanuvchi

$$S_{Oxy} = \int_{AB} z \mu(x, y, z) ds, S_{Oyz} = \int_{AB} x \mu(x, y, z) ds, S_{Oxz} = \int_{AB} y \mu(x, y, z) ds \quad (13.16)$$

formulalarni hosil qilamiz. Xuddi shu singari mulohaza yuritib, AB egri chiziqning bu tekisliklarga nisbatan inersiya momentlari uchun mos ravishda

$$I_{Oxy} = \int_{AB} z^2 \mu(x, y, z) ds, I_{Oyz} = \int_{AB} x^2 \mu(x, y, z) ds, I_{Oxz} = \int_{AB} y^2 \mu(x, y, z) ds \quad (13.17)$$

formulalarni hosil qilish mumkin.

AB egri chiziqning Ox o'qqa nisbatan I_x inersiya momenti $I_x = I_{Oxy} + I_{Oxz}$ tenglik bilan hisoblanadi, boshqacha qilib aytganda

$$I_x = \int_{AB} (z^2 + y^2) \mu(x, y, z) ds \quad (13.18)$$

formula bilan hisoblanadi. Xuddi shu singari Oy va Oz o'qlarga nisbatan inersiya momentlari uchun

$$I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)ds, I_z = \int_{AB} (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)ds \quad (13.19)$$

kabi formulalar o'rinli.

AB egri chiziq $C(x_c, y_c, z_c)$ og'irlik markazining koordinatalari esa,

$$x_c = \frac{S_{Oyz}}{m}, y_c = \frac{S_{Oxz}}{m}, z_c = \frac{S_{Oxy}}{m}$$

tengliklarga ko'ra topiladi. (13.15) va (13.16) formulalarni inobatga olsak,

$$x_c = \frac{\int_{AB} x\mu(x, y, z)ds}{\int_{AB} \mu(x, y, z)ds}, y_c = \frac{\int_{AB} y\mu(x, y, z)ds}{\int_{AB} \mu(x, y, z)ds}, z_c = \frac{\int_{AB} z\mu(x, y, z)ds}{\int_{AB} \mu(x, y, z)ds} \quad (13.20)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

$\mu(x, y)$ zichlik funksiyaga ega bo'lgan Oxy tekislikda yotuvchi AB egri chiziq uchun Ox va Oy o'qlarga nisbatan statik va inersiya momentlari mos ravishda

$$S_x = \int_{AB} y\mu(x, y)ds, I_x = \int_{AB} y^2\mu(x, y)ds, S_y = \int_{AB} x\mu(x, y)ds, I_y = \int_{AB} x^2\mu(x, y)ds$$

formulalarga ko'ra hisoblanadi. Uning og'irlik markazi koordinatalari esa,

$$x_c = \frac{\int_{AB} x\mu(x, y)ds}{\int_{AB} \mu(x, y)ds}, y_c = \frac{\int_{AB} y\mu(x, y)ds}{\int_{AB} \mu(x, y)ds}$$

formulalar bilan topiladi.

13.6-Misol. $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ tengliklar bilan aniqlanuvchi vint chizig'ining $P(x, y, z)$ nuqtadagi zichligi $\mu(x, y, z) = kz$ funksiya bilan aniqlansa, chiziq birinchi buramasining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

► Hosilalarni topamiz: $x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = 1$. U holda (13.15) formulaga ko'ra egri chiziq massasini hisoblaymiz

$$m = \int_{AB} kz ds = \int_0^{2\pi} kt \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{2}k \int_0^{2\pi} t dt = \sqrt{2}k \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}k\pi^2.$$

(13.16) formulalarga ko'ra chiziqlarning Oxy , Oyz va Oxz tekisliklarga nisbatan statik momentlarni hisoblaymiz

$$\begin{aligned} S_{Oxy} &= \int_{AB} z\mu(x, y, z) ds = \int_{AB} kz^2 ds = \int_0^{2\pi} kt^2 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \\ &= \sqrt{2}k \int_0^{2\pi} t^2 dt = \sqrt{2}k \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}k\pi^3}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{Oyz} &= \int_{AB} x\mu(x, y, z) ds = \int_{AB} xkz ds = \int_0^{2\pi} kt \cos t \sqrt{2} dt = k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \cos t dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t, \\ dv = \cos t dt, v = \sin t \end{array} \right| = k\sqrt{2} t \sin t \Big|_0^{2\pi} - k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin t dt = k\sqrt{2} \cos t \Big|_0^{2\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{Oxz} &= \int_{AB} y\mu(x, y, z) ds = \int_{AB} ykz ds = \int_0^{2\pi} kt \sin t \sqrt{2} dt = k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t, \\ dv = \sin t dt, v = -\cos t \end{array} \right| = -k\sqrt{2} t \cos t \Big|_0^{2\pi} + k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos t dt = -2\sqrt{2}k\pi. \end{aligned}$$

Og'irlik markazining koordinatalarini (13.20) formulaga ko'ra topamiz:

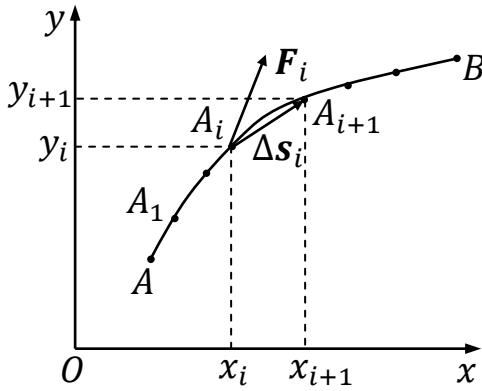
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{S_{Oyz}}{m} = \frac{0}{2\sqrt{2}k\pi^2} = 0, y_c = \frac{S_{Oxz}}{m} = \frac{-2\sqrt{2}k\pi}{2\sqrt{2}k\pi^2} = -\frac{1}{\pi}, \\ z_c &= \frac{S_{Oxy}}{m} = \frac{\frac{8\sqrt{2}k\pi^3}{3}}{2\sqrt{2}k\pi^2} = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Shunday qilib, vint chizig'i birinchi buramasining og'irlik markazi $C(0, -1/\pi, 4\pi/3)$ nuqtada ekan. ◀

13.5. Ikkinchi tur egri chiziqli integral

Kuchning bajargan ishi. Moddiy nuqta biror egri chiziq bo‘ylab harakatlanganda unga ta’sir qiluvchi o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash II-tur egri chiziqli integral tushunchasiga olib keladi.

$M(x, y)$ nuqta AB egri chiziq boylab A nuqtadan B nuqtaga qarab $\mathbf{F}$ kuch ta’sirida harakatlanayotgan bo‘lsin. $\mathbf{F}$ kuch M nuqta harakatlanganda qiymati bo‘yicha ham, yo‘nalishi bo‘yicha ham o‘zgaradi, ya’ni M nuqtaning funksiyasidan iborat: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$. M nuqta A holatdan B holatga o‘tganda $\mathbf{F}$ kuch bajargan $\tilde{A}$ ishni hisoblaymiz (13.6-rasm). Buning uchun AB egri chiziqni $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$



13.6-rasm

nuqtalar yordamida A nuqtadan B nuqtaga qarab n ta qismga ajratamiz va $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ vektorni $\Delta \mathbf{s}_i$ orqali belgilaymiz. $\mathbf{F}$ kuchning A_i nuqtadagi qiymatini $\mathbf{F}_i$ orqali belgilaymiz. U holda $\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i$ skalyar ko‘paytmani $\mathbf{F}$ kuchning $\widetilde{A_i A_{i+1}}$ yoy boylab bajargan ishining taqribiy qiymati sifatida olish mumkin:

$$\tilde{A}_i \approx \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i.$$

$P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar $\mathbf{F}$ kuchning mos ravishda Ox va Oy o‘qlardagi proyeksiyalari bo‘lsin, ya’ni

$$\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}.$$

Δx_i va Δy_i orqali x_i va y_i koordinatalarning A_i nuqtadan A_{i+1} nuqtaga o‘tganda olgan orttirmalarini belgilaymiz, ya’ni $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ va natijada

$$\Delta \mathbf{s}_i = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. U holda

$$\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i = P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i$$

bo‘ladi. Shuning uchun $\mathbf{F}$ kuchning butun AB egri chiziq bo‘ylab bajargan $\tilde{A}$ ishi taqriban

$$\tilde{A} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i = \sum_{i=0}^{n-1} [P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i] \quad (13.21)$$

yig‘indiga teng bo‘ladi.

Ikkinchi tur egri chiziqli integral. Oxy tekislikda AB egri chiziq berilgan va $P(x, y)$, $Q(x, y)$ funksiyalar bu egri chiziqda aniqlangan bo‘lsin. AB egri chiziqni $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ nuqtalar yordamida A nuqtadan B nuqtaga qarab yo‘nalishda uzunliklari Δs_i ($i = 0, 2, \dots, n-1$) bo‘lgan n ta $\widetilde{A_i A_{i+1}}$ yoylarga ajratamiz. Har bir $\widetilde{A_i A_{i+1}}$ elementar yoyda ixtiyoriy ravishda $M_i(x_i^*, y_i^*)$ nuqta tanlaymiz va

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i \quad (13.22)$$

yig‘indilarni tuzamiz, bu yerda $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ bo‘lib, ular $\widetilde{A_i A_{i+1}}$ yoyning mos ravishda Ox va Oy o‘qlardagi proyeksiyalari (13.6-rasm).

(13.22) yig‘indilar mos ravishda $P(x, y)$ funksiyaning x o‘zgaruvchi bo‘yicha va $Q(x, y)$ funksiyaning y o‘zgaruvchi bo‘yicha integral yig‘indilari deb ataladi.

13.2-Ta’rif. Agar Δs_i yoy uzunliklarining $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta s_i$ eng kattasi nolga intilganda (13.22) yig‘indilar chekli limitga intilsa va bu limit AB yoyning bo‘linish usuliga va $M_i(x_i^*, y_i^*)$ nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmasa, ularni mos ravishda $P(x, y)$ funksiya dan x o‘zgaruvchi bo‘yicha va $Q(x, y)$ funksiya dan y o‘zgaruvchi bo‘yicha olingan *II-tur egri chiziqli integrallar* deb ataymiz va ularni mos ravishda

$$\int_{AB} P(x, y) dx \text{ va } \int_{AB} Q(x, y) dy$$

orqali belgilaymiz.

Shunday qilib,

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \text{ va } \int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i.$$

Umumiy ko‘rinishdagi $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ II tur egri chiziqli integral

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Endi kuchning bajargan ishi masalasiga qaytadigan bo‘lsak, (13.21) taqribiy tenglikning o‘ng tomonida $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalarning AB egri chiziq bo‘ylab umumiy ko‘rinishdagi II tur egri chiziqli integral yig‘indilari turibdi. Shuning uchun yoy uzunliklarining $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta s_i$ eng kattasi nolga intilganda bu taqribiy tenglik aniq tenglikka aylanadi va $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ kuch bajargan ishning qiymati

$$\tilde{A} = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

tenglik bilan topiladi.

Fazoviy AB egri chiziq boylab $\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ egri chiziqli integral xuddi shu singari aniqlanadi.

13.6. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning mavjudligi va uni hisoblash

AB yassi chiziq

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$$

parametrik tenglama bilan berilgan bo‘lsin, bu yerda $x(t), y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz. Parametrning $t = \alpha$ qiymatiga A nuqta, $t = \beta$ qiymatiga esa B nuqta mos keladi deb faraz qilamiz.

13.2-Teorema. Agar AB egri chiziqni tasvirllovchi $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi, $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar esa AB egri chizqda uzluksiz bo‘lsa, $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalardan AB egri chizq boylab olingan umumiy ko‘rinishdagi II-tur egri chiziqli integral mavjud va uning uchun

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt \end{aligned} \quad (13.23)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

◀ Umumiy ko‘rinishdagi II-tur egri chiziqli integral $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar aniqlaydigan ikki qismdan iborat. Teoremaning isbotini bitta qism bilan chegaralanish mumkin, ikkinchi qismi uchun isbot xuddi shu singari bo‘ladi.

Shunday qilib, silliq AB egri chiziqda uzluksiz bo‘lgan $P(x, y)$ funksiya uchun II tur egri chiziqli integral mavjudligini va uning uchun

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt \quad (13.24)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlaymiz.

AB egri chiziqni ixtiyoriy $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ nuqtalar yordamida $\widetilde{A_i A_{i+1}}$ elementar yoylarga ajratuvchi bo‘linishni tanlaymiz. A_i bo‘linish nuqtalariga t parametrning $t_i, i = 0, 1, \dots, n$ qiymatlari mos kelsin. Bu qiymatlar uchun

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Har bir $\widetilde{A_i A_{i+1}}$ elementar yoyda ixtiyoriy ravishda $M_i(x_i^*, y_i^*)$ nuqta tanlaymiz va τ_i –parametrning bu nuqtaga mos keluvchi qiymati bo‘lsin. $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$ ekanligi ravshan. Tanlangan bo‘linishga mos keluvchi S integral yig‘indini

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} P(x(\tau_i), y(\tau_i))(x(t_{i+1}) - x(t_i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(x(\tau_i), y(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(t)dt \end{aligned}$$

ko‘rinshda yozib olish mumkin.

(13.24) tenglikning o'ng tomonidagi I integral teorema shartiga ko'ra mavjud, chunki integral ostidagi funktsiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz. Aniq integralning additivlik xossasidan foydalanib, bu integralni

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(x(t), y(t))x'(t)dt$$

ko'rinishda yozamiz. S integral yig'indi va I integral uchun hosil qilingan tasvirlardan

$$S - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t)))x'(t)dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikning o'ng tomonini baholaymiz.

$F(t) = P(x(t), y(t))$ funktsiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz, shuning uchun u bu kesmada tekis uzluksiz hamdir. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki, $|t'' - t'| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $t', t'' \in [\alpha, \beta]$ qiymatlar uchun $|F(t') - F(t'')| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. A boshlang'ich nuqtadan AB egri chiziq yoyi o'zgaruvchan uzunlikni hisoblovchi $s(t)$ funktsiya uzluksiz differentsiallanuvchi va o'suvchi bo'ladi. Demak uning $[0, s_{AB}]$ kesmada aniqlangan $t(s)$ teskari funktsiyasi mavjud, bu yerda s_{AB} — qoymat AB egri chiziq uzunligi. Bu funktsiya uzluksiz differentsiallanuvchi, uning $|t'(s)|$ hosilasining moduli $[0, s_{AB}]$ kesmada K_1 maksimumga erishadi, ya'ni $|t'(s)| \leq K_1, 0 \leq s \leq s_{AB}$. U holda (5.65) chekli ayirmalar formulasiga ko'ra

$$|t_{i+1} - t_i| = |t'(\xi_i)|\Delta s_i \leq K_1 \Delta s_i \leq K_1 \lambda,$$

bu yerda $s_i = s(t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n, \Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ — elementar yoy uzunliklari va $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta s_i$.

Tanlangan bo'linish $\lambda < \delta(\varepsilon)/K_1$ shartni qanoatlantirsin. U holda ixtiyoriy $t', t'' \in [t_i, t_{i+1}]$ qiymatlar uchun

$$|t' - t''| \leq t_{i+1} - t_i \leq K_1 \Delta s_i \leq \delta(\varepsilon).$$

Demak, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ bo'lsa $|F(\tau_i) - F(t)| < \varepsilon$ bo'ldi va

$$|S - I| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t))| |x'(t)| dt < \\ < \varepsilon K_2 \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \varepsilon K_2 (\beta - \alpha),$$

bu yerda K_2 – uzluksiz $|x'(t)|$ funksiyaning $[\alpha, \beta]$ kesmadagi maksimal qiymati. Shunday qilib $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I$ ekan, bu esa teoremaning to'g'riligini tasdiqlaydi. ►

Agar AB egri chiziq $y = \varphi(x), x \in [a, b]$ tenglama bilan berilgan va $\varphi(x)$ funksiya va uning $\varphi'(x)$ hosilasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, x o'zgaruvchini parametr sifatida olamiz, natijada AB egri chiziqning parametrik tenglamasi: $x = x, y = \varphi(x), x \in [a, b]$ ko'rinishda bo'ladi. U holda (13.23) formuladan

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x)] dx \quad (13.25)$$

formulani hosil qilamiz. Xususiyl holda esa,

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx \quad (13.26)$$

kabi bo'ladi.

Agar fazoviy silliq AB egri chiziq $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa $\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ egri chizikli integral

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt \quad (13.27)$$

formula bilan hisoblanadi.

13.7-Misol. $\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz$ egri chiziqli integralni hisoblang, bu yerda integrallash $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ egri chiziqning $A(1,1,1)$ va $B(2,4,8)$ nuqtalar orasidagi qismi boyicha olingan.

► Hosilalarni hisoblaymiz: $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$, $z'(t) = 3t^2$. U holda (13.27) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned}\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz &= \int_1^2 (t^2 \cdot t^3 \cdot 1 + t \cdot t^3 \cdot 2t + t \cdot t^2 \cdot 3t^2) dt = \\ &= \int_1^2 (t^5 + 2t^5 + 3t^5) dt = \int_1^2 6t^5 dt = t^6 \Big|_1^2 = 63. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

13.8-Misol. $\int_{AB} (x - y)dx + dy + zdz$ egri chiziqli integralni hisoblang, bu yerda AB chiziq $z = x^2 + y^2$ parabolid bilan $z = 4$ tekislik kesishuvidan hosil bo'lgan chiziqning $A(2,0,4)$ va $B(-2,0,4)$ ($y \geq 0$) nuqtalar orasidagi qismi.

► Aytib o'tilgan kesimda

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 4 \end{cases}$$

aylana hosil bo'ladi. Shuning uchun aylananing parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ z = 4 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi parametrning α va β integrallash chegaralarini

$$\begin{cases} 2 = 2 \cos \alpha, \\ 0 = 2 \sin \alpha, \\ 4 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = 2 \cos \beta, \\ 0 = 2 \sin \beta, \\ 4 = 4 \end{cases}$$

shartlardan topamiz. $y \geq 0$ ekanligini inobatga olsak $\alpha = 0$ va $\beta = \pi$ qiymqtlarga ega bo'lamiz.

Parametrik funksiyalarning hosilalri esa $x'(t) = -2 \sin t$, $y'(t) = 2 \cos t$, $z'(t) = 0$ bo'ladi. U holda (13.27) formulaga ko'ra,

$$\begin{aligned}\int_{AB} (x-y)dx + dy + z dz &= \int_0^{\pi} ((2 \cos t - 2 \sin t)(-2 \sin t) + 2 \cos t) dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (-2 \cos t \sin t + 2 \sin^2 t + \cos t) dt = 2 \left(\cos^2 t + t - \frac{1}{2} \sin 2t + \sin t \right) \Big|_0^{\pi} = 2\pi. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

13.9-Misol. $\int_{AB} xy dx + x^2 dy$ egri chiziqli integralni $A(1,1)$ va $B(3,9)$ nuqtalarni tutashtiruvchi $y = x^2$ parabola bo'yicha hisoblang.

► Parabolani ifodalovchi funksiyaning hosilasi $y'(x) = 2x$ bo'ladi. U holda (13.25) formulaga ko'ra

$$\int_{AB} xy dx + x^2 dy = \int_1^3 (x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = \int_1^3 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_1^3 = \frac{3}{4} (81 - 1) = 60. \quad \blacktriangleleft$$

Ikkinchi tur egri chiziqli integralning xossalari.

1. AB egri chiziqda yo'nalish o'zgarganda II-tur egri chiziqli integral o'z ishorasini o'zgartiradi:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

2. O'zgaras ko'paytuvchini egri chiziqli integral ostidan chiqarish mumkin:

$$\int_{AB} k \cdot P(x, y) dx + k \cdot Q(x, y) dy = k \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (k \neq 0).$$

3. Ikkita funksiya yig'indisining egri chiziqli integrali bu funksiyalar egri chiziqli integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int_{AB} (P_1(x, y) + P_2(x, y)) dx = \int_{AB} P_1(x, y) dx + \int_{AB} P_2(x, y) dx,$$

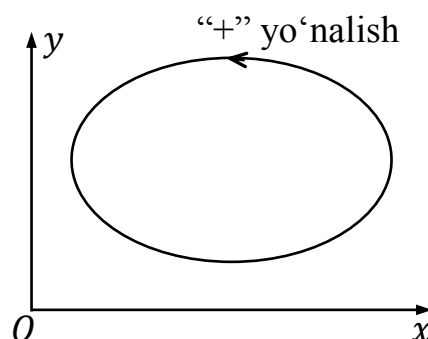
$$\int_{AB} (Q_1(x, y) + Q_2(x, y)) dy = \int_{AB} Q_1(x, y) dy + \int_{AB} Q_2(x, y) dy.$$

2 va 3 xossalr II-tur egri chiziqli integralning chiziqliligini anglatadi: funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining integrali har bir funksiya integrallarining xuddi shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng.

4. Agar AB egri chiziq ketma-ket keladigan chekli sondagi yoylarga ajratilgan bo'lsa va ana shu yoylarning har birida II-tur egri chiziqli integral mavjud bo'lsa, butun AB egri chiziqda ham integral mavjud va u alohida qismaniy yoylar bo'yicha olingan integrallar yig'indisiga teng.

1-4 xossalarni integral yig'indilarning limiti sifatida II-tur egri chiziqli integralning ta'rifidan va limitlarning ma'lum xossalariidan foydalanib isbotlash unchalik qiyin emas. Bu isbotlar aniq integralning mos xossalariining isbotini takrorlaydi. Shuning uchun biz ularga to'xtalib o'tirmaymiz.

Yopiq L kontur bo'yicha II tur egri chiziqli integral maxsus $\oint$ simvol bilan belgilanadi. Bunday integrallarda boshlang'ich va oxirgi nuqtalarni ko'rsatib integrallash yo'nalishini aniqlab bo'lmaydi. Konturni aylanib chiqish yo'nalishini aniqlashni turli usullar bilan berish mumkin. Masalan, kontur parametrik tenglamalar bilan berilganda parametrning o'sishiga mos keluvchi yo'nalishni tanlash mumkin.



13.7-rasm

Sodda yassi konturlarda (aylana, ellips) aylanish yo'nalishini soat strelkasi yo'nalishi bilan taqqoslash mumkin. Bunda soat strelkasi harakatiga qarama-qarshi yo'nalishni musbat, soat strelkasi harakati yo'nalishini esa manfiy yo'nalish deb ataladi (13.7-rasm).

Musbat yo'nalishli konturdagi integrallar uchun ba'zan maxsus $\oint$ simvoldan, manfiy yo'nalishli konturlar uchun esa $\oint$ simvoldan foydalaniladi.

5. Yopiq kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral boshlang'ich nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas (faqat konturni aylanib chiqish yo'nalishigagina bog'liq).

◀ Haqiqattan ham,

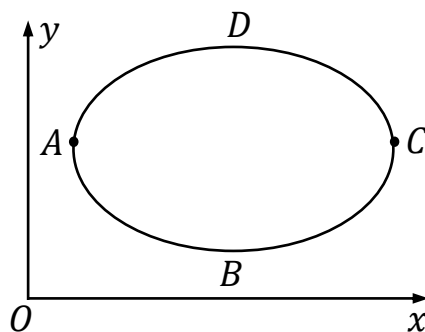
$$\oint_{ABCD A} = \oint_{ABC} + \oint_{CDA}$$

(13.8-rasm). Boshqa tomondan

$$\oint_{CDABC} = \oint_{CDA} + \oint_{ABC}.$$

Shunday qilib,

$$\oint_{ABCD A} = \oint_{CDABC}. \blacktriangleright$$



13.8-rasm

13.7. Ostrogradskiy-Grin formulasi

D soha bo'yicha ikki o'lchovli integral bilan bu sohaning L chegarasi bo'yicha II-tur egri chiziqli integral orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi Ostrogradskiy-Grin formulasi matematik tahlilda juda ko'p tadbqiqqa ega.

Oxy tekislikda to'g'ri D soha L egri chiziq bilan chegaralangan bo'lsin.

13.3-Teorema. Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar o'zlarining $\frac{\partial P}{\partial y}$ va $\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalari bilan birga D sohada uzluksiz bo'lsa,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad (13.28)$$

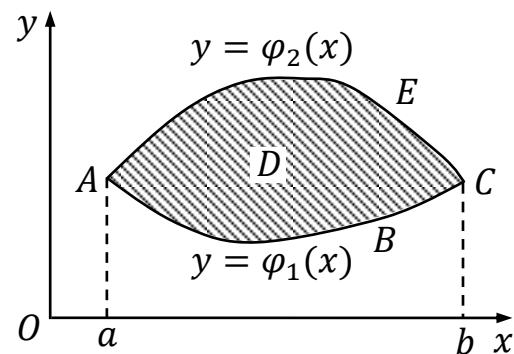
tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda L – integrallash chizig'i D sohaning chegarasi va integrallash musbat yo'nalishda (ya'ni chiziq bo'ylab harakatlanganda D soha chap tomonda qoladi) bajariladi.

(13.28) formula Ostrogradskiy-Grin formulasi deb ataladi.

◀ ABC yoyning tenglamasi $y = \varphi_1(x)$ va AEC yoyning tenglamasi $y = \varphi_2(x)$

bo'lsin (13.9-rasm). Dastlab $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ integralni hisoblaymiz. Ikki o'lchovli integralni hisoblash qoidasiga ko'ra,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\
&= \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right) dx = \\
&= \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx.
\end{aligned}$$



13.9-rasm

O'ng tomondagi ikkala integralga ham (13.26) formulani qo'llasak,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{AEC} P(x, y) dx - \int_{ABC} P(x, y) dx = \\
&= - \int_{CEA} P(x, y) dx - \int_{ABC} P(x, y) dx = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (13.29)
\end{aligned}$$

Xuddi shu singari,

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy \quad (13.30)$$

ekanligi isbotlanadi.

Agar (13.30) tenglikdan (13.29) tenglikni hadma-had ayirsak (13.28) tenglik hosil bo'ladi. ►

Yassi figuraning yuzi. Ostrogradskiy-Grin formulasining bir tadbiqini qaraymiz.

$P(x, y) = -y$ va $Q(x, y) = x$ deb olamiz. U holda

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

bo'ladi va (13.28) Ostrogradskiy-Grin formulasiga ko'ra

$$\oint_L -y dx + x dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2S_D,$$

bu yerda S_D —berilgan D sohaning yuzi.

Bundan esa D yassi sohaning S_D yuzi uchun II-tur egri chiziqli integral bilan hisoblanadigan

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \quad (13.31)$$

formulani hosil qilamiz.

13.10-Misol. $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilan chegaralangan soha yuzini hisoblang.

► Ellipsning tenglamasini parametrik ko‘rinishda yozib olamiz:

$$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Qidirilayotgan yuzani (13.31) formulaga ko‘ra hisoblaymiz, bunda egri chiziqli integral konturni musbat yo‘nalishda aylanish bo‘yicha olinadi va bu yo‘nalish t parametrning 0 dan 2π gacha o‘zgarishiga mos keladi. Parametrik funksiyalarning hosilalari

$$x'(t) = -a \sin t, y'(t) = b \cos t$$

bo‘lganligi uchun, (13.31) formulaga (13.23) formulani qo‘llaymiz

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab. \quad \blacktriangleleft$$

13.8. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmashlik sharti

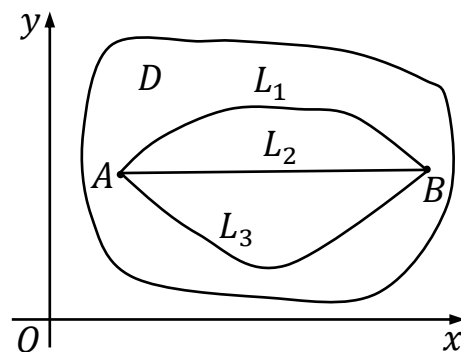
Oxy tekislikdagi D sohaga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy yopiq konturning ichki qismi ham shu D sohaga tegishli bo‘lsa, D soha *bir bog‘lamli soha* deb ataladi.

$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bir bog‘lamli D sohaning ixtiyoriy nuqtalari bo‘lsin. A va B nuqtalarni turli chiziqlar bilan bog‘lash mumkin (13.10-rasmda L_1 , L_2 va L_3). Bu chiziqlarning har biri bo‘yicha

$$I = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

integralning qiymati umuman olganda turlicha bo‘ladi.

Agar bu qiymat barcha mumkin bo'lgan AB chiziqlar bo'yicha bir xil bo'lsa, I integral *integrallash yo'liga bog'liq emas* deb aytiladi. Bu holda I integral uchun uning $A(x_1, y_1)$ boshlang'ich va $B(x_2, y_2)$ oxirgi nuqtasini ko'rsatish yetarli va u aniq integralga o'xshash ko'rinishda yoziladi



13.10-rasm

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (13.32)$$

Qanday shart bajarilganda II-tur egri chiziqli integral integrallash yo'iga bog'liq bo'lmaydi?

13.4-Teorema. $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar o'zlarining $\frac{\partial P}{\partial y}$ va $\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalri bilan birga bir bog'lamli D sohada uzluksiz bo'lsin. U holda quyidagi to'rtta shart o'zaro ekvivalent, ya'ni ulardan birining bajarilishi qolganlarining ham bajarilishini keltirib chiqaradi:

(i) D sohada yotgan ixtiyoriy yopiq silliq L kontur uchun

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0;$$

(ii) D sohada yotuvchi ixtiyoriy A va B nuqtalarni birlashtiruvchi AB chiziq uchun

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

integralning qiymati integrallash yo'liga bog'liq emas;

(iii) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ifoda D sohada aniqlangan biror funksiyaning to'liq differensialidan iborat, ya'ni D sohada aniqlangan shunday $F(x, y)$ funksiya mavjudki, uning uchun

$$dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

(iv) D sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (13.33)$$

tenglik o‘rinli.

◀ Isbotni (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) $\rightarrow$ (iv) sxema bo‘yicha olib boramiz, ya’ni (i) shatdan (ii) shart, (ii) shartdan (iii) shart, (iii) shartdan (iv) shart va nihoyat (iv) shrtndan (i) shart kelib chiqishini ko‘rsatamiz.

1) (i) $\rightarrow$ (ii). D sohada A va B nuqtalarni tutashtiruvchi ikkita ixtiyoriy silliq ACB va ADB egri chiziqlarni olamiz (13.11-rasm). Bu ikki chiziqning yig‘indisi D sohada yotuvchi yopiq $L = ACB + BDA$ silliq konturni hosil qiladi. (i) shartga ko‘ra

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

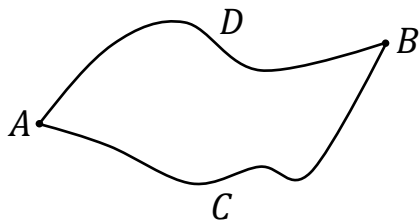
Boshqa tomondan

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy &= \int_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{BDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \\ &= \int_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{ADB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \end{aligned}$$

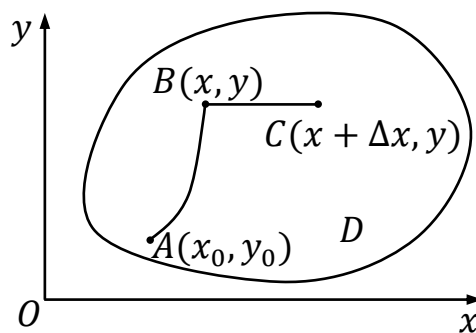
Nihoyat bundan

$$\int_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{ADB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni (ii) shartning bajarilishi kelib chiqadi.



13.11-rasm



13.12-rasm

2) (ii) $\rightarrow$ (iii). $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasdan, faqat A va B nuqtalarga bog'liq bo'lsin. U holda agar $A = A(x_0, y_0)$ nuqtani o'zgarmas qilib olsak, bu integral $B(x,y)$ nuqta koordinatalarining funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = F(x,y).$$

Bunday aniqlangan $F(x,y)$ funksiya differensiallanuvchi va uning uchun

$$dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (13.34)$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Buning uchun D sohaning ixtiyoriy B nuqtasida $\frac{\partial F}{\partial x}$ va $\frac{\partial F}{\partial y}$ xususiy hosilalar mavjudligini va

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \quad (13.35)$$

tengliklarning bajarilishini ko'rsatish yetarli.

$F(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalri mavjudligini va (13.35) tengliklarning birinchisi bajarilishini ko'rsatish uchun $F(x,y)$ funksiyaning x bo'yicha $B(x,y)$ nuqtadagi xususiy orttirmasini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \Delta_x F &= F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \\ &= \int_{AC} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{BC} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

bu yerda C nuqta $x + \Delta x$ va y koordinatalarga ega (13.12-rasm). Shartga ko'ra integral egri chiziq ko'rinishiga bog'liq emas, shu sababli integrallash chizig'i sifatida B va C nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani olamiz. U holda

$$\Delta_x F = \int_{BC} Pdx + Qdy = \int_{BC} Pdx = \int_x^{x+\Delta x} P(x,y)dx.$$

Soʻngi integralga aniq integraldagi oʻrta qiymat haqidagi teoremani qoʻllaymiz:

$$\Delta_x F = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

bundan esa,

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Demak, bu yerda limitga oʻtsak

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y).$$

Shartga koʻra $P(x, y)$ uzluksiz. $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ tenglik ham xuddi shu singari

isbotalanadi. Shunday qilib, (iii) shartning bajarilishi koʻrsatildi.

3) (iii) $\rightarrow$ (iv). D sohada $dF = Pdx + Qdy$ tenglik oʻrinli boʻladigan $F(x, y)$ funksiya mavjud boʻlsin. U holda

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

va aralsh hosilalar haqidagi 7.6-Teoremaga koʻra

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

yaʼni talab qilingan (13.33) tenglikni hosil qildik.

4) (iv) $\rightarrow$ (i). Teoremadagi (iv) bajarilgan boʻlsin va L — berilgan D sohada yotuvchi va D^* sohani chegaralovchi boʻlakli silliq chiziqli boʻlsin. U holda D sohaning bir bogʻlamli ekanligini inobatga olgan holda Grin formulasini qoʻllasak,

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

tenglikni hosil qilamiz. (iv) shartga koʻra oʻng tomondagi ikki oʻchovli integral nolga teng. Demak D sohada yotuvchi ixtiyoriy L yopiq kontur uchun

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi degan xulosaga kelamiz. ►

Shunday qilib, $\int_{AB} Pdx + Qdy$ integralning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaslik sharti sifatida (i), (iii) va (iv) shartlardan ixtiyoriy birini olish mumkin ekan. Lekin ular orasida (13.33) tenglik bilan aniqlanadigan (iv) shart foydalanishga qulay va bajarilishini tekshirish oson. Shuning uchun biz ana shu shartni integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaslik sharti deb qabul qilamiz.

Endi (13.32) tenglik bilan aniqlanuvchi integralni hisoblaymiz. (13.33) shart bajarilgan bo‘lsin. U holda 13.4-Teoremaga ko‘ra

$$P(x, y)dx + Q(x, y) = dF(x, y)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $F(x, y)$ funksiya mavjud bo‘ladi. Shuning uchun

$$\begin{aligned} I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} dF(x, y) = \\ &= F(x, y)|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1), \end{aligned}$$

ya’ni

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) \quad (13.36)$$

tenglikni hosil qilamiz. (13.36) formula to‘la differensialning egri chiziqli integrali uchun *umumlashgan Nyuton-Lebnis formulasi* deb ataladi.

(13.34) shartni qanoatlantiruvchi $F(x, y)$ funksiyaning

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, s)ds \quad (13.37)$$

formula yordamida topiladi. Bu yerda (x_0, y_0) boshlang‘ich nuqta sifatida D sohaning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

L fazoviy egri chiziqli bo'yicha

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

egri chiziqli integral uchun xuddi shu singari natijalar o'rinli. Bunda egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu shart bajarilganda $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz$ integral

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1)$$

formula bilan hisoblanadi. O'ng tomondagi $F(x, y, z)$ funksiya

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, s, z_0)ds + \int_{z_0}^z R(x, y, l)dl$$

formulaga ko'ra aniqlanadi.

13.11-Misol. $I = \int_{(2,2)}^{(3,4)} 2xydx + x^2dy$ integralni hisoblang.

► Bu yerda $P = 2xy, Q = x^2, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. 13.4-Teoremaga ko'ra integral

integrallash yo'liga bog'liq emas. Integrallash yo'li sifatida $y = 2x - 2$ to'g'ri chiziqni olish ham mumkin, yoki (13.36) formuladan foydalanish mumkin. Dastlab boshlang'ich nuqta sifatida (1,1) nuqtani olib, (13.37) formulaga ko'ra

$$F(x, y) = \int_1^x 2t \cdot 1dt + \int_1^y x^2 ds = x^2y - 1$$

funksiyani topamiz va nihoyat (13.36) formuladan integralning

$$I = \int_{(2,2)}^{(3,4)} 2xydx + x^2dy = (x^2y - 1)|_{(2,2)}^{(3,4)} = 28$$

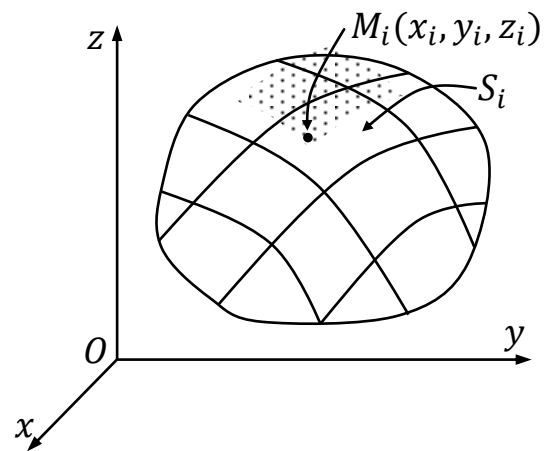
qiymatini topdik. ◀

13.9. Birinchi tur sirt integrali

Asosiy tushunchalar. Ikkin o'lchovli integralning umulashtirilishi natijasida sirt integrali yuzaga keladi. Bu umumlashtirilish sirt yuzining ta'rifiga asoslanib quriladi.

Agar σ sirtni aniqlovchi $z = z(x, y)$ funksiya uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, bu sirtni biz *silliqlik sirt* deb ataymiz. σ sirt chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan sillikli sirtlardan tashkil topgan bo'lsa, u *bo'lakli sillikli sirt* deb ataladi. Silliqlik sirtning ixtiyoriy ichki nuqtasida sirtning *urinma va normal tekisliklari* mavjud.

$Oxyz$ fazoning yuzasi S ga teng bo'lgan σ sirtning nuqtalarida uzluksiz $f(x, y, z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. σ sirtni yuzalari ΔS_i ga teng bo'lgan n ta $S_1, S_2, \dots, S_n$ qismga ajratamiz va ularning diametrlarini d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) orqali belgilaymiz. Har bir S_i qismda ixtiyoriy ravishda bittadan $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz (13.13-rasm) va



13.13-rasm

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (13.38)$$

yig'indini tuzamiz.

Bu yigindi $f(x, y, z)$ funksiya uchun S sirt boyicha *integral yig'indi* deb ataladi.

13.3-Ta'rif. Agar $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ eng katta diametr nolga intilganda (13.38) integral yig'indi chekli limitga intilsa va bu limit σ sirtni S_i qismlarga bo'lish usuliga va bu qismlarda $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, u $f(x, y, z)$

funksiyaning σ sirt bo'yicha I-tur sirt integrali deb ataladi va $\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds$ orqali belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \quad (13.39)$$

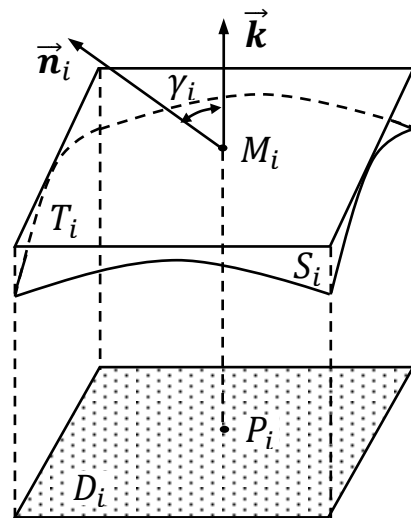
I-tur sirt integralining mavjudligi va uni hisoblash.

13.5-Teorema. Agar $z = z(x, y)$ tenglama bilan berilgan σ sirt silliq, $f(x, y, z)$ funksiya esa bu sirtida uzluksiz bo'lsa, $f(x, y, z)$ funksiyaning bu sirt bo'yicha I-tur sirt integrali mavjud va

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \quad (13.40)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda D integrallash sohasi σ sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi.

◀ σ sirtini $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ qismlarga ajratamiz. D_i orqali S_i qismaniy sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasini belgilaymiz. Natijada σ sirtning Oxy tekislikdagi D proyeksiyasi n ta $D_1, D_2, \dots, D_n$ qismlarga ajraladi. D_i elementar sohada ixtiyoriy $P_i(x_i, y_i)$ nuqtani tanlaymiz va bu nuqtadan Oxy tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq chiqaramiz.



13.14-rasm

Bu to'g'ri chiziq σ sirtini S_i qismaniy sirtning $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtasida kesib o'tadi. Ana shu M_i nuqta orqali σ sirtga urinma tekislik o'tkazamiz (σ sirt silliq bo'lganligi uchun bunday urinma tekislik mavjud). Bu tekislikning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi D_i elementar soha bo'ladigan T_i qismini qaraymiz. S_i, T_i va D_i elementar qismlarning yuzalarini mos ravishda $\Delta S_i, \Delta T_i$ va ΔD_i orqali belgilaymiz. σ sirtini S_i qismlarga yetarlicha kichik qilib bo'lganda

$$\Delta T_i \approx \Delta S_i \quad (13.41)$$

deb hisoblash mumkin.

γ_i orqali Oz o'q bilan sirtning M_i nuqtadagi $\vec{n}_i$ normali orasidagi o'tkir burchakni belgilasak

$$\Delta T_i \cdot \cos \gamma_i = \Delta D_i \quad (13.42)$$

tenglik o'rinli bo'ladi (D_i soha T_i sohaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi).

M_i nuqtadagi urinma tekislik tenglamasi ((7.14) formulaga ko'ra)

$$z'_x(x_i, y_i) \cdot (x - x_i) + z'_y(x_i, y_i) \cdot (y - y_i) - (z - z_i) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi, shuning uchun $\vec{n}_i$ normal $\{z'_x(x_i, y_i), z'_y(x_i, y_i), -1\}$ koordinatalarga ega bo'ladi. U holda γ_i o'tkir burchak $\vec{k} = \{0, 1, 1\}$ va $\vec{n}_i = \{z'_x(x_i, y_i), z'_y(x_i, y_i), -1\}$ vektorlar orasidagi burchak bo'ladi va demak

$$\cos \gamma_i = \frac{\vec{k} \vec{n}_i}{|\vec{k}| |\vec{n}_i|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)}}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikni (13.42) tenglikka qo'llasak

$$\Delta T_i = \sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)} \Delta D_i \quad (13.43)$$

tenglik hosil bo'ladi.

(13.41) tenglikni inobatga olgan holda (13.43) formulani (13.39) formulaning o'ng tomoniga qo'yamiz, z_i ni esa $z(x_i, y_i)$ bilan almashtiramiz. S_i qisman sirtlarning eng katta d diametri nolga intilganda D_i sohalarning ham diametrlari nolga intilishi ravshan. Shuning uchun bu almashtirishlardan song eng katta d diametrni nolga intiltirsak σ sirt bo'yicha sirt integralini bu sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi bo'yicha ikki o'lchavli integral orqali ifodalovchi (13.40) tenglik hosil bo'ladi.

Bu integrallardan birining mavjudligi ikkinchisining ham mavjudligini keltirib chiqaradi. ►

Agar σ sirt $y = y(x, z)$ yoki $x = x(y, z)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, (13.40) formula mos ravishda

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_1} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz$$

va

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_2} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda D_1 va D_2 sohalar σ sirtning mos ravishda Oxz va Oyz tekisliklardagi proyeksiyalari.

I-tur sirt integralining xossalari. I-tur sirt integrali quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgaras ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\iint_{\sigma} c \cdot f(x, y, z) ds = c \cdot \iint_{\sigma} f(x, y, z) ds \quad (c = \text{const}).$$

2. Ikkita funksiya yig'indisining sirt integrali bu funksiyalar sirt integrallarining yig'indisiga teng:

$$\iint_{\sigma} (f(x, y, z) + g(x, y, z)) ds = \iint_{\sigma} f(x, y, z) ds + \iint_{\sigma} g(x, y, z) ds.$$

3. Agar σ sirt faqat chegaralarida umumiy nuqtalarga ega bo'ladigan va $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ bo'ladigan qilib ikkita σ_1 va σ_2 qismlarga ajratilsa,

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{\sigma_1} f(x, y, z) ds + \iint_{\sigma_2} f(x, y, z) ds$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4. Agar σ sirtida $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa,

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds \leq \iint_{\sigma} g(x, y, z) ds$$

bo'ladi.

5. $\iint_{\sigma} ds = S$, bu yerda S berilgan σ sirtning yuzi.

$$6. \left| \iint_{\sigma} f(x, y, z) ds \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y, z)| ds.$$

7. Agar $f(x, y, z)$ funksiya σ sirtida uzluksiz bo'lsa, bu sirtida

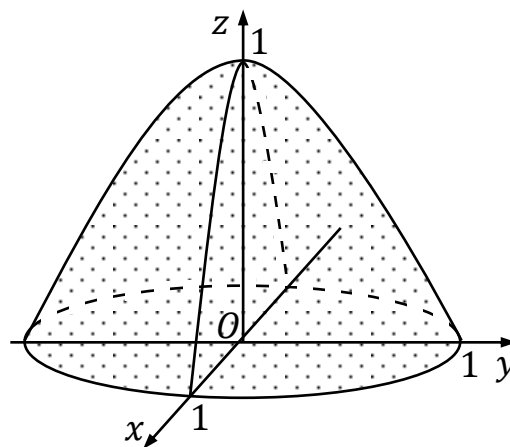
$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) ds = f(x_c, y_c, z_c) \cdot S$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $C(x_c, y_c, z_c)$ nuqta mavjud (o'rta qiymat haqidagi teorema).

Bu xossalarning isboti bevosita (13.40) tenglikdan va ikki o'lchovli integralning xossaligidan kelib chiqadi. Shuning uchun biz ularni keltirib o'tirmaymiz.

13.12-Misol. $\iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} ds$ integralni hisoblang, bu yerda σ – sirt $z = 1 - x^2 - y^2$ aylanma paraboloidning $z = 0$ tekislik bilan kesib olingan qismi (13.15-rasm).

► $z = 1 - x^2 - y^2$ tenglama bilan berilgan σ sirt Oxy tekislikka $x^2 + y^2 = 1$ aylana bilan chegaralangan D sohaga proyeksiyalanadi (paraboloid tenglamasida $z = 0$ deb olinsa aylana tenglamasi hosil bo'ladi). Demak D soha $x^2 + y^2 \leq 1$ doiradan iborat ekan.



13.15-rasm

Bu doirada $z = 1 - x^2 - y^2$ funksiya va uning $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$ hosilalari uzluksiz. Shuning uchun (13.40) formulani qo'llash mumkin:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} ds &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy = \\ &= \iint_D (1 + 4x^2 + 4y^2) dxdy. \end{aligned}$$

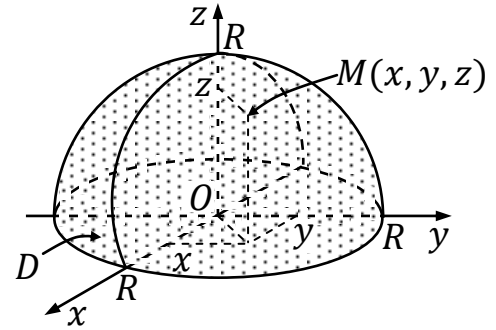
So'ngi integralda $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ deb qutb koordinatalariga o'tamiz:

$$\begin{aligned}\iint_D (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4r^2) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \right]_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Agar σ sirt nuqtalarida biror massa $\mu = \mu(P) \geq 0$ sirt zichligi bilan taqsimlangan bo'lsa, $\iint_{\sigma} \mu(P) ds$ integralni bu *sirtning* m massasi deb talqin qilish mumkin.

13.13-Misol. Radiusi R ga teng bo'lgan yarim sferaning $M(x, y, z)$ nuqtadagi sirt zichligi $\mu(M) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tenglik bilan aniqlansa, sirtning m massasini toping.

► 13.16-rasmda radiusi R ga teng bo'lgan $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ yarim sfera tasvirlangan. Bu yarim sferaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ doiradan iborat bo'ladi. Sirtning massasini (13.40) formulaga ko'ra hisoblaymiz. Dastlab z'_x va z'_y hosilalarni topsak:



13.16-rasm

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

bo'ladi. Bu hosilalarni (13.40) formulaga qo'yib m massani topamiz:

$$\begin{aligned}m = \iint_{\sigma} \mu(P) ds &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= R \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy.\end{aligned}$$

So'ngi integralda qutb koordinatalariga o'tamiz:

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} r = R \sin t, dr = R \cos t dt \\ r = 0, t = 0, r = R, t = \pi/2 \end{matrix} \right| = 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 t R \cos t}{\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}} dt =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2\pi R^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2 R^2}{2}.$$

Demak,

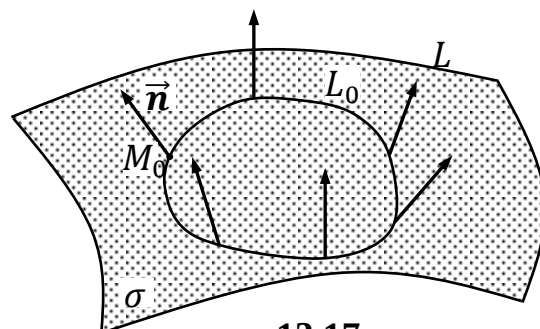
$$m = R \cdot \frac{\pi^2 R^2}{2} = \frac{\pi^2 R^3}{2}. \blacktriangleleft$$

13.10. Ikkinchi tur sirt integrali

Bir tomonli va ikki tomonli sirtlar. Sirtning tomoni degan muhim tushunchani kiritamiz. Ba'zi hollarda bu tushunchani oson tasavvur qilish mumkin. Agar sirt $z = f(x, y)$ ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning yuqori va quyi qismi haqida gapirish mumkin. *Yopiq sirt* fazoda biror sohani chegaralab turadi va bu holda sirtning sohaga qaragan ichki qismi va tashqariga qaragan tashqi qismi bo'ladi.

Ana shu intuitiv tasavvurlar asosida bir tomonli va ikki tomonli sirtlarga ta'rif beramiz.

L bo'lakli silliq kontur bilan chegaralangan silliq σ sirtni qaraymiz. Demak sirtning ixtiyoriy nuqtasida urinma tekislik mavjud va u urinish nuqtasi bilan birga uzluksiz o'zgaradi (13.17-rasm).



13.17-rasm

Sirtida birorta M_0 nuqta olamiz va bu nuqta orqali $\vec{n}$ normal o'tkazamiz, bunda normal uchun ikkita yo'nalishdan biri tanlanadi (ular bir-biridan yo'naltiruvchi kosinuslarining ishorasi bilan farqlanadi). Sirt bo'ylab M_0 nuqtadan o'tuvchi va L sirt chegarasi bilan kesishmaydigan uzluksiz L_0 yopiq kontur o'tkazamiz. Boshlang'ich holati M_0 nuqta bo'ladigan M nuqtani L_0 yopiq kontur bo'ylab uzluksiz harakatlantiramiz. Bunda M nuqtada o'tkazilgan normal ham o'z holatini uzluksiz

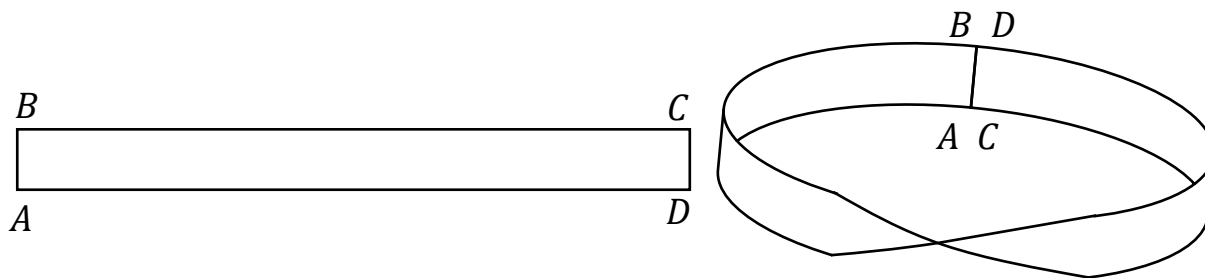
o'zgartiradi. M nuqta o'zining M_0 boshlang'ich holatga qaytganda ikki hol yuz berishi mumkin: yoki normal o'zining boshlang'ich holatdagi yo'nalishiga qaytadi, yoki normal boshlang'ich holatga qarama-qarshi yo'nalishga qaytadi.

13.4-Ta'rif. Agar silliq σ sirt yotuvchi M_0 nuqta orqali o'tuvchi, sirt chegarasi bilan kesishmaydigan ixtiyoriy yopiq kontur bo'ylab M nuqta M_0 boshlang'ich holatdan chiqib yana shu M_0 boshlang'ich holatga qaytganda birlik normal vektor o'z yo'nalishini o'zgartirmasa, sirt *ikki tomonli* yoki *oriyentirlangan sirt* deb ataladi.

13.5-Ta'rif. Agar silliq σ sirt yotuvchi M_0 nuqta orqali o'tuvchi sirt chegarasi bilan kesishmaydigan birorta yopiq kontur bo'ylab M nuqta M_0 boshlang'ich holatdan chiqib yana shu M_0 boshlang'ich holatga qaytganda birlik normal vektor yo'nalishi qarama-qarshi tomonga o'zgarsa, sirt *bir tomonli* yoki *oriyentirlanmagan sirt* deb ataladi.

Ikki tomonli sirtga misol sifatida tekislikni, ellipsoidni, umuman olganda $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan ixtiyoriy sirtni keltirish mumkin, bu yerda $f(x, y)$, f'_x , f'_y , funksiyalar tekislikning biror D sohasida uzluksiz funksiyalardir.

Bir tomonli sirtga Myobius lentasi deb ataluvchi sirtni misol keltirish mumkin. Bu sirt $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak shakldagi lentani A nuqta C nuqta bilan, B nuqta esa D nuqta bilan ustma-ust tushadigan qilib yelimlash orqali hosil qilinadi (13.18-rasm).



13.18-rasm

Shunday qilib, ikki tomonli sirt yotuvchi M_0 nuqta orqali o'tuvchi, sirt chegarasi bilan kesishmaydigan ixtiyoriy yopiq kontur bo'ylab M nuqta M_0 boshlang'ich holatdan chiqib yana shu M_0 boshlang'ich holatga qaytganda birlik normal vektor o'z yo'nalishini o'zgartirmasa, sirt *ikki tomonli* yoki *oriyentirlangan sirt* deb ataladi.

Ikkinchi tur sirt integrali. $z = z(x, y)$ tenglama bilan berilgan σ ikki tomonli silliq sirtida $R(x, y, z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Sirtning ikki tomonidan birini, ya'ni sirt nuqtalaridagi normal yo'nalishlarining birini tanlaymiz. Agar normal Oz o'qi bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, sirtning *yuqori qismi*, o'tmas burchak tashkil qilsa, sirtning *quyi tomoni* tanlangan deyiladi. σ sirtning tanlangan tomonini n ta $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ elementar sohalarga ajratamiz. σ_i qismaniy sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasini D_i orqali belgilaymiz. Har bir σ_i qismaniy sirtida ixtiyoriy ravishda $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz va

$$\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad (13.44)$$

yig'indini tuzamiz, bu yerda Δs_i yuqorida zikr etilgan D_i sohaning yuzi bo'lib, agar sirtning yuqori tomoni tanlangan bo'lsa u "plyus" ishora bilan, quyi qismi tanlangan bo'lsa "minus" ishora bilan olinadi. (13.44) yig'indi $R(x, y, z)$ funksiyaning σ sirt bo'yicha *integral yig'indisi* deb ataladi.

σ_i elementar sohalar d_i diametrlarining eng kattasini λ orqali belgilaymiz:

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i.$$

13.6-Ta'rif. Agar λ eng katta diametr nolga intilganda (13.44) integral yig'indi chekli limitga intilsa va bu limit σ sirtning σ_i qismlarga bo'lish usuliga va bu qismlardagi nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, u $R(x, y, z)$ funksiyaning σ sirt tanlangan tomoni bo'yicha *II-tur sirt integrali* deb ataladi va

$$I = \iint_{\sigma} R(M) dx dy = \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$$

orqali belgilanadi. Bu holda $R(x, y, z)$ funksiya x va y o'zgaruvchilar bo'yicha σ sirt bo'yicha *integrallanuvchi* deyiladi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad (13.45)$$

σ sirt tanlangan tomoni bo'yicha $P(x, y, z)$ funksiyaning y va z o'zgaruvchilar bo'yicha

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz$$

va $Q(x, y, z)$ funksiyaning z va x o'zgaruvchilar bo'yicha

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dzdx$$

II-tur sirt integrallari xuddi shu singari aniqlanadi.

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dzdx + \iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy \quad (13.46)$$

yig'indi umumlashgan II tur sirt integrali deb ataladi va

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (13.47)$$

orqali belgilanadi.

Ikkinchi tur sirt integralining xossalari. II-tur sirt integralining xossalarini funksiya mos keluvchi hadi misolida qarab chiqamiz.

- 1) Sirt tomoni o'zgarganda integral o'z ishorasini o'gartiradi.
- 2) O'zgaras ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\iint_{\sigma} c \cdot R(x, y, z) dxdy = c \cdot \iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy \quad (c = \text{const}).$$

3) Ikkita integrallanuvchi funksiya yig'indisining II-tur sirt integrali bu funksiylar mos integrallarining yig'indisiga teng:

$$\iint_{\sigma} [R_1(x, y, z) + R_2(x, y, z)] dxdy = \iint_{\sigma} R_1(x, y, z) dxdy + \iint_{\sigma} R_2(x, y, z) dxdy$$

4) Agar σ sirt umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan va $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ bo'ladigan qilib ikkita σ_1 va σ_2 qismlarga ajratilgan bo'lsa,

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dxdy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dxdy$$

kabi bo'ladi.

5) Oz o'qiga parallel bo'lgan ixtiyoriy σ silindrik sirt bo'yicha II-tur sirt integrali nolga teng:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = 0.$$

Ikkinchi tur sirt integralini hisoblash. II-tur sirt integralini hisoblash ikki o'lchovli integralni hisoblashga keltiriladi.

$R(x, y, z)$ funksiya $z = z(x, y)$ tenglama bilan berilgan σ silliq sirtning barcha nuqtalarida uzluksiz, bu yerda $z(x, y)$ berilgan σ sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi bo'lgan D_{xy} sohada uzluksiz funksiya.

σ sirtning nuqtalaridagi normallar Oz o'q bilan o'tkir burchak tashkil qiladigan tomonini olamiz. U holda $\Delta s_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bo'ladi.

$z_i = z(x_i, y_i)$ bo'lganligi uchun (13.44) yig'indi

$$\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \Delta s_i \quad (13.48)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi uzluksiz $R(x, y, z(x, y))$ funksiya uchun D soha bo'yicha integral yig'indi bo'ladi. (13.48) tenglikda σ_i elementar sohalar d_i diametrlarining λ eng kattasi nolga intilganda limitga o'tsak,

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (13.49)$$

x va y o'zgaruvchilar bo'yicha II-tur sirt integralini ikki o'lchovli integral orqali ifodalovchi formulani hosil qilamiz. Agar sirtning ikkinchi tomonini, ya'ni quyi tomoni tanlansa ikki o'lchovli integral "minus" ishora bilan olinadi. Shuning uchun

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (13.50)$$

Xuddi shu singari,

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz, \quad (13.51)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(x, z), z) dzdx, \quad (13.52)$$

tengliklarni yozish mumkin, bu yerda D_{yz} va D_{zx} sohalar σ sirtning mos ravishda Oyz va Oxz tekisliklardagi proyeksiyalari.

(13.51) formulada σ sirt $x = x(y, z)$, (13.52) formulada esa $y = y(x, z)$ tenglama bilan berilgan. Integrallar oldidagi ishoralar bu yerda ham σ sirt tomonining tanlanishiga qarab qo'yiladi ((13.50) formuladagi singari sirt normali Ox (Oy) o'q bilan o'tkir burchak tashkil qilsa "plyus", o'tmas burchak tashkil qilsa "minus" ishora qo'yiladi).

(13.47) umulashgan II-tur sirt integralini hisoblash uchun σ sirtni uchala koordinata tekisliklariga proyeksiyalab, (13.50)-(13.52) formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \\ \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(x, z), z) dzdx \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy \end{aligned}$$

Agar σ yopiq sirt bo'lsa, sirtning tashqi tomoni bo'yicha II-tur sirt integrali $\oint_{\sigma}$ orqali, ichki tomoni bo'yicha esa $\oint_{\sigma-}$ orqali belgilanadi.

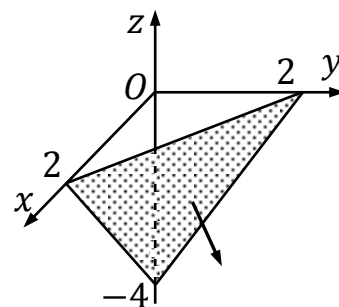
13.14-Misol. $\iint_{\sigma} 2x dydz - 2z dzdx + xy dxdy$ integralni hisoblang, bu yerda σ sirt $2x + 2y - z = 4$ tekislikning V oktantdagi bo'lagining yuqori qismi.

► 13.19-rasmda tekislikning berilgan qismi tasvirlangan. Bu tekislikning normal vektordan iborat bo'ladi va uning yo'naltiruvchi kosinuslari

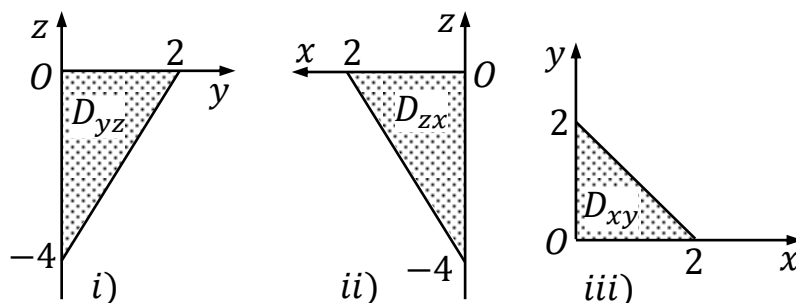
$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{3} > 0, \cos \beta = \frac{2}{3} > 0,$$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{3} < 0$$

kabi bo'ladi. Demak tekislik ko'rsatilgan tomonining normali Ox va Oy o'qlar bilan o'tkir, Oz o'q bilan esa o'tmas burchak tashkil qiladi. Shuning uchun (13.51) va (13.52) formulalardagi ikki o'lchovli integral oldiga "plyus", (13.50) formulada esa "minus" ishora qo'yamiz. Tekislik qaralayotgan qismining tekisliklardagi proyeksiyalari 13.20-rasmlarda tasvirlangan:



13.19-rasm



13.20-rasm

Endi har bir integralni alohida-alohida hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\sigma} 2x dy dz = \iint_{D_{yz}} (4 - 2y + z) dy dz = \int_0^2 dy \int_0^{2y-4} (4 - 2y + z) dz = \\ &= \int_0^2 \left[(4 - 2y)z + \frac{1}{2}z^2 \right]_0^{2y-4} dy = \frac{3}{2} \int_0^2 (4 - 2y)^2 dy = -\frac{1}{4} (4 - 2y)^3 \Big|_0^2 = 16; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\sigma} -2z dz dx = \iint_{D_{zx}} (-2z) dz dx = -\int_0^2 dx \int_0^{2x-4} 2z dz = -\int_0^2 [z^2]_0^{2x-4} dx = \\ &= -\int_0^2 (2x - 4)^2 dx = -\frac{1}{6} (2x - 4)^3 \Big|_0^2 = -\frac{32}{3}; \end{aligned}$$

$$I_3 = \iint_{\sigma} xy dx dy = \iint_{D_{xy}} xy dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} xy dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_0^{2-x} dx =$$

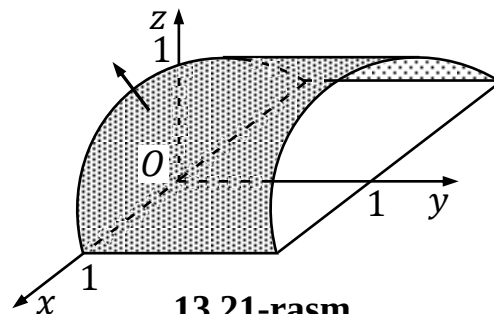
$$= \int_0^2 \frac{1}{2} x(2-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Shunday qilib,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 16 - \frac{32}{3} + \frac{4}{3} = 6\frac{2}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

13.15-Misol. $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy$ integralni hisoblang, bu yerda σ sirt $z = \sqrt{1-x^2}$ sirtning $y = 0$ va $y = 1$ tekisliklar bilan ajratilgan qismining yuqori tomoni (13.21-rasm).

► Mazkur sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ tengsizliklar bilan aniqlangan to'g'ri to'rtburchakdan iborat. U holda berilgan integralni (13.50) formulaga ko'ra hisoblaymiz:



13.21-rasm

$$\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (y^2 + (\sqrt{1-x^2})^2) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (y^2 + 1 - x^2) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{y^3}{3} + y - x^2 y \right) \Big|_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3} - x^2 \right) dx = \left(\frac{4}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2. \quad \blacktriangleleft$$

13.16-Misol. $\oint_{\sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ integralni hisoblang, bu yerda σ sirt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferaning tashqi tomoni.

► Integrallash sirtining uchala koordinata o'qlariga va tekisliklariga nisbatan simmetrikligi tufayli va integral ostidagi ifodaning ko'rinishidan kelib chiqib

$$\oint_{\sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 3 \oint_{\sigma} z dx dy$$

deb olishimiz mumkin. Shuning uchun bitta integralni hisoblash bilan chegaralanamiz. Songi integralni ikkita yarim sharlarning tashqi tomonlari

$$\oiint_{\sigma} z dx dy = \iint_{\sigma_1} z dx dy + \iint_{\sigma_2} z dx dy$$

($\sigma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yuqori va $\sigma_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ quyi yarim shar) bo'yicha integrallar yig'indisi shaklida ifodalash mumkin. Yuqori yarim sharning tashqi tomoni uchun $\cos \gamma > 0$ va demak, (13.50) formulada “plyus” ishora olinadi. Quyi yarim shar uchun $\cos \gamma < 0$ va demak, (13.50) formulada “minus” ishora olinadi, quyi yarim shar tenglamasidagi “minus” ishoraning hisobiga quyi yarim shar boyicha integral yuqori yarim shar bo'yicha integral bilan ham qiymati ham ishorasi boyicha tenglashadi. Shuning uchun $\iint_{\sigma} z dx dy = 2 \iint_{\sigma_1} z dx dy$ bo'ladi, bu yerda integrallash yuqori yarim sharning tashqi tomoni bo'yicha olinmaoqda. Yarim sharning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ doiradan iborat bo'ladi. U holda

$$\iint_{\sigma_1} z dx dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

Ikki o'lchovli integralda qutb koordinatalariga o'tsak,

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r dr = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

Demak,

$$\oiint_{\sigma} z dx dy = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi = \frac{4}{3} \pi.$$

Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallari orasidagi bog'liqlik. II-tur sirt integralini boshqa usul bilan ham keltirib chiqarish mumkin, aniqrog'i, integral ostida maxsus ifodalar turgan I-tur sirt integralidan hosil qilinadi. Orieyentirlangan σ sirtning ixtiyoriy nuqtasidagi normalning yo'naltiruvchi kosinuslarini $\cos \alpha$, $\cos \beta$ va $\cos \gamma$ orqali belgilaymiz. U holda $\Delta s_i \approx \cos \gamma_i \Delta S_i$ taqribiy tenglikni yozish mumkin, bu

yerda ΔS_i yuza σ_i qismiy sirtining yuzi, ΔS_i esa σ_i qismiy sirtining Oxy tekislikdagi D_i proyeksiyasining yuzi, γ_i burchak σ sirtga biror $M_i \in \sigma_i$ nuqtada o'tkazilgan normal bilan Oz o'q tashkil qilgan burchak. Shuning uchun bu taqribiy tenglik o'rniga

$$dxdy = \cos \gamma \cdot ds \quad (13.53)$$

tenglikni yozish mumkin. Xuddi shu singari

$$dxdz = \cos \beta \cdot ds, \quad dydz = \cos \alpha \cdot ds \quad (13.54)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

(13.53), (13.54) formulalarni II-tur sirt integraliga qo'llaymiz, natijada:

1) $R(x, y, z)$ funksiyaning Oxy tekislik bo'yicha II-tur sirt integrali I-tur sirt integrali orqali quyidagi formula yordamida ifodalanadi:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\sigma} R(x, y, z) \cos \gamma ds \quad (13.55)$$

2) $Q(x, y, z)$ funksiyaning Oxz tekislik bo'yicha II-tur sirt integrali I-tur sirt integrali orqali quyidagi formula yordamida ifodalanadi:

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dzdx = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) \cos \beta ds \quad (13.56)$$

3) $P(x, y, z)$ funksiyaning Oyz tekislik bo'yicha II-tur sirt integrali I-tur sirt integrali orqali quyidagi formula yordamida ifodalanadi:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) \cos \alpha ds \quad (13.57)$$

(13.55)-(13.57) formulalarni hadma-had qo'shib sirtning tanlangan tomoni bo'yicha II-tur sirt integralini I-tur sirt integrali bo'yicha ifodalovchi

$$\iint_{\sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \quad (13.58)$$

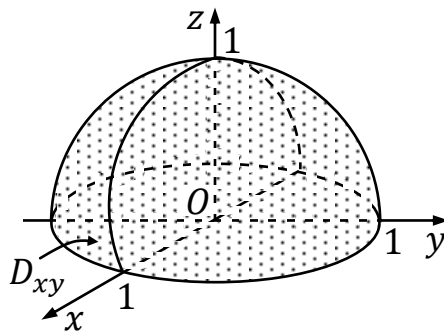
formulani hosil qilamiz.

13.17-Misol. $\iint_{\sigma} z \cos \gamma \, ds$ integralni hisoblang, bu yerda σ sirt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferaning Oxy tekislikdan yuqorida joylashgan qismining tashqi tomoni, γ esa σ sirt normalining Oz o'qi bilan tashkil qilgan o'tkir burchagi (13.22-rasm).

► Sirt integrallarini bog'lovchi (13.53) formulaga ko'ra,

$$\iint_{\sigma} z \cos \gamma \, ds = \iint_{\sigma} z \, dx \, dy$$

bo'ladi. σ sirtning Oxy tekislikdagi D_{xy} proyeksiyasi $D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ doiradan iborat. Shuning uchun (13.50) formulaga ko'ra,



13.22-rasm

$$\iint_{\sigma} z \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

tenglikka ega bo'lamiz. O'ng tomondagi ikki o'lchovli integralda qutb koordinatalariga o'tamiz:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Ikkinchi tur sirt integralining fizik ma'nosi. Bir birlik vaqt mobaynida berilgan σ sirt orqali sizib o'tadigan suyuqlik miqdorini (ba'zan bu holda σ sirt orqali suyuqlik sarfi ham deb yuritiladi) topish masalasini qaraymiz. Suyuqlikning zichligi o'zgarmas, suyuqlik sirt orqali sizib o'ta oladi va suyuqlikning oqishi barqaror, ya'ni M nuqtadagi tezlik vektori $\vec{v}(M)$ vaqt bo'yicha o'zgarmas deb faraz qilamiz.

Agar σ sirt yuzi S ga teng bo'lgan tekislik qismi, $\vec{v}(M)$ vektor esa bu tekislikka perpendikulyar bo'lsa, u holda bir birlik vaqt mobaynida σ sirt orqali sizib o'tgan suyuqlik hajmi $V = |\vec{v}|S$ ga teng bo'ladi. Agar $\vec{v}(M)$ vektor tekislik normali bilan φ burchak tashkil qilsa, $V = |\vec{v}|S \cos \varphi$ bo'ladi. Tekislik normali vektorining

yoʻnalishiga qarab suyuqlik sarfi musbat, manfiy, xususiy holda nol ham boʻlishi ravshan.

σ silliq sirt va uning ixtiyoriy $M(x, y, z) \in \sigma$ nuqtasida $\vec{v}(M) = \vec{v}(x, y, z)$ vektor funksiya yordamida tezlik vektori aniqlangan boʻlsin. σ sirtning yuzlari Δs_i va diametrlari d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) boʻlgan n ta $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ qismlarga boʻlamiz va har bir qismaniy sirtida ixtiyoriy $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz. d_i diametrlarning kichik qiymatlarida σ_i qismaniy sirtning uning σ sirtga M_i nuqtada oʻtkazilgan *urinma tekislikdagi proyeksiyasi* bilan almashtirish mumkinligi ravshan. Bundan tashqari qismaniy sirtida suyuqlik tezligi vektorini oʻzgarmas va $\vec{v}(M_i)$ ga teng deb faraz qilamiz. Bu qilingan farazlarda sirtga M_i nuqtada oʻtkazilgan normalning $\vec{n}(M_i)$ birlik vektori yoʻnalishida σ_i qismaniy sirt orqali suyuqlik sarfining umumiy hajmi taqriban

$$V_i \approx |\vec{v}(M_i)| \cos \varphi_i \Delta s_i$$

qiymatga teng boʻladi, bu yerda φ_i suyuqlik tezligi $\vec{v}(M_i)$ vektori bilan, $\vec{n}(M_i)$ birlik vektori orasidagi burchak. Butun sirt orqali suyuqlik sarfining umumiy hajmi

$$V \approx \sum_{i=1}^n |\vec{v}(M_i)| \cos \varphi_i \Delta s_i \quad (13.59)$$

yigʻindi qiymatiga taqriban teng boʻladi.

σ sirtning σ_i qismaniy sirtlarga boʻlishlarda ularning oʻlchamlari qanchalik kichik boʻlsa, soʻngi tenglikdagi xatolik shunchalik kichik boʻlishi ravshan. Shuning uchun,

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{v}(M_i)| \cos \varphi_i \Delta s_i \quad (13.60)$$

deb olish mumkin, bu yerda $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

$\cos \alpha(M_i)$, $\cos \beta(M_i)$, $\cos \gamma(M_i)$ birlik $\vec{n}(M_i)$ vektorning yoʻnaltiruvchi kosinuslari boʻlsin, yaʼni

$$\vec{n}(M_i) = \cos \alpha(M_i) \vec{i} + \cos \beta(M_i) \vec{j} + \cos \gamma(M_i) \vec{k}$$

va $P(M), Q(M), R(M)$ lar esa $\vec{v}(M)$ suyuqlik tezligi vektorining koordinatalari bo'lsin:

$$\vec{v}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k} \quad (13.61)$$

U holda:

$$|\vec{v}(M_i)| \cos \varphi_i = \mathbf{v}(M_i) \mathbf{n}(M_i) = P(M_i) \cos \alpha(M_i) + \\ + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i), \quad M_i \in \sigma_i.$$

Bu tenglikni (13.60) tenglikka qo'y sak, I-tur sirt integralining ta'rifiga ko'ra

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(M_i) \cos \alpha(M_i) + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i)) \Delta s_i = \\ = \iint_{\sigma} (P(M) \cos \alpha(M) + Q(M) \cos \beta(M) + R(M) \cos \gamma(M)) ds$$

tenglikni hosil qilamiz. Shuning uchun (13.58) formulani inobatga olsak, σ sirt orqali (13.61) ko'rinishdagi tezlik vektoriga ega bo'lgan suyuqlik oqimining vaqt birligidagi umumiy hajmi

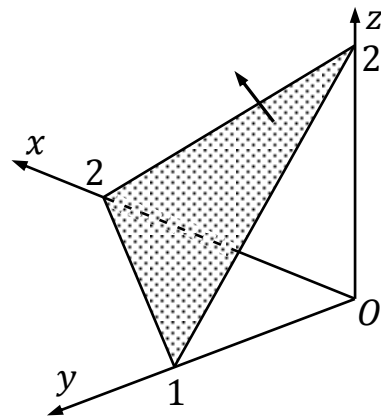
$$V = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (13.62)$$

II-tur sirt integrali bilan hisoblanadi.

13.18-Misol. $x + 2y + z = 2$ tekislikning birinchi oktantdagi qismi bo'ylab $\vec{v} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ tezlik vektoriga ega bo'lgan suyuqlik oqimining vaqt birligida oqib o'tgan suyuqlik hajmini toping (tekislik normali Oz o'q bialn o'tkir burchak tashkil qiladi).

► Sirtning Oxy , Oyz va Ozx tekisliklardagi proyeksiyalari mos ravishda $D_{xy} = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq (2 - x)/2\}$, $D_{yz} = \{(y, z): 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - 2y\}$, $D_{zx} = \{(x, z): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - x\}$ uchburchaklardan iborat bo'ladi (13.23-rasm). Oqib o'tgan suyuqlik hajmini (13.62) formulaga ko'ra hisoblaymiz. Bu yerda $P(x, y, z) = -x$, $Q(x, y, z) = 2y$, $R(x, y, z) = z$ bo'ladi. (13.62) integral uchta integralning yig'indisidan iborat va ularni alohida-alohida hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_{\sigma} -x dydz = \iint_{D_{yz}} (2y + z - 2) dydz \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (2y + z - 2) dz = \\
 &= \int_0^1 \left[(2y - 2)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-2y} dy =
 \end{aligned}$$



13.23-rasm

$$= \int_0^1 \left(-\frac{(2y-2)^2}{2} \right) dy = -\frac{(2y-2)^3}{12} \Big|_0^1 = -\frac{2}{3};$$

$$I_2 = \iint_{\sigma} 2y dzdx = \iint_{D_{zx}} (2-x-z) dzdx = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2-x-z) dz =$$

$$= \int_0^2 \left[(2-x)z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{2} dx = -\frac{(2-x)^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3};$$

$$I_3 = \iint_{\sigma} z dx dy = \iint_{D_{xy}} (2-x-2y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{(2-x)/2} (2-x-2y) dy =$$

$$= \int_0^2 \left[((2-x)y - y^2) \Big|_0^{(2-x)/2} \right] dx = \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4} dx = -\frac{(2-x)^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Bu integrallarni qoʻshib, vaqt birligida sirt orqali oqib oʻtgan suyuqlik hajmini topamiz:

$$V = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

13.11. Ostrogradskiy-Gauss formulasi

Yopiq sirt boʻyicha II-tur sirt integrali bilan bu sirt chegaralagan hajm boʻyicha olingan uch oʻlchovli integral orasidagi bogʻliqlikni quyidagi teorema oʻrnatadi:

13.6-Teorema. Agar $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiyalar va ularning xususiy hosilalari biror fazoviy V sohada uzluksiz bo'lsa, quyidagi formula o'rinli

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (13.63)$$

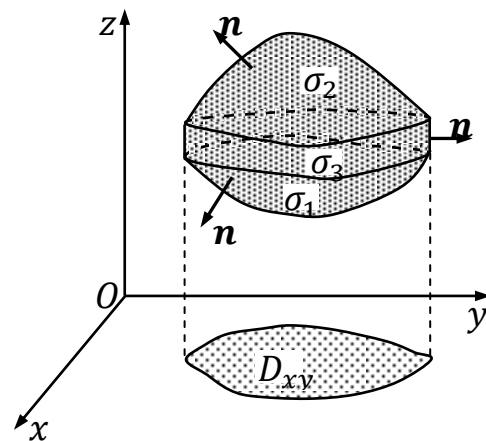
bu yerda σ fazoviy V sohaning chegarasi va integrallash σ sirtning tashqi tomoni bo'yicha olinadi.

(13.63) formula *Ostrogradskiy-Gauss* formulasi deb ataladi.

◀ V soha quyidan $z = z_1(x, y)$ tenglama bilan aniqlanadigan σ_1 sirt bilan, yuqoridan esa tenglamasi $z = z_2(x, y)$ bo'lgan σ_2 sirt bilan, yon tomondan yasovchilari Oz o'qqa parallel bo'lgan σ_3 sirt bilan chegaralangan bo'lsin, bu yerda $z_1(x, y)$ va $z_2(x, y)$ funksiyalar V sohaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi bo'lgan D_{xy} sohada uzluksiz va uning nuqtalarida $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ deb faraz qilamiz (13.24-rasm).

$R(x, y, z)$ funksiyaga mos keluvchi uch o'lchovli integralni qaraymiz:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \\ &\quad - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$



13.24-rasm

O'ng tomondagi ikki o'lchovli integrallarni (13.50) formulalarga ko'ra σ_1 va σ_2 sirtlar bo'yicha II-tur sirt integrallari bilan almashtiramiz (σ_1 sirt normali Ox o'q bilan o'tmas burchak tashkil qilganlini sababli "minus" ishora olamiz). Natijada

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma_2} R dx dy + \iint_{\sigma_1} R dx dy$$

tenglikka ega bo'lamiz.

II-sirt integrallarining 5) xossasiga ko'ra σ_3 sirtning tashqi tomoni bo'yicha

olingan $\iint_{\sigma_3} R dx dy$ integral nolga teng. Shuning uchun uni so'ngi tenglikning o'ng tomoniga qo'shib

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma_2} R dx dy + \iint_{\sigma_1} R dx dy + \iint_{\sigma_3} R dx dy$$

tenglikni yozish mumkin. $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$ ekanligidan

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\sigma} R dx dy \quad (13.64)$$

kelib chiqadi.

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oint_{\sigma} Q dx dz \quad (13.65)$$

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oint_{\sigma} P dy dz \quad (13.66)$$

tengliklar ham xuddi shu singari isbotlanadi.

(13.64), (13.65) va (13.66) formulalarni hadma-had qo'shib (13.63) Ostrogradskiy-Gauss formulasini hosil qilamiz. ►

13.19-Misol. $\oint_{\sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy$ integralni hisoblang, bu yerda σ sirt $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tekisliklar bilan chegaralangan piramidaning tashqi tomoni.

► Ostrogradskiy-Gauss formulasiga ko'ra:

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3z dx dy &= \iiint_V (1 + 2 + 3) dx dy dz = 6 \iiint_V dx dy dz = \\ &= 6 \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz = 6 \int_0^2 dx \int_0^{2-x} [z]_0^{2-x-y} dy = 6 \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2 - x - y) dy = \\ &= 6 \int_0^2 \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx = 6 \int_0^2 \frac{1}{2} (2-x)^2 dx = 3 \left(-\frac{(2-x)^3}{3} \right)_0^2 = 8. \end{aligned}$$

qiymatni hosil qildik. ◀

13.20-Misol. $\oiint_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ integralni hisoblang, bu yerda σ sirt $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sferaning tashqi tomoni.

► Ostrogradskiy-Gauss formulasiga ko‘ra,

$$\oiint_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$$

uch o‘lchovli integralda sferik koordinatalarni kiritib

$$3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12\pi\rho^5}{5}$$

qiymatga ega bo‘lamiz. ◀

13.12. Stoks formulasi

Stoks formulasi sirt va egri chiziqli integrallar o‘rtasida aloqa o‘rnatadi. Ostrogradskiy-Grin, Ostrogradskiy-Gauss formulalari singari Stoks formulasi ham ko‘p tadbirlarga ega.

13.7-Teorema. Agar $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ va $R(x, y, z)$ funksiyalar va ularning birinchi tartibli xususiy hosilalari oriyentirlangan σ sirt nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx = \\ = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \quad (13.67) \end{aligned}$$

tenglik orinli bo‘ladi, bu yerda chap tomondagi II-tur sirt integralida integrallash σ sirtning yuqori qismi bo‘yicha, L – egri chiziq σ sirtning chegarasi va integrallash musbat yo‘nalishda olib boriladi (ya’ni L egri chiziqni aylanib chiqish soat strelkasi harakatiga qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘ladi).

(13.67) formula *Stoks formulasi* deb ataladi.

◀ σ sirt $z = z(x, y)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin, $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ funksiyalar σ sirtning

Oxy tekislikdagi proyeksiyasi bo'lgan D_{xy} sohada uzluksiz va D_{xy} sohaning chegarasi l egri chiziq bo'lsin. Oz o'qiga parallel bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq σ sirtini ko'pi bilan bitta nuqtada kesib o'tadi deb faraz qilamiz (13.25-rasm).

σ sirtning yuqori tomonini tanlaymiz. Dastlab $\oint_L P(x, y, z) dx$ integralni qaraymiz. $P(x, y, z)$ funksiyaning L egri chiziq nuqtalaridagi qiymati

$P(x, y, z(x, y))$ funksiyaning l egri chiziq nuqtalaridagi qiymatiga teng. Shuning uchun

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx.$$

O'ng tomondagi integralga Ostrogradskiy-Grin formulasini qo'llab

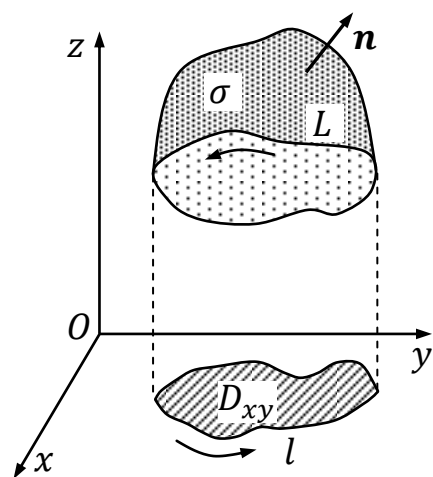
$$\begin{aligned} \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx &= \iint_{D_{xy}} \left(0 - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) \right) dx dy = \\ &= - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (13.68)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda integral ostidagi funksiya $P(x, y, z)$ funksiya z o'rniga $z(x, y)$ qo'yilgandan song y bo'yicha xususiy hosila olish orqali hosil qilingan.

σ sirtning yuqori tomoni bo'lganligi uchun (ya'ni $\cos \gamma > 0$), normal $\{-z'_x, -z'_y, 1\}$ koordinatalarga ega bo'ladi. Ma'lumki yo'naltiruvchi kosinuslar mos koordinatalarga proporsional, shuning uchun

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y.$$

Bu tenglikni (13.68) tenglikning o'ng tomoniga qo'llab



13.25-rasm

$$\oint_l P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy =$$

$$= - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) \frac{1}{\cos \gamma} dx dy$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Agar (13.50), (13.53) va (13.55) formulalarni inobatga olsak

$$\oint_l P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) ds$$

tenglik hosil bo‘ladi. O‘ng tomondagi integral I-tur sirt integralidan iborat, unga yana (13.55) va (13.56) formulalarni qo‘llab,

$$\oint_L P(x, y, z) dx = - \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx \quad (13.69)$$

II-tur egri chiziqli integralni II-tur sirt integrali orqali ifodaladik.

Xuddi shuningdek (13.67) tenglikning o‘ng tomonidagi $\oint_L Q dy$, $\oint_L R dz$ integrallar uchun

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = - \iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz + \iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (13.70)$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = - \iint_{\sigma} \frac{\partial R}{\partial x} dz dx + \iint_{\sigma} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz \quad (13.71)$$

tenglidlarni yozish mumkin. (13.69), (13.70) va (13.71) tengliklarni hadma-had qo‘shib (13.67) Stoks formulasini hosil qilamiz. ►

13.21-Misol. $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$ integralni Stoks formulasi yordamida hisoblang,

bu yerda L egri chiziq $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ tenglamalar bilan aniqlangan aylana, σ sirt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z > 0$) yarim sferaning yuqori qismidan iborat.

► $P(x, y, z) = x^2 y^3$, $Q(x, y, z) = 1$ va $R(x, y, z) = z$ bo‘lganligi uchun

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

bo'ladi. σ sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ doiradan iborat. U holda Stoks formulasiga ko'ra

$$\oint_L x^2y^3dx + dy + zdz = -3 \iint_{\sigma} x^2y^2dxdy = -3 \iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy$$

bu yerda $D_{xy}^* = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ deb doiraning chorak qismini belgilaymiz va so'ngi integral ostidagi funksiyaning ko'rinishidan, hamda integrallash sohasining koordinata boshi va o'qlariga nisbatan simmetrikligini inobatga olsak

$$-3 \iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy = -12 \iint_{D_{xy}^*} x^2y^2dxdy$$

bo'ladi. Bu yerda qutb koordinatalariga o'tamiz:

$$\begin{aligned} -12 \iint_{D_{xy}^*} x^2y^2dxdy &= -12 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin^2 \varphi r dr = \\ &= -12 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^5 dr = -3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{8}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Nazorat savollari

1. $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ parametrik tenglama bilan berilgan L egri chiziq qanday shart bajarilganda silliq egri chiziq deb ataladi?
2. I-tur egri chiziqli integralga ta'rif bering.
3. Qanday shart bajarilganda $f(x, y)$ funksiyaning L egri chiziq bo'yicha I-tur egri chiziqli integrali mavjud bo'ladi?
4. I-tur egri chiziqli integralning xossalarini sanab o'ting.
5. L egri chiziq $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsa, $f(x, y)$ funksiyaning L egri chiziq bo'yicha I-tur egri chiziqli integralini

hisoblash formulasini keltiring.

6. L egri chiziq $y = y(x), a \leq x \leq b$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, $f(x, y)$ funksiyaning L egri chiziq bo'yicha I-tur egri chiziqli integralini hisoblash formulasini keltiring.

7. II-tur egri chiziqli integralga ta'rif bering.

8. II-tur egri chiziqli integral mavjudligi haqidagi teoremani bayon qiling.

9. II-tur egri chiziqli integralning xossalarini bayon qiling.

10. Ostrogradskiy-Grin formulasini yozing.

11. II-tur egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik shartini keltiring.

12. Qanday sirlarga silliq sirt deb ataladi?

13. I-tur sirt integraliga ta'rif bering.

14. Qanday shart bajarilganda I-tur sirt integrali mavjud bo'ladi?

15. I-tur sirt integralini xossalarini bayon qiling.

16. Qanday sirlarga oriyentirlangan sirtlar deb ataladi?

17. Bir tomonli sirtga misol keltiring.

18. II-tur sirt integralining ta'rifini bayon qiling.

19. II-tur sirt integralining xossalarini sanab o'ting.

20. II-tur sirt integralini hisoblash usulini keltiring.

21. Ostrogradskiy-Gauss formulasini yozing.

22. Stoks formulasini yozing.

Mashqlar

Quyidagi I-tur egri chiziqli integrallarni hisoblang:

1. $\int_L (2x + y) ds$, bu yerda L – chiziq $y = 5x$ to'g'ri chiziqning $O(0,0)$ ba $A(2,10)$ nuqtalar orasidagi kesmasi.

2. $\int_L \frac{1}{x^2 + y^2} ds$, bu yerda L – chiziq $x^2 + y^2 = 1$ aylananing yuqori yarmi.

3. $\int_L \sqrt{x^3 y} ds$, bu yerda L –chiziqliq $y = x^3$ giperbolaning $O(0,0)$ va $A(1,1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi yoyi.

4. $y = x^2/2 + 1$ egri chiziqliqning $P(x, y)$ nuqtadagi zichligi $\mu(P) = x + 1, x \in [0, \sqrt{3}]$ tenglik bilan aniqlansa, uning m massasini toping.

5. $x = 10 \cos^3 t, y = 10 \sin^3 t, 0 \leq t \leq \pi/2$ astroidaning zichligi $\mu = 1$ o'zgarmas bo'lsa, uning massasini va og'irlik markazining koordinatalarini toping.

Quyidagi II-tur egri chiziqli integrallarni hisoblang:

6. $\int_{AO} x^3 dx + 3y^2 z dy - x^2 y dz$, bu yerda AB uchlari $A(3,2,1)$ va $O(0,0,0)$ nuqtalarda bo'lgan kesma.

7. $\int_{AB} 6x^2 y dx + 10xy^2 dy$, bu yerda integrallash $y = x^3$ giperbolaning $A(1,1)$ nuqtadan $B(2,8)$ nuqttagacha bo'lgan yoyi.

8. $\int_L yz dx + xz dy + xy dz$, bu yerda L egri chiziqliq $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct$ vint chizig'ining t parametr 0 dan 2π gacha o'zgargandagi qismi.

9. $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$, bu yerda L – markazi koordinatalar boshida va radiusi R bo'lgan aylana.

10. $\int_{(0,0)}^{1,1} (x^2 + y) dx + (y^2 + x) dy$ egri chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq emasligiga ishonch hosil qilingandan so'ng, uni hisoblang.

Quyidagi I-tur sirt integrallarini hisoblang:

11. $\iint_{\sigma} \frac{ds}{(1+x+z)^2}$, bu yerda σ – sirt $x + y + z = 1$ tekislikning birinchi oktantda joylashgan qismi.

12. $\iint_{\sigma} xyz ds$, bu yerda σ – sirt $x + y + z = 1$ tekislikning birinchi oktantda joylashgan qismi.

13. $\iint_{\sigma} (x + 18y + 24z)ds$, bu yerda σ – sirt $x + 2y + 3z = 1$ tekislikning birinchi oktantda joylashgan qismi.

14. $\iint_{\sigma} xds$, bu yerda σ – sirt $x^2 + y^2 = 1$ silindrning $z = 0$ va $z = 2$ tekisliklar bilan ajratilgan qismi.

15. $\iint_{\sigma} z^4ds$, bu yerda σ – sirt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferaning yuqori yarim qismi.

Quyidagi II-tur sirt integrallarini hisoblang:

16. $\iint_{\sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, bu yerda σ – sirt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($y \geq 0$) yarim sferaning tashqi tomoni.

17. $\iint_{\sigma} xdydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, bu yerda σ – sirt $x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [-H, H]$ jism sirtining tashqi tomoni.

18. $\iint_{\sigma} xdydz + ydxdz + xdx dy$, bu yerda σ – sirt $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ ellipsodning ichki tomoni.

19. $\iint_{\sigma} (xy^2 + z^2)dydz + (yz^2 + x^2)dxdz + (zx^2 + y^2)dxdy$, bu yerda σ – sirt $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$) yarim sferaning tashqi tomoni.

20. $x^2 + y^2 = R^2, |z| \leq H$ silindrning yon sirtining tashqi tomoniga $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ tezlik vektoriga ega bo'lgan suyuqlik oqimining vaqt birligida oqib o'tgan suyuqlik hajmini toping (tekislik normal Oz o'q bialn o'tkir burchak tashkil qiladi).

14-BOB. MAYDONLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

Fizika, mexanika va matematikaning katta bo'limi bo'lgan maydonlar nazariyasida skalyar, vektor va tenzor maydonlar o'rganiladi.

Fizika, elektrotexnika, mexanika, matematika va boshqa texnik fanlarning ko'pgina masalalari skalyar va vektor maydonlarni o'rganishga olib keladi.

14.1. Skalyar maydon tushunchasi

Agar fazoning yoki fazo qismining har bir nuqtasida biror miqdorning qiymatlari aniqlangan bo'lsa, mazkur miqdorning *maydoni* berilgan deyiladi. Qaralayotgan miqdor skalyar bo'lsa, ya'ni soniy qiymat bilan aniqlansa, maydon *skalyar maydon* deb ataladi. Misol sifatida qizdirilgan jismning ichki qismidagi temperaturalar maydonini, biror idishdagi suyuqlik bosimi maydonini, biror hajmdagi gaz zichligi maydonini va shunga o'xshashlarni keltirish mumkin.

Skalyar maydon nuqtaning $u = u(M)$ funksiyasi bilan beriladi. Agar fazoda dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsa, bu funksiya M nuqtaning x, y, z koordinatalarining funksiyasiga aylanadi:

$$u = u(x, y, z). \quad (14.1)$$

14.1-Misol. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ funksiya radiusi 1 va markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera bilan chegaralangan nuqtalarda skalyar maydonni aniqlaydi.

14.1-Ta'rif. $u(M)$ funksiya o'zgarmas C qiymatni qabul qiladigan nuqtalar to'plamiga maydonning *sath sirti* deb ataladi. Sath sirtining tenglamasi

$$u(x, y, z) = C \quad (14.2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

C o'zgarmasga mumkin bo'lgan barcha qiymatlarni berib, sath sirlari oilasini hosil qilamiz.

14.2-Misol. Yer atmosferasi zichligi maydonining sath sirlari markazi yer markazida bo'lgan konsentrik sferalardan iborat bo'ladi. Sfera radiusi qancha katta bo'lsa, C

o'zgarishning qiymati shuncha kichik bo'lishi ravshan (14.1-rasm).

14.3-Misol. Idishdagi suvning gidrostatik bosimi maydonining sath sirtlari gorizontal tekisliklardan iborat bo'ladi. Tekislikning chuqurligi qancha katta bo'lsa, C o'zgarishning qiymati shuncha katta bo'ladi (14.2-rasm).

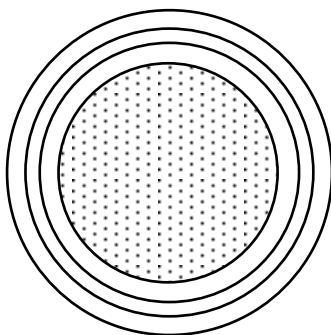
14.4-Misol. $u = z/(x^2 + y^2)$ maydonni qaraymiz. Uning sath sirtlari

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = C$$

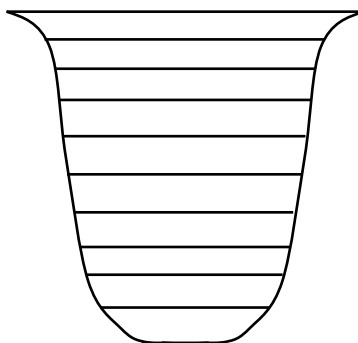
ya'ni

$$z = C(x^2 + y^2)$$

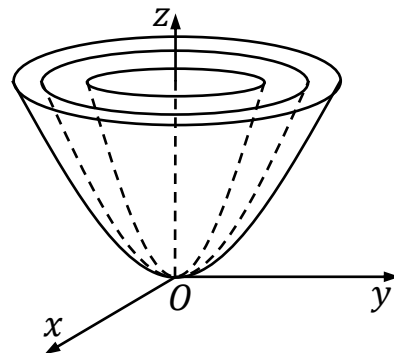
tenglamaga ega bo'ladi. Ular umumiy Oz aylanish o'qiga ega bo'lgan paraboloidlar oilasidan iborat. C o'zgarishning qiymati qancha katta bo'lsa, paraboloid shuncha "tik" bo'adi (14.3-rasm).



14.1-rasm



14.2-rasm



14.3-rasm

Skalyar maydonni aniqlovchi $u = u(M)$ funksiya Oxy tekislikda yoki uning bir qismida aniqlangan bo'lsa, yassi skalyar maydonni hosil qilamiz. Uni M nuqtaning koordinatalari orqali ifodalasak, $u = u(x, y)$ funksiyaga ega bo'lamiz. $u(x, y) = C$ bu holda maydon *sath chizig'ining* tenglamasi deb ataladi.

14.2. Yo'nalish bo'yicha hosila

$u = u(x, y, z)$ skalyar funksiya bilan aniqlangan skalyar maydon berilgan bo'lsin. Qo'zg'almas $M_0(x_0, y_0, z_0)$ va o'zgaruvchan $M(x, y, z)$ nuqtalarni o'lamiz (14.4-rasm). u funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlaridan

$$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0),$$

ya'ni

$$\Delta u(x_0, y_0, z_0) = u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)$$

ayirmani tuzamiz.

$\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$ vektorning uzunligini Δl orqali belgilaymiz: $\Delta l = |\overrightarrow{M_0M}|$.

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l}$$

nisbat maydonning M_0M kesmada o'zgarishining o'rtacha tezligini aniqlaydi.

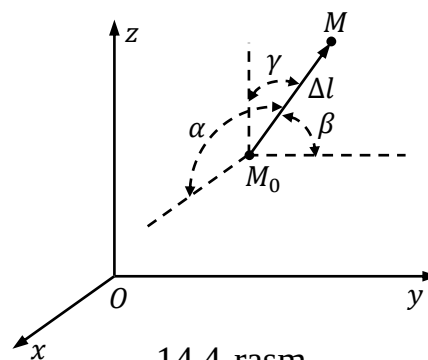
14.2-Ta'rif. Agar chekli

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limitni biz $u(M)$ maydonning M_0 nuqtadagi $\vec{l}$ yo'nalish bo'yicha hosilasi deb ataymiz va uni $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ orqali belgilaymiz.

Fizik nuqtay nazardan bu miqdor M nuqta yo'nalishida maydon o'zgarishining M_0 nuqtadagi tezligini aniqlaydi.

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$
deb belgilash kiritamiz. U holda
 $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos \beta$, $\Delta z = \Delta l \cos \gamma$
bo'ladi, bu yerda $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ yuqorida
kiritilgan $\overrightarrow{M_0M}$ vektorning yo'naltiruvchi
kosinuslari.



14.4-rasm

$u(x, y, z)$ funksiya maydonning barcha nuqtalarida uzluksiz $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ va $\frac{\partial u}{\partial z}$

xususiy hosilalarga ega deb faraz qilamiz. U holda bu funksiya maydonda differensiallanuvchi bo'ladi, bu esa

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \Delta z + o(\Delta l)$$

degan ma'noni anglatadi. Bu tenglikning ikkala tomonini Δl ga bo'lib,

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos \beta$, $\Delta z = \Delta l \cos \gamma$ tengliklarni inobatga olsak, so'ngi tenglik

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\Delta l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l} \quad (14.3)$$

ko'rinishni oladi. $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{o(\Delta l)}{\Delta l} = 0$ ekanligini hisobga olib, (14.3) tenglikda $\Delta l \rightarrow 0$

bo'lganda limitga o'tamiz va natijada yo'nalish bo'yicha hosila uchun

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \quad (14.4)$$

formulani hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ hosilaning nafaqat mavjudligini isbotladik, balki uni hisoblash formulasini ham keltirib chiqardik.

$\vec{l}$ yo'nalish bo'yicha hosila M_0 nuqtada maydonning bu yonalish bo'yicha o'zgarish tezligini tavsiflaydi. Agar $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ bo'lsa, u funksiya $\vec{l}$ yo'nalishda o'sadi, agar $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ bo'sa, u funksiya $\vec{l}$ yo'nalishda kamayadi.

14.5-Misol. $u = x^2y + y^2z + z^2x$ maydonning $M_0(2,3,1)$ nuqtada $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektor yo'nalishidagi hosilasini toping, bu yerda $M_1(4,5,2)$.

► u funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yz + x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2zx + y^2,$$

demak

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 13, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 10, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 13.$$

M_0 va M_1 nuqtalarning koordinatalaridan $\overrightarrow{M_0M_1} = \{2, 2, 1\}$ vektorni hosil qilamiz. Shuning uchun $\Delta l = |\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ bo'ladi. U holda $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

qiymatlarni qabul qiladi. Topilganlarni (14.4) formulaga qo'yib

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = 13 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3} + 13 \cdot \frac{1}{3} = \frac{65}{3}$$

yo'nalish bo'yicha hosilaning qiymatini topdik. ◀

Mulohaza. Agar $\alpha = 0, \beta = \gamma = 90^\circ$ bo'lsa, (14.4) formula

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$$

ko'rinishni oladi, ya'ni x bo'yicha xususiy hosilani $u(M)$ maydondan Ox o'qning musbat yo'nalishi bo'yicha olingan hosila sifatida qarash mumkin ekan. Xuddi shu singari mulohaza y va z bo'yicha xususiy hosilalarga nisbatan ham o'rinli bo'ladi.

14.3. Skalyar maydonning gradiyenti va uning xossalari

Maydonning bitta nuqtadagi biroq turli yo'nalishlardagi hosilalari, umuman olganda turlicha bo'ladi. M_0 nuqtadagi $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ hosila qaysi yo'nalishda (ya'ni qanday α, β va γ burchaklarda) eng katta qiymatni qabul qilishini aniqlaymiz.

(14.4) tenglikning o'ng tomoni birlik $\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ vektor va boshqa $\vec{g} = \left\{ \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right\}$ vektorning skalyar ko'paytmasidan iborat ekanligini ko'rish mumkin:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \vec{g} \vec{e}.$$

$|\vec{e}| = 1$ bo'lganligi uchun

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = |\vec{g}| \cos(\widehat{\vec{g}, \vec{e}}) \quad (14.5)$$

tenglikni yozish mumkin.

(14.5) tenglikdan $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ hosila $\vec{g}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi burchak nolga teng bo'lganda eng katta qiymatni qabul qiladi degan xulosaga kelish mumkin. Bu esa qidirilayotgan yo'nalish $\vec{g}$ vektorning yo'nalishidan iborat ekanligidan dalolat beradi. Shunday qilib, $u(x, y, z)$ maydon M_0 nuqtada $\vec{g} = \left\{ \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right\}$ vektor yo'nalishida eng tez o'sar ekan. Bu vektor $u(M)$ skalyar maydonning M_0 nuqtadagi *gradiyenti* deb ataladi va $\text{grad } u(M_0)$ orqali belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k}. \quad (14.6)$$

Endi (14.4) tenglikni

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \vec{e} \cdot \text{grad } u(M_0)$$

yoki

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = |\text{grad } u(M_0)| \cdot \cos \varphi \quad (14.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda φ kiritilgan $\text{grad } u(M_0)$ vektor va $\vec{l}$ yo'nalish orasidagi burchak.

$u(x, y, z)$ maydonning $u(x, y, z) = C$ sath sirtiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma tekislik

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

tenglamaga ega. Demak $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}$ miqdoralar normal vektorining koordinatalari ekan. Shuning uchun (14.6) tenglik maydonning gradiyenti maydon sath sirtining berilgan nuqtadagi normali bo'ylab yonalgan degan ma'noni anglatadi.

Skalyar maydon gradiyentining muhim xossalari keltiramiz.

1. Gradiyent sath sirtining berilgan nuqtasidan o'tuvchi normal bo'ylab yo'nalgan;
2. $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$;
3. $\text{grad}(c \cdot u) = c \cdot \text{grad } u, c = \text{const}$;
4. $\text{grad}(u \cdot v) = u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u$;
5. $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \text{grad } u - u \cdot \text{grad } v}{v^2}$;
6. $\text{grad } f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad } u$.

► Bu xossalarning isboti gradiyentning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Masalan, oxirgi xossani isbotlaylik. Ta'rifga ko'ra

$$\begin{aligned} \text{grad } f(u) &= \frac{\partial}{\partial x}(f(u))\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(u))\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(u))\vec{k} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad } u \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Mulohaza. Maydon gradiyentining keltirilgan xossalari yassi maydon uchun ham o'rinli.

14.6-Misol. $u = xy + yz + zx$ maydonning $A(1, -3, 2)$ nuqtada o'sishining eng yuqori tezligini toping.

► Dastlab maydonning gradiyentini topamiz:

$$\text{grad } u = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + x)\vec{k};$$

$$\text{grad } u(1, -3, 2) = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Shuning uchun maydon o'sishining eng katta tezligi

$$\text{grad } u(A) = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

bo'ladi. ◀

14.4. Vektor maydon va vektor chiziqlar

Vektor maydonlarga ko'rsatmali misol sifatida suyuqlik oqqanda tezlik maydonini ko'rsatish mumkin. Fazoning biror D sohasida suyuqlik zarralarining harakati yuz bersin, bunda har bir $M \in D$ nuqta orqali vaqtning turli momentlarida o'tgan suyuqlik zarralari bir xil $\vec{v}(M)$ tezlikka ega deb faraz qilamiz. Bu holda *suyuqlik oqimi statsionar* holatda deyiladi. Shunday qilib, statsionar holatdagi oqimda ixtiyoriy $M \in D$ nuqtada vaqt o'tishi bilan $\vec{v}(M)$ vektor o'zgarmaydi, ammo u turli M_1 va M_2 nuqtalarda $\vec{v}(M_1)$ va $\vec{v}(M_2)$ vektorlar turlicha bo'lishi mumkin. Ana shu yo'sinda D sohada vektor maydon—suyuqlik tezligi maydoni aniqlandi.

Agar fazoda $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, vektor maydon uch o'zgaruvchili vektor funksiya sifatida aniqlanishi mumkin. Bu holda D sohaning har bir $M(x, y, z)$ nuqtasida $\vec{a}(M)$ vektor maydonni

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \quad (14.8)$$

tenglik bilan aniqlaymiz, bu yerda $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ berilgan D sohada aniqlangan skalyar funksiyalar. Bu funksiyalarning $M(x, y, z)$ nuqtadagi qiymatlari $\vec{a}(M)$ vektorning koordinatalari bo'ladi.

Agar vektor maydon biror to'g'ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar sistemasida z o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmasa, uni biz *ikki o'lchovli vektor maydon* deb ataymiz. Bir o'lchovli vektor maydon esa ikki o'lchovli vektor maydonning xususiy holi sifatida aniqlanadi. Ikki o'lchovli bo'lmagan maydonlarni *uch o'lchovli vektor maydon* deb ataymiz. Har bir $\vec{a}(M)$ vektor Oxy tekislikka parallel bo'lsa, u *yassi vektor maydon* deb ataladi, bu holda $R(x, y, z) \equiv 0$ bo'ladi.

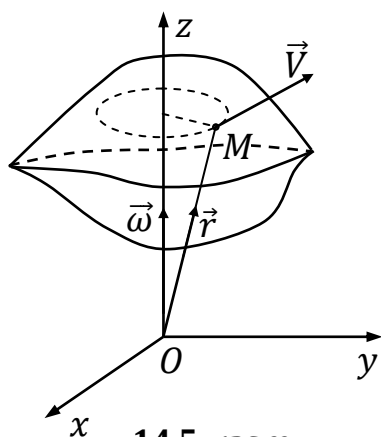
14.7-Misol. Aylanayotgan qattiq jism nuqtalarining tezliklari maydonini qaraymiz. Oz o'qni aylanish o'qi bo'ylab yo'naltitamiz (14.5-rasm). $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$ vektor burchak tezlik bo'lsin. U holda mexanikadagi ma'lum $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ Eyler formulasidan

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} = \omega(-y \vec{i} + x \vec{j})$$

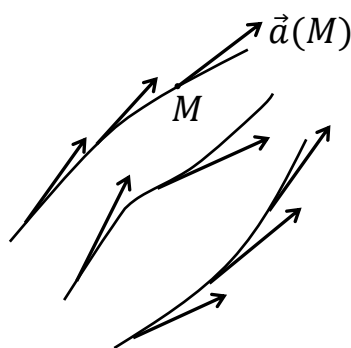
tenglikni hosil qilamiz. ◀

(14.8) tenglik bilan aniqlanuvchi $\vec{a}(x, y, z)$ vektor maydon berilgan va uning $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ koordinatalari biror D sohada uzluksiz bo'lsin.

Har bir nuqtasida o'tkazilgan urinma $\vec{a}$ vektorga kollinear bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rniga bu maydonning *vektor chiziqlari* deb ataymiz (14.6-rasm). Elektr yoki magnit maydonlarida ular kuch chiziqlari deb yuritiladi.



14.5-rasm



14.6-rasm

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

vektor chiziqlardan birining radius vektori bo'lsin. Vektor chiziqning ta'rifiga ko'ra $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ vektor va vektor chiziqqa o'tazilgan

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

urinma vektor ana shu chiziqning barcha nuqtalarida kollinear. U holda vektorlarning kollinearlik shartiga ko'ra

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (14.9)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, vektor chiziqlar uchun birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini hosil qildik. Uni integrallab $\vec{a}$ maydonning ikki parametrlilik vektor chiziqlar oilasini hosil qilamiz.

14.8-Misol. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ vektor maydonning vektor chiziqlarini toping.

► Vektor chiziqlarning differensial tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

yoki

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z}.$$

Bu sistemani integrallab, ikkita $y = c_1x$, $y = c_2x^2$ tenglamani hosil qilamiz, bu yerda c_1, c_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

$y = c_1x$ tekislik bilan $y = c_2x^2$ parabolik silindrning kesishuvi ikki parametrlilik vektor chiziqlar oilasini beradi. ◀

14.5. Vektor maydon oqimi va divergensiya

Dastlab xususiy hol bo'lgan suyuqlik oqimidagi $\vec{v}$ tezliklar maydonini qaraymiz. Maydonda biror σ sirtini ajratamiz. Vaqt birligi davomida σ sirt orqali oqib

o'tuvchi suyuqlik miqdoriga *suyuqlikning σ sirt orqali oqimi* deyiladi.

Agar oqimning tezligi o'zgarmas ($\vec{v} = \text{const}$), σ sirt esa yassi bo'lsa, bu oqimni hisoblash oson. Bu holda suyuqlik oqimi parallel asosli va yasovchisining uzunligi $|\vec{v}|$ bo'lgan silindrik jismning hajmiga teng, chunki vaqt birligi davomida har bir zarra $\vec{v}$ miqdorga suriladi (14.7-rasm):

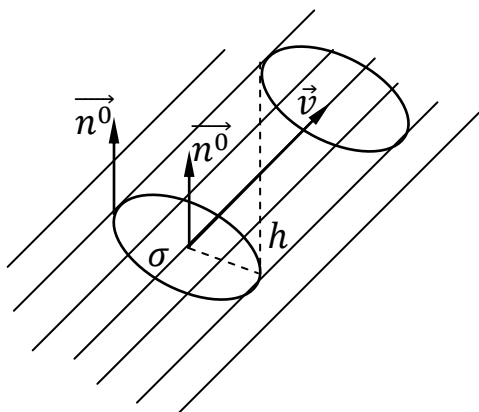
$$O = Sh,$$

bu yerda S – asos yuzi, $h = \text{Pr}_{\vec{n}} \vec{v} = \vec{v} \vec{n}^0$ – silindrning balandligi va $\vec{n}$ – silindr asosining normal, $|\vec{n}^0| = 1$.

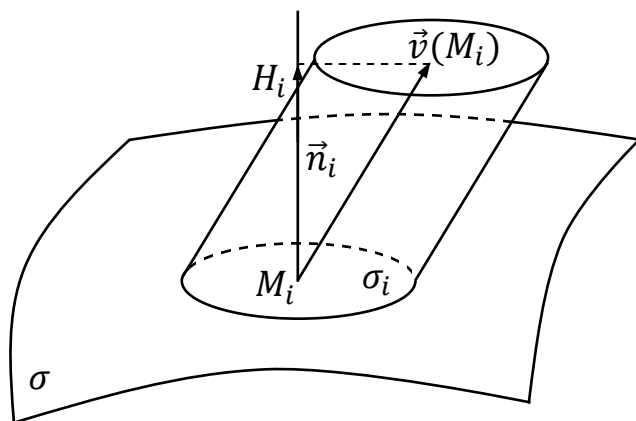
Shunday qilib, o'zgarmas $\vec{v}$ tezlikda yassi σ sirt orqali o'tuvchi suyuqlik oqimi

$$O = \vec{v} \vec{n}^0 \cdot S \quad (14.10)$$

miqdorga teng bo'ladi.



14.7-rasm



14.8-rasm

Agar $\vec{v}$ tezlik uzluksiz o'zgarsa, σ sirt esa silliq bo'lsa, sirtni shunday kichik σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qismlarga ajratish mumkinki, bunda har bir σ_i qismni yassi va undagi $\vec{v}$ vektorni o'zgarmas deb qarash mumkin. U holda vaqt birligi davomida σ_i qism orqali taqriban $O_i \approx H_i \cdot \Delta s_i$ miqdorda suyuqlik oqib o'tadi, Δs_i – bu yerda σ_i qismning yuzi, H_i yasovchisi $\vec{v}(M_i)$ bo'lgan i – silindrning balandligi, M_i esa σ_i qismning biror nuqtasi. H_i balandlikni $\vec{v}(M_i)$ vektorning $\vec{n}(M_i)$ normaldagi proyeksiyasi deb qarash mumkin: $H_i = \text{Pr}_{\vec{n}(M_i)} \vec{v}(M_i) = \vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}_i$, bu yerda $\vec{n}_i$ sirtga

M_i nuqtada o'tkazilgan normalning birlik vektori. σ sirt orqali oqib o'tuvchi suyuqlik miqdori uning σ_i qismlari orqali o'tuvchi suyuqlik miqdorlari yig'indisiga teng bo'lganligi uchun

$$O \approx \sum_{i=1}^n \vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta s_i \quad (14.11)$$

taqribiy tenglikni yozish mumkin.

Suyuqlikning qidirilayotgan aniq miqdorini topilgan yig'indining σ_i qismlar sonini cheksiz orttirilgandagi va ularning o'lchamlarini (σ_i qismning d_i diametrini) nolga intiltirilgandagi limiti sifatida hosil qilish mumkin:

$$O = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n \vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta s_i = \iint_{\sigma} \vec{v}(M) \cdot \vec{n} ds \quad (14.12)$$

14.3-Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning σ sirt orqali O_{σ} oqimi deb, vektor maydon va sirt normali birlik vektorlari skalyar ko'paytmasining sirt bo'yicha integraliga aytiladi, ya'ni

$$O_{\sigma} = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} ds. \quad (14.13)$$

Agar $\vec{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ va $\vec{a} = \{P; Q; R\}$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektor maydonning σ sirt orqali oqimini

$$O_{\sigma} = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \quad (14.14)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

I va II tur sirt integrallari orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi (13.58) formuladan foydalanib vektor oqimini

$$O_{\sigma} = \iint_{\sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy \quad (14.15)$$

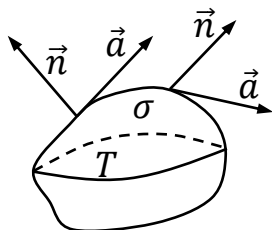
II tur sirt integrali orqali ifodalaymiz.

Vektor oqim skalyar miqdor ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

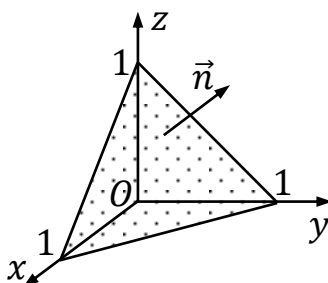
σ sirt yopiq va biror T sohani chegaralagan holni alohida qarab chiqamiz. Bu holda $\vec{a} = \{P; Q; R\}$ vektor maydonning σ sirt orqali oqimini

$$O_\sigma = \oint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy \quad (14.16)$$

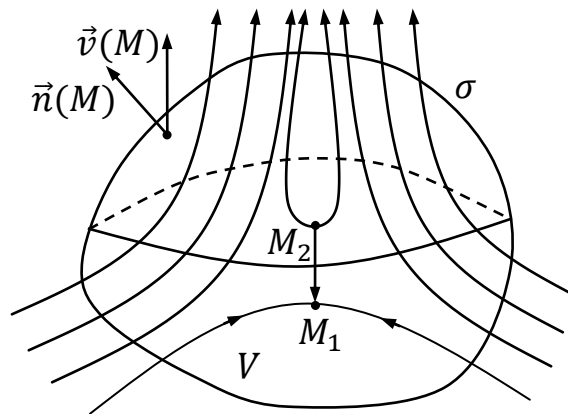
orqali belgilaymiz. Sirt yopiq bo'lganda odatda $\vec{n}$ vektorning yo'nalishi sifatida tashqi normalning yo'nalishi olinadi (14.9-rasm).



14.9-rasm



14.10-rasm



14.11-rasm

14.9-Misol. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vektor maydonning $x + y + z = 1$ tekislikning birinchi oktantdagi qismi (normal Oz o'q bilan o'tkir burchak tashkil qiladi) orqali oqimini toping (14.10-rasm).

► $F(x, y, z) = 0$ tenglama bilan berilgan sirtning birlik normallari

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}$$

formula bilan topiladi. Shuning uchun berilgan tekislikning birlik normali

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

vektordan iborat bo'ladi. Normal Oz o'q bilan o'tkir burchak tashkil qilishi lozimligini inobatga olsak, ya'ni $\cos \gamma = \pm 1/\sqrt{3} > 0$ ekanligidan, musbat ishorani olamiz. Demak

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

U holda $\vec{a}\vec{n}$ skalyar ko'paytma uchun

$$\vec{a}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y)$$

tenglikni hosil qilamiz. Qidirilayotgan vektor oqimni (14.13) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$$O_\sigma = \iint_\sigma \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y)ds.$$

σ sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ uchburchakdan iborat bo'ladi. Shuning uchun sirt integralidan ikki o'lchovli integralga o'tib, oqimni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} O_\sigma &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y) \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \iint_D (x + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y)dy = \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Demak, $O_\sigma = 1/3$ oqim birligi. ◀

Vektor maydonni suyuqlik oqimi tezliklari maydoni sifatida talqin qilamiz. Bu holda vektor maydonning σ yopiq sirt bo'yicha oqimining musbat qiymati σ chegaralagan sohaga oqib kirgan suyuqlik miqdoriga nisbatan oqib chiqqan suyuqlik miqdorining ko'pligini anglatadi. Demak, sohada suyuqlik hosil bo'ladigan (masalan, qor yoki muz eriganda suv hosil bo'ladi) nuqta yoki qism sohalar mavjud. Bunday nuqtalarni *vektor maydon manbalari* deb ataymiz. Xuddi shu singari oqimning manfiy qiymati sohadan oqib chiqish sohaga oqib kirishga nisbatan kamligini anglatadi. Demak, sohada suyuqlik yo'qoladigan (masalan, bug'lanadi yoki muzlaydi) nuqtalar mavjud. Bunday nuqtalar *vektor maydonning singish nuqtalari* deb ataladi.

Manba va singishlar nuqtaviy yoki taqsimlangan bo'lishi mumkin. Sohada nuqtaviy manbalarning mavjudligi sohada boshlanadigan vektor chiziqlarning mavjudligidan, nuqtaviy singishlarning mavjudligi esa sohada tugaydigan vektor chiziqlarning mavjudligidan dalolat beradi. 14.11-rasmda vektor chiziqlar boshlanadigan M_2 —manba, vektor chiziqlar tugaydigan M_1 —singish nuqtasi bo'ladi.

Vaqt birligida paydo bo'ladigan yoki yo'qoladigan suyuqlik hajmiga manbaning yoki singishning *intensivligi* deb ataymiz. Singish manfiy intensivli manba deb qarab, singishlarning intensivligini manfiy qiymatli deb hisoblash qulay. U holda tezliklar vektor maydonining σ sirt orqali O oqimini bu sirt chegaralagan sohadagi barcha manba va singishlar intensivliklarining yig'indisi deb talqin qilish mumkin.

Turli fizik masalalarda manba (singish) va uning intensivligi turlicha ma'noni anglatadi. Masalan, elektr maydon kuchlanishi vektor maydonida manba (singish) musbat (manfiy) zaryadlardan, ularning intensivligi esa bu zaryadlar miqdoridan iborat bo'ladi. Agar vektor maydon issiqlik oqimini ifodalasa, manba va singishlar issiqlik ajralishini va yutilishini, manbaning (singishning) intensivligi esa vaqt birligida ajraladigan (yutiladigan) issiqlik miqdorini anglatadi.

Bektor maydon manbalari taqsimlangan holni qarab chiqamiz. Bunday manbalar fazoning biror sohasi, biror sirti yoki biror chiziq bo'ylab taqsimlangan bo'lishi mumkin. Agar manbalar biror yopiq σ sirt bilan chegaralangan D soha bo'ylab taqsimlangan bo'lsa, vektor maydonning σ sirt orqali O_σ oqimining D soha V hajmiga nisbati vektor maydonning D sohadagi manbalarining o'rtacha zichligini beradi. D sohada qo'zg'almas M nuqtani olamiz va $d_D \rightarrow 0$ (d_D — bu yerda D sohaning diametri) bo'lganda limitga o'tamiz:

$$\lim_{d_D \rightarrow 0} \frac{O_\sigma}{V} = \lim_{d_D \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_\sigma \vec{a} \vec{n} ds. \quad (14.17)$$

Agar bu limit mavjud bo'lsa, uning qiymati vektor maydon taqsimlangan manbasining M nuqtadagi intensivligini beradi.

(14.17) limit mavjud bo'lsa, uni biz $\vec{a}$ vektor maydonning $M \in D$ nuqtadagi *divergensiyasi* (lotincha *divergentia*-farqlanish) deb ataymiz va $\text{div } \vec{a}(M)$ orqali belgilaymiz.

$\vec{a}$ vektor maydonning $M \in D$ nuqtadagi divergensiyasi skalyar miqdor. $\vec{a}$ vektor maydonning aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalardagi divergensiyasi $\text{div } \vec{a}$ skalyar maydonni aniqlaydi.

Vektor maydonning berilgan nuqtadagi divergensiyasi vektor maydon oqimining hajmga nisbatining limiti sifatida aniqlanadi va u koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq emas. Biroq divergensiyani hisoblashda birorta koordinatalar sistemasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Biz to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida vektor maydonning divergensiyasini hisoblash masalasini qarab chiqamiz.

$\vec{a}(M)$ vektor maydon fazoviy D sohada differensiallanuvchi, ya'ni biror $Oxyz$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida differensiallanuvchi

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

vektor funksiya bilan aniqlangan bo'lsin. D sohada yopiq σ sirtini olamiz va sirtning M nuqtasida tashqi normalning birlik vektorini $\vec{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ yo'naltiruvchi kosinuslar yordamida aniqlaymiz.

U holda (14.17) tenglikdagi integralda $\vec{a}\vec{n}$ skalyar ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalab va unga (13.63) Ostrogradskiy-Gauss formulasini qo'llasak

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} \vec{a}\vec{n}ds &= \oint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)ds = \\ &= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \end{aligned} \quad (14.18)$$

formulani hosil qilamiz.

$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ xususiy hosilalarning D sohada uzluksizligini inobatga olgan holda uch o'lchovli integral uchun o'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib, vektor maydonning ixtiyoriy M nuqtadagi divergensiyasi uchun

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{dD \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \quad (14.19)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida divergensiyaning

$$\operatorname{div} \vec{a}(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \quad (14.20)$$

formula bilan hisoblash mumkin ekan.

Divergensiyaning ba'zi xossalari keltiramiz.

1. Agar $\vec{a}$ — o'zgarmas vektor bo'lsa, $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ bo'ladi.

2. $\operatorname{div} (c \cdot \vec{a}) = c \cdot \operatorname{div} \vec{a}$, bu yerda $c = \text{const}$.

3. $\operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$, ya'ni ikkita vektor maydon yig'indisining divergensiya, bu vektor maydonlar divergensiylarining yig'indisiga teng.

4. Agar U — skalyar maydon, $\vec{a}$ — vektor maydon bo'lsa,

$$\operatorname{div} (U \cdot \vec{a}) = U \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} U$$

bo'ladi.

► Bu xossalarni (14.20) formula yordamida oson isbotlash mumkin. Masalan, 4-xossani isbotlaymiz.

$U \cdot \vec{a} = U \cdot P\vec{i} + U \cdot Q\vec{j} + U \cdot R\vec{k}$ tenglikka (14.20) formulani qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (U \cdot \vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial x} (U \cdot P) + \frac{\partial}{\partial y} (U \cdot Q) + \frac{\partial}{\partial z} (U \cdot R) = \\ &= U \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial U}{\partial y} + U \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + P \frac{\partial U}{\partial x} + Q \frac{\partial U}{\partial y} + R \frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} U. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

14.10-Misol. $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$ burchak tezlik bilan Oz o'q atrofida aylanayotgan qattiq jism nuqtalari $\vec{v}$ tezlik maydonining divergensiya-sini hisoblang.

► 14.8-Misolda bu vektor maydon

$$\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} = \omega(-y \vec{i} + x \vec{j})$$

vektor funksiya bilan aniqlanishini ko'rgan edik. U holda (14.20) formulaga ko'ra

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0.$$

Shunday qilib, aylanayotgan jismning ixtiyoriy nuqtasidagi tezliklar maydonining divergensiya-si nolga teng ekan. ◀

Vektor maydonning oqimi va divergensiya-si tushunchalari Ostrogradskiy-Gauss formulasini qisqa vektor shaklda ifodalash imkonini beradi. Buning uchun formulada sirt integralini qandaydir vektor maydonning oqimi sifatida, uch o'lchovli integralni esa xuddi shu vektor maydon divergensiya-sining integrali deb qarash kerak.

14.1-Teorema (Ostrogradskiy-Gauss). Agar $\vec{a}(M)$ vektor maydon D fazoviy sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda σ yopiq bo'lakli silliq sirt bilan chegaralangan ixtiyoriy $V \subset D$ soha uchun

$$\oint_{\sigma} \vec{a} \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV \quad (14.21)$$

formula o'rinli bo'ladi, $\vec{n}$ bu yerda σ –sirtning tashqi birlik normali.

Fizik nuqtay nazardan Ostrogradskiy-Gauss teoremasi vektor maydonning yopiq sirt bo'ylab oqimi sirt chegaralagan sohadagi barcha manba va singishlar intensivliklari yig'indisiga tengligini anglatadi.

14.6. Vektor maydon sirkulyatsiyasi va rotori

Fazoviy D sohada

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k} \quad (14.22)$$

vektor maydon aniqlangan va bu sohada yopiq L silliq chiziq berilgan bo'lsin. Bu chiziqda soat strelkasi harakatiga qarama-qarshi yo'nalishni musbat yo'nalish deb tanlaymiz.

L konturdagi M nuqtaning radius vektori $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bo'lsin. Ma'lumki $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ vektor L chiziqqa o'tkazilgan urinmada chiziqda tanlangan yo'nalish bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (14.12-rasm). U holda $|d\vec{r}| = dl$ bo'ladi, bu yerda dl —chiziq yoyining differensial: $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$.

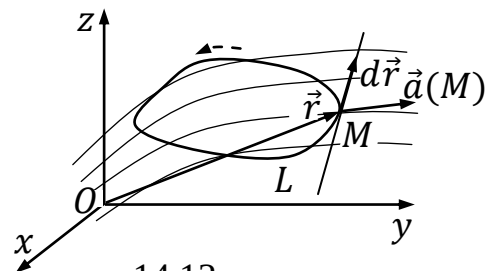
14.4-Ta'rif. $\vec{a}$ vektor maydon va $d\vec{r}$ urinma vektorlar skalyar ko'paytmasining L kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integrali $\vec{a}$ vektor maydonning L kontur bo'ylab *sirkulyatsiyasi* (lotincha *sirkulyatsiya*-aylanish) deb ataladi va $C_{\vec{a}}$ orqali belgilanadi. Demak

$$C_{\vec{a}} = \oint_L \vec{a} d\vec{r}. \quad (14.23)$$

Integral ostidagi $\vec{a} d\vec{r}$ skalyar ko'paytmani ularning koordinatalari orqali ifodalasak, sirkulyatsiya uchun

$$C_{\vec{a}} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \quad (14.24)$$

formulani hosil qilamiz. (14.24) formula oddiy fizik ma'noga ega: agar L kontur kuch maydonida yotsa, sirkulyatsiya material nuqta L chiziq bo'ylab kochganda $\vec{a}(M)$ kuch maydoni bajargan ishidan iborat.



14.12-rasm

14.11-Misol. $\vec{a}(x, y, z) = -2z\vec{i} - x^2\vec{j} + z\vec{k}$ vektor maydonning

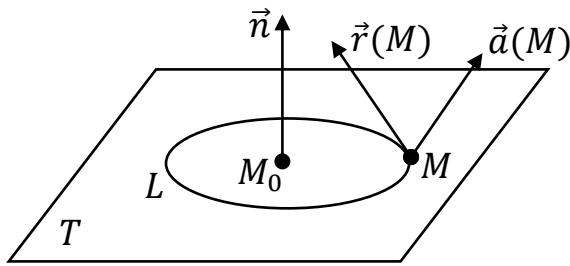
$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = \sin t, \end{cases}$$

parametrik tenglama bilan berilgan L kontur bo'ylab sirkulyatsiyasini hisoblang.

► Sirkulyatsiyani (14.24) formuladagi integralni aniq integralga o'tkazib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
C_{\vec{a}} &= \oint_L (-2z)dx - x^2 dy + z dz = \\
&= \int_0^{2\pi} [-2 \sin t \cdot (-2 \sin t) - 4 \cos^2 t \cdot 2 \cos t + \sin t \cdot \cos t] dt = \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 8 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt + \int_0^{2\pi} \sin t dt = 4\pi. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Kuch maydoni sirkulyatsiyasining nol qiymatni qabul qilishi maydon material nuqta ko'chganda boshlang'ich holatiga qaytariladigan ish bajarganligini anglatadi. Bu holda kuch maydoni *uyurmali* xususiyatga ega deb aytiladi. Kuch maydoni qaerda va qanday darajada uyurmali xusiyatga ega ekanligini aniqlaymiz. Birorta $\vec{n}$ birlik vektor, $\vec{a}$ vektor maydonning aniqlanish sohasida M_0 nuqtani tanlaymiz. $\vec{n}$ vektorga



14.13-rasm

perpendikulyar va M_0 nuqtadan o'tuvchi T tekislikda M_0 nuqtani o'rab turuvchi bo'lakli silliq L chiziqni olamiz. Bu L chiziq chegaralab turgan sohaning yuzini F orqali belgilaymiz (14.13-rasm).

Kontur bo'yicha sirkulyatsiyaning bu kontur chegaralagan soha yuziga nisbatining

$$\omega_{\vec{n}}(M_0) = \lim_{L \rightarrow M_0} \frac{1}{F} \oint_L \vec{a} d\vec{r} \quad (14.25)$$

limiti mavjud bo'lsa, uni biz vektor maydonning M_0 nuqtada $\vec{n}$ vektor yo'nalishidagi *uyurmalanganlik darajasi* deb ataymiz.

$\vec{a}(M)$ vektor maydonning M_0 nuqtada $\vec{n}$ birlik vektor yo'nalishidagi uyurmalanganlik darajasini birorta vektorning $\vec{n}$ birlik vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi sifatida aniqlash mumkin. Bu vektor $\vec{a}(M)$ vektor maydonning M_0 nuqtadagi rotori (ba'zan uyurmasi) deb ataladi (lotincha *roto*-aylantiraman) va rot $\vec{a}(M)$ orqali belgilanadi. Proyeksiyaning ta'rifidan uyurmalanganlik darajasi $\vec{n}$

birlik vektor o'rniga $\vec{a}(M)$ vektor olinsa eng katta qiymatni qabul qiladi. Shunday qilib, vektor maydonning M_0 nuqtadagi rotori vektor maydon uyurmanganlik darajasi bu nuqtada eng katta bo'ladigan yo'nalishni aniqlaydigan vektor ekan.

Vektor maydon sirkulyatsiyasi va rotori koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq emas. Biroq ularni hisoblash vektor maydon birorta koordinatalar sistemasida berilgandagina mumkin bo'ladi. $Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

vektor funksiya bilan aniqlanuvchi $\vec{a}(M)$ vektor maydon rotori

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (14.26)$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani eslab qolish uchun qulay bo'lgan

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

simvolik ko'rinishda ham yozish mumkin.

14.12-Misol. $\vec{a}(x, y, z) = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$ vektor maydonning rotorini toping.

► Bu yerda $P = zy^2, Q = xz^2, R = yx^2$, u holda (14.26) formulaga ko'ra

$$\text{rot } \vec{a}(M) = (x^2 - 2xz)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j} + (z^2 - 2yz)\vec{k}. \blacktriangleleft$$

(14.26) formula yordamida rotorning quyidagi xossalarini isbotlash mumkin.

1. Agar $\vec{a}$ — o'zgaras vektor bo'lsa, $\text{rot } \vec{a} = 0$ bo'ladi.
2. O'zgaras ko'paytuvchini rotor belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\text{rot } (c \cdot \vec{a}) = c \cdot \text{rot } \vec{a}.$$

3. Ikkita vektor maydon yig'indisining rotori bu vektor maydonlar rotorlarining yig'indisiga teng:

$$\text{rot } (\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot } \vec{a} + \text{rot } \vec{b}.$$

4. Agar U —skalyar funksiya, $\vec{a}(M)$ esa vektor maydon bo'lsa,

$$\text{rot}(U \cdot \vec{a}) = U \cdot \text{rot} \vec{a} + \text{grad} U \times \vec{a}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Egri chiziqli integral bilan sirt integralini bog'lovchi (13.67)

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx$$

Stoks formulasini vektor maydonning sirkulyatsiyasi va rotor tushunchalari yordamida vektor shaklda yozamiz. Bu formulaning chap tomoni $\vec{a}(M)$ vektor maydonning L kontur bo'ylab $C_{\vec{a}}$ sirkulyatsiyasidan iborat, ya'ni

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L \vec{a} d\vec{r}.$$

O'ng tomondagi integral esa $\text{rot} \vec{a}$ vektor maydonning σ sirt orqali O oqimidan iborat, ya'ni

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx = \iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{a}) \vec{n} ds.$$

Demak Stoks formulasini

$$\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{a}) \vec{n} ds \quad (14.27)$$

vektor ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda Stoks teoremasidagi singari L konturdagi musbat yo'nalish bilan σ sirdagi tomonning tanlanishi o'zaro muvofiqlashtirilgan.

Shunday qilib, quyidagi teorema o'rinli.

14.2-Teorema (Stoks). $\vec{a}(M)$ vektor maydonning L kontur bo'ylab sirkulyatsiyasi bu vektor maydon rotorining L kontur chegaralagan σ sirt orqali oqimiga teng.

14.7. Gamilton operatori

Birinchi tartibli vektor differensial operatorlar. $u(x, y, z)$ skalyar funksiyaning gradiyenti ko'pincha ∇ ("nabla") harfi bilan belgilanadi va

$$\nabla u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (14.28)$$

ko'rinishda yoziladi. (14.28) tenglikni simvoli ravishda

$$\nabla u = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u \quad (14.29)$$

shaklda yozish mumkin.

14.5-Ta'rif. Ushbu

$$\nabla u = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

simvol *Gamilton operatori* (yoki *nabla-operator* yoki *simvolik vektor*) deb ataladi.

(14.28) va (14.29) formulalardan skalyar funksiyaning gradiyenti ∇ simvolik vektor bilan u skalyar funksiyaning "ko'paytmasidan" iborat ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $\nabla u = \text{grad } u$.

∇ simvolik vektor bilan $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektorlarning skalyar va vektor ko'paytmalarini topamiz. Birinchi holda

$$\begin{aligned} \nabla \vec{a} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{a}. \end{aligned}$$

Demak

$$\nabla \vec{a} = \text{div } \vec{a} \quad (14.30)$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni $\vec{a}$ vektorning divergensiyasi ∇ simvolik vektorning $\vec{a}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

Ikkinchi holda esa

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{a} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

Demak

$$\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a}, \quad (14.31)$$

ya'ni $\vec{a}$ vektorning rotorini ∇ simvolik vektor bilan $\vec{a}$ vektorning vektor ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

Ikkinchi tartibli vektor differensial operatorlar. $T \subset \mathbf{R}^3$ sohada $u(M)$ skalyar maydon va $\vec{a}(M)$ vektor maydonlar berilgan bo'lsin. $\text{grad } u$, $\text{div } \vec{a}$, $\text{rot } \vec{a}$ operatsiyalarni *birinchi tartibli operatsiyalar* deb ataymiz. Birinchi va uchinchi operatsiyalar vektor maydonni, ikkinchisi esa skalyar maydonni yuzaga keltiradi.

Bu hosil bo'lgan maydonlar ustida yana $\text{rot grad } u$, $\text{div grad } u$, $\text{grad div } \vec{a}$, $\text{div rot } \vec{a}$, $\text{rot rot } \vec{a}$ operatsiyalarni bajarish mumkin va ular *ikkinchi tartibli operatsiyalar* deb ataladi. Bu ikkinchi tartibli operatsiyalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\text{rot grad } u = 0, \text{div rot } \vec{a} = 0. \quad (14.32)$$

Haqiqatan ham, (14.6), (14.26) formulalarga va ikkinchi tartibli aralash hosilalarning tenglik xossasiga ko'ra

$$\text{rot grad } u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0,$$

(14.20), (14.26) formulalarga va ikkinchi tartibli aralash hosilalarning tenglik xossasiga ko'ra

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0.\end{aligned}$$

14.6-Ta'rif. Ikkinchi tartibli $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$ operatsiyasi Laplas operatori deb ataladi va Δ orqali belgilanadi (orttirma belgisi bilan adashtirmang), ya'ni $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$.

Endi Laplas operatori uchun ifodani keltirib chiqaramiz:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Shunday qilib,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (14.32)$$

Qolgan ikkita $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$ ikkinchi tartibli operatsiyalar uchun (14.6), (14.20) va (14.26) formulalardan

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{k} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right) \vec{k} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} \right) \vec{k}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Nazorat savollari

1. Skalyar maydonga ta'rif bering.
2. Skalyar maydonning sath sirti nima?
3. Yo'nalish bo'yicha hosilaga ta'rif bering.
4. Yo'nalish bo'yicha hosila bilan xususiy hosilaning farqi nimada?
5. Skalyar maydonning gradiyenti qanday xossalarga ega?
6. Vektor maydonga ta'rif bering?
7. Skalyar maydon va vektor maydonlarning farqi nimada?
8. Vektor maydonning oqimi qanday aniqlanadi?
9. Vektor maydon divergensiyasiga ta'rif bering.
10. Ostrogradskiy-Gauss formulasi nimalarning tengligini ifodalaydi?
11. Vektor maydon sirkulyatsiyasiga ta'rif bering.
12. Vektor maydon rotoriga ta'rif bering.
13. Stoks teoremasini bayon qiling.
14. Gamilton operatorining ko'rinishini yozing.
15. Qanday ikkinchi tartibli vektor differensial operatorlar mavjud?

Mashqlar

$u(x, y, z)$ skalyar maydon va $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtalar berilgan.

Maydonning M_0 nuqtada $\overrightarrow{M_0 M_1}$ vektor yo'nalishidagi hosilasini toping.

1. $u = (x + y + z)x^2, M_0(-2, 1, 1), M_1(5, -3, 4)$.
2. $u = x^2 y^3 z^4, M_0(1, -1, 2), M_1(2, -2, 4)$.
3. $u = x^2 + y^2 + z^2, M_0(0, -1, 1), M_1(1, 1, -2)$.

4. $u = xy^2y^3, M_0(2, -1, 1), M_1(3, -1, 2).$

$u(x, y, z)$ skalyar maydonning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi gradiyentini hisoblang.

5. $u = 2xy + 3yz + 4x^2y^2z^2, M_0(5, 1, -2).$

6. $u = x^2yz + xy^2z + xyz^2, M_0(3, 4, 1).$

7. $u = e^xyz, M_0(0, 1, 2).$

8. $u = xy \sin z, M_0(1, 2, \pi/3).$

$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ vektor maydonning vektor chiziqlarini toping.

9. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 6x\vec{j}.$

10. $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{k}.$

11. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3z\vec{k}.$

12. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 6y\vec{j}.$

$\vec{a}$ vektor maydonning berilgan tekislikning birinchi oktantdagi qismi (normal Oz o'q bilan o'tkir burchak tashkil qiladi) orqali oqimini toping.

13. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, x + y + z = 1.$

14. $\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{k}, x + y + z = 1.$

15. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}, 2x + y + z = 1.$

16. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, x + y + 2z = 1.$

$\vec{a}$ vektor maydonning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi divergensiyasini hisoblang.

17. $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}, M_0(2, -1, 2).$

18. $\vec{a} = 5y^2\vec{i} + 4z^2\vec{j} + 2x^2\vec{k}, M_0(1, 2, -1).$

19. $\vec{a} = (x + y^2 + 3z)\vec{i} + (y - z^2)\vec{j} + (z - x^2)\vec{k}, M_0(1, -1, 1).$

20. $\vec{a} = (x + y + z)\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\vec{k}, M_0(3, -1, 1).$

$\vec{a}$ vektor maydonning berilgan L kontur bo'ylab sirkulyatsiyasini hisoblang.

21. $\vec{a} = y\vec{i} - z^2\vec{j} + x^2y\vec{k}, L = \{x = 2 \cos t, y = \sin t, z = 1, t \in [0, 2\pi]\}.$

22. $\vec{a} = -x^2y\vec{i} + 4\vec{j} + x^2z\vec{k}, L = \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 4, t \in [0, 2\pi]\}.$

23. $\vec{a} = x^3\vec{i} - z^2\vec{j} + y\vec{k}$, $L = \{x = \cos t, y = 2 \sin t, z = 2 \cos t, t \in [0, 2\pi]\}$.

24. $\vec{a} = -2z\vec{i} - x^2\vec{j} + z\vec{k}$, $L = \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi]\}$.

$\vec{a}$ vektor maydonning rotorini toping.

25. $\vec{a} = 3xy^2\vec{i} + 2yz^2\vec{j} - 5zx^2\vec{k}$. 26. $\vec{a} = (x - 2y)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} - 5zx^2\vec{k}$.

27. $\vec{a} = xyz\vec{i} + (x - yz^2)\vec{j} + z(x + y)\vec{k}$. 28. $\vec{a} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} - zx^2\vec{k}$.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Алимов Ш.О. Ашуров Р.Р. Математик тахлил 1,2-қисм. Ўқув қўлланма. – Тошкент: Турон-Иқбол. 2017.
2. Ахмедов А.Б., Шодмонов Г., Эсонов Э.Э., Абдукаримов А.А., Шамсиев Д.Н. Олий математикадан индивидуал топшириқлар. 1-қисм. Ўқув қўлланма. –Тошкент: Ўзбекистон энциклопедияси, 2014, 2017.
3. Ахмедов А.Б., Шодмонов Г., Эсонов Э.Э., Абдукаримов А.А., Шамсиев Д.Н. Олий математикадан индивидуал топшириқлар. 2 қисм. Ўқув қўлланма. –Тошкент: Ўзбекистон энциклопедияси, 2017.
4. Бугров, Я.С. Высшая математика. задачник.: Учебное пособие для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 192 с.
5. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016. - 281 с.
6. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.1 в 2 книгах. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016. - 501 с.
7. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.3 в 2 книгах. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016. - 507 с.
8. Гусак А.А. Высшая математика 1 том. -Мн.:TetraSistems, 2000.-504 с.
9. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике / Я.Б. Зельдович. - М.: Физматлит, 2016. - 520 с.
- 10.Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2013. - 384 с.
11. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2010. - 216 с.
12. Минорский П. Сборник задач по высшей математике. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010г.

13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 2 частях -М.: Наука, 2001.
14. Письменный Д. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. -М.: Айрис Пресс, 2008.
15. Шипачев В.С. Высшая математика. полный курс в 2 т. том 1: Учебник для академического бакалавриата / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 288 с.
16. Шипачев В.С. Высшая математика. полный курс в 2 т. том 2: Учебник для академического бакалавриата / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 341 с.
17. John Bird. Basic Engineering Mathematics (5a Ed.), 2010, X+563 pp. ISBN-13: 978-1-85-617697-2.
18. S. Ahmad, A. Ambrosetti A Textbook on Ordinary Differential Equations, 2014, XIV+324pp, ISBN 978-3-319-02128-7.
19. Peter V. O'Neil, Advanced Engineering Mathematics (7th edition), 2011, X+912 pp, ISBN-10: 1111427410.
20. Glyn James, Modern Engineering Mathematics (5th Edition) 2015, XII+1152 pp. ISBN: 1292080736.
21. Jr. Tomas. Calculus. Copyright, 2005.

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
10-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.....	4
10.1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. Asosiy tushunchalar.....	4
10.2. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.....	5
10.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning maxsus yechimlari.....	7
10.4. O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar	8
10.5. Bir jinsli differensial tenglamalar.....	11
10.6. Bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamalar.....	15
10.7. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.....	18
10.8. Bernulli tenglamasi	22
10.9. To‘la differensial tenglama.....	25
10.10. YUqori tartibli differensial tenglamalar.....	28
10.11. YUqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.....	35
10.12. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar	36
10.13. Ikkinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalar..	40
10.14. Ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usuli.....	42
10.15. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar.....	44
10.16. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar.....	49
10.17. Differensial tenglamalar sistemalari.....	54
10.18. Differensial tenglamalarning normal sistemasi.....	55
10.19. CHiziqli differensial tenglamalar sistemalari.....	59
10.20. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi....	61
10.21. Differensial tenglamalarning tadbirlari.....	65
Nazariy savollar. Mashqlar.....	73
11-BOB. QATORLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI	77

11.1.	Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar.....	77
11.2.	Qator yaqinlashuvchiligining zaruriy sharti. Garmonik qator.....	80
11.3.	Musbat hadli qatorlar hamda ular yaqinlashuvchiligining yetarli alomatlar....	82
11.4.	Ishoralari o'zgaruvchi qatorlar. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. Ishoralari almashinuvchi qatorlar.....	89
11.5.	Funksional qatorlar. Funksional qatorlarning yaqinlashish sohasi.....	94
11.6.	Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.....	98
11.7.	Darajali qatorlar. Darajali qatorning yaqinlashish oralig'i va yaqinlashish radiusi.....	99
11.8.	Darajali qatorlarning xossalari.....	103
11.9.	Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Teylor va Makloren qatorlari	105
11.10.	Ayrim elementar funksiyalarning darajali qatorlar ko'rinishidagi yoyilmalari.....	107
11.11.	Darajali qatorlarning tadbiqlari.....	111
11.12.	Fure qatorlari. 2π davrli davriy funksiyalarni Fure qatoriga yoyish.....	114
11.13.	Davriy bo'lmagan funksiyalarni Fure qatoriga yoyish.....	125
11.14.	Fure integrali.....	127
11.15.	Fure integralining kompleks shakli. Fure almashtirishi.....	130
	Nazariy savollar. Mashqlar.....	132
12-BOB.	IKKI VA UCH O'LCHOVLI INTEGRALLAR.....	135
12.1.	Ikki o'lchovli integral tushunchasiga keltiriladigan masalalar.....	135
12.2.	Ikki o'lchovli integral	136
12.3.	Ikki olchovli integralning asosiy xossalari.....	138
12.4.	Ikki o'lchovli integralni hisoblash.....	140
12.5.	Ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.....	149
12.6.	Ikki o'lchovli integralning tadbiqlari.....	161
12.7.	Uch o'lchovli integral.....	176
12.8.	Uch o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.....	184
12.9.	Uch o'chovli integralning tadbiqlari.....	193

Nazariy savollar. Mashqlar.....	198
13-BOB. EGRI CHIZIQLI INTEGRAL VA SIRT INTEGRALLARI.....	203
13.1. Birinchi tur egri chiziqli integral	203
13.2. Birinchi tur egri chiziqli integralning mavjudligi va xossalari.....	206
13.3. Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash	208
13.4. Birinchi tur egri chiziqli integralning tadbiqlari	212
13.5. Ikkinchi tur egri chiziqli integral	217
13.6. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning mavjudligi va uni hisoblash.....	219
13.7. Ostrogradskiy-Grin formulasi.....	226
13.8. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaslik sharti.....	228
13.9. Birinchi tur sirt integrali.....	235
13.10. Ikkinchi tur sirt integrali.....	241
13.11. Ostrogradskiy-Gauss formulasi.....	254
13.12. Stoks formulasi.....	257
Nazariy savollar. Mashqlar.....	260
14-BOB. MAYDONLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI.....	264
14.1. Skalyar maydon tushunchasi.....	264
14.2. Yo‘nalish bo‘yicha hosila.....	265
14.3. Skalyar maydonning gradiyenti va uning xossalari	268
14.4. Vektor maydon va vektor chiziqlar.....	271
14.5. Vektor maydon oqimi va divergensiyasi	273
14.6. Vektor maydon sirkulyatsiyasi va rotorini	281
14.7. Gamilton operatori.....	286
Nazariy savollar. Mashqlar.....	289
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	292

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
10-ГЛАВА. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	4
10.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия.....	4
10.2. Дифференциальные уравнения первого порядка.....	5
10.3. Особое решение дифференциальных уравнений первого порядка.....	7
10.4. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.....	8
10.5. Однородные дифференциальные уравнения.....	11
10.6. Уравнение приводящие к однородному уравнению.....	15
10.7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	18
10.8. Уравнение Бернулли	22
10.9. Уравнения в полных дифференциалах.....	25
10.10. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	28
10.11. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.....	35
10.12. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.....	36
10.13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.....	40
10.14. Метод вариации произвольных постоянных.....	42
10.15. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	44
10.16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	49
10.17. Системы дифференциальных уравнений.....	54
10.18. Нормальные системы дифференциальных уравнений.....	55

10.19.	Система линейных дифференциальных уравнений.....	59
10.20.	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	61
10.21.	Применение дифференциальных уравнений.....	65
	Теоретические вопросы. Примеры.....	73
11-ГЛАВА.	ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЯДОВ.....	77
11.1.	Числовые ряды. Основные определения.....	77
11.2.	Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд....	80
11.3.	Знаколожительные ряды и их достаточные признаки сходимости....	82
11.4.	Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Знакопеременные ряды.....	89
11.5.	Функциональные ряды. Область сходимости функциональных рядов.....	94
11.6.	Свойства равномерно сходящихся рядов.....	98
11.7.	Степенные ряды. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.....	99
11.8.	Свойства степенных рядов.....	103
11.9.	Разложение функций в степенные ряды. Ряды тейлора и Маклорена.....	105
11.10.	Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций.....	107
11.11.	Применение степенных рядов.....	111
11.12.	Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье с периодом 2π ..	14
11.13.	Разложение в ряд Фурье непериодических функций.....	125
11.14.	Интеграл Фурье.....	127
11.15.	Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье. Теоретические вопросы. Примеры.....	130 132
12-ГЛАВА.	ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.....	135
12.1.	Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.....	135

12.2.	Двойной интеграл.....	136
12.3.	Основные свойства двойного интеграла.....	138
12.4.	Вычисление двойного интеграла.....	140
12.5.	Замена переменных в двойных интегралах.....	149
12.6.	Применение двойного интеграла.....	161
12.7.	Тройной интеграл.....	176
12.8.	Замена переменных в тройных интегралах.....	184
12.9.	Применение тройного интеграла.....	193
	Теоретические вопросы. Примеры.....	198
13-ГЛАВА.	КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ	
	ИНТЕГРАЛЫ.....	203
13.1.	Криволинейные интегралы первого рода.....	203
13.2.	Условия существования криволинейных интегралов первого рода и их свойства.....	206
13.3.	Вычисление криволинейных интегралов первого рода.....	208
13.4.	Применение криволинейных интегралов первого рода.....	212
13.5.	Криволинейные интегралы второго рода	217
13.6.	Условия существования криволинейных интегралов первого рода и их вычисление.....	219
13.7.	Формула Остроградского-Грина.....	226
13.8.	Независимость криволинейных интегралов от пути интегрирования.....	228
13.9.	Поверхностные интегралы первого рода.....	235
13.10.	Поверхностные интегралы второго рода.....	241
13.11.	Формула Гаусса-Остроградского.....	254
13.12.	Формула Стокса.....	257
	Теоретические вопросы. Примеры.....	260
14-ГЛАВА.	ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ.....	264
14.1.	Понятие скалярного поля.....	264

14.2. Производная по направлению.....	265
14.3. Градиент скалярного поля и его свойства.....	268
14.4. Векторное поле. Векторные линии.....	271
14.5. Дивергенция и поток векторного поля.....	273
14.6. Циркуляция и ротор векторного поля.....	281
14.7. Оператор Гамильтона.....	286
Теоретические вопросы. Примеры.....	289
ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРЫ.....	292

CONTENTS

INTRODUCTION.....	3
CHAPTER 10. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.....	4
10.1. The tasks leading to the differential equations. Basic concepts.....	4
10.2. Differential equations of the first order	5
10.3. Special solutions of the differential equations of the first order.....	7
10.4. Differential equations with the divided and divided variables.....	8
10.5. Uniform differential equations	11
10.6. The equation leading to the uniform equation	15
10.7. Linear ordinary differential equations.....	18
10.8. Bernoulli's equations	22
10.9. The equations in full differentials.....	25
10.10. Differential equations of the highest orders.....	28
10.11. Linear differential equations of the highest orders.....	35
10.12. Linear uniform differential equations of the second order	36
10.13. Linear non-uniform differential equations of the second order.....	40
10.14. Method of a variation of any constants.....	42
10.15. The linear uniform differential equations of the second order with constant coefficients.....	44
10.16. The linear non-uniform differential equations of the second order with constant coefficients.....	49
10.17. Systems of the differential equations.....	54
10.18. Normal systems of the differential equations.....	55
10.19. System of the linear differential equations	59
10.20. The systems of the linear differential equations with constant coefficients.....	61

10.21.	Application of the differential equations.....	65
	Theoretical questions. Examples.....	73
CHAPTER 11.	ELEMENTS OF THE THEORY OF SERIES.....	77
11.1.	Numerical series. Main definitions.....	77
11.2.	Necessary condition of convergence of a series. Harmonious series.....	80
11.3.	Positive series and their sufficient signs of convergence	82
11.4.	Sign-variable series. Absolutely and conditionally meeting series.....	89
11.5.	Functional series. Area of convergence of functional series.....	94
11.6.	Properties of evenly meeting series.....	98
11.7.	Power series. Radius of convergence and area of convergence of power series	99
11.8.	Properties of power series.....	103
11.9.	Decomposition of functions in power series. Taylor and Makloren's series.....	105
11.10.	Decomposition in power series of some the elementranykh of functions.....	107
11.11.	Application of power series.....	111
11.12.	Fourier's series. Decomposition of functions in a series Fourier with the period 2π	114
11.13.	Decomposition in a series Fourier of acyclic functions.....	125
11.14.	Fourier's integral	127
11.15.	Fourier's integral in a complex form. Fourier's transformation....	130
	Theoretical questions. Examples	132
CHAPTER 12.	DOUBLE AND TRIPLE INTEGRALS.....	135
12.1.	The tasks leading to a concept of double integral	135
12.2.	Double integral.....	136
12.3.	Main properties of double integral	138

12.4.	Calculation of double integral	140
12.5.	Replacement of variables in double integrals	149
12.6.	Application of double integral.....	161
12.7.	Triple integral	176
12.8.	Replacement of variables in threefold integrals	184
12.9.	Application of threefold integral	193
	Theoretical questions. Examples	198
CHAPTER 13.	CURVILINEAR AND SUPERFICIAL INTEGRALS	203
13.1.	Curvilinear integrals of the first sort	203
13.2.	Living conditions of curvilinear integrals of the first sort and their property	206
13.3.	Calculation of curvilinear integrals of the first sort	208
13.4.	Application of curvilinear integrals of the first sort.....	212
13.5.	Curvilinear integrals of the second sort	217
13.6.	Living conditions of curvilinear integrals of the first sort and their calculation	219
13.7.	Ostrogradsky-Green's formula	226
13.8.	Independence of curvilinear integrals of a way of integration.....	228
13.9.	Superficial integrals of the first sort	235
13.10.	Superficial integrals of the second sort	241
13.11.	Gauss-Ostrogradsky's formula	254
13.12.	Stokes formula	257
	Theoretical questions. Examples	260
CHAPTER 14.	ELEMENTS OF THE THEORY OF THE FIELD	264
14.1.	Concept of the scalar field	264
14.2.	Derivative in the direction.....	265
14.3.	Gradient of the scalar field and its property	268
14.4.	Vector field. Vector lines.....	271
14.5.	Divergence and stream of the vector field	273

14.6. Circulation and rotor of the vector field	281
14.7. Hamiltonian.....	286
Theoretical questions. Examples	289
LITERATURES.....	292