

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ

1

09
ОЛИЙ
МАТЕМАТИКА
АСОСЛАРИ

"ЎЗБЕКИСТОН"

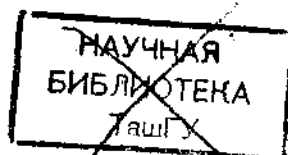
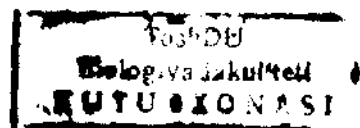
Т. ЖУРАЕВ, А. САЪДУЛЛАЕВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,
Х. МАНСУРОВ, А. ВОРИСОВ

Узб. 2
31
1-214

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ

1

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус
таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари
учун дарслик сифатида тавсия этган*



М.И.Т. Ф.Р.К.

Тошкент
«Ўзбекистон»

1995

Мухаррир М. Саъдуллаев

Олий математика асослари: Олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик/Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Е. Худойбергандов ва бошқ.— Т.: Ўзбекистон, 1994.— 280 б.

1. Жўраев Т. ва бошқ.

ISBN 5-640-01760-0

Мазкур дарслик университетларнинг катор факультетлари, шунингдек, техника олий ўқув юртлари факультетлари талабалари учун мўлжалланган.

Дарслик олий алгебра, аналитик геометрия, математик анализ курсининг интеграл ҳисобгача бўлган мавзуларини ўз ичига олади. Шу билан бирга унинг дастлабки маълумотлар бобида олий математикани қуришда асос бўладиган тўплам, функция, тенгламалар ҳамда тенгсизликлар баён этилган.

№ 36—94

Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

22.11я73

- Алгебра
- Аналитик геометрия
- Математик анализ

СУЗ БОШИ

Ўзбекистоннинг Мустақил Республика бўлиб шаклланиши, ундаги туб ижтимоий ўзгаришлар, тил ҳақидаги қонуннинг қабул қилиниши олий таълим олдига қатор янги вазифаларни қўйди. Халқ хўжалигининг ҳамма соҳалари учун ҳозирги замон талабига жавоб берадиган мутахассисларни тайёрлаш долзарб масалалар қаторидан жой олди. Олий ўқув юртларида назарий билимлари пухта, айти пайтда ундан амалиётда кенг фойдалана оладиган мутахассислар етиштириш зарур. Бундай мутахассисларни тайёрлашда олий ўқув юртларида ўқитиладиган олий математиканинг аҳамияти каттадир. Шунинг ҳам таъкидлаш лозимки, олий математикани ўргатиш талабаларни факат қатор математик маълумотлар билан таништиришдан иборат бўлмасдан, балки мантикий фикрлашга, бинобарин уни татбиқ этишга ҳам қаратилгандир. Бу эса ўз навбатида самарали ўқитишда муҳим омиллардан бири ҳисобланган дарсликлар, ўқув қўлланмаларни яратишни тақозо этмоқда.

Қўпчилик олий ўқув юртларида тайёрланадиган мутахассисликларга қараб математика турли ҳажмда ўқитилади.

Олий математиканинг турли соҳаларини ўз ичига оладиган, деярли барча мутахассисликларга мос келадиган дарсликнинг заруриятини эътиборга олиб қўп жилдлик «Олий математика асослари» ни ёзишга жазм этилди.

Мазкур биринчи жилд бешта бўлимдан иборат. Дастлабки маълумотлар деб аталган бўлимда олий математикани қуришда асос бўладиган тўплам, сон, функция, тенгламалар ҳамда тенгсизликлар баён этилади.

Олий алгебра бўлимида детерминантлар, матрицалар тушунчалари ва уларнинг хоссалари келтирилади. Кейинчалик бу тушунчалардан фойдаланиб тенгламалар системасини ечиш ўрганилади. Алгебранинг асосий теоремаси, юқори даражали тенгламаларни радикалларда ечиладиган ҳамда ечилмайдиган ҳоллари ҳам шу бўлимда қаралади.

Аналитик геометрия бўлимида асосий геометрик объектлар — тўғри чизик, эгри чизик, текислик, сирт ва ҳоказолар аналитик усул ёрдамида ўрганилиши баён этилади.

Математик анализ бўлими функция limiti, узлуксизлиги, функциянинг хосила ва дифференциаллари, хосилалар ёрдамида функцияларни текшириш мавзуларини ўз ичига олади.

Мазкур китобни ёзишда муаллифлар олий математиканинг асосий тушунчалар ва тасдиқларини мумкин қадар содда, айти пайтда математик катъият ва изчиллик билан баён этилишига эътиборни қаратдилар. Бунда уларга кўп йиллар мобайнида олий математиканинг турли соҳалари бўйича ўқиган маърузалари катта ёрдам берди.

Муаллифлар дарслик кўлёзмасини ўқиб, унинг сифатини янада ошириш борасидаги фикр ва мулоҳазалари учун профессорлар Х. Р. Латипов ҳамда Р. Р. Ашуровга ўз миннатдорчиликларини изҳор қиладилар ва китобнинг камчиликларини бартараф этишга онд таклифлари учун китобхонларга аввалдан ташаккур билдирадилар.

Олий математика ўрта мактаб математикасининг узвий давоми бўлиб, уни ўрганишда ўрта мактаб математикаси таянч вазифасини ўтайди. Айни вақтда математиканинг асосий тушунчалари (тенглама, функция ва х. к.) ўрта мактаб дорасидан кенгайтирилиб, математик қатъият ва изчиллик билан баён этилади.

Шу вазиятни эътиборга олиб, мазкур бўлимда ҳақиқий сонлар, функция, тенглама ва тенгсизликлар, шунингдек геометрик шаклларнинг муҳим хоссалари келтирилади.

1-Б О Б

ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1-§. Тўплам. Тўплamlар устида амаллар

1. Тўплам тушунчаси. Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич, айни пайтда муҳим тушунчаларидан бири. Уни мисоллар ёрдамида тушунтириш кийин эмас. Масалан, аудиториядаги талабалар тўплами, шакафдаги китоблар тўплами, бир нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар тўплами, ушбу $x^2 - 5x + 6 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари тўплами. Демак, тўплам маълум бир белгиларга эга бўлган нарсаларнинг мажмуасидан ташкил топилар экан. Тўпламни ташкил этган нарсалар унинг элементлари дейилади.

Математикада тўплам бош ҳарфлар билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлар билан белгиланади. Масалан, A, B, C — тўплamlар, a, b, c — тўпламнинг элементлари. Баъзан тўплamlар уларнинг элементларини кўрсатиш билан ҳам ёзилади. Масалан, 2, 4, 6, 8, 10 сонлардан ташкил топган тўплам

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

кўринишда ёзилади.

Агар a бирор A тўпламнинг элементи бўлса, $a \in A$ каби ёзилади ва « a элемент A тўпламга тегишли» деб ўкилади. Агар a шу тўпламга тегишли бўлмаса, унда $a \notin A$ каби ёзилади ва « a элемент A тўпламга тегишли эмас» деб ўкилади. Масалан, юқоридаги A тўпламда $10 \in A$, $15 \notin A$.

Агар A тўплам чекли сондаги элементлардан ташкил топган бўлса, *чекли тўплам*, акс ҳолда *учексиз тўплам* дейилади. Масалан, $A = \{2, 4,$

6, 8, 10} — чекли тўплам, бир нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар тўплами эса чексиз тўплам бўлади. Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\emptyset$ каби белгиланади. Масалан, $x^2 + x + 1 = 0$ квадрат тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан иборат тўплам бўш тўплам бўлади (чунки бу тенглама битта ҳам ҳақиқий илдизга эга эмас).

Иккита E ва F тўпламларни қарайлик. Агар E тўпламнинг ҳар бир элементи F тўпламнинг ҳам элементи бўлса, E тўплам F тўпламнинг қисми дейилади ва $E \subset F$ каби белгиланади.

Агар $E \subset F$ ва ўз навбатида $F \subset E$ бўлса, у ҳолда E ва F тўпламлар бир-бирига тенг тўпламлар дейилади ва $E = F$ каби ёзилади.

2. Тўпламлар устида амаллар. Иккита E ва F тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф. E ва F тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган A тўплам E ва F тўпламлар йиғиндиси (бирлашмаси) дейилади ва

$$A = E \cup F$$

каби белгиланади.

2-таъриф. E ва F тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган B тўплам E ва F тўпламлар кўпайтмаси (кесишмаси) дейилади ва

$$B = E \cap F$$

каби белгиланади.

3-таъриф. E тўпламнинг F тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ташкил топган C тўплам F тўпламнинг E тўпламдан айирмаси дейилади ва

$$C = E \setminus F$$

каби белгиланади.

4-таъриф. Биринчи элементи E тўпламдан ($a \in E$), иккинчи элементи F тўпламдан ($b \in F$) олиниб ҳосил қилинган барча (a, b) кўринишдаги жуфтликлардан тузилган тўплам E ва F тўпламларнинг тўғри (Декарт) кўпайтмаси дейилади ва

$$E \times F$$

каби белгиланади. Демак,

$$E \times F = \{(a, b) : a \in E, b \in F\}.$$

Хусусан, $E = F$ бўлганда $E \times E = E^2$ бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 3\}$$

тўпламларни қарайлик. Бу тўпламлар учун

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\},$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\},$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\},$$

$$B \setminus A = \{8\},$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$A \cap C = \{1, 3\}$$

$$B \cap C = \emptyset,$$

$$B \times C = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (8, 1), (8, 3)\}.$$

Юқорида келтирилган таърифлардан

$$E \cup E = E, E \cap E = E, E \setminus E = \emptyset,$$

шунингдек $E \subset F$ бўлганда

$$E \cup F = F, E \cap F = E$$

бўлиши келиб чиқади.

Барча $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ — натурал сонлардан иборат тўплам *натурал сонлар тўплами* дейилади ва у N ҳарфи билан белгиланади:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Барча $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ — бутун сонлардан иборат тўплам *бутун сонлар тўплами* дейилади ва у Z ҳарфи билан белгиланади:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Равшанки,

$$N \subset Z$$

бўлади.

3. Тўпламларни солиштириш. Ихтиёрий иккита E ва F тўпламлар берилган ҳолда, табиийки, уларнинг қайси бирининг элементи «кўп» деган савол туғилади. Натижада тўпламларни солиштириш (элементлари сони жиҳатидан солиштириш) масаласи юзага келади. Одатда бу масала икки усул билан ҳал қилинади:

1) тўпламларнинг элементларини бевосита санаш билан уларнинг элементлари сони солиштирилади,

2) бирор қондага кўра бир тўпламнинг элементларига иккинчи тўпламнинг элементларини мос қўйиш йўли билан уларнинг элементлари солиштирилади.

Масалан, $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 4, 9, 16\}$ тўпламларнинг элементлари сонини солиштириб, F тўпламнинг элементлари сони E тўплам элементлари сонидан кўп эканини аниқлаймиз. Ёки, E тўпламнинг ҳар бир элементига F тўпламнинг битта элементини

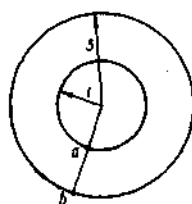
$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9$$

тарзда мос қўйиб, F тўпламда E тўплам элементига мос қўйилмай қолган элемент борлигини (у 16) ҳисобга олиб, яна F нинг элементлари сони E нинг элементлари сонидан кўп деган хулосага келамиз. Агар тўпламлар чексиз бўлса, равшанки, уларни 1- усул билан солиштириб бўлмайди. Бундай вазиятда фақат 2- усул билангина иш қўрилади. Масалан, $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ натурал сонлар тўпламининг ҳар бир n элементига ($n = 1, 2, \dots$) жуфт сонлар тўплами $N_1 = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ нинг $2n$ элементини ($n = 1, 2, \dots$) мос қўйиш билан ($n \rightarrow 2n$) солиштириб, уларнинг элементлари сони «тенг» деган хулосага келамиз.

5- таъриф. Агар E тўпламнинг ҳар бир a элементига F тўпламнинг битта b элементи мос қўйилган бўлиб, бунда

F тўпламнинг ҳар бир элементи учун *E* тўпламда унга мос келадиган биттагина элемент бор бўлса, у ҳолда *E* ва *F* тўпламлар элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган дейилади.

2-мисол. Радиуслари 1 ва 3 га тенг бўлган концентрик айланалар берилган бўлсин (1-чизма).



1-чизма

E тўплам радиуси 1 га тенг айлана нукталаридан, *F* тўплам эса радиуси 3 га тенг айлана нукталаридан иборат бўлсин. Бу *E* ва *F* тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин: айланалар марказидан чиққан ҳар бир нур радиуси 1 га тенг айланани *a* нуктада, радиуси 3 га тенг айланани *b* нуктада кеседи. *E* тўпламнинг *a* нуктасига *F* тўпламнинг *b* нуктасини мос қўямиз ва аксинча. Натижада *E* ва *F* тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.

6-таъриф. Агар *E* ва *F* тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, улар бир-бирига эквивалент тўпламлар деб аталади ва

$$E \sim F$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, F = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлади. Бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Уни қуйидагича

$$1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow \frac{1}{2}, 3 \leftrightarrow \frac{1}{3}, 4 \leftrightarrow \frac{1}{4}, 5 \leftrightarrow \frac{1}{5}$$

ўрнатиш мумкин. Демак, $E \sim F$.

2. Ушбу

$$E = \{2, 4, 6, 8\}, F = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлмайди. Чунки бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиб бўлмайди.

3. Ушбу

$$E = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, F = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлади. Бу тўплам элементлари орасидаги ўзаро бир қийматли мослик ҳар бир n га ($n \in N$) $\frac{1}{n}$ ни ($\frac{1}{n} \in F$) мос қўйиш билан ўрнатилади. Демак, $E \sim F$.

4. Ушбу

$$E = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, N_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

тўпламлар ўзаро эквивалент бўлади. Бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин: ҳар бир натурал n ($n \in N$) сонга $2n$ сон ($2n \in N_1$) мос қўйилади ($n \leftrightarrow 2n$). Демак, $E = N \sim N_1$.

Равшанки, $N_1 \subset N$. Бу эса тўпламнинг қисми ўзига эквивалент бўлиши мумкин эканлигини кўрсатади. Бундай вазият факат чексиз тўпламларгагина хосдир.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан икки чекли тўпламнинг ўзаро эквивалент бўлиши учун уларнинг элементлари сони бир-бирига тенг бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўрамиз.

Эквивалентлик муносабати қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

1°. $E \sim E$ (рефлексивлик хоссаси).

2°. $E \sim F$ бўлса, $F \sim E$ бўлади (симметриклик хоссаси).

3°. $E \sim F$, $F \sim G$ бўлса, $E \sim G$ бўлади (транзитивлик хоссаси).

Тўпламларнинг эквивалентлик тушунчаси тўпламларни синфларга ажратиш имконини беради.

7- таъриф. *Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам санокли тўплам дейилади.*

Масалан,

$$\begin{aligned} N_1 &= \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}, \\ N_2 &= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}, \\ N_3 &= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \end{aligned}$$

тўпламлар санокли тўпламлардир, чунки

$$\begin{aligned} N_1 &\sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n=1, 2, 3, \dots), \\ N_2 &\sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n=1, 2, 3, \dots), \\ N_3 &\sim N \quad \left(\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n=1, 2, 3, \dots\right). \end{aligned}$$

4. Математик белгилар. Математикада тез-тез учрайдиган сўз ва сўз бирикмалари ўрнига махсус белгилар ишлатилади. Улардан энг муҳимларини келтирамиз.

1°. «Агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади» ибораси « $\Rightarrow$ » белгиси орқали ёзилади.

2°. Икки иборанинг эквивалентлиги ушбу « $\Leftrightarrow$ » белги орқали ёзилади.

3°. «Ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига « $\forall$ » умумийлик белгиси ишлатилади.

4°. «Мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига « $\exists$ » мавжудлик белгиси ишлатилади.

2- §. Ҳақиқий сонлар

Сон математиканинг асосий тушунчасидир. Бу тушунча ўқувчига мактаб математика курсидан таниш. Аввало натурал ва бутун сонлар, кейинчалик умумий ном билан, ҳақиқий сонлар деб аталувчи рационал ҳамда иррационал сонлар ўрганилган. Бироқ ҳақиқий сонларнинг олий математикада муҳимлигини эътиборга олиб, улар тўғрисидаги маълумотлар олий математика талаби даражасида қатъий баён этилиши лозим.

1. Рационал сонлар. Маълумки, $\frac{p}{q}$ кўринишдаги сон оддий каср дейилади, бунда p — бутун сон ($p \in Z$) касрнинг сурати, q — натурал

сон ($q \in N$) касрнинг махражи. Хусусан, ҳар қандай натурал ҳамда бутун сон $\frac{p}{q}$ кўринишида ифодаланади (масалан, p бутун сон учун $p = \frac{p}{1}$ бўлади).

Биз $\frac{p}{q}$ касрда p ва q сонларни ўзаро туб сонлар деб қараймиз.

Барча $r = \frac{p}{q}$ кўринишидаги сонлар тўпламини, яъни оддий касрлар тўпламини Q билан белгилаймиз:

$$Q = \left\{ r : r = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}.$$

Равшанки

$$N \subset Q, Z \subset Q.$$

Q тўплам қатор хоссаларга эгадир.

1°. Q тўпламдан олинган ихтиёрий икки $\frac{p_1}{q_1}$ ва $\frac{p_2}{q_2}$ элементлар учун

$$a) \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$$

муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли,

$$b) \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \text{ ва } \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}$$

тенгсизликлардан

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3}$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу ҳол Q тўпламининг тартибланган тўплам эканини билдиради.

2°. Q тўпламда қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари ушбу

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

қоида бўйича киритилган бўлиб, бу амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

$$1) \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_1}{q_1} \quad (\text{коммутативлик хоссаси}),$$

$$2) \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right) + \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} \right),$$

$$\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) \cdot \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \right) \quad (\text{ассоциативлик хоссаси}),$$

$$3) \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right) \cdot \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_3}{q_3} + \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \quad (\text{дистрибутивлик хоссаси}),$$

$$4) \frac{p}{q} + 0 = \frac{p}{q}, \quad \frac{p}{q} \cdot 0 = 0 \quad (\text{нол сонининг хусусияти}),$$

$$5) \frac{p}{q} \cdot 1 = \frac{p}{q} \quad (\text{бир сонининг хусусияти}),$$

$$6) \forall \frac{p}{q} \in Q \text{ учун шундай } -\frac{p}{q} \in Q \text{ сон мавжудки, } \frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q} \right) = 0$$

(карама-карши элементнинг мавжудлиги).

$$7) \forall \frac{p}{q} \in Q \quad (p \neq 0) \text{ учун шундай } \left(\frac{p}{q} \right)^{-1} \in Q \text{ сон мавжудки,}$$

$$\frac{p}{q} \times \left(\frac{p}{q} \right)^{-1} = 1 \quad (\text{тескари элементнинг мавжудлиги}).$$

$$8) \forall \frac{p_1}{q_1} \in Q, \forall \frac{p_2}{q_2} \in Q, \forall \frac{p_3}{q_3} \in Q \text{ сонлар учун}$$

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3},$$

$$9) \forall \frac{p_1}{q_1} \in Q, \forall \frac{p_2}{q_2} \in Q, \forall \frac{p_3}{q_3} \in Q \quad \left(\frac{p_3}{q_3} > 0 \right) \text{ сонлар учун}$$

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3},$$

$$10) \text{ Ихтиёрий икки мусбат } \frac{p_1}{q_1} \text{ ва } \frac{p_2}{q_2} \text{ оддий касрлар учун шундай}$$

натурал n сон мавжудки,

$$n \cdot \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}$$

бўлади. Бу 10) хосса *Архимед аксиомаси* деб юритилади.

3°. Ихтиёрий иккита $\frac{p_1}{q_1}$ ҳамда $\frac{p_2}{q_2}$ оддий касрлар берилган

бўлиб, $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right)$$

оддий каср учун

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right) < \frac{p_2}{q_2}$$

бўлади. Бундан $\frac{p_1}{q_1}$ ҳамда $\frac{p_2}{q_2}$ оддий касрлар орасида оддий каср борлиги ва демак, улар орасида исталганча кўп оддий касрлар борлиги келиб чиқади. Бу Q тўпламнинг зичлик хоссасидир.

8- т а ъ р и ф. Q тўпламнинг элементлари рационал сонлар, Q эса рационал сонлар тўплами дейилади.

Демак, $\frac{p}{q}$ кўринишдаги сон ($p \in Z, q \in N$) рационал сон бўлади.

2. Ҳақиқий сонлар. Биз юқорида рационал сон $\frac{p}{q}$ кўринишида

бўлишини кўрдик. Агар $\frac{p}{q}$ касрнинг махражи $q = 10^k$ ($k \in N$) бўлса, уни *ўнли каср* дейилади. Ўнли каср махражсиз қуйидагича ёзилади: касрнинг суратидаги рақамлар ўнгдан чапга қараб каср махражидаги нолларнинг сонича саналади ва вергул қўйилади (агар суратида рақамлар етишмаса, улар ўрнига ноллар ёзилиб, сўнг вергул қўйилади). Масалан, $\frac{171}{10} = 17,1$, $\frac{2173}{1000} = 2,173$, $\frac{61}{100} = 0,61$,

$$\frac{13}{10000} = 0,0013.$$

Ўнли касрларда вергулдан олдинги сон ўнли касрнинг бутун қисми, кейингиси эса каср қисми бўлади.

Фараз қилайлик, $\frac{p}{q}$ бирор мусбат рационал сон бўлсин. Арифметикада ўрганилган қоидага кўра p бутун сонни q га бўламиз. Бунда қолдик $0, 1, 2, \dots, q-1$ бўлиши мумкин. Агар p ни q га бўлиш жараёнида бирор қадамдан кейин қолдик 0 га тенг бўлса, у ҳолда бўлиш жараёни тўхтаб, $\frac{p}{q}$ каср ўнли касрга айланади. Одатда

бундай ўнли касрни *чекли ўнли каср* дейилади. Масалан, $\frac{59}{40}$ касрда 59 ни 40 га бўлиб, $1,475$ бўлишини топамиз: $\frac{59}{40} = 1,475$. Агар p

ни q га бўлиш жараёни чексиз давом этса, маълум қадамдан кейин юқорида айтилган қолдиқлардан бири яна бир марта учрайди, сўнг ундан олдинги рақамлар мос тартибда такрорланади. Одатда бундай каср *чексиз даврий ўнли каср* дейилади. Такрорланадиган рақамлар (рақамлар бирлашмаси) ўнли касрнинг даври бўлади. Масалан, $\frac{1}{3}$ касрда 1 ни 3 га бўлиб, $0,333\dots$ бўлишини топамиз:

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$$

Ушбу $0,333\dots$, $1,4777\dots$, $2,131313\dots$ касрлар чексиз даврий ўнли касрлардир. Уларнинг даври мос равишда 3, 7, 13 бўлиб,

$$0,(3); 1,4(7); 2,(13)$$

каби ёзилади:

$$0,(3)=0,333\dots, 1,4(7)=1,4777\dots, 2,(13)=2,131313\dots$$

Э с л а т м а. Даври 9 га тенг бўлган чексиз даврий ўнли касрни чекли ўнли каср қилиб ёзилади. Масалан,

$$0,4999\dots=0,4(9)=0,5, 2,71999\dots=2,71(9)=2,72$$

Равшанки, ҳар қандай чекли ўнли касрни ноллар билан давом қилдириб чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин. Масалан, $1,4=1,4000\dots=1,4(0)$, $0,75=0,75000\dots=0,75(0)$.

Демак, ҳар қандай $\frac{p}{q}$ рационал сон чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзилади.

Аксинча, ҳар қандай чексиз даврий ўнли касрни $\frac{p}{q}$ каср кўринишида ёзиш мумкин.

Масалан, ушбу $0,(3)=0,333\dots$, $7,31(06)=7,31060606\dots$ чексиз даврий ўнли касрларни қарайлик.

Аввало уларни

$$0,(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\dots,$$

$$7,31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+\dots$$

кўринишида ёзиб, сўнг чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланамиз:

$$0,(3)=0,333\dots=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3},$$

$$7,31(06)=7,31060606\dots=\frac{731}{100}+\frac{\frac{6}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$

$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{24152}{100\cdot 33}=\frac{965}{132}.$$

Шундай қилиб ихтиёрий рационал сон чексиз даврий ўнли каср орқали ифодаланади ва аксинча, ихтиёрий чексиз даврий ўнли каср рационал сонни ифодалайди.

Бирок, чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар ҳам мавжуд. Масалан, $0,1010010001\dots$; $0,12345\dots$; $1,4142135\dots$.

Юқорида айтилганлардан, бундай чексиз даврий бўлмаган ўнли

касрларни $\frac{p}{q}$ рационал сон кўринишида ифодалаб бўлмайди.

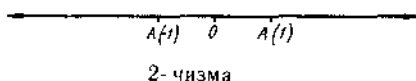
9-таъриф. *Чексиз даврий бўлмаган ўнли каср иррационал сон дейилади.*

Масалан, $\sqrt{2}=1,4142135 \dots$, $\pi=3,141583 \dots$ иррационал сонлардир.

Рационал ҳамда иррационал сонлар умумий ном билан *ҳақиқий сонлар* дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R ҳам рационал сонлар тўплами хоссалари каби хоссаларга эга.

3. Ҳақиқий сонларни геометрик тасвирлаш. Бирор тўғри чизик олиб, бу тўғри чизикда ихтиёрий нуктани O ҳарф билан белгилайлик. O нукта тўғри чизикни икки қисмга — иккита нурга ажратади. Бу нурлардан бирининг йўналишини, одатда O нуктадан ўнг томонга йўналишини мусбат йўналиш, иккинчисини (O нуктадан чап томонга йўналишини) манфий йўналиш деб оламиз. Сўнг маълум бир кесмани ўлчов бирлиги сифатида (бу кесманинг узунлиги 1 деб) қабул қиламиз. Йўналиши ва бирлик кесмаси (масштаби) аниқланган бундай тўғри чизик сонлар ўқи дейилади (2-чизма). Сонлар ўқидаги

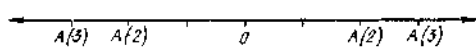


2-чизма

O нуктани нол сонининг геометрик тасвири деб атаймиз. Ўлчов бирлиги сифатида қабул қилинган OE кесмани O нуктадан бошлаб ўнг

ва чап томонларга қўямиз. Бу бирлик кесманинг учлари $A(1)$ ва $A(-1)$ нукталарни белгилайди. $A(1)$ нукта 1 сонининг геометрик тасвири, $A(-1)$ нукта эса -1 сонининг геометрик тасвири бўлади.

Шу усул билан бирлик кесмани кетма-кет O нуктадан ўнг ва чап томонда жойлашган нурларга қўйиб $A(2)$, $A(3)$, ..., $A(-2)$, $A(-3)$, ... нукталарни топамиз (3-чизма).



3-чизма

$A(2)$, $A(3)$, ... нукталар 2, 3, ... сонларнинг геометрик тасвирлари, $A(-2)$, $A(-3)$, ... нукталар эса -2 , -3 , ... сонларнинг геометрик тасвирлари бўлади.

Агар ўлчов бирлигини q та ($q \in N$) тенг бўлакка бўлиб, уларнинг p тасини ($p > 0$) олиб, O нуктадан ўнг ва чап томонларга юқоридагидек жойлаштирсак, ўнг томондаги нурда $\frac{p}{q}$ сонга мос $B(\frac{p}{q})$ нукта,

чап томондаги нурда $-\frac{p}{q}$ сонга мос $B(-\frac{p}{q})$ нукта ҳосил бўлади.

Шу усулда ҳар бир рационал $\frac{p}{q}$ сонга мос келадиган нукта топила-

ди. Бундай нукталар рационал сонларнинг геометрик тасвирлари бўлади. Масалан, $\frac{5}{4}$ рационал сонни тасвирловчи нуктани топиш

учун аввало ўлчов бирлигини O нуктадан ўнг томонга бир марта жойлаштириб, ҳосил бўлган нуктадан бошлаб ўлчов бирлигининг

тўртдан бир қисмини қўйиб, $\frac{5}{4}$ рационал сонни геометрик ифода-ловчи $B(\frac{5}{4})$ нуктани топамиз.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўпламидан олинган ҳар бир рационал сонга тўғри чизикда битта нукта мос келади. Одатда бундай нукталар *рационал нукталар* дейилади.

Бирок, тўғри чизикда шундай нукталар борки, улар бирорта ҳам рационал соннинг геометрик тасвири бўлмайди.

Томони бир бирликка тенг $OABC$ квадратни қарайлик (4-чизма). Бу квадратнинг диагонали OB нинг узунлиги, Пифагор теоремасига кўра $\sqrt{2}$ га тенг бўлади.

Циркулнинг учини O нуктага қўйиб, радиуси OB га тенг бўлган айлана чизилса, бу айлана тўғри чизикни D нуктада кесди. $OB=OD$ бўлганлиги сабабли D нукта мос келадиган сон $\sqrt{2}$ бўлади. (бошқача айтганда $\sqrt{2}$ нинг геометрик тасвири D нукта бўлади).

Маълумки, $\sqrt{2}$ сон рационал сон бўлмасдан иррационал сон эди.

Тўғри чизикда шунга ўхшаган нукталар чексиз кўп бўлиб, улар иррационал сонларнинг геометрик тасвирлари бўлади.

Демак, рационал сонлар тўплами билан тўғри чизик нукталари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас. Ҳақиқий сонлар тўплами тўғрисида вазият бошқача бўлади. Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизик нукталари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд, яъни ҳар бир ҳақиқий сонга тўғри чизикда уни геометрик тасвирловчи битта нукта мавжуд, ва аксинча, тўғри чизикнинг ҳар бир нуктасига R да унга мос келувчи ҳақиқий сон мавжуд.

Келгусида, тўғри чизикнинг нуктаси деганда ҳақиқий сонни, ҳақиқий сон деганда тўғри чизикнинг нуктасини тушунамиз ва зарурат туғилса, уларнинг бири ўрнига иккинчисини ишлатамиз.

Қуйидаги ҳақиқий сонлардан ташкил топган тўпламлар математика курсида жуда кўп ишлатилади.

1. Ушбу

$$\{x \in R: a \leq x \leq b\}$$

тўплам *сегмент* дейилади ва $[a, b]$ каби белгиланади:

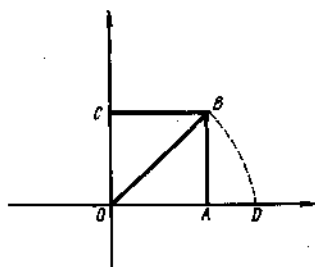
$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}.$$

2. Ушбу

$$\{x \in R: a < x < b\}$$

тўплам *интервал* дейилади ва (a, b) каби ёзилади:

$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}.$$



4-чизма

3. Ушбу

$$\{x \in R: a \leq x < b\}, \{x \in R: a < x \leq b\}$$

тўпламлар ярим интервал дейилади ва улар мос равишда $[a, b)$, $(a, b]$ каби белгиланади:

$$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}.$$

4. Тўпламнинг чегаралари. Фараз қилайлик $E = \{x\}$ бирор хақикий сонлар тўплами бўлсин.

10-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \leq M$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан чегараланган тўплам дейилади, M сон эса E тўпламнинг юқори чегараси дейилади.

Масалан, $E = [0, 1]$ бўлсин. Бу тўпламнинг ҳар бир элементи 1 дан катта эмас. Демак, $E = [0, 1]$ тўплам юқоридан чегараланган.

Агар тўплам юқоридан чегараланган бўлса, унинг юқори чегаралари чексиз кўп бўлади. Масалан, $E = [0, 1]$ тўплам учун 1 ва ундан катта ҳар бир хақикий сон шу тўпламнинг юқори чегараси бўлади.

11-таъриф. Юқоридан чегараланган $E = \{x\}$ тўпламнинг юқори чегараларининг энг кичиги E нинг аниқ юқори чегараси дейилади ва $\sup E$ (супремум E) каби белгиланади.

Масалан, $E = [0, 1]$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси 1 га тенг бўлади: $\sup E = 1$.

12-таъриф. Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \geq m$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам қуйидан чегараланган дейилади, m сон эса E тўпламнинг қуйи чегараси дейилади.

Масалан, $E = (0, 2)$ бўлсин. Бу тўпламнинг ҳар бир элементи 0 дан катта. Демак, $E = (0, 2)$ тўплам қуйидан чегараланган.

Агар тўплам қуйидан чегараланган бўлса, унинг қуйи чегаралари чексиз кўп бўлади. Масалан, $E = (0, 2)$ тўплам учун 0 ва ундан кичик ҳар қандай сон (яъни манфий сонлар) шу тўпламнинг қуйи чегараси бўлади.

13-таъриф. Қуйидан чегараланган $E = \{x\}$ тўпламнинг қуйи чегараларининг энг каттаси E нинг аниқ қуйи чегараси дейилади ва $\inf E$ (инфимум E) каби белгиланади.

Масалан, $E = (0, 2)$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси 0 га тенг бўлади: $\inf E = 0$.

Тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари хақида қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. Ҳар қандай юқоридан (қуйидан) чегараланган тўплам учун уни юқоридан (қуйидан) чегараловчи сонлар орасида энг кичиги (энг каттаси) мавжуд.

5. Хақикий соннинг абсолют қиймати. Бирор x хақикий сон берилган бўлсин. Агар бу сон мусбат бўлса, шу соннинг ўзига, манфий бўлса, унга карама-карши ишорали $-x$ сонига x соннинг абсолют қиймати дейилади ва $|x|$ каби белгиланади. Нол соннинг абсолют қиймати $|0| = 0$.

Демак,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Масалан,

$$|-5| = 5, | \pi | = \pi, | -\sqrt{2} | = \sqrt{2}, |1,5| = 1,5.$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қатор хоссаларга эга.

1°. Ихтиёрий x ҳақиқий сон учун ушбу

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

муносабатлар ўринли бўлади.

2°. Бирор мусбат a ҳақиқий сон берилган бўлсин. Агар x ҳақиқий сон

$$|x| < a$$

тенгсизлиқни қаноатлантирса, у

$$-a < x < a$$

тенгсизлиқларни ҳам қаноатлантиради ва аксинча. Демак,

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

3°. Икки ҳақиқий x ва y сонлар учун

$$\text{а) } |x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\text{б) } |x-y| \geq |x| - |y|,$$

$$\text{в) } |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$\text{г) } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

4°. Ушбу

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

муносабат ўринли.

Юқорида келтирилган хоссаларни исботлаш қийин эмас. Биз улардан бирини, масалан, 2°- хоссанинг исботини келтирамиз.

2°- хоссанинг исботи. Айтайлик,

$$|x| < a$$

бўлсин. Ундан 1°- хоссага кўра

$$x \leq |x|, \text{ демак } x < a,$$

$$-x \leq |x|, \text{ демак } -x < a, \text{ яъни } x > -a$$

бўлади. Бу муносабатлардан эса

$$-a < x < a$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$-a < x < a$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$\begin{aligned} x &< a, \\ -a &< x, \text{ яъни } -x < a \end{aligned}$$

бўлади. Натижада

$$\begin{aligned} x > 0 \text{ бўлганда } |x| &= x < a, \\ x < 0 \text{ бўлганда } |x| &= -x < a \end{aligned}$$

бўлади, улардан

$$|x| < a$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

бўлиши кўрсатилди.

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати ёрдамида тўғри чизикда икки нукта орасидаги масофа тушунчаси киритилади.

Айтайлик, x ва y ҳақиқий сонлар тўғри чизикда $A(x)$ ва $B(y)$ нукталарни тасвирласин.

Ушбу

$$|x - y|$$

миқдор $A(x)$, $B(y)$ нукталар орасидаги масофа дейилади ва $\rho(x, y)$ каби белгиланади:

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

3-§. Текисликда Декарт ҳамда кутб координаталар системаси

Мазкур бобнинг 2-§ ида ҳар бир x ҳақиқий сон ($x \in R$) сонлар ўқида битта нуктани тасвирлашини айтдик. Одатда бу x сон шу нуктанинг координатаси дейилади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R нинг геометрик тасвири сонлар ўқидан иборат.

Энди $R \times R$ Декарт кўлайтмани қарайлик. Маълумки бу тўплам (x, y) жуфтликлардан ($x \in R, y \in R$) ташкил топган:

$$R \times R = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}.$$

Бу тўпламнинг геометрик тасвири текислик бўлади.

Текисликда геометрик объектларни ўрганиш учун унда Декарт координаталари системаси тушунчаси киритилади.

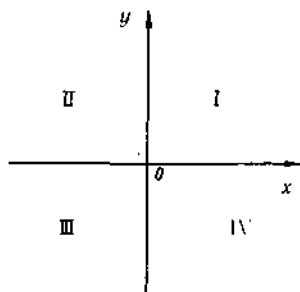
Текисликда ўзаро перпендикуляр бўлган икки тўғри чизикни олайлик. Улардан бири горизонтал, иккинчиси вертикал жойлашсин (5-чизма).

Бу тўғри чизикларнинг кесишган нуктасини O ҳарфи билан белгилаб, уни координата боши деймиз. O нукта горизонтал тўғри чизикни икки қисмга ажратиб, улардан ўнг томондагисини мусбат йўналиш, чап томондагисини эса манфий йўналиш деб қараймиз.

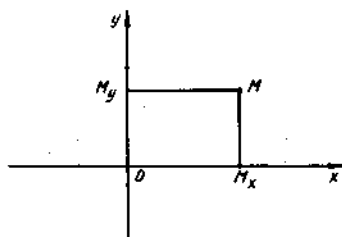
Шунга ўхшаш O нукта вертикал тўғри чизикни ҳам икки қисмга ажратади. Юқоридаги қисми мусбат йўналишда, пастдаги қисми манфий йўналишда деб қараймиз (5- чизмада мусбат йўналишлар стрелкалар ёрдамида кўрсатилган).

Одатда горизонтал чизик OX ўқи ёки *абсцисса ўқи*, вертикал чизик OY ўқи ёки *ордината ўқи* дейилади. Абсцисса ва ордината ўқлари *координата ўқлари* дейилади.

Координата ўқлари текисликни тўртта қоракка ажратади. Бу қораклар 5- чизмада кўрсатилган тартибда номерланади.



5- чизма



6- чизма

Масштаб бирлигини тайинлаб, текисликда бирор M нуктани оламиз. Бу нуктадан аввал абсцисса ўқида, сўнг ордината ўқида перпендикулярлар туширамиз. Уларнинг координата ўқлари билан кесишган нукталарини мос равишда M_x ва M_y орқали белгилаймиз (6- чизма).

OX ўқидаги M_x нуктани ифодалаган сонни x дейлик (x сон M_x нукта O нуктадан ўнгга бўлса, мусбат, чапда бўлса, манфий бўлади). Шунга ўхшаш OY ўқидаги M_y нуктани ифодалаган сонни y деймиз (y сон M_y нукта O нуктадан юқорида бўлса, мусбат, пастда бўлса, манфий бўлади). M_x ва M_y нукталар сонлар ўқида x ва y сонларни аниқлайди. Бу x ва y сонлардан тузилган (x, y) жуфтлик M нуктанинг координаталари: x га M нуктанинг биринчи координатаси ёки абсциссаси, y га M нуктанинг иккинчи координатаси ёки ординатаси дейилади. M нукта координаталари орқали

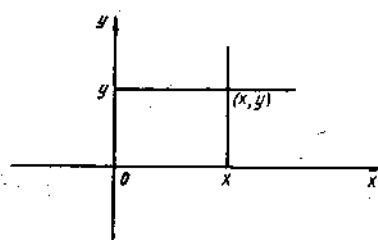
$$M = M(x, y)$$

каби ёзилади.

Э с л а т м а . Абсцисса ўқидаги нукталарнинг координаталари $(x, 0)$, ордината ўқидаги нукталарнинг координаталари $(0, y)$, координата бошининг координаталари $(0, 0)$ бўлади.

Ихтиёрий иккита x ва y ҳақиқий сонлар берилган бўлиб, улардан тузилган (x, y) жуфтликни қарайлик. Бу жуфтлик текисликда битта нуктани тасвирлайди. Бунни кўрсатиш учун абсцисса ўқида x сонга мос келадиган нуктани, ордината ўқида y сонга мос келадиган нуктани топиб, бу нукталардан мос равишда абсцисса ва ордината ўқларига перпендикуляр чиқарамиз. Перпендикулярларнинг кесишган нуктаси координаталари (x, y) бўлган нуктани ифодалайди (7- чизма).

Шундай қилиб текисликдан олинган ҳар бир нукта иккита x ва y ҳақиқий сонлардан тузилган (x, y) жуфтликни ҳосил қилади. Аксинча ижтиёрий иккита x ва y ҳақиқий сонлардан тузилган (x, y)



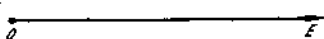
7- чизма

жуфтлик текисликда битта нуктани ифодалайди.

Юқорида келтирилган тадбирлар нуктанинг текисликдаги вазиятини тўлиқ аниқлаш имконини беради. Одатда бундай тадбирлар натижаси *тўғри бурчакли Декарт координаталари системаси*, қисқача *Декарт координаталари системаси* дейилади.

Декарт координаталари системаси билан бир каторда кутб координаталари системаси ҳам муҳим ўрин тутати.

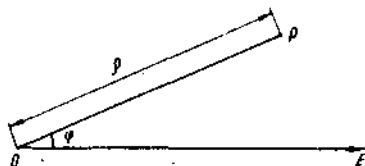
Кутб координаталари, кутб нукта деб аталувчи O нукта ва ундан чикувчи OE нурдан — кутб ўқидан иборат (8- чизма).



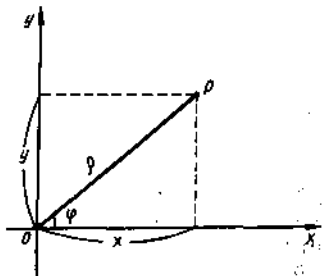
8- чизма

Кутб координаталари системаси берилган бўлиб, P текисликдаги бирор нукта бўлсин. Фараз қилайлик ρ P нуктадан O нуктагача бўлган масофа, φ эса кутб ўқини OP нур билан ташкил этган бурчаги бўлсин.

Нуктанинг кутб координаталари деб ρ ва φ сонларига айтилади. Бунда ρ биринчи координата бўлиб, φ кутб радиуси, φ эса иккинчи координата бўлиб, кутб бурчаги дейилади. Кутб координаталарида P нукта $P(\rho, \varphi)$ каби белгиланади (9- чизма).



9- чизма



10- чизма

Равшанки, $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Энди нуктанинг Декарт координаталари билан кутб координаталари орасидаги боғланишни кўрайлик. Бунинг учун координата бошини кутб нукта билан, абсцисса ўқининг мусбат йўналишини эса кутб ўқи билан устма-уст тушадиган қилиб оламиз. Декарт координаталар системасида P нукта (x, y) координаталарга эга бўлсин (10- чизма).

Равшанки, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Бу формулалар нуктанинг Декарт координаталари билан кутб координаталарини боғловчи формулалардир.

ФУНКЦИЯ

1-§. Функция тушунчаси

1. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар. Табиатда, фан ва техниканинг барча соҳаларида ҳар хил миқдорларни (узунлик, юза, вақт, масса ва х. к.) учратамиз. Бундай миқдорлар вазиятга қараб турли қийматларни қабул қилиши мумкин. Масалан, ҳар қандай учбурчакнинг бурчаклари йиғиндиси ҳар доим 180° га тенг бўлса, учбурчаклар периметри эса (уларнинг томонлари узунлигига қараб) турлича бўлади. Бундан учбурчак бурчаклари йиғиндиси ўзгармас миқдор, учбурчак периметри эса ўзгарувчи миқдор экани кўринади. Натижада икки хил — ўзгарувчи ҳамда ўзгармас миқдорларга дуч келамиз.

Ўзгарувчи миқдорлар x , y , z ва ҳоказо ҳарфлар билан белгиланади.

Агар ўзгарувчи миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари тўплами маълум бўлса, ўзгарувчи берилган дейилади (масалан, барча мусбат сонлар тўплами ўзгарувчи миқдор сифатида олинган айлана радиуси r нинг қабул қиладиган қийматлари тўплами бўлади).

Математикада бир нечта ўзгарувчи миқдорлар ва улар орасидаги боғланишлар ўрганилади. Мисол тариқасида радиуси r га тенг бўлган айлана узунлигини олайлик. Бундай айлана узунлиги

$$C = 2\pi r \quad (1)$$

бўлади. Айлана радиуси r ҳамда айлана узунлиги C ўзгарувчи миқдорлардир. Улар (1) муносабат билан боғланган. Бу боғланишдан кўринадики, айлана радиуси эркин равишда мусбат қийматларни қабул қилса, айлана узунлиги эса унга боғлиқ (демак, эрксиз) равишда қийматларни қабул қилади.

Кейинчалик, ўзгарувчи миқдор, ўзгармас миқдор иборалари ўрнига (қисқа айтиш мақсадида) мос равишда ўзгарувчи, ўзгармас сўзларини ишлатамиз.

2. Функция таърифи. Функциянинг берилиш усуллари. Иккита x ва y ўзгарувчиларни қарайлик. x ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлари тўплами X , y ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлар тўплами Y ҳақиқий сонлар тўпламларидан иборат бўлсин.

1-таъриф. Агар X тўпламдан олинган ҳар бир x сонга бирор y қоидага ёки қонунга кўра Y тўпламнинг битта y сони мос қўйилган бўлса, y ҳолда X тўпламда функция аниқланган (берилган) дейилади.

Бунда X тўплам функциянинг аникланиш (берилиш) соҳаси, Y тўплам эса функциянинг ўзгариш соҳаси, x — функция *аргументи*, y эса x нинг *функцияси* дейилади. f хар бир x га битта y ни мос қўювчи қондани билдиради.

Келтирилган таърифдаги x , y ва f бирлаштирилиб, y ўзгарувчи x нинг функцияси дейилиши —

$$y = f(x)$$

тарзида ёзилади ва «игрек тенг эф икс» деб ўкилади.

Агар хар бир x ($x \in X$) га бошқа қондага қўра битта y ($y \in Y$) мос қўйилса, табиийки бошқа функция ҳосил бўлади, ва уни, масалан, $y = \varphi(x)$ каби ёзиш мумкин.

М и с о л л а р. 1. $X = R$, $Y = R$ тўпламлар берилган бўлиб, f — хар бир x хақикий сонга ($x \in X$) унинг квадратини ($x^2 \in Y$) мос қўювчи қонда бўлсин. Бу ҳолда

$$y = x^2$$

функцияга эга бўламиз.

2. Мос қўйиш қондаси қуйдагича бўлсин: хар бир мусбат x сонга 1, манфий x сонга -1 ва $x=0$ сонга $y=0$ мос қўйилади. Натижада $y = f(x)$ функция ҳосил бўлади. Уни қуйдагича

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > 0, \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ёзиш мумкин. Одатда бу функция

$$y = \operatorname{sign} x$$

каби белгиланади. Бунда sign — лотинча *signum* сўзидан олинган бўлиб, «белги» деган маънони англатади.

$y = f(x)$ функция берилган бўлиб, унинг аникланиш соҳаси X бўлсин. X тўпладан бирор x_0 нуктани оламиз. Равшанки, x_0 нуктага битта y_0 сон мос келади. Бу y_0 сон берилган $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги қиймати дейилади ва $y_0 = f(x_0)$ каби белгиланади.

Энди x аргументнинг X тўпламдаги хар бир қийматига мос $y = f(x)$ функциянинг қийматини топиб, ушбу

$$\{f(x) : x \in X\}$$

тўпламни ҳосил қиламиз. Одатда бу тўплам *функция қийматлари тўплами* дейилади ва Y_f каби белгиланади. Равшанки, $Y_f \subset Y$ бўлади.

Текисликда Декарт координаталар системасини олайлик. Абсцисса ўкига $y = f(x)$ функциянинг аникланиш соҳасини жойлаштирамиз. Сўнг X тўпламнинг x нукталарида функция қийматлари $f(x)$ ни ҳисоблаб, уларни ордината ўкига жойлаштирамиз. Натижада $(x, f(x))$ жуфтликлар ҳосил бўлади. Текисликнинг $(x, f(x))$ қўри-нишдаги нукталари тўплами

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, f(x) \in Y\}$$

га берилган функциянинг *графи* дейилади. Функция графиги тўғрисида кейинроқ батафсил тўхталамиз.

Функция таърифидаги ҳар бир x га битта y ни мос қўювчи конда турли усулда: аналитик, жадвал, график ва бошқа усулларда бўлиши мумкин.

1) *Аналитик усул*. Бу усулда, қўпинча x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар орқали бўлади. Бунда аргумент x нинг қийматига кўра y нинг қиймати қўшиш, айириш, қўпайтириш, бўлиш ва бошқа амаллар ёрдамида топилади. Масалан, ушбу

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

функциялар аналитик усулда берилган функциялардир. Қўп ҳолда аналитик усулда берилган функциянинг аниқланиш соҳаси кўрсатилмайди. Бу усулда берилган функцияларни ўрганиш уларнинг аниқланиш соҳаларини топишдан бошланади.

Аналитик усулда берилган функциянинг аниқланиш соҳаси ўзгарувчининг шундай қийматларидан иборат тўплам бўладики, бу тўпламдан олинган ҳар бир x нинг қийматига мос келувчи y нинг қиймати маънога эга (яъни чекли, ҳақиқий) бўлсин.

М и с о л . Ушбу

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Равшанки, бу функциянинг аниқланиш соҳасига $x=5$ нукта қирмайди, чунки $x=5$ га мос келадиган y нинг қиймати чекли бўлмайди.

Иккинчи томондан, қаралаётган функциянинг аниқланиш соҳасига x нинг -3 дан кичик қийматлари ҳам қирмайди, чунки $x < -3$ бўлган x нинг қийматларига мос келувчи y нинг қийматлари ҳақиқий бўлмайди. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$X = \{x: -3 \leq x < +\infty, x \neq 5\}$$

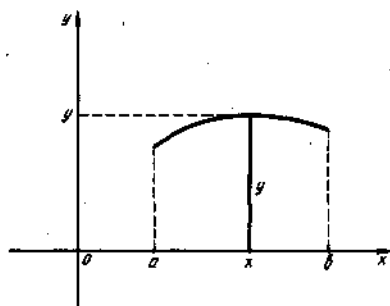
тўпламдан иборат.

2) *Жадвал усули*. Бу усулда x билан y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш жадвал кўринишида бўлади. Масалан, кун давомида ҳаво ҳароратини кузатганимизда, t_1 вақтда ҳаво ҳарорати T_1 , t_2 вақтда ҳаво ҳарорати T_2 ва х. к. бўлсин. Натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:

t — вақт	t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n
T — ҳарорат	T_1	T_2	T_3	T_4	...	T_n

Бу жадвал t вақт билан ҳаво ҳарорати T орасидаги боғланишни ифодалайди, бунда t — аргумент, T эса t нинг функцияси бўлади.

3) *График усул*. Бу усулда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги бирор эгри чизик орқали бўлади. Масалан, текисликда 11-чизмада тасвирланган эгри чизик берилган бўлсин.



11- чизма

x ўзгарувчи $X=[a, b]$ тўпламда ўзгарсин. Бу X тўпламдан ихтиёрый x нукта оламиз. Шу нуктадан перпендикуляр чиқариб унинг берилган чизик билан кесишиш нуктасини топамиз ва x га кесишиш нуктасининг ординатаси y ни мос қўямиз. Натижада ҳар бир x га ($x \in X$) битта y мос қўйилиб функция ҳосил бўлади. Бунда x билан y нинг орасидаги боғланишни берилган эгри чизик бажаради.

Олий математикада, асосан аналитик усулда берилган функциялар каралади.

2-§. Чегараланган функциялар

Бирор X тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сон топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \leq M$$

тенгсизлик бажарилса, y ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан чегараланган функция дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

функцияни карайлик. Бу функция $X=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Равшанки, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ да

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

бўлади. Демак, берилган функция юқоридан чегараланган.

3-таъриф. Агар шундай ўзгармас m сон топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \geq m$$

бўлса, y ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда қуйидан чегараланган функция дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 + 1$$

функцияни карайлик. Бу функция $X=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$f(x) = x^2 + 1 \geq 1$$

бўлади. Демак, берилган функция куйидан чегараланган.

4-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпلامда ҳам юқоридан, ҳам куйидан чегараланган функция бўлса, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпلامда чегараланган функция дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

функцияни карайлик. Бу функция $X = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Равшанки, $x \in (-\infty, +\infty)$ да

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} > 0$$

бўлади. Демак, берилган функция куйидан чегараланган.

Берилган функцияни

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4}$$

тарзда ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи кўшилувчи барча $x \in (-\infty, +\infty)$ да бирдан катта бўлмайди:

$$\frac{1}{1+x^4} \leq 1.$$

Энди иккинчи кўшилувчи

$$\frac{x^2}{1+x^4}$$

ни баҳолаймиз. Агар

$$0 \leq (1-x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$1+x^4 \geq 2x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$$

га эга бўламиз. Натижада барча $x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функция юқоридан чегараланган.

Шундай қилиб,

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

функциянинг ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланганлиги исботланди.

2. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $X = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган.

Агар ихтиёрий мусбат A сон олинса ҳам, ундан катта бўлган натурал n сони топиладики, $\frac{1}{n} \in X$ бўлиб,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n^2 > A$$

бўлади. Бу берилган $f(x)$ функциянинг юқоридан чегараланмаганлиги билдиради. Айни пайтда қаралаётган функция қуйидан чегаралангандир: $f(x) \geq 0$.

Фараз қилайлик $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири X тўпلامда аниқланган бўлиб, улар шу тўпلامда чегараланган бўлсин. У ҳолда

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

функциялар ҳам X тўпلامда чегараланган бўлади.

3-§. Жуфт ва тоқ функциялар

Бирор X ҳақиқий сонлар тўпламини қарайлик. Агар $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлса, у ҳолда X тўплам O нуқтага нисбатан *симметрик тўплам* дейилади. Масалан,

$$X = (-\infty, +\infty), [-2, 2], (-6, 6)$$

тўпламлар O нуқтага нисбатан симметрик тўпламлар бўлади. Ушбу

$$X = (0, +\infty), (-2, 2], [-6, 6], [1, 2]$$

тўпламлар O нуқтага нисбатан симметрик тўпламлар эмас.

Айтайлик, O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпلامда $y = f(x)$ функция берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар ихтиёрий $x \in X$ учун

$$f(-x) = f(x) \tag{2}$$

тенглик бажарилса, $f(x)$ *жуфт функция* дейилади.

Масалан, ушбу

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

функциялар жуфт функциялардир.

6-таъриф. Агар ихтиёрий $x \in X$ учун

$$f(-x) = -f(x) \quad (3)$$

тенглик бажарилса, $f(x)$ тоқ функция дейилади.

Масалан, ушбу

$$y = x^3, \quad y = \frac{x}{1+x^2}$$

функциялар тоқ функциялар бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг аникланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлади. Берилган функцияни жуфт ёки тоқ бўлишига текширамыз:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$$

Демак, $f(x)$ жуфт функция.

2. Ушбу

$$f(x) = x\sqrt{x^2-9}$$

функцияни қарайлик. Аввало берилган функциянинг аникланиш соҳасини топамиз:

$$x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow -\infty < x \leq -3 \text{ ва } 3 \leq x < +\infty.$$

Демак, берилган функциянинг аникланиш соҳаси

$$X = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

тўпладан иборат. Равшанки, бу тўплам O нуқтага нисбатан симметрик тўплам.

Энди $f(-x)$ ни топамиз:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{(-x)^2-9} = -x\sqrt{x^2-9} = -f(x).$$

Демак, $f(x)$ тоқ функция.

3. Ушбу

$$f(x) = x^2 - x$$

функцияни қарайлик. Равшанки, бу функциянинг аникланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлади.

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x.$$

Энди

$$f(x) = x^2 - x, \quad f(-x) = x^2 + x$$

ларни солиштириб, берилган функция учун (2) ва (3) шартларнинг бирортаси ҳам бажарилмаслигини кўрамыз. Демак, берилган функция жуфт функция ҳам, тоқ функция ҳам эмас.

Жуфт функциянинг графиги ордината ўқиға нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Ток функциянинг графиги координата бошиға нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Фараз қилайлик $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири O нуктаға нисбатан симметрик бўлган X тўпلامда аниқланган бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфт функциялар бўлса, у ҳолда

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар ҳам жуфт бўлади.

2°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ток функциялар бўлса, у ҳолда

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x)$$

функциялар ток бўлади,

$$f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар эса жуфт бўлади.

4-§. Монотон функциялар

$y=f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган бўлсин.

7-таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпلامдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2))$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпلامда ўсувчи (камаймайдиган) функция дейилади.

8-таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпلامдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпلامда камаювчи (ўсмайдиган) функция дейилади.

Ўсувчи ҳамда камаювчи функциялар монотон функциялар дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^2$$

функция $[0, +\infty)$ тўпلامда ўсувчи бўлади. Дарҳақиқат, $[0, +\infty)$ да ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталар олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин дейлик. Равшанки, $0 \leq x_1 < x_2 < +\infty$. Унда

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0$$

бўлади, чунки $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$.

Натижада $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ тенгсизликка эга бўламиз.

Демак, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Бу эса 7-таърифға кўра берилган

функциянинг $[0, +\infty)$ да ўсувчи функция эканини билдиради.

2. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

функцияни карайлик.

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1, +\infty)$ бўлади. Шу $[-1, +\infty)$ тўпламда ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталарни олиб, $x_1 < x_2$ дейлик. Равшанки, $-1 \leq x_1 < x_2 < +\infty$. Унда

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_1+1} = \frac{(\sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_1+1})}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} \times \\ &\times (\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}) = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} > 0 \end{aligned}$$

бўлади, чунки $x_2 - x_1 > 0$, $\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1} \geq 0$. Демак,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Бу эса берилган функция $[-1, +\infty)$ да ўсувчи функция эканини билдиради.

3. Ушбу

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

функция $[1, +\infty)$ тўпламда камаювчи функция бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $[1, +\infty)$ тўпламда ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталарни олиб, $x_1 < x_2$ дейлик. Унда

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \\ &= \frac{x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \end{aligned}$$

бўлади. Равшанки $x_1 - x_2 < 0$, $(1+x_1^2)(1+x_2^2) > 0$ ва $[1, +\infty)$ да $1 - x_1x_2 < 0$. Демак, $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Кейинги тенгсизликдан $f(x_1) > f(x_2)$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) > f(x_2)$ ни топдик. Бу эса берилган функциянинг $[1, +\infty)$ да камаювчи эканини билдиради.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, C ўзгармас сон бўлсин. У ҳолда:

1°. $f(x) + C$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

2°. $C > 0$ бўлганда $C \cdot f(x)$ функция ўсувчи бўлади,

3°. $C < 0$ бўлганда $C \cdot f(x)$ функция камаювчи бўлади.

3°. $f(x) + g(x)$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

5-§. Даврий функциялар

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

9-таъриф. Агар шундай ўзгармас $T (T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x \in X$ учун

- 1) $x - T \in X, \quad x + T \in X,$
- 2) $f(x + T) = f(x)$

бўлса, y ҳолда $f(x)$ даврий функция дейилади. Бундаги T сон $f(x)$ функциянинг даври дейилади.

Масалан,

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

функциялар даврий функциялар бўлиб, уларнинг даври 2π га тенг,

$$y = \operatorname{tg} x$$

функция ҳам даврий функция, унинг даври π га тенг.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \{x\}$$

функцияни карайлик, бунда $\{x\}$ орқали x нинг каср қисми белгиланган (масалан, $\{1,5\} = 0,5$, $\{0,75\} = 0,75$, $\{2\} = 0$). Бу функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Айтайлик, T — ихтиёрий ($T \neq 0$) бутун сон бўлсин: $T = m$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Унда ихтиёрий $x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$x - T \in (-\infty, +\infty), \quad x + T \in (-\infty, +\infty)$$

бўлиб,

$$f(x + T) = \{x + T\} = \{x\} = f(x)$$

бўлади. Демак, берилган функция даврий функция, унинг даври $T = m$ бўлади.

1°. Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, унинг даври T га ($T \neq 0$) тенг бўлса,

$$T_n = nT \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

сонлар ҳам шу функциянинг даври бўлади.

2°. Агар T_1 ва T_2 сонлар $f(x)$ функциянинг даври бўлса, y ҳолда $T_1 + T_2$ ($T_1 + T_2 \neq 0$) ҳамда $T_1 - T_2$ ($T_1 \neq T_2$) сонлар ҳам $f(x)$ функциянинг даври бўлади.

3°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ даврий функциялар бўлиб, уларнинг ҳар бирининг даври T бўлса ($T \neq 0$), y ҳолда

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар ҳам даврий функциялар бўлиб, T сон уларнинг ҳам даври бўлади.

6-§. Тескари функция. Мураккаб функция

$y = f(x)$ функция X да аниқланган бўлиб, Y_f эса бу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин:

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Айтайлик, Y_f тўпламдаги ҳар бир y сон X тўпламдаги биттагина x нинг қийматига мос келсин. Равшанки, бу ҳолда Y_f тўпламдан олинган ҳар бир $\tilde{y}$ га X тўпламда битта x мос келиб, бу мослик натижасида

функция ҳосил бўлади. Одатда бу функция $y=f(x)$ функцияга нисбатан тескари функция дейилади ва $x=f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

Мисол. Ушбу

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

функцияни $[0, 1]$ да қарайлик. Бу функция қийматлари тўплами

$$Y_f = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

бўлади. $Y_f = \left[1, \frac{3}{2}\right]$ да аниқланган ушбу

$$x = 2y - 1$$

функция берилган $y = \frac{1}{2}x + 1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

Юқорида айтилганлардан $y=f(x)$ да x — аргумент, y эса функцияси, тескари

$$x = f^{-1}(y)$$

функцияда эса y — аргумент, x эса унинг функцияси бўлиши кўринади. Демак, берилган функция ҳамда унга тескари функцияда аргумент билан функциянинг роллари алмашишар экан. Қулайлик учун кўп ҳолларда тескари функция аргументини ҳам x , унинг функциясини y каби белгиланади: $y=g(x)$.

$y=f(x)$ га нисбатан тескари бўлган $y=g(x)$ функция графиги, $y=f(x)$ функция графигини I ва III чораклар биссектрисаси атрофида 180° га айлантириш натижасида ҳосил бўлади (12- чизма).

$y=f(x)$ функция X да аниқланган бўлиб, Y_f эса шу функция қийматлари тўплами бўлсин:

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Бу Y_f тўпланда $z=F(y)$ функция аниқланган бўлсин. Натижада X тўпландан олинган ҳар бир x га Y_f тўпланда битта y :

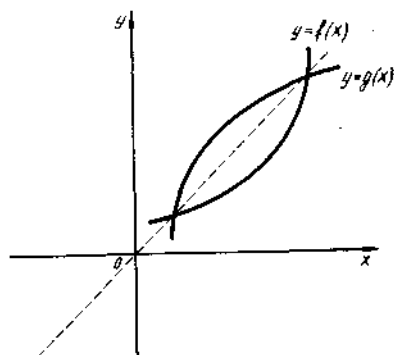
$$f: x \rightarrow y \quad (y=f(x)),$$

ва Y_f тўпландаги бундай y сонга битта z :

$$F: y \rightarrow z \quad (z=f(y))$$

сон мос қўйилади. Демак, X тўпландан олинган ҳар бир x сонга битта z сон мос қўйилиб, яъни функция ҳосил бўлади:

$$z = F(f(x)).$$



12- чизма

Одатда бундай функция *мураккаб функция* дейилади. Бу мураккаб функция $y=f(x)$ ҳамда $z=F(y)$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган.

Масалан,

$$z = (x+1)^2$$

функция $y=x+1$ ва $z=y^2$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган мураккаб функциядир.

7-§. Элементар функциялар

1°. Бутун рационал функциялар. Ушбу

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

кўринишдаги функция *бутун рационал функция* дейилади. Бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ — ўзгармас сонлар, n эса натурал сон. Бу функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган.

Бутун рационал функциянинг баъзи бир хусусий ҳоллари:

а) Чизикли функция. У

$$y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

кўринишга эга, бунда a, b — ўзгармас сонлар.

Чизикли функция:

1) $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган,

2) $a > 0$ бўлганда ўсувчи, $a < 0$ бўлганда камаювчи,

3) графиги текисликда тўғри чизикдан иборатдир. Ушбу

$$y = 2x - 1, y = -2x + 2, y = 1$$

чизикли функцияларнинг графиги 13-чизмада тасвирланган.

б) Квадратик функция. У

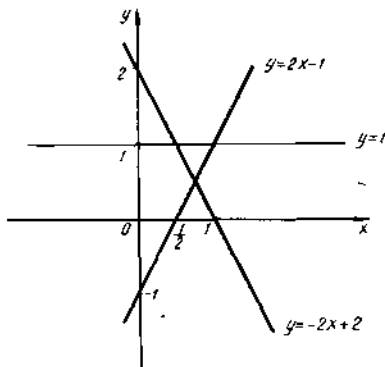
$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

кўринишга эга. Бунда a, b, c — ўзгармас сонлар. Квадратик функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Унинг графиги параболадан иборат. Параболанинг текисликдаги вазиятини аниқлаш учун квадратик функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

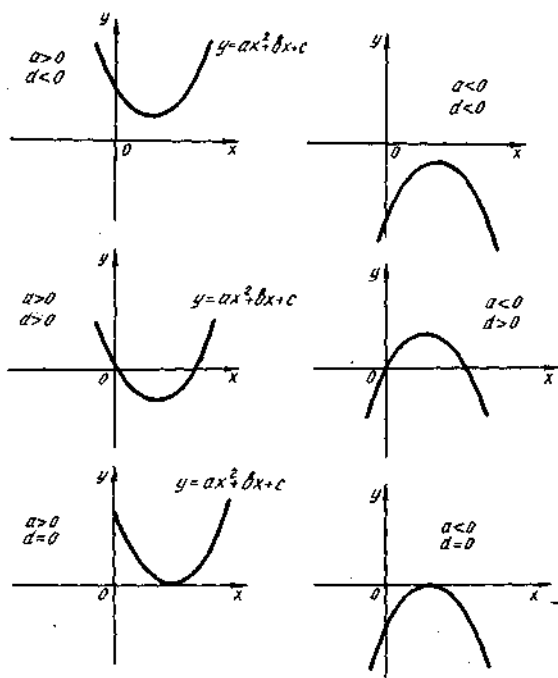
$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2} = \end{aligned}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

$y = ax^2 + bx + c$ функция графигининг текисликда жойлашиши a ҳамда $d = b^2 - 4ac$ микдорларнинг ишорасига боғлиқ бўлади (13-чизма):



13-чизма



14- чизма

2°. Қаср рационал функциялар. Ушбу

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

кўринишдаги функция қаср рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ ва $b_0, b_1, \dots, b_m$ лар ўзгармас сонлар, n, m — натурал сонлар. Бу функция

$$X = (-\infty, +\infty) \setminus \{x : b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = 0\}$$

тўпламда, яъни қасрнинг махражини нолга айлантирувчи нукталардан фаркли бўлган барча ҳақиқий сонлардан иборат тўпламда аниқланган.

Қаср рационал функциянинг баъзи бир хусусий ҳоллари:

а) Тескари пропорционал боғланишни ифодаловчи ушбу

$$y = \frac{a}{x} \quad (x \neq 0)$$

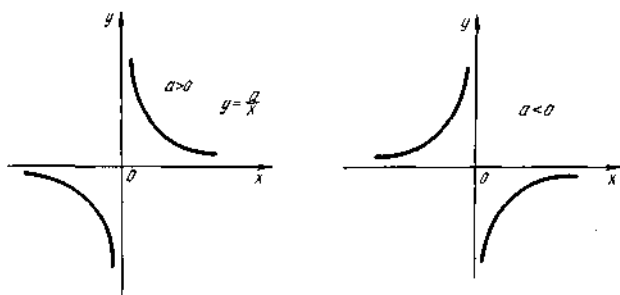
функцияни қарайлик. Бунда a — ўзгармас сон. Бу функция:

1) $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да аниқланган,

2) тоқ функция. Демак, унинг графиги координата бошига нисбатан симметрик,

3) a нинг мусбат ёки манфийлигига қараб функция $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ ораликларнинг ҳар бирида камаювчи ёки ўсувчи бўлади.

Равшанки, $y = \frac{a}{x}$ функция графигининг текисликда жойлашиши



15- чизма

a нинг ишорасига боғлиқ бўлади (15- чизма). Одатда 15- чизмада тасвирланган эгри чизиклар *тенг ёнли гипербола* дейилади.

б) Қаср чизикли функция. У

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

кўринишга эга. Бу функция $X = (-\infty, +\infty) \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ тўпламда аниқланган.

Қаср чизикли функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \\ &= \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Демак, қаралаётган функция ушбу

$$y = \frac{\alpha}{x+\beta} + \gamma$$

кўринишда бўлар экан $\left(\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}, \beta = \frac{d}{c}, \gamma = \frac{a}{c}\right)$.

Қаср чизикли функциянинг графиги тенг ёнли гипербола каби бўлади. Масалан,

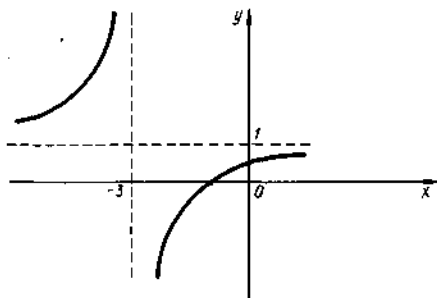
$$y = \frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

функциянинг графиги 16- чизмада тасвирланган.

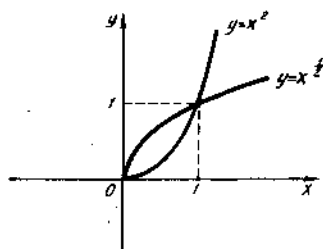
3°. Даражали функция. Ушбу

$$y = x^\alpha \quad (x \geq 0)$$

кўринишдаги функция *даражали функция* дейлади. Даражали функциянинг аниқланиш соҳаси α га боғлиқ бўлади. Агар $\alpha > 0$ бўлса, $y = x^\alpha$ функция $(0, +\infty)$ да ўсувчи, $\alpha < 0$ да камаювчи бўлади. Даражали функция графиги текисликнинг $(0, 0)$ ҳамда $(1, 1)$ нукталаридан ўтади. Масалан,



16- чизма



17- чизма

$$y = x^2, \quad y = x^{\frac{1}{2}}$$

функция графиклари 17- чизмада тасвирланган.

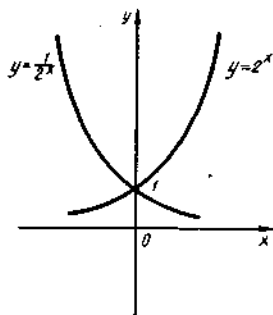
4°. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y = a^x$$

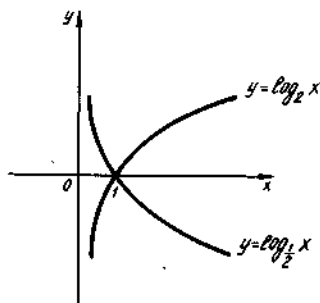
кўринишдаги функция *кўрсаткичли функция* дейилади, бунда a хақикий сон, $a > 0$ ва $a \neq 1$.

Кўрсаткичли функция:

- 1) $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган,
- 2) ихтиёрий x да $y = a^x > 0$,
- 3) $a > 1$ бўлганда $y = a^x$ ўсувчи, $0 < a < 1$ бўлганда $y = a^x$ камаювчи.



18- чизма



19- чизма

Кўрсаткичли функция графиги OX ўқидан юқорида жойлашган ва доим текисликнинг $(0, 1)$ нуктасидан ўтади. Масалан, $y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графиги 18- чизмада тасвирланган.

5°. Логарифмик функция. Ушбу

$$y=\log_a x$$

кўринишдаги функция логарифмик функция дейилади, бунда

$$a>0 \text{ ва } a\neq 1.$$

Логарифмик функция:

1) $(0, +\infty)$ да аниқланган,

2) $y=a^x$ функцияга нисбатан тескари функция,

3) $a>1$ бўлганда $y=\log_a x$ ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда камаювчи.

Логарифмик функция графиги OY ўқининг ўнг томонида жойлашган ва доим текисликнинг $(1, 0)$ нуктасидан ўтади. Масалан, $y=\log_2 x$ ва $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ функцияларнинг графиги 19- чизмада тасвирланган.

6°. Тригонометрик функциялар. Ушбу

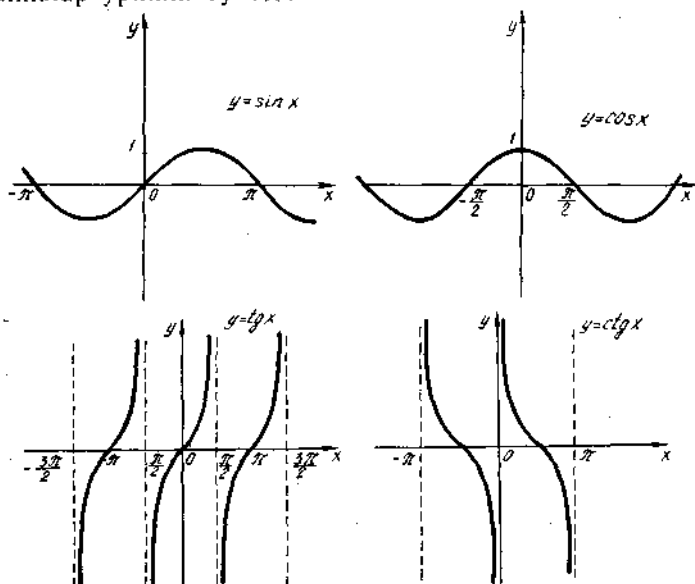
$$y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x, y=\sec x, y=\operatorname{cosec} x.$$

функциялар тригонометрик функциялар дейилади.

$y=\sin x$ ҳамда $y=\cos x$ функциялар $R=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган 2π даврли функциялар бўлиб, ихтиёрий x да

$$-1\leq \sin x\leq 1, -1\leq \cos x\leq 1$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.



20- чизма

$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$ функциялар орқали куйидагича ифодаланади:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ҳамда $\operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графиклари 20- чизма-да тасвирланган.

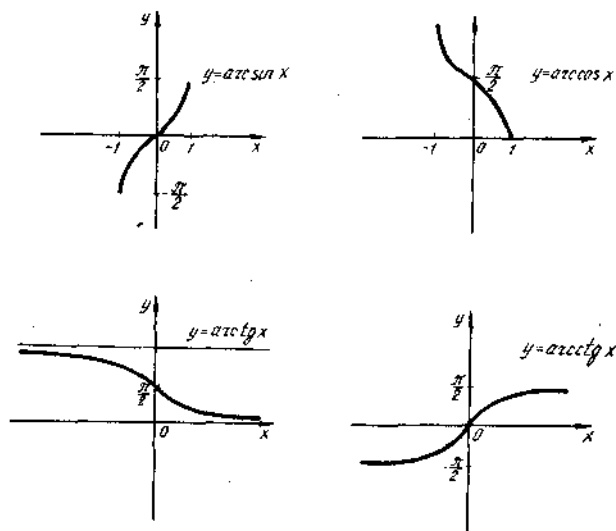
7°. Тескари тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x$$

функциялар *тескари тригонометрик функциялар* дейилади.

Масалан, $y = \arcsin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1, 1]$ ораликдан иборат бўлиб, қийматлар тўплами эса $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ дан иборатдир.

Юқорида кайд этилган $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ ҳамда $\operatorname{arccotg} x$ функцияларнинг графиклари 21- чизмада тасвирланган.



21- чизма

ТЕНГЛАМАЛАР

Олий математиканинг турли соҳаларидаги масалалар кўп ҳолларда маълум тенгламаларни ечиш билан ҳал қилинади. Шунинг эътиборига олиб ушбу бобда тенгламалар ҳақидаги маълумотларни қисқача баён этамиз.

1-§. Умумий маълумотлар

$f(x)$ функция F тўпламда ($F \subset R$), $g(x)$ функция эса G тўпламда ($G \subset R$) берилган бўлсин. Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси бўлган F ва G тўпламларнинг кўпайтмасини (қесишмасини) M билан белгилайлик:

$$F \cap G = M.$$

Агар M тўпламдан олинган x_0 учун $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ сонлар бири-бирига тенг бўлса, яъни $f(x_0) = g(x_0)$ бўлса, у ҳолда x_0

$f(x) = g(x)$ (1)

тенгламанинг *илдизи* (*ечими*) дейилади. Одатда (1) муносабат бир номаълумли тенглама дейилади.

Тенгламанинг барча илдизларини (илдизлар тўпламини) топиш билан тенглама ечилади. Агар илдизлар тўплами бўш бўлса, (1) тенглама ечимга эга бўлмайди.

Берилган (1) тенглама билан бир каторда ушбу

$$f_1(x) = g_1(x) \quad (2)$$

тенгламани ҳам қарайлик.

Агар (1) тенгламанинг ҳар бир илдизи (2) тенгламанинг ҳам илдизи бўлса, у ҳолда (2) тенглама (1) тенгламанинг *натижаси* дейилади ва

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

каби белгиланади.

Агар (2) тенглама (1) тенгламанинг натижаси бўлса, ва ақсинча, (1) тенглама ўз навбатида (2) тенгламанинг натижаси бўлса, у ҳолда (1) ва (2) тенгламалар *тенг кучли* (*эквивалент*) тенгламалар дейилади ва

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

каби белгиланади.

Демак, тенг кучли тенгламаларнинг илдизлари тўплами бир хил бўлар экан.

Тенг кучли тушунчаси тенгламаларни ечишда кенг қўлланилади. Одатда, берилган тенгламани ечишда уни тенг кучли, айти пайтда ундан соддарок бўлган тенглама билан алмаштирилади. Бу жараён бир неча бор такрорланиши натижасида тенглама содда тенгламага келади ва уни ечиб берилган тенгламанинг илдизлари топилади.

Энди тенгламаларнинг ўзаро тенг кучлилиги ҳақида баъзи бир тасдиқларни келтирамиз:

1°. Ушбу

$$f(x) = g(x) \text{ ва } f(x) - g(x) = 0$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0.$$

2°. Ихтиёрий a сон учун

$$f(x) = g(x) \text{ ва } f(x) + a = g(x) + a$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + a = g(x) + a.$$

3°. Ихтиёрий a ($a \neq 0$) сон учун

$$f(x) = g(x) \text{ ва } af(x) = ag(x)$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow af(x) = ag(x).$$

4°. Ихтиёрий a ($a > 0$, $a \neq 1$) сон учун

$$f(x) = g(x) \text{ ва } a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

5°. Ихтиёрий натурал n сон учун, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ бўлганда ушбу

$$f(x) = g(x) \text{ ва } f^n(x) = g^n(x)$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^n(x) = g^n(x).$$

6°. Агар $a > 0$, $a \neq 1$ бўлиб, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x) = g(x) \text{ ва } \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

тенгламалар тенг кучли тенгламалар бўлади:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x).$$

7°. Агар $\varphi(x)$ функция M тўпламда аниқланган бўлиб, $\forall x \in M$ учун $\varphi(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x) = g(x) \text{ ва } f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$$

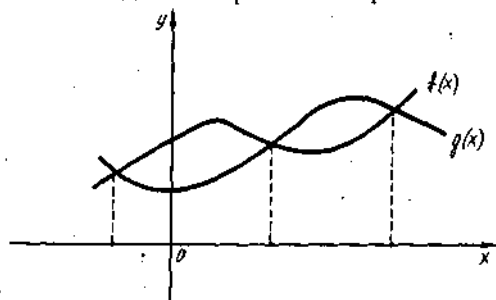
тенгламалар тенг кучли тенгламалар бўлади:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x).$$

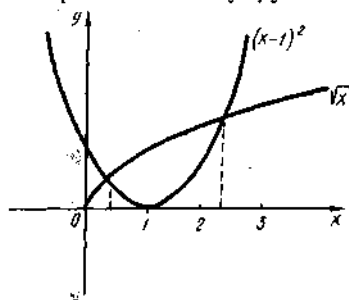
Бирор

$$f(x) = g(x)$$

тенглама берилган бўлсин. Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг графиклари 22- чизмада тасвирланган эгри чизикларни ифодаласин. Бу функция



22- чизма



23- чизма

графиклари кесишган нуқталарининг абсциссалари берилган тенгламанинг илдизлари бўлади. Масалан, ушбу

$$\sqrt{x} = (x-1)^2 \quad (2')$$

тенгламани карайлик. $f(x) = \sqrt{x}$ ва $g(x) = (x-1)^2$ функцияларнинг графикларини чизамиз (23- чизма). Чизмадан кўринадики, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = (x-1)^2$ функцияларнинг графиклари иккита нуқтада кесишади. Демак, берилган (2') тенгламанинг иккита ечими бўлиб, улардан биттаси 0 билан 1 орасида, иккинчиси 2 билан 3 орасида бўлади.

2- §. Рационал тенгламалар

Бирор

$$f(x) = g(x)$$

тенглама берилган бўлсин. Юкорида айтиб ўтдикки, у

$$f(x) - g(x) = 0 \quad (3)$$

тенгламага тенг кучли бўлади. Агар $f(x) - g(x) = F(x)$ десак, унда (3) тенглама ушбу

$$F(x) = 0 \quad (4)$$

кўринишга келади. Агар $F(x)$ рационал функция бўлса, (4) тенглама *рационал тенглама* дейилади.

Рационал тенгламалар мазкур курснинг олий алгебра бўлимида батафсил ўрганилади. Бу ерда биз рационал тенгламаларнинг баъзи бир хусусий ҳолларининг келтириш билан қиёяланамиз.

1°. $F(x)$ чизикли функция бўлсин. $F(x) = ax + b$, бунда a ва b ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу ҳолда (4) тенглама

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (5)$$

кўринишда бўлади. (5) тенглама чизикли тенглама дейилади. Унинг ечими a, b сонларга боғлиқ.

Агар $a \neq 0$ бўлса, унда

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

бўлиб, (5) тенглама ягона $x = -\frac{b}{a}$ ечимга эга ва ечимлар тўплами

$$E = \left\{ -\frac{b}{a} \right\} \text{ бўлади.}$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{x-1}{5} + \frac{3x-9}{2} = \frac{x}{3} - 2$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{5} + \frac{3x-9}{2} &= \frac{x}{3} - 2 \Leftrightarrow 6x - 6 + 45x - 135 = 10x - 60 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 41x = 81 \Leftrightarrow x = \frac{81}{41}. \end{aligned}$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами $E = \left\{ \frac{81}{41} \right\}$ бўлади.

2. Ушбу

$$(p-1)x + 2 = p + 1$$

тенгламани ечинг. Равшанки, бу тенгламанинг ечими p нинг қийматига боғлиқ бўлади.

Агар $p \neq 1$ бўлса, унда

$$(p-1)x + 2 = p + 1 \Leftrightarrow (p-1)x = p - 1 \Leftrightarrow x = \frac{p-1}{p-1} = 1$$

бўлади.

Агар $p = 1$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама

$$0 \cdot x + 2 = 2$$

кўринишга келиб, у номуайом x нинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлади.

Демак, $p \neq 1$ бўлганда тенгламанинг ечимлар тўплами $E = \{1\}$ бўлиб, $p = 1$ бўлганда эса $E = (-\infty, +\infty)$ бўлади.

2°. $F(x)$ квадратик функция бўлсин: $F(x) = ax^2 + bx + c$, бунда a, b, c ўзгармас ҳақиқий сонлар. У ҳолда (4) тенглама қуйидагича

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (6)$$

бўлади. (6) тенглама *квадрат тенглама* дейилади. Унинг ечими a, b, c сонларга боғлиқ. Бу сонлардан тузилган ушбу

$$D = b^2 - 4ac$$

миқдор квадрат тенгламанинг *дискриминанти* дейилади.

Агар $D > 0$ бўлса, унда

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

квадрат тенглама *иккита*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

ечимларга эга бўлиб, ечимлар *тўплами*

$$E = \left\{ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right\}$$

бўлади.

Агар $D = 0$ бўлса, у ҳолда (6) квадрат тенгламанинг *илдизлари бир-бирига тенг*

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

ечимларга эга бўлиб, ечимлар *тўплами* $E = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ бўлади.

Агар $D < 0$ бўлса, (6) квадрат тенглама ечимга эга эмас. Бу ҳолда ечимлар *тўплами бўш тўплам* бўлади: $E = \emptyset$.

Квадрат тенгламанинг *илдизлари ҳақида Виет теоремасини* келтирамиз.

Виет теоремаси. Агар x_1 ва x_2 лар

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

квадрат тенгламанинг *илдизлари бўлса, у ҳолда*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$(p+1)x^2 + 2(p+1)x + p-2 = 0 \quad (p \neq -1)$$

квадрат тенгламани ечинг.

Бу тенгламанинг *дискриминантини* топамиз:

$$\begin{aligned} D &= [2(p+1)]^2 - 4(p+1)(p-2) = 4(p+1)^2 - 4(p+1)(p-2) = \\ &= 4(p+1)(p+1-p+2) = 12(p+1). \end{aligned}$$

Демак, $D = 12(p+1)$. Агар $p > -1$ бўлса, $D > 0$ бўлиб, берилган тенглама

$$x_1 = \frac{-2(p+1) + \sqrt{12(p+1)}}{2(p+1)} = -1 + \sqrt{\frac{3}{p+1}},$$

$$x_2 = \frac{-2(p+1) - \sqrt{12(p+1)}}{2(p+1)} = -1 - \sqrt{\frac{3}{p+1}}$$

ечимларга эга бўлади. Бу ҳолда ечимлар тўплами:

$$E = \left\{ -1 + \sqrt{\frac{3}{p+1}}, -1 - \sqrt{\frac{3}{p+1}} \right\}.$$

Агар $p < -1$ бўлса, $D < 0$ бўлиб берилган тенгламанинг ечими мавжуд бўлмайди. Бу ҳолда ечимлар тўплами бўш тўплам бўлади: $E = \emptyset$.

2. Агар x_1, x_2 лар

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса, $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ ни ҳисобланг.

Берилган тенгламанинг дискриминанти

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 = 17.$$

Демак, берилган тенглама x_1 ва x_2 иккита илдизга эга. Виет теоремасига кўра

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}.$$

Бу тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{5}{4}.$$

Демак,

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = \frac{5}{4}.$$

3°. $F(x)$ функция куйидагича бўлсин: $F(x) = ax^4 + bx^2 + c$, бунда a, b, c ўзгармас сонлар. Бу ҳолда (4) тенглама ушбу

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (7)$$

кўринишда бўлади. (7) тенглама *биквадрат тенглама* дейилади.

Биквадрат тенглама $y = x^2$ алмаштириш натижасида квадрат тенгламага келади. Уни ечиб берилган биквадрат тенгламанинг ечимлари топилади.

Мисол. Ушбу

$$9x^4 - 25x^2 + 16 = 0$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y = x^2$ алмаштириш қиламиз. Унда

$$9y^2 - 25y + 16 = 0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади:

$$y_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{18} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{18} = \frac{25 \pm 7}{18} \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{25+7}{18} = \frac{16}{9},$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{25-7}{18} = 1.$$

Демак,

$$x^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right) \left(x + \frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -\frac{4}{3},$$

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами

$$E = \left\{ \frac{4}{3}, \quad -\frac{4}{3}, \quad 1, \quad -1 \right\}$$

бўлишини топамиз.

4°. $F(x)$ функция куйидагича бўлсин:

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a,$$

бунда a, b, c ўзгармас сонлар. Бу ҳолда (4) тенглама ушбу

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (8)$$

кўринишда бўлади. (8) тенглама *симметрик тенглама* дейилади. Тенгламанинг ҳар икки томонини x^2 га ($x \neq 0$) бўлиб топамиз:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Агар

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} = a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2a,$$

$$bx + \frac{b}{x} = b \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (8) тенглама

$$a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c - 2a = 0$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликда $x + \frac{1}{x} = y$ дейилса,

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, симметрик тенгламани ечиш квадрат тенгламани ечишга келади.

Умуман, $F(x)$ функцияни

$$F(x) = a[\varphi(x)]^2 + b\varphi(x) + c$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, $y = \varphi(x)$ алмаштириш ёрдамида

$$F(x) = 0$$

тенглама квадрат тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$$

тенгламани карайлик. Бу ҳолда

$$F(x) = x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 8$$

бўлиб, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 8 = x^2 + 2x \cdot \frac{x}{x-1} + \\ &+ \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2x \cdot \frac{x}{x-1} - 8 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = \\ &= \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8. \end{aligned}$$

Натижада

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$$

тенгламага келамиз. Бунда $\frac{x^2}{x-1} = y$ белгилаш киритилса

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг илдизлари

$$y_1 = 4, \quad y_2 = -2$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} = 4 &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2, \\ \frac{x^2}{x-1} = -2 &\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_3 = -1 + \sqrt{3}, \quad x_4 = -1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб берилган тенгламанинг ечимлар тўплами

$$E = \{2; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$$

бўлади.

3-§. Иррационал, кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

1°. **Иррационал тенгламалар.** Номаълум x радикал (илдиз) ишораси остида катнашган тенгламалар *иррационал тенгламалар* дейилади. Масалан,

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} = 5, \quad \sqrt{x+5} + \sqrt[4]{2x+8} = 7, \\ \sqrt[3]{x-2} + x = \sqrt{x^2-4} \end{aligned}$$

тенгламалар иррационал тенгламалардир.

Иррационал тенгламаларни ечишдан аввал тенгламада қатнашган ифодаларнинг маънога эга бўладиган тўпламни аниқлаш керак бўлади.

Иррационал тенгламалар турли усуллар ёрдамида ечилади. Қўпчилик ҳолларда тенгламанинг ҳар икки томони квадратга кўтарилади. Бунда чет илдизлар ҳосил бўлиши мумкин. Топилган қийматни берилган тенгламага қўйиб, унинг ечим ёки ечим эмаслиги аниқланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$$

тенгламани ечинг.

Тенгламадаги ифодалар маънога эга бўлиши учун

$$\begin{aligned}x+5 &\geq 0, \text{ яъни } x \geq -5, \\2x+8 &\geq 0, \text{ яъни } x \geq -4\end{aligned}$$

бўлиши лозим. Демак, $x \geq -4$ бўладиган ечимларни топиш керак.

Берилган тенглама қуйидагича ечилади:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} &= 7 \Rightarrow \sqrt{2x+8} = 7 - \sqrt{x+5} \Rightarrow \\&\Rightarrow (\sqrt{2x+8})^2 = (7 - \sqrt{x+5})^2 \Rightarrow 2x+8 = \\&= 49 - 14\sqrt{x+5} + x+5 \Rightarrow 14\sqrt{x+5} = 46 - x \Rightarrow \\&\Rightarrow (14\sqrt{x+5})^2 = (46-x)^2 \Rightarrow 196(x+5) = \\&= 2116 - 92x + x^2 \Rightarrow x^2 - 288x + 1136 = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow x_{1,2} = \frac{288 \pm \sqrt{288^2 - 4 \cdot 1136}}{2} \Rightarrow x_1 = 284, x_2 = 4\end{aligned}$$

(Равшанки, $284 > -4$, $4 > -4$.)

Эди топилган $x_1 = 284$ ва $x_2 = 4$ нинг берилган тенгламани қанотлантиришини текширамыз:

а) $x_1 = 284$ бўлган ҳолда:

$$\sqrt{x_1+5} + \sqrt{2x_1+8} = \sqrt{289} + \sqrt{576} \neq 7.$$

б) $x_2 = 4$ бўлган ҳолда

$$\sqrt{x_2+5} + \sqrt{2x_2+8} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4=7.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечими $x=4$ бўлади: $E=\{4\}$.

2. Ушбу

$$\sqrt{2|x|-x^2} = p$$

тенгламани ечинг.

Равшанки, бу тенгламанинг ечими p га боғлиқ бўлади.

Агар $p < 0$ бўлса, тенглама ечимга эга бўлмайди: $E = \emptyset$.

Эди $p \geq 0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда

$$\sqrt{2|x|-x^2} = p \Leftrightarrow 2|x|-x^2 = p^2 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + p^2 = 0$$

бўлади. Ҳосил бўлган квадрат тенгламанинг дискриминанти

$$D = (-2)^2 - 4p^2 = 4 - 4p^2 = 4(1 - p^2).$$

Агар $p > 1$ бўлса, у ҳолда $D < 0$ бўлиб, $|x|^2 - 2|x| + p^2 = 0$ тенглама ечимга эга эмас. Бинобарин, берилган тенглама ҳам ечимга эга бўлмайди.

Агар $p = 1$ бўлса,

$|x|^2 - 2|x| + 1 = 0 \Rightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ бўлиб, берилган тенглама иккита ечимга эга бўлади:

$$E = \{1, -1\}.$$

Энди $0 < p < 1$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда $D > 0$ бўлиб $|x|^2 - 2|x| + p^2 = 0$ тенгламанинг ечимлари

$$|x| = 1 + \sqrt{1 - p^2}, \quad |x| = 1 - \sqrt{1 - p^2}$$

бўлади. Равшанки,

$$|x| = 1 + \sqrt{1 - p^2} \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{1 - p^2}, x_2 = -(1 + \sqrt{1 - p^2}),$$

$$|x| = 1 - \sqrt{1 - p^2} \Rightarrow x_3 = 1 - \sqrt{1 - p^2}, x_4 = -(1 - \sqrt{1 - p^2}).$$

Бу ҳолда берилган тенглама 4 та ечимга эга бўлади:

$$E = \{1 + \sqrt{1 - p^2}; -(1 + \sqrt{1 - p^2}); 1 - \sqrt{1 - p^2}; -(1 - \sqrt{1 - p^2})\}.$$

Агар $p = 0$ бўлса, юқорида келтирилганлардан кўринадики, берилган тенглама учта $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 0$ ечимларга эга бўлади: $E = \{2; -2; 0\}$.

Шундай қилиб берилган иррационал тенглама учун

1) $p < 0$ бўлганда $E = \emptyset$,

2) $p = 0$ бўлганда $E = \{2; -2; 0\}$,

3) $p = 1$ бўлганда $E = \{1; -1\}$,

4) $0 < p < 1$ бўлганда $E = \{\pm(1 + \sqrt{1 - p^2}); \pm(1 - \sqrt{1 - p^2})\}$,

5) $p > 1$ бўлганда $E = \emptyset$

бўлади.

2°. Кўрсаткичли тенгламалар. Номаълум x даража кўрсаткичида катнашган тенгламалар *кўрсаткичли тенгламалар* дейилади. Масалан,

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0, \quad 9^{x^2 + 4x - 4.5} = 3,$$

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1}$$

тенгламалар кўрсаткичли тенгламалардир. Кўрсаткичли тенгламаларни ечишда қуйидаги қоидалардан фойдаланилади:

$$1) a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$

$$4) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$2) a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \left(a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right),$$

$$5) (a^n)^m = a^{n \cdot m},$$

$$6) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$3) a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$7) \left(\frac{a}{c}\right)^n = \frac{a^n}{c^n}$$

Шунингдек, ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

тасдиқдан ҳам фойдаланилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$9^{x^2+4x-4.5} = 3$$

тенгламани ечинг. Бу тенглама куйидагича ечилади:

$$\begin{aligned} 9^{x^2+4x-4.5} &= 3 \Leftrightarrow 9^{x^2+4x-4.5} = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2+4x-4.5 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= 1, \quad x_2 = -5. \end{aligned}$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами $E = \{1; -5\}$ бўлади.

2. Ушбу

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама куйидагича ечилади:

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Rightarrow 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 4^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4^x + 4^{x-\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow 4^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3}{2} 4^x &= \frac{4}{\sqrt{3}} 3^x \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x &= 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Демак, берилган тенгламанинг ечими $x = \frac{3}{2}$ бўлади: $E = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3°. Логарифмик тенгламалар. Номабълум x логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида катнашган тенгламалар *логарифмик тенгламалар* дейилади. Масалан,

$$\log_2 x + \log_2 3 = 1,$$

$$\lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$$

тенгламалар логарифмик тенгламалардир.

Логарифмик тенгламаларни ечишда, аввало

1) логарифм белгиси остидаги ифоданинг ҳар доим мусбат бўлишига,

2) логарифм асоси эса мусбат ва 1 дан фаркли бўлишига эътибор берилиши керак.

Логарифм таърифидан бевосита куйидагилар келиб чиқади:

- 1°. $\log_a a = 1$,
- 2°. $\log_a 1 = 0$,
- 3°. $\log_a N_1 N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$,
- 4°. $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$,
- 5°. $\log_a N^n = n \log_a N$,
- 6°. $\log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N$, $\log_a N^n = \log_{a^n} N$,
- 7°. $\log_a N \cdot \log_N a = 1$,
- 8°. $\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$.

Бу келтирилган қоидалар ҳамда 1-§ даги

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$) тасдиқдан логарифмик тенгламаларни ечишда кенг фойдаланилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1 \quad (x > 0)$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама куйидагича ечилади:

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1 &\Rightarrow \sqrt{\log_x \sqrt{3x}} = -\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\log_x \sqrt{3x}} = -\log_3 3 \end{aligned}$$

Кейинги тенгликнинг чап томонидаги ифода мусбат. Шунинг учун

$$\log_3 3 < 0, \quad 0 < x < 1$$

бўлиши керак. Шунинг эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\log_x \sqrt{3x}})^2 &= (-\log_3 3)^2 \Rightarrow \log_x \sqrt{3x} = \log^2 3 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\log_3 3 + 1) &= \log^2 3 \Rightarrow 2 \log^2 3 - \log_3 3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Агар $\log_3 3 = y$ дейилса, унда $2y^2 - y - 1 = 0$ квадрат тенгламага келамиз. Равшанки, $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ бўлиб, бу ечимлардан y_2 $\log_3 3 = y < 0$ шартни қаноатлантиради.

Демак,

$$\log_3 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}; \quad E = \left\{ \frac{1}{9} \right\}.$$

2. Ушбу

$$\lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама номаълум x нинг $-1 < x < 1$ тенгсизликларни каноатлантирадиган кийматларидагина маънога эга.

Равшанки,

$$\begin{aligned} \lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} &= \lg \sqrt{1-x^2} + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} &= \lg \sqrt{1+x} + \lg \sqrt{1-x} + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lg \sqrt{1-x} &= 1 \Rightarrow x = -99. \end{aligned}$$

Бирок $x = -99$ юкоридаги $-1 < x < 1$ шартни каноатлантирмайди. Демак, берилган тенглама ечимга эга эмас.

4- §. Тригонометрик тенгламалар

Номаълум x тригонометрик функциялар белгиси остида катнашган тенгламалар *тригонометрик тенгламалар* дейилади.

Масалан,

$$4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 \sin x, \sin 3x - \sin x = \frac{1}{2}, \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

тенгламалар тригонометрик тенгламалардир.

Куйидаги

$$\sin x = a \quad (|a| \leq 1) \quad (9)$$

$$\cos x = a \quad (|a| \leq 1) \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad (12)$$

тенгламаларга *содда тригонометрик тенгламалар* дейилади.

(9) тенгламанинг ечими

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

(10) тенгламанинг ечими

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

(11) тенгламанинг ечими

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

(12) тенгламанинг ечими эса

$$x = \operatorname{arccctg} a + n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Одатда берилган тригонометрик тенгламани тенг кучли тенглама билан алмаштириш натижасида содда тригонометрик тенгламага келтирилади. Бу тенгламани ечиб берилган тригонометрик тенгламанинг ечимлари топилади.

Тригонометрик тенгламаларни уларга тенг кучли тенгламалар билан алмаштиришда тригонометрик функциялар орасидаги боғланишлардан фойдаланилади. Куйида бундай боғланишлардан баъзиларини келтирамиз.

$$1^\circ. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$2^\circ. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$3^\circ. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$4^\circ. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$5^{\circ}. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$6^{\circ}. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$7^{\circ}. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\cos x - \sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 1$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама куйидагича ечилади:

$$\cos x - \sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos x + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (2 \sin \frac{x}{2} + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi, \\ \sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} + 2n\pi. \end{cases}$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами

$$E = \{2n\pi; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} + 2n\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

2. Ушбу $\cos 2x + \cos^2 x = 0$ тенгламани ечинг.

Аввало $\cos^2 x$ ни куйидагича ёзиб оламиз:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Унда берилган тенглама $\cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$ кўринишга келад.

ди. Кейинги тенгликдан $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

яъни

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Ушбу бобда тенгсизликлар ҳақидаги маълумотларни қисқача баён этамиз.

1-§. Умумий маълумотлар

Икки $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар мос равишда F ва G тўпламларда ($F \subset R$, $G \subset R$) берилган бўлиб,

$$M = F \cap G \neq \emptyset$$

бўлсин.

Агар M тўпладан олинган x_0 учун $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ сонлар орасида

$$f(x_0) > g(x_0)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда x_0 сон

$$f(x) > g(x) \quad (1)$$

тенгсизликнинг *ечими* дейилади. Одатда (1) муносабат *бир номуносабат тенгсизлик* дейилади. Тенгсизликнинг барча ечимларини топиш (ечимлар тўпламини топиш) билан тенгсизлик ечилади. Агар ечимлар тўмлами бўш бўлса, (1) тенгсизлик ечимга эга бўлмайди.

(1) тенгсизлик билан бирга ушбу

$$f_1(x) > g_1(x) \quad (2)$$

тенгсизлиكنи қараймиз.

Агар (1) тенгсизликнинг ҳар бир ечими (2) тенгсизликнинг ҳам ечими бўлса, ва аксинча (2) тенгсизликнинг ҳар бир ечими (1) тенгсизликнинг ҳам ечими бўлса, у ҳолда (1) ва (2) тенгсизликлар *тенг кучли тенгсизликлар* дейилади ва

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x)$$

каби белгиланади.

Одатда, берилган тенгсизлиكنи ечишда уни тенг кучли, айни пайтда ундан соддарок бўлган тенгсизлик билан алмаштирилади. Бу жараён бир неча бор такрорланиши натижасида тенгсизлик содда тенгсизликка келади ва уни ечиб берилган тенгсизликнинг ечимлари топилади.

Энди тенгсизликларнинг ўзаро тенг кучлилиги хақида баъзи бир тасдиқларни келтирамиз:

1°. Ушбу $f(x) > g(x)$ ва $f(x) - g(x) > 0$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0.$$

2°. Ихтиёрий a сон учун $f(x) > g(x)$ ва $f(x) + a > g(x) + a$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + a > g(x) + a.$$

3°. Ихтиёрий $a > 0$ сон учун $f(x) > g(x)$ ва $a \cdot f(x) > a \cdot g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow a \cdot f(x) > a \cdot g(x).$$

4°. Ихтиёрий $a < 0$ сон учун $f(x) > g(x)$ ва $a \cdot f(x) < a \cdot g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow a \cdot f(x) < a \cdot g(x).$$

5°. Ихтиёрий тайин a ($1 < a < +\infty$) сон учун $f(x) > g(x)$ ва $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} > a^{g(x)}.$$

6°. Ихтиёрий тайин a ($0 < a < 1$) сон учун $f(x) > g(x)$ ва $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

7°. Ихтиёрий натурал n сон учун, $f(x) > 0$, $g(x) \geq 0$ ($x \in M$) бўлганда $f(x) > g(x)$ ва $(f(x))^n > (g(x))^n$ ($x \in M$) тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n > (g(x))^n.$$

8°. Ихтиёрий тайин a ($1 < a < +\infty$) сон учун, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ($x \in M$) бўлганда $f(x) > g(x)$ ва $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a g(x).$$

9°. Ихтиёрий тайин a ($0 < a < 1$) сон учун $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ($x \in M$) бўлганда $f(x) > g(x)$ ва $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \log f(x) < \log g(x).$$

10°. М тўпламда аниқланган ихтиёрий $\varphi(x) > 0$ функция учун $f(x) > g(x)$ ва $f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x).$$

2-§. Рационал тенгсизликлар

Бирор

$$f(x) > g(x) \quad (1)$$

тенгсизлик берилган бўлсин. У $f(x) - g(x) > 0$ тенгсизликка тенг кучли бўлади.

Агар $F(x) = f(x) - g(x)$ десак, (1) тенгсизликка тенг кучли бўлган

$$F(x) > 0 \quad (2)$$

тенгсизликка келамиз.

Агар $F(x)$ рационал функция бўлса, (2) *рационал тенгсизлик* деб аталади. Биз қуйида рационал тенгсизликларнинг баъзи бир хусусий ҳолларини келтираемиз.

1°. $F(x)$ чизикли функция бўлсин: $F(x) = ax + b$, бунда a ва b ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу ҳолда (2) тенгсизлик

$$ax + b > 0 \quad (3)$$

бўлади ва у чизикли тенгсизлик дейилади.

Агар $a > 0$ бўлса, унда

$$ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

бўлиб, (3) тенгсизлиكنинг ечимлар тўплами $E = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$

бўлади.

Агар $a < 0$ бўлса, унда

$$ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

бўлиб, (3) тенгсизлиكنинг ечимлар тўплами $E = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(p-1)x > p^2 - 1$$

тенгсизлиكنи ечинг.

Бу тенгсизлиكنинг ечими p нинг қийматига боғлиқ бўлади.

Агар $p > 1$ бўлса, унда

$$(p-1)x > p^2 - 1 \Rightarrow x > \frac{p^2 - 1}{p - 1} \Rightarrow x > p + 1$$

бўлиб, берилган тенгсизлиكنинг ечимлар тўплами $E = (p + 1, +\infty)$ бўлади.

Агар $p < 1$ бўлса, унда

$$(p-1)x > p^2-1 \Rightarrow x < \frac{p^2-1}{p-1} \Rightarrow x < p+1$$

бўлиб, тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (-\infty, p+1)$ бўлади.

Агар $p = 1$ бўлса, тенгсизлик $0 \cdot x > 0$ кўринишга келиб, у номаълум x нинг ҳеч қандай қийматида бажарилмайди. Демак, бу ҳолда $E = \emptyset$ бўлади.

2°. $F(x)$ квадратик функция бўлсин: $F(x) = ax^2 + bx + c$, бунда a, b, c ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу ҳолда (2) тенгсизлик

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (4)$$

бўлади ва у квадрат тенгсизлик дейилади.

Маълумки, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳадни

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу муносабатдан кўринадикки, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳаднинг ишораси a ҳамда $D = b^2 - 4ac$ нинг ишораларига боғлиқ бўлади.

Агар $a > 0, D < 0$ бўлса, у ҳолда x нинг барча қийматларида

$$ax^2 + bx + c > 0$$

бўлади.

Бу ҳолда (4) тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (-\infty, +\infty)$ бўлади.

Агар $a > 0, D > 0$ бўлса, у ҳолда $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад иккита x_1 ва x_2 илдизларга эга бўлиб, (4) тенгсизлик $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$ кўринишга олади. Бу тенгсизлик интерваллар усули билан ечилади.

Қаралаётган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ бўлади.

Агар $a < 0, D < 0$ бўлса, у ҳолда $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад x нинг барча қийматларида манфий бўлиб,

$$ax^2 + bx + c > 0$$

тенгсизлик ечимга эга бўлмайди, $E = \emptyset$.

Агар $a < 0, D > 0$ бўлса, у ҳолда (4) тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (x_1, x_2)$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^2 - 4x + 1 > 2x - x^2 - 3$$

тенгсизликни ечинг.

Равшанки,

$$x^2 - 4x + 1 > 2x - x^2 - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 > 0.$$

Ҳосил бўлган квадрат тенгсизликда

$$a = 2 > 0, D = 36 - 4 \cdot 2 = 4 > 0$$

бўлиб, $2x^2 - 6x + 4$ квадрат учҳаднинг илдизлари $x_1 = 1, x_2 = 2$ га тенг. Бу ҳолда берилган тенгсизлик ечимга эга ва унинг ечимлар тўплами $E = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 > 0$$

тенгсизлиكنи ечинг.

Агар

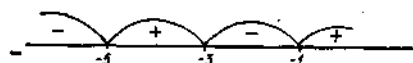
$$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = (x+1)(x+3)(x+5) = \\ = (x - (-1))(x - (-3))(x - (-5))$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган тенгсизлик

$$(x - (-1))(x - (-3))(x - (-5)) > 0$$

кўрунишга келади.

Энди сонлар ўқида $-5, -3, -1$ сонларга мос келувчи нуқталарни аниқлаймиз (23-чизма).



23-чизма

Сўнг берилган тенгсизлиكنинг ечимлар тўплами $E = (-5, -3) \cup (1, +\infty)$ бўлишини топамиз.

2. Ушбу $\frac{x^2 + 4x - 4}{2x^2 - x - 1} > 0$ тенгсиз-

лиكنи ечинг.

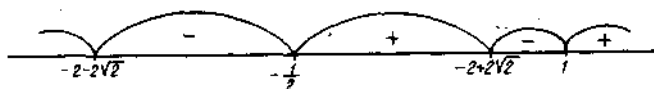
Бу тенгсизлик куйидагича ечилади:

$$\frac{x^2 + 4x - 4}{2x^2 - x - 1} > 0 \Rightarrow (x^2 + 4x - 4)(2x^2 - x - 1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - (-2 + 2\sqrt{2}))(x - (-2 - 2\sqrt{2}))(x - (-\frac{1}{2}))(x - 1) > 0.$$

Энди

$$x_1 = -2 - 2\sqrt{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -2 + 2\sqrt{2}, x_4 = 1$$



24-чизма

сонларнинг сонлар ўқидаги тасвирларини аниқлаймиз (25-чизма).

Демак, (5) тенгсизлиكنинг ечимлар тўплами

$$E = (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-\frac{1}{2}, -2 + 2\sqrt{2}) \cup (1, +\infty).$$

3-§. Иррационал, кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар

1°. Иррационал тенгсизликлар. Номалум x радикал (илдиз) ишораси остида катнашган тенгсизликлар *иррационал тенгсизликлар* дейлади. Масалан,

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 1,$$

$$\frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-2x} < 1, \quad \sqrt{x} + 9\sqrt[4]{x} + 18 \geq 0$$

тенгсизликлар иррационал тенгсизликлардир.

Иррационал тенгсизликларни ечишдан аввал тенгсизликда катнашган ифодаларнинг маънога эга бўладиган тўпламни аниқлаш керак бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

тенгсизликни ечинг.

Бу тенгсизлик $x \geq 1$ бўлгандагина маънога эга.

Равшанки, $\sqrt{x+\sqrt{x}} > 0$. Шунинг эътиборига олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x}} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}) &> \frac{3}{2} \sqrt{x+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2-x} &> \frac{3}{2} \sqrt{x} \Rightarrow x - \frac{1}{2} \sqrt{x} > \sqrt{x(x-1)}. \end{aligned}$$

Энди $x \geq 1$ бўлганда $\sqrt{x} > 0$ ва $\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ бўлишини ҳисобга олиб кейинги тенгсизликни, унга тенг кучли ва айни пайтда ундан содда бўлган тенгсизликка келтирамиз:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2} \sqrt{x} > \sqrt{x(x-1)} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} (x - \frac{1}{2} \sqrt{x}) > \\ > \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x(x-1)} \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 > \\ > (x-1)^2 \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} > x-1 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{5}{4} \Rightarrow x < \frac{25}{16}. \end{aligned}$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = [1, \frac{25}{16})$ бўлади.

2°. Кўрсаткичли тенгсизликлар. Номажлум x даража кўрсаткичида катнашган тенгсизликлар *кўрсаткичли тенгсизликлар* дейилади. Масалан,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{x-1}} &\geq \frac{1}{1-2^{x-1}}, \quad \frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x, \\ 4^x &< 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

тенгсизликлар кўрсаткичли тенгсизликлардир.

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечишда мазкур бобнинг 1-§ ида келтирилган тасдиқлардан фойдаланилади.

Мисол. Ушбу

$$3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$$

тенгсизликни ечинг.

Равшанки, мазкур тенгсизлик $x \leq 2$ бўлганда маънога эга.
Агар берилган тенгсизликда $2^{\sqrt{2-x}} = y$ дейилса, у ҳолда

$$3y^2 - 10y + 3 < 0$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

Равшанки,

$$\begin{aligned} 3y^2 - 10y + 3 < 0 &\Rightarrow 3(y-3)(y-\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y-\frac{1}{3})(y-3) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < y < 3. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} < y < 3 &\Rightarrow \frac{1}{3} < 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\log_2 3 < \sqrt{2-x} < \log_2 3. \end{aligned}$$

Агар $\sqrt{2-x} \geq 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$0 \leq \sqrt{2-x} < \log_2 3$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Кейинги тенгсизликлардан

$$0 \leq 2-x < \log_2^2 3,$$

яъни

$$2 - \log_2^2 3 < x$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (2 - \log_2^2 3, 2]$ бўлади.

3°. **Логарифмик тенгсизликлар.** Номазлум x логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида катнашган тенгсизликлар **логарифмик тенгсизликлар** дейилади.

Масалан,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > 0, \quad 2\log_x 5 + \log_{5x} 5 + 3\log_{25x} 5 > 0,$$

$$\log_{2x+1}(x^2+1) \leq 1$$

тенгсизликлар логарифмик тенгсизликлардир.

Логарифмик тенгсизликларни ечишда логарифмнинг хоссаларидан ҳамда 1-§ да келтирилган тасдиқлардан фойдаланилади.

Мисол. Ушбу

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0$$

тенгсизликни ечинг.

Бу тенгсизликнинг чап томонидаги ифода $\frac{x-3}{x+2} > 0$ бўлгандаги на маънога эга.

Равшанки,

$$\frac{x-3}{x+2} > 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) > 0.$$

Кейинги тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматлари

$$x > 3, x < -2$$

бўлишини топамиз.

Демак, $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ учун берилган тенгсизлик маънога эга.

Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0 &\Rightarrow \frac{x-3}{x+2} < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5}{x+2} > 0 \Rightarrow x > -2. \end{aligned}$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (3, +\infty)$ бўлади.

ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Маълумки, олий математиканинг алгебра бўлимида асосан тенгламаларни, тенгламалар системаларини ечиш билан шуғулланилади. Чизикли тенгламалар системасини ўрганишда детерминант тушунчаси муҳим рол ўйнайди. Шунинг эътиборга олиб мазкур бобда детерминантлар ва уларнинг хоссаларини қисқача баён этамиз.

1- §. Детерминантлар

Айтайлик, бирор a, b, c, d сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ифода 2- тартибли детерминант, $ad - bc$ айирма эса унинг қиймати дейилади. Демак

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Бунда a, b, c, d — детерминантнинг элементлари. a, b ва c, d сонлар (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи йўллари (сатрларини), a, c ва b, d сонлар эса (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи устуларини ташкил этади.

Одатда детерминантнинг элементларини иккита индекс қўйилган ҳарфлар билан белгиланади. Бунда биринчи индекс йўлни, иккинчиси эса устунни билдиради. Масалан, $a_{21} = c$ сон (1) детерминантнинг иккинчи йўли биринчи устунда турган элемент бўлади. Шундай қилиб (1) детерминант қуйидагича ёзилади

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1\text{-устуна} & 2\text{-устуна} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} 1\text{-йўли} \\ 2\text{-йўли} \end{array} \rightarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array}$$

Худди шунга ўхшаш учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. n - тартибли детерминант тушунчалари киритилади.

Соддалик учун биз бу ерда учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари билан танишамиз. Юқори тартибли детерминантларга келсак, улар ҳам учинчи тартибли детерминант каби

хоссаларга эга бўлиб, улар тўғрисидаги маълумотларга кейинги бобда тўхталамиз.

Ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ифода 3- тартибли детерминант,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

унинг киймати дейилади. Демак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Бу ҳолда ҳам детерминант элементларининг биринчи индексида турган сон йўл рақамини, иккинчи индексида турган сон эса устун рақамини билдиради.

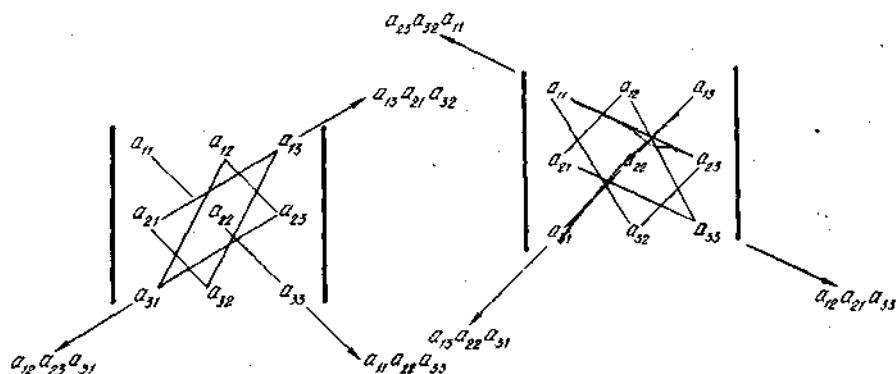
a_{11} , a_{22} , a_{33} сонлар (2) детерминантнинг бош диагонал элементлари, a_{31} , a_{22} , a_{13} сонлар эса шу детерминантнинг ёрдамчи диагонал элементлари дейилади.

Символ равишда белгиланган

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминант 6 та ҳад йиғиндисига орқали ифодаланган бўлиб, улардан учтаси мусбат ишорали, қолган учтаси эса манфий ишоралидир.

Мусбат ишорали ҳадларни ёзишда 26- а чизмада тасвирланган схемадан, манфий ишорали ҳадларини ёзишда эса 26- б чизмада тасвирланган схемадан фойдаланса бўлади.



25- чизма

2-§. Детерминантларнинг хоссалари

Детерминантлар катор хоссаларга эга. Қулайлик учун бундай хоссаларни учинчи тартибли детерминантларга нисбатан келтирамиз.

Бирор учинчи тартибли

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

детерминант берилган бўлсин.

1°. Детерминантнинг бирор йўлини унга мос устуни билан алмаштирилса, детерминант қиймати ўзгармайди.

Исбот. Масалан, (3) детерминантнинг биринчи йўлини унинг биринчи устуни билан алмаштириш натижасида ушбу

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминант ҳосил бўлади. Учинчи тартибли детерминантнинг кири-тилишига кўра

$\Delta' = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$ бўлади. Бу тенгликни (2) тенглик билан солиштириб

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш (3) детерминантнинг бошқа йўлларини унинг мос устунлари билан алмаштириш натижасида детерминантнинг қиймати ўзгармаслиги кўрсатилади.

2°. Детерминантнинг ихтиёрий икки йўлини (икки устунини) ўзаро алмаштирак, детерминантнинг қиймати ўзгармасдан унинг ишораси эса карама-қарши ишорага ўзгаради.

Юқорида келтирилган хоссалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-н а т и ж а. *Детерминантнинг икки йўли (устуни) бир хил бўлса, детерминантнинг қиймати нол бўлади.*

3°. Детерминантнинг ихтиёрий йўлида (устунида) турган барча элементларини ўзгармас k сонга кўпайтирилса, детерминантнинг қиймати ҳам k га кўпаяди.

Исбот. (3) детерминантнинг биринчи йўлида турган барча элементларини k га кўпайтириш натижасида ушбу

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминант ҳосил бўлади. Учинчи тартибли детерминантнинг киритилишига кўра:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32} - \\ - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{11}a_{23}a_{32} - ka_{12}a_{21}a_{33} = k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$$

Бу тенгликни (2) тенглик билан солиштириб

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлишини топамиз.

4°. Детерминантнинг бирор йўли (устуни)даги барча элементлар нол бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

Бу хоссанинг исботи юқорида келтирилган 3°- хоссадан бевосита келиб чиқади.

5°. Детерминантнинг ихтиёрий икки йўли (устуни) ўзаро пропорционал бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантнинг биринчи ва учинчи йўллари ўзаро пропорционал бўлсин. Унда

$$\frac{a_{11}}{a_{31}} = \frac{a_{12}}{a_{32}} = \frac{a_{13}}{a_{33}}$$

бўлади. Агар бу нисбатни k билан белгиласак,

$$a_{11} = ka_{31}, a_{12} = ka_{32}, a_{13} = ka_{33}$$

бўлиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади. Келтирилган 1- натижага кўра кейинги детерминант нолга тенг. Демак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

6°. Агар (3) детерминантнинг бирор йўли (устуни)даги элементлар икки қўшилувчилар йиғиндисидан иборат бўлса, масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha_1 & a_{22} + \alpha_2 & a_{23} + \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha_1 & a_{22} + \alpha_2 & a_{23} + \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади. Бу хосса (2) муносабатдан, яъни учинчи тартибли детерминантнинг киритилишидан келиб чиқади.

Юқоридаги 3°- ва 6°- хоссалардан қуйидаги натижага келамиз.

2- н а т и ж а. Агар

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

нинг бирор йўли (устуни)ни ўзгармас k сонга қўпайтириб, уни бошқа йўли (устуни)га қўшилса, детерминант қиймати ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Энди детерминантнинг минорлари ҳамда алгебраик тўлдирувчилари тушунчаларини келтирамыз. Яна соддалик учун учинчи тартибли детерминантларни қараймиз.

Айтайлик,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

учинчи тартибли детерминант берилган бўлсин. Бу детерминантнинг бирор a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) элементини олиб, шу элемент турган йўлни ҳамда устунни ўчирамиз. Берилган детерминантнинг қолган элементларидан иккинчи тартибли детерминант ҳосил бўлади. Унга a_{ik} элементнинг минори деб аталади ва M_{ik} каби белгиланади. Масалан, (3) детерминантнинг a_{13} элементи турган йўлни ҳамда устунни ўчириш

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

натижасида иккинчи тартибли ушбу

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

детерминант ҳосил бўлади. Бу берилган детерминантнинг a_{13} элементининг миноридир.

Равшанки, (3) детерминантнинг 9 та элементи бор. Бинобарин минорлар ҳам тўққизта бўлади.

Ушбу

$$(-1)^{i+k} M_{ik}$$

микдор (3) детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси дейилади ва A_{ik} орқали белгиланади:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \quad (4)$$

Масалан,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

детерминантнинг $a_{33}=3$ элементининг алгебраик тўлдирувчиси

$$a_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

бўлади.

7°. Детерминантнинг бирор йўли (устуни)да турган барча элементларнинг уларга мос алгебраик тўлдирувчилари билан кўпайтмасидан ташкил топган йиғинди шу детерминантнинг қийматиға тенг.

Исбот. Бу хоссани биринчи йўл учун исботини келтирамиз.

(3) детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

нинг биринчи йўлида турган a_{11} , a_{12} , a_{13} элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини толамиз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}),$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}.$$

Унда

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}[-(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})] + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

бўлади. (2) муносабатдан фойдаланиб

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (4')$$

бўлишини топамиз.

Бошқа ҳоллар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Одатда (4') формула детерминантнинг биринчи йўл элементлари бўйича *ёйилмаси* дейилади.

8°. Детерминантнинг бирор йўли (устуни)да турган барча элементлари билан бошқа йўл (устун)да турган мос элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларидан ташкил топган йиғинди нолга тенг бўлади.

И с б о т. Бу хоссанинг тўғрилигини бирор ҳол учун, масалан, (3) детерминантнинг биринчи йўл элементлари a_{11} , a_{12} , a_{13} лар билан учинчи йўл мос элементлари a_{31} , a_{32} , a_{33} ларнинг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмасидан тўғрилган $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ йиғиндининг нолга тенг бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки,

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Унда

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) - a_{12}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) + \\ + a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = a_{11}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{13}a_{22} - a_{11}a_{12}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + \\ + a_{11}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{13}a_{21} = 0$$

бўлади. Демак,

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0.$$

3- §. Детерминантларни ҳисоблаш

Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар бевосита таърифга кўра ҳисобланади. Масалан,

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 21 - 10 = 11.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 0 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -103.$$

Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш бирмунча мураккаб бўлади. Бу ҳолда детерминантларни асосан 2-§ да келтирилган ҳоссалардан фойдаланиб ҳисобланади.

Мисоллар 1. Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисобланг.

Бу детерминантнинг қийматини топиш учун 2-натижадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Бунинг учун унинг биринчи йўлини 2 га кўпайтириб 4-йўлига қўшамиз. Натижада қаралаётган детерминант ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

кўринишга келади.

Энди охириги детерминантни 7°-хоссадан фойдаланиб, 1-устун элементлари бўйича алгебраик тўлдирувчилар оркали ёямиз:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг қиймати $\Delta = 2 \cdot 3 \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 0 - -7 \cdot 0 \cdot 2 - 9 \cdot 0 \cdot 5 = 54$ га тенг.

2. Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисобланг.

Аввало 2-натижага кўра 2- ва 4-устунларнинг ҳар бирига 5-устунни қўшамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Энди 5-устунни 3 га кўпайтириб 1-устундан айирамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Сўнг 5-устунни 2 га кўпайтириб 3-устундан айириш натижасида кейинги детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

кўринишга келади. 7°- хоссадан фойдаланиб топамиз:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3°- хоссага кўра

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 & 7 \\ -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

бўлади. Ниҳоят, 1- йўлни қолган барча йўллардан айирамиз. У

холда

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & - & 6 & 3 \\ - & 2 & 0 & - & 1 & 4 \\ - & 5 & 0 & & 6 & - & 1 \\ & 3 & 0 & & 7 & - & 4 \end{vmatrix}$$

7°- хоссага асосан

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-155) = 465$$

бўлади. Демак, $\Delta = 465$.

МАТРИЦАЛАР

1-§. Матрица тушунчаси

Бирор $m \cdot n$ та ($m \in N, n \in N$)

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ (1)
сонлар берилган бўлсин. Бу сонлардан ташкил топган ушбу

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

жадвал $[m \times n]$ -тартибли матрица дейилади ва

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \quad \text{ёки} \quad \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \quad (2)$$

каби белгиланади. Бунда (1) сонлар матрицанинг элементлари дейилади. Матрицанинг элементлари икки индекс билан ёзилиб, биринчи индекс шу элемент турган йўл рақамини, иккинчи индекс эса устун рақамини билдиради. Баъзан (2) матрицани бирор ҳарф билан

$\|a_{ik}\|_{\substack{i=1,m \\ k=1,n}}$ каби ҳам белгиланади:

$$A = \|a_{ik}\|_{\substack{i=1,m \\ k=1,n}}$$

Равшанки, (2) матрица m та йўл n та устунга эга. Агар (2) матрицанинг барча элементлари нолга тенг бўлса

$$O = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

у нол матрица дейилади.

Хусусан матрицанинг йўллари сони устунлар сониغا тенг ($m=n$) бўлса, яъни қаралаётган матрица қуйидаги

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad (3)$$

кўринишда бўлса, у n -тартибли квадрат матрица дейилади. (3) матрицанинг $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлари бош диагонал элементлари дейилади.

Агар (3) квадрат матрицанинг бош диагоналида турган элементлардан бошқа барча элементлари нол бўлса,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

уни *диагонал матрица* дейилади. Хусусан, (4) матрицада

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$$

бўлса,

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

хосил бўлиб, уни *бирлик матрица* деб аталади.

Квадрат матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

нинг элементларидан ташкил топган $n \times n$ ўнбў

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант A матрицанинг *детерминанти* дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ каби белгиланади.

Агар A матрицанинг детерминанти $|A| = 0$ бўлса, у ҳолда A хос матрица дейилади, асос ҳолда, яъни A матрицанинг детерминанти $|A| \neq 0$ бўлса, у ҳолда A хосмас матрица дейилади.

Квадрат матрица A нинг йўлларини хос устунлари билан алмаштиришдан хосил бўлган ўнбў

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

матрица транспонирланган матрица дейилади ва A' каби белгиланади.

Квадрат A матрица билан унинг транспонирланган матрицалари детерминантлари бир-бирига тенг бўлади:

$$|A| = |A'|.$$

Иккита

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган бўлсин.

Агар A матрицанинг ҳар бир элементи B матрицанинг мос элементига тенг, яъни барча i ва k ($i=1,2, \dots, m; k=1,2, \dots, n$) лар учун

$$a_{ik} = b_{ik}$$

бўлса, у ҳолда A ва B ўзаро тенг матрицалар дейилади ва $A=B$ каби ёзилади.

Агар

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадрат матрица транспонирланган A' матрицага тенг бўлса, у ҳолда A симметрик матрица дейилади.

2-§. Матрицалар устида амаллар ва уларнинг хоссалари

Иккита $[m \times n]$ - тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

матрицалар берилган бўлсин. Бу матрицаларнинг мос элементлари йиғиндиларидан ташкил топган ушбу $[m \times n]$ - тартибли

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица A ва B матрицалар *йиғиндис* деб аталади ва $A+B$ каби белгиланади.

A ва B матрицаларнинг мос элементлари айирмаларидан ташкил топган ушбу $[m \times n]$ -тартибли

$$\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{vmatrix}$$

матрица A матрицадан B матрицанинг *айирмаси* дейилади ва $A-B$ каби белгиланади.

Юқорида айтилганлардан

$$1^\circ. \quad A+0=0+A=A,$$

$$2^\circ. \quad A+B=B+A$$

бўлишини кўриш қийин эмас, бунда 0 — нол матрица.

Бирор λ сон ва

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

матрицани қарайлик. Бу A матрицанинг ҳар бир элементини λ сонга кўпайтирганда ҳосил бўлган матрицага λ сон билан A матрица *кўпайтмаси* дейилади ва λA каби белгиланади. Демак,

$$\lambda A = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{vmatrix}$$

Равшанки, A ва B матрицалар ҳамда ихтиёрий λ ва μ сонлар учун:

$$3^\circ. \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A,$$

$$4^\circ. \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$5^\circ. \quad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A.$$

1-мисол. Агар

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

бўлса, $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ матрицаларни топинг.

Икки матрица йиғиндиси, айирмаси ҳамда матрицани сонга кўпайтириш қоидаларидан фойдаланиб, изланаётган матрицаларни топамиз:

$$A+B=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$A-B=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-0 & 4-2 & 1-1 \\ -1-1 & 0-1 & 2-2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$2A-3B=2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4-0 & 8-6 & 2-3 \\ -2-3 & 0-3 & 4-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Энди икки матрица кўпайтмаси тушунчасини келтирамиз. Бу амални киритишда кўпайтириладиган матрицаларнинг биринчисининг устунлари сонини иккинчисининг йўллари сонига тенг бўлиши талаб қилинади.

Фараз қилайлик, $\{m \times n\}$ -тартибли

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

матрица ҳамда $\{n \times k\}$ -тартибли

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. А матрицанинг i -йўл элементлари $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ни ($i=1, 2, \dots, m$) мос равишда В матрицанинг j -устун элементлари $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ га ($j=1, 2, \dots, k$) кўпайтириб ушбу

$$d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (6)$$

($i=1,2, \dots, m$; $j=1,2, \dots, k$) йиғиндиларни ҳосил қиламиз. Бу сонлардан тузилган $[m \times k]$ -тартибли ушбу

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mk} \end{pmatrix}$$

матрица берилган A ва B матрицалар кўпайтмаси дейилади ва $A \cdot B$ каби ёзилади.

Демак, $A \cdot B$ матрицанинг ҳар бир элементи (6) кўрinishдаги йиғиндилардан иборат.

2-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг кўпайтмасини топинг. Бу матрицалар кўпайтмаси $[3 \times 2]$ -тартибли ушбу

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}$$

матрица бўлиб, бунда

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1, \\ d_{12} &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -1, \\ d_{21} &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \\ d_{22} &= 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1, \\ d_{31} &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1, \\ d_{32} &= 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3-мисол. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

бўлса, AB ва BA матрицаларни топинг.

Равшанки,

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 7 \cdot 26 + (-12) \cdot 15 & 7 \cdot 45 + (-12) \cdot 26 \\ -4 \cdot 26 + 7 \cdot 15 & -4 \cdot 45 + 7 \cdot 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \\
 BA &= \begin{vmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 26 \cdot 7 + 45 \cdot (-4) & 26 \cdot (-12) + 45 \cdot 7 \\ 15 \cdot 7 + 26 \cdot (-4) & 15 \cdot (-12) + 26 \cdot 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган матрицалар учун

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \\
 BA &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

бўлиб,

$$AB = BA.$$

4-мисол. Агар

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

бўлса, AB ва BA матрицаларни топинг.

Берилган матрицаларнинг кўпайтмасини топамиз:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 3 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

$$BA = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & -3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) & -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{vmatrix}.$$

Демак,

$$AB = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{vmatrix}, \quad BA = \begin{vmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{vmatrix}$$

Бу ҳолда

$$AB \neq BA.$$

Келтирилган мисоллардан кўринадикки, икки матрица қўлайтмаси учун ўрин алмаштириш қоидаси, умуман айтганда, ўринли бўлмас экан.

Бирок, $[n \times n]$ -тартибли A матрица билан $[n \times n]$ -тартибли бирлик

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

матрица учун ҳар доим

$$AE = EA = A$$

тенглик ўринли бўлади.

A , B ва C матрицалар берилган бўлсин. У ҳолда

$$6^\circ. (A+B) \cdot C = AC + BC$$

$$7^\circ. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

бўлади. Бу тенгликларнинг ўринли бўлиши матрицалар йиғиндиси, қўлайтмаси ҳамда тенглиги тушунчаларидан келиб чиқади. Мисол тариқасида

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

матрицалар учун 6^о хоссанинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки,

$$A+B = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}$$

Энди $(A+B) \cdot C$ ни толамиз.

$$\begin{aligned}
 (A+B) \cdot C &= \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31} & a_{11}c_{13}+a_{12}c_{23}+a_{13}c_{33} \\ a_{31}c_{11}+a_{32}c_{21}+a_{33}c_{31} & a_{31}c_{13}+a_{32}c_{23}+a_{33}c_{33} \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+b_{13}c_{31} & b_{11}c_{13}+b_{12}c_{23}+b_{13}c_{33} \\ b_{31}c_{11}+b_{32}c_{21}+b_{33}c_{31} & b_{31}c_{13}+b_{32}c_{23}+b_{33}c_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Агар

$$\begin{aligned}
 A \cdot C &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31} & a_{11}c_{13}+a_{12}c_{23}+a_{13}c_{33} \\ a_{31}c_{11}+a_{32}c_{21}+a_{33}c_{31} & a_{31}c_{13}+a_{32}c_{23}+a_{33}c_{33} \end{vmatrix} \\
 B \cdot C &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+b_{13}c_{31} & b_{11}c_{13}+b_{12}c_{23}+b_{13}c_{33} \\ b_{31}c_{11}+b_{32}c_{21}+b_{33}c_{31} & b_{31}c_{13}+b_{32}c_{23}+b_{33}c_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, юқоридаги тенглик

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

қўринишга келишини толамиз. Бу эса қаралаётган матрицалар учун 6^о - хоссанинг ўринли бўлишини кўрсатади.

Биз юқорида икки матрица қўпайтмаси учун ўрин алмаштириш қонуни, умуман айтганда, ўринли эмаслигини кўрдик. Аммо уларнинг детерминантлари учун қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

$[n \times n]$ - тартибли A ва B матрицалар қўпайтмасининг детерминанти шу матрица детерминантлари қўпайтмасига тенг:

$$|AB| = |B \cdot A| = |A| \cdot |B|.$$

3-§. Матрицанинг ранги

Бирор $[m \times n]$ - тартибли

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. A матрицанинг ихтиёрий k та йўлини ва ихтиёрий k та устунини олиб, $(k \leq \min(m, n))$ $[k \times k]$ - тартибли квадрат матрица тузамиз. Бу квадрат матрицанинг детерминанти A матрицанинг k - тартибли *минори* дейилади.

1- м и с о л. Қуйидаги $[4 \times 5]$ - тартибли

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

матрицани қарайлик. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -40,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

детерминантлар қаралаётган матрицанинг мос равишда иккинчи, учинчи ҳамда тўртинчи тартибли минорларидир.

Юқорида айтилганлардан ва келтирилган мисолдан кўринадики, берилган матрицанинг бир нечтадан k - тартибли $(k=2,3, \dots, \min(m, n))$ минорлари бўлиб, уларнинг баъзилари нолга тенг, баъзилари эса нолдан фаркли бўлар экан.

A матрица ёрдамида ҳосил қилиш мумкин бўлган барча минорлар орасида нолдан фаркли бўлган юқори тартибли минорни топиш муҳимдир.

Шуни айтиш керакки, агар A матрицанинг барча k - тартибли $(k \leq \min(m, n))$ минорлари нолга тенг бўлса, ундан юқори тартибли бўлган барча минорлари ҳам нолга тенг бўлади.

A матрицанинг нолдан фаркли минорларининг энг юқори (катта) тартиби унинг *ранги* дейилади ва $\text{rang } A$ каби белгиланади.

2- м и с о л. Ушбу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

матрицанинг рангини топинг.

Берилган матрицанинг иккинчи тартибли минорлари бир нечта бўлиб, улардан бири $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ бўлади. Шу матрицанинг учинчи тартибли минори эса

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

га тенг. Шундай қилиб A матрицанинг нолдан фаркли минорларининг энг катта тартиби 2 га тенг экан. Демак, берилган матрицанинг ранги 2: $\text{rang } A = 2$.

3- м и с о л. $[3 \times 4]$ - тартибли ушбу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

матрицанинг рангини топинг.

Бу матрицанинг иккинчи тартибли минорлари бир нечта бўлиб, улардан бири $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$.

Берилган матрицанинг учинчи тартибли минорлари ҳам бир нечта бўлиб, улардан бири

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

яна бири

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

Демак, A матрицанинг нолдан фаркли минорларининг энг юкори тартиби учга тенг, бинобарин

$\text{rang } A = 3$.

1- э с л а т м а. Агар қаралаётган матрица нол матрица бўлса,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

унинг ранги нол деб олинади.

2- э с л а т м а. Агар $[2 \times 2]$ - тартибли нол бўлмаган

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, унинг ранги 1 деб олинади.

Матрицаларнинг рангини топиш кўп ҳолларда мураккаб бўлади, чунки унда бир қанча турли тартибдаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади.

Қуйида матрица рангини топишнинг усулларидан бирини келтирамиз.

Бирор

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Бу матрицада:

- 1) икки йўлини (устунини) ўзаро алмаштириш,
- 2) бирор йўлини (устунини) ўзгармас сонга кўпайтириш,
- 3) бирор йўлига (устунига) бошқа йўлни (устунини) ўзгармас сонга кўпайтириб қўшиш

A матрицанинг элементар алмаштиришлари дейилади.

Элементар алмаштиришлар натижасида матрицанинг ранги ўзгармайди. Бу тасдиқдан биз қуйида матрицаларнинг рангини ҳисоблашда фойдаланамиз. Аввало диагональ кўринишли матрица тушунчасини келтирамиз.

Агар $[m \times n]$ -тартибли *A* матрицанинг $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{ss}$ ($0 \leq s \leq \min(m, n)$) элементларининг ҳар бири нолдан фаркли бўлиб, қолган барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда *A* диагональ кўринишли матрица дейилади. Равшанки, бундай диагональ кўринишли матрицанинг ранги *s* га тенг бўлади.

Айтайлик, бирор $[m \times n]$ -тартибли

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

матрица берилган бўлиб, унинг рангини топиш талаб қилинсин.

Берилган матрицанинг рангини уни юқорида айтилган элементар алмаштиришлар ёрдамида диагональ кўринишли матрицага келтириб топамиз.

A матрицанинг ҳеч бўлмаганда битта элементи нолдан фаркли бўлсин. Бу элементни матрицанинг йўллари ҳамда устунларини ўзаро алмаштириш ёрдамида биринчи йўл ҳамда биринчи устунига келтирамиз. Сўнг кейинги матрицанинг биринчи устунини ўша сонга бўлиб, ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

матрицани ҳосил қиламиз.

(7) матрицанинг биринчи устунини — a'_{12} га кўпайтириб уни иккинчи устунига қўшсак, сўнг — a'_{13} га кўпайтириб учинчи устунига қўшсак ва ҳ. к. биринчи устунини — a'_{1n} га кўпайтириб устунига қўшсак, натижада (7) матрицанинг биринчи йўлидаги $a'_{11}=1$, қолган элементлари ноллар бўлиб қолади.

Худди шунга ўхшаш усул билан (7) матрицанинг биринчи устундаги элементлари нолга айлантирилади. Бундай элементар алмаштиришлар натижасида

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* & \dots & a_{2n}^* \\ 0 & a_{32}^* & a_{33}^* & \dots & a_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m1}^* & a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix}.$$

матрицага келамиз. Бунда

$$\text{rank } A = \text{rank } A_1$$

бўлади.

A_1 матрица юқоридаги элементар алмаштиришни бир неча бор қўллаш билан диагонал кўринишли матрицага келади. Бу диагонал кўринишли матрицанинг ранги берилган A матрицанинг ранги бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Элементар алмаштиришлар ёрдамида берилган матрицани диагонал матрицага келтирамиз. A матрицанинг биринчи ва иккинчи устунларини ўзаро алмаштирамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Сўнг биринчи йўлни $\frac{1}{2}$ га кўпайтирамиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Кейинги матрицада биринчи устунни 2 га кўпайтириб, уни учинчи устунига қўшамиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Энди бу матрицанинг биринчи йўлини 4 га кўпайтириб иккинчи йўлига қўшамиз, -1 га кўпайтириб учинчи йўлига, -5 га кўпайтириб тўртинчи йўлига ва -3 га кўпайтириб бешинчи йўлига қўшамиз. Натижада

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

матрицага келамиз.

Кейинги матрицада иккинчи йўлни 3 га кўпайтириб учинчи йўлга қўшсак, биринчи устунни аввал -2 га кўпайтириб иккинчи устунга, сўнг -6 га кўпайтириб учинчи устунга қўшсак, унда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади.

Ниҳоят, бу матрицанинг иккинчи устунини -3 га кўпайтириб, учинчи устунига қўшсак ва ҳосил бўлган матрицанинг иккинчи

йўлини -1 га кўпайтурсак, диагонал кўринишдаги

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

матрицага келамиз. Унинг ранги 2 га тенг. Демак, $\text{rang } A = 2$.

4- §. Тескари матрица

Бирор $[n \times n]$ - тартибли

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадрат матрица берилган бўлсин.

Агар A билан $[n \times n]$ - тартибли B матрица кўпайтмаси бирлик матрицага тенг бўлса

$$AB = BA = E,$$

у ҳолда B матрица A га *тескари матрица* дейилади ва A^{-1} каби белгиланади. Масалан, ушбу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

матрицага тескари бўлган матрица

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

бўлади, чунки

$$A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{3} & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 1 \\ 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{3} & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{4}{3} \\ -2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{3} & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{4}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Энди берилган матрицага тескари матрицанинг мавжуд бўлиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Теорема. *Ҳар қандай хосмас матрица A нинг тескари матрицаси мавжуд ва у ягона бўлади.*

Исбот. Шартга кўра A хосмас матрица. Бинобарин, унинг детерминанти нолдан фаркли бўлади:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Бу детерминант элементларининг алгебраик тўлдирувчилари A_{ik} ($i=1,2, \dots, n$; $k=1,2, \dots, n$) ни топиб, улардан

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицани тузамиз. Кейинги матрицанинг ҳар бир элементини A матрицанинг детерминанти $|A|$ га бўлиб, ушбу

$$B = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix} \quad (8)$$

матрицани ҳосил қиламиз. Энди A матрицани B матрицага кўпайтириб, топамиз:

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{|A|} (a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n}) & \frac{1}{|A|} (a_{11}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{2n}) & \dots & \frac{1}{|A|} (a_{11}A_{n1} + \dots + a_{1n}A_{nn}) \\ \frac{1}{|A|} (a_{21}A_{11} + \dots + a_{2n}A_{1n}) & \frac{1}{|A|} (a_{21}A_{21} + \dots + a_{2n}A_{2n}) & \dots & \frac{1}{|A|} (a_{21}A_{n1} + \dots + a_{2n}A_{nn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{|A|} (a_{n1}A_{11} + \dots + a_{nn}A_{1n}) & \frac{1}{|A|} (a_{n1}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{2n}) & \dots & \frac{1}{|A|} (a_{n1}A_{n1} + \dots + a_{nn}A_{nn}) \end{vmatrix} =$$

Агар $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = |A|$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ҳамда

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \dots + a_{nk}A_{nj} = 0 \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \\ j \neq k \end{matrix} \quad (\text{Каралсин, 5- боб, 2- §})$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{|A|} \cdot |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A|} \cdot |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{|A|} \cdot |A| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

келиб чиқади. Худди шундек

$$B \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

бўлишини ҳам кўриш кийин эмас. Демак,

$$BA = AB = E.$$

Бу эса (8) матрицанинг берилган A га тескари матрица эканини билдиради.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix}$$

Шундай қилиб берилган A матрицанинг тескари матрицаси мавжудлиги кўрсатилди. Энди тескари матрицанинг ягоналигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, A^{-1} дан фаркли C матрица ҳам A нинг тескари матрицаси бўлсин. Унда $AC = CA = E$ бўлади. Ушбу

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$

$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$$

тенгликлардан $C = A^{-1}$ экани келиб чиқади. Бу эса A матрицанинг тескари матрицаси A^{-1} ягона эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема берилган матрицанинг тескари матрицасининг мавжуд бўлишинигина исботлаб қолмасдан, уни топиш усулини ҳам кўрсатади.

Мисол. Ушбу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

матрицанинг тескари A^{-1} матрицасини топиш.

Аввало берилган матрица детерминантини ҳисоблаймиз:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$

Демак, юқорда келтирилган теоремага кўра берилган матрицанинг тескари матрицаси A^{-1} мавжуд. A^{-1} матрицани топиш учун $|A|$ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Унда

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{12}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{2}{10} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix}$$

Эслатма. Хос матрицанынг тескари матрицаси мавжуд бўлмайди.

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

Биз ўтган бобларда детерминантлар, матрицалар ва уларнинг хоссаларини карадик. Энди бу маълумотлардан фойдаланиб тенгламалар системасини батафсил ўрганамиз.

1-§. Икки ва уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаси

Иккита x_1 ва x_2 номаълумли чизиқли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

система *икки номаълумли чизиқли тенгламалар системаси* дейилади, бунда a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} — (1) система коэффициентлари, b_1 , b_2 — берилган сонлардир.

Агар (1) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сонни, x_2 нинг ўрнига x_2^0 сонни қўйганда тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда (x_1^0, x_2^0) жуфтлик (1) тенгламалар системасининг *ечими* дейилади.

(1) системани ўрганишда бу системанинг коэффициентларидан тузилган.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2)$$

детерминант (уни (1) системанинг детерминанти дейилади) ҳамда бу детерминантнинг биринчи ва иккинчи устунларини мос равишда озодадлар билан алмаштирилган ушбу

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \quad (3)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \quad (4)$$

детерминантлар муҳим аҳамиятга эга.

(1) тенгламалар системасини ечиш учун аввало бу системанинг биринчи тенгламасини a_{22} га, иккинчи тенгламасини эса $-a_{12}$ га кўпайтириб, кейин ҳадлаб қўшиб

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1, \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

бўлишини топамиз. Сўнгра (1) системанинг биринчи тенгламасини $-a_{21}$ га, иккинчи тенгламасини эса a_{11} га кўпайтириб кейин ҳадлаб қўшиб

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 = -b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

бўлишини топамиз. Натижада (1) системага тенг кучли бўлган ушбу

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= b_2a_{11} - a_{21}b_1. \end{aligned}$$

системага келамиз. Бу система юқоридаги (2), (3) ва (4) муносабатларда ҳисобга олганда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \end{cases} \quad (1')$$

(1') системасининг ечими Δ, Δ_{x_1} ҳамда Δ_{x_2} ларга боғлиқ.

1°. $\Delta \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) системадан

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad (5)$$

бўлишини топамиз. Бу топилган x_1 ва x_2 лар (1') тенгламанинг ечими бўлади. (1) системанинг ечимини топишнинг бу усули *Крамер усули* дейилади. (5) формулага эса Крамер формуласи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

системани ечинг.

Аввало бу системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Демак, берилган система ягона ечимга эга. Уни Крамер формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{-7} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot (-14) = 2,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot 7 = -1.$$

Демак, берилган системанинг ечими $(+2; -1)$ бўлади.

2°. $\Delta = 0$ бўлиб, Δ_{x_1} ва Δ_{x_2} лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фаркли бўлсин. Бунда (1) система ечимга эга бўлмайди. Бу ҳолда (1) биргаликда бўлмаган система дейилади.

2- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

бўлади. Демак, берилган система биргаликда бўлмаган система бўлиб, унинг ечими мавжуд эмас.

3° $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0$, $\Delta_{x_2} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) система ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади ёки ечимга эга бўлмайди. Шунинг учун система бу ҳолда ноаниқ, дейилади.

3- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

бўлади. Ихтиёрий $\left(t, \frac{1-2t}{3}\right)$ кўринишдаги жуфтлик

$(t \in \mathbb{R})$ системанинг ечими экани равшан. Демак берилган система ноаниқ система бўлиб, у чексиз кўп ечимга эга.

Энди уч номаълумли чизикли тенгламалар системасини қараймиз.

Учта x_1 , x_2 ва x_3 номаълумли чизикли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6)$$

система уч номаълумли чиқиқли тенгламалар системаси дейилади, бунда $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ — бу системанинг коэффициентлари, b_1, b_2, b_3 — берилган сонлардир.

Агар (6) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сонни, x_2 нинг ўрнига x_2^0 сонни ва x_3 нинг ўрнига x_3^0 сонни қўйганда тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда (x_1^0, x_2^0, x_3^0) учлик (6) системанинг ечими дейилади.

Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

детерминант берилган (6) системанинг *детерминанти* дейилади. Бу детерминантнинг биринчи, иккинчи ва учинчи устунларини мос равишда озод хадлар билан алмаштириб

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

детерминантларни ҳосил қиламиз. Икки номаълумли система сингари бу детерминантлар ҳам (6) системани ечишда муҳим аҳамиятга эга.

Алгебраик тўлдирувчилар хоссаларидан фойдаланиб (6) система-ни унга эквивалент, соддарок система билан алмаштираемиз. Бунинг учун аввало, берилган система детерминанти элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Бу алгебраик тўлдирувчилар ёрдамида юқоридаги Δ ва Δ_{x_1} детерминантлар қуйидагича ёзилади:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$\Delta_{x_1} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \quad (8)$$

Энди (6) системанинг биринчи тенгламасини A_{11} га, иккинчи тенгламасини A_{21} га ва учинчи тенгламасини A_{31} га кўпайтириб, кейин ҳадлаб қўшсак, унда

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \quad (9)$$

бўлади. Юқоридаги (8) муносабатлардан ҳамда детерминантнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} &= \Delta, \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} &= 0, \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} &= 0, \\ b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} &= \Delta_{x_1}. \end{aligned}$$

Натижада (9) тенглама ушбу

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1}$$

кўринишга келади.

Худди юқоридагидек, (6) системанинг биринчи тенгламасини A_{12} га, иккинчи тенгламасини A_{22} га ва учинчи тенгламасини A_{32} га кўпайтириб, кейин ҳадлаб қўшиб

$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2}$$

тенглама, (6) тенгламанинг биринчи тенгламасини A_{13} га, иккинчи тенгламасини A_{23} га ва учинчи тенгламасини A_{33} га кўпайтириб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиш натижасида

$$\Delta \cdot x_3 = \Delta_{x_3}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Шундай қилиб (6) системага тенг кучли бўлган ушбу

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_{x_3} \end{cases} \quad (6)$$

системага келамиз.

Равшанки (6') системанинг ечими Δ , Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} ларга боғлиқ.

1°. $\Delta \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6') системадан

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \quad (10)$$

бўлишини топамиз. (x_1, x_2, x_3) (6) системанинг ягона ечими бўлади. Бу ҳолда (6) система биргаликда дейилади ва (10) муносабатлар ҳам Крамер формулалари дейилади.

2°. $\Delta = 0$ бўлиб, Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлсин. Бунда (6) система ечимга эга бўлмайди.

3°. $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) система ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади ёки битта ҳам ечимга эга бўлмайди.

4- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

системани ечинг.

Бу системанинг детерминанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10.$$

Демак, берилган система ягона ечимга эга. Берилган система учун

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -20.$$

Крамер формуласидан фойдаланиб

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 2$$

бўлишини топамиз.

5- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

бўлгани сабабли берилган система ечимга эга эмас.

Энди учинчи тартибли чизикли тенгламалар системасини матрица

кўринишида ёзилишини ва матрица орқали ечишни кўрайлик.

Аввалгидек

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6)$$

система берилган бўлсин. Берилган системанинг коэффициентларидан. x_1, x_2, x_3 лардан ҳамда системанинг озод ҳадларидан ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

матрицаларни тузамиз.

Равшанки,

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \quad (6'')$$

кўринишида ёзиш имконини беради.

(6'') тенглама (6) тенгламалар системасининг матрица кўринишида ёзилиши бўлади.

Айталик, (6) системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. Унда юқорида киритилган A матрицанинг тескари матрицаси мавжуд бўлиб,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

бўлади (қаралсин: 6- боб, 4- §).

(6'') тенгликнинг ҳар икки томонини A^{-1} матрицага кўпайтириб топамиз: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Агар $A^{-1}AX = (A^{-1}A)X = EX = X$ бўлигини эътиборга олсак, унда матрица кўринишида ёзилган (6'') тенгламанинг ечими

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (11)$$

система n та номатълумли чиқиқли тенгламалар системаси дейилади. бунда $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$ — шу система коэффициентлари, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — озод ҳадлар берилган сонлардир.

Агар (12) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сонни, x_2 нинг ўрнига x_2^0 ни, ва ҳ. к. x_n нинг ўрнига x_n^0 сонни қўйганда системадаги тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (12) система-нинг *ечими* дейилади.

Берилган тенгламаларни ечишда унинг коэффициентларидан тузилган

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант ҳамда бу детерминантнинг j -устунини ($j=1, 2, \dots, n$) мос равишда озод ҳадлар билан алмаштирилган

$$\Delta_{x_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

($j=1, 2, \dots, n$) детерминантлар муҳим аҳамиятга эга. Агар A, X ва B матрицалар учун

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

матрицалар олинса, унда (12) тенгламалар системаси

$$A \cdot X = B \quad (13)$$

матрица кўринишидаги тенгламага келади.

Фараз қилайлик (12) системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлсин. У ҳолда A матрицанинг тескари матрицаси мавжуд ва

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}$$

бўлади.

(13) тенгламанинг ҳар икки томонини A^{-1} га кўпайтирамиз: $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Равшанки, $A^{-1}AX = (A^{-1}A)X = EX = X$.

Демак, матрица кўринишидаги (13) тенгламанинг ечими

$$X = A^{-1}B \quad (14)$$

бўлади.

A^{-1} ва B матрицаларни кўпайтириб топамиз:

$$A^{-1}B = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}) \\ \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2}) \\ \dots \\ \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn}) \end{vmatrix}$$

Агар детерминантнинг ушбу

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

$$\Delta_{xj} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \dots + a_{nk}A_{nj} = 0$$

хоссасидан фойдалансак,

$$A^{-1}B = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} \Delta_{x_1} \\ \frac{1}{\Delta} \Delta_{x_2} \\ \dots \\ \frac{1}{\Delta} \Delta_{x_n} \end{vmatrix}$$

бўлади. Бу тенгликни ҳамда $X =$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

ни эътиборга олсак, унда (14) муносабат ушбу

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} \Delta_{x_1} \\ \frac{1}{\Delta} \Delta_{x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta} \Delta_{x_n} \end{vmatrix}$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликдан эса

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

келиб чиқади (Крамер формуласи). Бу ҳолда (12) система биргаликда дейилади.

Агар системанинг детерминанти $\Delta = 0$ бўлиб, Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_n} лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фаркли бўлса, (12) система ечимга эга бўлмайди. Бу ҳолда (12) биргаликда бўлмаган система дейилади.

Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$ бўлса, унда (12) система битта ҳам ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

6-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

чирикли тенгламалар системасини ечинг. Бу системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27.$$

Демак, берилган тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

Энди Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} ва Δ_{x_4} ни топамиз.

$$\Delta_{x_1} = 8 \cdot A_{11} + 9 \cdot A_{21} - 5A_{31} + 0 \cdot A_{41} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$\Delta_{x_2} = -108, \quad \Delta_{x_3} = -27, \quad \Delta_{x_4} = 27.$$

Демак,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = -1, \quad x_4 = \frac{\Delta_{x_4}}{\Delta} = 1.$$

3-§. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (15)$$

система *бир жинсли чизикли тенгламалар системаси* дейилади. Бу система 2-§ да ўрганилган системанинг $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ бўлган хусусий ҳолидир.

Равшанки, $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ сонлар (15) системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради. Бинобарин улар (13) системанинг ечими бўлади. Одатда бу ечим (15) системанинг *тривиал ечими* дейилади.

Табийий равишда (15) системанинг тривиал бўлмаган (хеч бўлмаганда $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларнинг бири нолдан фаркли бўлган) ечими бўладими деган савол туғилади.

Агар (15) бир жинсли чизикли тенгламалар системасининг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

нолдан фаркли бўлса ($\Delta \neq 0$), у ҳолда бу система фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (15) система учун

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \dots,$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиб, Крамер формуласига кўра $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ бўлади.

Юқорида айтилганлардан куйидаги хулоса келиб чиқади.

Агар (15) система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлса, у ҳолда (15) системанинг детерминанти нол бўлиши зарурдир.

Демак, (15) системанинг тривиал бўлмаган ечими шу система детерминанти нолга тенг бўлган ҳолдагина бўлиши мумкин экан.

7-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Теорема (Кронекер — Копелли теоремаси). (17) тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун A ва A матрицаларнинг ранглари бир-бирига тенг бўлиши, яъни

$$\text{rank} A = \text{rank} \bar{A},$$

зарур ва етарлидир.

Келтирилган теоремадан куйидаги хулосалар келиб чиқади:

1°. Агар $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрицанинг рангидан катта бўлса, яъни

$$\text{rank} \bar{A} > \text{rank} A,$$

унда (17) система ечимга эга бўлмайди.

2°. Агар $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрицанинг рангига тенг бўлиб,

$$\text{rank} \bar{A} = \text{rank} A = k$$

бўлса, унда (17) система ечимга эга бўлиб, куйидаги холлар юз беради:

а) $k < n$ да (17) система ечимга эга бўлади ва у куйидагича топилади: $\text{rank} A = k$ эканлигидан шундай нолдан фаркли камида битта k -тартибли минор мавжуд. Фараз қилайлик улардан бири

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{k1} & \dots & \tilde{a}_{kk} \end{vmatrix}$$

бўлсин.

Энди (17) системани бу минорга мос холда ушбу

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \dots + \tilde{a}_{1k}x_k + a_{1k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ \tilde{a}_{k1}x_1 + \dots + \tilde{a}_{kk}x_k + a_{kk+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \quad (18)$$

кўринишда ёзиб оламиз ва $x_{k+1}, \dots, x_n$ номаълумлар катнашган хадларни ўнг томонга ўтказамиз:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \dots + \tilde{a}_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ \tilde{a}_{k1}x_1 + \dots + \tilde{a}_{kk}x_k = b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n \end{cases} \quad (19)$$

$x_{k+1}, \dots, x_n$ ларни ихтиёрий тайинланган $x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ сонлар деб қараб, бу системани ечамиз. (19) системанинг детерминанти нолдан фаркли бўлгани учун унинг ечимлари

$$x_1 = \frac{\tilde{\Delta}_{x_1}}{\tilde{\Delta}}, \dots, x_k = \frac{\tilde{\Delta}_{x_k}}{\tilde{\Delta}}$$

бўлади. Демак, ҳар бир тайинланган $x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ лар учун (19) система ягона $x_1^0, \dots, x_k^0$ ечимга эга бўлиб, $x_1^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ сонлар (18) системанинг ечими бўлади. $x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ лар ихтиёрий қийматларни қабул қилиши мумкинлиги сабабли (19) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Топилган $x_1^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ сонлар (17) системанинг қолган тенгламаларини ҳам қаноатлантирганлиги учун улар (17) системанинг ҳам ечими бўлади.

б) $k = n$ бўлганда (17) система а) холда айтилганларга асосан ягона ечимга эга бўлади.

Демак, $\text{rank } \bar{A} = \text{rank } A = n$ бўлгандагина (17) система ягона ечимга эга бўлар экан.
8-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}, \bar{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

бўлади. Қуйидаги иккинчи тартибли детерминант

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

нолдан фарқли бўлганлигидан

$$\text{rank } A = 2$$

бўлишини топамиз. Агар

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -172 + 172 = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\bar{A}$ матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг бўлишини аниқлаймиз: $\text{rank } \bar{A} = 2$, $\text{rank } \bar{A} = \text{rank } A = 2$. Номатрумлар сони ҳам 2 та бўлгани учун берилган система ягона ечимга эга. Берилган системанинг биринчи иккита тенгламасини олиб

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$$

системани ечамиз:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{17}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{23}{17}.$$

Бу топилган x_1 ва x_2 берилган системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиради: $4x_1 + 9x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{17}\right) + 9 \cdot \frac{23}{17} = 11$. Шундай қилиб, $x_1 = -\frac{5}{17}$, $x_2 = \frac{23}{17}$ берилган системанинг ягона ечими бўлади.

9- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

бўлгани сабабли Крамер усулини қўллаш мумкин эмас. Шунинг учун берилган системанинг ечимга эга ёки эга эмаслигини Кронекер — Копелли теоремасидан фойдаланиб текширамиз. Системанинг асосий A ва кенгайтирилган $\bar{A}$ матрицаларининг рангини ҳисоблаймиз. Система учун

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

эканлигидан $|A| = \Delta = 0$ ва

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

бўлишидан $\text{rank} A = 2$, $\text{rank} \bar{A} = 3$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\text{rank} \bar{A} \neq \text{rank} A$ бўлгани учун система ечимга эга эмас.

10- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

системани ечинг.

Бу система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Асосий

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

ва кенгайтирилган

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

матрицаларнинг рангларини ҳисоблаймиз.

$$\text{Агар } |A| = \Delta = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\text{rank} A = 2$ ни топамиз.

Кенгайтирилган матрицадан ҳосил килинган барча (4та) учинчи тартибли матрицалар детерминантлари нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Бирок $\bar{A}$ нинг иккинчи тартибли матричасидан тузилган детерминант:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Бинобарин, } \text{rank} \bar{A} = 2. \text{ Демак, } \text{rank} A = \text{rank} \bar{A} = 2 \text{ экан.}$$

Энди системанинг ечимини топиш учун бу системадан нолдан фаркли 2- тартибли детерминант элементлари катнашган биринчи ва иккинчи тенгламаларни олиб,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

системани кўрамыз. Бу системадаги тенгламаларнинг ўнг томонига битта номаълумни шундай ўтказиш керакки, ҳосил бўлган икки номаълумли системанинг детерминанти 0 дан фаркли бўлсин. Масалан, бизнинг ҳолимизда ўнг томонга ёки x_1 ни ёки x_2 ни ўтказиш мумкин. Биз x_2 ни олиб ўтамыз:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 - x_2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 - x_2 \end{cases} \quad (20)$$

бу системанинг детерминанти

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

бўлгани учун (20) система ҳар бир тайинланган $x_2 = x_2^0$ да ягона ечимга эга бўлади:

$$x_1 = \frac{\Delta'_{x_1}}{\Delta'} = \begin{vmatrix} 1 - x_2^0 & 1 \\ 1 - x_2^0 & 2 \end{vmatrix} = 1 - x_2^0$$

$$x_3 = \frac{\Delta'_{x_3}}{\Delta'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_2^0 \\ 1 & 1 - x_2^0 \end{vmatrix} = 0,$$

КОМПЛЕКС СОНЛАР

Ушбу бобда комплекс сонлар ҳақидаги дастлабки маълумотларни келтирамиз. Комплекс сонлар ва уларга боғлиқ комплекс ўзгарувчи-ли функцияларни кейинчалик батафсил ўрганамиз. Математикада кўпчилик масалаларни ҳал қилиш ҳақиқий сонлар тўпламини кенгайтиришни тақозо қилади. Мисол учун квадрат тенгламалар ва уларнинг ечимларини ўрганишда биз комплекс сонлар тўпламига ўтиш зарурлигини кўп кўрганмиз.

1-§. Комплекс сон тушунчаси

Иккита a ва b ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$a + ib$$

кўринишдаги сон *комплекс сон*, $i = \sqrt{-1}$ эса *мавҳум бирлик* дейилади.

Одатда комплекс сонлар битта ҳарф, кўпинча z ҳарфи билан белгиланади:

$$z = a + ib.$$

a сон z комплекс соннинг *ҳақиқий қисми* дейилиб, $\text{Re}z$ каби белгиланади, b сон z комплекс соннинг *мавҳум қисми* дейилиб, $\text{Im}z$ каби белгиланади.

Демак, $a = \text{Re}z$, $b = \text{Im}z$.

Масалан, $z = 2 + 5i$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми $\text{Re}z = 2$, мавҳум қисми $\text{Im}z = 5$ бўлади.

Бирор $z = a + ib$ комплекс сон берилган бўлсин. Бу соннинг мавҳум қисмидан ишораси билан фарқ қилувчи $a - ib$ комплккс сон z га *қўшма комплекс сон* дейилади ва $\bar{z}$ каби белгиланади:

$$\bar{z} = a - ib$$

Иккита $z_1 = a_1 + ib_1$, ҳамда $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Агар $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ бўлса, у ҳолда z_1 ва z_2 комплекс сонлар ўзаро тенг дейилади ва $z_1 = z_2$ каби белгиланади.

2-§. Комплекс сонлар устида арифметик амаллар

Иккита $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

комплекс сон z_1 ва z_2 комплекс сонлар *йиғиндиси* дейилади ва $z_1 + z_2$ каби белгиланади:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Келтирилган қоидага кўра

$$z + \bar{z} = 2a$$

бўлишини кўриш кийин эмас.

Ушбу

$$(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

комплекс сон z_1 комплекс сондан z_2 комплекс соннинг айирмаси дейилади ва $z_1 - z_2$ каби белгиланади:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Равшанки,

$$z - \bar{z} = 2ib.$$

Ушбу

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

комплекс сон z_1 ва z_2 комплекс сонлар кўпайтмаси дейилади ва $z_1 z_2$ каби белгиланади:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Бу кўпайтириш қондаси $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$ икки ҳадларни ўзаро кўпайтиришдан ва $i^2 = -1$ эканлигини эътиборга олиб ҳосил қилинган. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 ib_2 + ib_1 ib_2 = \\ &= a_1 a_2 + i(a_1 b_1 + a_2 b_2) + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Келтирилган кўпайтириш қондасидан фойдаланиб

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

бўлишини топамиз.

Ушбу

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

комплекс сон z_1 ва z_2 ($z_2 \neq 0$) комплекс сонлар нисбати ёки бўлинмаси дейилади ва $\frac{z_1}{z_2}$ каби белгиланади:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (1)$$

Бу бўлиш қондаси $a_1 + ib_1$ иккиҳадни $a_2 + ib_2$ иккиҳадга бўлишдан келиб чиққан. Ҳақиқатан ҳам

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Мисол. Ушбу

$$z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$$

комплекс сонларнинг нисбати $\frac{z_1}{z_2}$ ни топинг.

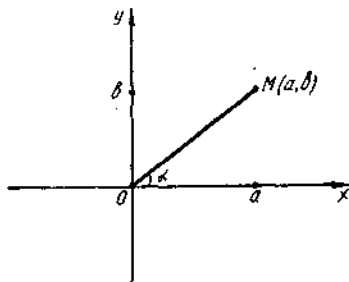
Юқорида келтирилган (1) қоидага кўра:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-i+1}{1+1} = \frac{2-2i}{2} = 1-i = -i.$$

3-§. Комплекс сонни геометрик тасвирлаш

Ҳақиқий сонлар тўплами O_x ўқида тасвирланиши бизга маълум. Комплекс сонларни геометрик тасвирлаш учун биз текисликда Oxy Декарт координаталари системасидан фойдаланамиз.

$z = a + ib$ комплекс сон учун a бирликни O_x ўқида, b бирликни эса O_y ўқида қўйиб мос $M(a, b)$ нукта оламиз (27- чизма). M нукта z комплекс соннинг текисликда геометрик тасвири дейилади. Равшанки, ҳар бир комплекс сонга текисликда битта M нукта ва аксинча текисликдаги ҳар бир M нуктага битта комплекс сон мос келади. Демак, комплекс сонлар тўплами билан текислик нукталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлиб, O_{xy} текислик (шу мосликни назарда тутиб) *комплекс сонлар текислиги* дейилади.



27- чизма.

Координаталар боши O нукта билан M ни бирлаштирувчи OM кесма узунлиги r га z комплекс соннинг *модули* дейилади ва $|z|$ каби белгиланади.

Пифагор теоремасига кўра

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

эканлигини кўриш кийин эмас.

OM вектор билан O_x ўқи орасидаги α бурчакка z комплекс соннинг *аргументи* дейилади ва $\arg z$ каби белгиланади. Демак, $0 \leq \arg z < 2\pi$

27- чизмадан кўринадики.

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}, \sin \alpha = \frac{b}{r} \text{ ёки } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (2)$$

бўлиб, бу формулалар ёрдамида комплекс соннинг аргументини топиш мумкин.

Мисол. Ушбу $z = 1 - i$ комплекс соннинг модули ва аргументи топилисин.

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ бўлиб, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ эканлигини кўриш кийин эмас. Бу тенгламалар $[0, 2\pi)$ оралигида ягона

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ечимга эга. Демак, (2) тенгликлардан $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$ ифодаларга эга бўлиб, бундан эса $z = a + ib$ комплекс сонни

$$z = r \cos \alpha + i r \sin \alpha = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрамиз. Комплекс соннинг бу кўриниши унинг *тригонометрик шакли* дейилади. Комплекс соннинг бундай кўриниши катор қулайликларга олиб келади.

Фараз қилайлик, z_1 ва z_2 комплекс сонлар

$$z_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

тригонометрик шаклда берилган бўлсин. Бу ерда

$$r_1 = |z_1|, \quad r_2 = |z_2|, \quad \alpha_1 = \arg z_1, \quad \alpha_2 = \arg z_2$$

$z_1 \cdot z_2$ кўпайтма ва $\frac{z_1}{z_2}$ нисбатни қарайлик.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \\ &+ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)] = r_1 r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2)] \end{aligned}$$

бўлиб, бу тенгликдан, $|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ эканини кўрамиз.

Юқоридаги қоидадан кўринадикки, иккита комплекс сон кўпайтирилганда, кўпайтманинг модули модулларнинг кўпайтмасига, аргументи эса аргументларнинг йиғиндисига тенг бўлар экан.

Мисол. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$ комплекс сонлар учун $z_1 \cdot z_2$ топилсин.

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{2}, \quad |z_1 z_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \text{ эканлиги равшан.}$$

$$\arg z_1 = \frac{7\pi}{4}, \quad \arg z_2 = \frac{3\pi}{4} \quad \text{бўлиб,} \quad \arg z_1 \cdot z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 =$$

$$= \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{10\pi}{4}. \quad \text{Демак, } z_1 \cdot z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i.$$

$$\text{Худди шунингдек биз } \frac{z_1}{z_2} \text{ нисбат учун } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \text{ эканини кўришимиз мумкин.}$$

Энди комплекс соннинг даражаси z^n ва илдизи $\sqrt[n]{z}$ ифодалари билан танишайлик.

Таърифга кўра $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ та}}$ бўлиб, $z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ эканлиги равшан.

Демак, $|z|^n = |z|^n$, $\arg z^n = n \arg z$ бўлади. $\sqrt[n]{z}$ миқдор даражага тесқари амал бўлиб, у қуйидагича аниқланади: берилган z комплекс сон учун ушбу

$$W^n = z \quad (3)$$

тенгламанинг ечимлари z комплекс сондан олинган n -даражали илдиз дейилади ва $\sqrt[n]{z}$ каби белгиланади. (3) тенгламани ечиш учун z ни $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, W ни эса $W=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ шаклда ифодалаймиз. У ҳолда (3) тенглама

$$R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha) \quad (4)$$

кўринишини олади. Аввало (4) тенгликнинг ҳар иккала томонидаги комплекс сонларнинг модулларини ҳисоблаймиз:

$$|R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)|=R^n, |r(\cos\alpha+i\sin\alpha)|=r.$$

Демак, $R^n=r$.

Энди комплекс сонларнинг тенглиги тушунчасидан фойдаланиб (4) тенгликдан топамиз:

$$\cos n\varphi=\cos\alpha, \sin n\varphi=\sin\alpha.$$

Шундай қилиб, қуйидаги тенгликларга келдик:

$$R^n=r, \cos n\varphi=\cos\alpha, \sin n\varphi=\sin\alpha.$$

Бу ерда $R^n=r$ тенглама ягона $R=\sqrt[n]{r}$ ечимга эга бўлади.

$\cos n\varphi=\cos\alpha$, $\sin n\varphi=\sin\alpha$ тенгликлардан $n\varphi=\alpha+2k\pi$, $k\in Z$ бўлиб, $0\leq\varphi<2\pi$ шартни қаноатлантирувчи барча ечимлар $\frac{\alpha}{n}$,

$\frac{\alpha+2\pi}{n}, \dots, \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}$ лардан иборат. Демак, (3) тенглама n та ечимга эга бўлиб, улар қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right), \\ W_2 &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha+2\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha+2\pi}{n} \right), \\ W_n &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

1-мисол. $\sqrt[3]{1+i}$ ни ҳисобланг.

Аввало $1+i$ комплекс сонни тригонометрик шаклда ифодалаймиз.

Маълумки, бу сон учун $z=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, демак,

$$1+i=\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Энди $\sqrt[3]{1+i}$ ни ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+i} &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} \right) = \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi+8k\pi}{12} + i \sin \frac{\pi+8k\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

бўлиб, бу ерда $k=0,1,2$.

2-мисол. $\sqrt[n]{1}$ ни ҳисобланг.

Худди аввалги мисолга ўхшаш бу ерда ҳам 1 сонини тригонометрик шаклда ифодалаймиз:

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

Бу илдишлардан биттаси ҳақиқий сон бўлиб, у $k=0$ да 1 га тенг, қолган илдишлар эса комплекс сонлардир.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

кўпхад берилган бўлсин. Бу кўпхад юқоридаги теоремага кўра камида битта α_1 илдизга эга. Шунинг учун.

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \varphi_1(x)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi_1(x)$ кўпхад бўлиб, унинг даражаси $n-1$ га тенг.

Агар $\varphi_1(x)$ нинг даражаси n бўлиб, $n > 1$ бўлса, бу кўпхад ҳам теоремага кўра камида битта α_2 илдизга эга бўлади:

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_2) \varphi_2(x).$$

Бу ерда $\varphi_2(x)$ — кўпхад. Натижада берилган кўпхад

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \varphi_2(x)$$

кўринишни олади. Бу жараёни давом эттириш билан

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ орасида ўзаро бир-бирига тенглари бўлиши мумкин. Шунинг эътиборга оласак,

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s} \quad (3)$$

бўлади, бунда $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, $i \neq j$ ларда $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, s$).

(3) тенглик ўринли бўлганда α_m сон ($m = 1, 2, \dots, s$) $f(x)$ кўпхаднинг k_m каррали илдизи дейилади. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

Теорема. (Алгебранинг асосий теоремаси.) **Ихтиёрий n -даражали ($n \geq 1$) кўпхад n та илдизга эга (бунда ҳар бир илдиз неча каррали бўлса, шунча марта ҳисобланади).**

ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенглама *n*-*даражали тенглама* дейилади, бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ ихтиёрий ҳақиқий ёки комплекс сонлар ва $a_n \neq 0$.

Агар x_0 сонни (бу сон ҳақиқий ё комплекс бўлиши мумкин)

(1) тенгламанинг чап томонидаги x нинг ўрнига қўйганда ифода айнан нолга айланса:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

у ҳолда x_0 сон (1) тенгламанинг *ечими* дейилади. Берилган тенгламанинг барча ечимларини топиш уни *ечиш* дейилади.

(1) тенгламани ечишда кўпхад ва улар хақидаги маълумотлар муҳимдир.

1-§. Кўпхадлар

Бутун даражали

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

функция *n*-*даражали кўпхад* дейилади, бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ — кўпхаднинг коэффицентлари, *n* эса кўпхаднинг даражасидир. Умумиятга зиён келтирмасдан $a_n \neq 0$ деб фараз қилинади.

Иккита

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

кўпхадлар берилган бўлсин. Бу кўпхадларнинг бир хил даражали ўзгарувчилари олдидаги турган коэффицентлар бир-бирига тенг бўлса,

$$a_k = b_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

у ҳолда бу кўпхадлар бир-бирига тенг дейилади ва $f(x) = \varphi(x)$ каби ёзилади.

Кўпхадлар устида қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларини бажариш мумкин.

Икки кўпхад йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси яна кўпхад бўлади.

$f(x)$ ва $g(x)$ кўпхадлар учун шундай (ягона) $q(x)$ ва $r(x)$ кўпхадлар топиладики, $r(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан катъий кичик бўлиб,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (2)$$

тенглик бажарилади. $q(x)$ кўпхад $f(x)$ ни $g(x)$ га бўлишдан ҳосил бўлган бўлинма, $r(x)$ га эса қолдиқ дейилади.

Агар (2) тенгликда $r(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ кўпхад $g(x)$ га бўлинади дейилади. Бу ҳолда $g(x)$ кўпхад $f(x)$ кўпхаднинг бўлувчиси дейилади.

Бирор $f(x)$ кўпхад ва бирор c сон берилган бўлсин. Агар $f(c) = 0$ бўлса, c сон $f(x)$ кўпхаднинг илдизи дейилади.

Теорема. *$f(x)$ кўпхадни $x - a$ кўпхадга бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ берилган кўпхаднинг $x = a$ даги қиймати $f(a)$ га тенг бўлади.*

Исбот. $f(x)$ кўпхадни $x - a$ га бўлганда бўлинма $q(x)$, қолдиқ эса $r(x)$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $r(x)$ ўзгармас бўлади. Уни $r(x) = c$ деб олайлик.

Унда

$$f(x) = (x - a)q(x) + c$$

бўлади. Бу тенгликда $x = a$ дейилса,

$$c = f(a)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Бу теоремадан куйидаги натижа келиб чиқади:

a сон $f(x)$ кўпхаднинг илдизи бўлиши учун $f(x)$ нинг $x - a$ га бўлиниши зарур ва етарлидир (Безу теоремаси).

Агар $f(x)$ кўпхад $x - a$ га бўлиниши билан бирга $(x - a)^k$ га ҳам бўлинса ($k > 1$ бўлган натурал сон), a сон $f(x)$ кўпхаднинг каррали илдизи дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x)$ кўпхад $(x - a)^k$ га бўлиниб, $(x - a)^{k+1}$ га бўлинмаса, a сон $f(x)$ нинг k каррали илдизи дейилади. Бу ҳолда $f(x)$ кўпхад

$$f(x) = (x - a)^k \varphi(x)$$

кўринишида ёзилиб, $\varphi(x)$ кўпхад $x - a$ га бўлинмайди.

2-§. Алгебранинг асосий теоремаси

Куйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Даражаси бирдан кичик бўлмаган ихтиёрий кўпхад камида битта, умуман айтганда комплекс илдизга эга.*

Фараз қилайлик, бирор n - даражали

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

кўпхад берилган бўлсин. Бу кўпхад юқоридаги теоремага кўра камида битта α_1 илдизга эга. Шунинг учун.

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \varphi_1(x)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi_1(x)$ кўпхад бўлиб, унинг даражаси $n-1$ га тенг.

Агар $n > 1$ бўлса, бу $\varphi_1(x)$ кўпхад ҳам теоремага кўра камида битта α_2 илдизга эга бўлади:

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_2) \varphi_2(x).$$

Бу ерда $\varphi_2(x)$ — кўпхад. Натижада берилган кўпхад

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \varphi_2(x)$$

кўринишни олади. Бу жараёни давом эттириш билан

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар орасида ўзаро бир-бирига тенглари бўлиши мумкин. Шунинг эътиборига олсак,

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s} \quad (3)$$

бўлади, бунда $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, $i \neq j$ ларда $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, s$). (3) тенглик ўринли бўлганда α_m сон ($m = 1, 2, \dots, s$) $f(x)$ кўпхаднинг k_m каррали илдизи дейилади. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

Теорема (алгебранинг асосий теоремаси). *Ихтиёрий n -даражали ($n \geq 1$) кўпхад n та илдизга эга (ҳар бир илдиз неча каррали бўлса, шунча марта ҳисобланади).*

3-§. Юқори даражали тенгламаларни ечиш

Алгебранинг асосий теоремаси муҳим назарий аҳамиятга эга. Гарчи у

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (4)$$

$(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$

тенгламанинг n та ечими мавжудлигини ифодаласа ҳам, умумий ҳолда тенгламанинг бу ечимларини топиш алгоритмини аниқлаб бермайди. (4) тенгламани ечиш масаласи ҳозирга қадар катта муаммо бўлиб, у айрим хусусий ҳоллардагина ҳал этилган.

Одатда, (4) тенгламанинг ечими $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ коэффицентлар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва илдиз чиқариш амалларини бажаришдан ҳосил бўлган ифода билан аниқланса, у ҳолда (4) тенглама радикалларда ечилади дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, агар $\alpha = a + ib$ комплекс сон

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

тенгламанинг ечими бўлса, $P(\alpha) \equiv 0$, у ҳолда α соннинг қўшмаси $\bar{\alpha} = a - ib$ комплекс сон ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ бўлганлиги сабабли

$$P(\bar{\alpha}) = P(a - ib) = \overline{P(a + ib)} = \overline{P(a + ib)} = \bar{0} = 0$$

бўлади. Бу эса $\bar{\alpha}$ комплекс сон (4) тенгламанинг ечими бўлишини билдиради.

Н а т и ж а . Агар

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

тенгламанинг даражаси n тоқ сон бўлса, y ҳолда тенглама камида битта ҳақиқий ечимга эга бўлади.

Энди (4) тенглама радикалларда ечиладиган ҳолларни келтирамиз.

1°. $n=1$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

кўринишга келади ва унинг ечими $x = -\frac{a_1}{a_0}$ бўлади.

2°. $n=2$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

кўринишга келади ва унинг ечимлари

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}, \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

бўлади.

3°. $n=3$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (5)$$

кўринишга келади. Бу тенглама қуйидагича ечилади:

1) (5) тенгламанинг ҳар икки томонини a_0 га бўламиз. Натижада (5) га эквивалент

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0 \quad (6)$$

тенгламага келамиз, бунда $b_k = \frac{a_k}{a_0}$ ($k=1, 2, 3$)

2) (6) тенгламада $x = y - \frac{b_1}{3}$ алмаштириш бажарамиз. Унда

(6) тенгламанинг чап томонидаги кўпхад

$$\begin{aligned} & (y - \frac{b_1}{3})^3 + b_1(y - \frac{b_1}{3})^2 + b_2(y - \frac{b_1}{3}) + b_3 = \\ & = y^3 + (b_2 - \frac{b_1^2}{3})y + (b_3 - \frac{b_1b_2}{3} + \frac{2}{27}b_1^3) \end{aligned}$$

кўринишга келади. Агар

$$b_2 - \frac{b_1^2}{3} = p, \quad b_3 - \frac{b_1b_2}{3} + \frac{2}{27}b_1^3 = q$$

деб олинса, унда (6) тенглама

$$y^3 + py + q = 0 \quad (7)$$

кўринишни олади.

Шундай қилиб берилган тенгламани ечиш (7) тенгламани ечишга келади.

3) (7) тенгламанинг ечимини

$$y = u + v \quad (8)$$

кўринишда излаймиз. Бунда u ва v

$$u \cdot v = -\frac{p}{3} \quad (9)$$

шартни қаноатлантирсин. Юкоридаги (8) ва (9) муносабатларни бажарувчи u ва v ларнинг мавжудлиги уларнинг

$$t^2 - yt - \frac{p}{3} = 0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари эканлигидан келиб чиқади (Виет теоремасига кўра).

4) Олинган $y = u + v$ ни (7) тенгламадаги y нинг ўрнига қўямиз:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

Бу тенгламанинг чап томонидаги қавсларни очиб, сўнг уларни группалаб

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

ёки

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0 \quad (10)$$

бўлишини толамиз.

Юкорида келтирилган $uv = -\frac{p}{3}$ муносабатдан $3uv + p = 0$ бўлиб,

(10) тенглама $u^3 + v^3 + q = 0$, яъни $u^3 + v^3 = -q$ кўринишни олади.

Натижада $y^3 + py + q = 0$ тенгламани ечиш

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

системани ечишга келади.

5) Кейинги $u^3 + v^3 = -q$,

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

тенгликлардан кўринадики, изланаётган u ва v нинг кублари u^3 ва v^3 ушбу

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

квадрат тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу квадрат тенгламани ечиб топамиз:

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Демак,

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad (11)$$

$$v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (12)$$

6) (11) ва (12) дан

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (13)$$

бўлишини топамиз. Демак, (7) тенгламанинг ечими

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (14)$$

бўлади. Одатда (14) тенглик *Кардано формуласи* дейилади. Кардано формуласи икки ҳад йиғиндисидан, яъни $u + v$ дан иборат бўлиб, ҳар бир u ва v лар учтадан қийматга эга. Бунда u ва v ларнинг ихтиёрий қийматларидан тузилган $u + v$ йиғиндиининг қийматлари 9 та бўлади. Бу қийматлар ичида учтасигина (7) тенгламанинг ечими бўлиб, бундаги u ва v нинг қийматлари

$$uv = -\frac{p}{3}$$

муносабатда бўлади.

7) Айтайлик, u ва v нинг (13) муносабатни қаноатлантирувчи қийматларидан бири u_1 ва v_1 бўлсин. Унда:

$$u_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}u_1, \quad u_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}u_1, \quad v_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}v_1, \quad v_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}v_1.$$

бўлади.

8) (7) тенгламанинг ечимлари

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \end{aligned} \quad (15)$$

бўлиб, берилган тенгламанинг ечимлари эса $x_1 = y_1 - \frac{b_1}{3}$,

$x_2 = y_2 - \frac{b_1}{3}$; $x_3 = y_3 - \frac{b_1}{3}$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$$

тенгламани ечинг.

Берилган тенгламада $x = y - 3$ алмаштиришни бажарамиз:

$$(y+3)^3 - 9(y+3)^2 + 21(y+3) - 5 = 0,$$

яъни

$$y^3 - 6y + 4 = 0.$$

(14) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$u = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}.$$

Бу куб илдизнинг кийматларидан бири $u_1 = 1 + i$ бўлади. Унда

$$v_1 = -\frac{6}{3(1+i)} = 1 - i$$

бўлиб, (15) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y_1 = 2, y_2 = -1 - \sqrt{3}, y_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Берилган тенгламанинг ечимлари:

$$x_1 = 5, x_2 = 2 - \sqrt{3}, x_3 = 2 + \sqrt{3}.$$

4°. $n=4$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (16)$$

кўринишга келади.

Аввало қуйидаги содда леммани келтирамиз.

Лемма. *Ҳар қандай*

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

квадрат учҳад чиқиқли $kx + l$ иккиҳаднинг квадратига тенг бўлиши учун унинг $b^2 - 4ac$ дискриминанти нол бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик,

$$ax^2 + bx + c = (kx + l)^2$$

бўлсин. Унда

$$ax^2 + bx + c = k^2x^2 + 2klx + l^2$$

бўлиб,

$$a = k^2, b = 2kl, c = l^2$$

бўлади. Натижада

$$b^2 - 4ac = 4k^2l^2 - 4 \cdot k^2 \cdot l^2 = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Берилган $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳаднинг дискриминанти нол бўлсин:

$$b^2 - 4ac = 0.$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 \end{aligned}$$

бўлади. Лемма исбот бўлди.

Берилган (16) тенглама куйидагича ечилади:

1) (16) тенгламанинг ҳар икки томонини a_0 га бўламиз. Натижада

$$x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0 \quad (17)$$

тенгламага келамиз, бунда $b_k = \frac{a_k}{a_0} (k=1,2,3,4)$.

2) (17) тенгламанинг чап томонидаги кўпхадни, ҳозирча номаълум ҳисобланган y ни киритиб, куйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 &= \\ &= \left(x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{b_1^2}{4}x^2 - \frac{b_1y}{2}x - \frac{y^2}{4} - y^2x^2 + \\ &\quad + b_2x^2 + b_3x + b_4 = \left(x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y}{2} \right)^2 - \\ &\quad - \left[\left(\frac{b_1^2}{4} + y - b_2 \right)x^2 + \left(\frac{b_1y}{2} - b_3 \right)x + \left(\frac{y^2}{4} - b_4 \right) \right] \end{aligned}$$

У ҳолда (17) тенглама ушбу

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y}{2} \right)^2 - \left[\left(\frac{b_1^2}{4} + y - b_2 \right)x^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{b_1y}{2} - b_3 \right)x + \left(\frac{y^2}{4} - b_4 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

кўринишга келади.

3) Юқоридаги (18) тенгламада катнашган y ни шундай танлаймизки, натижада

$$\left(\frac{b_1^2}{4} + y - b_2 \right)x^2 + \left(\frac{b_1y}{2} - b_3 \right)x + \left(\frac{y^2}{4} - b_4 \right)$$

квадрат учхад чизикли иккихаднинг квадратига тенг бўлсин. Бунинг учун, леммага кўра, квадрат учхаднинг дискриминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\left(\frac{b_1y}{2} - b_3 \right)^2 - 4 \left(\frac{b_1^2}{4} + y - b_2 \right) \left(\frac{y^2}{4} - b_4 \right) = 0$$

Равшанки,

$$\left(\frac{b_1y}{2} - b_3 \right)^2 - 4 \left(\frac{b_1^2}{4} + y - b_2 \right) \left(\frac{y^2}{4} - b_4 \right) =$$

$$= \frac{b_1^2 y^2}{4} - b_1 b_3 y + b_3^2 - y^2 \cdot \frac{b_1^2}{4} + y^3 + b_2 y^2 + b_1^2 b_4 + 4y b_4 - 4b_2 b_4 =$$

$$= y^3 + b_2 y^2 - (b_1 b_3 + 4b_4) y + (b_3^2 + b_1^2 b_4 - 4b_2 b_4).$$

Натижада (17) тенглама

$$y^3 + b_2 y^2 - (b_1 b_3 + 4b_4) y + (b_3^2 + b_1^2 b_4 - 4b_2 b_4) = 0 \quad (17')$$

кўринишга келади. Бу y га нисбатан учинчи даражали тенгламадир.

4) Айтайлик, y_1 юқоридаги (17') учинчи даражали тенгламанинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда $y = y_1$ бўлганда

$$\left(\frac{b_1^2}{4} + y_1 - b_2\right)x^2 + \left(\frac{b_1 y_1}{2} - b_3\right)x + \left(\frac{y_1^2}{4} - b_4\right) = (kx + l)^2$$

бўлиб, берилган (17) тенглама ушбу

$$\left(x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y_1}{2}\right)^2 - (kx + l)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y_1}{2} + kx + l\right)\left(x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y_1}{2} - kx - l\right) = 0$$

кўринишни олади. Ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб

$$x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y_1}{2} + kx + l = 0,$$

$$x^2 + \frac{b_1}{2}x + \frac{y_1}{2} - kx - l = 0$$

иккита квадрат тенгламага келамиз. Бу тенгламаларнинг 4 та ечими бўлиб, улар берилган (16) тенгламанинг ечимлари бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = 0$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламанинг чап томонидаги кўпхадни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = \left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 - yx^2 - x^2 -$$

$$- xy - \frac{y^2}{4} - 6x^2 - 5x + 2 = \left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 -$$

$$- \left[(y+7)x^2 + (y+5)x + \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)\right]$$

Унда берилган тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[(y+7)x^2 + (y+5)x + \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)\right] = 0. \quad (19)$$

Сўнг $(y+7)x^2 + (y+5)x + \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)$ квадрат учхаднинг дискрими-

нантинини нолга тенглаймиз:

$$(y+5)^2 - 4(y+7)\left(\frac{y^2}{4} - 2\right) = 0. \quad (20)$$

Равшанки

$$\begin{aligned} (y+5)^2 - 4(y+7)\left(\frac{y^2}{4} - 2\right) &= y^2 + 10y + 25 - y^3 - \\ &- 7y^2 + 8y + 56 = -y^3 - 6y^2 + 18y + 81. \end{aligned}$$

Унда (20) тенглама $y^3 + 6y^2 - 18y - 81 = 0$ кўринишга келади. Бу тенгламанинг битта ечимини топамиз:

$$\begin{aligned} y^3 + 6y^2 - 18y - 81 = 0 &\Rightarrow y^3 + 3y^2 + 3y^2 + 9y - 27y - 81 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2(y+3) + 3y(y+3) - 27(y+3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y+3)(y^2 + 3y - 27) = 0 \Rightarrow y_1 = -3. \end{aligned}$$

Бу $y_1 = -3$ ни (19) тенгламадаги y нинг ўрнига қўямиз:

$$\left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left[4x^2 + 2x + \left(\frac{9}{4} - 2\right)\right] = 0.$$

яъни

$$\left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Кейинги тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб,

$$(x^2 + 3x - 1)(x^2 - x - 2) = 0.$$

тенгламага келамиз. Равшанки,

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 1 &= 0, \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

бўлиб, бу квадрат тенгламаларнинг ечимлари:

$$x_1' = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2' = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{ва} \quad x_1'' = 2, \quad x_2'' = -1.$$

Шундай қилиб, берилган $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = 0$ тенгламанинг ечимлари:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -1.$$

$n \geq 5$ бўлганда (4) тенгламанинг радикалларда ечилиши масаласи ҳақида кўп изланишлар олиб борилган. Натижада қуйидаги хулосага келинган.

Агар (4) тенгламанинг даражаси беш ва ундан катта бўлса, у ҳолда (4) тенглама умумий ҳолда радикалларда ечилмайди.

Энди юқори даражали тенгламаларнинг радикалларда ечиладиган айрим хусусий ҳолларини келтирамиз.

а) Икки ҳадли тенглама. Ушбу

$$ax^n + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (21)$$

кўринишдаги тенглама *икки ҳадли тенглама* дейилади. Бу тенгламанинг ечими:

$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Мисол. $x^5 + 32 = 0$ тенгламани ечинг.

Аввало берилган тенгламани $x^5 = -32$ кўринишда ёзиб оламиз.

Ундан: $x = \sqrt[5]{-32}$.

Сўнг -32 сонни комплекс сон сифатида караб, 8-бобдаги (5) формуладан фойдаланиб, $-32 = 32(\cos \pi + i \sin \pi)$ тенгликка келамиз.

Комплекс сондан илдиз чиқариш қондасига кўра

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{-32} &= \sqrt[5]{32(\cos \pi + i \sin \pi)} = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{5} \right) \quad (k=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$x_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{5} \right) \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

берилган тенгламанинг илдизлари:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right), \quad x_1 = \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right), \quad x_2 = -2, \\ x_3 &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right), \quad x_4 = \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right). \end{aligned}$$

б) Уч ҳадли тенгламалар. Ушбу

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (22)$$

кўринишдаги тенглама *уч ҳадли тенглама* дейилади. Бундай тенгламани ечиш учун $x^n = t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада берилган тенглама $at^2 + bt + c = 0$ квадрат тенгламага келади ва

унинг ечими $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ бўлади. Демак, $x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Кейинги тенгликдан

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (23)$$

бўлишини топамиз.

Мисол. $x^6 - 3x^3 - 2 = 0$ тенгламани ечинг.

(23) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \pm 1}{2}}.$$

Демак, $x^3 = \frac{3 \pm 1}{2}$.

Равшанки,

$$x^{(1)} = \sqrt[3]{1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \quad (k=0, 1, 2).$$

Бундан эса

$$x_0^{(1)} = 1, \quad x_1^{(1)} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_2^{(1)} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

бўлишини топамиз. Шунингдек,

$$x^{(2)} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \quad (k=0, 1, 2)$$

Ундан

$$\begin{aligned} x_0^{(2)} &= \sqrt[3]{2}, \\ x_1^{(2)} &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \\ x_2^{(2)} &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб берилган тенгламанинг ечимлари

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \quad x_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}, \\ x_3 &= \sqrt[3]{2}, \quad x_4 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad x_5 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Баъзан

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (4)$$

тенгламанинг чап томонидаги

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

кўпхадни $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$ кўпхадлар кўпайтмаси сифатида

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \dots P_k(x)$$

ёзиш мумкин бўлади. Бундай ҳолда (4) тенгламани ечиш даражаси (4) тенгламанинг даражасидан паст бўлган

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \quad P_k(x) = 0$$

тенгламаларни ечишга келади.

Мисол. $x^6 + x^5 + x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Бу тенгламанинг чап томонидаги кўпхадни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + x^4 - x^2 - x - 1 &= x^4(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^4 - 1) = (x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Натижада берилган тенглама $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)=0$ кўринишни олади. Уни ечиш $x-1=0$, $x+1=0$, $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ тенгламаларни ечишга келади.

Равшанки,

$$x_1=1, x_2=-1, x_3=i, x_4=-i, x_5=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, x_6=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Булар берилган тенгламанинг ечимларидир.

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Аналитик геометрия олий математиканинг бўлимларидан бири бўлиб, унда геометрик шаклларнинг (чизиклар, сиртлар ва ҳ. к.) хоссалари уларнинг аналитик ифодалари орқали ўрганилади.

Маълумки, текисликдаги ҳар бир нукта икки ҳақиқий x ва y сонлардан ташкил топган (x, y) жуфтлик (нуктанинг координаталари) билан аниқланади. Бу жуфтлик нуктанинг аналитик тасвиридир.

Геометрик шакллар эса нукталар тўплами сифатида қаралади. Бунда нукталарнинг координаталари маълум муносабат билан — тенгламалар билан боғланган бўлади. Нукта координаталарини боғловчи бундай тенгламаларни геометрик шаклларнинг аналитик ифодалари деб қараш мумкин.

Аналитик геометрияда қараладиган масалалар асосан икки хил бўлади.

1. Шаклларнинг геометрик хоссаларига кўра, уларнинг тенгламаларини тузиш.

2. Шаклларнинг тенгламаларига кўра, уларнинг геометрик хоссаларини аниқлаш.

10-БОБ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ СОДДА МАСАЛАЛАРИ

Ушбу бобда аналитик геометриянинг содда масалаларини: икки нукта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш ҳамда учбурчакларнинг юзини топиш масалаларини келтирамыз.

1-§. Текисликда икки нукта орасидаги масофа

Текисликда Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Бу текисликда A ва B нукталарни олайлик. Уларнинг координаталари мос равишда (x_1, y_1) , (x_2, y_2) бўлсин:

$$A = A(x_1, y_1), \quad B = B(x_2, y_2).$$

Масала, A ва B нукталарнинг координаталарига кўра шу нукталар орасидаги масофани, яъни AB кесманинг узунлигини топишдан иборат (28-чизма).

A ва B нукталардан Ox ўкига перпендикуляр туширамиз. Уларнинг асосларини A_1 ва B_1 билан белгилаймиз. Равшанки,

$$\begin{aligned} OA_1 &= x_1, \quad OB_1 = x_2, \quad AA_1 = y_1, \\ BB_1 &= y_2. \end{aligned} \quad (1)$$

A нуктадан Ox ўкига параллел чизик ўтказиб, унинг BB_1 билан кesiшган нуктасини C билан белгилаймиз. Унда

$$AC = A_1B_1, \quad CB_1 = AA_1 \quad (2)$$

бўлади. Агар $A_1B_1 = OB_1 - OA_1$, $BC = BB_1 - CB_1$ эканини эътиборга олсак, (1) ва (2) муносабатлардан

$$AC = x_2 - x_1, \quad BC = y_2 - y_1 \quad (3)$$

кeдиби чикади.

$\triangle ACB$ —тўғри бурчакли ($\angle ACB = 90^\circ$). Пифагор теоремасига биноан $AB^2 = AC^2 + BC^2$ бўлади. (3) муносабатдан фойдаланиб $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ тенгликни ва ундан эса

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

бўлишини топамиз. Бу икки нукта орасидаги масофани ифодаловчи формуладир.

Хусусан, A ва B нукталар абсцисса ўкида бўлса, унда $A = A(x_1, 0)$, $B = B(x_2, 0)$ бўлиб, улар орасидаги масофа $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$ бўлади.

A ва B нукталар ордината ўкида бўлса, унда $A = A(0, y_1)$, $B = B(0, y_2)$ бўлиб, улар орасидаги масофа $AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$ бўлади.

Агар A ва B нукталардан бири координата бошида жойлашса, масалан $A = O(0, 0)$ бўлса, у ҳолда координата бошидан $B(x_2, y_2)$ нуктагача масофа $OB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ бўлади.

Мисол. Ушбу $A(5, 3)$, $B(2, -1)$ нукталар орасидаги масофани топинг.

(4) формулага кўра, бу нукталар орасидаги масофа:

$$AB = \sqrt{(2-5)^2 + ((-1)-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш.

Текисликда $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нукталарни туташтирувчи AB тўғри чизик кесмасини қарайлик. Бу кесмада шундай C нукта топилса керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda. \quad (5)$$

Изланаётган нуктанинг координаталарини x ва y дейлик: $C(x, y)$. Демак, масала A ва B нукталарнинг координаталари ҳамда λ сонга кўра C нуктанинг координаталари x ва y ни топишдан иборат.

A, B, C нукталардан Ox ўқиға перпендикуляр туширамыз (29- чизма). Унда $OA_1 = x_1$, $OC_1 = x$, $OB_1 = x_2$, $AA_1 = y_1$, $CC_1 = y$,

$BB_1 = y_2$ бўлади.

Сўнг A ва C нуктадан Ox ўқиға параллел чизиклар ўтказамиз. Уларнинг CC_1 ҳамда BB_1 билан кесишган нукталарини D ва E дейлик. Равшанки,

$$AD = A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1,$$

$$CC_1 = EB_1 = y,$$

$$CE = C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x, \quad (6)$$

$$AA_1 = DC_1 = y_1,$$

$$CD = CC_1 - DC_1 = y - y_1, \quad BE = BB_1 - EB_1 = y_2 - y.$$

ADC ҳамда CEB тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB}$, $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{CB}$ бўлишини топамиз. Агар (5) ва (6) тенглик-

лардан фойдалансак, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$ келиб чиқади. Демак,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Шундай қилиб, AB кесмани λ нисбатда бўлувчи C нуктанинг координаталари:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Хусусан, C нукта AB кесманинг ўртаси бўлса, унда $AC = CB$ ва $\lambda = 1$ бўлиб, C нуктанинг координаталари $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ бўлади.

3- §. Учбурчакнинг юзини топиш

Текисликда учта $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ нукталар берилган бўлиб, ABC учбурчакларни қарайлик (30- чизма). Масала берилган нукталарнинг координаталарига кўра шу ABC учбурчакнинг юзини топишдан иборат.

A, B, C нукталардан Ox ўқиға перпендикуляр тушириб уларнинг асосларини мос равишда A_1, B_1, C_1 билан белгилаймиз. Бунда

$$OA_1 = x_1, OB_1 = x_2, OC_1 = x_3, \\ AA_1 = y_1, BB_1 = y_2, CC_1 = y_3$$

бўлиб,

$$A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1$$

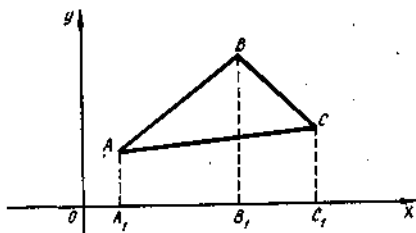
$$B_1C_1 = OC_1 - OB_1 = x_3 - x_2$$

$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x_3 - x_1$$

бўлади.

AA_1B_1B , BB_1C_1C ҳамда AA_1C_1C трапецияларнинг юзалари $S_{AA_1B_1B}$,

$S_{BB_1C_1C}$, $S_{AA_1C_1C}$ учун ушбу



30- чизма

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1)$$

$$S_{BB_1C_1C} = \frac{BB_1 + CC_1}{2} \cdot B_1C_1 = \frac{y_2 + y_3}{2} (x_3 - x_2) \quad (7)$$

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AA_1 + CC_1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{y_3 + y_1}{2} (x_3 - x_1)$$

тенгликларга келамиз. Равшанки, ABC учбурчакнинг юзи

$$S_{\triangle ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} - S_{AA_1C_1C}$$

бўлади. Юқоридаги (7) тенгликлардан фойдаланиб

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - (y_3 + y_1)(x_3 - x_1)]$$

бўлишини топамиз. Бу берилган учбурчак юзини топиш формуласидир.

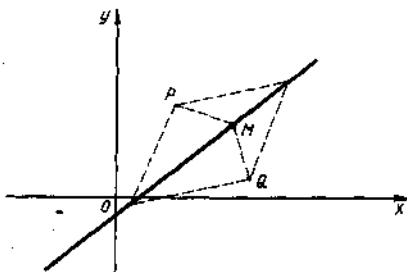
ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Тўғри чизик аналитик геометриянинг муҳим тушунчаларидан бири. Унга доир масалаларни ўрганиш учун аввало унинг тенгламасини ёзиш лозим бўлади.

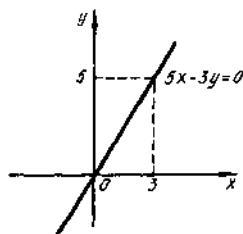
Текисликда Декарт координаталар системаси ва бирор тўғри чизик берилган бўлсин. Бу тўғри чизикда ўзгарувчи $M = M(x, y)$ нуктани олайлик. Агар ўзгарувчи нуктанинг x ва y координаталари орасида шундай муносабат (тенглама) топилсаки, уни фақат шу тўғри чизик нукталаригина (нуктанинг координаталаригина) қаноатлантирса, бу муносабат тўғри чизик тенгламасини ҳосил қилади.

1-§. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси

Фараз қилайлик текисликда $P(a_1, b_1)$ ҳамда $Q(a_2, b_2)$ нукталар берилган бўлсин. Бу нукталардан баравар узоқликда жойлашган $\{M(x, y)\}$ нукталар тўпламини қарайлик (31-чизма). Унда



31- чизма



32- чизма

$$PM = QM$$

бўлади. Икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$PM = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2},$$

$$QM = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}$$

бўлади. Натижада:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} &= \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 &= (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(a_2-a_1)x + 2(b_2-b_1)y + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Агар $2(a_2-a_1)=A$, $2(b_2-b_1)=B$, $a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=C$ деб белгиласак, унда

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тўғри чизикнинг умумий тенгламаси дейилади.

A , B , C сонлар тенгламанинг коэффициентлари бўлиб, улар турли қийматларга тенг бўлганда турли тўғри чизиклар ҳосил бўлади. Демак, тўғри чизикнинг текисликдаги вазияти шу A , B , C сонлар билан тўлиқ аниқланади.

Энди

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

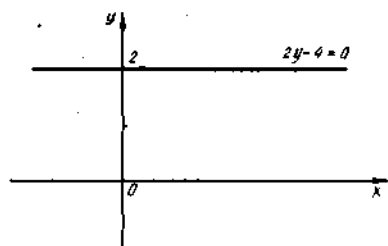
тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. (1) да $C=0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

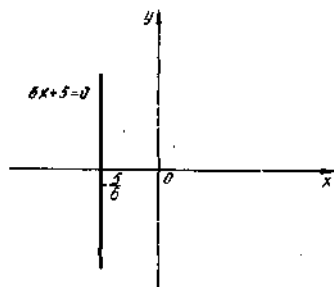
$$Ax + By = 0 \quad (2)$$

кўринишни олади. Равшанки, $O(0, 0)$ нукта (координата боши)нинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. Бундай тўғри чизиклар координата бошидан ўтади. Масалан, $5x - 3y = 0$ тенглама ифодалаган тўғри чизик 32-чизмада тасвирланган.

2°. (1) да $A=0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама



33-чизма



34-чизма

$$By + C = 0 \quad (3)$$

кўринишни олади.

Уни $y = -\frac{C}{B}$ кўринишда ёзиб, $-\frac{C}{B} = a$ белгилаш қилинса,

(1) тенглама $y = a$ кўринишни олади.

Демак, бундай тўғри чизикдаги ҳар бир нуктанинг ординатаси бир хил бўлиб, у a сонига тенг. Бу эса (3) тўғри чизикнинг Ox (абсцисса) ўқиға параллел бўлишини билдиради. Масалан, $2y - 4 = 0$ тенглама ифодалаган тўғри чизик 33- чизмада тасвирланган.

3°. (1) да $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$Ax + C = 0 \quad (4)$$

кўринишда бўлади. Кейинги тенгликдан:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Агар $-\frac{C}{A} = b$ деб белгиласак, натижада (4) тенглама $x = b$ кўринишга келади. $Ax + C = 0$ тўғри чизикдаги ҳар бир нуктанинг абсциссаси бир хил бўлиб, у b сонига тенг. Бу эса (4) тўғри чизикнинг Oy (ордината) ўқиға параллел бўлишини билдиради. Масалан, $6x + 5 = 0$ тенглама ифодалаган тўғри чизик 34- чизмада тасвирланган.

4°. (1) да $B = C = 0, A \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$Ax = 0, \text{ яъни } x = 0 \quad (5)$$

кўринишга келади. Демак, (5) тўғри чизикдаги ҳар бир нуктанинг абсциссаси нолга тенг. Бу ордината ўқини ифодалайди.

5°. (1) да $A = C = 0, B \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$By = 0, \text{ яъни } y = 0 \quad (6)$$

кўринишга келади. Демак, (6) тўғри чизикдаги ҳар бир нуктанинг ординатаси нолга тенг. Бу абсцисса ўқини ифодалайди.

Юқорида айтилганлардан кўринадики, (1) тенгламада $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ бўлса, (1) тенглама ифодалаган тўғри чизик координата бошидан ҳам ўтмайди, координата ўқларига параллел ҳам бўлмайди.

Кўп ҳолларда тўғри чизикнинг умумий $Ax + By + C = 0$ тенгламасига кўра унинг текисликдаги вазиятини аниқлаш лозим бўлади. Бунда тўғри чизикнинг икки нуктасини аниқлаш етарли. Изланаётган нукталардан ҳар бирининг координаталаридан биттасига ихтиёрий қиймат бериб, бу қийматни тенгламага қўйилади. Натижада бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади ва уни ечиб мос нуктанинг иккинчи координатаси топилади. Топилган нукталар орқали ўтказилган тўғри чизик берилган тенглама ифодалаган тўғри чизик бўлади.

Мисол. Ушбу

$$2x - 5y + 6 = 0 \quad (7)$$

тенглама билан берилган тўғри чизикни ясанг.

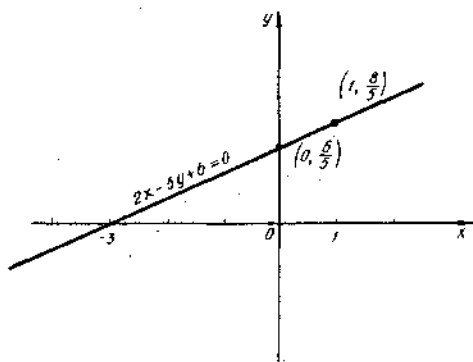
Аввало тўғри чизикнинг икки нуктасини топамиз. Бу нукталар координаталаридан, масалан, абсциссаларини $x_1 = 0, x_2 = 1$ деб

оламиз. Уларни (7) тенгламага қўямиз. Натижада

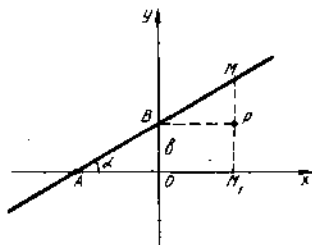
$$2x - 5y + 6 = 0, x_1 = 0 \Rightarrow -5y_1 + 6 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{6}{5},$$

$$2x - 5y + 6 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow 2 - 5y_2 + 6 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{8}{5}$$

бўлади. Топилган $(0, \frac{6}{5})$ ва $(1, \frac{8}{5})$ нукталар орқали тўғри чизик ўтказамиз (35- чизма)



35- чизма



36- чизма

2- §. Тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб бирор тўғри чизикни қарайлик. Бу тўғри чизик Oy ўқидан b га тенг кесма ажратиб, Ox ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этсин (36- чизма).

Унинг ордината ўқи билан кесишган нуктасини B , абсцисса ўқи билан кесишган нуктасини A билан белгилайлик. Унда $OB = b$, $\angle OAB = \alpha$ бўлади.

Тўғри чизикда ўзгарувчи $M = M(x, y)$ нуктани олиб, ундан Ox ўқига перпендикуляр туширамыз. Бу перпендикулярнинг Ox ўқи билан кесишган нуктаси M_1 бўлсин. Сўнг B нуктадан Ox ўқига параллел тўғри чизик ўтказамиз. Унинг MM_1 билан кесишган нуктасини P дейлик. Натижада тўғри бурчакли BPM учбурчак ҳосил бўлади. Равшанки,

$$BP = OM_1 = x, \angle PMB = \alpha, \\ MP = MM_1 - PM_1 = y - OB = y - b.$$

$\triangle BPM$ дан $\frac{PM}{BP} = \operatorname{tg} \alpha$, яъни $\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан эса

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b \quad (8)$$

бўлиши келиб чиқади.

Одатда, тўғри чизикнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчагининг тангенсини *тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти* дейилади ва k ҳарфи билан белгиланади:

$$\operatorname{tg} \alpha = k.$$

Натижада юқоридаги (8) тенглама

$$y = kx + b \quad (9)$$

кўринишни олади. (9) тенгламани *тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти тенгламаси* дейилади. У иккита параметр k ва b га боғлиқ. Тўғри чизикнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлиқ аникланади.

Мисол. Ушбу $y = x + 2$ тенглама билан берилган тўғри чизикнинг текисликдаги вазиятини аниқланг.

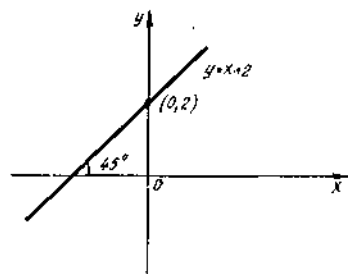
Равшанки, бу тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти тенгламаси бўлиб, бунда:

$$b = 2, k = \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

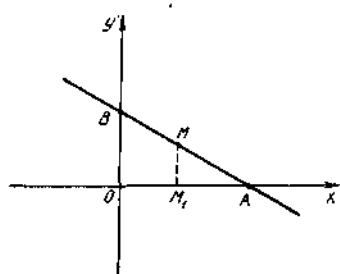
Демак, берилган тўғри чизик ордината ўқидан 2 бирлик ажратиб (ордината ўқининг $(0, 2)$ нуқтасидан ўтиб) Ox ўқи билан 45° бурчак ташкил этади (37- чизма). Агар (9) тенгламада $b = 0$ бўлса, унда $y = kx$ бўлиб, тўғри чизик координата бошидан ўтади.

Эслатма. Тўғри чизикнинг умумий $Ax + By + C = 0$ ($B \neq 0$) тенгламасидан унинг бурчак коэффициенти тенгламасига келиш мумкин:

$$\begin{aligned} Ax + By + C = 0 &\Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = kx + b \left(k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B} \right). \end{aligned}$$



37- чизма



38- чизма

3- §. Тўғри чизикнинг кесмалар бўйича тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, бирор тўғри чизикни қараймиз. Бу тўғри чизик координаталар ўқларини кесиб, абсцисса ўқидан $a = OA$ кесмани, ордината ўқидан эса $b = OB$ кесмани ажратсин (38- чизма).

Каралаётган тўғри чизикда ўзгарувчи $M=M(x, y)$ нуктани олайлик. Равшанки, $OM_1=x$, $MM_1=y$, $M_1A=a-x$. OAB ҳамда M_1AM учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{M_1M}{OB}=\frac{M_1A}{OA}$ келиб чиқади.

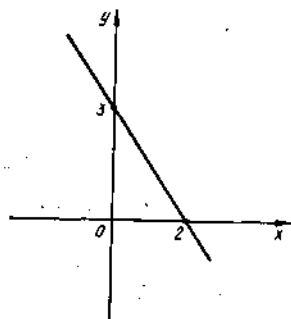
Демак, $\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$. Кейинги тенгликдан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (10)$$

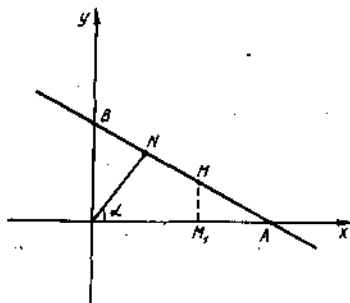
бўлишини топамиз. (10) тенглама тўғри чизикнинг кесмалар бўйича тенгласи дейилади. У иккита параметр a ва b ларга боғлиқ. Тўғри чизикнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлиқ аниқланади. Масалан, координата ўқларидан мос равишда 2 ва 3 бирлик кесма ажратадиган тўғри чизик (10) тенглама билан ифодаланади (39- чизма).

Эслатма. Тўғри чизикнинг умумий $Ax+By+C=0$ ($C \neq 0$) тенгласидан унинг кесмалар бўйича тенгласига келиш мумкин:

$$\begin{aligned} Ax+By+C=0 & \Rightarrow \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\frac{x}{\frac{-C}{A}}}{\frac{-C}{A}} + \frac{\frac{y}{\frac{-C}{B}}}{\frac{-C}{B}} = 1 & \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}). \end{aligned}$$



39- чизма



40- чизма

4- §. Тўғри чизикнинг нормал тенгласи

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, бирор тўғри чизикни қарайлик. Координата бошидан бу тўғри чизикка туширилган перпендикулярнинг узунлиги p , шу перпендикуляр билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) бўлсин (40- чизма).

Демак, $ON=p$, $\angle AON=\alpha$. Тўғри чизикда ўзгарувчи $M=M(x, y)$ нуктани олиб, бу нуктадан Ox ўқига перпендикуляр тушираемиз. Перпендикулярнинг асоси M_1 бўлсин. Унда

$$OM_1=x, \quad MM_1=y, \quad (11)$$

бўлади. $\triangle AON$ ҳамда $\triangle BON$ тўғри бурчакли учбурчакларда $\angle AON = \alpha$, $\angle NOB = 90^\circ - \alpha$.

$\triangle AON$ дан:

$$\frac{ON}{OA} = \cos \alpha \Rightarrow OA = \frac{ON}{\cos \alpha} \Rightarrow OA = \frac{p}{\cos \alpha}, \quad (12)$$

$\triangle BON$ дан:

$$\frac{ON}{OB} = \cos(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \frac{ON}{OB} = \sin \alpha \Rightarrow OB = \frac{p}{\sin \alpha}. \quad (13)$$

Равшанки,

$$M_1A = OA - OM_1 = \frac{p}{\cos \alpha} - x. \quad (14)$$

$\triangle AOB$ ҳамда $\triangle AM_1M$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{M_1M}{OB} = \frac{M_1A}{OA} \text{ келиб чиқади. (11), (12), (13) ва (14) муносабатларни}$$

эътиборга олсак, кейинги тенглик $\frac{y}{\frac{p}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{p}{\cos \alpha} - x}{\frac{p}{\cos \alpha}}$ кўринишга ке-

лади.

Бу тенгликдан

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (15)$$

бўлишини топамиз. (15) тенгламани *тўғри чизикнинг нормал тенгламаси* дейилади. Уиккита параметр, p ва α ларга боғлиқ. Тўғри чизикнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлиқ аниқланади.

Тўғри чизикнинг нормал тенгламаси куйидаги хоссаларга эга:

1°. Тенгламада x ва y олдидаги коэффициентлар абсолют киймати бўйича бирдан катта бўлмаган сонлардир.

2°. Тенгламада x ва y лар олдидаги коэффициентларнинг квадратлари йиғиндиси 1 га тенг.

3°. Тенгламадаги озод ҳад манфий сон. Тўғри чизикнинг умумий $Ax + By + C = 0$ тенгламасини нормал кўринишдаги тенгламасига келтириш мумкин. Умумий тенгламани ҳозирча номаълум μ ($\mu \neq 0$) сонга кўпайтирамиз:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \quad (16)$$

Агар (16) тенгламани тўғри чизикнинг нормал тенгламаси деб айтадиган бўлсак, унда, равшанки $\mu A = \cos \alpha$, $\mu B = \sin \alpha$, $\mu C = -p$ бўлади. Бу тенгламалардан топамиз:

$$\begin{aligned} (\mu A)^2 + (\mu B)^2 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned} \quad (16')$$

Демак,

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$
$$-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Натижада берилган $Ax + By + C = 0$ тенглама

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

нормал тенгламага келади. Одатда μ нормалловчи кўпайтувчи дейилади. Унинг ишораси (1) тенгламадаги C нинг ишорасига карама-карши бўлади.

Мисол. Тўғри чизиқнинг ушбу $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ умумий тенгламасини нормал кўринишга келтиринг.

Аввало нормалловчи кўпайтувчи μ ни (16') формуладан фойдаланиб топамиз: $\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{6}{5}.$

Сўнг қаралаётган тенгламани μ га кўпайтирамиз: $\frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - 1 \right) =$

0. Натижада берилган тўғри чизиқнинг $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$ нормал тенгламасига келамиз.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ОИД МАСАЛАЛАР

Биз 11- бобда тўғри чизикнинг аналитик ифодаси x ва y ларга нисбатан биринчи даражали тенглама эканлигини кўрдик ва унинг турли кўринишдаги тенгламаларини ёздик.

Ушбу бобда тўғри чизикка оид масалаларни келтирамиз. Бунда масаланинг қўйилишига қараб тўғри чизикнинг у ёки бу кўринишдаги тенгламасидан фойдаланамиз.

1- §. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак

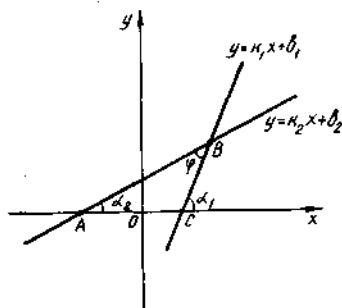
Текисликда икки тўғри чизик берилган бўлиб, уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2$$

бўлсин. Бунда (41- чизма)

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Масала, шу икки тўғри чизик орасидаги $\angle ABC = \varphi$ бурчакни топишдан иборат.



41- чизма

$\triangle ABC$ да α_2 ва φ лар ички бурчаклар бўлиб, α_1 эса уларга нисбатан ташқи бурчак. Шу сабабли $\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi$ бўлади. Бу тенгликдан $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ бўлиши келиб чиқади.

$$\text{Агар } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} \text{ ва } \operatorname{tg} \alpha_1 = k_1, \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (1)$$

эканини топамиз. Бу тенгликдан эса изланаётган φ бурчак аниқланади.

Мисол. Ушбу $5x - y + 7 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.

Аввало тўғри чизик тенгламаларини бурчак коэффициентли тенгламалар кўринишига келтирамиз ва k_1, k_2 ларни аниқлаймиз:

$$5x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 5x + 7, \quad k_1 = 5,$$

$$2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad k_2 = \frac{2}{3}.$$

(1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Демак, берилган икки тўғри чизик орасидаги бурчак 45° га тенг экан.

2- §. Икки тўғри чизикнинг параллеллик ҳамда перпендикулярлик шарти

Текисликда икки тўғри чизик берилган бўлиб, уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2$$

бўлсин. Бу тўғри чизиклар орасидаги бурчакнинг тангенс

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \text{ бўлади.}$$

Агар икки тўғри чизик орасидаги бурчак $\varphi = 0$ бўлса, равшанки, бу тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлади ёки устма-уст тушади.

Бу ҳолда $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} = \operatorname{tg} 0 = 0$ бўлиб, ундан $k_1 = k_2$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, икки тўғри чизикнинг параллел бўлиши шарти уларнинг бурчак коэффициентларининг ўзаро тенг бўлишидан иборат экан:

$$k_1 = k_2. \quad (2)$$

Агар икки тўғри чизик орасидаги бурчак $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, унда

тўғри чизиклар ўзаро перпендикуляр бўлади. Бу ҳолда $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} =$

$$= \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty \text{ бўлиб, ундан } 1 + k_1 \cdot k_2 = 0, \text{ яъни } k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

$(k_2 = -\frac{1}{k_1})$ бўлиши келиб чиқади. Демак, икки тўғри чизикнинг перпендикуляр бўлиши шарти уларнинг бурчак коэффициентлари учун

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (k_2 = -\frac{1}{k_1}) \quad (3)$$

тенгликнинг ўринли бўлишидан иборат экан.

Масалан, ушбу $y=2x+1$, $y=2x+7$ тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлади, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари (2) шартни қаноатлантиради, ушбу $y=3x+2$, $y=-\frac{1}{3}x+8$ тўғри чизиклар эса ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари (3) шартни қаноатлантиради.

Эслатма. Умумий тенгламалари

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

бўлган тўғри чизикларнинг ўзаро параллеллик шarti $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, перпендикулярлик шarti эса $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ бўлади.

3-§. Берилган нуктадан берилган тўғри чизиккача масофа

Текисликда бирор $Ax + By + C = 0$ тўғри чизик ва бу тўғри чизикка тегишли бўлмаган бирор $M = M(x_0, y_0)$ нукта берилган бўлсин.

Маълумки, M нуктадан тўғри чизикка туширилган перпендикулярнинг узунлиги M нуктадан $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиккача бўлган масофа бўлади. Уни p билан белгилайлик: $MN = p$ (42-чизма).

Аввало берилган $Ax + By + C = 0$ тўғри чизикни нормал кўринишдаги тенгламага келтирамиз. У қуйидагича

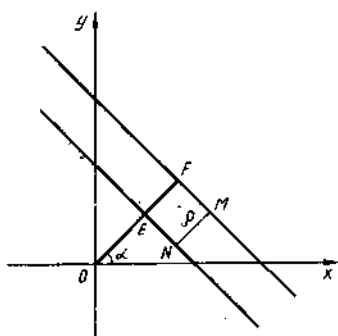
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (4)$$

бўлади. Бу ерда

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (5)$$

$$\sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (6)$$

$$-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (7)$$



42-чизма

бўлиб, p —координата бошидан шу тўғри чизикка туширилган перпендикулярнинг узунлиги: $p = OE$. Сўнг M нукта оркали берилган тўғри чизикка параллел тўғри чизик ўтказамиз. Унинг нормал тенгламаси ушбу

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - q = 0 \quad (8)$$

кўринишда бўлиб, бунда q — координата бошидан (8) тўғри чизикка туширилган перпендикулярнинг узунлиги: $q = OF$. Модомики, бу тўғри чизик $M(x_0, y_0)$ нукта оркали ўтар экан, M нуктанинг

координаталари шу тенгламани қаноатлантиради

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - q = 0. \quad (9)$$

Равшанки,

$$\rho = NM = EF, \quad OF = OE + EF \quad (OE = \rho, \quad OF = q).$$

Демак, $\rho = q - \rho$. (9) тенгликдан $q = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$ ни топамиз. Натижада:

$$\rho = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p. \quad (10)$$

Шундай қилиб, биринчидан, берилган тўғри чизикнинг тенгламасини нормал кўринишдаги тенгламага келтириш, иккинчидан, бу тенгламадаги x ва y нинг ўрнига M нуктанинг координаталари x_0 ва y_0 ни қўйиш натижасида берилган нуктадан берилган тўғри чизиккача бўлган масофа топилади.

Мисол. Текисликда $M(5, 2)$ нуктадан

$$3x + 4y - 12 = 0$$

тўғри чизиккача бўлган масофани топинг.

Изланаётган масофани (11) формулага кўра топамиз:

$$\rho = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}.$$

4- §. Берилган нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси

Текисликда $M_0(x_0, y_0)$ нукта берилган бўлсин. Шу нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар тенгламасини топамиз. Маълумки, тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y = kx + b \quad (12)$$

кўринишда бўлар эди. Айтайлик, бу тўғри чизик берилган $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан ўтсин. Унда нуктанинг координаталари тўғри чизик тенгламасини қаноатлантиради:

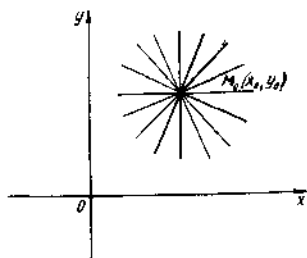
$$y_0 = kx_0 + b. \quad (13)$$

(12) ва (13) тенгликлардан

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (14)$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенглик берилган M_0 нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси бўлади.

Равшанки, k нинг турли қийматларида $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан ўтувчи турли тўғри чизикларга эга бўламиз. Бинобарин бундай тўғри чизиклар чексиз кўп (43- чизма). Шунинг учун (14) тенгламани берилган нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси дейилади.



43- чизма

Масалан, $M_0(1, 1)$ нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси $y - 1 = k(x - 1)$, яъни $kx - y - k + 1 = 0$ бўлади.

Тўғри чизиклар дастасидан маълум йўналишга эга бўлган тўғри чизикни ажратиш мумкин. Дастадаги бурчак коэффициенти k_0 бўлган (Ox ўқи билан α_0 бурчак ташкил этган, $k_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$) тўғри чизик тенгламаси

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \quad (15)$$

бўлади. Демак, (15) тенглама берилган нуктадан ўтувчи ва берилган йўналиш бўйича тўғри чизик тенгламасидир. Масалан, $M(1, 2)$ нуктадан ўтувчи ҳамда Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 45° бурчак ташкил этадиган тўғри чизик тенгламаси $y - 2 = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot (x - 1)$, яъни $y = x + 1$ бўлади.

Энди тўғри чизиклар дастаси

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (14)$$

дан шундайини ажратиш керакки, у бошқа бир берилган $M_1(x_1, y_1)$ нуктадан ўтсин. Равшанки, бу ҳолда $M_1(x_1, y_1)$ нуктанинг координаталари (14) тенгламани қаноатлантириши лозим:

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0)$$

Бу тенгликдан $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ни топамиз. Агар k нинг бу қийматини

(14) тенгламага қўйсак, унда $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, яъни

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (15)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу (15) тенглама берилган $M_0(x_0, y_0)$ ҳамда $M_1(x_1, y_1)$ нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасидир.

Масалан, $M_0(1, 1)$ ва $M_1(7, 3)$ нукталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси $\frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x - 1}{7 - 1}$, яъни $x - 3y + 2 = 0$ бўлади.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

Мазкур бобда иккинчи тартибли эгри чизиклардан — айлана, эллипс, гипербола ва параболаларни келтирамиз ва уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1-§. Айлана

Текисликда Декарт координаталар системасини олайлик. Шу текисликда бирор $M(a, b)$ нукта берилган бўлсин. Маълумки, берилган $M(a, b)$ нуктадан бир хил r масофада жойлашган нукталарнинг геометрик ўрни айлана дейилади (44-чизма). Бунда M нукта айлана маркази, r эса айлана радиусидир. Демак, айланадаги ихтиёрий $P(x, y)$ нуктадан унинг маркази $M(a, b)$ гача бўлган масофа ҳар доим r га тенг. Икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ бўлади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб толамиз:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (1)$$

Шундай, қилиб айланадаги ихтиёрий P нуктанинг x ва y координаталарини боғловчи тенгламага келдик. Бу маркази (a, b) нуктада, радиуси r га тенг бўлган айлана тенгламасидир.

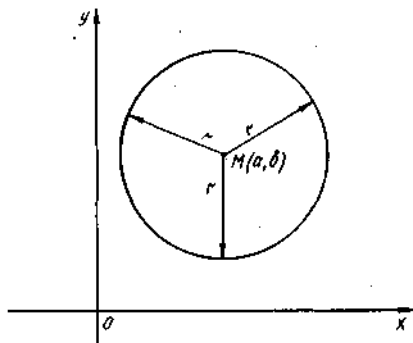
Хусусан маркази координата бошида бўлган айлана тенгламаси

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

Мисол. Маркази (3, 4) нуктада, радиуси 5 га тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

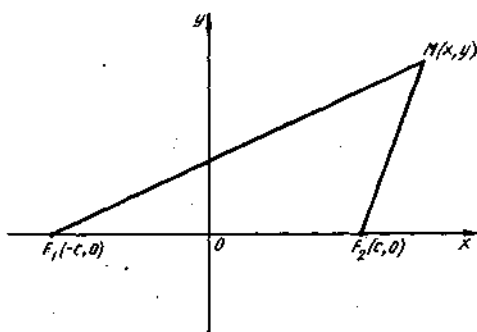
Равшанки, бу ҳолда $a=3$, $b=4$, $r=5$ бўлади. (1) формуладан фойдаланиб изланаётган айлана тенгламаси $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ бўлишини толамиз.



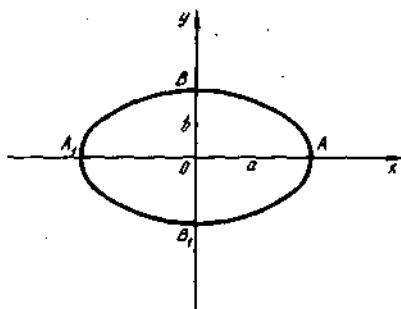
44-чизма

2-§. Эллипс

Текисликда $F_1(a_1, b_1)$, $F_2(a_2, b_2)$ нукталар берилган бўлсин. F_1 ва F_2 нукталаргача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас бўлган нукталарнинг геометрик ўрни эллипс дейилади. Бунда F_1 ва F_2 лар эллипс фокуслари. Демак, эллипсдаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуктадан унинг фокуслари F_1 ва F_2 гача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас сонга тенг. Бу ўзгармас сонни $2a$ билан, F_1F_2 кесманинг узунлигини эса $2c$ билан белгилайлик. Эллипс тенгламасини келтириб чиқариш учун текисликда Декарт координаталар системасини қуйидагича танлаймиз. F_1 ва F_2 нукталар абсцисса ўқида жойлашган бўлиб, координата боши F_1F_2 кесмани тенг иккига бўлсин. У ҳолда эллипс фокуслари мос равишда $(-c, 0)$, $(c, 0)$ координаталарга эга бўлади (45- чизма).



45- чизма



46- чизма

Икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ бўлади. Бу тенгликдан: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга ошириш натижасида $a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$ ҳосил бўлиб, ундан эса

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (3)$$

тенгламага эга бўламиз.

Равшанки, $2a > 2c$, яъни $a > c$ тенгсизлик ўринли. Бинобарин, $a^2 - c^2$ мусбат. Уни b^2 билан белгиласак, у ҳолда (3) тенглама

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (4)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини b^2a^2 га бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Қдатда (5) тенглама эллипснинг каноник тенгламаси дейилади.

Равшанки, (5) тенгламада $x=0$ бўлса, $y=\pm b$, $y=0$ бўлса, $x=\pm a$ бўлади. Демак эллипс абсциссалар ўқини $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$ нукталарда, ординаталар ўқини эса $B(0, b)$, $B_1(0, -b)$ нукталарда кесар экан (46-чизма). AA_1 ва BB_1 кесмалар мос равишда эллипснинг катта ва кичик ўқлари дейилади. Шундай қилиб, a — эллипснинг катта ярим ўқи узунлиги, b эса кичик ярим ўқи узунлигидир.

Энди $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ микдорни қарайлик. Уни эллипснинг эксцентриситети дейилади. Эллипснинг эксцентриситети унинг шаклини ифодаловчи микдордир.

Мисол. Ушбу $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ тенглама билан берилган эллипснинг эксцентриситетини топинг.

Қаралаётган эллипснинг ярим ўқлари узунлиги $a=10$, $b=6$ экани равшан. $a^2 - c^2 = b^2$, $e = \frac{c}{a}$ муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$c = \sqrt{100 - 36} = 8, \quad e = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}. \quad \text{Демак, } e = \frac{4}{5}.$$

Эллипснинг хоссалари

1°. Эллипс координаталар ўқига нисбатан симметрик эгри чизикдир.

Бу хоссанинг тўғрилиги (5) тенгламани x ва y га нисбатан ечишдан ҳосил бўлган

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (6)$$

муносабатлардан келиб чиқади.

2°. Эллипс ABA_1B_1 тўғри тўртбурчак ичида жойлашган шаклдир.

Юқоридаги (6) формулалардан: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Бу эса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ABA_1B_1 тўғри тўртбурчакда жойлашганини билдиради.

3°. Агар эллипснинг эксцентриситети $e=0$ бўлса, y ҳолда (5) тенглама маркази координата бошида, радиуси a га тенг бўлган айланани ифодалайди.

Ҳақиқатан ҳам $e=0$ бўлганидан $a=b$ бўлиб, (5) тенглама $x^2 + y^2 = a^2$ кўринишга келади.

4°. Маркази координаталар бошида, радиуси a га тенг айланани Oy ўқи бўйлаб $\frac{a}{b}$ марта қиспиш натижасида ярим ўқлари a ва b га тенг бўлган эллипс ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $x=x'$, $y = \frac{a}{b} y'$

алмаштириш (кисиш натижасида (2) айлана тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипс тенгламасига келади.

3- §. Гипербола

Текисликда $F_1(a_1, b_1)$, $F_2(a_2, b_2)$ нукталар берилган бўлсин. Бу текисликда F_1 ва F_2 нукталаргача бўлган масофалар айирмасининг абсолют киймати ўзгармас бўлган нукталарни карайлик. Бундай нукталарнинг геометрик ўрни *гипербола* дейилади. Бунда F_1 ва F_2 гипербола фокусларидир.

Демак, гиперболадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуктадан унинг фокуслари F_1 ва F_2 гача бўлган масофалар айирмасининг абсолют киймати ўзгармас сонга тенг. Бу ўзгармас сонни $2a$ билан белгилаймиз.

Гипербола тенгламасини ҳосил қилиш учун Декарт координаталари системасида F_1 ва F_2 нукталарни Ox ўқи бўйлаб координата бошига нисбатан симметрик бўлган c масофада жойлаштирайлик. Икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx^2 - a^2.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини яна квадратга кўтариш натижасида

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (7)$$

тенгликка келамиз. $c > a$ бўлгани сабабли $c^2 - a^2$ айирма мусбат бўлади. Уни b^2 орқали белгиласак, у ҳолда (7) тенглама

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (8)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини a^2b^2 га бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Одатда (9) гиперболанинг *каноник тенгламаси* дейилади. Гипербола тенгламасида $y=0$ дейилса, $x=\pm a$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса гипербола Ox ўқини $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$ нукталарда кесишини билдиради. (9) тенгламада $x=0$ дейилса $y^2=-b^2$ бўлади. Бу эса гипербола Oy ўқи билан кесишмаслигини билдиради.

$A(a, 0)$ ва $A_1(-a, 0)$ нукталар гиперболанинг учлари, AA_1 кесма эса унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

Ушбу $e = \frac{c}{a}$ нисбат билан аниқланган миқдор гиперболанинг

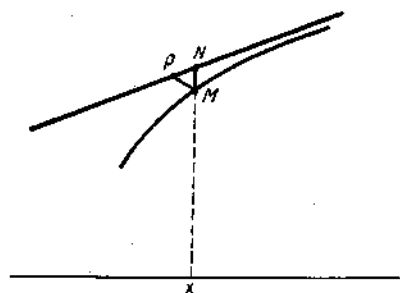
эксцентриситети дейилади. Худди эллипсдагига ўхшаш бу ерда ҳам гипербола эксцентриситети унинг шаклини ифодалайди. $c > a$ бўлгани учун $e = \frac{c}{a} > 1$ тенгсизлик ўринлидир.

Гиперболанинг хоссалари

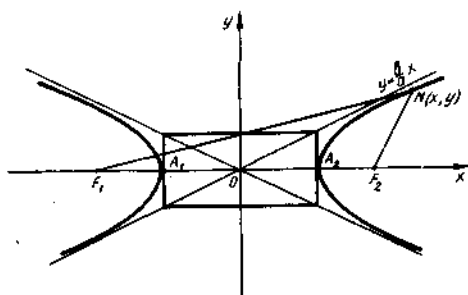
1°. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган эгри чизикдир.

2°. $y = \pm \frac{b}{a}x$ тўғри чизиклар гиперболанинг асимптоталари бўлади, яъни бу тўғри чизик x нинг чексиз катталишиб бориши билан гиперболага борган сари яқинлашиб боради.

Бу хоссанинг ўринлилигини кўрсатайлик. Тўғри чизик $y = \frac{b}{a}x$ бўлган ҳолни қараймиз.



47-чизма



48-чизма

Абсциссалари $x \geq a$ бўлган гиперболада $M(x, y)$, тўғри чизикда эса $N(x, y_1)$ нукталарни оламиз (47-чизма). Унда $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,

$y_1 = \frac{b}{a}x$ чизиклардаги мос M ва N нукталар бир хил абсциссага эга бўлгани учун MN тўғри чизик Ox ўқиға перпендикуляр бўлади. Демак, MN кесманинг узунлиги $|y_1 - y|$ га тенг.

$x \geq a$ лар учун

$$y_1 = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y$$

эканлигини эътиборга олсак, унда MN кесманинг узунлиги:

$$\begin{aligned} |MN| &= y_1 - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \\ &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Бу муносабатдан x чексиз ошиб борганда MN кесманинг узунлиги нолга интилишини кўрамиз. M нуктадан $y_1 = \frac{b}{a}x$ чизикқа туширил-

ган перпендикуляр асосини P нукта билан белгилайлик. У ҳолда $|MP| < |MN|$ бўлиб, MP кесманинг узунлиги ҳам нолга интила боради. Бу эса $y_1 = \frac{b}{a}x$ тўғри чизик гиперболанинг асимптотаси эканлигини билдиради.

$y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизик ҳам гипербола учун асимптота бўлиши худди юқоридагидек кўрсатилади (48- чизма).

Мисол. Ушбу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гиперболанинг эксцентриситети ва асимптоталарини топинг.

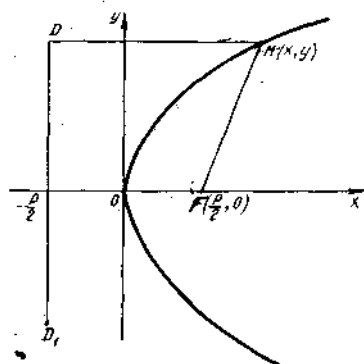
Берилган тенгламада: $a=4$, $b=3$. Бундан $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5$, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ эканини топамиз.

Юқорида келтирилган 2°- хоссадан фойдаланиб, $y = \pm \frac{3}{4}x$ тўғри чизиклар берилган $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гиперболанинг асимптоталари бўлишини аниқлаймиз.

4- §. Парабола

Текисликда Декарт координаталари системасини олайлик. Бу текисликда Oy ўқига параллел тўғри чизик ва бу тўғри чизикка тегишли бўлмаган $F(a, b)$ нукта берилган бўлсин. Бу тўғри чизик ва F нуктадан бир хил масофада жойлашган нукталарнинг геометрик ўрни *парабола* дейилади. F нукта параболанинг *фокуси*, қаралаётган тўғри чизик эса унинг *директрисаси* деб аталади (49- чизма).

Парабола тенгламасини ҳосил қилиш учун F нуктани Ox ўқи бўйлаб координата бошидан $\frac{p}{2}$ масофада ($p > 0$) жойлашти-



49- чизма

райлик. Унинг директрисаси эса $x = -\frac{p}{2}$ тўғри чизик бўлсин. Параболанинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуктасини қарайлик. Икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

бўлади.

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга ошириб топамиз:

$$y^2 = 2px. \quad (10)$$

Бу тенглама *параболанинг каноник тенгламаси* дейилади.

Параболанинг хоссалари

- 1°. Парабола Ox ўқига нисбатан симметрик бўлган эгри чизикдир.
- 2°. Парабола координата бошидан ўтади.
- 3°. x ўзгарувчининг қийматлари чексиз ошиб борган сари y ўзгарувчининг қийматлари ҳам чексиз ошиб боради.

5-§. Иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси

Биз юқорида иккинчи тартибли эгри чизиклардан айлана, эллипс, гипербола, параболаларни келтирдик ва уларнинг содда хоссаларини ўргандик.

Агар бу эгри чизикларнинг каноник тенгламаларига эътибор берсак, уларни

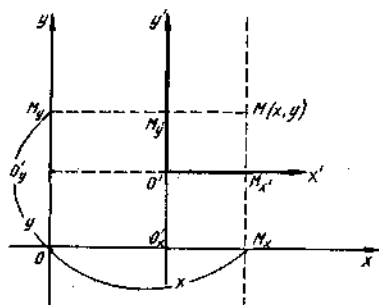
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (11)$$

тенгламанинг хусусий ҳоллари эканлигини кўрамиз.

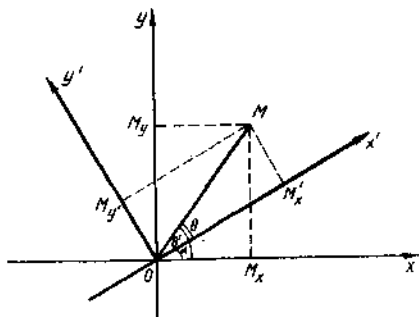
Одатда (11) тенглама *иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси* дейилади.

Ушбу параграфда иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш масаласи билан шугулланамиз. Бу масала координата ўқларини алмаштириш:

- 1) Координата ўқларини параллел кўчириш;
- 2) Координата ўқларини маълум α бурчакка буриш натижасида ҳал қилинади.



50- чизма



51- чизма

1. Координата ўқларини параллел кўчириш.

Фараз қилайлик, Декарт координаталари системасида $M(x, y)$ нукта берилган бўлсин. Координаталар бошини $O'(x_0, y_0)$ нуктага кўчирамиз. Координаталар ўқлари Ox , Oy лар эса параллел кўчириш натижасида $O'x'$, $O'y'$ координаталар ўқларига келсин.

Натижада янги Декарт координаталар системаси $X'O'Y'$ ҳосил бўлади. M нуктанинг координаталари (x, y) ни янги координаталар (x', y') оркали ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз. Бунинг учун Ox ўқиға MM_x , $O'O'_x$, Oy ўқиға эса MM_y , $O'O'_y$ перпендикулярлар туширамиз (50- чизма). MM_x ва MM_y чизикларнинг мос равишда $O'x'$, $O'y'$ ўқлар билан кесишиш нукталарини M_x ва M_y оркали белгилайлик. У ҳолда

$$x = OM_x = OO'_x + O'_xM_x = OO'_x + O'M_x = x_0 + x',$$

$$y = OM_y = OO'_y + O'_yM_y = OO'_y + O'M_y = y_0 + y'.$$

бўлади.

Шундай қилиб, (x, y) ва (x', y') нукта координаталари орасида қуйидаги муносабат ҳосил бўлди: $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$ ёки $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$. Одатда бу формулалар *координата ўқларини параллел қўчириш формулалари* дейилади.

2. Координата ўқларини буриш.

Оху Декарт координаталар системасини қарайлик. Координата ўқларини соат стрелкасиға қарши йўналишда α бурчакка бурамиз (51- чизма). Натижада янги $Ox'y'$ Декарт системаси ҳосил бўлади.

Оху системада M нуктанинг координаталари (x, y) , буриш натижасида ҳосил бўлган $Ox'y'$ системада эса (x', y') бўлсин. M нуктанинг қутб координаталарини (ρ, θ) оркали белгилайлик. Бунда қутб ўқи сифатида Ox ўқининг мусбат ярим ўқи олинган. (ρ, θ') сифатида эса яна M нуктанинг қутб координаталари белгиланган бўлиб, бу ҳолда қутб ўқи сифатида Ox' нинг мусбат ярим ўқи олинган. Равшанки ҳар иккала ҳолда ҳам $\rho = |OM|$ бўлиб, θ эса $\theta' + \alpha$ га тенг, яъни $\theta = \theta' + \alpha$.

Равшанки, (51- чизмага қаранг),

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, x' = \rho \cos \theta', y' = \rho \sin \theta', \theta = \theta' + \alpha.$$

Бу тенгликларни эътиборға олган ҳолда топамиз:

$$\begin{aligned} x = \rho \cos \theta &= \rho \cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos \theta' \cos \alpha - \sin \theta' \sin \alpha) = \\ &= \rho \cos \theta' \cos \alpha - \rho \sin \theta' \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \rho \sin \theta &= \rho \sin(\theta' + \alpha) = \rho(\sin \theta' \cos \alpha + \cos \theta' \sin \alpha) = \\ &= \rho \sin \theta' \cos \alpha + \rho \cos \theta' \sin \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Бу системадан топамиз:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (*)$$

Одатда $(*)$ формула *координата ўқларини буриш формуласи* дейилади.

Эслатма. Умумий ҳолда, координата ўқларини параллел кўчириш ва α бурчакка буриш формулалари

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \\ \begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha \\ y' = (y - y_0) \cos \alpha - (x - x_0) \sin \alpha \end{cases} \end{cases}$$

системалар билан ифодаланади.

Координата ўқларини параллел кўчириш ва буриш формулалари каралаётган тўғри бурчакли координаталар системаси билан бир каторда янги координаталар системасини олиш имкониятини беради. Янги координаталар системасига ўтиш (янги координаталар системасини куриш) катор масалаларни ҳал этишда анча қулайликларга олиб келади. Жумладан, 2- тартибли эгри чизикларни синфларга ажратишда бу алмаштиришлардан фойдаланилади.

Лемма. Декарт координаталари системасида (II) тенглама берилган бўлиб, $AC - B^2 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда шундай тўғри бурчакли координаталар системасини танлаш мумкинки, бу системада (II) тенглама

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \quad (12)$$

кўринишга эга бўлади. Бунда A', C', F' — сонлар, (x'', y'') эса янги системадаги нуктанинг координаталаридир.

Исбот. Фараз қилайлик, параллел кўчириш натижасида координата боши $O'(x_0, y_0)$ нуктага ўтсин. Ҳосил бўлган янги координаталар системасини $O'x'y'$ орқали белгилайлик. У ҳолда нуктанинг (x, y) координаталари янги (x', y') координаталар билан

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

формулалар орқали (боғланади) ифодаланади. Бу алмаштириш натижасида (II) тенглама қуйидаги

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \quad (13)$$

кўринишга келади. Бунда

$$\begin{aligned} D' &= Ax_0 + By_0 + D; \quad E' = Bx_0 + Cy_0 + E; \\ F' &= Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F. \end{aligned}$$

Энди (x_0, y_0) нуктани шундай танлаймизки, у

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad (14)$$

тенгламалар системасини қаноатлантирсин. Лемма шартига кўра $AC - B^2 \neq 0$ бўлгани учун (14) система ягона ечимга эга бўлади.

Шундай қилиб, агар (x_0, y_0) (14) системанинг ечими бўлса, у ҳолда (13) тенгламада $E' = D' = 0$ бўлиб, у соддарок

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0 \quad (15)$$

кўринишга эга бўлади.

$O'x''y''$ координаталар системаси $O'x'y'$ координаталар системасини α бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган бўлсин. Равшанки, у ҳолда x', y' координаталар x'', y'' координаталар оркали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\begin{aligned}x' &= x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\y' &= x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha.\end{aligned}$$

$O'x''y''$ координаталар системасида (15) тенглама

$$A'x''^2 + 2B'x''y'' + C'y''^2 + F' = 0 \quad (16)$$

кўринишга эга бўлади. Бунда

$$\begin{aligned}A' &= A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \cdot \sin \alpha + C \sin^2 \alpha; \\B' &= -A \sin \alpha \cdot \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\C' &= A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \cdot \sin \alpha + C \cos^2 \alpha.\end{aligned} \quad (17)$$

Энди α бурчакни шундай танлаймизки, натижада (16) тенгламада

$$B' = -A \sin \alpha \cos \alpha + B \cos 2\alpha + C \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

ифода нолга айлансин. Бунинг учун α ушбу

$$2B \cos 2\alpha = (A - C) \sin 2\alpha$$

тенгламанинг ечими бўлиши етарли. Кейинги тенгламанинг ечими $A = C$ ёки $A \neq C$ бўлишига боғлиқ.

1- ҳол. $A = C$ бўлсин. У ҳолда $\cos 2\alpha = 0$ бўлиб, α сифатида $\alpha = \frac{\pi}{4}$ олинади.

2- ҳол. $A \neq C$ бўлсин. Бу ҳолда $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$ бўлиб,

$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C}$ бўлади.

Шундай қилиб, координаталар ўқини параллел кўчириш ва буриш ёрдамида иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$$

кўринишга эга бўлди. Лемма исботланди.

Маълумки (14) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиши учун $AC - B^2 \neq 0$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Биз леммани исботлаш жараёнида $AC - B^2$ ифоданинг координаталар ўқини параллел кўчириш натижасида ўзгармаслигини (инвариантлигини) кўрдик. Энди бу ифоданинг координата ўқларини буриш натижасида ҳам инвариантлигини кўрсатамиз.

(17) формуладан фойдаланиб $A'C' - B'^2$ ифодани соддалаштирамиз:

$$\begin{aligned}A'C' - B'^2 &= (A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cdot \cos \alpha + C \sin^2 \alpha) \times \\&\quad \times (A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cdot \cos \alpha + C \cos^2 \alpha) - \\&\quad - [(C - A) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]^2.\end{aligned}$$

Кавсларни очиб ўқшаш ҳадларни ихчамлаш натижасида $A'C' - B'^2 = AC(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - B^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = AC - B^2$ бўлади. Демак, $A'C' - B'^2 = AC - B^2$.

Одатда $AC - B^2$ га *иккинчи тартибли эгри чизиклар умумий тенгламасининг инварианти* дейилади.

Бу ифоданинг ишорасига қараб иккинчи тартибли эгри чизиклар қуйидаги уч турга бўлинади.

- 1) Агар $AC - B^2 > 0$ бўлса, эллиптик тип;
- 2) Агар $AC - B^2 < 0$ бўлса, гиперболик тип;
- 3) Агар $AC - B^2 = 0$ бўлса, параболик тип.

Энди бу уч ҳолни алоҳида-алоҳида баён этамиз.

1-ҳол. Эллиптик тип.

$AC - B^2 > 0$ бўлгани учун исбот қилинган леммага қўра иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \quad (18)$$

қўринишга эга бўлади. $AC - B^2 = AC > 0$ бўлганлигидан A ва C лар бир хил ишоралидир. Демак қуйидагича уч ҳолдан факат биттаси юз бериши мумкин:

а) $F \neq 0$ ва унинг ишораси A ҳамда C нинг ишорасига тескари. Бу ҳолда F ни (18) тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб, тенгламанинг ҳар икки томонини унга бўламиз:

$$-\frac{x^2}{\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1.$$

$-\frac{F}{A} > 0$, $-\frac{F}{C} > 0$ эканлигини эътиборга олиб, $-\frac{F}{A} = a^2$, $-\frac{F}{C} = b^2$

белгилашлар натижасида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламага келамиз. Бу эса

эллипснинг каноник тенгламаси эканлиги маълум.

б) $F \neq 0$ ва унинг ишораси A ҳамда C нинг ишораси билан бир хил. Бу ҳолда (18) тенглама худди а) ҳолда қаралган усул билан ушбу

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ қўринишга келтирилади. Одатда бу тенглама мавҳум

эллипснинг тенгламаси дейилади.

в) $F = 0$. Бу ҳолда $|A| = a^2$, $|C| = c^2$ белгилаш натижасида $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ тенгламага келамиз. Бу тенгламани факат $(0, 0)$ нукта қаноатлантириши равшандир. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ — ўзаро кесишувчи икки мавҳум чизик тенгламаси дейилади.

2-ҳол. Гиперболик тип.

Бу ҳолда $AC - B^2 < 0$ бўлгани учун исботланган леммадан фойдаланиб, иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламасини яна

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

қўринишга келтираемиз.

Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $F \neq 0$, у ҳолда F ни (18) тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб, тенгламанинг ҳар икки томонини унга бўлиб толамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Бу эса гиперболанинг каноник тенгламасидир.

б) $F=0$. Бу ҳолда (18) тенглама

$$a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \quad \text{ёки} \quad (ax - cy)(ax + cy) = 0$$

кўринишга эга бўлади. Бу эса координаталар бошидан ўтувчи икки тўғри чизикни ифодалаши равшандир.

3-х ол. П а р а б о л и к т и п.

$AC - B^2 = 0$ бўлгани учун юқоридаги леммани исботлаш жараёнидаги мулоҳазалардан фойдаланиб координаталар ўқини α бурчакка буриш натижасида иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ey + 2Dx + F = 0 \quad (19)$$

кўринишга келтирилади. Бу тенглама учун $B=0$, демак $AC = 0$ бўлади.

Фараз қилайлик, $A=0$, $C \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (19) тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$C \left[y^2 + \frac{2E}{C}y + \left(\frac{E}{C} \right)^2 \right] + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0$$

ёки

$$C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 + 2Dx + \tilde{F} = 0, \quad \text{бунда} \quad \tilde{F} = F - \frac{E^2}{C}.$$

Энди координаталар бошини $\left(0, -\frac{E}{C} \right)$ нуктага кўчирамиз, яъни

$x' = x$, $y' = y + \frac{E}{C}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада (19) тенглама

$$Cy'^2 + 2Dx' + \tilde{F} = 0 \quad (20)$$

кўринишга келади.

Қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин.

а) $D \neq 0$, у ҳолда (20) тенгламани $Cy'^2 + 2D \left(x' + \frac{\tilde{F}}{2D} \right) = 0$ кўринишда ёзиб,

$$x'' = x' + \frac{\tilde{F}}{2D},$$

$$y'' = y'$$

алмаштириш натижасида

$$Cy''^2 + 2Dx'' = 0 \quad \text{ёки} \quad y''^2 = 2px$$

тенгламага келамиз ($p = -\frac{D}{C}$). Бу эса параболанинг каноник тенгламасидир.

б) $D=0$ бўлсин. У ҳолда (20) тенглама $Cy'^2 + \tilde{F} = 0$ кўринишга келади. Агар $C > 0$, $\tilde{F} < 0$ ($C < 0$, $\tilde{F} > 0$) бўлса, $Cy'^2 + \tilde{F} = 0$ тенглама

$$(y' - a)(y' + a) = 0$$

кўринишда бўлади ($a^2 = \frac{\tilde{F}}{C}$). Бу эса икки параллел тўғри чизикни ифодалайди.

Агар C ва F бир хил ишорали бўлса, у ҳолда

$$y'^2 + a^2 = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тенглама *икки параллел мавҳум тўғри чизик тенгламаси* дейилади.

в) $\tilde{F} = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$y'^2 = 0$$

тенглама ўзаро устма-уст тушган икки тўғри чизикни ифодалайди.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламасига оид қуйидаги теорема исбот қилинди:

Теорема. Декарт координатлари системасини иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

берилган бўлсин. У ҳолда тўғри бурчакли координаталар системасини шундай танлаш мумкинки, бу системада қаралаётган тенглама қуйидаги каноник кўринишлардан биттасига келтирилади:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (эллипс),}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (мавҳум эллипс),}$$

$$3) a^2x^2 + c^2y^2 = 0 \text{ (икки мавҳум кесишувчи чизиклар),}$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (гипербола),}$$

$$5) a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \text{ (икки кесишувчи чизиклар),}$$

$$6) y^2 = 2px \text{ (парабола),}$$

$$7) y^2 - a^2 = 0 \text{ (икки параллел чизиклар),}$$

$$8) y^2 + a^2 = 0 \text{ (икки параллел мавҳум чизиклар).}$$

$$9) y^2 = 0 \text{ (икки ўзаро устма-уст тушувчи чизиклар).}$$

Мисол. Ушбу $x^2 + y^2 + 2y - 10x + 1 = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Қаралаётган тенглама учун $A=1$, $C=1$, $B=0$ бўлиб, $AC - B^2 > 0$ экани равшан. Демак, бу эллиптик типдаги тенгламадир.

Берилган тенгламани куйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2y - 10x + 1 + 25 - 25 &= 0, \\x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 &= 25, \\(x - 5)^2 + (y + 1)^2 &= 5^2.\end{aligned}$$

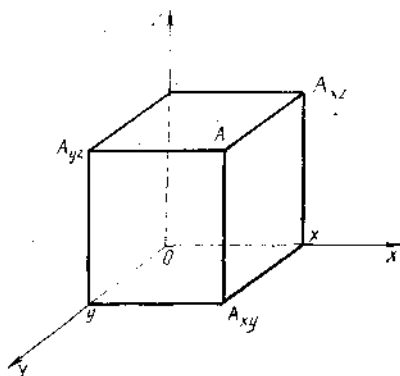
Бу эса маркази $(5, -1)$ нуктада, радиуси 5 га тенг бўлган айлана тенгламасидир.

Мисол. Ушбу $x^2 + y^2 = a^2$ айлана тенгламасини кутб координатлари системасида ёзинг.

Маълумки, нуктанинг кутб координатлари ва Декарт координатларини $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ формулалар боғлайди. Бундан $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2$ ёки $\rho = a$ эканлигини топамиз. Демак, $x^2 + y^2 = a^2$ айлананинг кутб координатларидаги тенгламаси $\rho = a$ кўринишда бўлиб, $0 \leq \varphi < 2\pi$ бўлади.

ФАЗОДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА МАСАЛАЛАРИ

Биз 10—12-бобларда текисликда аналитик геометриянинг асосий тушунчалари ва содда масалалари билан шуғулландик. Маълумки, бизни ўраб турган борлик фазо (уч ўлчовли фазо) бўлиб, бизга кўриниб турган реал жисмлар шу фазода маълум бир ўринни эгаллайди. Фазода уларнинг ҳолатини аниқлаш учун худди текисликдаги каби Декарт координаталари системаси киритилади. Бизга масштаб бирлиги билан таъминланган ўзаро перпендикуляр ҳамда битта O нуқтада қесишувчи O_x , O_y , O_z тўғри чизиклар системаси берилган бўлсин. Одатда бу система фазода *Декарт координаталари системаси* дейилади ва O_{xyz} каби белгиланади. O нуқта координаталар боши, O_x —*абсциссалар ўқи*, O_y —*ординаталар ўқи*, O_z эса *аппликатадар ўқи* дейилади.



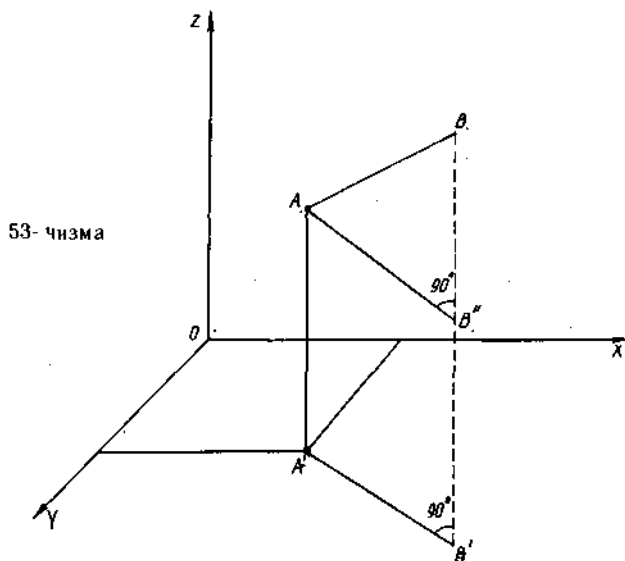
52-чизма

Фазода бирор A нуқтанинг ҳолати унинг O_x , O_y , O_z ўқларга проекциялари — (x, y, z) учлик билан тўла аниқланади (52-чизмада A нуқтанинг O_x , O_y , O_z ўқларга проекциялари x , y , z ва O_{xy} , O_{yz} , O_{xz} текисликларга проекциялари эса A_{xy} , A_{yz} , A_{xz} билан тасвирланган). Одатда (x, y, z) учлик A нуқтанинг *координаталари* дейилиб, уни $A(x, y, z)$ кўринишда белгиланади. Бу ерда x — A нуқтанинг абсциссаси, y —ординатаси, z —эса аппликатасидир.

1- §. Икки нукта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Фазода Декарт координаталари системаси ва $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нукталар берилган. Бу нукталар орасидаги масофани топиш масаласи билан шуғулланамиз. A' ва B' нукталар мос равишда A ва B нинг O_{xy} текисликдаги проекциялари бўлсин (53- чизма).

Текисликда икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра $A'B'$ кесма узунлиги $A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ бўлади. A нуктадан $A'B'$ кесмага параллел чизик ўтказиб, уни BB' чизик билан кесишган нуктасини B'' орқали белгилайлик (53- чизма). У ҳолда BB'' кесманинг узунлиги $|z_2 - z_1|$ га тенг бўлади. Равшанки, $\triangle ABB''$ — тўғри бурчакли учбурчак. Пифагор теоремасидан фойдаланиб $AB = \sqrt{AB''^2 + BB''^2}$ ни топамиз. Энди $AB'' = A'B'$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда



$$AB = \sqrt{A'B'^2 + BB''^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

бўлади. Демак,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Бу икки нукта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласи дейилади.

Фазода $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нукталарни туташтирувчи AB кесмани қарайлик. Бу кесмада шундай C нукта топиш керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$\frac{AC}{CB} = \lambda$. Изланаётган C нуктанинг координаталарини x, y, z дейлик. Берилган A ва B нукталарнинг координаталари ҳамда λ сон орқали C нуктанинг x, y, z координаталари

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

формулалар билан топилади. Хусусан, C нукта AB кесманинг ўртаси бўлса, унда $AC = CB$ ва $\lambda = 1$ бўлиб, C нуктанинг координаталари $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ бўлади.

2-§. Фазода текислик ва унинг хоссалари

Фараз қилайлик, фазода Декарт координаталар системаси, $P(a_1, b_1, c_1)$ ҳамда $Q(a_2, b_2, c_2)$ нукталар берилган бўлсин. Бу икки нуктадан бир хил масофада жойлашган нукталарнинг геометрик ўрни текисликни ифодалайди. Бу текисликда ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуктани олайлик. Икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$MP = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2},$$

$$MQ = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}$$

бўлади. Агар $MP = MQ$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2} = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга ошириб топамиз:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z.$$

Уни қуйидагича

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + 2(c_2 - c_1)z + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 = 0$$

ҳам ёзиш мумкин. Энди $A = 2(a_2 - a_1)$, $B = 2(b_2 - b_1)$, $C = 2(c_2 - c_1)$, $D = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2$ белгилашлар киритсак, унда кейинги тенглик ушбу

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

кўринишни олади. Шундай қилиб, ўзгарувчи $M(x, y, z)$ нуктанинг координаталарини боғловчи тенгламага келдик. (1) тенглама фазода текисликнинг умумий тенгламаси дейилади. Бу ерда A, B, C, D ўзгармас сонлар бўлиб, улар текисликнинг фазодаги вазиятини тўла аниқлайди.

Энди (1) тенгламанинг хусусий ҳолларини қарайлик.

1°. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$ бўлсин. У ҳолда $Ax + By + Cz =$

—0 тенглама ҳосил бўлиб, бу тенглама билан аниқланган текислик координаталар боши — $O(0, 0, 0)$ нуктадан ўтади.

2°. $A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0, C = 0$. Бу ҳолда биз $Ax + By + D = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама билан аниқланган текислик Oxy координаталар текислигида $Ax + By + D = 0$ тўғри чизикдан ўтувчи ва Oz ўқиға параллел текисликдир.

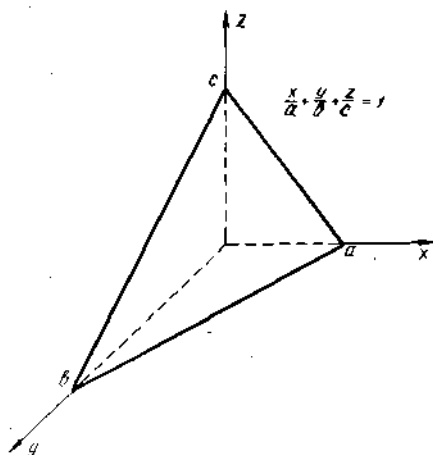
3°. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ бўлган ҳолда $Ax + Cz + D = 0$ текислик Oxz координата текислигида $Ax + Cz + D = 0$ тўғри чизикдан ўтиб, у Oy ўқиға параллел бўлади.

4°. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$. Бу ҳолда (1) тенглама $By + Cz + D = 0$ кўринишга келиб, у Oyz координаталар текислигида $By + Cz + D = 0$ тўғри чизикдан ўтувчи ҳамда Ox ўқиға параллел текисликдир.

5°. $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама $Cz + D = 0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxy координаталар текислигига параллел.

6°. $A = C = 0, B \neq 0, D \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $By + D = 0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxz текислигига параллел бўлади.

7°. $B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$ бўлган ҳолда (1) тенглама $Ax + D = 0$ кўринишга эга бўлиб, у Oyz текислигига параллел бўлади.



54- чизма

8°. $A = B = D = 0, C \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $Cz = 0 \Rightarrow z = 0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxy текисликини ифодалайди.

9°. $A = C = D = 0, B \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $By = 0 \Rightarrow y = 0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxz координата текислигини ифодалайди.

10°. $B = C = D = 0, A \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ кўринишга эга бўлиб, у Oyz координата текислигини ифодалайди.

11°. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

кўринишга келади. Бу ерда $a = -\frac{A}{D}, b = -\frac{B}{D}, c = -\frac{C}{D}$. (2) тенгламида $y = 0, z = 0$ десак $x = a$ эканлигини кўрамиз. Бу эса (2) текисликининг Ox ўқини $x = a$ нуктада кесиб ўтишини билдиради. Худди шунга ўхшаш $x = 0, y = 0$ ёки $x = 0, z = 0$ дейилса, қаралаётган текисликининг мос равишда Oz ўқини $z = c$ нуктада, Oy ўқини эса $y = b$ нуктада кесишини аниқлайди (54- чизма).

А тенглама текисликининг кесмалардаги тенгламаси дейилади.

Фазода

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

тенгламалар билан аниқланган T_1 ва T_2 текисликлар берилган бўлсин. Бу икки текислик параллел бўлиши учун

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (*)$$

шарт бажарилиши зарур ва етарли.

T_1 ва T_2 текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлиши учун эса

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (**)$$

шарт бажарилиши зарур ва етарлидир.

Мисол. Ушбу $2x + y + Cz = 0$ текислик C параметрининг қандай қийматларида $4x + 2y + z = 0$ текисликка параллел ва перпендикуляр бўлишини аниқланг.

Берилган текисликлар учун $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $C_1 = C$, $C_2 = 1$ эканлигини эътиборга олган ҳолда $(*)$ формуладан фойдаланиб топамиз: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{C}{1} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Шундай қилиб, $C = \frac{1}{2}$ бўлганда текисликлар параллел бўлади.

Энди бу текисликларнинг перпендикулярлик шартининг бажарилишини текширамиз. $(**)$ формулага кўра $2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + C \cdot 1 = 0$ бўлиб, бундан $C = -10$ келиб чиқади. Демак, $C = -10$ бўлганда қаралаётган текисликлар перпендикуляр бўлар экан.

3-§. Фазода тўғри чизик ва унинг тенгламаси

Декарт координаталари системасида

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар билан аниқланган T_1 ва T_2 текисликлар берилган бўлсин. Қаралаётган бу текисликлар ўзаро параллел бўлмасин. Равшанки, бу ҳолда улар бирор тўғри чизик бўйича кесишади. Бу тўғри чизикни ушбу

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

системанинг ечимлари тўпламидан иборат деб қараш мумкин. T_1 ва T_2 текисликлар ўзаро параллел бўлмагани учун $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ тенг-

ликлар бир вақтда бажарилмайди. Фараз қилайлик $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ бўлсин. Биз 6-бобдаги 4-§ да (3) кўринишдаги тенгламалар система-

сини ечиш масаласи билан шуғулланган эдик. Маълумки, бу система чексиз кўп ечимга эга. Бу ечимларни топиш учун номаълумлардан бирини, масалан z нинг тайинланган z_0 қийматини оламиз. z_0 қатнашган ва озод ҳадларни тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб (3) системани

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0, \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases} \quad (4)$$

кўринишда ифодаalayмиз. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ муносабатни

эътиборга олиб (4) системани x ва y га нисбатан ечамиз:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 - C_1z_0 \\ A_2 & -D_2 - C_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

z_0 га мос ечимларни x_0 ва y_0 орқали белгилайлик. Шундай қилиб, (3) системанинг (x_0, y_0, z_0) ечимини топдик. Энди z_0 га турли қийматлар бериш орқали системанинг қолган чексиз кўп ечимларининг топилиши равшан. Демак, (3) система ечимлари орқали ифодаланадиган тўғри чизик нукталарини аниқлаш мумкин экан. Масала шу тўғри чизик тенгламасини топишдан иборат. Қаралаётган тўғри чизикда $M(x_0, y_0, z_0)$ нукта билан бир қаторда ихтиёрий $P(x, y, z)$ нукта олайлик. У ҳолда бу нукталарнинг координаталари T_1 ва T_2 текислик тенгламаларини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Бу системалардан қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ бўлгани учун бу системани } (x - x_0) \text{ ва } (y - y_0) \text{ га}$$

нисбатан ечиб толамиз:

§

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} (z - z_0), \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} (z - z_0).$$

Бу тейгликлардан $M(x_0, y_0, z_0)$ ва $P(x, y, z)$ нукталардан ўтувчи

куйидаги тўғри чизик тенгламасига эга бўламиз

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Бу ерда

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1 z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2 z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 - C_1 z_0 \\ A_2 & -D_2 - C_2 z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Ушбу

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = m, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = n$$

белгилашлар ёрдамида охириги тенгликлар

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (5)$$

кўринишига келади. Одатда (5) тенглама *тўғри чизикнинг каноник тенгламаси* дейилади.

Агар (5) тенгламада

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

деб олсак

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Уни *тўғри чизикнинг параметрик тенгламаси* дейилади, бунда t — параметр.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан аниқланган тўғри чизикнинг каноник тенгламасини топинг.

Аввало тўғри чизикнинг бирор $A(x_0, y_0, z_0)$ нуктасини топиб оламиз. Бунинг учун $z_0 = 1$ деб тайинлаб, берилган системадан $y_0 = 2$, $x_0 = 1$ эканлигини аниқлаймиз. Демак, тўғри чизикдаги A нукта $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$ координаталарга эга.

Энди

$$\begin{aligned} A_1 &= 3, & B_1 &= 2, & C_1 &= 4; \\ A_2 &= 2, & B_2 &= 1, & C_2 &= -3 \end{aligned}$$

эканлигини эътиборга олиб

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

тенгликлардан изланаётган тўғри чизикнинг тенгламаси $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}$ кўринишда бўлишини топамиз.

4- §. Фазода текислик ва тўғри чизикларга оид масалалар

Биз бу параграфда фазодаги тўғри чизик ва текисликка оид баъзи бир масалаларни қараймиз. Бунда келтирилган тасдиқлардан айримларинигина исботлаймиз.

1°. Нуктадан текисликкача масофани топиш.

Фазода

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

тенглама билан берилган T текислик ва бу текисликда ётмаган $P(x_0, y_0, z_0)$ нуктани қарайлик. P нуктадан T текисликка туширилган перпендикуляр узунлиги бу нуктадан T текисликкача масофани билдиради. Бу масофа қуйидаги

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6)$$

формула билан топилади ((6) формулани келтириб чиқариш мазкур китобнинг 12-бобида нуктадан тўғри чизиккача бўлган масофа формуласининг исботидаги каби мулоҳазалар ёрдамида амалга оширилади).

Мисол. Ушбу $P(0, 0, 0)$ нуктадан $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ текисликкача бўлган масофани ҳисобланг.

Берилган текислик тенгламасини $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ кўринишда ёзиб-олиб, (6) формула ёрдамида топамиз:

$$\rho = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}.$$

Демак, берилган нуктадан текисликкача бўлган масофа $\rho = \frac{12}{\sqrt{61}}$ бўлади.

2°. Уч нуктадан ўтувчи текислик тенгламаси.

Биз 12-бобда икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасини келтириб чиқардик ва ўргандик. Худди шунга ўхшаш фазода бир тўғри чизикка тегишли бўлмаган

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$$

нукталардан ўтувчи текислик тенгламасини келтириб чиқариш мумкин. Бу тенглама

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

кўринишда бўлади.

Мисол. Ушбу $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 2, 0)$, $P_3(3, 0, 0)$ нукталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

(7) формулага кўра изланаётган текислик

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 0-0 & 2-0 & 0-1 \\ 3-0 & 0-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

тенглама билан ифодаланади. Бу детерминантни ҳисоблаб топамиз:

$$2x + 3y + 6z = 6.$$

3°. Фазода икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси.

Фазода $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нукталардан ўтувчи бирор тўғри чизик берилган бўлсин. Бу чизикда ихтиёрий $C(x, y, z)$ нукта оламиз (55-чизма). A , B , C нукталар бир тўғри чизикда ётганлиги сабабли уларнинг Oxy текислигидаги проекциялари бўлган A' , B' , C' нукталар ҳам бир тўғри чизикда ётади. Бундан эса

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

муносабатларга эга бўламиз. A , B , C нукталарнинг Oyz , Oxz координата текисликларидаги проекциялари учун ҳам мос равишда

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

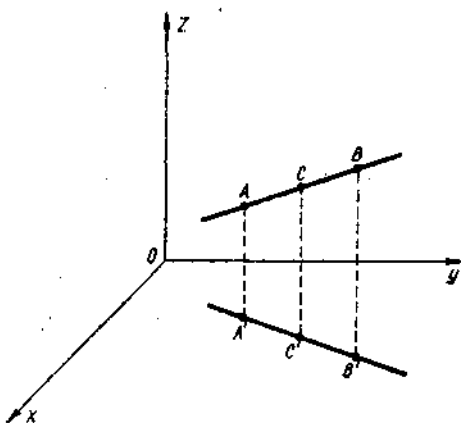
тенглиklar ўринлидир. Ҳосил бўлган тенглиklarнинг бир вақтда бажарилишини эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Бу фазода берилган икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасидир.

4°. Тўғри чизик ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Бизга $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тенгламалар билан аниқ-



55-чизма.

ланган тўғри чизик ҳамда $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик берилган бўлсин. Бу тўғри чизик ва текисликнинг ўзаро параллел бўлиши учун

$$Al + Bm + Cn = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Уларнинг перпендикуляр бўлиши учун эса $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

5°. Фазода икки тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Бизга ушбу

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \quad (10)$$

тенгламалар билан ифодаланган икки тўғри чизик берилган бўлсин.

Иккита компланар тўғри чизикларнинг ўзаро параллеллик шarti $\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}$ тенгликларнинг бажарилишидан, перпендикулярлик шarti эса

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

тенгликнинг бажарилишидан иборатдир.

Икки тўғри чизикнинг компланарлик шarti бажарилса, у ҳолда уларнинг ўзаро параллел бўлиши ёки бирор $P(x_0, y_0, z_0)$ нуктада кесишиши келиб чиқади.

Фараз қилайлик, бу тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлсин. У ҳолда бу параллел тўғри чизиклар оркали ўтувчи текислик тенгламаси ушбу

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

кўринишга эга бўлади. Агар икки тўғри чизик $P(x_0, y_0, z_0)$ нуктада кесишса, бу тўғри чизиклар оркали ўтувчи текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлади.

6°. Нуктадан тўғри чизикка перпендикуляр текислик ўтказиш.

Фазода $P(x_1, y_1, z_1)$ нукта ва $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тенгликлар

билан аниқланган L чизик берилган бўлсин.

P нуктадан ўтувчи L чизикка перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси

$$l(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0$$

кўринишда бўлади.

7°. Нуктадан тўғри чизиккача бўлган масофани топиш.

$P(x_1, y_1, z_1)$ нуктадан $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тўғри чизиккача бўлган ρ масофа ушбу

$$\rho^2 = \frac{\left| \frac{x_1-x_0}{l} \quad \frac{y_1-y_0}{m} \right|^2 + \left| \frac{y_1-y_0}{m} \quad \frac{z_1-z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{z_1-z_0}{n} \quad \frac{x_1-x_0}{l} \right|^2}{l^2 + m^2 + n^2}$$

формула ёрдамида топилади.

Мисол. Ушбу $P(0, 0, 0)$ нуктадан

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

тўғри чизиккача бўлган масофа ҳисоблансин.

Юқоридаги тенгликдан

$$\rho^2 = \frac{\left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix} \right|^2}{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{1^2 + 1^2 + 2^2}{14} = \frac{3}{7},$$

яъни $\rho = \sqrt{\frac{3}{7}}$ эканлигини топамиз.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

Мазкур бобда иккинчи тартибли сиртлардан — сфера, эллипсоид, гиперболоид, конус, параболоид ва цилиндри келтирамиз ва уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1-§. Сфера

Фазода Декарт координаталар системасини олайлик. Шу фазода бирор $M(a, b, c)$ нукта берилган бўлсин. $M(a, b, c)$ нуктадан бир хил r масофада жойлашган нукталарнинг геометрик ўрни *сфера* дейилади. Бунда M нукта сфера маркази, r эса сфера радиусидир.

Демак, сферадаги ихтиёрий $P(x, y, z)$ нуктадан унинг маркази $M(a, b, c)$ гача бўлган масофа ҳамма вақт r га тенг. Фазода икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб топамиз:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \quad (1)$$

Шундай қилиб, сферадаги ихтиёрий нуктанинг x, y, z координаталарини боғловчи тенгламага келдик. Бу тенглама маркази (a, b, c) нукта, радиуси r га тенг бўлган сфера тенгламасидир. Агар сфера маркази координата бошида, яъни $a=b=c=0$ бўлса, у ҳолда унинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

2-§. Эллипсоид

Биз мазкур китобнинг 13-бобида иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг каноник тенгламалари ва уларнинг содда хоссаларини ўргандик. Жумладан маркази координата бошида, радиуси r га тенг бўлган айланани O_v ўқи бўйлаб сиқиш натижасида эллипс ва унинг тенгламасини ҳосил қилиш мумкинлигини кўрдик. Ушбу параграфда биз шу усул билан эллипсоид тушунчасини киритиш ва унинг тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз.

Сферани ўзаро перпендикуляр учта йўналиш бўйича текис

деформациялаш (чўзиш ёки сиқиш) натижасида ҳосил бўлган сирт эллипсоид дейилади.

Бизга ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3)$$

тенглама билан аниқланган сфера берилган бўлсин. Фараз қилайлик юқорида қайд этилган деформация Ox , Oy , Oz ўқлари бўйлаб мос равишда k_1 , k_2 , k_3 ($k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$) коэффициентларга эга бўлсин (Ox , Oy , Oz ўқлари бўйлаб мос равишда k_1 , k_2 , k_3 марта чўзиш ёки сиқиш амалга оширилсин). Бу деформация натижасида эллипсоид ҳосил бўлиб, сферанинг $M(x, y, z)$ нуқтаси эллипсоиддаги $M'(x, y, z)$ нуқтага ўтади. Агар нуқтанинг деформациялашдан кейинги янги координаталарини (X, Y, Z) билан белгиласак, $X = k_1x$, $Y = k_2y$, $Z = k_3z$ ифодадаларга эга бўламиз. Бу тенгликлардан $x = \frac{X}{k_1}$, $y = \frac{Y}{k_2}$, $z = \frac{Z}{k_3}$

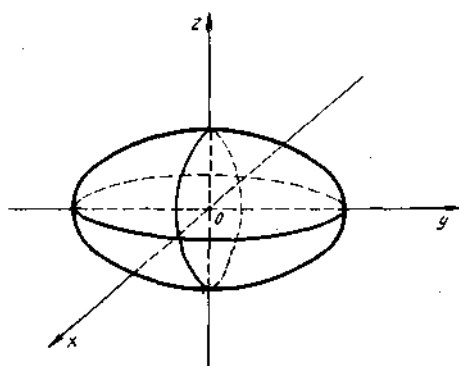
бўлиб, уларни (3) тенгламага қўйсак,

$$\frac{X^2}{k_1^2} + \frac{Y^2}{k_2^2} + \frac{Z^2}{k_3^2} = r^2$$

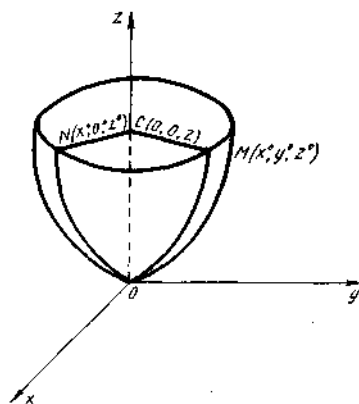
тенгламага эга бўламиз. Агар $a = k_1r$, $b = k_2r$, $c = k_3r$ белгилашлар киритсак, ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

тенглама ҳосил бўлади. (4) тенглама эллипсоиднинг каноник тенгласи дейилади. a , b , c сонлар эллипсоиднинг ярим ўқлари деб аталади (56- чизма).



56- чизма



57- чизма

Эллипсоиднинг хоссалари

Фараз қилайлик Декарт координаталари системасида $\frac{x^2}{a^2} +$

$+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ тенглама билан аниқланган эллипсоид берилган бўлсин.

1°. Эллипсоид координата ўқларига нисбатан симметрикдир.

2°. Эллипсоид координата ўқларини: O_x ўқини $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$ нукталарда, O_y ўқини $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$ нукталарда, O_z ўқини эса $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$ нукталарни кесади.

3°. Эллипсоиднинг $\{z=h\}$ текислик билан кесишмаси эллипс бўлиб, унинг тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ кўринишга эга бўлади.

3-§. Параболоид

O_{xz} текисликда ушбу

$$x^2=2pz, y=0 \quad (5)$$

тенглама билан берилган параболани карайлик. Бу параболани O_z ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *параболоид* (айланма параболоид) дейилади.

Энди параболоид тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз. Параболоидда ихтиёрий $M(x_0, y_0, z_0)$ нукта олиб, бу нуктадан O_z ўқка перпендикуляр $z=z_0$ текислик ўтказамиз. Бу текислик (5) тенглама билан берилган параболоидни $N(x^0, 0^0, z^0)$ нуктада кесади (57-чизма).

M ва N нукталарнинг бир горизонтал текисликда ётганини эътиборга олсак $CN=CM$ эканлигини, яъни уларнинг битта айлана радиуси бўлишини топамиз. Демак,

$$\tilde{x}_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (6)$$

муносабат ўринлидир. Бу тенгликни (5) тенгламага қўйсак, $x_0^2 + y_0^2 = 2pz_0$ бўлади. Демак, параболоиддаги ихтиёрий нуктанинг координаталарини боғловчи

$$x^2 + y^2 = 2pz \quad (7)$$

тенгламага келамиз. Одатда (7) тенглама *айланма параболоиднинг каноник тенгламаси* дейилади.

Биз юқорида баъзи бир геометрик шаклларнинг хусусиятларига қараб уларнинг тенгламаларини келтириб чиқардик ва асосий хоссаларини ўргандик.

Энди геометрик шаклларни уларнинг тенгламалари орқали таърифлаб, айрим хоссаларини келтирамиз.

Ушбу $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан аниқланган сирт *эллиптик параболоид* дейилади.

Гиперболик параболоид деб, $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан аниқланган сиртга айтилади.

Параболоиднинг хоссалари

1°. Ушбу $x^2 + y^2 = 2pz$ тенглама билан берилган айланма параболоид O_z ўқиға нисбатан симметрикдир.

2°. $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан берилган эллиптик параболоидни $\{z=h>0\}$ текислик билан кесиш натижасида ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h$$

эллипс ҳосил бўлади.

3°. $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан берилган гипербولىк параболоидни $\{z=h\}$ текислик ёрдамида кесилса, кесимда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$ гипербола ҳосил бўлади.

4-§. Гиперболоидлар

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тенглама билан аниқланган сирт *бир паллали гиперболоид* дейилади. Бу ерда a, b, c гиперболоиднинг ярим ўқларидир.

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

тенглама билан аниқланган сирт *икки паллали гиперболоид* деб аталади.

Гиперболоиднинг хоссалари

1°. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ тенглама билан берилган бир паллали гиперболоидни $z=h$ текислиги $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1$ эллипс бўйлаб кесади. Жумладан, $h=0$ га энг кичик эллипс мос келиб, $|h|$ ўсиши билан унга мос эллипс ҳам катталашиб боради (58-чизма).

2°. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболани O_{xz} текисликда O_z ўқи атрофида айлантиришдан $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболоид ҳосил бўлади.

3°. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

тенглама билан берилган бир паллали гиперболоидни $y = |h| \neq \neq b$ текислик билан кесиш натижасида гипербола ҳосил бўлади.

$y = |h| = b$ бўлган ҳолда кесимда $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ ва $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$

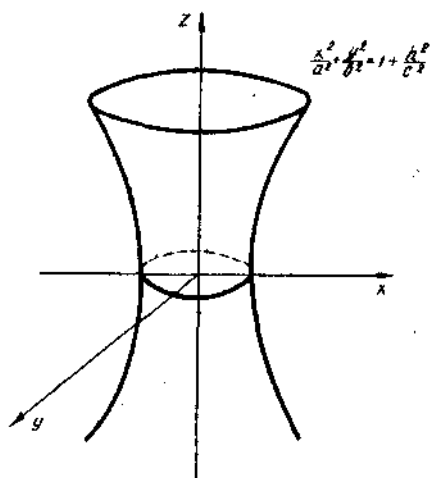
тўғри чизиклар ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш $|h| = a$ бўлса,

кесимда $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$

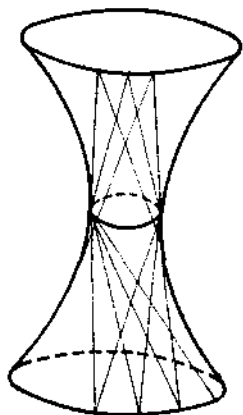
тўғри чизиклар ҳосил бўлади.

4°. Бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан иккита тўғри чизик ўтади.

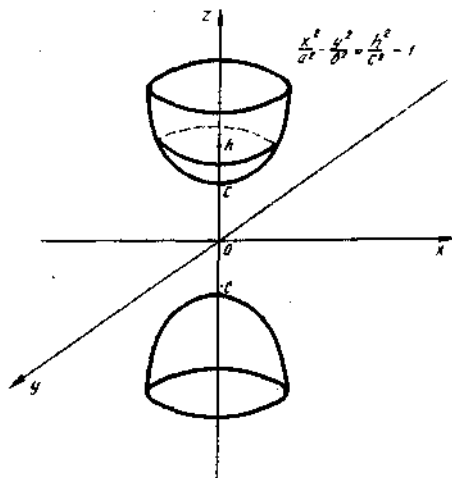
Одатда бу тўғри чизиклар гиперболоиднинг ясовчилари дейилади (59- чизма).



58- чизма



59- чизма



60- чизма

5°. Икки паллали гиперболоидни $z = h$ текислик билан кесиш натижасида кесимда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

эллипс ҳосил бўлади (60- чизма). Агар $|h| < c$ бўлса, қаралаётган сирт $\{z = h\}$ текислик билан кесишмайди.

5- §. Конус

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тенглама билан аниқланган сирт **конус** деб аталади.

Хоссалари

1°. Агар $P(x_0, y_0, z_0)$ нукта конусга тегишли бўлса, у ҳолда шу нуктадан ўтувчи

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

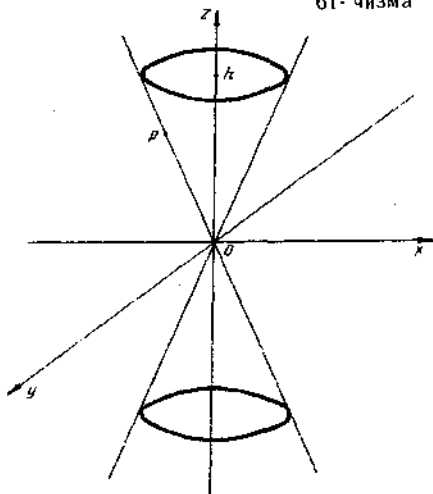
тўғри чизик ҳам конусга тегишли бўлади (61- чизма).

Одатда бу чизиклар конус **ясовчилари** дейилади.

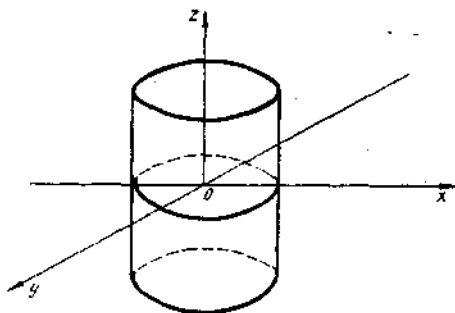
2°. Агар конусни $z = h$ текислик билан кессак, кесимда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$
 эллипс ҳосил бўлади.

61- чизма



62- чизма



3°. Конусни $\{x = h\}$ ёки $\{y = h\}$ текисликлар билан кесиб ёрдамида кесимда гиперболалар ҳосил бўлади.

6- §. Иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламаси

Биз аввалги параграфларда иккинчи тартибли сиртларнинг каноник тенгламалари ва хоссаларини ўргандик. Агар бу тенгламаларга эътибор берсак, уларнинг

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz + 2Eyz + 2Fxy + px + qy + rz + e = 0 \quad (8)$$

кўринишдаги тенгламанинг хусусий ҳоллари эканлигини кўраимиз. (8) тенглама **иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламаси** дейилади.

Агар (8) тенгламанинг чап томони $F(x, y, z)$ оркали белгиланса, у ҳолда уни

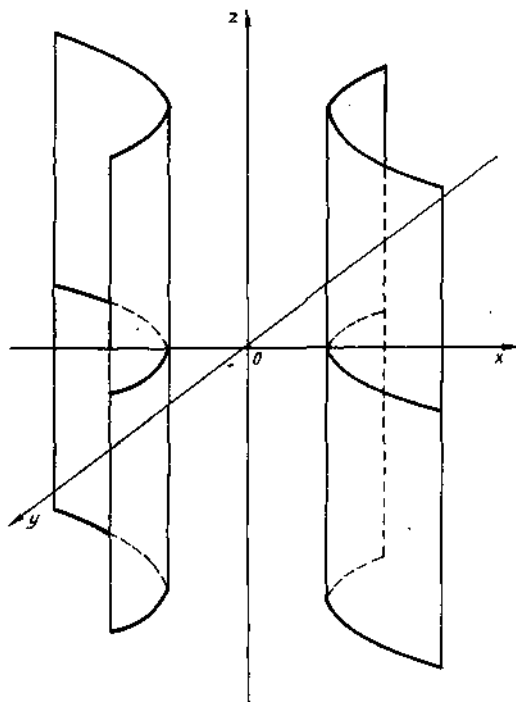
$$F(x, y, z) = 0 \quad (9)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Демак, умуман айтганда иккинчи тартибли сиртлар $F(x, y, z) = 0$ иккинчи даражали алгебраик тенглама билан аниқланади. Худди текисликдаги каби, бу ерда ҳам (8) тенгламани каноник кўринишга келтириш масаласини ҳал этиш мумкин.

Агар 2-тартибли сирт тенгламаси $F(x, y, z) = 0$ да ўзгарувчилардан бирортаси иштирок этмаса, бундай сирт цилиндрлик сиртни ифодалайди. Масалан, цилиндрлик сирт $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган бўлсин. Уни геометрик тасвирлаш учун $F(x, y) = 0$ чизик графиги чизиқлиб, унинг ҳар бир нуқтасида O_z ўкига перпендикуляр чизик ўтказилади. $F(x, y) = 0$ тенглама кўринишига қараб иккинчи тартибли цилиндрлар қуйидаги турларга бўлинади:

63- чизма



1°. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенглама билан аниқланган сирт эллиптик цилиндр дейилади (62- чизма).

2°. Ушбу

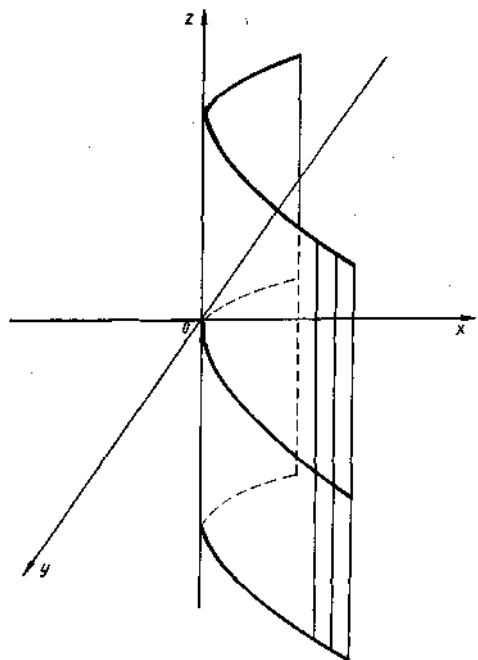
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенглама билан аниқланган сирт гиперболик цилиндр дейилади (63- чизма).

3°. Ушбу

$$y^2 = 2px$$

тенглама билан ифодаланган сирт эса параболлик цилиндр дейилади (64- чизма).



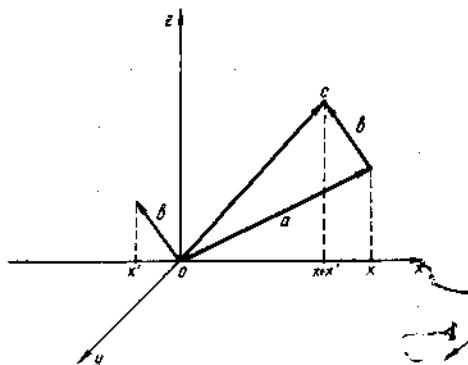
64- чизма

1-§. Векторлар фазоси. Векторлар устида арифметик амаллар

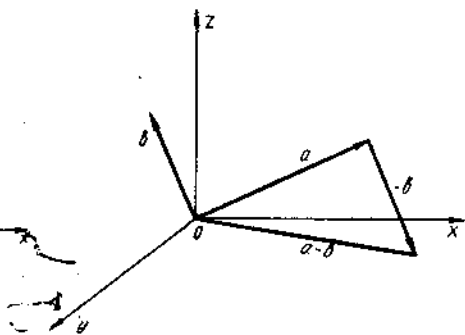
Агар a векторнинг бошланғич нуқтаси координаталар боши билан устма-уст тушган бўлса, унинг охири нуқтаси фазода бирор M нуқтани аниқлайди. Ва аксинча, фазодаги ҳар қандай M нуқтага OM вектор мос келади. Демак, бундай векторлар тўплами билан уч ўлчовли фазодаги $M(x, y, z)$ нуқталар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўринли бўлиб, бу уч ўлчовли R^3 фазога **векторлар фазоси** ҳам дейилади. Шундай қилиб, a вектор ўзининг координаталари (x, y, z) билан аниқланади ва $a = (x, y, z)$ каби белгиланади.

Векторлар фазосида $a = (x, y, z)$, $b = (x', y', z')$ векторлар ва α скаляр сон берилган бўлсин. Қуйидаги $(x+x', y+y', z+z')$ вектор a ва b векторларнинг **йиғиндиси** дейилади ва $a+b$ каби белгиланади. Демак,

$$a+b = (x+x', y+y', z+z').$$



67- чизма



68- чизма

a ва b векторларнинг **айирмаси** деб, $(x-x', y-y', z-z')$ векторга айтилади ва $a-b$ каби белгиланади. Демак

$$a-b = (x-x', y-y', z-z').$$

a векторнинг α сонга кўпайтмаси ушбу $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ вектор билан аниқланади, яъни

$$\alpha \cdot a = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Векторлар устида киритилган амалларга нисбатан қуйидаги хоссалар ўринли:

1°. $a+b = b+a$ (коммутативлик хоссаси).

2°. $a+(b+c) = (a+b)+c$ (ассоциативлик хоссаси).

3°. $a+0 = a$.

4°. Ҳар қандай a вектор учун шундай b вектор мавжуд бўлиб,

$a+b=0$ бўлади.

b вектор a га тескари вектор дейилади ва $-a$ каби белгиланади.

5°. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$,

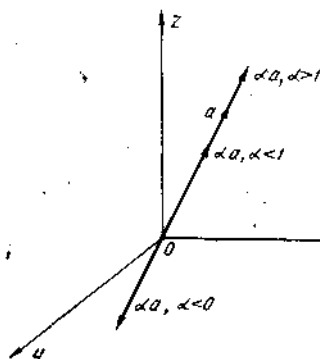
$(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ (дистрибутивлик хоссаси).

6°. $\alpha(\beta \cdot a) = \alpha\beta a$.

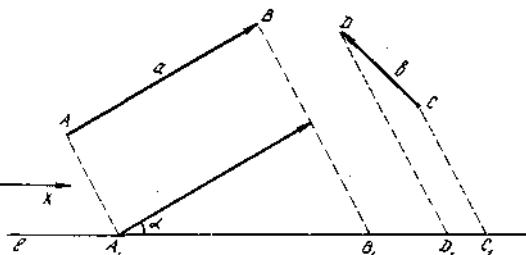
Бу хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади. Энди векторлар йиғиндиси, айирмаси ва α сонга кўпайтмасининг геометрик маъносини қарайлик. Бизга $a = (x, y, z)$ ва $b = (x', y', z')$ векторлар берилган бўлсин.

a векторнинг охириги нуктасига b векторнинг бошланғич нуктасини параллел кўчириб қўяйлик. Унда b векторнинг охириги нуктаси бирор C нуктани аниқлайди. (67- чизма). Ҳосил бўлган OC вектор a ва b нинг йиғиндисини ифодалайди, яъни $OC = (x+x', y+y', z+z')$.

$a-b$ векторни геометрик тасвирлаш учун $a-b = a+(-b)$ тенгликдан фойдаланамиз (68- чизма).



69- чизма



70- чизма

$\alpha \cdot a$ векторни тасвирлаш учун $\alpha > 0$ ва $\alpha < 0$ бўлган ҳолларни алоҳида қараймиз.

$\alpha > 0$ бўлганда $\alpha \cdot a$ векторнинг йўналиши a вектор йўналиши билан бир хил бўлиб, унинг узунлиги $|\alpha a| = \alpha |a|$ га тенгдир.

Агар $\alpha > 1$ бўлса, a вектор α марта чўзилади, $\alpha < 1$ бўлса, a марта қисқаради. Агар $\alpha < 0$ бўлса, αa нинг узунлиги $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$ бўлиб, унинг йўналиши a га тескари бўлади (69- чизма).

2- §. Векторнинг проекцияси, йўналтирувчи косинуслар

Фазода $a = \overline{AB}$ вектор ва йўналтирилган l тўғри чизик берилган бўлсин (70- чизма).

a векторнинг бошланғич нуктаси ва охириги нуктасидан l га перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг l чизикдан ажратган кесмасини A_1B_1 орқали белгилайлик. A_1B_1 кесманинг узунлиги a векторнинг l чизикдаги проекцияси дейилади ва

$$\text{пр}_l a = \text{пр}_l \overline{AB}$$

каби белгиланади. Агар A_1B_1 векторнинг йўналиши l нинг йўналиши билан бир хил бўлса, $\text{пр}_l \overline{AB} = A_1B_1$ нинг узунлигига тенг: $\text{пр}_l \overline{AB} = |A_1B_1|$ акс ҳолда эса $\text{пр}_l \overline{AB} = -|A_1B_1|$, бўлади. Масалан, 70- чизмада пр_a мусбат ишорали, пр_b эса манфий ишорали бўлади. Равшанки, a векторнинг l ўққа проекцияси скаляр микдор бўлиб, бу микдор a нинг R^3 фазодаги ҳолатига боғлиқ эмас. Агар a векторнинг бошланғич нуктаси l тўғри чизик устига қўчирилса, a вектор билан l тўғри чизик орасида α бурчак ҳосил бўлиб, бу α бурчак a векторнинг l тўғри чизикка нисбатан *оғиш бурчаги* дейилади.

a векторнинг оғиш бурчаги ва l ўққа проекцияси орасидаги қуйидаги муносабатнинг ўринлилигини кўриш кийин эмас:

$$\text{пр}_l a = |a| \cos \alpha. \quad (1)$$

Агар α, β, γ лар мос равишда $a = (x, y, z)$ векторнинг Ox, Oy, Oz ўқларга нисбатан оғиш бурчаклари бўлса, у ҳолда

$$x = |a| \cos \alpha, y = |a| \cos \beta, z = |a| \cos \gamma$$

тенгликлар ўринлидир.

Одатда, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ лар a векторнинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади.

$l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ векторнинг узунлиги бирга тенг бўлиб (бирлик вектор), унинг йўналиши a нинг йўналиши билан устма-уст тушади.

3- §. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Бизга $a = (x, y, z)$ ва $b = (x', y', z')$ векторлар берилган бўлсин. Ушбу

$$xx' + yy' + zz'$$

сон a ва b векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* дейилади ва ab ёки (a, b) каби белгиланади. Демак,

$$ab = xx' + yy' + zz'.$$

Мисол. Ушбу $a = (0, 1, 2), b = (3, 0, 5)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Юқоридаги $xx' + yy' + zz' = ab$ формулага биноан $ab = 0 \cdot 3 + 1 \times 0 + 2 \cdot 5 = 10$ бўлади. Демак, $ab = 10$.

Скаляр кўпайтманинг хоссалари

$$1^\circ. ab = ba.$$

$$2^\circ. \alpha(ab) = (\alpha a)b.$$

$$3^\circ. a(b+c) = ab+ac.$$

$$4^\circ. ab = |a| \text{пр}_a b.$$

1° — 3°- хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади.

4°- хоссани исботлаш учун b векторни учта вектор йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз: $b = (x', y', z') = (x', 0, 0) + (0, y', 0) + (0, 0, z')$. Унда $\text{пр}_a b = \text{пр}_a b_1 + \text{пр}_a b_2 + \text{пр}_a b_3$

($|a| \text{пр}_a b = |a| \text{пр}_a b_1 + |a| \text{пр}_a b_2 + |a| \text{пр}_a b_3$) бўлиб,

$$\text{пр}_a b_1 = x' \cos \alpha,$$

$$\text{пр}_a b_2 = y' \cos \beta,$$

$$\text{пр}_a b_3 = z' \cos \gamma$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ерда $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ лар a векторнинг йўналитирувчи косинусларидир. Энди

$$x = |a| \cos \alpha, y = |a| \cos \beta, z = |a| \cos \gamma$$

тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$|a| \text{пр}_a b = xx' + yy' + zz' = ab.$$

$$5^\circ. ab = |a| \cdot |b| = \cos a^b b.$$

Бу тенгликни исботлаш учун 4° — хоссадан фойдаланамиз: $ab = |a| \text{пр}_a b$. (1) формулага кўра $\text{пр}_a b = |b| \cos \alpha$ бўлиб, бундан эса $ab = |a| \cdot |b| \cos \alpha$ эканлиги келиб чиқади.

$$6^\circ. a \cdot a = |a|^2.$$

7°. a вектор b векторга перпендикуляр бўлиши учун $ab = 0$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

4- §. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари

Бизга $a = (x, y, z)$ ва $b = (x', y', z')$ векторлар берилган бўлсин. Ушбу

$$\left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

вектор a ва b нинг вектор кўпайтмаси дейилади ва $[ab]$ каби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} [ab] &= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = \\ &= (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx'). \end{aligned}$$

Вектор кўпайтманинг хоссалари.

$$1^\circ. [ab] = -[ba]$$

$$2^\circ. [(\lambda a)b] = \lambda[ab], [a(\lambda b)] = \lambda[ab], \lambda \in R$$

$$3^\circ. [a(b+c)] = [ab] + [ac].$$

$$[(a+b)c] = [ac] + [bc].$$

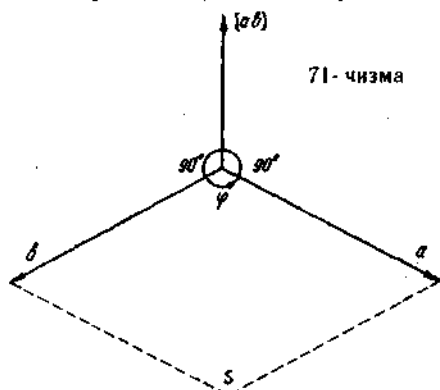
Бу хоссаларнинг исботи вектор кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади.

$[ab]=0$ бўлиши учун a ва b нинг коллинеар бўлиши зарур ва етарлидир.

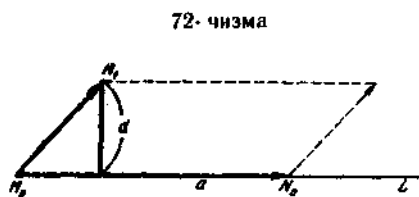
a ва b векторлар берилган бўлсин. a ва b нинг вектор кўпайтмаси $[ab]$ нинг қиймати 71-чизмада тасвирланган параллелограмм юзи $S=|a||b|\sin\varphi$ га тенг.

Бизга учта a , b ва c векторлар берилган бўлсин. Ушбу $[abc]$ ифода a , b , c векторларнинг *аралаш кўпайтмаси* дейилади ва abc каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $a=(1, 3, 0)$, $b=(2, 0, 1)$, $c=(0, 1, 2)$ векторларнинг аралаш кўпайтмаларини топинг.



71-чизма



72-чизма

Аввало $[ab]$ ни топамиз:

$$[ab] = (3 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = (3, -1, -6).$$

$$abc = (3, -1, -6) (0, 1, 2) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = -13.$$

5-§. Векторлар назариясининг баъзи татбиқлари

Биз мазкур бобнинг бошланишида векторларнинг қатор масалаларни ҳал этишда анча қулайликларга олиб келишини таъкидлаган эдик. Мазкур параграфда ана шу масалалардан баъзи бирларини келтирамиз.

1. Фазода нуктадан тўғри чизиккача масофани топиш.

Бизга ушбу $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тенгликлар билан берилган

L тўғри чизик ва $M(x_1, y_1, z_1)$ нукта берилган бўлсин. M нуктадан L тўғри чизиккача бўлган масофа $\rho(M, L)$ ни топиш масаласини қарайлик.

Агар $\vec{a}=(l, m, n)$ векторнинг бошланғич нуктасини L да ётувчи бирор M_0 нуктага қўйсак, унинг N_0 учи L да ётади. Бундан кўринадики, изланаётган $\rho(M, L)$ масофа $\vec{a}=(l, m, n)$ ва $M_0M = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ векторлар орқали қурилган параллелограмм баландлигидан (72-чизма) иборатдир.

a ва MM_0 векторларнинг вектор кўпайтмасини қарайлик.

Маълумки, $|\overline{a \cdot MM_0}|$ микдор чизмада тасвирланган параллелограмм юзига тенг. Иккинчи томондан параллелограммнинг юзи асос узунлиги $|a|$ ва баландлиги ρ нинг кўпайтмасига тенглигини эътиборга олсак, $|\overline{a \cdot MM_0}| \cdot \rho = |\overline{a \cdot MM_0}|$ муносабат ўринли бўлади. Бундан эса

$$\rho = \frac{\sqrt{\left| \frac{y_1 - y_0}{m} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_0}{n} \frac{x_1 - x_0}{l} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{y_1 - y_0}{m} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

формула келиб чиқади.

2. Фазода икки тўғри чизик орасидаги бурчак.

Бизга $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ ҳамда $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ тенг-

ликлар билан ифодаланган L_1 ва L_2 чизиклар берилган бўлсин.

Берилган L чизикка параллел ёки унда ётувчи a вектор ($|a| \neq 0$) L чизикнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

(l, m, n) вектор L : $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тўғри чизикнинг йўнал-

тирувчи векторидир. L_1 ва L_2 чизиклар орасидаги бурчаклардан бири бўлган φ бу чизикларнинг йўналтирувчи $a_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $a_2 = (l_2, m_2, n_2)$ векторлари орасидаги бурчакка тенгдир. Иккинчи бурчак эса $180^\circ - \varphi$ га тенглиги равшан.

Скаляр кўпайтманинг 5° - хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Бу формула фазода икки тўғри чизик орасидаги бурчакни топиш формуласидир.

3. Фазода нуктадан текисликкача бўлган масофа.

Фараз қилайлик, фазода $M(x_1, y_1, z_1)$ нукта ва $T: Ax + By + Cz + D = 0$ текислик берилган бўлсин (73- чизма).

Аввало координаталар боши O нуктадан текисликкача бўлган масофани топайлик. Бунинг учун O нуктадан T текисликка перпендикуляр p векторни қараймиз. p векторнинг T текислик билан кесишган нуктаси координаталарини (x_2, y_2, z_2) орқали белгилаймиз.

Равшанки, $p = p \cdot n_0$, бунда n_0 бирлик вектор. $(x_2, y_2, z_2) \in T$ эканлигини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0, \\ Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) тенглама $\vec{a} = (A, B, C)$, $\vec{b} = (x - x_2, y - y_2, z - z_2)$ векторлар орқали

$$\vec{a} \vec{b} = 0 \quad (2)$$

скаляр кўпайтма шаклида ёзилиши равшандир.

Ихтиёрий $L(x, y, z) \in T$ учун $\vec{b}$ векторнинг бошланғич нуктаси N да, охириги нуктаси L да бўлишини эътиборга олсак, (2) ифодадан $a \perp T$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, $\vec{a}$ ва $\vec{n}$ векторлар коллинеар бўлиб, $\vec{n} = \lambda \vec{a}$ тенглик ўринлидир. $\vec{ON}$ вектор ҳам $\vec{n}$ га коллинеар бўлганлигидан $\vec{ON} = \mu \vec{a}$ тенглик ўринли бўлади.

Энди N нукта T текисликда ётишини эътиборга олиб топамиз

$$\begin{aligned} Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0, \\ A \cdot \mu A + B \cdot \mu B + C \cdot \mu C + D &= 0. \end{aligned}$$

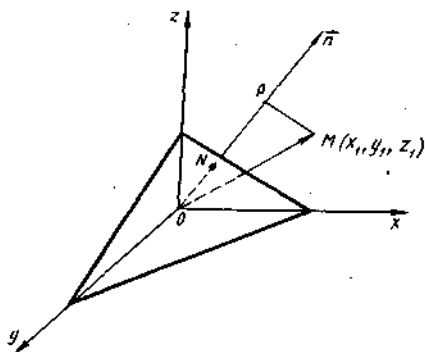
Охириги тенгламадан:

$$\mu = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{D}{|\vec{a}|^2}.$$

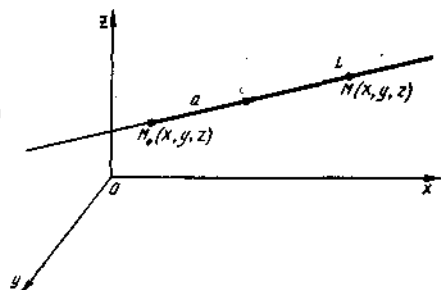
Демак,

$$|\vec{ON}| = |\mu| |\vec{a}| = \frac{|D|}{|\vec{a}|}.$$

μ нуктадан T текисликкача бўлган ρ масофани топиш учун $\vec{OM}$ векторни $\vec{n}$ га проекциясини қараймиз. Равшанки, $\vec{NP} = \vec{OP} - \vec{ON}$ бўлиб, $\text{пр}_{\vec{n}} \vec{NP} = \text{пр}_{\vec{n}} \vec{OM} - \text{пр}_{\vec{n}} \vec{ON}$ тенглик ўринлидир.



73- чизма



74- чизма

$$\text{пр}_{\vec{n}} \vec{OM} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{OM}}{|\vec{n}|} = \frac{\lambda (\vec{a}, \vec{OM})}{|\lambda| |\vec{a}|} = \text{sign } \lambda \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\vec{n}} \vec{ON} &= \frac{\vec{n} \cdot \vec{ON}}{|\vec{n}|} = \text{sign } \lambda \cdot \frac{-\frac{D}{|\vec{a}|^2} \cdot (\vec{a}, \vec{a})}{|\vec{a}|} = \\ &= -\text{sign } \lambda \frac{D}{|\vec{a}|} = -\text{sign } \lambda \cdot \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\rho = \text{пр}_a \overline{NP} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (3)$$

формула ҳосил бўлди.

4. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Фазода иккита

$$T_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$T_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

текисликлар берилган бўлсин. Биз юқорида $\vec{a}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ва $\vec{a}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ векторларнинг T_1 ва T_2 текисликларга перпендикуляр эканлигини кўрдик. Бундан $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларнинг перпендикулярлик ва параллеллик аломатлари T_1 ва T_2 текисликларнинг ҳам мос равишда параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари бўлишини кўрамиз. Демак, T_1 ва T_2 текисликлар параллел бўлиши учун $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0$ шартнинг, перпендикуляр бўлиши учун эса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу шартлар $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 0$ ҳамда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ кўринишда ифодаланиши равшандир.

5. Тўғри чизик ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Фараз қилайлик, фазода ушбу

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (4)$$

тенглама билан аниқланган L тўғри чизик ҳамда

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5)$$

тенглама билан ифодаланган T текислик берилган бўлсин. Маълумки, (5) тенглик $\vec{a} = (l, m, n)$ вектор билан $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторнинг коллинеарлик шартини ифодалайди. Демак, $\vec{a} = (l, m, n)$ вектор L учун йўналтирувчи вектор бўлиб, $\vec{a}$ нинг бошланғич нуқтасида ётса, бу вектор тўлиқ L да ётади (74-чизма).

L тўғри чизикнинг T текисликка параллеллик ва перпендикулярлик шартлари $\vec{a} = (l, m, n)$ ва $\vec{b} = (A, B, C)$ векторларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларига эквивалентдир.

Демак, $Al + Bm + Cn = 0$ тенглама L тўғри чизикнинг T текисликка параллеллик шартини, $\frac{A}{L} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ эса перпендикулярлик шартини ифодалайди.

6. Фазода икки тўғри чизикнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Бизга ушбу $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ ва $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ тенг-

ламалар билан аниқланган L_1 ва L_2 тўғри чизиклар берилган бўлсин.

Бу тўғри чизикларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари уларнинг $\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ва $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ йўналтирувчи векторлари оркали ифодаланади. Шундай қилиб, бу икки тўғри чизикнинг ўзаро параллеллик ва перпендикулярлик шартлари мос равишда:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ ва } l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

НАТУРАЛ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

Функция лимити математик анализнинг муҳим тушунчаларидан бири. Даставвал содда ҳолни, натурал аргументли функциялар (сонлар кетма-кетлиги)нинг лимитини қараймиз.

1-§. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси

Биз мазкур китобнинг 2-бобида функция тушунчаси билан танишган эдик. Энди, хусусий ҳолда, аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўплами $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ дан иборат бўлган функцияларни (натурал аргументли функцияларни) қараймиз.

Айтайлик, N тўпланда бирор $f(n)$ функция берилган бўлсин. Бу функция қийматларини x_n билан белгилаймиз:

$$f(n) = x_n \quad (1)$$

$$(f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, f(n) = x_n, \dots).$$

Қаралаётган функция қийматларидан ташкил топган ушбу

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

тўплам *сонлар кетма-кетлиги* дейилади.

Масалан,

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

сонлар кетма-кетлиги

$$f(n) = \frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

функциянинг қийматларидан ташкил топгандир.

(1) кетма-кетликни ташкил этган x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) сонлар унинг *ҳадлари* дейилади: x_1 — кетма-кетликнинг биринчи ҳади, x_2 — кетма-кетликнинг иккинчи ҳади ва ҳоказо, x_n — кетма-кетликнинг n -ҳади (ёки умумий ҳади). (1) кетма-кетлик қисқача x_n ёки $\{x_n\}$ каби белгиланади.

Қўп ҳолда кетма-кетликларнинг умумий ҳади формула билан

ифодаланади. Унинг барча хадлари шу формула оркали топилади.

Мисоллар.

$$1. \quad x_n = \frac{1}{n}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$2. \quad x_n = n: \quad 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$3. \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}: \quad -1, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{3^2}, \dots, \frac{(-1)^n}{n^2}, \dots$$

$$4. \quad x_n = 1: \quad 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

$$5. \quad x_n = aq^{n-1}: \quad a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

Бирор $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир хади шу сондан катта бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ юқоридан чегараланган кетма-кетлик дейилади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир хади шу сондан кичик бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geq m$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ қуйидан чегараланган кетма-кетлик дейилади.

3-таъриф. Агар кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топилсаки, $\forall n \in N$ учун

$$m \leq x_n \leq M$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, $\{x_n\}$ чегараланган кетма-кетлик дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$:

$$1 + 1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{9}, \dots, 1 + \frac{1}{n^2}, \dots$$

кетма-кетлик юқоридан чегараланган, чунки ихтиёрий $n \in N$ учун

$$x_n \leq 2 \quad (M=2)$$

тенгсизлик ўринли.

$$2. \text{ Ушбу } x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}:$$

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \dots$$

кетма-кетлик куйидан чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geq -\frac{1}{4} \quad (m = -\frac{1}{4})$$

тенгсизлик ўринли.

$$3. \text{ Ушбу } x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}:$$

$$0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \dots, \frac{n^2 - 1}{n^2}, \dots$$

кетма-кетлик чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун

$$0 \leq x_n < 1$$

тенгсизликлар ўринли.

4- т а ʼ р и ф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари қуйидаги

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \\ (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots) \end{aligned}$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

бўлса, $\{x_n\}$ ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик дейилади.

5- т а ʼ р и ф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари қуйидаги

$$\begin{aligned} x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \\ (x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots) \end{aligned}$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geq x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

бўлса, $\{x_n\}$ камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

Ўсувчи (қатъий ўсувчи), камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар дейилади.

$$1\text{- м и с о л. Ушбу } x_n = \frac{n}{n+1}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

кетма-кетликнинг ўсувчи эканини кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

ҳадларини олиб, $x_{n+1} - x_n$ айирмани қараймиз:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Равшанки, $\forall n \in N$ учун $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.

Демак, $\forall n \in N$ да $x_{n+1} - x_n > 0$, яъни $x_n < x_{n+1}$ бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг ўсувчи (хатто қатъий ўсувчи) эканини билдиради.

$$2\text{-мисол. Ушбу } x_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1}, \frac{2!}{2^2}, \frac{3!}{3^3}, \dots, \frac{n!}{n^n}, \dots$$

кетма-кетликнинг камаювчи эканини кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг $x_n = \frac{n!}{n^n}$, $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ ҳадларини олиб, уларнинг нисбатини қараймиз:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Равшанки, ихтиёрий $n \in N$ да $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1$ бўлади. Демак,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1. \text{ Бу тенгсизликдан эса } x_n > x_{n+1} \quad (\forall n \in N) \text{ келиб чиқади.}$$

Демак, кетма-кетлик камаювчи экан.

Фараз қилайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин:

$$x_n: \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

$$y_n: \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

Қуйидаги

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$$

кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *йиғиндиси* ҳамда *айирмаси* дейилади ва $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ каби белгиланади.

Ушбу

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *кўпайтмаси* дейилади ва $\{x_n \cdot y_n\}$ каби белгиланади.

Қуйидаги

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_k \neq 0, k = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *нисбати* дейилади ва $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ каби белгиланади.

2-§. Сонлар кетма-кетлигининг limiti

Авалло нуктанинг атрофи тушунчасини келтирамыз. Бирор a нукта (сон) ҳамда ихтиёрий мусбат ε сони ($\forall \varepsilon > 0$) берилган

бўлсин. Ушбу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ интервал a нуктанинг *атрофи* (ε атрофи) дейлади (75-чизма). Равшанки, ε турли қийматларга тенг бўлганда a нуктанинг турли атрофлари ҳосил бўлади. Масалан, $a=1$ нуктанинг $\varepsilon=\frac{1}{3}$ атрофи $(1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3})$ интервалдан, яъни $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ интервалдан; $a=0$ нуктанинг $\varepsilon=\frac{1}{10}$ атрофи $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ интервалдан иборат.

Бирор $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ кетма-кетлик ҳамда бирор a нукта (сон) берилган бўлсин. Бу кетмакетликнинг ҳадлари a нуктанинг бирор атрофига тегишли бўладими, тегишли бўлса, нечта ҳади тегишли бўлади — шуларни аниқлаш кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритишда муҳим роль ўйнайди. Мисоллар келтирайлик:

1. Ушбу $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots$ кетма-кетлик ва $a=0$ нуктанинг $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ атрофини қарайлик. Бу кетма-кетликнинг

$$x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}, x_3=\frac{1}{3}, x_4=-\frac{1}{4}, x_5=\frac{1}{5}$$

ҳадлари a нуктанинг $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ атрофига тегишли бўлмайди. Берилган кетма-кетликнинг x_6 ҳадидан, яъни 6-ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлади.

Агар $a=0$ нуктанинг $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ атрофи олинса, унда $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ кетма-кетликнинг 11-ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ атрофга тегишли бўлади.

Агар $a=0$ нуктанинг $(-2, 2)$ атрофи олинса, унда берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу $(-2, 2)$ атрофга тегишли бўлади.

2. Ушбу $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots$ кетма-кетликни ҳамда $a=1$ нуктанинг $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$, яъни $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ атрофини қараймиз. Бу кетма-кетликнинг

$$x_2=1, x_4=1, x_6=1, \dots, x_{2k}=1, \dots$$

ҳадлари, яъни жуфт номерли барча ҳадлари $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ атрофга тегишли бўлади. Берилган кетма-кетликнинг

$$x_1=-1, x_3=-1, x_5=-1, \dots, x_{2k+1}=-1, \dots$$

ҳадлари, яъни тоқ номерли барча ҳадлари $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ атрофга тегишли бўлмайд.

Равшанки, $x_n = (-1)^n$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари $a=1$ нуктанинг $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ атрофига тегишли бўлавермайди.

3. Ушбу $x_n = n: 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ кетма-кетликни ҳамда $a=2$ нуктанинг $(2-4, 2+4)$ яъни $(-2, 6)$ атрофини қарайлик. Бу кетма-кетликнинг

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5$$

ҳадлари $(-2, 6)$ атрофга тегишли бўлиб, 6- ҳадидан бошлаб қолган барча ҳадлари шу атрофга тегишли эмас. Агар $a=0$ нукта олинса ва унинг $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ атрофи қаралса, унда берилган $x_n = n$ кетма-кетликнинг битта ҳам ҳади шу атрофга тегишли бўлмаслигини кўрамиз.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, бирор нукта атрофга кетма-кетликнинг чекли сондаги ҳадлари тегишли бўлиши, бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари, жумладан кетма-кетликнинг барча ҳадлари (чексиз сондаги ҳадлари) тегишли бўлиши, битта ҳам ҳади тегишли бўлмаслиги мумкин экан.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳамда бирор a сон берилган бўлсин.

6- т а ъ р и ф. Агар a нуктанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ атрофи $(\forall \varepsilon > 0)$ олинганда ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ (ёки } \lim x_n = a \text{ ёки } x_n \rightarrow a)$$

каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуктанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ атрофига тегишлилиги, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилиб, барча $n > n_0$ учун

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлишидан иборатдир.

Равшанки,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

7- т а ъ р и ф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон $(n_0 \in \mathbb{N})$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

1- м и с о л. Ушбу $x_n = \frac{1}{n^2}: 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ кетма-кетликнинг

лимити $a=0$ эканини кўрсатинг.

Бунинг учун аввало ихтиёрий мусбат ε сон олинади. Сўнг бу сонга кўра шундай натурал n_0 сони топилишини кўрсатиш керакки, берилган кетма-кетликнинг n_0 — ҳадидан кейинги барча ҳадлари куйидаги

$$|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon \quad (2)$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. Одатда бундай n_0 натурал сонни (2) тенгсизлик бажарилсин деб, ундан фойдаланиб топилади:

$$|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Агар натурал n_0 сонни $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ дан катта қилиб олинса, унда барча $n > n_0$ учун

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

бинобарин,

$$|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Шундай қилиб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонга кўра n_0 натурал сон топилиди, барча $n > n_0$ учун

$$|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилди. Бу эса, таърифга биноан 0 сони $x_n = \frac{1}{n^2}$ кетма-кетликнинг лимити эканини билдиради:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

2- м и с о л. Ушбу $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ кетма-кетликни қарайлик. Ҳар қандай a нинг ихтиёрий атрофи, жумладан $(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$ атрофи олинса, кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлмайди. Бинобарин, a берилган кетма-кетликнинг лимити эмас. Берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг limiti 0 га тенг бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

у ҳолда $\{x_n\}$ чексиз кичик миқдор дейилади.

Масалан, $x_n = \frac{1}{n}$ кетма-кетлик чексиз кичик миқдор бўлади, чунки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\{ |x_n| > M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг limitини ∞ деб қаралади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{ёки} \quad x_n \rightarrow \infty$$

каби белгиланади.

Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$x_n > M \quad (x_n < -M)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг limiti $+\infty$ ($-\infty$) деб қаралади.

Масалан, $x_n = (-1)^n \cdot n$: $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n, \dots$ кетма-кетликнинг limiti ∞ бўлади, чунки

$$|x_n| = |(-1)^n \cdot n| = n$$

бўлиб, ҳар қандай мусбат M сон олинганда ҳам шундай натурал n сон топиладики, $n > M$ бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг limiti чексиз

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор дейилади.

Масалан, $x_n = n$ кетма-кетлик чексиз катта миқдор бўлади, чунки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

8-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг limiti чекли сон бўлса, уни яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Агар кетма-кетликнинг limiti чексиз ёки кетма-кетлик limitга эга бўлмаса, уни узоқлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Энди кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлсин. Кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлгани учун барча ҳадларидан тузилган $\{x_n\}$ тўплам ҳам юқоридан чегараланган бўлади. Унда 1-боб, 2-§ да келтирилган теоремага кўра бу тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup \{x_n\}$ мавжуд бўлади:

$$\sup \{x_n\} = a.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leq a \quad (3)$$

ва $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам кетма-кетликнинг шундай x_{n_0} ҳади топиладики,

$$x_{n_0} > a - \varepsilon \quad (4)$$

тенгсизлик бажарилади.

Шартга кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Шунинг учун $n > n_0$ бўлганда

$$x_n \geq x_{n_0} \quad (5)$$

бўлади. Натижада (3), (4) ва (5) муносабатлардан $0 \leq a - x_n < \varepsilon$, яъни $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

эканини билдиради. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

Бу теорема юқоридаги 1-теоремага ўхшаш исботланади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

9-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$, барча $m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик дейилади.

Ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. Шунини исботлайлик.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Лимит таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, жумладан,

$m > n_0$ учун ҳам $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки,

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Демак, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик.

Энди фундаментал кетма-кетликларнинг яқинлашувчилиги ҳақидаги қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз:

3-теорема (Коши теоремаси). *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлса, у яқинлашувчи бўлади.*

Мисол. Ўшбу $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$;

$$1 + \frac{1}{1}, (1 + \frac{1}{2})^2, (1 + \frac{1}{3})^3, \dots, (1 + \frac{1}{n})^n, \dots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи эканини кўрсатинг.

Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (1 - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}). \end{aligned}$$

Шунга ўхшаш $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ ёйилса, унда:

1) x_{n+1} нинг ифодасида x_n нинг ифодасидагига караганда битта ортикча мусбат ҳад борлигини;

2) x_{n+1} нинг ифодасидаги ҳар бир ҳад (иккинчи ҳаддан бошлаб) x_n нинг ифодасидаги мос ҳаддан катта бўлишини топамиз. Демак, $\forall n \in \mathbb{N}$ да $x_n < x_{n+1}$ бўлади. Бу эса $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканини билдиради.

Равшанки,

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (1 - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) < \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

Демак, қаралаётган кетма-кетлик юкоридан чегараланган. Унда 1-теоремага мувофиқ $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни чекли лимитга эга бўлади.

Бу $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ кетма-кетликнинг limiti e сони дейлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e. \quad e \text{ — иррационал сон: } e = 2,718281828459045...$$

Асоси e бўлган логарифм натурал логарифм дейлади. M соннинг ($M > 0$) натурал логарифми $\ln M$ каби ёзилади.

3- §. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари

Яқинлашувчи кетма-кетликлар қатор хоссаларга эга. Қуйида бу хоссаларни санаб ўтамиз, айирмаларининг исботини ҳам келтирамиз.

1°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг limiti ягона бўлади.

2°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

3°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

бўлади.

3°- х о с с а н и н г и с б о т и. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ бўлсин. Лимит таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон

олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n'_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n'_0$ учун

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

бўлади. Шунингдек, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n''_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n''_0$ учун

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

бўлади. Агар n'_0 ва n''_0 натурал сонларнинг каттасини n_0 десак, унда барча $n > n_0$ учун бир йўла (6) ва (7) тенгсизликлар бажарилади.

Шуларни эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Бу эса $a+b$ сон $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлишини билдиради. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

экани исботланади. 3°- хосса исбот бўлди.

4°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

бўлади.

Н а т и ж а. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, $\{c \cdot x_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

бўлади, бу ерда c — ўзгармас сон.

5°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $y_n \neq 0$ ($n=1,2,3, \dots$) ва $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

бўлади.

6°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\forall n \in N$ да $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$) бўлса, у ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$)

бўлади.

7°. Агар $\{x_n\}, \{z_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ бўлиб, $\forall n \in N$ да

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad (8)$$

бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ бўлади.

7°.- х о с с а н и н г и с б о т и. $\{x_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$, $|z_n - a| < \varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади.

Равшанки,

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad (9)$$

$$|z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < z_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \quad (10)$$

(8) ва (10) муносабатлардан $y_n < a + \varepsilon$, (8) ва (9) муносабатлардан эса $a - \varepsilon < y_n$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$$

Бу эса $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини ва $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ бўлишини билдиради 7°-хосса исбот бўлди.

8°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ бўлса, у ҳолда $x_n = a + \alpha_n$ бўлади ва аксинча, бунда α_n чексиз кичик микдор.

4-§. Сонлар кетма-кетликлари лимитини ҳисоблаш

Сонлар кетма-кетлиги мавзусининг асосий масалаларидан бири унинг лимитини топишдан иборат. Кетма-кетликларнинг лимитларини топишда таърифдан, 2-§ да келтирилган хоссалардан фойдаланилади.

1-мисол. Ушбу $x_n = c$:

$$c, c, c, \dots, c, \dots \quad (c = \text{const})$$

кетма-кетликни қарайлик. c нуктанинг ихтиёрий атрофи $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ни $(\forall \varepsilon > 0)$ олайлик. Равшанки, берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ атрофга тегишли бўлади. Унда кетма-кетликнинг лимити таърифига биноан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

бўлиши келиб чиқади.

2-мисол. Ушбу $x_n = \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$) кетма-кетликни қарайлик.

1) $a > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 \quad (11)$$

дейилса, унда $\alpha_n > 0$ бўлиб,

$$\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n \Rightarrow a = (1 + \alpha_n)^n$$

бўлади. Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$(1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \alpha_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha_n^3 + \dots + \alpha_n^n$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи мусбатдир. Шунинг учун $(1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n \cdot \alpha_n$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $a \geq 1 + n \cdot \alpha_n$. Кейинги тенгсизликдан эса $\alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$ бўлиши келиб

чиқади. Шундай қилиб $0 < \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$ бўлади. Равшанки, $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$. Унда 7°- хоссага кўра $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ бўлади. Демак, α_n —

чексиз кичик миқдор. (11) муносабатдан топамиз: $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$

3°- хоссага мувофиқ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ бўлади.

2) $a = 1$ бўлганда $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$ бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ бўлади.

3) $0 < a < 1$ бўлсин. Бу ҳолда $\frac{1}{a} > 1$ бўлади. 5°- хоссадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Демак, $a > 0$ бўлганда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ бўлсин. $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топишда 3-§

даги 5°- хоссадан фойдаланиб бўлмайди, чунки мазкур хоссада

келтирилган шарт $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ бажарилмайди. $n \rightarrow \infty$ да $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кет-

ма-кетликнинг лимити $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг нолга қандай интилишига қараб турлича бўлади. Шунинг учун уни $\left(\frac{0}{0} \right)$ кўринишидаги аниқмаслик деб юритилади.

3- м и с о л. Ушбу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{3n^3+n+1}}$ ни ҳисобланг.

Берилган кетма-кетликнинг лимити қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{3n^3+n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+n+1}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{3}{1} = 3\end{aligned}$$

ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1-§. Функция лимити таърифлари

Биз 17-бобда сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимитини ўргандик. Энди ҳақиқий аргументли функция лимити ва уларнинг хоссалари билан танишамиз. Аввало тўпламнинг лимит нуктаси тушунчасини келтирамиз.

Бирор ҳақиқий сонлар тўплами X берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $a \in R$ нуктанинг ихтиёрий ε атрофида ($\varepsilon > 0$) X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётса, a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси дейлади.

Масалан, $X = \{\frac{1}{n}\}$ ($n \in N$) тўплам учун 0 лимит нуктадир.

$X = \{(-1)^n\}$, $n \in N$ тўплам учун эса -1 ва 1 нукталар лимит нукталар бўлади.

Агар a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси бўлса, у ҳолда X дан a га яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин. У ҳолда a нуктанинг ихтиёрий ε атрофида X нинг чексиз кўп элементлари ётади. ε нинг $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ кийматлари учун a нуктанинг ε атрофларини қарайлик. $\varepsilon = 1$ учун $(a-1, a+1)$ ораликда X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётади. Бу атрофдан X тўпламнинг x_{k_1} элементини оламиз. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ учун a нуктанинг $\frac{1}{2}$

атрофидан, яъни $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ ораликдан X тўпламнинг x_{k_2} элементини оламиз ($k_2 > k_1$).

$\varepsilon = \frac{1}{3}$ учун a нуктанинг $\frac{1}{3}$ атрофидан X тўпламнинг x_{k_3} ($k_3 > k_2$) элементини оламиз ва х. к. Шу мулоҳазани давом эттириб a нуктанинг $\frac{1}{n}$ атрофидан x_{k_n} элемент оламиз. Натижада, ушбу $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетлик учун $|x_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$ бўлади. Бу тенгсизликдан $\{x_{k_n}\}$ кетма-кетлиkning a нуктага яқинлашиши келиб чиқади.

Энди X тўпламдан a га яқинлашувчи $\{x_{k_n}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлсин. У ҳолда яқинлашувчи кетма-кетлик таърифига

биноан a нуктанинг ихтиёрий ε атрофида $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг, жумладан X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётади. Демак, таърифга кўра a нукта X тўплам учун лимит нукта бўлади. Шундай қилиб, X тўпламнинг лимит нуктаси тушунчасини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

2-таъриф. Агар X тўпламдан a га яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси дейилади.

Биз аввалги бобда чексиз катта кетма-кетлик тушунчасини киритиб, унинг баъзи бир хоссаларини ўрганган эдик. Бу тушунчадан фойдаланиб қуйидаги таърифни киритамиз:

3-таъриф. Агар X тўпламдан мусбат элементлардан иборат (манфий элементлардан иборат) чексиз катта кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, $+\infty$ ($-\infty$) «нуқта» X тўпламнинг лимит нуктаси дейилади.

$f(x)$ функция X тўпламида берилган бўлиб, a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин (умуман айтганда a нукта X тўпламга тегишли булиши шарт эмас).

4-таъриф. Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га яқинлашувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, функция қийматларидан иборат $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона (чекли ёки чексиз) b лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (x нинг a га интилгандаги) limiti дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Функция лимитига берилган бу таъриф Гейне таърифи дейилади.

Эслатма. Агар a га интилувчи нукта $\{x'_n\}$ ва $\{x''_n\}$ кетма-кетликлар олинганда мос $\{f(x'_n)\}$ ва $\{f(x''_n)\}$ кетма-кетликларнинг limiti турлича бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да лимитга эга бўлмайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $f(x) = x^3$ функциянинг $x=2$ нуқтадаги limiti 8 га тенг эканлигини кўрсатинг.

Ҳар бир ҳади 2 дан фарқли бўлган 2 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \quad (x_n \neq 2, n = 1, 2, 3, \dots).$$

У ҳолда

$$f(x_n) = x_n^3$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устидаги арифметик амалларга кўра

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n^3 = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n \cdot \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n \cdot \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Бу эса 4-таърифга кўра $f(x) = x^3$ функциянинг $x \rightarrow 2$ даги limiti 8 га тенглигини билдиради.

2. Ушбу $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, функциянинг $x \rightarrow 0$ даги limiti мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Нолга интилувчи иккита $\{x'_n\} = \{\frac{1}{n\pi}\}$ ва $\{x''_n\} = \{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}$ кетма-кетлик олайлик. Бунда $f(x'_n) = \cos^2 n\pi = 1$, $f(x''_n) = \cos^2 \frac{(4n+1)\pi}{2} = 0$ бўлиб, $\lim_{x'_n \rightarrow 0} f(x'_n) = 1$, $\lim_{x''_n \rightarrow 0} f(x''_n) = 0$ эканлиги равшандир. Бу эса $\cos^2 \frac{1}{x}$

функциянинг $x \rightarrow 0$ даги limiti мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди функция лимитининг яна бир таърифини келтирамиз.

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтада ($x \rightarrow a$ даги) limiti дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

каби белгиланади. Функция лимитига берилган бу таъриф Коши таърифи дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу $f(x) = \sin x$ функциянинг $x = \frac{\pi}{6}$ нуқтадаги limiti $\frac{1}{2}$ га тенг эканлигини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Бу ε га кўра δ ни $\delta = \varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $0 < |x - \frac{\pi}{6}| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда куйидаги

$$\begin{aligned} |f(x) - \frac{1}{2}| &= |\sin x - \frac{1}{2}| = |\sin x - \sin \frac{\pi}{6}| = \\ &= |2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}| \leq 2 \cdot \frac{|x - \frac{\pi}{6}|}{2} = |x - \frac{\pi}{6}| < \varepsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан 5-таърифга кўра $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$

эканлиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x - \text{рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x - \text{иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Дирихле функциясининг ихтиёрий $a \in R$ нуқтада лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

Тескарисини фарз қилайлик, яъни Дирихле функцияси a нуқтада чекли b лимитга эга бўлсин. У ҳолда таърифга кўра ихтиёрий $\varepsilon > 0$, жўмладан $\forall \varepsilon = \frac{1}{4}$ учун $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча рационал x ларда

$$|\chi(x) - b| = |1 - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Худди шундай, $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликини қаноатлантирувчи барча иррационал x ларда

$$|x(x) - b| = |0 - b| = |b| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

$1 = (1 - b) + b$ айниятни эътиборга олиб топамиз:

$$1 = |(1 - b) + b| \leq |1 - b| + |b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \frac{1}{2}.$$

Бу зиддият фаразимишнинг нотўғрилигини, яъни Дирихле функциясининг $\forall a$ нуктада лимитга эга эмаслигини кўрсатади.

1-теорема. Функция лимити учун берилган Гейне ва Коши (4-ва 5-таърифлар) таърифлари ўзаро эквивалентдир.

Исбот. 1) $f(x)$ функция a нуктада 4-таърифта (Гейне таърифта) кўра лимитга эга бўлсин, яъни X тўпламининг нукталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона b лимитга интилсин. Биз шу b сон $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуктада 5-таърифта (Коши таърифта) кўра ҳам лимити бўлишини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция $x = a$ нуктада 4-таърифта кўра b лимитга эга бўлса ҳам, функция шу нуктада 5-таърифта кўра b лимитга эга бўлмасин. Унда бирор $\epsilon = \epsilon_0 > 0$ сон учун ихтиёрий кичик мусбат δ сон олинганда ҳам аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи бирор x' қийматида

$$|f(x') - b| \geq \epsilon_0$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олайлик. У ҳолда юқоридагига кўра ҳар бир $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) учун x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликини қаноатлантирувчи шундай $x = x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) қиймати топиладики, $0 < |x_n - a| < \delta_n$ ва $|f(x_n) - b| \geq \epsilon_0$ бўлади. Аммо $\delta_n \rightarrow 0$ дан $x_n \rightarrow a$ бўлиши, бундан эса 4-таърифта кўра $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик b га интилиши лозим. $|f(x_n) - b| \geq \epsilon_0$; муносабат эса бунга зиддир. Демак, $f(x)$ функция $x = a$ нуктада 4-таърифта кўра b лимитга эга бўлишидан унинг шу нуктада 5-таърифта кўра ҳам b лимитга эга бўлиши келиб чиқади.

2) $f(x)$ функция a нуктада 5-таърифта (Коши таърифта) кўра лимитга эга бўлсин, яъни $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликлар бажарилганда $|f(x) - b| < \epsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

X тўпламининг нукталаридан тузилган ҳар бир ҳади a дан фарқли ва a га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик.

Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифта кўра, юқоридаги $\delta > 0$ учун шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лан учун $|x_n - a| < \delta$ тенгсизлик ўринли бўлади. Натижада $x_n \neq a$ ($n = 1, 2, \dots$) муносабатга кўра $0 < |x_n - a| < \delta$ тенгсизликлар келиб чиқади.

Бу тенгсизликлардан эса 5-таърифта кўра $|f(x_n) - b| < \epsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $x_n \rightarrow a$ ва $f(x_n) \rightarrow b$ бўлади.

Биз юкорида $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ даги чекли b лимитга эга бўлишининг Коши таърифини (5-таърифни) келтирдик. $b = \infty$ ($b = +\infty$, $b = -\infty$) бўлган ҳолда функция лимитининг Коши таърифи қуйидагича ифодаланади.

6-таъриф. Агар $\forall E > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x)| > E \quad (f(x) > E; -f(x) > E)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги limiti ∞ ($+\infty$, $-\infty$) дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty)$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ функция учун $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ бўлишини кўрсатинг.

Агар $\forall E > 0$ сон учун $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{E}}$ деб олинса, у ҳолда $0 < |x - 1| < \delta$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{(x-1)^3} \right| > E$$

тенгсизлик бажарилади. Демак, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3} = \infty$.

Энди $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари тушунчаларини келтирамиз.

7-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона b сонига интилса, шу b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) limiti дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \quad \text{ёки} \quad f(a+0) = b$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \quad \text{ёки} \quad f(a-0) = b \right).$$

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$) функциянинг ноль нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини топинг.

Нолга интилувчи турли $\{x'_n\}$ ва $\{x''_n\}$ кетма-кетликларни олайлик. Фараз қилайлик, $\{x'_n\}$ кетма-кетлик 0 нуқтага ўнгдан, $\{x''_n\}$ эса 0 нуқтага чапдан интилсин. У ҳолда бу кетма-кетликлар учун

$$f(x'_n) = \frac{|x'_n|}{x'_n}, \quad f(x''_n) = \frac{|x''_n|}{x''_n}$$

бўлиб, соннинг абсолют қиймати таърифига кўра

$$f(x'_n) = \frac{x'_n}{x'_n} = 1, \quad f(x''_n) = -\frac{x''_n}{x''_n} = -1$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

8-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг тенгсизликлари қаноатлантирувчи бирча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) limiti дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ ёки } f(a+0) = b$$

$$(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ ёки } f(a-0) = b)$$

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциянинг 0 нуқтадаги ўнг limiti-ни топиш.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \frac{1}{\varepsilon^2}$ деб олинса, у ҳолда $0 < x < \delta$ тенгсизлик бажарилишидан $\frac{1}{\sqrt{x}} > \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

$$a < x < a + b \quad (a - b < x < a)$$

Функция limiti, функциянинг ўнг ва чап limitларни таърифларидан бевосита қуйидаги теоремага келамиз:

2-теорема. Агар $f(x)$ функция бирор a нуқтада b limitга эга бўлса, бу функция шу нуқтада ўнг ва чап limitларга эга бўлиб,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

муносабат ўринли, ва аксинча, агар $f(x)$ функция a нуқтада ўнг ва чап limitларга эга бўлиб, бу limitлар ўзаро тенг (b га тенг) бўлса, у ҳолда бу нуқтада функция limitга эга ва бу limit ҳам b га тенг бўлади.

Энди $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$) да функция limiti тушунчасини келтирамиз.

9-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тuzилган ҳар қандай чексиз катта (мусбат чексиз катта; манфий чексиз катта) $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона b га интилса, b сон $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги ($x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$) limiti дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 7}{3x^2 + 11} = \frac{1}{3}$ тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

$\{x_n\}$ ихтиёрий чексиз катта кетма-кетлик бўлсин. У ҳолда функция қийматларидан иборат кетма-кетлик

$f(x_n) = \frac{x_n^2 + 2x_n - 7}{3x_n^2 + 11}$ бўлади. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетликлар устидаги арифметик амаллардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 2x_n - 7}{3x_n^2 + 11} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{7}{x_n^2}}{3 + \frac{11}{x_n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x_n} - \frac{7}{x_n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{11}{x_n^2}\right)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 7}{3x^2 + 11} = \frac{1}{3}.$$

10-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай Δ сон топилсаки, x аргументининг $|x| > \Delta$ ($x > \Delta$; $-x > \Delta$) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$) даги лимити дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити $\frac{1}{2}$ га тенг эканлигини кўрсатинг.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $\Delta = \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}}$ деб олинса, у ҳолда, $|x| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = \left| \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

бўлади.

$$\text{Ҳақиқатан ҳам, } \left| \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + 1}{2(2x^2 - 1)} \right| = \frac{3}{2(2x^2 - 1)}$$

бўлиб, $\frac{3}{2(2x^2-1)} < \varepsilon$ тенгсизликдан $x^2 > \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$, $|x| > \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}}$

бўлишини толамиз. Демак, $\Delta = \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}}$.

2-§. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари

Чекли лимитга эга бўлган функциялар қатор хоссаларга эга бўлиб, бу хоссаларни ўрганишда асосан функция лимити таърифларидан фойдаланилади. Биз функция лимити учун Гейне таърифининг келтирилганини эътиборга олиб (функция лимитининг сонлар кетма-кетлигининг лимити сифати таърифланиши), ушбу параграфда келтириладиган хоссаларнинг баъзиларининг исботлаймиз.

$f(x)$ функция x тўпламда берилган, a эса X нинг лимит нуктаси бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функциянинг a нуктада лимити мавжуд бўлса, бу лимит ягонадир.

2°. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ бўлиб, $b > p$ ($b < q$) бўлса, y ҳолда a нинг етарли кичик атрофидан олинган x ($x \neq a$) нинг кийматларида $f(x) > p$ ($f(x) < q$) бўлади.

3°. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \infty$ бўлса, y ҳолда a нинг етарлича кичик атрофидан олинган x ($x \neq a$) нинг кийматларида $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

3°-хоссанинг исботи. Шартга кўра $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \infty$.

Функция лимитининг Коши таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча кийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$, яъни $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Демак, x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ ($a - \delta$, $a + \delta$ ораликда) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча кийматларида $f(x)$ функциянинг кийматлари ($b - \varepsilon$, $b + \varepsilon$) ораликда бўлади. Бу эса функциянинг ($a - \delta$, $a + \delta$) ораликда чегараланганлигини кўрсатади.

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар X тўпламда берилган бўлиб, a нукта X нинг лимит нуктаси бўлсин.

4°. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$$

бўлиб, x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча кийматларида $f_1(x) \leq f_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда $b_1 \leq b_2$ тенгсизлик ўринли бўлади.

5°. Агар x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча кийматларида

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ — мавжуд ва у ҳам b га тенг.

6°. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$ бўлса, у ҳолда $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ($f_2(x) \neq 0$) функциялар ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = b_1 \pm b_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) f_2(x)) = b_1 \cdot b_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b_1}{b_2} (b_2 \neq 0)$$

муносабатлар ўринли.

7°. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x))$ ҳам мавжуд ва у $k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ га тенг ($k = \text{const}$), яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

8°. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^m$ ҳам мавжуд ($m \in \mathbb{N}$) ва

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^m = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^m$$

муносабат ўринли бўлади.

Фараз қилайлик $\{x\}$ тўпламда $t = \varphi(x)$ функция аниқланган ва бу функция қийматларидан иборат $\{t\}$ тўпламда $y = f(t)$ функция аниқланган бўлиб, улар ёрдамида мураккаб $y = f(\varphi(x))$ функция ҳосил қилинган бўлсин.

9°. Агар 1) $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ бўлиб, a нуктанинг шундай ($a - \delta$, $a + \delta$) атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофдан олинган барча x лар учун $\varphi(x) \neq c$ бўлса, 2) c нукта T тўпламнинг лимит нуктаси бўлиб, $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да мураккаб функция $f(\varphi(x))$ лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$$

бўлади.

3-§. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар

X тўпламда $\alpha(x)$ функция берилган бўлиб, a нукта X нинг лимит нуктаси бўлсин.

11-таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ функциянинг лимити нолга тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

бўлса, $\alpha(x)$ функция a нуктада (ёки $x \rightarrow a$ да) чексиз кичик функция дейилади.

Масалан, $f(x) = \cos x$ $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да, $\varphi(x) = x^2$ эса $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик функция бўлади.

Агар X тўпламда берилган $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли b лимитга эга бўлса, у ҳолда $\alpha(x) = f(x) - b$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз кичик функция бўлади ва аксинча.

Ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b]$$

бўлиб, чекли лимитга эга бўлган функциялар устидаги арифметик амалларга кўра (5°- хосса)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - b = 0$$

бўлади.

Худди шунингдек $x = a$ нуктада $f(x) - b$ чексиз кичик функция бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

экани кўрсатилади.

Юқорида айтилганлардан кўринадики, агар $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекли b лимитга эга бўлса, уни $f(x) = b + \alpha(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда $\alpha(x)$ чексиз кичик функция.

Энди X тўпламда берилган бирор $\beta(x)$ функцияни қарайлик.

12- таъриф. Агар $x \rightarrow a$ да $\beta(x)$ функциянинг лимити ∞ , яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$$

бўлса, $\beta(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция деб аталади.

Масалан, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ функция $x \rightarrow 1$ да, $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ функция

эса $x \rightarrow 0$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ва катта функциялар қуйидаги хоссаларга эга.

1°. Чекли сондаги чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

2°. Чегараланган функция билан чексиз кичик функциянинг кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

3°. Агар $\alpha(x)$ ($\alpha(x) \neq 0$) чексиз кичик функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

4°. Агар $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

4-§. Функцияларни таққослаш

Фараз қилайлик, X тўпламда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$$

бўлсин (a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси).

Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad (1)$$

лимитни қараймиз.

1°. Агар (1) лимит 0 га тенг бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция дейилади ва $\alpha(x) = o(\beta(x))$ каби белгиланади.

2°. Агар (1) лимит 0 дан фаркли чекли сонга тенг бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ бир хил тартибли чексиз кичик функциялар дейилади.

3°. Агар (1) лимит 1 га тенг бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар $x \rightarrow a$ да эквивалент дейилади ва $\alpha(x) \sim \beta(x)$ каби белгиланади.

Қуйидаги хоссалар бевосита таърифдан келиб чиқади

а) $o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)$;

б) Агар $\gamma = o(\beta)$ бўлса, $o(\beta) \pm o(\gamma) = o(\beta)$;

в) Агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар $x \rightarrow a$ да ихтиёрий чексиз кичик функциялар бўлса, у ҳолда $\alpha \cdot \beta = o(\alpha)$ ва $\alpha \cdot \beta = o(\beta)$ бўлади.

5-§. Функция лимити мавжудлигига оид теоремалар

Биз юқорида чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссаларини ўргандик. Ушбу параграфда эса функция лимити мавжудлиги масаласи билан шугулланамиз. Аввало бу масалани монотон функциялар учун ҳал этамиз.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси ҳамда $\forall x \in X$ учун $x \leq a$ бўлсин.

3-теорема. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаявчи) бўлиб, юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, a нуктада чекли лимитга эга бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлсин. У ҳолда $\{f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Фараз қилайлик, $\sup\{f(x)\} = b$ бўлсин. У ҳолда аниқ юқори чегара хоссасига кўра

1°. $\forall x \in X$ учун $f(x) \leq b$.

2°. $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in X, f(x') > b - \varepsilon$

муносабатлар ўринли бўлади.

Каралаётган функция ўсувчи бўлгани учун $x' < x$ ларда $f(x') < f(x)$ тенгсизлик ўринлидир. Энди $b - \varepsilon < f(x')$ ва $f(x) < b$ эканлигини эътиборга олсак

$$b - \varepsilon < f(x') < f(x) < b + \varepsilon$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Бу эса b сон $f(x)$ функциянинг лимити эканини ифодалайди.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган ва a нукта X нинг лимит нуктаси бўлсин.

13-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) қийматларида $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шarti бажарилади дейилади.

4-теорема (Коши теоремаси). $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун, бу функция a нуқтада Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли.

Мисоллар. 1. $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ функция учун $x=0$ нуқтада Коши шarti бажарилишини кўрсатинг. $\forall \varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. Бу $\varepsilon > 0$ га кўра δ ни $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб олинса, у ҳолда x нинг

$$0 < |x' - 0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |x'' - 0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' , x'' қийматлари учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$|f(x'') - f(x')| = |x'' \cos \frac{1}{x''} - x' \cos \frac{1}{x'}| \leq |x'' \cos \frac{1}{x''}| + |x' \cos \frac{1}{x'}| \leq \\ \leq |x''| + |x'| < \varepsilon.$$

Бу эса қаралаётган функция учун $x=0$ нуқтада Коши шarti бажарилишини кўрсатади.

2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функция учун $x=0$ нуқтада Коши шarti бажарилмаслигини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон учун $x=0$ нуқта атрофида $x' = \frac{1}{n\pi}$, $x'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ нуқталар оламиз. Бу нуқталар учун $|x' - x''| < \delta$, $|f(x'') - f(x')| = |\sin \frac{(4n+1)\pi}{2} - \sin n\pi| = 1$ экани равшан. Энди $0 < \varepsilon < 1$ лар учун

Коши шартининг бажарилмаслигини кўриш қийин эмас.

Ушбу параграф якунида келажакда кўп фойдаланиладиган айни пайтда муҳим бўлган иккита функция лимитини келтирамиз.

1. Ушбу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ тенгликни исботланг.

Равшанки, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} < x < 0$) ораликдан олинган ихтиёрый x ларда $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ тенгсизликлар ўринлидир.

Энди $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ тенгсизликларни $\sin x$ га бўлиб, $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ва ундан $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ бўлишини топамиз. Натижада

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

тенгсизликларга эга бўламиз.

Энди $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$ ва $0 < x < \frac{\pi}{2}$ да $\sin \frac{x}{2} < \sin \frac{x}{2}$ эканини эътиборга олсак,

$$1 - \cos x < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

муносабат ўринли бўлишини топамиз. Демак, ихтиёрый $0 < x < \frac{\pi}{2}$ да $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$ тенгсизликлар ўринли.

Энди $\forall \varepsilon > 0$ учун δ сифатида ε ва $\frac{\pi}{2}$ сонларининг кичиги олинса, аргумент x нинг $0 < x < \frac{\pi}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|\frac{\sin x}{x} - 1| < x < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса таърифга кўра

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

эканини билдиради.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функция учун $f(-x) = f(x)$ тенгликнинг бажарилишини, яъни $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг жуфт эканлигини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. 2-теоремага асосан $x=0$ нуктада $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг лимити мавжуд ва у 1 га тенг.

2. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e,$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

Биз $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ эканлигини кўрган эдик (қаралсин, 17- боб, 2- §).

Фараз қилайлик, $x > 1$ бўлсин. x нинг бутун қисмини n орқали белгиласак, у ҳолда $n \leq x < n+1$ бўлиб, бундан эса $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ тенгсизликларга эга бўламиз. Бу тенгсизликлардан

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (2)$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

ҳамда (2) тенгсизликлардан фойдаланиб чекли лимитга эга бўлган функция хоссаларига кўра (5° - хосса) $x \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) да

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

тенгликка эга бўламиз.

Энди $x < -1$ бўлсин. $x = -y$ белгилаш қиритсак, у ҳолда:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

бўлади.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

бўлади.

Н а т и ж а. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатан ҳам $\frac{1}{x} = y$ белгилаш натижасида

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

бўлиб, $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$ муносабатдан $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ келиб чиқади.

6- §. Функция лимитини ҳисоблашга оид мисоллар

Ушбу лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(10 \sin^2 x + \cos^2 x + \frac{x-1}{3x+2}\right)$$

Аввало

$$f_1(x) = 10 \sin^2 x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3 = \frac{x-1}{3x+2}$$

функцияларнинг $x \rightarrow 0$ да лимитларини топамиз.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (10 \sin^2 x) = 10 \left[\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \right]^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right]^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{3x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (3x+2)} = -\frac{1}{2}.$$

Энди, чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

Натижада:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(10 \sin^2 x + \cos^2 x + \frac{x-1}{3x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 10 \sin^2 x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{3x+2} = 0 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Ушбу $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ лимитни топинг.

Аввало $\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ функцияни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{(1+2x-9)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \\ &= \frac{2(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

Энди $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{x}+2}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{x}+2} = \frac{2(3+3)}{2+2} = 3.$$

Демак, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = 3$.

3. Ушбу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$, лимитни топинг.

Аввало $(1+x)^n$ ни Ньютон бинoми формуласи бўйича ёямиз:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + x^n.$$

У ҳолда

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n - 1}{x} = n + \frac{n(n-1)}{2!}x + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Энди берилган лимитни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[n + \frac{n(n-1)}{2!}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2 + \dots + x^{n-1} \right] = n.$$

Ушбу $[f(x)]^{g(x)}$ кўринишдаги функция даражали-кўрсаткичли функция дейилади.

Лимит ҳисоблашга оид қатор мисолларда даражали-кўрсаткичли функцияларнинг лимитини топишга оид қуйидаги қоидадан фойдаланилади:

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда берилган бўлиб, a нукта X тўпلامнинг лимит нуктаси бўлсин.

$$\text{Агар } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = b^c$$

бўлади.

4. Ушбу $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}}$ лимитни топинг.

$\left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}}$ ифоданинг кўринишини ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}} &= \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}} = \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}} = \\ &= \left(1 + \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}} = \\ &= \left(1 + \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{\sin a} \right)^{\frac{1}{(x-a)(x+a)} \cdot \frac{\sin a}{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{\sin a}} \end{aligned}$$

Энди даражали-кўрсаткичли функция лимити ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

теңликлардан фойдаланамиз. Натижада

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin a}{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{\sin a}}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{2} (x+a) \sin a} = e^{\frac{1}{2a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos \frac{x+a}{2}}}} = e^{\frac{1}{2a}}$$

ҳосил бўлади.

5. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sin x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функциянинг $x=0$ нуктада лимити мавжудлигини исботланг ва бу лимитни топинг.

Қаралаётган функциянинг $x=0$ нуктадаги бир томонли (ўнг ва чап) лимитларини толамиз:

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x^3 = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуктадаги ўнг ва чап лимитлари мавжуд бўлиб, улар ўзаро тенг (0 га тенг) экан. Бундан эса функциянинг $x=0$ да лимити мавжудлиги ва унинг ҳам 0 га тенглиги келиб чиқади.

ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1-§. Функция узлуксизлиги таърифлари

Бирор X ораликда $f(x)$ функцияни қарайлик. Бу ораликка тегишли бўлган x_0 нукта унинг лимит нуктаси бўлсин.

1-таъриф. Агар $x \rightarrow x_0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит $f(x_0)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

бўлса у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

функция $x_0 = 2$ нуктада узлуксизлигини кўрсатинг.

Биринчидан, $x \rightarrow 2$ да $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ функциянинг лимити мавжуд

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5} = 3,$$

иккинчидан, бу лимит берилган функциянинг $x_0 = 2$ нуктадаги қийматига тенг: $3 = f(2)$. Демак, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

2. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

функция, ихтиёрий $x_0 \in X = (-\infty, +\infty)$ нуктада узлуксиз бўлади, чунки

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x_0^2} = f(x_0).$$

$f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги қиймати $f(x_0)$ ўзгармас сон ҳамда $x \rightarrow x_0$ да $x - x_0 \rightarrow 0$ бўлишини эътиборга олиб (1) тенгликни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

кўринишда ёзамиз. Одатда $x - x_0$ айирма аргумент орттирмаси (x аргументнинг x_0 нуктадаги орттирмаси) дейилади:

$$\Delta x = x - x_0, \quad (2)$$

$f(x) - f(x_0)$ айирма эса функция орттирмаси (функциянинг x_0 нуктадаги орттирмаси) дейилади ва Δf ёки $\Delta f(x_0)$ каби белгиланади:

$$\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0). \quad (3)$$

(2) тенгликдан топамиз:

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Унда (3) тенглик ушбу

$$\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

кўринишга келади. Демак, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δf аргумент орттирмаси Δx га боғлиқ бўлар экан (76- чизма).

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, (1), (2) ва (3) муносабатлардан

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

келиб чиқади. Бу эса функция узлуксизлигини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкинлигини кўрсатади.

2- таъриф. Агар аргументнинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δx нолга интилганда $f(x)$ функциянинг унга мос орттирмаси Δf ҳам нолга интилса, яъни

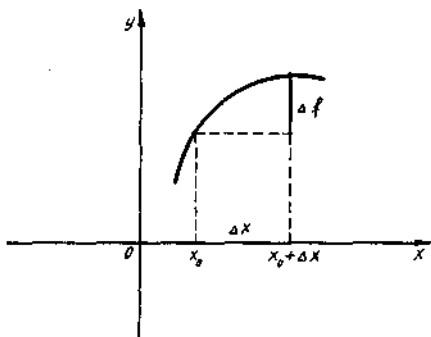
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ функцияни қарайлик. Бу функция $X = (-\infty, +\infty) \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ гўламда аниқланган.

Ихтиёрий $x_0 \in X$ нуктани олиб, унга Δx орттирма берамиз. Сўнг мос функция орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ &= \frac{1}{\sin(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{\sin x_0} = \\ &= \frac{\sin x_0 - \sin(x_0 + \Delta x)}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0} = \\ &= \frac{2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin(-\frac{\Delta x}{2})}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0}. \end{aligned}$$



76- чизма

$\Delta x \rightarrow 0$ да Δf нинг лимитини топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin(-\frac{\Delta x}{2})}{\sin(x_0 + \Delta x) \sin x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}{\sin(x_0 + \Delta x) \sin x_0} \cdot \\ &\quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(-\frac{\Delta x}{2}) = \frac{2\cos x_0}{\sin^2 x_0} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Демак, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$. 2- таърифга кўра берилган функция ихтиёрий $x_0 \in X$ да узлуксиз бўлади.

Функция узлуксизлигини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

3-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Юкорида келтирилган таърифлар эквивалент таърифлар бўлиб, вазиятга қараб у ёки бу таърифдан фойдаланилади. Масалан, ушбу

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

($a_0, a_1, \dots, a_n$ — ўзгармаъ сонлар, n — натурал сон) функциянинг ихтиёрий $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ да узлуксиз бўлишини кўрсатишда 1-таърифдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = \\ &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0). \end{aligned}$$

Демак, берилган $f(x)$ функция ихтиёрий $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ нуқтада узлуксиз.

4-таъриф. Агар $x \rightarrow x_0 + 0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит $f(x_0)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз дейилади.

5-таъриф. Агар $x \rightarrow x_0 - 0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит $f(x_0)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада чапдан узлуксиз дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & \text{агар } x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Бу функция $X = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Берилган функциянинг $x=2$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \rightarrow 2 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 - 0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 2 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 + 0} x = 2.$$

Агар $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 = -2$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2), \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 2 \neq f(2)$$

эканлигини топамиз. Демак, берилган функция $x=2$ нуктада чапдан узлуксиз, ўнгдан узлуксиз эмас.

6-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир нуктасида узлуксиз бўлса, у ҳолда функция X тўпламда узлуксиз дейилади.

Масалан, $f(x) = x^2$ функция $(0, 1)$ интервалнинг ҳар бир нуктасида узлуксиз. Демак, бу функция $(0, 1)$ да узлуксиз.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлиб, (a, b) интервалда узлуксиз, a нуктада ўнгдан, b нуктада эса чапдан узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлади.

Юқоридаги айтилганлардан қуйидаги хулоса келиб чиқади: агар $f(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу нуктада ҳам ўнгдан, ҳам чапдан узлуксиз бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Аксинча, агар $f(x)$ функция x_0 нуктада бир вақтда ҳам ўнгдан, ҳам чапдан узлуксиз бўлса, функция шу нуктада узлуксиз бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2-§. Функциянинг узилиши

Биз 1-§ да кўрдикки, $f(x)$ функциянинг x_0 нуктада узлуксиз бўлиши учун:

1°. унинг шу x_0 нуктанинг бирор атрофида (жумладан x_0 нуктада) аниқланган бўлиши ва

2°. $x \rightarrow x_0$ да ўнг ва чап лимитларга эга бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

бўлиши зарур ва етарли.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада 1°- ва 2°-шартлардан ҳеч бўлмаганда бирини бажармаса, у ҳолда функция x_0 нуктада узилишга эга дейилади. Мисоллар қараймиз.

1. Ушбу $y = f(x) = \frac{1}{x}$ функция учун $x=0$ нуктада юқоридаги

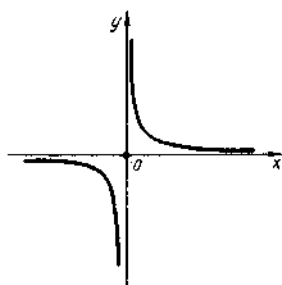
1°-шарт бажарилмайди. Чунки бу функция $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ тўпламда аниқланган, $x=0$ нукта шу тўпламнинг лимит нуктаси ва $x=0 \notin X$. Бинобарин, берилган функция $x=0$ нуктада узилишга эга (77-чизма).

2. Қуйидаги

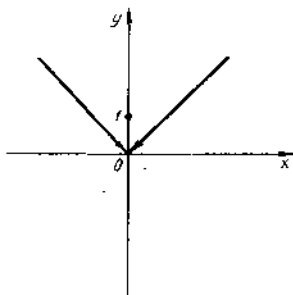
$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни карайлик. Бу функция $X(-\infty, +\infty)$ тўпламда аниқланган, $x=0$ нукта шу тўпламнинг лимит нуктаси. Функциянинг ўнг ва чап лимитлари

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |x| = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| = 0.$$



77- чизма



78- чизма

бўлиб, улар $f(x)$ функциянинг $x=0$ нуктадаги қиймати: $f(0)=1$ га тенг эмас. Демак, бу функция учун $x=0$ нуктада 2°- шарт бажарилмайди. Берилган функция $x=0$ нуктада узилишга эга (78- чизма).

3. Ушбу

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни карайлик. Бу функция $X = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Унинг $x=0$ нуктадаги ўнг ва чап лимитларини топамиз:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-1) = -1.$$

Берилган функциянинг $x=0$ нуктадаги ўнг ва чап лимитлари бир бирига тенг эмас. Демак, бу функция учун $x=0$ нуктада 2°- шарт бажарилмайди. Берилган функция $x=0$ нуктада узилишга эга (79- чизма).

4. Қуйидаги

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

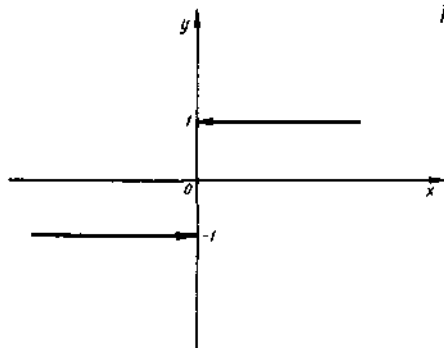
функцияни карайлик. Бу функциянинг $x=0$ нуктада ўнг limiti мавжуд эмас, чунки $x>0$ ва $x\rightarrow 0$ да $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функция лимитга эга эмас. Функциянинг шу нуктадаги чап limiti

$$\lim_{\substack{x\rightarrow 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\rightarrow 0 \\ x<0}} (-x) = 0$$

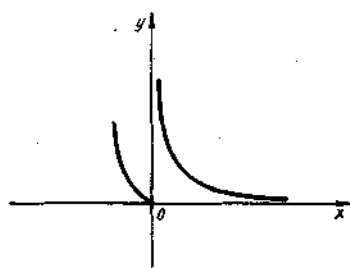
бўлади. Бу функция учун ҳам $x=0$ нуктада 2°- шарт бажарилмайди. Демак, берилган функция $x=0$ нуктада узилишга эга.

5. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$



79- чизма



80- чизма

функцияни карайлик. Бу функциянинг $x=0$ нуктадаги ўнг limiti

$$\lim_{\substack{x\rightarrow 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\rightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

бўлиб, чап limiti эса

$$\lim_{\substack{x\rightarrow 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\rightarrow 0 \\ x<0}} x^2 = 0$$

бўлади. Бу функция учун ҳам $x=0$ нуктада 2°- шарт бажарилмайди. Бинобарин, берилган функция $x=0$ нуктада узилишга эга бўлади (80- чизма).

$f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ўнг ва чап лимитлари мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x\rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\rightarrow x_0-0} f(x)$$

бўлган ҳолдаги x_0 нуктадаги узилиши биринчи тур узилиш дейилади. Бу ҳолда

$$\lim_{x\rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x\rightarrow x_0-0} f(x)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги сакраши дейлади. Масалан, 3- мисолда келтирилган $\operatorname{sgn} x$ функция $x=0$ нуктада биринчи тур узилишга эга бўлиб, унинг шу нуктадаги сакраши 2 га тенг бўлади.

$f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги бошқа узилишлари ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$ холдан ташқари) иккинчи тур узилиш дейлади.

Масалан, 4- ва 5- мисолларда келтирилган функцияларнинг $x=0$ нуктадаги узилиши иккинчи тур узилиш бўлади.

3- §. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Узлуксиз функциялар қатор хоссаларга эга. Қуйида биз баъзи бир хоссаларни исботи билан, баъзи бир хоссаларни эса исботсиз келтирамиз.

1°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X ($X \subset R$) тўпلامда узлуксиз бўлса,

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар ҳам X да узлуксиз бўлади.

И с б о т. Ихтиёрий $x_0 \in X$ нуктани олайлик. Шартга кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуктада узлуксиз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Чекли лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги хоссалардан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Кейинги тенгликлардан эса $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\frac{f(x)}{g(x)}$ функцияларнинг x_0 нуктада узлуксизлиги келиб чиқади.

2°. $x = \varphi(t)$ функция $T \subset R$ тўпلامда, $y = f(x)$ функция эса $X = \{x: x = \varphi(t), t \in T\}$ тўпلامда берилган бўлиб, улар ёрдамида

$$y = f(\varphi(t))$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $x = \varphi(t)$ функция $t_0 \in T$ нуктада, $y = f(x)$ функция мос x_0

нуктада ($x_0 = \varphi(t_0)$) узлуксиз бўлса, у ҳолда $y = f(\varphi(t))$ мураккаб функция t_0 нуктада узлуксиз бўлади.

И с б о т. Функция узлуксизлиги таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики,

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad (4)$$

шунингдек, юқоридаги $\delta_1 > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики,

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_1 \quad (5)$$

бўлади.

Агар

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= |x - x_0|, \\ |f(x) - f(x_0)| &= |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| \end{aligned}$$

эканини эътиборга олсак, унда (4) ва (5) муносабатлардан

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса $f(\varphi(t))$ мураккаб функциянинг t_0 нуктада узлуксизлигини билдиради.

3°. Агар $y = f(x)$ функция X ораликда аниқланган, узлуксиз ҳамда монотон бўлса, у ҳолда бу функция кийматларидан иборат $Y (Y = \{f(x) : x \in X\})$ ораликда тескари $x = f^{-1}(y)$ функция мавжуд ва у ҳам узлуксиз бўлади.

4°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг a ва b нукталардаги кийматлари $f(a)$ ва $f(b)$ карама-қарши ишорали бўлса, у ҳолда шундай c нукта ($a < c < b$) топиладики,

$$f(c) = 0$$

бўлади (Больцано — Коши теоремаси).

И с б о т. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ бўлсин. Агар $[a, b]$ сегментнинг $\frac{a+b}{2}$ нуктасида

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ бўлса, унда $c = \frac{a+b}{2}$ дейилса, $f(c) = 0$ бўлади. Бу ҳолда хосса исбот бўлади. Агар $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ бўлса, унда $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ва

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментларнинг четки нукталарида $f(x)$ функциянинг карама-қарши ишорали кийматга эга бўладиганини олиб, уни $[a_1, b_1]$ билан белгилаймиз. Демак, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ ва $[a_1, b_1]$ нинг

узунлиги $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ бўлади. Агар $[a_1, b_1]$ сегментнинг $\frac{a_1+b_1}{2}$

нуктасида $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ бўлса, унда $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ дейилса, $f(c) =$

$= 0$ бўлади. Бу ҳолда хосса исбот бўлади. Агар $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$

бўлса, унда $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2} \right]$ ва $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1 \right]$ сегментларнинг четки нукталарида $f(x)$ функциянинг карама-карши ишорали кийматга эга бўладиганини олиб, уни $[a_2, b_2]$ билан белгилаймиз. Демак, $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$ ва $[a_2, b_2]$ нинг узунлиги $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$ бўлади.

Бу жараёни давом эттирсак, куйидаги икки ҳолдан бири юз беради:

1) $[a, b]$ сегментнинг $c = \frac{a_n+b_n}{2}$ нуктасида

$$f(c) = f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$$

бўлади, демак хосса исбот бўлади.

2) $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \neq 0$ бўлиб, бу жараён чексиз давом этади. Бу ҳолда

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Равшанки,

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots, b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots, \\ f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

$\{a_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юкоридан чегараланган, $\{b_n\}$ кетма-кетлик эса камаювчи ва куйидан чегаралангандир. Унда 17-боб, 2-§ да келтирилган теоремаларга кўра бу кетма-кетликлар чекли лимитга эга:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_1, \quad (c_1 \in (a, b)),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_2 \quad (c_2 \in (a, b)).$$

Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_2 - c_1$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $c_1 = c_2$ экани келиб чиқади. $c_1 = c_2 = c$ деб олайлик.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлишидан фойдаланиб, топамиз:

$$a_n \rightarrow c \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(c).$$

$f(a_n) < 0$ бўлганлигидан $f(c) \leq 0$ бўлади,

$$b_n \rightarrow c \Rightarrow f(b_n) \rightarrow f(c).$$

$f(b_n) > 0$ бўлганлигидан $f(c) \geq 0$ бўлади. Кейинги тенгсизликлардан эса

$$f(c) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Хосса исбот бўлди.

Келтирилган хоссадан тенгламаларнинг ечими мавжудлигини кўрсатишда ва уларнинг тақрибий ечимини топишда фойдаланилади. Масалан,

$$1 - x + \sin x = 0$$

тенгламани қарайлик. Агар $f(x) = 1 - x + \sin x$ деб олинса, унда $f(x)$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ да, жумладан $[0, \pi]$ сегментда узлуксиз эканини пайкаш кийин эмас. $f(x)$ функция $[0, \pi]$ сегментнинг четки нукталарида қарама-қарши ишорали

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - 0 + \sin 0 = 1 > 0, \\ f(\pi) &= 1 - \pi + \sin \pi = -\pi + 1 < 0 \end{aligned}$$

кийматларга эга. Унда юқоридаги 4°-хоссага кўра $f(x)$ функция $[0, \pi]$ ораликнинг ҳеч бўлмаганда битта нуктасида нолга айланади, яъни берилган тенгламанинг $[0, \pi]$ ораликда ечими мавжуд. $[0, \pi]$ ни $[0, \frac{\pi}{2}]$ ва $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ сегментларга ажратиб, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ нинг четки нукталарида

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} > 0, \\ f(\pi) &= -\pi + 1 < 0 \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган тенгламанинг ечимларидан камида биттаси $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ да ётади. Бу жараённи давом эттириш натижасида $1 - x + \sin x = 0$ тенгламанинг тақрибий ечимини керакли аниқликда топиш мумкин.

5°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда чегараланган, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топиладики, $\forall x \in [a, b]$ да

$$m \leq f(x) \leq M$$

бўлади (Вейерштрасс теоремаси).

6°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда ўзининг энг катта ҳамда энг кичик қийматига эришади, яъни $[a, b]$ да шундай c_1 ва c_2 нукталар топиладики, $\forall x \in [a, b]$ да

$$f(c_1) \geq f(x), \quad f(c_2) \leq f(x)$$

бўлади (Вейерштрасс теоремаси).

$y=f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин.

7-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, X тўпламнинг $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' нуқталарида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз дейилади.

Масалан, $y=x^3$ функция $[0, 1]$ да текис узлуксиз функция бўлади.

$y=\frac{1}{x}$ функция $(0, 1)$ да текис узлуксиз бўлмайди.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда текис узлуксиз бўлади (Кантор теоремаси).

4-§. Элементар функцияларнинг узлуксизлиги

Биз мазкур параграфда элементар функцияларнинг узлуксизлиги масаласи билан шуғулланамиз. Бу масалаларнинг кўпчилигини ҳал этишда функция узлуксизлиги таърифи ҳамда чекли лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллардан фойдаланилади.

1. Д а р а ж а л и ф у н к ц и я $y=x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Биз чекли лимитга эга бўлган функция хоссаларини ўрганишда $f(x)$ функциянинг a нуқтада чекли лимитга эга бўлишидан $[f(x)]^n$ функциянинг ҳам чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

тенглик ўринли бўлишини кўрган эдик. Бу тенгликдан фойдаланиб $f(x)=x^n$ функциянинг $\forall a \in \mathbb{R}$ нуқтада узлуксизлигини исботлаймиз. Аввало $f_1(x)=x$ функциянинг $\forall a \in \mathbb{R}$ нуқтада узлуксизлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $\forall \varepsilon > 0$ учун $\delta = \varepsilon$ деб олинса, $|x-a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $|f_1(x) - f_1(a)| = |x-a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса таърифга кўра $f_1(x)=x$ функциянинг a нуқтада узлуксизлигини билдиради. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Энди $f(x)=x^n$ функцияни қарайлик.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = [\lim_{x \rightarrow a} x]^n = a^n$$

тенгликни эътиборга олиб

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

эканлигини топамиз. Бу эса $f(x)=x^n$ функциянинг $\forall a \in \mathbb{R}$ нуқтада узлуксизлигини билдиради.

2. $f(x) = \sin x$ функция $\forall a \in R$ нуктада узлуксиз.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\delta = \varepsilon$ деб олсак, $|x - a| < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи барча x ларда

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} = |x-a| < \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса $f(x) = \sin x$ функциянинг таърифга кўра $\forall a \in R$ нуктада узлуксизлигини билдиради.

3. $f(x) = \cos x$ функция $\forall a \in R$ да узлуксиз.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ эканини эътиборга ол-

сак, мураккаб функция узлуксизлиги ҳақидаги теоремага асосан $\cos x$ функциянинг $\forall a \in R$ да узлуксизлиги келиб чиқади.

4. $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ функция $\forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \dots$) нук-

тада узлуксиз.

$f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ функция эса $\forall a \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нукта-

да узлуксиз.

Бу хоссаларнинг ўринлилиги $\sin x$, $\cos x$ функцияларнинг узлуксизлиги ва узлуксиз функциялар устидаги арифметик амаллардан бевосита келиб чиқади.

5. $f(x) = a^x$ ($a \neq 1$) кўрсаткичли функция $\forall x_0 \in R$ нуктада узлуксиз.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} x} = a^{x_0}$$

эканини эътиборга олсак, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ тенгликка эга бўламиз.

Бу эса a^x функциянинг $\forall x_0 \in R$ нуктада узлуксизлигини билдиради.

Биз куйида узлуксиз функцияларни ўрганишда муҳим ўрин тутган тескари функциянинг мавжудлиги ва узлуксизлиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. Агар $f(x)$ функция X оралиқда берилган ва узлуксиз ва ўсувчи (камаювчи) бўлса, бу функция қийматларидан иборат $Y = \{f(x) : x \in X\}$ оралиқда тескари $f^{-1}(y)$ функция мавжуд бўлиб, у узлуксиз ва ўсувчи (камаювчи) бўлади.

6. Логарифмик функция.

Бизга $[c, d]$ сегментда $y = a^x$ ($a > 1$) кўрсаткичли функция берилган бўлсин. Бу функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз ва ўсувчидир. Юқорида қайд этилган теоремага кўра $[a', a'']$ оралиқда $y = a^x$ функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция мавжуд бўлиб, у узлуксиз ва ўсувчи бўлади. Бу тескари функция логарифмик функция дейилиб, у

$$x = f^{-1}(y) = \log_a y$$

каби белгиланади. Аргументни x билан белгилаш оркали логарифмик функция

$$y = \log_a x$$

кўринишда ёзилади.

Эслатма: $0 < a < 1$ бўлган ҳол ҳам худди юқоридагига ўхшаш қаралади.

7. $y = x^a (x > 0, a \in \mathbb{R})$ даражали функция. Бу функцияни

$$y = x^a = a^{(\log_a x) \cdot a} = a^{\log_a x}$$

кўринишда ифодалаймиз.

Мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага асосан

$$y = a^{\log_a x}$$

функция $x > 0$ да узлуксиз бўлади.

8. Тескари тригонометрик функциялар.

$y = \arcsin x$ функцияни аниқлаш ва узлуксизлигини кўрсатиш учун $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ораликда $y = \sin x$ функцияни қараймиз. Бу

функция қаралаётган ораликда ўсувчи ва узлуксиз экани равшан. Демак, бу функцияга унинг қийматлар тўплами $[-1, 1]$ ораликда тескари функция мавжуд бўлиб, у ўсувчи ҳамда узлуксиз бўлади. Бу тескари функция

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y$$

оркали белгиланади. y ни x оркали белгилаш натижасида бу функция $y = \arcsin x$ кўринишда ифодаланади.

Худди юқоридаги мулоҳазалар ёрдамида $[-1, 1]$ ораликда $y = \arccos x$ функция $x = \cos y$ функцияга тескари функция сифатида аниқланиб, у ҳам узлуксиз бўлади. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ функциялар мос равишда $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ва $(0, \pi)$ ораликда $x = \operatorname{tg} y$, $x = \operatorname{ctg} y$ функцияларга тескари функция сифатида аниқланади ва узлуксиз бўлади.

5-§. Функциялар лимитини ҳисоблашда уларнинг узлуксизлигидан фойдаланиш

Фараз қилайлик, $x = \varphi(t)$ функция T тўпلامда, $y = f(x)$ функция эса $X = \{x: x = \varphi(t), t \in T\}$ тўпلامда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида

$$y = f(\varphi(t))$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0$$

лимит мавжуд бўлиб, $y=f(x)=f(\varphi(t))$ функция x_0 нуктада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$$

бўлади. Кейинги лимит муносабатни

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t)\right) \quad (6)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу тенгликдан функцияларнинг лимитини ҳисоблашда фойдаланилади.

Энди мисоллар қараймиз.

1. Ушбу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) лимитни ҳисобланг.

Аввало лимит остидаги функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Логарифмик функция узлуксиз бўлганлиги сабабли (6) формулага биноан:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right].$$

Агар $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \text{ бўлишини топамиз.}$$

Хусусан, $a=e$ бўлса, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ бўлади.

2. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

лимитни ҳисобланг.

Аввало $a^x - 1 = t$ деб оламиз. Унда $x = \log_a(1+t)$ бўлади. Равшанки, $x \rightarrow 0$ да $t \rightarrow 0$. Натижада

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)}$$

тенгликка келамиз. Юқоридagi тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e}.$$

Маълумки, $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$. Демак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ бўлади.

3. Ушбу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}$ лимитни ҳисобланг.

Агар $(1+x)^a - 1 = t$ деб олсак, унда $(1+x)^a = 1+t$ ва

$$(1+x)^a = 1+t \Rightarrow a \cdot \ln(1+x) = \ln(1+t) \Rightarrow a = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$$

бўлиб, $x \rightarrow 0$ да $t \rightarrow 0$ бўлади.

Энди лимит остидаги функцияни қуйидагича эзиб оламиз:

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{t}{x} = a \cdot \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+t)} \cdot \frac{t}{x} = a \cdot \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

Натижада

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (t \rightarrow 0)}} a \cdot \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = a \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} = a.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

4. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда берилган бўлиб, x_0 эса X тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин. Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ ($b > 0$),

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = b^c$ бўлишини исботланг.

Логарифмнинг хоссаларига кўра:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Логарифмик ҳамда кўрсаткичли функцияларнинг узлуксизлигини эътиборга олиб, толамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)} = e^{c \cdot \ln b} = \\ &= e^{\ln b^c} = b^c. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = b^c.$$

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1-§. Функция ҳосиласининг таърифлари

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, x_0 шу интервалнинг бирор нуктаси бўлсин. Бу x_0 нуктага Δx орттирма ($\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$) бериб, берилган функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Равшанки, функция орттирмаси Δx га боғлиқ бўлади.

1-таъриф. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва

$$f'(x_0) \text{ ёки } \frac{df(x_0)}{dx} \text{ ёки } y'|_{x=x_0}$$

каби белгиланади.

Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Агар $x_0 + \Delta x = x$ деб олинса, унда $\Delta x = x - x_0$ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $x \rightarrow x_0$ бўлиб,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

бўлади. Бу ҳол функция ҳосиласини $x \rightarrow x_0$ да

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

нисбатнинг лимити сифатида ҳам таърифлаш мумкинлигини кўрсатади.

1-мисол. Ушбу $f(x) = x^2$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Берилган функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Унинг $x_0 = 1$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2$$

га тенг. Унда

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Демак, берилган функциянинг $x_0 = 1$ нуктадаги ҳосиласи 2 га тенг:

$$f'(1) = 2.$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

функциянинг ихтиёрий x нуктадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг x нуктадаги орттирмаси

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

бўлади.

Кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Демак, берилган функциянинг x нуктадаги ($x \neq 0$) ҳосиласи

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

бўлар экан.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $x = 0$ нуктада ҳосилага эга бўладими?

Бу функция учун

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

бўлиб, $x \rightarrow 0$ да

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

нинг лимити мавжуд эмас. Демак, берилган функция $x=0$ нуктада ҳосилата эга эмас.

2-таъриф. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x > 0)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ўнг ҳосиласи дейилади ва $f'(x_0+0)$ каби белгиланади. Демак,

$$f'(x_0+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x < 0)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги чап ҳосиласи дейилади ва $f'(x_0-0)$ каби белгиланади. Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0-0).$$

Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари бир томонли ҳосилалар дейилади.

4-мисол. Ушбу $f(x) = |x-1|$ функциянинг $x=1$ нуктадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Берилган функциянинг $x=1$ нуктадаги орттирмаси

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = |1 + \Delta x - 1| - |1 - 1| = |\Delta x|.$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(-\Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

Демак, $f(x) = |x-1|$ функциянинг $x=1$ нуктадаги ўнг ҳосиласи

$$f'(1+0) = 1,$$

чап ҳосиласи

$$f'(1-0) = -1.$$

Бу мисолда келтирилган функция учун $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити мавжуд эмас. Бинобарин, $f(x) = |x-1|$ функция

$x=1$ нуктада ҳосилага эга эмас. Келтирилган мисолдан кўринадики, функциянинг бирор нуктада бир томонли ҳосилаларининг мавжудлигидан унинг шу нуктада ҳосиласининг мавжудлиги ҳар доим келиб чиқавермас экан.

Функциянинг ҳосиласи, функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари таърифларидан бевосита қуйидаги тасдиқлар келиб чиқади.

1°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция шу нуктада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳосилага ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилага эга бўлиб,

$$f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = f'(x_0)$$

бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада ўнг $f'(x_0+0)$ ва чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$$

бўлса, функция шу нуктада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва

$$f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$$

бўлади.

1-э с л а т м а. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \text{ ёки } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$$

бўлса, уни ҳам $f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ҳосиласи деб қаралади. Одатда бундай ҳосила *чексиз ҳосила* дейилади.

Энди функциянинг узлуксиз бўлиши билан унинг ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланишни ифодаловчи содда теоремани келтирамиз.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функция шу x_0 нуктада узлуксиз бўлади.

Исбот. Берилган $f(x)$ функция x_0 нуктада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

бўлади. Мазкур курснинг 18-боб, 3-§ да келтирилган тасдиқдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x).$$

Бунда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. Кейинги тенгликдан

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (3)$$

бўлиши келиб чиқади. (Одатда (3) ифодага *функция орттирмасининг формуласи* дейилади.)

(3) тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x] = 0$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x_0 нуктада узлуксиз эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2-э с л а т м а. Функциянинг бирор нуктада узлуксиз бўлишидан унинг шу нуктада ҳосиллага эга бўлиши ҳар доим келиб чиқмайди. Масалан, юқорида келтирилган $f(x) = |x - 1|$ функция $x = 1$ нуктада узлуксиз бўлса ҳам у шу нуктада ҳосиллага эга эмас.

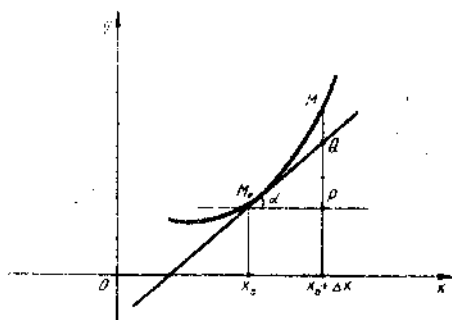
2- §. Функция ҳосиласининг геометрик маънолари ҳамда механик маънолари

1°. Ҳосиланинг геометрик маъноси. $y = f(x)$ функция (a, b) да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, x_0 нуктада ($x_0 \in (a, b)$) $f'(x_0)$ ҳосиллага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Фараз қилайлик берилган $y = f(x)$ функциянинг графиги 81-чизмада тасвирланган Γ чизикни ифодаласин. Бу эгри чизикка унинг $M_0(x_0, f(x_0))$ нуктада ўтказилган уринмани топиш масаласини қараймиз. Рағбатинки, уринма тўғри чизикдан иборат бўлиб, унинг тенгламасини топиш учун M_0 нуктанинг координаталарини билишдан ташқари яна шу тўғри чизикнинг бурчак коэффициентини ҳам билиш керак бўлади.

x_0 нуктага Δx орттирма бериб, $x_0 + \Delta x$ нуктани ($x_0 + \Delta x \in (a, b)$) қараймиз. Сўнг эгри чизикнинг $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ ҳамда $M_0(x_0, f(x_0))$ нукталари орқали M_0M кесувчи ўтказамиз. Кесувчининг Ox ўқи билан ташкил этган бурчагини φ билан белгилаймиз. Бу φ бурчак Δx га боғлиқ бўлади: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. M_0M кесувчининг M нукта Γ чи



81-чизма

зик бўйлаб M_0 га интилганда (яъни $\Delta x \rightarrow 0$ да) лимит ҳолатини ифодаловчи тўғри чизик Γ чизикка M_0 нуктада ўтказилган уринма бўлади. Бунда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\varphi = \varphi(\Delta x)$ нинг лимити аниқлаётган уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчакни аниқлайди:

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x).$$

Шу бурчакнинг тангенс эса уринманинг бурчак коэффициенти бўлади: $\operatorname{tg} \alpha = h$.

ΔMM_0P дан:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ундан эса

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \operatorname{arctg} f'(x_0). \end{aligned}$$

Демак,

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Бу тенгликдан эса

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ геометрик нуктаи-назардан M_0 нуктадаги уринманинг бурчак коэффициентини ифодалар экан.

Бу уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишда бўлади. Бунда x ва y уринманинг ўзгáрувчи нукта координаталаридир.

2°. Ҳосиланинг механик маъноси. Моддий нуктанинг ҳаракати $s = f(t)$ коида билан аниқланган бўлсин, бунда t — вақт, s — ўтилган йўл. Вақтнинг t_0 ва $t_0 + \Delta t$ кийматларида ($\Delta t > 0$) $s = f(t)$ функция кийматлари $f(t_0)$ ва $f(t_0 + \Delta t)$ нинг айирмаси $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ ва Δt вақт оралиғида ўтилган Δs йўлни аниқлайди:

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Демак, Δt вақт ичида моддий нукта Δs йўлни ўтади. Унда

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбат моддий нукта ҳаракатининг ўртача тезлигини

билдиради. $\Delta t \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нинг лимити моддий нуктанинг t_0 пайтдаги оний тезлигини ифодалайди:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$

Шундай қилиб, $s = f(t)$ функциянинг t_0 нуктадаги ҳосиласи механик нуктаи-назардан $s = f(t)$ коида билан ҳаракат қилаётган моддий нуктанинг t_0 пайтдаги оний тезлигини билдирар экан.

3-§. Элементар функцияларнинг ҳосилалари

Ушбу параграфда функция ҳосиласи таърифидан ҳамда 19-боб 5-§ да келтирилган лимитлардан фойдаланиб элементар функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

1°. $y = x^\mu (x > 0)$ даражали функциянинг ҳосиласи. Бу функция орттормаси $\Delta y = (x + \Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu \left[\left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right] =$

$$= x^\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right] \text{ бўлиб, } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right]}{\Delta x} =$$

$$= x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \text{ бўлади. Кейинги тенгликда } \Delta x \rightarrow 0 \text{ да лимитга}$$

ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1}.$$

Демак, $y = x^\mu$ даражали функциянинг ҳосиласи:

$$y' = \mu x^{\mu-1}.$$

Хусусан, $\mu = -1$ бўлганда $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ бўлиб, унинг ҳосиласи

$$y' = -x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2} \text{ бўлади.}$$

2°. $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи. Бу функциянинг орттормаси $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$ бўлиб, $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \text{ бўлади. Кейинги тенгликда } \Delta x \rightarrow 0 \text{ да лимитга}$$

ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Демак, $y = a^x$ кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи

$$y' = a^x \ln a.$$

Хусусан, $a = e$ бўлганда $y = e^x$ бўлиб, унинг ҳосиласи

$$y' = e^x \ln e = e^x$$

бўлади.

3°. $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ логарифмик функциянинг ҳосиласи. Бу функциянинг орттормаси

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}}$$

бўлади. Кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}} = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Демак, $y = \log_a x$ логарифмик функциянинг ҳосиласи:

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Хусусан, $a = e$ бўлганда $y = \ln x$ бўлиб, унинг ҳосиласи

$$y' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

бўлади.

4°. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. $y = \sin x$ функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Демак, $y = \sin x$ функциянинг ҳосиласи:

$$y' = \cos x.$$

$y = \cos x$ функциянинг ҳосиласи

$$y' = -\sin x$$

Қўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади.

Энди $y = \lg x$ функциясининг ҳосиласини топамиз. Бу функциянинг орттирмаси

$$\begin{aligned}\Delta y &= \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \frac{\sin(x + \Delta x) \cdot \cos x - \cos(x + \Delta x) \cdot \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}\end{aligned}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}.$$

Кейинги тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Демак, $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг ҳосиласи

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Худди шунга ўхшаш $y = \operatorname{ctg} x$ функциянинг ҳосиласи

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

бўлиши кўрсатилади.

5°. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. Аввало берилган функцияга нисбатан тескари функциянинг ҳосиласини аниқлайдиган тасдиқни исботсиз келтирамиз.

Айтайлик, $y = f(x)$ функция (a, b) да аниқланган бўлиб, у 19-боб 4-§ да келтирилган тескари функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теореманинг барча шартларини қаноатлантирсин. Агар $y = f(x)$ функция x нуктада ($x \in (a, b)$) $f'(x) \neq 0$ ҳосилага эга бўлса, бу функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция y нуктада ($y = f(x)$) ҳосилага эга бўлиб,

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \quad (4)$$

бўлади. Энди $y = \arcsin x$ функциянинг ҳосиласини юқорида келтирилган қоидадан фойдаланиб топамиз.

Равшанки, $y = \arcsin x$ функция $x = \sin y$ функцияга тескари функциядир. Унда (4) формулага кўра

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

Маълумки,

$$(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Демак, $y = \arcsin x$ функциянинг ҳосиласи

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Худди шунга ўхшаш

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctg x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \operatorname{arccctg} x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Параграф сўнгида элементар функциялар ҳосилалари учун топилган формулаларни жамлаб куйндаги жадвални келтираимиз:

1°. $y = x^\mu (x > 0)$ бўлса, $y' = \mu x^{\mu-1}$ бўлади.

2°. $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ бўлса, $y' = a^x \ln a$ бўлади.

3°. $y = \log_a x (a > 0, x > 0, a \neq 1)$, бўлса $y' = \frac{1}{x} \log_a e$ бўлади.

4°. $y = \sin x$ бўлса, $y' = \cos x$ бўлади.

5°. $y = \cos x$ бўлса, $y' = -\sin x$ бўлади.

6°. $y = \operatorname{tg} x$ бўлса, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ бўлади.

7°. $y = \operatorname{ctg} x$ бўлса, $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ бўлади.

8°. $y = \arcsin x$ бўлса, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлади.

9°. $y = \arccos x$ бўлса, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлади.

10°. $y = \arctg x$ бўлса, $y' = \frac{1}{1+x^2}$ бўлади.

11°. $y = \operatorname{arccctg} x$ бўлса, $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ бўлади.

4- §. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ҳамда нисбатининг ҳосилаларини топиш қоидаларини келтираимиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$ ҳамда $\varphi(x)$ функциялар (a, b) интервалда берилган бўлиб, x нуктада ($x \in (a, b)$) $f'(x)$ ҳамда $\varphi'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x). \quad (5)$$

2-теорема. Берилган $f(x)$ ҳамда $\varphi(x)$ функциялар йиғиндиси, $f(x) + \varphi(x)$ функция, x нуқтада ҳосилага эга ва

$$(f(x) + \varphi(x))' = f'(x) + \varphi'(x)$$

Исбот. $f(x) + \varphi(x)$ функция орттирмаси $\Delta(f(x) + \varphi(x)) = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x) - (f(x) + \varphi(x)) = f(x + \Delta x) - f(x) + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta f(x) + \Delta \varphi(x)$ бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га бўлиб, сўнг $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x) + \varphi(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Юқоридаги (5) муносабатни эътиборга олиб

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x) + \varphi(x))}{\Delta x} = f'(x) + \varphi'(x)$$

тенгликка келамиз. Бундан эса $f(x) + \varphi(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжудлиги ҳамда

$$(f(x) + \varphi(x))' = f'(x) + \varphi'(x)$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш $f(x) - \varphi(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд ва

$$(f(x) - \varphi(x))' = f'(x) - \varphi'(x)$$

бўлиши кўрсатилади.

3-теорема. Берилган $f(x)$ ҳамда $\varphi(x)$ функциялар кўпайтмаси $f(x) \cdot \varphi(x)$ функция x нуқтада ҳосиллага эга ва

$$(f(x) \cdot \varphi(x))' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \varphi'(x).$$

бўлади.

Исбот. $f(x) \cdot \varphi(x)$ функция орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta(f(x) \cdot \varphi(x)) &= f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x) = \\ &= f(x + \Delta x) \varphi(x + \Delta x) - f(x) \varphi(x + \Delta x) + f(x) \varphi(x + \Delta x) - f(x) \varphi(x) = \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x) \cdot (\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)) = \\ &= \Delta f(x) \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x) \Delta \varphi(x). \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га бўлиб, сўнг $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x) \cdot \varphi(x))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \varphi(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

(5) муносабатни ҳамда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(x + \Delta x) = \varphi(x)$$

тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x) \cdot \varphi(x))}{\Delta x} = f'(x) \varphi(x) + f(x) \varphi'(x).$$

Бундан эса $f(x) \cdot \varphi(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжудлиги ҳамда

$$(f(x) \cdot \varphi(x))' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. Берилган $f(x)$ ҳамда $q(x)$ функциялар нисбати

$$\frac{f(x)}{q(x)} \quad (q(x) \neq 0)$$

функция x нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left(\frac{f(x)}{q(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot q(x) - f(x) \cdot q'(x)}{q^2(x)}$$

бўлади.

Исбот. $\frac{f(x)}{q(x)}$ функция орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{f(x)}{q(x)} \right) &= \frac{f(x+\Delta x)}{q(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{q(x)} = \frac{f(x+\Delta x)q(x) - f(x)q(x+\Delta x)}{q(x+\Delta x)q(x)} = \\ &= \frac{f(x+\Delta x)q(x) - f(x)q(x) + f(x)q(x) - f(x)q(x+\Delta x)}{q(x+\Delta x)q(x)} = \\ &= \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \cdot q(x) - f(x) \cdot (q(x+\Delta x) - q(x))}{q(x+\Delta x) \cdot q(x)} = \frac{\Delta f(x) \cdot q(x) - f(x) \cdot \Delta q(x)}{q(x+\Delta x) \cdot q(x)}. \end{aligned}$$

Бу тенглиkning ҳар икки томонини Δx га бўлиб, сўнг $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{f(x)}{q(x)} \right)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot q(x) - f(x) \cdot \frac{\Delta q(x)}{\Delta x}}{q(x+\Delta x) \cdot q(x)} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot q(x) - f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta q(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} q(x+\Delta x) \cdot q(x)}. \end{aligned}$$

Юқоридаги (5) муносабатини ҳамда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} q(x+\Delta x) = q(x)$$

тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{f(x)}{q(x)} \right)}{\Delta x} = \frac{f'(x)q(x) - f(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Бундан эса $\frac{f(x)}{q(x)}$ функциянинг ҳосиласи мавжудлиги ҳамда

$$\left(\frac{f(x)}{q(x)} \right)' = \frac{f'(x)q(x) - f(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Юқорида келтирилган теоремалар икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ҳамда нисбатининг ҳосилаларини топиш қодаларини ифодалайди. Бу қодалардан фойдаланиб функция ҳосилаларини топишга мисоллар келтирамыз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y = x^2 + x^3$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг ҳосиласини топишда 2-теоремадан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланамиз:

$$y' = (x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$$

2. Ушбу $y = x^2 \ln x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

3-теоремага кўра:

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)'.$$

Агар $(x^2)' = 2x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ эканлиги эътиборга олсак, унда $y' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$ бўлишини топамиз.

3. Ушбу $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

4-теоремадан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланамиз.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (1+x^2) - x^2 (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2x(1+x^2) - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Энди мураккаб функция ҳосиласини топиш қондасини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $u = \varphi(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = f(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, бу функциялар ёрдамида

$$y = f(\varphi(x)).$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

5-теорема. Агар $u = \varphi(x)$ функция x нуқтада ($x \in (a, b)$) $\varphi'(x)$ ҳосиллага эга бўлиб, $y = f(u)$ функция эса x нуқтага мос u ($u = \varphi(x)$) нуқтада $f'(u)$ ҳосиллага эга бўлса, $y = f(\varphi(x))$ мураккаб функция x нуқтада ҳосиллага эга ва

$$y' = (f(\varphi(x)))' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad (6)$$

бўлади.

Исбот. x ўзгарувчига Δx ($\Delta x \neq 0$) орттирма берамиз. Унда $u = \varphi(x)$ функция $\Delta u = \Delta \varphi(x)$ орттирмага, $y = f(u)$ функция эса ўз навбатида $\Delta y = \Delta f(u)$ орттирмага эга бўлади. Функция орттирмаси формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta \varphi(x) = \varphi'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \\ \Delta f(u) &= f'(u) \cdot \Delta u + \beta \cdot \Delta u, \end{aligned}$$

бунда $\Delta x \rightarrow 0$ да Δu ҳам нолга интилиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0$$

бўлади. Натижада мураккаб функция орттирмаси учун қуйидаги

$$\begin{aligned}\Delta f(\varphi(x)) &= f'(\varphi(x)) \cdot [\varphi'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x] + \beta \cdot \Delta \varphi(x) = \\ &= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot \Delta x + f'(\varphi(x)) \cdot \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta \varphi(x)\end{aligned}$$

тенгликка келамиз. Бу тенглиkning ҳар икки томонини Δx га бўлиб, сўнг $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varphi(x))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + f'(\varphi(x)) \cdot \alpha + \beta \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} \right] = \\ &= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + f'(\varphi(x)) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = f'(\varphi(x)) \varphi'(x).\end{aligned}$$

Демак,

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Бу теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $y = e^{-x}$ функциянинг ҳосиласини ҳисобланг. Бу функцияни $y = e^u$, $u = -x$ деб, сўнг (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y' = (e^{-x})' = (e^u)' \cdot u' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

2. Ушбу

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

функцияларнинг ҳосилаларини топинг. Бу функциялар ҳосилаларини топишда юқорида келтирилган қондалардан фойдаланамиз

$$y' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2} [(e^x)' - (e^{-x})'] = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$y' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2} [(e^x)' + (e^{-x})'] = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Одатда $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ функцияни *гиперболик синус функция* дейилади ва уни $\operatorname{sh} x$ каби белгиланади:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ функция эса *гиперболик косинус функция* дейилади ва $\operatorname{ch} x$ каби белгиланади:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Демак,

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

3. Ушбу $y = \cos(e^x - x^3)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

$y = \cos u$, $u = e^x - x^3$ деб белгилаб, (6) формуладан топамиз:

$$y' = (\cos u)' \cdot u' = -\sin(e^x - x^3) \cdot (e^x - 3x^2)$$

4. Ушбу $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг ҳосиласини топишда мураккаб функциянинг ҳосиласи ҳамда юқорида келтирилган кондалардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \sin(\cos x) \cdot \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) - 2 \cos(\sin x) \sin(\sin x) \cdot \cos x = \\ &= -\sin x \cdot \sin(2 \cos x) - \cos x \cdot \sin(2 \sin x). \end{aligned}$$

Энди мисол тарикасида

$$y = [f(x)]^{g(x)} \quad (f(x) > 0)$$

функциянинг ҳосиласини топамиз. Бунда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга. $y = [f(x)]^{g(x)}$ ни логарифмлаб топамиз:

$$\ln y = g(x) \ln[f(x)].$$

Энди мураккаб функциянинг ҳосиласи ва кўпайтманинг ҳосиласи формулаларидан фойдалансак, $\frac{1}{y} y' = g'(x) \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

бўлади. Бундан эса

$$y' = y \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right] = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right]$$

экаи келиб чиқади. Демак,

$$([f(x)]^{g(x)})' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right].$$

5-§. Функциянинг дифференциали

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлсин. Бу (a, b) да бирор x_0 нукта олиб, унга Δx орттирма ($x_0 + \Delta x \in (a, b)$) берамиз. Натижада функция $\Delta f(x_0)$ орттирма олади.

3-таъриф. Агар $\Delta f(x_0)$ ни қуйидагича

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи дейилади, бунда A — ўзгармас,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Масалан, $f(x) = x^2$ функция ихтиёрий $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, берилган функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2$ бўлиб, $2x_0 = A$, $\Delta x = \alpha(\Delta x)$ деб олинса, унда $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ бўлишини топамиз.

6-теорема. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ($x_0 \in (a, b)$) дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада $f'(x_0)$ ҳосиллага эга бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция x_0 нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га ($\Delta x \neq 0$) бўлиб, сўнг $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = A$$

Бу тенгликдан $f(x)$ функциянинг x_0 нуктада ҳосилага эга ва $f'(x_0) = A$ бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция x_0 нуктада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда функция орттирмаси формуласига кўра $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ бўлади.

Бу эса $f(x)$ функциянинг x_0 нуктада дифференциалланувчи бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Келтирилган теоремадан $f(x)$ функциянинг x нуктада дифференциалланувчи бўлиши билан унинг шу нуктада $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши тушунчалари эквивалент тушунчалар эканлиги келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Унда $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ бўлади.

Функция орттирмаси Δx га нисбатан чизикли бўлган $f'(x_0) \Delta x$ ҳамда $\alpha(\Delta x) \Delta x$ ҳадлар йиғиндисидан иборат бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ ҳад $f'(x_0) \Delta x$ ҳадга қараганда тезроқ нолга интилади. Шу сабабли $f'(x_0) \Delta x$ ҳад $f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ нинг бош қисми бўлади.

4 т а ъ р и ф. $f(x)$ функция орттирмаси $\Delta f(x_0)$ нинг чизикли бош қисми $f'(x_0) \Delta x$ берилган функциянинг x_0 нуктадаги дифференциали дейилади ва dy ёки $df(x_0)$ каби белгиланади:

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \Delta x. \quad (7)$$

Айтайлик, юқоридаги $y = f(x)$ функция графиги 81- чизмада тасвирланган эгри чизикни ифодаласин, бунда

$$M_0 = M_0(x_0, f(x_0)), \quad M = M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)).$$

Равшанки, $M_0P = \Delta x$, $MP = \Delta y = \Delta f(x_0)$ бўлади.

Эгри чизикка M_0 нуктада ўтказилган уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчаги α бўлса, у ҳолда ΔM_0QP дан $\frac{QP}{M_0P} = \operatorname{tg} \alpha$ бў-

лишини топамиз. Кейинги тенгликдан эса $QP = \operatorname{tg} \alpha \cdot M_0P = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$ келиб чиқади. Агар $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ бўлишини эътиборга олсак, унда $QP = f'(x_0) \Delta x$ тенгликка келамиз. Демак,

$$QP = df(x_0).$$

1. Чизик, геометрик нуктадан-назардан $f(x)$ функциянинг нуктадаги дифференциали шу функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуктада ўтказилган уринма орттирмаси QP ни ифодалашини кўрсатади.

Агар $f(x)=x$ бўлса, $f'(x)=1$ бўлади. Унда бир томондан (7) формулага кўра $df(x)=f'(x)\Delta x=\Delta x$, иккинчи томондан эса $df(x)=dx$ бўлиб, $\Delta x=dx$ бўлади. Натижада функция дифференциал учун $df(x)=f'(x)dx$ ифодани топамиз. Бу муносабатдан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб функцияларнинг дифференциаллари учун ушбу формулаларга келамиз:

$$1^\circ. y=x^\mu (x>0) \text{ бўлса, } dy=\mu x^{\mu-1} dx \text{ бўлади;}$$

$$2^\circ. y=a^x (a>0, a\neq 1) \text{ бўлса, } dy=a^x \ln a \, dx \text{ бўлади;}$$

$$3^\circ. y=\log_a x (x>0, a>0, a\neq 1) \text{ бўлса, } dy=\frac{1}{x} \log_a e \, dx \text{ бўлади;}$$

$$4^\circ. y=\sin x \text{ бўлса, } dy=\cos x \, dx \text{ бўлади;}$$

$$5^\circ. y=\cos x \text{ бўлса, } dy=-\sin x \, dx \text{ бўлади;}$$

$$6^\circ. y=\operatorname{tg} x \text{ бўлса, } dy=\frac{1}{\cos^2 x} dx \text{ бўлади;}$$

$$7^\circ. y=\operatorname{ctg} x \text{ бўлса, } dy=-\frac{1}{\sin^2 x} dx \text{ бўлади;}$$

$$8^\circ. y=\arcsin x \text{ бўлса, } dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ бўлади;}$$

$$9^\circ. y=\arccos x \text{ бўлса, } dy=-\frac{1}{1-x^2} dx \text{ бўлади;}$$

$$10^\circ. y=\operatorname{arctg} x \text{ бўлса, } dy=\frac{1}{1+x^2} dx \text{ бўлади;}$$

$$11^\circ. y=\operatorname{arcctg} x \text{ бўлса, } dy=-\frac{1}{1+x^2} dx \text{ бўлади;}$$

$$12^\circ. y=\operatorname{sh} x \text{ бўлса, } dy=\operatorname{ch} x \, dx \text{ бўлади;}$$

$$13^\circ. y=\operatorname{ch} x \text{ бўлса, } dy=\operatorname{sh} x \, dx \text{ бўлади.}$$

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, ҳамда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ($\varphi(x) \neq 0$) функциялар ҳам шу x нуктада дифференциалланувчи ва

$$d[f(x) \pm \varphi(x)] = df(x) \pm d\varphi(x),$$

$$d[f(x) \cdot \varphi(x)] = \varphi(x) df(x) + f(x) d\varphi(x),$$

$$d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] = \frac{\varphi(x) df(x) - f(x) d\varphi(x)}{\varphi^2(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0)$$

бўлади.

Бу тасдиқларнинг исботи ҳосилани ҳисоблашдаги содда қондалар ҳамда юқоридаги (7) формуладан бевосита келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу $y=x^3-3^x$ функциянинг дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциали куйидагича топилади:

$$\begin{aligned} dy &= d(x^3 - 3^x) = dx^3 - d3^x = (x^3)' dx - (3^x)' dx = \\ &= 3x^2 dx - 3^x \ln 3 dx = (3x^2 - 3^x \ln 3) dx. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$y = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{3}{x}$$

функциянинг дифференциални топинг:

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{3}{x}\right) = \left(\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{3}{x}\right)' dx = \\ &= \left[-\sin \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' + \cos \frac{3}{x} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)'\right] dx = -\left(\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{3}{x^2} \cos \frac{3}{x}\right) dx. \end{aligned}$$

Функциянинг дифференциалидан унинг кийматларини тақрибий ҳисоблашда фойдаланилади. Тақрибий ҳисоблаш формуласи куйидаги содда теоремадан келиб чиқади.

7-теорема. Агар $y=f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x) \neq 0$ ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

бўлади.

Исбот. $y=f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x) \neq 0$ ҳосиллага эга бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x, \\ dy &= f'(x) dx = f'(x) \Delta x, \end{aligned}$$

бунда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Бу тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x}{f'(x) \Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{f'(x)} \cdot \alpha(\Delta x)\right) = 1 + \frac{2}{f'(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 1. \end{aligned}$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теоремада аргумент орттирмаси Δx етарлича кичик бўлганда $\frac{\Delta y}{dy} \approx 1$ бўлиши келиб чиқади. Кейинги тақрибий формулани

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x \quad (8)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу формуладан функцияларнинг кийматларини тақрибий ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Ушбу $\sqrt[4]{17}$ микдорни тақрибий ҳисобланг.

Бу микдорни $f(x) = \sqrt[4]{x}$ функциянинг $x_1 = 17$ нуқтадаги киймати деб қараш мумкин. Агар $x_0 = 16$ деб олсак, унда $\Delta x = x_1 - x_0 = 1$ бўлиб, (8) формулага кўра $\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ бўлади.

Раъшанки,

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2,$$

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{32}$$

$$\text{Демак, } \sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2,031.$$

Параметрик кўринишда берилган функцияларни дифференциаллаш. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функциялар бирор (α, β) интервалда берилган бўлиб, бу ораликда $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ҳамда $x = \varphi(t)$ функцияга тескари $t = \varphi^{-1}(x)$ функция мавжуд бўлсин. У ҳолда $y = \psi(t)$ функция ўзгарувчи (параметр) $t = \varphi^{-1}(x)$ ёрдамида $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ кўринишга келади. Одатда функциянинг бу кўриниши унинг параметрик кўриниши дейилади ва $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ каби ифодаланади. Энди параметрик кўринишда берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$\text{Маълумки, } y'(x) = \frac{dy}{dx}. \text{ Энди } x = \varphi(t), y = \psi(t) \text{ бўлгани учун}$$

$$dy = \psi'(t)dt, dx = \varphi'(t)dt \text{ бўлиб, } y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ бўлади.}$$

6-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган ихтиёрий $x \in (a, b)$ нуктада $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f'(x)$ ҳам, умуман айтганда, x ўзгарувчининг функцияси бўлиб, унинг ҳосиласини караш мумкин.

$y = f(x)$ функция ҳосиласи $f'(x)$ нинг ҳосиласи берилган $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва

$$y'', \text{ ёки } f''(x), \text{ ёки } \frac{d^2 f}{dx^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

$y = f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилалари худди юқоридагидек киритилади.

Умуман, $y = f(x)$ функция $(n-1)$ -тартибли ҳосиласи $f^{(n-1)}(x)$ нинг ҳосиласи берилган $f(x)$ функциянинг n -тартибли ҳосиласи дейилади. Демак,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad \left(\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) \right).$$

$y = f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, ... ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейилади.

Функциянинг юқори тартибли ҳосилаларидан фаннинг, техниканинг турли соҳаларида фойдаланилади. Масалан, ҳаракатдаги жисмнинг оний тезланишини топиш ҳаракат қонунини ифодаловчи функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топиш билан ҳал этилади.

Мисол. Ушбу $y = x \cdot e^x$ функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Берилган функциянинг учинчи тартибли ҳосиласи қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned}y' &= (x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x e^x = (1+x)e^x, \\y'' &= (y')' = [(1+x)e^x]' = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = (2+x)e^x \\y''' &= (y'')' = [(2+x)e^x]' = 1 \cdot e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x\end{aligned}$$

Функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини топиш учун унинг ҳамма олдинги тартибли ҳосилаларини ҳисоблаш керак бўлади. Бироқ, айрим функцияларнинг n -тартибли ҳосилаларини бир йўла топиш имконини берадиган формулалар мавжуд. Биз қуйида бундай формулаларни келтириб чиқарамиз.

1°. $y = x^\mu$ ($x > 0$) бўлсин. Равшанки,

$$\begin{aligned}y' &= \mu x^{\mu-1}, \\y'' &= (y')' = (\mu x^{\mu-1})' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}, \\y''' &= (y'')' = (\mu(\mu-1)x^{\mu-2})' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}\end{aligned}$$

Бу муносабатлардан ихтиёрий $n \in \mathbb{N}$ учун

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

бўлишини кўриш қийин эмас (Бу формуланинг тўғрилиги математик индукция усули ёрдамида исботланади).

Хусусан, $\mu = -1$ бўлганда $y = \frac{1}{x}$ бўлиб, унинг n -тартибли ҳосиласи $y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ бўлади.

2°. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) бўлсин. Бу функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини бирин-кетин ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}y' &= a^x \ln a, \\y'' &= (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a, \\y''' &= (a^x \ln^2 a)' = a^x \ln^3 a.\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a$$

Кейинги тенгликнинг ўринлилиги математик индукция усули ёрдамида кўрсатилади.

Хусусан, $y = e^x$ бўлса, унинг n -тартибли ҳосиласи $y^{(n)} = e^x$ бўлади.

3°. $y = \sin x$ бўлсин. Бу функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини бирин-кетин ҳисоблаймиз:

$$y' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = (-\sin x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Кейинги тенгликнинг ўринлилиги математик индукция усули ёрдамида кўрсатилади.

Энди икки функция йиғиндиси, айирмаси ҳамда кўпайтмасининг юқори тартибли ҳосилаларини топиш қондаларини келтирамыз.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуктада n - тартибли $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда ушбу муносабатлар ўринли:

$$a) [c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = \text{const};$$

$$b) [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x); \quad (9)$$

$$v) [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)g'(x) + \dots + C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(n)}(x),$$

бунда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Бу тенгликларнинг бирини, масалан в) сини математик индукция усулидан фойдаланиб исботлаймиз.

Маълумки, $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$ тенглик ўринли. Демак, в) тенглик $n=1$ да тўғри.

Фараз қилайлик, в) формула $n=k$ бўлганда тўғри бўлсин:

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = f^{(k)}(x)g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x)g'(x) + \dots + f(x)g^{(k)}(x). \quad (10)$$

Энди в) тенгликнинг $n=k+1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз.

Таърифга кўра

$$[f(x)g(x)]^{(k+1)} = ([f(x)g(x)]^{(k)})'$$

бўлади.

Юқоридаги (10) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} &= [f^{(k)}(x)g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x)g'(x) + \\ &\quad + \dots + C_k^i f^{(k-i)}(x)g^{(i)}(x) + \dots + f(x)g^{(k)}(x)]' = \\ &= f^{(k+1)}(x)g(x) + f^{(k)}(x)g'(x) + C_k^1 f^{(k)}(x)g'(x) + \\ &\quad + C_k^1 f^{(k-1)}(x)g''(x) + \dots + C_k^i f^{(k-i+1)}(x)g^{(i)}(x) + \\ &\quad + C_k^i f^{(k-i)}(x) \cdot g^{(i+1)}(x) + \dots + f'(x)g^{(k)}(x) + f(x) \cdot g^{(k+1)}(x) \\ &= f^{(k+1)}(x)g(x) + (C_k^0 + C_k^1)f^{(k)}(x)g'(x) + \dots + \\ &\quad + (C_k^i + C_k^{i-1})f^{(k-i+1)}(x) \cdot g^{(i)}(x) + \dots + f(x)g^{(k+1)}(x). \end{aligned}$$

Агар $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$ тенгликни эътиборга олсак, у ҳолда ушбу

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} = f^{(k+1)}(x)g(x) + C_{k+1}^1 f^{(k)}(x)g'(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(k+1)}(x)$$

формулага эга бўламиз. Бу эса в) формуланинг $n=k+1$ да тўғрилигини билдиради. Демак, в) формула барча n лар учун тўғридир.

Одатда бу формула *Лейбниц формуласи* дейилади.

Мисол. Ушбу $y = x^2 e^x$ функциянинг 100- тартибли ҳосиласини ҳисобланг.

$f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ деб, сўнг Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= (e^x)^{(100)} x^2 + C_{100}^1 (e^x)^{(99)} (x^2)' + C_{100}^2 (e^x)^{(98)} (x^2)'' = \\ &= x^2 e^x + 200 x e^x + 100 \cdot 99 e^x. \end{aligned}$$

$f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуктада иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

5- таъриф. $f(x)$ функция дифференциали dy нинг $x \in (a, b)$ нуктадаги дифференциали функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва $d^2 f(x)$ ёки $d^2 y$ каби белгиланади.

Демак, $d^2 y = d(dy)$ ёки $d^2 f(x) = d(df(x))$.

Дифференциаллаш қондасига кўра:

$$d^2 y = d(dy) = d(y' dx) = dx d(y') = dx (y')' dx = y'' (dx)^2.$$

Шундай қилиб, функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли ҳосиласи орқали қуйидагича ёзилади:

$$d^2 y = y'' dx^2 \quad (dx^2 = dx dx = (dx)^2).$$

Функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги дифференциаллари ҳудди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуктада n - тартибли $f^{(n)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Функциянинг $(n-1)$ - тартибли дифференциали $d^{(n-1)} y$ дан олинган дифференциал $f(x)$ функциянинг x нуктадаги n - тартибли дифференциал деб аталади ва $d^n y$ ёки $d^n f(x)$ каби белгиланади.

Демак,

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Юқоридагидек бу ҳолда ҳам функциянинг n - тартибли дифференциалини унинг n - тартибли ҳосиласи орқали

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

кўринишда ёзилишини математик индукция усули ёрдамида кўрсатиш мумкин.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда берилган бўлиб, улар $x \in (a, b)$ нуктада n - тартибли $d^n f(x)$, $d^n g(x)$ дифференциалларга

эга бўлсин. У ҳолда ушбу формулалар ўринли бўлади:

$$a) [c \cdot f(x)] = cd''f(x); \quad c = \text{const};$$

$$b) d''[f(x) \pm g(x)] = d''f(x) \pm d''g(x);$$

$$в) d''[f(x) \cdot g(x)] = d''f(x) \cdot g(x) + C_1 d^{n-1}f(x) \cdot dg(x) + \dots + f(x)d''g(x).$$

7-§. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Куйида дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари деб аталувчи теоремаларни келтирамиз.

8-теорема (Ферма теоремаси). *$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, у шу интервалнинг бирор c нуқтасида ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришсин. Агар функция c нуқтада чекли ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда*

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, $f(x)$ функция c нуқтада ($c \in (a, b)$) ўзининг энг катта қийматига эришсин. Унда $\forall x \in (a, b)$ учун

$$f(x) \leq f(c),$$

яъни

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

бўлади.

Каралаётган функция c нуқтада ҳосиллага эга. Бинобарин, шу нуқтада функциянинг ўнг ҳосиласи мавжуд ва

$$f'(c+0) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (x > c), \quad (11)$$

шунингдек чап ҳосиласи мавжуд ва

$$f'(c-0) = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (x < c) \quad (12)$$

бўлиб,

$$f'(c) = f'(c+0) = f'(c-0). \quad (13)$$

(11), (12) ва (13) муносабатлардан

$$f'(c) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Функциянинг c нуқтада энг кичик қийматга эга бўлиб, унинг шу нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлганда $f'(c) = 0$ бўлиши шунга ўхшаш кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

9-теорема (Ролль теоремаси). *$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлсин. Агар*

функция (a, b) интервалда чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай c нукта ($c \in (a, b)$) топиладики,

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Бинобарин, функция шу сегментда ўзининг энг катта қиймати M ва энг кичик қиймати m га эришади ($M = \sup\{f(x)\}$, $m = \inf\{f(x)\}$; $x \in [a, b]$)

1) $m = M$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x) = \text{const}$ бўлиб, $\forall c \in (a, b)$ нуктада $f'(c) = 0$ бўлади.

2) $m < M$ бўлсин. Бу ҳолда $f(a) = f(b)$ бўлгани сабабли $f(x)$ функция ўзининг энг катта қиймати M , энг кичик қиймати m ларнинг камида биттасига (a, b) нинг бирор c нуктасида эришади. Ферма теоремасига асосан

$$f'(c) = 0$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

10-теорема (Лагранж теоремаси). $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар функция (a, b) да чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай c нукта ($c \in (a, b)$) топиладики,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш учун қуйидаги ёрдамчи

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

функцияни тузамиз. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлгани учун бу $\varphi(x)$ функция ҳам $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) да

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (14)$$

га эга бўлади.

Бевосита ҳисоблаб топамиз:

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Демак, $\varphi(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. У ҳолда шундай c нукта ($c \in (a, b)$) топиладики,

$$\varphi'(c) = 0 \quad (15)$$

бўлади. (14) ва (15) тенгликлардан

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

11-теорема (Коши теоремаси). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ учун $g'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай c нукта ($c \in (a, b)$) топилдики

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (16)$$

бўлади.

Исбот. (16) тенглик маънога эга бўлиши учун $g(b) \neq g(a)$ бўлиши керак. Бу эса теоремадаги $g'(x) \neq 0$, ($x \in (a, b)$) шартдан келиб чиқади.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ёрдамида

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

функцияни тузайлик. Бу функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз бўлиб, (a, b) да

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

ҳосиллага эга.

Сўнгра $F(x)$ функциянинг $x=a$, $x=b$ нукталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Демак, $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун шундай c нукта ($a < c < b$) топилдики, $F'(c) = 0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Бундан эса (16) тенгликнинг ўринли экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

8-§. Тейлор формуласи

$f(x)$ функция $x_0 \in R$ нуктанинг бирор атрофи $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да аниқланган бўлиб, бу атрофда $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$ ҳосилаларга эга ва $f^{(n+1)}(x)$ ҳосила x_0 нуктада узлуксиз бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \quad (17)$$

формула ўринли бўлади, бунда $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$. Бу формулани исботлаш учун, аввало қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, x_0).$$

Агар

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

эканлигини кўрсатсак (17) формула исбот бўлади. $U_\delta(x_0)$ ораликда ихтиёрий x нуктани тайинлаймиз. Фараз қилайлик $x > x_0$ бўлсин. $[x_0, x]$ ораликда ёрдамчи

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}, \quad t \in [x_0, x]$$

функцияни қарайлик.

$F(t)$ функция $[x_0, x]$ ораликда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради:

1°. $F(t)$ функция $[x_0, x]$ ораликда узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиб,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \\ &- \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \\ &+ \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (18)$$

2°. $t = x_0$ да

$$F(x_0) = f(x) - \varphi(x, x_0) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0,$$

$t = x$ да

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \\ &- \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

бўлади.

У ҳолда Ролль теоремасига кўра шундай ξ нукта мавжудки, $x_0 < \xi < x$,

$$F'(\xi) = 0$$

бўлади.

(18) тенгликдан фойдалансак,

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

бўлиб, бундан эса

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^{n+1}$$

эканлиги келиб чиқади.

Одатда (17) формула *Тейлор формуласи*, $R_{n+1}(x)$ эса *қолдиқ ҳад* (*Лагранж кўриниши*) дейилади.

Энди $f^{(n+1)}(x)$ нинг x_0 нуктада узлуксизлигидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)! (x-x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0) = 0. \end{aligned}$$

Бу эса $x \rightarrow x_0$ да $R_{n+1}(x) = 0((x-x_0))^n$ эканлигини билдиради. $R_{n+1}(x) = 0((x-x_0))^n$ қолдиқ ҳаднинг *Пеано кўриниши* дейиладди.

Тейлор формуласида $x_0 = 0$ бўлган ҳол алоҳида аҳамиятга эга:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \quad (19)$$

Одатда (19) *Маклорен формуласи* дейилади. Бу формуладан функция лимитини топиш, тақрибий ҳисоблаш масалаларида фойдаланилади.

9- §. Баъзи бир элементар функциялар учун Маклорен формуласи

1°. $f(x) = e^x$ бўлсин. Бу функция учун

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

У ҳолда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

бўлиб, унинг қолдиқ ҳади Лагранж кўринишида куйидагича

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

ёзилади. Ҳар бир $x \in [-a, a]$ да

$$|e^{\theta x}| < e^a$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да $R_{n+1}(x)$ нолга интилади.

Натижада $f(x) = e^x$ функция учун

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

тақрибий формулага эга бўламиз. Бу формуладан, хусусан, $x = 1$ бўлганда, e сонини тақрибий ҳисоблаш имконини берадиган ушбу

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

формула ҳосил бўлади.

2°. $f(x) = \sin x$ бўлсин. Маълумки бу функциянинг n -тартибли ҳосиласи учун

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

формула ўринли.

Равшанки, $f(0) = 0$ ва

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $f(x) = \sin x$ функциясининг Маклорен формуласи

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + 0(x^{2n})$$

кўринишда ёзилади.

3°. $f(x) = \cos x$ бўлсин. Бу функциянинг n -тартибли ҳосиласи учун

$$f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

формула ўринлилиги маълум. Равшанки, $f(0) = 1$ ва

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $f(x) = \cos x$ функциянинг Маклорен формуласи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1})$$

кўринишда ёзилади.

4°. $f(x) = \ln(1+x)$ бўлсин.

Бу функциянинг n -тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad f^{IV}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}.$$

Бундан

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

эканини кўриш кийин эмас. Равшанки,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Демак, $f(x) = \ln(1+x)$ функция учун Маклорен формуласи

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

кўринишда бўлади.

Маклорен формуласи ёрдамида баъзи бир функция лимитлари осон топилади. Масалан, ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

лимитни қарайлик.

e^x ва $\sin x$ функцияларнинг Маклорен формуласи бўйича ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + O(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5).$$

У ҳолда:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + O(x^3) \right] \left[x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right] - x - x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + O(x^3) - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} x^3 + O(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Ушбу бобда функциянинг ҳосилалари ёрдамида унинг лимитини топиш, ўзгариш хусусиятлари, ўсувчи ёки камаювчилиги, максимум ва минимум қийматлари, шунингдек функция графигини текшириш каби масалалар ўрганилади.

1-§. Функция лимитини топишда ҳосиланинг татбиқи

Маълумки, функцияларнинг лимитини топиш муҳим масалалардан бири бўлиб, аynи пайтда уларни ҳисоблашда анча қийинчиликлар юзага келади. Функцияларнинг ҳосилаларидан фойдаланиб уларнинг лимитларини топишни осонлаштирадиган қоидалар мавжуд бўлиб, улар *Лопитал қоидалари* дейилади. Биз қуйида шу қоидалар баёнини келтирамиз.

1-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда узлуксиз бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

2) $x \in (a, b)$ да чекли $f'(x)$, $g'(x)$ лар мавжуд;

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (k \text{ — чекли ёки чексиз}).$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ҳамда $g(x)$ функцияларнинг $x=a$ нуктадаги қийматларини нолга тенг деб оламиз

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0.$$

Натижада

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = g(a).$$

бўлиб, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x=a$ нуктада узлуксиз бўлиб қолади. Энди ихтиёрий $x \in (a, b)$ нукта олиб, $[a, x]$ сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни қараймиз. Бу сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Демак, a ва x

орасида шундай c ($a < c < x$) нукта топиладики

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

тенглик ўринли бўлади. Агар $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

кўринишга келади.

Равшанки, $x \rightarrow a$ да $c \rightarrow a$. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k.$$

Бу эса теоремани исботлайди.

М и с о л. Ушбу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$ лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда $f(x) = e^{\alpha x} - \cos \alpha x$, $g(x) = e^{\beta x} - \cos \beta x$ дейилса, улар учун 1-теорема шартлари бажарилади:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\alpha x} - \cos \alpha x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\beta x} - \cos \beta x) = 0,$$

$$2) f'(x) = \alpha [e^{\alpha x} + \sin \alpha x],$$

$$g'(x) = \beta [e^{\beta x} + \sin \beta x].$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Э с л а т м а. Юқорида келтирилган теорема $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ ва $x \rightarrow -\infty$ да ҳам ўринли.

Айтайлик

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ ва } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \text{ (чекли ёки чексиз)}$$

бўлсин. $x = \frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, $x \rightarrow \infty$ да $t \rightarrow 0$ бўлиб, $t \rightarrow 0$ да

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow 0, \quad g(x) = g\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow 0$$

бўлади.

1-теоремадан фойдаланиб толамиз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) оралиқда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- 2) $x \in (a, b)$ да чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (чекли ёки чексиз).

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Юкорида келтирилган 1-теорема $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликларни, 2-теорема эса $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни (қаралсин, 17-боб, 4-§) очиш имконини беради.

Мисол. Ушбу $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg} x}$ лимитни ҳисобланг.

Агар $f(x) = \ln(x - \frac{\pi}{2})$, $g(x) = \operatorname{tg} x$ дейилса, улар 2-теореманинг (1) — (3) шартларини қаноатлантириб,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}},$$

бўлади. Энди $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$ ифодада $f_1(x) = \cos^2 x$, $g_1(x) = x - \frac{\pi}{2}$ функциялар 1-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x (-\sin x)}{1} = 0.$$

Бундан эса

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg} x} = 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Маълумки, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция 1, 0 ва ∞ га, $g(x)$ функция эса ∞ , 0 ва 0 га интилганда

$$[f(x)]^{g(x)} (f(x) \neq 1, f(x) > 0)$$

даража кўрсаткичли ифода $1^\infty, 0^0, \infty^0$ кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди. Масалан $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$ бўлсин. Бу ҳолда $[f(x)]^{g(x)}$ 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Уни очиш учун аввало $y = [f(x)]^{g(x)}$ ифода логарифланади:

$$\ln y = g(x) \ln[f(x)].$$

Натижада $x \rightarrow a$ да $g(x) \ln[f(x)]^{\infty \cdot 0}$ кўринишдаги аниқмасликка келамиз. Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

бўлса, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ ни

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ифодалаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдек,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

бўлса, $f(x) - g(x)$ айирмани

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}$$

тарзда ифодалаб, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ ни $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

2-§. Функциянинг монотонлигини аниқлашда ҳосиланинг татбиқи

Биз куйида функция ҳосилаларидан фойдаланиб унинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилигини ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

3-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлиши учун (a, b) да

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) да чекли ҳосилага эга бўлиб, $y(a, b)$ интервалда ўсувчи (камаювчи).

Ихтиёрий $x \in (a, b)$ нукта олиб, y билан бирга $x + \Delta x \in (a, b)$ нуктани караймиз. У ҳолда $\Delta x > 0$ да $f(x) \leq f(x + \Delta x)$ ($f(x) \geq f(x + \Delta x)$),

$\Delta x < 0$ да $f(x) \geq f(x + \Delta x)$ ($f(x) \leq f(x + \Delta x)$) муносабатлар ўринли бўлиб, бу муносабатлардан

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \right) \quad (1)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилга эга бўлгани учун

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

мавжуд ва чекли.

Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

(1) муносабатдан ҳамда чекли лимитга эга бўлган функция ҳоссаларидан фойдаланиб (қаранг 18-боб, 2-§) (a, b) да

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

эканини толамиз.

Етарлилиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли ҳосилга эга бўлиб, (a, b) да

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

тенгсизлик ўринли. (a, b) да ихтиёрий x_1, x_2 нукталарни олайлик ($x_1 < x_2$). У ҳолда $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ бўлиб, $f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ сегментда Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради.

Лагранж теоремасига кўра шундай $c \in (x_1, x_2)$ нукта мавжуд бўлиб,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1)$$

тенглик ўринли бўлади. Шартга кўра

$$f'(c) \geq 0 \quad (f'(c) \leq 0), \quad x_2 - x_1 > 0.$$

Демак,

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_2) \leq f(x_1)).$$

Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) эканини билдиради.

3-§. Функциянинг экстремум қийматларини топишда ҳосиланинг татбиқи

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

1-таъриф. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0) = \{x: x \in R, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \delta > 0\} \subset (a, b)$ атрофи мавжуд бўлсаки,

$\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада максимумга (минимумга) эга дейилади, $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги максимум (минимум) қиймати ёки максимуми (минимуми) дейилади.

2-таъриф. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуктанинг шундай атрофи $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ учун

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада қатъий максимумга (қатъий минимумга) эга дейилади. $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги қатъий максимум (қатъий минимум) қиймати ёки қатъий максимуми (қатъий минимуми) дейилади.

1. Экстремумнинг зарурий шarti.

4-теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуктада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу нуктада экстремумга эришса, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуктада максимумга эришсин. Демак, таърифга кўра x_0 нуктанинг шундай $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x) \leq f(x_0)$ бўлади. У ҳолда Ферма теоремасига кўра $f'(x_0) = 0$.

Бу теорема функция экстремумга эга бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.

2. Экстремумнинг етарли шартлари.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуктада узлуксиз, унинг $U_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ атрофида чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Ушбу

$$U_\delta^-(x_0) = \{x: x \in \mathbb{R}, \quad x_0 - \delta < x < x_0\}, \quad (\delta > 0)$$

$$U_\delta^+(x_0) = \{x: x \in \mathbb{R}, \quad x_0 < x < x_0 + \delta\}, \quad (\delta > 0)$$

белгилашларни киритайлик.

а) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ функция x_0 нуктадан ўтишда ишорасини «+» дан «-» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада максимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан $f(x)$ функциянинг $U_{\delta}^{-}(x_0)$ да катъий ўсувчилиги келиб чиқади. Сўнгра $f(x)$ функциянинг x_0 да узлуксиз бўлишидан

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in U_{\delta}^{-}(x_0))$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, $\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик ўринлидир.

Энди $\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f'(x) < 0$ бўлишидан $U_{\delta}^{+}(x_0)$ да $f(x)$ функциянинг катъий камаювчилиги келиб чиқади. $f(x)$ функциянинг x_0 нуктада узлуксизлигидан эса $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ тенглик

ҳосил бўлади.

Демак, $\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун яна $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик бажарилади.

Бундан $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ учун $f(x) < f(x_0)$ бўлиб, бу эса $f(x)$ функция x_0 нуктада максимумга эга бўлишини билдиради.

б) $\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f'(x) < 0$,

$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f'(x) > 0$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуктани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада минимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан $f(x)$ функциянинг $U_{\delta}^{+}(x_0)$ да катъий камаювчилиги, $\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ да катъий ўсувчилиги келиб чиқади. $f(x)$ функциянинг x_0 нуктада узлуксизлигини эътиборга олсак, $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ учун $f(x) > f(x_0)$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $f(x)$ функция x_0 нуктада минимумга эга бўлишини билдиради.

в) Агар $\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f(x) > 0$,

$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f(x) > 0$

ёки

$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f(x) < 0$,

$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f(x) < 0$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуктани ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эга бўлмайди. $f(x)$ функция x_0 нуктанинг $U_{\delta}(x_0)$ атрофида катъий ўсувчи ёки катъий камаювчи бўлади.

Мисол. Ушбу $f(x) = 3x^2 - 2x$ функцияни экстремумга текширинг.

Берилган функциянинг $f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$ ҳосиласини нолга тенглаб

$$f'(x) = 2(3x - 1) = 0,$$

$x = \frac{1}{3}$ каралаётган функция учун стационар (критик) нукта эканлини топамиз. Энди шу нукта атрофида функция ҳосиласи ишорасини ўзгартиришини текшираемиз.

Равшанки,

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}\left(\frac{1}{3}\right) = \{x \in R: \frac{1}{3} - \delta < x < \frac{1}{3}\}, \delta > 0$$

учун

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}\left(\frac{1}{3}\right) = \{x \in R: \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \delta\} \Delta > 0$$

учун

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) > 0.$$

Демак, функциянинг ҳосиласи $x = \frac{1}{3}$ нуктадан ўтишда ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартирар экан. Берилган функция $x = \frac{1}{3}$ нуктада узлуксиз. Шундай қилиб, $f(x) = 3x^2 - 2x$ функция $x = \frac{1}{3}$ нуктада минимумга эришадиган ва

$$\min f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \quad x \in U_{\delta}\left(\frac{1}{3}\right)$$

бўлади.

Эслатма. Юқорида келтирилган экстремумнинг етарлилик шarti каралаётган функция ҳосиласининг стационар нукта атрофида ишорасини аниқлаш билан ифодаланади. Қўпинча x_0 нуктанинг атрофида $f'(x)$ нинг ишорасини аниқлаш қийин бўлади. Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлса, ҳосилаларнинг x_0 нуктадаги қийматлари ишорасига қараб ҳам функция экстремумини текшириш мумкин.

$f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуктада $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

бўлсин. Агар n — жуфт сон, яъни $n = 2m$ ($m \in N$) бўлиб,

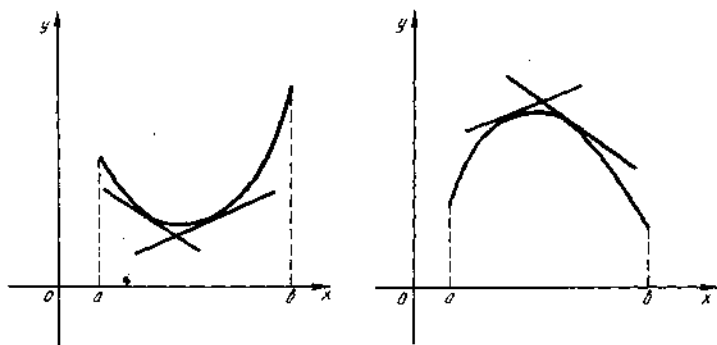
$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$ ($f^{(2m)}(x_0) > 0$) тенгсизлик ўринли бўлса,

$f(x)$ функция x_0 нуктада максимумга (минимумга) эга бўлади, агар n — тоқ сон, яъни $n = 2m + 1$ ($m \in N$), бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эга бўлмайди.

4-§. Функция графигининг кавариклиги ва ботиклиги ҳамда эгилиш нукталарини аниқлашда ҳосиланинг татбиқи

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, у шу интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $y=f(x)$ функция графигига ихтиёрий $M(x, f(x))$ ($a < x < b$) нуктада уринма мавжуд. Бу уринма $y=l(x)$ бўлсин.

3-таъриф. Агар ихтиёрий x_1, x_2 нукталар, $a < x_1 < x_2 < b$ ҳамда $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун $l(x) \leq f(x)$ ($l(x) \geq f(x)$) бўлса, $f(x)$ функция графиги (a, b) да ботик (қаварик) дейилади (82-чизма).



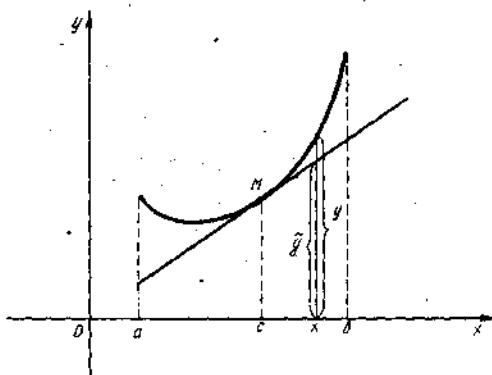
82-чизма

5-теорема. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлиб,

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

бўлса, функция графиги (a, b) да ботик (қаварик) бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик (a, b) да $f''(x) \geq 0$ бўлсин. (x_1, x_2) (a, b)



83-чизма.

ораликда ихтиёрий c нукта оламиз. Теоремани исботлаш учун $f(x)$ функция графиги $M(c, f(c))$ нуктадан ўтувчи уринмадан юқорида ётишини кўрсатиш лозим (83-чизма).

Уринмадаги ўзгарувчи нуктанинг координатлари (x, y) бўлсин. У ҳолда M нуктадан ўтувчи уринма тенгламаси:

$$\begin{aligned} \bar{y} - f(c) &= f'(c)(x - c) \text{ ёки} \\ y &= f(c) + f'(c)(x - c). \end{aligned} \quad (2)$$

Энди $f(x)$ функциянинг $x=c$ нукта атрофида Тей-

лор формуласи бўйича ёямиз:

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2, \quad (c < \xi < x). \quad (3)$$

Юкоридаги (2) ва (3) тенгликлардан

$$y - \bar{y} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

эканлигини топамиз.

$f''(x)$ нинг (a, b) да манфий бўлмаслигини эътиборга олсак, $\forall x \in (a, b)$ учун $y - \bar{y} \geq 0$, яъни $y \geq \bar{y}$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу эса $y = f(x)$ функция графиги (a, b) ораллиқда (2) уринмадан юкорида ётишини, яъни ботик эканлигини билдиради.

4- т а ъ р и ф. Агар $f(x)$ функция $U_{\delta}^{-}(x_0)$ ораллиқда қаварик (ботик) бўлиб, $U_{\delta}^{+}(x_0)$ ораллиқда эса ботик (қаварик) бўлса, y ҳолда $(x_0, f(x_0))$ нукта функция графигининг (функциянинг) эгилиш нуктаси дейилади.

$f(x)$ функция $U_{\delta}(x_0)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0) \text{ учун } f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0),$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0) \text{ учун } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, y ҳолда $U_{\delta}^{-}(x_0)$ да $f'(x)$ ўсувчи (камаювчи), $U_{\delta}^{+}(x_0)$ да камаювчи (ўсувчи) бўлиб, $f'(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эришади. y ҳолда $f''(x_0) = 0$ бўлади. Демак, $f(x)$ функциянинг эгилиш нуктасида иккинчи тартибли ҳосила $f''(x)$ нолга тенг.

М и с о л л а р. 1. Ушбу

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$$

функциянинг қаварик ва ботиклик ораллиқларини топинг.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x - 6, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Равшанки,

$$\begin{aligned} |x| > 1 &\text{ да } f''(x) > 0, \\ |x| < 1 &\text{ да } f''(x) < 0. \end{aligned}$$

Демак, $(-1, 1)$ интервалда берилган функция графиги қаварик, $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ интервалларда эса функция графиги ботик бўлади.

2. Ушбу $f(x) = xe^{-x^2}$ функциянинг эгилиш нуктаси бор ёки йўқлигини аниқланг.

Функциянинг иккинчи тартибли $f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$ ҳосила-
сини нолга тенглаб топамиз:

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Равшанки, $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ва $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ интервалларда
 $f''(x) < 0$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ ва $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ интервалларда $f''(x) > 0$.

Демак, $A(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}})$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}})$
нукталар функция графигининг эгилиш нукталаридир.

5-§. Функция графигининг асимптоталари

$f(x)$ функция $a \in R$ нуктанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

5-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи чексиз бўлса, у ҳолда $x=a$ тўғри
чирик $f(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси дейилади.

Масалан, $y = \frac{1}{x-3}$ функция учун $x=3$ тўғри чирик вертикал
асимптота бўлади.

6-таъриф. Шундай k ва b сонлари мавжуд бўлиб, $x \rightarrow +\infty$
($x \rightarrow -\infty$) да $f(x)$ функция

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса ($\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \alpha(x) = 0$), у ҳолда $y = kx + b$ тўғри

чирик $y = f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси дейилади
($k=0$ бўлса, горизонтал асимптота дейилади).

6-теорема. $f(x)$ функция графиги

$$y = kx + b$$

оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$$

муносабатларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция графиги $y = kx + b$ оғма
асимптотага эга бўлсин. У ҳолда 6-таърифга кўра $f(x) = kx + b +$
 $+\alpha(x)$ бўлиб, ($x \rightarrow +\infty$, $\alpha(x) \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k$$

ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b$$

бўлади.

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

лимитлар ўринли бўлсин. У ҳолда $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ дан $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ ($x \rightarrow +\infty$, $\alpha(x) \rightarrow 0$) келиб чиқади. Демак, $x \rightarrow +\infty$ да

$$f(x) = kx + b + \alpha(x).$$

Бу эса $y = kx + b$ тўғри чизик $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканини билдиради.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$ функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

Равшанки,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 + 2x}{x - 1} = 3. \end{aligned}$$

Демак, $k=2$, $b=3$ бўлиб, бу эса $y=2x+3$ тўғри чизик функция графигининг оғма асимптотаси эканини билдиради.

6- §. Функцияларни текшириш ва графикларини чизиш

Функцияларни текшириш ва улар графикларини чизишни қуйидаги қоидалар бўйича амалга ошириш мақсадга мувофиқдир:

- 1°. Функциянинг аниқланиш ҳамда қийматлар тўпламини топиш;
- 2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;
- 3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;
- 4°. Функцияни монотонликка текшириш;
- 5°. Функцияни экстремумга текшириш;
- 6°. Функция графигининг каварик ҳамда ботиклик оралиқларини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;
- 7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;
- 8°. Агар имконият бўлса, функциянинг абсцисса ҳамда ордината ўқлари билан кесишадиган (агар улар мавжуд бўлса) нуқталарини

топиш ва аргумент x нинг характерли нукталарида функция кийматларини ҳисоблаш.

М и с о л. Ушбу $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ функцияни текширинг ва графигини

чизинг.

Берилган функция $X = \{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\}$ тўпламда аниқланган. Бу функция учун $f(-x) = f(x)$ тенглик бажарилганлигидан у жуфтдир. Демак, функция графиги Oy ўкига нисбатан симметрик бўлиб, уни $[0, +\infty]$ ораликда текшириш kifоя.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари мос равишда

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

Биринчи тартибли ҳосила $[0, +\infty)$ оралиқнинг $x=1$ нуктасидан бошқа барча нукталарида аниқланган ва $x=0$ нуктада нолга айланади, яъни $f'(0) = 0$. Иккинчи тартибли ҳосила учун $f''(0) = -4 < 0$ бўлиб, бу $f(x)$ функциянинг $x=0$ нуктада максимумга эришишини билдиради. Бинобарин максимум киймат $f(0) = -1$ бўлади.

Энди $\{(0, 1) \cup (1, +\infty)\}$ тўпламда $f'(x) < 0$ эканлигидан $f(x)$ функциянинг камаювчилиги келиб чиқади.

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

бўлиб, бу $x = \pm 1$ нукталар функциянинг иккинчи тур узилиш нукталари, шу билан бирга $x = \pm 1$ тўғри чизиклар берилган функция учун вертикал асимптоталар эканини билдиради. 6-теоремага кўра

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

муносабатлардан $y=1$ тўғри чизик $f(x)$ функция графигининг асимптотаси бўлади.

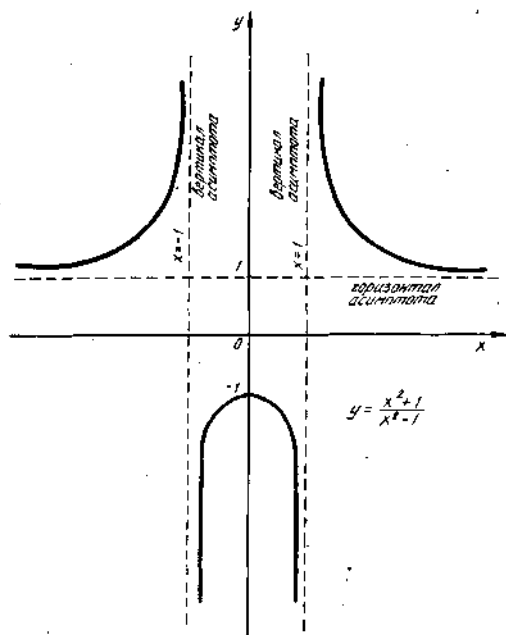
Энди функция графигининг эгилиш нуктасининг бор ёки йўқлигини текшираимиз.

Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x) = \frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$, $1+3x^2 \neq 0$, бўлганидан $f''(x) \neq 0$ ($x \in R$) эканини

топамиз. Бундан эса функция графигида эгилиш нуктаси йўқлиги келиб чиқади. Иккинчи тартибли ҳосила учун

$$\begin{array}{ll} [0, 1) & \text{да} \quad f''(x) < 0, \\ (1, +\infty) & \text{да} \quad f''(x) \geq 0 \end{array}$$

тенгсизликлар ўринли. Демак, функция графиги $[0, 1)$ да каварик, $(1, +\infty)$ да ботик. Бу маълумотлардан фойдаланиб функция графигини чизамиз (84- чизма).



84- чизма.

АДАБИЁТЛАР

1. В. С. Шипачев. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1990.
2. В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. Краткий курс высшей математики. М. Наука. 1986.
3. И. А. Зайцев. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1991.
4. И. Н. Баврин. Высшая математика. М., «Просвещение», 1980.
5. Г. Симпер. Математика для географов. М., «Высшая школа», 1981.
6. Ю. Н. Гильдербанд. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск, 1974.
7. А. И. Карсеп, З. М. Аксюткина, Т. И. Савелев. Курс высшей математики для экономических Вузов. М., «Высшая школа», часть I, II. 1982, 1983.
8. О. В. Мантуров, Н. М. Матвеев. Курс высшей математики. М., «Высшая школа», 1986.
9. Ё. У. Соатов. Олий математика. Тошкент, «Ўқитувчи», 1993.
10. А. А. Гусак. Задачи и упражнения по высшей математике. I. Минск, «Вышэйшая школа», 1988.
11. Д. К. Фадеев. Лекции по алгебре. М. «Наука», 1984.
12. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Аналитическая геометрия. М., «Наука», 1968.
13. Т. Амаров, Х. Мансуров. Математик анализ, I. Тошкент. «Ўқитувчи», 1986.
14. А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойбергандов, А. Ворисов, Р. Гуломов. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. I. Тошкент, «Ўзбекистон», 1993.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
----------	---

Дастлабки маълумотлар

1-боб. Ҳақиқий сонлар	5
1-§. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар	5
2-§. Ҳақиқий сонлар	9
3-§. Текисликда Декарт ҳамда кутб координаталари системаси	18
2-боб. Функция	21
1-§. Функция тушунчаси	21
2-§. Чегараланган функциялар	24
3-§. Жуфт ва тоқ функциялар	26
4-§. Монотон функциялар	28
5-§. Даврий функциялар	29
6-§. Тескари функция. Мураккаб функция	30
7-§. Элементар функциялар	32
3-боб. Тенгламалар	38
1-§. Умумий маълумотлар	38
2-§. Рационал тенгламалар	40
3-§. Иррационал, кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар	45
4-§. Тригонометрик тенгламалар	50
4-боб. Тенгсизликлар	52
1-§. Умумий маълумотлар	52
2-§. Рационал тенгсизликлар	54
3-§. Иррационал, кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар	56

Алгебра

5-боб. Детерминант ва уларнинг хоссалари.	60
1-§. Детерминантлар	60
2-§. Детерминантларнинг хоссалари	62
3-§. Детерминантларни ҳисоблаш	67
6-боб. Матрицалар	70
1-§. Матрица тушунчаси	70
2-§. Матрицалар устида амаллар ва уларнинг хоссалари	72
3-§. Матрицанинг ранги	79
4-§. Тескари матрица	84
7-боб. Чизикли тенгламалар системаси	89
1-§. Икки ва уч номаълумли чизикли тенгламалар системаси	89

2-§. <i>l</i> та номулдумли чизикли тенгламалар системаси	96
3-§. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси	100
4-§. Чизикли тенгламалар системасининг умумий кўриниши	101
8-б о б. Комплекс сонлар	107
1-§. Комплекс сон тушунчаси	107
2-§. Комплекс сонлар устида арифметик амаллар	107
3-§. Комплекс сонни геометрик тасвирлаш	109
9-б о б. Юқори даражали тенгламалар	113
1-§. Кўпхадлар	113
2-§. Алгебранинг асосий теоремаси	114
3-§. Юқори даражали тенгламаларни ечиш	115

Аналитик геометрия

10-б о б. Аналитик геометриянинг содда масалалари	126
1-§. Текисликда икки нукта орасидаги масофа	126
2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш	127
3-§. Учбурчакнинг юзини топиш	128
11-б о б. Тўғри чизик тенгламалари	130
1-§. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси	130
2-§. Тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси	133
3-§. Тўғри чизикнинг кесмалар бўйича тенгламаси	134
4-§. Тўғри чизикнинг нормал тенгламаси	135
12-б о б. Тўғри чизикка оид масалалар	138
1-§. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак	138
2-§. Икки тўғри чизикнинг параллеллик ҳамда перпендикулярлик шарти	139
3-§. Берилган нуктадан берилган тўғри чизиккача бўлган масофа	140
4-§. Берилган нуктадан ўтувчи тўғри чизиклар дастасининг тенгламаси	141
13-б о б. Иккинчи тартибли эгри чизиклар	143
✓1-§. Айлана	143
✓2-§. Эллипс	144
✓3-§. Гипербола	146
✓4-§. Парабола	146
✓5-§. Иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси	149
14-б о б. Фазода аналитик геометриянинг асосий тушунчалари ва масалалари	157
1-§. Икки нукта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш	158
2-§. Фазода-текислик ва унинг хоссалари	159
3-§. Фазода тўғри чизик ва унинг тенгламаси	161
4-§. Фазода текислик ва тўғри чизикларга оид масалалар	164
15-б о б. Иккинчи тартибли сиртлар	168
1-§. Сфера	168
2-§. Эллипсоид	168
3-§. Параболоид	170
4-§. Гиперболоидлар	171
5-§. Конус	173
6-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламаси	173
16-б о б. Векторлар	176
1-§. Векторлар фазоси. Векторлар устида арифметик амаллар	177

2-§. Векторнинг проекцияси, йуналтирувчи косинуслар	178
3-§. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси	179
4-§. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари	180
5-§. Векторлар назариясининг татбиқлари	181

Математик анализ

17-б о б. Натурал аргументли функция ва унинг limiti	186
1-§. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси	186
2-§. Сонлар кетма-кетлигининг limiti	190
3-§. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари	196
4-§. Сонлар кетма-кетликларни limitiни ҳисоблаш	198
18-б о б. Функция limiti	201
1-§. Функция limiti таърифлари	201
2-§. Чекли limitга эга булган функцияларнинг хоссалари	208
3-§. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар	209
4-§. Функцияларни таққослаш	211
5-§. Функция limiti мавжудлигига оид теоремалар	211
6-§. Функция limitiни ҳисоблашга оид мисоллар	214
19-б о б. Функциянинг узлуксизлиги	218
1-§. Функция узлуксизлиги таърифлари	218
2-§. Функция узилиши	221
3-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари	224
4-§. Элементар функцияларнинг узлуксизлиги	228
5-§. Функциялар limitiни ҳисоблашда уларнинг узлуксизлигидан фойдаланиш	230
20-б о б. Функциянинг ҳосила ва дифференциали	233
✓ 1-§. Функция ҳосиласининг таърифи	233
✓ 2-§. Функция ҳосиласининг геометрик ҳамда механик маънолари	237
✓ 3-§. Элементар функцияларнинг ҳосилалари	239
✓ 4-§. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қондалари. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	242
✓ 5-§. Функциянинг дифференциали	247
✓ 6-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	251
✓ 7-§. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари	255
8-§. Тейлор формуласи	257
9-§. Баъзи бир элементар функциялар учун Маклорен формуласи	259
21-б о б. Дифференциал ҳисобнинг баъзи бир татбиқлари	262
1-§. Функция limitiни топишда ҳосиланинг татбиқи	262
2-§. Функциянинг монотонлигини аниқлашда ҳосиланинг татбиқи	265
3-§. Функциянинг экстремум қийматларини топишда ҳосиланинг татбиқи	266
4-§. Функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги ҳамда эгилиш нуқталарини аниқлашда ҳосиланинг татбиқи	270
5-§. Функция графигининг асимптоталари	272
6-§. Функцияларни текшириш ва графикаларини чизиш	273
<i>Адабиётлар</i>	276

*Тўхтамурод Жўраев, Азимбой Саъдуллаев,
Гулмирза Худойбергенов, Хожиақбар Мансуров,
Азизжон Ворисов*

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

На узбекском языке

Учебник для студентов университетов
Издательство «Ўзбекистон» — 1995, Ташкент, 700129,
Навой, 30

Бадний муҳаррир Ж. Гурова
Техник муҳаррир М. Хужалқулова
Мусаххих Ш. Орипова

Теришга берилди 4.04.94. Босишга рухсат этилди 14.04.95. Бичими 60×90^{1/16}.
№ 2 босма қоғозида «Литературная» гарнитурда юкори босма усулида босилди.
Шартли бос. л. 17,5. Нашр т. 17,3. 5000 нускада чоп этилди. Буюртма № 513. Бахоси
шартнома асосида «Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30,
Нашр № 21—94

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот кўмитасининг ижарадаги Ташполиграф
комбинатида босилди. Тошкент, Навоий кўчаси, 30 1995.